



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

VALORACIÓN DE OPCIONES EN MERCADOS INCOMPLETOS

PRESENTADO POR:
JOSÉ ROBERTO URRIOLA
CÉDULA: 8-910-1139

ASESOR:
PEDRO A. MARRONE G.

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO A LA UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

REPÚBLICA DE PANAMÁ

2025

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	vii
Introducción	1
0.1. Origen de la Matemática Financiera	3
0.2. Aportes Clásicos	3
0.3. Conexiones Interdisciplinarias	4
0.4. El Origen de la Matemática Financiera y su Vínculo con la Física Moderna	4
0.4.1. La Huella de Bachelier en la Economía Moderna	4
0.4.2. Einstein, Avogadro y la Medición del Mundo Molecular	4
0.4.3. Max Planck, los Cuantos y la Polémica del Nobel	5
0.4.4. Del Pionero Bachelier a la Revolución Cuantitativa	5
0.5. El Resto de la Historia: Cómo Veinte Años Transformaron las Finanzas	5
0.5.1. La Revolución de Markowitz: Diversificar con Inteligencia	6
0.5.2. Sharpe, la Extensión hacia el Mercado	6
0.5.3. De la Intuición a la Formalización: Samuelson y la Economía Ma- temática	6
0.5.4. De la Teoría al Impacto: Eficiencia, Arbitraje y Precio de Activos	6
0.6. 1973: El Nacimiento de una Nueva Era	7
0.7. El Origen Milenario de las Opciones Financieras	7
0.7.1. Opciones en Acción: De Tales de Mileto al Mercado Moderno	7
0.8. Stock Warrants y la Transición hacia las Finanzas Modernas	8
0.8.1. 1973: El Año que Redefinió las Finanzas	8
0.9. ¿Por qué Importa la Fórmula de Black-Scholes?	9
0.9.1. La Colaboración de Black y Scholes	9
0.10. ¿Qué es una Cartera Replicadora?	10
0.10.1. Ejemplo Simplificado	10
0.11. La Matemática Financiera Hoy	11
0.12. Conclusión	11

1. Nociones de Matemáticas Financieras	12
1.0.1. Estrategias de negociación	12
1.0.2. Reclamos Contingentes y Medidas Equivalentes de Martingala . . .	13
1.0.3. Arbitraje y viabilidad del mercado	14
1.0.4. Replicación y completitud del mercado	15
1.0.5. Valoración en mercados incompletos	15
1.0.6. Medidas de riesgo	16
1.0.7. Aprendizaje por refuerzo y programación dinámica	17
1.0.8. Fundamentos de aprendizaje automático	21
1.0.9. Optimización y aprendizaje	23
1.0.10. Características del SGD	23
1.1. Algoritmo Adam	24
1.1.1. Características del Adam	25
2. Discusión Parte 1: Precio de Riesgo Equitativo	29
2.0.1. Existencia y Unicidad del PRE	29
2.0.2. Compatibilidad con esquema de mercados completos	33
3. Discusión Parte 2: Formulación dinámico discreta	36
3.0.1. Formulación dinámico discreta bajo el peor escenario posible	36
3.0.2. Intervalo de Precio Justo	37
3.0.3. Planteamiento Dinámico Discreto para el Marco de Fijación de Precio Riesgo Equitativo	39
4. Discusión Parte 3: Aplicaciones y Simulación Numérica	46
4.0.1. PRE con dos redes neuronales	48
4.0.2. Riesgo de lado largo y corto con dos redes neuronales	49
4.0.3. Fijación de precios bajo PRE y medida de ϵ -completitud con dos redes neuronales	50
4.0.4. Procedimiento de optimización de redes neuronales	51
4.0.5. Algoritmo de cobertura profunda	51
4.0.6. Optimización de los parámetros	51
4.0.7. Procedimiento numérico	51
4.0.8. Modelo de cambio de régimen	52
4.0.9. Estructura de la red neuronal	52
4.0.10. Modelo de Black-Scholes discreto	53
4.1. Aplicación: Cobertura de Opciones con Redes Neuronales	53
5. Conclusión	57

A. Fundamentos de Finanzas	58
A.0.1. Cartera	58
A.0.2. Bolsa de Valores	59
A.0.3. Opciones	61
A.0.4. Gestión de cartera	62
A.0.5. Tipos de Opciones	63
A.0.6. Arbitraje	67
A.0.7. Cobertura	71
A.0.8. Profundidad del Mercado y Riesgo Residual	74
A.0.9. Cartera Replicadora	75
A.0.10. Relevancia a Panamá	75
A.0.11. Crisis del 2008	76
B. Fundamentos de Teoria de Medida y Procesos Estocásticos	78
B.0.1. Teoría de medida	78
B.0.2. Espacios medibles y σ -álgebras	78
B.0.3. Álgebras y σ -álgebras generadas	79
B.0.4. Conjuntos de Borel	79
B.0.5. Medidas y espacios de medida	81
B.0.6. Conjuntos de medida cero y completitud	81
B.0.7. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$	82
B.0.8. Funciones medibles	83
B.0.9. Integración	83
B.0.10. Integrabilidad según Lebesgue	84
B.0.11. Funciones simples e integración	84
B.0.12. Integral de Lebesgue para funciones positivas	85
B.0.13. Teoremas fundamentales de convergencia	85
B.0.14. Probabilidad y Procesos Estocásticos	86
B.0.15. Espacios de probabilidad	86
B.0.16. Variables aleatorias	87
B.0.17. Procesos estocásticos	88
B.0.18. Filtraciones y adaptabilidad	88
B.0.19. Esperanza condicional	88
B.0.20. Martingalas	89
B.0.21. Aplicaciones a las finanzas	90
B.1. Teoremas importantes del análisis funcional	90
B.2. Teorema de Hahn-Banach	90
B.2.1. Versión analítica	90
B.2.2. Versión geométrica	91

C. Valoración de Opciones en Mercados Completos	92
C.1. Movimiento browniano y cálculo estocástico	92
C.1.1. Fundamentos matemáticos	92
C.1.2. Movimiento browniano estándar	93
C.1.3. Movimiento browniano geométrico	95
C.1.4. Integral estocástica de Itô	95
C.1.5. Procesos de Itô y fórmula de Itô	98
C.2. Modelo de valoración de activos financieros	101
C.2.1. Modelo CAPM	101
C.2.2. Valoración neutral al riesgo	102
C.3. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein	103
C.3.1. Construcción del modelo binomial	103
C.4. Modelo de Black-Scholes	105
C.4.1. Supuestos del modelo	105
C.4.2. Derivación de la ecuación de Black-Scholes	106
C.4.3. Solución de la ecuación de Black-Scholes	109
C.5. Teoremas fundamentales	114
C.5.1. Teorema de Lévy	114
C.5.2. Teorema de Girsanov	114
C.6. Teorema Fundamental de Valoración de Activos	115
C.6.1. Marco general	115
C.6.2. Recuperación de Black-Scholes	116
Referencias	118

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres por su apoyo, a través de los años, a mis amigos y también a mis jefes que me han apoyado en los estudios, a la par que estuve trabajando estos años.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este escrito es desarrollar un proyecto de investigación que gira en torno a la valoración de opciones en mercados incompletos, lo que representa una extensión de uno de los resultados más importantes de las matemáticas financieras: el Teorema Fundamental de la Valoración de Activos.

Un mercado se dice incompleto informalmente cuando no hay arbitraje y, además, hay múltiples formas de medir el riesgo, las cuales pueden ser distintas para las partes en una transacción dada.

En este escrito se presentan ejemplos de aplicaciones financieras de las nociones de análisis real, análisis funcional, teoría de medida e integración, análisis numérico, teoría de probabilidad y procesos estocásticos, procesos de Markov, programación dinámica, entre otros.

En concreto, buscamos cómo obtener mejores precios para la valoración de opciones, lo que permitirá transacciones más justas entre vendedores y compradores. Es conocido que las opciones se dan en al menos dos tipos: las opciones americanas y las opciones europeas.

Por razones de simplicidad, nos circunscribimos a opciones europeas. Más adelante definiremos lo que son opciones europeas.

Este escrito está basado en los siguientes artículos:

- Equal Risk Pricing under convex trading constraints (Guo, Ivan; Zhu, Song-Ping (2017) - Equal Risk Pricing under Convex Trading Constraints; Journal of Economic Dynamics and Control, pages 136-151.)
- Equal risk pricing and hedging of financial derivatives with convex risk measures (Marzban, Saeed; Delgado Erick (2022) - Equal risk pricing and hedging of financial derivatives with convex risk measures; Quantitative Finance, Vol 22(1), pages 47-73)
- Equal risk pricing of derivatives with deep hedging (Carbonneau, Alexander and Godin, Frederick (2020) - Equal risk pricing of derivatives with deep hedging; Quantitative Finance Vol 21 (4), pages 1 – 16.)

Problema a Resolver

En este escrito vamos a tratar con los conceptos de mercado completo e incompleto.

Estos son modelos de mercados financieros donde no hay posibilidad de arbitraje, pero en los cuales en el primer caso hay una única forma de medir el riesgo, y en el segundo caso hay muchas maneras de medirlo.

Nuestro tema de investigación es extender la valoración de opciones europeas a los mercados incompletos, y de forma muy estrechamente relacionada a la valoración, ver una clase particular de estrategias de intercambio bajo este esquema, que son las estrategias de *cobertura* para compradores y escritores de opciones.

Estas estrategias de intercambio son las que permiten a los participantes del mercado manejar y mitigar sus riesgos al invertir en activos de capital, y lo hacen mediante el uso de opciones.

La noción de mercado completo está intuitivamente relacionada a la noción de mercado profundo.

Ya que si un mercado tiene mayor profundidad, entonces una mayor cantidad de transacciones son posibles en la práctica y en menor tiempo. Así también, el grado de incompletitud de un mercado es mayor si el mercado no es profundo. Esta noción de grado de incompletitud la discutiremos en mayor detalle en el capítulo. 4.

Aún en los mercados más grandes del mundo y de mayor profundidad, en ciertas situaciones se tiene la propiedad de que hay transacciones que no se pueden realizar, pero estas son condiciones extremas de mercado.

La mayor parte de los mercados que existen en el mundo no son profundos porque no manejan los volúmenes de transacciones como para serlo, pero hay diversos grados de profundidad. Por eso es más importante tener técnicas para trabajar en mercados menos profundos.

Sin embargo, más allá de eso, la noción de mercado completo es teórica ya que, aún en el caso de un mercado muy profundo, un mercado completo no toma en cuenta fricciones como los costos de transacción o maneja restricciones sobre las reglas de intercambio, como prohibiciones sobre la venta en corto (ver Anexo A, pag.60).

También, en la práctica sí pueden existir riesgos asimétricos entre compradores y vendedores de una opción (Definición 2.0.3). Por ende, lo más cercano a la realidad sería trabajar en base a mercados incompletos.

El problema que se investiga es cómo proporcionar la mejor valoración posible de opciones europeas en el caso de mercados incompletos, tanto respecto a la medida de riesgo en el peor escenario posible (Definición 3.0.1), como a una medida de riesgo física (aceptada por el mercado).

Es decir, se busca una medida particular que, adicionalmente, permita calcular dichos precios para las opciones en la práctica. Esto se logra introduciendo la noción de precio de riesgo equitativo, donde se demuestra, en primer lugar, que existe un precio tal que, si

las medidas de riesgo consideradas son convexas, dicho precio asegura que el escritor y el comprador de la opción comparten los riesgos irreducibles de forma equitativa (Guo y Zhu (2017)).

A partir de esto, se analiza que, en el caso del peor escenario posible, sigue existiendo este precio y se pueden plantear ecuaciones dinámico-discretas mediante la formulación de Bellman, las cuales permiten, en teoría, calcular los precios. Además, se discuten algoritmos que ofrecen una idea de la eficiencia de este precio de riesgo equitativo (Marzban y col. (2022)).

Nuestro escrito presenta un algoritmo explícito que transforma el problema de programación dinámica en un problema de “aprendizaje profundo por refuerzo” que permite calcular los precios de opciones en la práctica con respecto a una medida de riesgo física, basándonos en la teoría de Carbonneau y Godin (ver Carbonneau y Godin (2021)).

Para complementar lo dicho anteriormente, en los apéndices presentamos un capítulo que explica las nociones clásicas de las matemáticas financieras en el caso de los mercados completos, así como fundamentos de finanzas y fundamentos de teoría de medida, probabilidad y procesos estocásticos.

0.1. Origen de la Matemática Financiera

Aunque a veces la asociamos con modelos modernos y gráficos de Wall Street, la matemática financiera tiene raíces que se extienden miles de años atrás. El concepto de rédito o interés es tan antiguo como la civilización misma. Ya los sumerios y más tarde el rey Hammurabi en la Babilonia de hace cuatro mil años establecían reglas sobre préstamos e intereses. Incluso el Imperio Romano los aplicaba en sus transacciones.

A lo largo de los siglos, esta disciplina ha evolucionado gracias a mentes brillantes que sentaron sus bases. En el siglo XVI, Simon Stevin revolucionó el cálculo financiero al introducir las fracciones decimales, simplificando la forma en que se realizaban descuentos e intereses. Poco después, Edmund Halley, más conocido por el cometa que lleva su nombre, elaboró tablas de interés que servirían para cálculos actuariales.

Matemáticos como Fibonacci aportaron al desarrollo comercial al introducir el sistema hindú-arábigo en Europa y proponer métodos para contabilizar transacciones de manera más precisa, dando paso al sistema de doble entrada contable.

0.2. Aportes Clásicos

Ya en el siglo XVIII, Abraham de Moivre y Thomas Simpson publicaron obras fundamentales como *The Doctrine of Chance*, *The Nature and Laws of Chance*, y *The Doctrine of Annuities and Reversions*. Estos textos abordaban probabilidad, anualidades y cálculos ac-

tuariales, formalizando técnicas que hoy consideramos esenciales en la gestión del riesgo financiero.

0.3. Conexiones Interdisciplinarias

La historia de la matemática financiera está íntimamente ligada al cálculo actuarial y al mundo de los seguros. Ambas disciplinas comparten una preocupación central: el manejo del riesgo. Tal como lo documentan Akyilirim, Erdnic y Soner en su publicación *A Brief History of Mathematics in Finance* (Borsa Istanbul Review, 2014), el desarrollo de estas áreas ha seguido caminos paralelos, nutriéndose mutuamente.

0.4. El Origen de la Matemática Financiera y su Vínculo con la Física Moderna

En el año 1900, Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier presentó su tesis doctoral bajo la tutela del célebre matemático Henri Poincaré. Titulada *Théorie de la spéculation* (Teoría de la especulación), esta obra marcó un hito: por primera vez se utilizó el movimiento browniano como modelo para explicar la fluctuación de precios financieros, anticipando el desarrollo posterior de los procesos estocásticos.

Lo fascinante es que solo cinco años más tarde, en 1905, Albert Einstein publicó su célebre estudio sobre el efecto fotoeléctrico que también describe el movimiento browniano el cual le valió el Premio Nobel en 1921.

0.4.1. La Huella de Bachelier en la Economía Moderna

Aunque la tesis de Bachelier sobre las caminatas aleatorias precedió al estudio de Einstein en cinco años, su relevancia solo fue reconocida décadas después, cuando Andrey Kolmogorov la destacó ante Paul Lévy, y más tarde Leonard Jimmie Savage la tradujo al inglés, llevándola al radar de Paul Samuelson, premio Nobel de Economía en 1970. Los conceptos de Bachelier también se anticiparon a la hipótesis de mercados eficientes formulada por Eugene Fama, cuya idea central descansa precisamente en la aleatoriedad informada de los mercados. El trabajo de Bachelier se considera así una base esencial del modelo de Black-Scholes.

0.4.2. Einstein, Avogadro y la Medición del Mundo Molecular

En 1905, Einstein derivó matemáticamente el movimiento browniano, relacionando el coeficiente de difusión con constantes físicas como la de Boltzmann, la viscosidad del me-

dio y el tamaño de la partícula. Este avance permitió medir la constante de Boltzmann, y a partir de ella, estimar el número de Avogadro utilizando la constante de los gases ideales R . Este vínculo entre física y matemáticas dio origen a dos campos interconectados: los procesos estocásticos en física y el problema de caminata aleatoria en matemáticas.

Pero la historia se remonta aún más atrás: en 1811, Amedeo Avogadro propuso que una mole de sustancia contiene un número fijo de partículas, lo que hoy llamamos número de Avogadro $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Aunque esta constante fue originalmente una hipótesis, fue medida por primera vez en 1909 por Jean Perrin utilizando la formulación de Einstein, hecho que le valió el Nobel en 1926.

0.4.3. Max Planck, los Cuantos y la Polémica del Nobel

En paralelo, en 1900, Max Planck sentó las bases de la teoría cuántica al estudiar la radiación de cuerpos negros. Propuso que la energía se absorbe y emite en paquetes discretos llamados “cuantos”. Esta idea sería clave para entender el efecto fotoeléctrico que más tarde Einstein explicaría. Planck recibió el Nobel en 1918, lo que añadió una nota de controversia al galardón concedido a Einstein en 1921 (formalizado en 1922) Friedman (2022).

0.4.4. Del Pionero Bachelier a la Revolución Cuantitativa

Finalmente, volvemos a Bachelier, considerado el primer académico en abordar formalmente la matemática financiera. Esta disciplina no se consolidó hasta los años setenta, con el desarrollo de la teoría de precios de opciones por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton. La inversión cuantitativa también tomó impulso gracias a Edward Thorp, quien aplicó métodos estadísticos desde el blackjack hasta los mercados financieros. Por todo ello, Louis Bachelier es justamente reconocido como el padre de la matemática financiera.

0.5. El Resto de la Historia: Cómo Veinte Años Transformaron las Finanzas

La evolución de las teorías financieras modernas tiene dos momentos clave, ambos gestados en universidades estadounidenses: la aparición de la Teoría de Optimización de Cartera en los años 50 y la formulación matemática para el precio de opciones en los años 70, desarrollada por Black, Scholes y Merton. Entre ambos hitos, destaca la figura de Paul Samuelson, responsable de traducir las intuiciones económicas al lenguaje riguroso de las matemáticas.

0.5.1. La Revolución de Markowitz: Diversificar con Inteligencia

En 1952, Harry Markowitz publicó en el *Journal of Finance* una versión de lo que luego sería su tesis doctoral. Su propuesta, la Teoría Moderna de Portafolio, cambió el paradigma de inversión: no bastaba analizar activos por su rendimiento y riesgo individual, era necesario considerar la relación entre ellos mediante la covarianza.

En otras palabras, no se trataba solo de elegir los activos más rentables, sino de construir carteras que optimizaran la relación entre retorno y riesgo, aplicando técnicas como el análisis de media-varianza y regresión lineal, antes de llegar al proceso de optimización. Esto implicaba maximizar el rendimiento esperado sin superar un nivel de riesgo aceptable.

0.5.2. Sharpe, la Extensión hacia el Mercado

Markowitz fue acompañado en esta cruzada por William Sharpe, quien en 1990 recibió el Nobel junto a él y Merton Miller. Sharpe profundizó la teoría al incorporar la relación entre cada activo y el mercado en su conjunto, dando lugar al célebre modelo CAPM.

0.5.3. De la Intuición a la Formalización: Samuelson y la Economía Matemática

La piedra angular en este proceso fue Paul Samuelson, quien desde el MIT impulsó una economía matemática, con raíces en los trabajos pioneros de Bachelier sobre caminatas aleatorias. Samuelson fue el primero en demostrar que los mercados, bajo ciertas condiciones, reflejan toda la información disponible: una idea que años después Eugene Fama consolidaría en la Hipótesis del Mercado Eficiente.

Además, Samuelson aportó con sus modelos de utilidad esperada y optimización estocástica, fundamentos clave que influenciaron directamente a Markowitz. Si bien el CAPM se atribuye a Sharpe, Lintner y Mossin, muchos de sus conceptos derivan del marco teórico desarrollado por Samuelson.

0.5.4. De la Teoría al Impacto: Eficiencia, Arbitraje y Precio de Activos

Samuelson también dejó huella en el análisis de arbitraje y equilibrio de mercado, pilares de la *Arbitrage Pricing Theory* de Stephen Ross. El uso del cálculo estocástico y la optimización dinámica permitió a los economistas definir con precisión el valor de los activos financieros.

Al final, su obra ayudó a establecer que el riesgo relevante no es el idiosincrático (propio de cada activo), sino el sistémico: aquel que no se puede diversificar y, por tanto, debe ser remunerado.

0.6. 1973: El Nacimiento de una Nueva Era

El gran salto ocurrió en 1973 con la publicación del artículo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, de Fischer Black y Myron Scholes, con el aporte esencial de Robert Merton. Por primera vez se contó con una fórmula, la de Black-Scholes, para valorar opciones europeas, basada en herramientas matemáticas sofisticadas: procesos estocásticos, martingalas, propiedades de Markov, e incluso el cálculo de Itô.

Esta fórmula permitió a la industria financiera diseñar, valorar y cubrir productos derivados de forma sistemática, abriendo la puerta a una explosión de innovación que solo podía sostenerse con una nueva disciplina: la Matemática Financiera. Un campo en constante evolución que se ha convertido en el lenguaje común para abordar los desafíos complejos de los mercados globales.

0.7. El Origen Milenario de las Opciones Financieras

Una opción es un instrumento financiero cuyo valor depende de un activo subyacente. Esta definición, en apariencia simple, ha transformado profundamente la manera en que se gestiona el riesgo en los mercados.

Uno de los antecedentes más antiguos del concepto de opción puede rastrearse en el Código de Hammurabi, redactado entre 1755 y 1751 a. C. por el sexto rey de Babilonia. Este conjunto de 282 leyes sentó las bases de una sociedad ordenada y justa, e introdujo principios como la *lex talionis* ("ojo por ojo, diente por diente") y la presunción de inocencia.

El artículo 48 merece una atención especial. Establece:

"Si alguien debe una deuda por un préstamo, y una tormenta destruye el grano, o la cosecha falla, o el grano no crece por falta de agua, en ese año no necesita darle a su acreedor ningún grano como pago, lava su tabla de deudas en agua y no paga renta por ese año."

Aunque no menciona indemnizaciones ni términos financieros modernos, este principio reconoce un derecho contingente del deudor: si la cosecha fracasa, puede optar por no pagar. El riesgo no desaparece, simplemente cambia de manos. Es un contrato rudimentario, pero ingenioso.

0.7.1. Opciones en Acción: De Tales de Mileto al Mercado Moderno

Siglos más tarde, Tales de Mileto aplicó de forma brillante un acuerdo opcional: pagó por adelantado el uso exclusivo de prensas de aceitunas, anticipando una excelente cosecha. Así, sin tierras ni cultivos propios, se benefició de su visión y estrategia.

El primer mercado organizado de opciones surgió en Holanda en el siglo XVII, durante la fiebre de los tulipanes. Allí, tanto compradores como agricultores utilizaban opciones para fijar precios futuros, reduciendo la incertidumbre en un entorno volátil.

Este uso estratégico comenzó a extenderse. Durante la guerra civil de EE. UU. (1861–1865), el Norte enfrentó el reto logístico de abastecer a sus tropas y caballos. Una de sus claves de éxito fue garantizar, mediante contratos opcionales, el suministro oportuno de avena.

Esta innovación fue posible gracias al Chicago Board of Trade, fundado en 1848, cuya misión era centralizar y estandarizar la comercialización de productos agrícolas, incluyendo opciones. Aunque por décadas fueron vistas con desconfianza y hasta tildadas de apuestas, las opciones acabaron consolidándose como herramientas fundamentales para cobertura y especulación.

0.8. Stock Warrants y la Transición hacia las Finanzas Modernas

Durante el siglo XX, el uso de opciones financieras se expandió más allá del ámbito agrícola o logístico: se convirtieron en poderosas herramientas de incentivo corporativo. Así nacen los *stock warrants*, instrumentos emitidos por las empresas que otorgan a ciertos ejecutivos el derecho, pero no la obligación, de adquirir acciones a un precio prefijado en una fecha futura.

Los primeros indicios de opciones sobre acciones para empleados aparecen a inicios del siglo XX, cuando algunas compañías comenzaron a ofrecer estos derechos como parte de su estructura de compensación.

Lo fascinante de los *warrants* no es solo su valor retributivo, sino su función estratégica: alinean los intereses del ejecutivo con los de la empresa. Si la compañía crece y el valor de sus acciones aumenta, el beneficio potencial para el tenedor del *warrant* también se incrementa. Sin embargo, ejercer estos instrumentos implica un costo: la emisión de nuevas acciones puede diluir el valor de las participaciones existentes.

0.8.1. 1973: El Año que Redefinió las Finanzas

En medio de turbulencias geopolíticas y transformaciones sociales, tres académicos, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton, publicaron investigaciones que revolucionaron la teoría financiera. Sus artículos:

- *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black & Scholes, 1973, Journal of Political Economy)

- *The Rational Theory of Option Pricing* (Merton, 1973, The Bell Journal)

Estos trabajos introdujeron una idea crucial: era posible valorar una opción sin conocer el rendimiento esperado del activo subyacente. Bastaba con conocer:

- Precio actual del activo
- Precio del ejercicio (*strike price*)
- Tiempo restante hasta el vencimiento
- Volatilidad esperada del activo
- Tasa libre de riesgo

Utilizando el concepto de cartera replicante, una combinación de activos que imita el comportamiento de la opción, demostraron que el precio de la opción debía coincidir con el costo de replicarla. Así nació el modelo de Black-Scholes, hoy piedra angular de las finanzas cuantitativas y, eventualmente, merecedor del Premio Nobel (aunque Black no vivió para recibirlo).

0.9. ¿Por qué Importa la Fórmula de Black-Scholes?

El modelo Black-Scholes permite valorar activos cuyo comportamiento está ligado a variables contingentes. A través de él, es posible calcular el valor de:

Stock warrants, opciones financieras, deuda subordinada, seguros, bonos, divisas, contratos de leasing, tipos de interés y más.

El modelo se inspira en el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), teoría de equilibrio que explica cómo se forman los precios en mercados competitivos. En este contexto, el equilibrio significa que las fuerzas de oferta y demanda están balanceadas y solo cambian ante la irrupción de factores externos.

Curiosamente, la chispa inicial vino de alguien que no era economista. Fischer Black, matemático aplicado por Harvard, aprendió finanzas de la mano de Jack Treynor, su jefe en la firma Arthur D. Little. Treynor, junto con William Sharpe, introduciría el CAPM de manera independiente.

0.9.1. La Colaboración de Black y Scholes

Fisher Black y Myron Scholes se conocieron en el MIT, impulsados por su pasión compartida por la economía financiera. Aunque su enfoque difería, Scholes centrado en opciones OTC (*over the counter*) y Black en *warrants*, compartían el objetivo de hallar una fórmula de valoración precisa.

Black, firmemente influenciado por el CAPM y el concepto de equilibrio, creía que el precio justo surgía de inversionistas racionales negociando en un mercado estable. Black adaptó el CAPM, enfocándose en cómo el riesgo (volatilidad) podía explicar el valor de una opción sin depender del rendimiento esperado de la acción.

Robert Merton, usando la fórmula de Itô y el cálculo estocástico, logró derivar la fórmula de Black desde fundamentos matemáticos más rigurosos y sin necesidad del CAPM. Así, nació la fórmula Black-Scholes-Merton, hoy piedra angular en la valoración de derivados.

0.10. ¿Qué es una Cartera Replicadora?

Una cartera replicadora es una combinación de activos (acciones + bonos sin riesgo) que imita exactamente los flujos de una opción.

0.10.1. Ejemplo Simplificado

Supongamos:

- Precio actual de la acción (S) : \$100 (1)
- Posibles valores a vencimiento : \$125 (sube) o \$70 (baja) (2)
- Precio de ejercicio (K) : \$110 (3)
- Tasa libre de riesgo (r) : 1 % anual (4)
- Madurez : 1 año (5)

Valores de la opción al vencimiento:

$$\text{Si sube a \$125 : } \max(125 - 110, 0) = \$15 \quad (6)$$

$$\text{Si baja a \$70 : } \max(70 - 110, 0) = \$0 \quad (7)$$

Construcción de la cartera:

Queremos hallar a (acciones) y b (bonos) tal que:

$$125a + 1.01b = 15 \quad (8)$$

$$75a + 1.01b = 0 \quad (9)$$

Restando las ecuaciones:

$$(125 - 75)a = 15 \Rightarrow a = 0.3 \quad (10)$$

Sustituyendo:

$$75(0.3) + 1.01b = 0 \Rightarrow b \approx -22.28 \quad (11)$$

Es decir: compra 0.3 acciones y pide prestado \$22.28. Con esta cartera, replicarás exactamente la opción.

La genialidad de esta teoría no solo está en replicar opciones, sino en revelar que si una opción no tiene el mismo precio que su cartera replicante, se genera una oportunidad de arbitraje.

0.11. La Matemática Financiera Hoy

En la actualidad, la matemática financiera constituye una de las herramientas más poderosas dentro del campo de las ciencias aplicadas. Esta disciplina combina métodos matemáticos avanzados como la estadística, la probabilidad, el análisis numérico y los procesos estocásticos para enfrentar desafíos complejos en los ámbitos financiero, económico y social.

Las opciones financieras, hoy omnipresentes, actúan como instrumentos clave tanto para la cobertura de riesgos como para la especulación estratégica. Son el “seguro” del sistema financiero moderno, permitiendo mitigar riesgos de mercado, de crédito, operacionales y otros. Herramientas como el Valor en Riesgo (VaR) cuantifican estos riesgos con una precisión cada vez mayor.

Los derivados financieros como los *forwards*, *futures*, *swaps* y derivados climáticos han transformado el funcionamiento de bolsas y casas de cambio. Su valoración requiere modelos altamente sofisticados que exigen conocimientos profundos en matemáticas aplicadas.

0.12. Conclusión

Desde las leyes de Hammurabi hasta el mercado de derivados moderno, pasando por Tales de Mileto, la lógica ha sido la misma: usar el conocimiento y la previsión para gestionar la incertidumbre. Un manejo financiero eficiente, tanto a nivel personal como institucional, es esencial para el desarrollo sostenible. El entendimiento de conceptos financieros, sumado al uso de herramientas cuantitativas como las que provee la matemática financiera, permite tomar decisiones informadas que optimizan recursos y minimizan riesgos.

Capítulo 1

Nociones de Matemáticas Financieras

1.0.1. Estrategias de negociación

Definición 1.0.1 (Estrategia de negociación). Una **estrategia de negociación** es un proceso estocástico (Definición B.0.27) $\delta = \{\delta_t\}_{t=0}^T$ donde $\delta_t = (\delta_t^0, \delta_t^1, \dots, \delta_t^d)$ representa las cantidades invertidas en cada activo en el tiempo t .

El proceso δ debe ser **predecible**, es decir, δ_t es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible (Definición B.0.15) para $t = 1, \dots, T$.

Definición 1.0.2 (Valor de cartera). El **valor de cartera** asociado a la estrategia δ en el tiempo t es:

$$V_t^\delta = \sum_{i=0}^d \delta_t^i S_t^i = \delta_t \cdot S_t$$

Definición 1.0.3 (Estrategia autofinanciada). Una estrategia δ es **autofinanciada** si:

$$V_t^\delta = V_0^\delta + \sum_{s=1}^t \delta_s \cdot (S_s - S_{s-1}) \quad \text{para } t = 1, \dots, T$$

Equivalentemente, en tiempo continuo:

$$dV_t^\delta = \delta_t \cdot dS_t$$

Definición 1.0.4 (Proceso de ganancia descontada). Sea δ una estrategia autofinanciada.

El proceso de ganancia descontada es:

$$G_t^\delta = \frac{V_t^\delta}{S_t^0} - \frac{V_0^\delta}{S_0^0} = \sum_{s=1}^t \delta_s^{(1:d)} \cdot \left(\frac{S_s^{(1:d)}}{S_s^0} - \frac{S_{s-1}^{(1:d)}}{S_{s-1}^0} \right)$$

donde $\delta_s^{(1:d)} = (\delta_s^1, \dots, \delta_s^d)$ y $S_s^{(1:d)} = (S_s^1, \dots, S_s^d)$.

En tiempo continuo, esto se expresa como:

$$dG_t^\delta = \delta_t^{(1:d)} \cdot d\tilde{S}_t^{(1:d)}$$

donde $\tilde{S}_t^{(1:d)}$ son los precios descontados de los activos con riesgo.

Definición 1.0.5 (Estrategia admisible). Una estrategia autofinanciada δ es **admisible** si el proceso de valor descontado $\tilde{V}_t^\delta = V_t^\delta / S_t^0$ está acotado inferiormente por una constante, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\tilde{V}_t^\delta \geq c \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

1.0.2. Reclamos Contingentes y Medidas Equivalentes de Martingala

Reclamos contingentes

Definición 1.0.6 (Reclamo contingente). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad (Definición B.0.24) con filtración (Definición B.0.28) $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$. Un **reclamo contingente** es una variable aleatoria (Definición B.0.25) no negativa $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ que es $\mathcal{F}_T$ -medible (Definición B.0.15).

Si $\{S_t\}_{t=0}^T = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ es un proceso de precios de activos, entonces H se denomina **derivado** de los activos subyacentes si H es medible respecto a la σ -álgebra (Definición B.0.1) generada por el proceso de precios:

$$H \in \sigma(S_s : 0 \leq s \leq T)$$

Ejemplo 1.0.1 (Opciones europeas básicas). Sea S_T^1 el precio de un activo subyacente en el tiempo T y $K > 0$ un precio de ejercicio. Entonces:

- **Opción call europea:** $H = (S_T^1 - K)^+ = \max(S_T^1 - K, 0)$
- **Opción put europea:** $H = (K - S_T^1)^+ = \max(K - S_T^1, 0)$

Medidas equivalentes de martingala

Definición 1.0.7 (Medidas equivalentes). Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad (Definición B.0.23) sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que $\mathbb{Q}$ es **equivalente** a $\mathbb{P}$ (denotado $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$) si:

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \text{ si y sólo si } \mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}$$

Definición 1.0.8 (Medida equivalente de martingala). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado (Definición B.0.28) y $\{S_t\}_{t=0}^T$ un proceso de precios de activos con $S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$, donde S_t^0 representa el activo sin riesgo (Definición C.2.2).

Una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama **medida equivalente de martingala** si:

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ (equivalencia de medidas)
2. Para cada $i = 1, \dots, d$, el proceso de precios descontados

$$\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}$$

es una $\mathbb{Q}$ -martingala (Definición B.0.32) respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$, es decir:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_T^i \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T$$

1.0.3. Arbitraje y viabilidad del mercado

Definición 1.0.9 (Oportunidad de arbitraje). Una **oportunidad de arbitraje** es una estrategia admisible δ tal que:

1. $V_0^\delta = 0$ (inversión inicial nula)
2. $V_T^\delta \geq 0$ casi seguramente (Definición B.0.26)
3. $\mathbb{P}(V_T^\delta > 0) > 0$

Definición 1.0.10 (Mercado viable). Un mercado es **viable** (o libre de arbitraje) si no existen oportunidades de arbitraje.

Teorema 1.0.1 (Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos). *Un mercado es viable si y sólo si existe una medida equivalente de martingala.*

Precisamente:

1. Si existe una medida equivalente de martingala, entonces el mercado es viable.

2. Si el mercado es viable y satisface ciertas condiciones técnicas, entonces existe al menos una medida equivalente de martingala.

Esbozo de la demostración. La demostración completa requiere herramientas avanzadas de análisis funcional. La idea principal es:

1. ($\Leftarrow$) Si existe una medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}$, cualquier estrategia de arbitraje δ satisfaría $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T^\delta] = V_0^\delta = 0$, pero $V_T^\delta \geq 0$ y $\mathbb{Q}(V_T^\delta > 0) > 0$, lo cual es contradictorio.
2. ($\Rightarrow$) Se utiliza el teorema de separación de Hahn-Banach (Teorema B.2.1) para separar el conjunto de ganancias alcanzables del conjunto de variables aleatorias no negativas no triviales.

Para detalles completos, ver Delbaen (2006). □

1.0.4. Replicación y completitud del mercado

Definición 1.0.11 (Reclamo contingente asequible). Un reclamo contingente H es **asequible** (o replicable) si existe una estrategia admisible δ tal que:

$$V_T^\delta = H \quad \text{casi seguramente}$$

Definición 1.0.12 (Mercado completo). Un mercado viable es **completo** si todo reclamo contingente acotado es asequible.

Definición 1.0.13 (Mercado incompleto). Un mercado viable es **incompleto** si existe al menos un reclamo contingente acotado que no es asequible.

Teorema 1.0.2 (Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos). *Un mercado viable es completo si y sólo si la medida equivalente de martingala es única.*

Proposición 1.0.1 (Caracterización de mercados incompletos). *En un mercado incompleto existe un conjunto no trivial de medidas equivalentes de martingala. Esta multiplicidad de medidas equivalentes de martingala refleja las diferentes percepciones del riesgo que tienen los agentes del mercado. Este es un resultado fundamental de Harrison y Pliska (1981).*

1.0.5. Valoración en mercados incompletos

Precios de compra y venta

Definición 1.0.14 (Precio de superreplicación). Para un reclamo contingente H , el **precio de superreplicación** (o precio de venta) es:

$$\pi^s(H) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \text{existe } \delta \text{ admisible con } V_0^\delta = x \text{ y } V_T^\delta \geq H\}$$

Definición 1.0.15 (Precio de subreplicación). Para un reclamo contingente H , el **precio de subreplicación** (o precio de compra) es:

$$\pi^b(H) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \text{existe } \delta \text{ admisible con } V_0^\delta = x \text{ y } V_T^\delta \leq H\}$$

Proposición 1.0.2 (Intervalo de precios sin arbitraje). Para cualquier reclamo contingente H en un mercado incompleto:

$$\pi^b(H) \leq \pi^s(H)$$

El intervalo $[\pi^b(H), \pi^s(H)]$ representa el conjunto de precios libres de arbitraje para H .

1.0.6. Medidas de riesgo

En mercados incompletos, la multiplicidad de medidas equivalentes de martingala requiere criterios adicionales para la valoración y gestión de riesgos.

Definición 1.0.16 (Medida de riesgo coherente). Una función $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ es una **medida de riesgo coherente** si satisface:

1. **Monotonicidad:** Si $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$
2. **Invarianza por traslación:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ para $c \in \mathbb{R}$
3. **Homogeneidad positiva:** $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ para $\lambda \geq 0$
4. **Subaditividad:** $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Definición 1.0.17 (Valor en riesgo condicional (CVaR)). Para una variable aleatoria X que representa pérdidas y un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, el **valor en riesgo condicional** se define como:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]$$

donde $\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ es el valor en riesgo.

Equivalentemente:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) du$$

Teorema 1.0.3 (Coherencia del CVaR). El CVaR es una medida de riesgo coherente, es decir, satisface las propiedades de monotonicidad, invarianza por traslación, homogeneidad positiva y subaditividad.

Teorema 1.0.4 (Representación de medidas de riesgo coherentes). Una medida de riesgo ρ es coherente si y sólo si existe un conjunto convexo $\mathcal{Q}$ de medidas de probabilidad tal que:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q[-X]$$

Esta representación conecta las medidas de riesgo con las medidas equivalentes de martingala en mercados incompletos, lo cual proporciona un marco teórico para la valoración y gestión del riesgo cuando no existe una única medida neutral al riesgo.

Formulación en tiempo discreto

Frecuentemente, en aplicaciones prácticas se utiliza el tiempo discreto, por lo que presentamos las definiciones en dicho contexto.

Definición 1.0.18 (Proceso de ganancia descontada en tiempo discreto). Sea $\{G_n^\delta\}_{n=0}^N$ el proceso de ganancia descontada asociado con la estrategia δ en tiempo discreto, donde G_n^δ es la ganancia descontada en el tiempo t_n antes del rebalanceo. Se define $G_0^\delta := 0$ y

$$G_n^\delta := \sum_{k=1}^n \delta_k^{(1:D)} \cdot (B_k^{-1} S_k - B_{k-1}^{-1} S_{k-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar y $\delta_k^{(1:D)}$ representa las posiciones en los activos con riesgo.

Definición 1.0.19 (Autofinanciamiento en tiempo discreto). El proceso δ se dice que es una estrategia de negociación autofinanciada en tiempo discreto si es predecible y si:

$$\delta_{n+1}^{(1:D)} \cdot S_n + \delta_{n+1}^{(0)} B_n = \delta_n^{(1:D)} \cdot S_n + \delta_n^{(0)} B_n$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$, donde $\delta_n^{(0)}$ representa la posición en el activo sin riesgo.

Proposición 1.0.3 (Equivalencia para estrategias autofinanciadas). *Una estrategia δ es autofinanciada si y sólo si:*

$$V_n^\delta = B_n(V_0 + G_n^\delta) \quad \text{para } n = 0, \dots, N$$

1.0.7. Aprendizaje por refuerzo y programación dinámica

En esta sección establecemos los fundamentos teóricos del aprendizaje por refuerzo como marco para resolver problemas de programación dinámica, particularmente en el contexto de estrategias de cobertura óptima.

Problemas de programación dinámica

Definición 1.0.20 (Problema de programación dinámica). Un **problema de programación dinámica** es una 5-tupla $(S, \mathcal{A}, T, r, \gamma)$ donde:

- $\mathcal{S}$ es el espacio de estados
- $\mathcal{A}$ es el espacio de acciones
- $T : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ es la función de transición de estados
- $r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de recompensa
- $\gamma \in [0, 1]$ es el factor de descuento

El objetivo es encontrar una política $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ que maximice el valor esperado (ver Ok (2007)):

$$V^\pi(s) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, \pi(s_t)) \mid s_0 = s \right]$$

Definición 1.0.21 (Política). Una **política** en un problema de programación dinámica es una función $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ que asigna a cada estado $s \in \mathcal{S}$ una acción $\pi(s) \in \mathcal{A}$.

Una política define completamente el comportamiento del agente: dado cualquier estado, la política especifica qué acción tomar. Se distinguen dos tipos principales:

- **Política determinística:** $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$, donde para cada estado existe una única acción determinada.
- **Política estocástica:** $\pi : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, donde $\pi(s, a)$ representa la probabilidad de elegir la acción a en el estado s , con $\sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(s, a) = 1$ para todo $s \in \mathcal{S}$.

El conjunto de todas las políticas determinísticas se denota como Π , y el conjunto de todas las políticas (incluyendo estocásticas) como Π_s .

Definición 1.0.22 (Función de valor). Para una política π , la **función de valor de estado** se define como:

$$V^\pi(s) = \mathbb{E}^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, a_t) \mid s_0 = s \right]$$

y la **función de valor de acción** (Q-función) como:

$$Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, a_t) \mid s_0 = s, a_0 = a \right]$$

Teorema 1.0.5 (Ecuación de Bellman). La *función de valor óptima* $V^*(s) = \sup_{\pi} V^\pi(s)$ *satisface la ecuación de Bellman:*

$$V^*(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left\{ r(s, a) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s'|s, a) V^*(s') \right\}$$

Análogamente, la Q -función óptima satisface:

$$Q^*(s, a) = r(s, a) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s'|s, a) \max_{a' \in \mathcal{A}} Q^*(s', a')$$

Esbozo de la demostración. La demostración se basa en el principio de optimalidad de Bellman: una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente del estado y decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión. $\square$

Corolario 1.0.1 (Política óptima). *Una política π^* es óptima si y sólo si para todo $s \in \mathcal{S}$:*

$$\pi^*(s) \in \arg \max_{a \in \mathcal{A}} Q^*(s, a)$$

Formulación como proceso de decisión de Markov

Definición 1.0.23 (Proceso de decisión de Markov (PDM)). Un **proceso de decisión de Markov** es una 5-tupla $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P, R, \gamma)$ donde:

- $\mathcal{S}$ es un conjunto finito o numerable de estados
- $\mathcal{A}$ es un conjunto finito de acciones
- $P : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ es la función de probabilidad de transición
- $R : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de recompensa
- $\gamma \in [0, 1)$ es el factor de descuento

Satisfaciendo $\sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s, a, s') = 1$ para todo $(s, a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$.

Teorema 1.0.6 (Existencia y unicidad de la solución). *Para un PDM con espacio de estados finito, existe una única función de valor óptima V^* que satisface la ecuación de Bellman, y existe al menos una política determinística óptima.*

Definición 1.0.24 (Operador de Bellman). El **operador de Bellman** $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{|\mathcal{S}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{S}|}$ se define como:

$$(\mathcal{T}V)(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left\{ R(s, a) + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s, a, s') V(s') \right\}$$

Teorema 1.0.7 (Contracción del operador de Bellman). *El operador de Bellman $\mathcal{T}$ es una contracción (Teorema B.2.3) con factor γ en el espacio $(\mathbb{R}^{|\mathcal{S}|}, \|\cdot\|_\infty)$:*

$$\|\mathcal{T}V_1 - \mathcal{T}V_2\|_\infty \leq \gamma \|V_1 - V_2\|_\infty$$

Por el teorema del punto fijo de Banach (Teorema B.2.4), V^ es el único punto fijo de $\mathcal{T}$.*

Procesos de decisión secuencial

La formulación de problemas financieros como procesos de decisión secuencial constituye el puente natural entre la teoría de programación dinámica clásica y las aplicaciones modernas de aprendizaje por refuerzo. En el contexto financiero, las decisiones deben tomarse de manera secuencial a lo largo del tiempo, considerando la evolución estocástica de los precios de los activos y la información disponible en cada momento.

Definición 1.0.25 (Proceso de decisión secuencial). Un **proceso de decisión secuencial** es una secuencia de problemas de optimización interconectados $(\mathcal{P}_t)_{t=0}^T$ donde en cada tiempo t :

- Se observa el estado $s_t \in \mathcal{S}_t$
- Se toma una acción $a_t \in \mathcal{A}_t(s_t)$
- Se recibe una recompensa $r_t(s_t, a_t)$
- El sistema transiciona al estado s_{t+1} según $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$

El objetivo es maximizar el valor esperado total $\mathbb{E}[\sum_{t=0}^T \gamma^t r_t(s_t, a_t)]$.

Definición 1.0.26 (Política estacionaria). Una **política estacionaria** es una función $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ que especifica la acción a tomar en cada estado, independiente del tiempo. Una política es **determinística** si $\pi(s) \in \mathcal{A}$ para todo s , y **estocástica** si $\pi(\cdot|s)$ es una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{A}$.

Teorema 1.0.8 (Optimalidad de políticas estacionarias). *Para un PDM con horizonte infinito, factor de descuento $\gamma \in [0, 1)$, y espacios de estados y acciones finitos, existe una política estacionaria determinística que es óptima.*

Esbozo de la demostración. La demostración se basa en la estructura recursiva del problema. Sea $V^*(s)$ la función de valor óptima. Por la ecuación de Bellman:

$$V^*(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} \left\{ r(s, a) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, a) V^*(s') \right\}$$

Definiendo $\pi^*(s) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \{r(s, a) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, a) V^*(s')\}$, se puede verificar que $V^{\pi^*} = V^*$, estableciendo la optimalidad. $\square$

Definición 1.0.27 (Principio de optimalidad dinámica). El **principio de optimalidad dinámica** establece que una política óptima tiene la propiedad de que, sin importar el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión.

Corolario 1.0.2 (Descomposición temporal de la optimalidad). Si $\pi^* = (\pi_0^*, \pi_1^*, \dots)$ es una política óptima para un problema de horizonte T , entonces $(\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_T^*)$ es óptima para el subproblema que comienza en el tiempo $t = 1$.

1.0.8. Fundamentos de aprendizaje automático

Aproximación universal y redes neuronales

Definición 1.0.28 (Función de activación). Una **función de activación** es una función $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se aplica elemento a elemento a las salidas de las transformaciones lineales en una red neuronal. Las funciones de activación más comunes incluyen:

- **Sigmoide:** $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- **ReLU:** $\sigma(x) = \max(0, x)$
- **Tangente hiperbólica:** $\sigma(x) = \tanh(x)$

Definición 1.0.29 (Red neuronal de propagación directa). Sea $X \in \mathbb{R}^{d_{in}}$ un vector de entrada y sean $L, d_1, \dots, d_{L-1}, d_{out} \in \mathbb{N}$ con $L \geq 2$. Una **red neuronal de propagación directa** (RNPD) es una función $F_\theta : \mathbb{R}^{d_{in}} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{out}}$ con parámetros θ definida como:

$$F_\theta(X) := A_L \circ F_{L-1} \circ \dots \circ F_1(X)$$

donde para $l = 1, \dots, L-1$:

$$F_l(Y) = \sigma(A_l(Y)) = \sigma(W^{(l)}Y + b^{(l)})$$

y $F_L(Y) = A_L(Y) = W^{(L)}Y + b^{(L)}$.

Los parámetros $\theta = \{W^{(1)}, \dots, W^{(L)}, b^{(1)}, \dots, b^{(L)}\}$ consisten en:

- Matrices de pesos $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l \times d_{l-1}}$ para $l = 1, \dots, L$
- Vectores de sesgo $b^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l}$ para $l = 1, \dots, L$

donde $d_0 = d_{in}$ y $d_L = d_{out}$.

Ahora veremos un teorema clave que nos dice que, mediante el uso de redes neuronales, podemos aproximar funciones continuas.

Teorema 1.0.9 (Teorema de aproximación universal de redes neuronales). Sea σ una función de activación continua no polinomial. Entonces, para cualquier función continua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, y para cualquier $\epsilon > 0$, existe una red neuronal de propagación directa F_θ con una sola capa oculta tal que:

$$\sup_{x \in K} \|F_\theta(x) - f(x)\| < \epsilon$$

Bosquejo de la demostración:

Paso 1: Primero establecemos que el conjunto de funciones de la forma $\sigma(w \cdot x + b)$ con $w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ es denso en $C(K)$ bajo ciertas condiciones sobre σ .

Paso 2: Utilizamos el teorema de Stone-Weierstrass (Teorema B.1.1). Para esto, verificamos que el álgebra generada por las funciones $\{\sigma(w \cdot x + b) : w \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$:

- Separa puntos en K
- No se anula en ningún punto de K
- Es cerrada bajo operaciones algebraicas

Paso 3: La condición de que σ sea no polinomial garantiza que el conjunto de combinaciones lineales finitas de funciones $\sigma(w \cdot x + b)$ es denso en $C(K)$.

Paso 4: Una red neuronal con una capa oculta de N neuronas tiene la forma:

$$F_\theta(x) = \sum_{i=1}^N c_i \sigma(w_i \cdot x + b_i)$$

que es precisamente una combinación lineal de las funciones base consideradas.

Por tanto, para cualquier $\epsilon > 0$ y función continua f , existe una elección apropiada de parámetros θ tal que $\|F_\theta - f\|_\infty < \epsilon$.

Definición 1.0.30 (Clase de redes neuronales). Para dimensiones fijas $d_{in}, d_{out} \in \mathbb{N}$ y función de activación σ , definimos:

- $\mathcal{NN}_\infty^{\sigma, d_{in}, d_{out}}$: el conjunto de todas las RNPd que transforman de $\mathbb{R}^{d_{in}}$ a $\mathbb{R}^{d_{out}}$ con función de activación σ
- Para $M \in \mathbb{N}$ y conjunto de parámetros $\Theta_{M, d_{in}, d_{out}} \subset \mathbb{R}^{R_M}$:

$$\mathcal{NN}_{M, d_{in}, d_{out}} = \{F_\theta : \theta \in \Theta_{M, d_{in}, d_{out}}\}$$

Proposición 1.0.4 (Propiedades de aproximación). La sucesión de clases $\{\mathcal{NN}_{M, d_{in}, d_{out}}\}_{M \in \mathbb{N}}$ satisface:

1. **Anidamiento:** $\mathcal{NN}_{M, d_{in}, d_{out}} \subset \mathcal{NN}_{M+1, d_{in}, d_{out}}$ para todo $M \in \mathbb{N}$
2. **Densidad:** $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \mathcal{NN}_{M, d_{in}, d_{out}} = \mathcal{NN}_\infty^{\sigma, d_{in}, d_{out}}$

1.0.9. Optimización y aprendizaje

Definición 1.0.31 (Función de pérdida). Una **función de pérdida** es una función $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{d_{out}} \times \mathbb{R}^{d_{out}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que mide la discrepancia entre la salida predicha $\hat{y}$ y el valor objetivo y . Ejemplos comunes incluyen:

- **Error cuadrático medio:** $\mathcal{L}(\hat{y}, y) = \frac{1}{2} \|\hat{y} - y\|^2$
- **Error absoluto medio:** $\mathcal{L}(\hat{y}, y) = \|\hat{y} - y\|_1$

Definición 1.0.32 (Descenso de Gradiente Estocástico). El Descenso de Gradiente Estocástico (SGD, por sus siglas en inglés) es un algoritmo de optimización iterativo para encontrar el mínimo de una función objetivo $f(\theta)$, donde $\theta \in \mathbb{R}^d$ son los parámetros a optimizar (ver Goodfellow (2016)).

A diferencia del descenso de gradiente clásico que utiliza todo el conjunto de datos para calcular el gradiente, SGD utiliza una muestra aleatoria (mini-lote) del conjunto de datos en cada iteración.

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ el conjunto de datos de entrenamiento y $L(\theta; x_i, y_i)$ la función de pérdida para el ejemplo i . La función objetivo total es:

$$f(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(\theta; x_i, y_i)$$

En cada iteración t , SGD selecciona aleatoriamente un mini-lote $\mathcal{B}_t \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de tamaño $|\mathcal{B}_t| = m$ y actualiza los parámetros según:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha_t \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{B}_t} L(\theta_t; x_i, y_i) \right)$$

donde $\alpha_t > 0$ es la tasa de aprendizaje en el paso t .

1.0.10. Características del SGD

- **Ventajas:**
 - Computacionalmente eficiente para conjuntos de datos grandes
 - Puede escapar de mínimos locales debido al ruido estocástico
 - Converge más rápido en las primeras iteraciones
- **Desventajas:**

Algorithm 1 Descenso de Gradiente Estocástico (SGD)

Entrada: Función objetivo $f(\theta)$, tasa de aprendizaje α , tamaño de mini-lote m , número de épocas T

Salida: Parámetros optimizados θ

Inicializar θ_0 aleatoriamente

para $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$ **hacer**

 Mezclar aleatoriamente el conjunto de datos

para cada mini-lote $\mathcal{B}_t$ de tamaño m **hacer**

 Calcular el gradiente: $g_t = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{B}_t} \nabla_{\theta} L(\theta_t; x_i, y_i)$

 Actualizar parámetros: $\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha g_t$

fin para

fin para

retornar θ_T

- Alta varianza en las actualizaciones debido al muestreo aleatorio
- Sensible a la elección de la tasa de aprendizaje
- Puede oscilar cerca del mínimo sin converger precisamente

1.1. Algoritmo Adam

Definición 1.1.1 (Algoritmo Adam). Adam (Adaptive Moment Estimation) es un algoritmo de optimización adaptativa que combina las ideas del momento (momentum) y RMSprop. Mantiene estimaciones del primer y segundo momento de los gradientes y utiliza estas estimaciones para adaptar la tasa de aprendizaje para cada parámetro individualmente.

Para cada parámetro θ_j , Adam mantiene:

- $m_t^{(j)}$: estimación del primer momento (media) del gradiente
- $v_t^{(j)}$: estimación del segundo momento (varianza no centrada) del gradiente

Las actualizaciones en cada paso t son:

$$m_t^{(j)} = \beta_1 m_{t-1}^{(j)} + (1 - \beta_1) g_t^{(j)} \quad (1.1)$$

$$v_t^{(j)} = \beta_2 v_{t-1}^{(j)} + (1 - \beta_2) (g_t^{(j)})^2 \quad (1.2)$$

$$\hat{m}_t^{(j)} = \frac{m_t^{(j)}}{1 - \beta_1^t} \quad (1.3)$$

$$\hat{v}_t^{(j)} = \frac{v_t^{(j)}}{1 - \beta_2^t} \quad (1.4)$$

$$\theta_{t+1}^{(j)} = \theta_t^{(j)} - \frac{\alpha}{\sqrt{\hat{v}_t^{(j)} + \epsilon}} \hat{m}_t^{(j)} \quad (1.5)$$

donde $g_t^{(j)}$ es el gradiente de θ_j en el tiempo t , $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$ son los factores de decaimiento exponencial, y ϵ es un término pequeño para estabilidad numérica.

Algorithm 2 Algoritmo Adam

Entrada: Función objetivo $f(\theta)$, tasa de aprendizaje $\alpha = 0.001$, parámetros $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$, $\epsilon = 10^{-8}$

Salida: Parámetros optimizados θ

Inicializar $\theta_0, m_0 = 0, v_0 = 0, t = 0$

mientras θ_t no ha convergido **hacer**

$t \leftarrow t + 1$

Obtener gradiente $g_t = \nabla_{\theta} f_t(\theta_{t-1})$ (en mini-lote)

$m_t \leftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$

$v_t \leftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot g_t^2$ (operación elemento a elemento)

$\hat{m}_t \leftarrow \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}$ (corrección de sesgo)

$\hat{v}_t \leftarrow \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}$ (corrección de sesgo)

$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \frac{\alpha}{\sqrt{\hat{v}_t + \epsilon}} \cdot \hat{m}_t$

fin mientras

retornar θ_t

1.1.1. Características del Adam

- **Ventajas:**

- Tasas de aprendizaje adaptativas para cada parámetro

- Robusto ante gradientes ruidosos y espacios de parámetros dispersos
- Funciona bien en la práctica sin mucho ajuste de hiperparámetros
- Combina los beneficios del momento y la adaptación de tasa de aprendizaje
- Corrección de sesgo para los primeros momentos

■ **Desventajas:**

- Mayor uso de memoria (mantiene m_t y v_t)
- Puede no converger en algunos casos teóricos específicos
- Los hiperparámetros por defecto pueden no ser óptimos para todos los problemas

Con las bases de programación dinámica y aprendizaje automático establecidas, podemos introducir entonces los algoritmos de aprendizaje por refuerzo, los cuales son claves para abordar computacionalmente problemas como la cobertura de opciones, y en general problemas de decisión secuencial.

Algoritmos de aprendizaje por refuerzo

Definición 1.1.2 (Q-Learning). El algoritmo **Q-Learning** actualiza las estimaciones de la Q-función mediante:

$$Q_{t+1}(s_t, a_t) = Q_t(s_t, a_t) + \alpha_t \left[r_t + \gamma \max_{a'} Q_t(s_{t+1}, a') - Q_t(s_t, a_t) \right]$$

donde $\alpha_t \in (0, 1]$ es la tasa de aprendizaje en el tiempo t .

Teorema 1.1.1 (Convergencia de Q-Learning). *Bajo las condiciones:*

1. *Cada par estado-acción es visitado infinitas veces*

2. $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t = \infty$ y $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$

El algoritmo Q-Learning converge a la Q-función óptima Q^ con probabilidad 1.*

Esbozo de la demostración. La convergencia se establece mediante la teoría de aproximación estocástica. La actualización de Q-Learning puede escribirse como:

$$Q_{t+1}(s, a) = Q_t(s, a) + \alpha_t [\mathcal{T}Q_t(s, a) - Q_t(s, a) + \epsilon_t(s, a)]$$

donde $\mathcal{T}$ es el operador de Bellman y $\epsilon_t(s, a)$ es un término de ruido martingala. Las condiciones sobre α_t garantizan que el algoritmo converge al punto fijo único Q^* del operador $\mathcal{T}$. □

Definición 1.1.3 (Deep Q-Network (DQN)). Una **Deep Q-Network** es una aproximación de la Q-función mediante una red neuronal $Q_\theta : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ con parámetros θ , entrenada minimizando:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathbb{E}_{(s,a,r,s') \sim \mathcal{D}} \left[\left(r + \gamma \max_{a'} Q_{\theta^-}(s', a') - Q_\theta(s, a) \right)^2 \right]$$

donde $\mathcal{D}$ es la memoria intermedia de experiencias y θ^- son parámetros de una red objetivo.

Aplicación a estrategias de cobertura

Definición 1.1.4 (MDP para cobertura de derivados). El problema de cobertura de un derivado se formula como un MDP donde:

- **Estado:** $s_t = (S_t, V_t, \tau_t)$ donde S_t es el precio del subyacente, V_t el valor de la cartera y $\tau_t = T - t$ el tiempo hasta vencimiento
- **Acción:** $a_t = \delta_t$ la posición en el activo subyacente
- **Recompensa:** $r_t = -\mathcal{L}(V_t - V_t^{BS})$ donde $\mathcal{L}$ es una función de pérdida y V_t^{BS} es el precio de Black-Scholes
- **Transición:** Determinada por la dinámica del mercado

Proposición 1.1.1 (Equivalencia con programación dinámica). *La estrategia de cobertura óptima obtenida resolviendo el MDP de cobertura es equivalente a la solución del problema de programación dinámica estocástica:*

$$V_t(s, v) = \min_{\delta} \mathbb{E} \left[\mathcal{L}(V_T - H) + \int_t^T \mathcal{C}(\delta_u) du \mid S_t = s, V_t = v \right]$$

donde H es la función de recompensa del derivado y $\mathcal{C}$ es una función de costo de transacción.

Demostración. La equivalencia se establece mediante la correspondencia directa entre los elementos del MDP y el problema de programación dinámica:

- El estado (S_t, V_t, τ_t) del MDP corresponde a las variables de estado del problema de PD
- La acción δ_t (posición de cobertura) es la variable de control
- La recompensa negativa $-\mathcal{L}(\cdot)$ corresponde al costo instantáneo

- La función de valor del MDP coincide con la función de valor de la PD

La ecuación de Bellman del MDP se reduce exactamente a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman del problema de control óptimo estocástico. $\square$

Corolario 1.1.1 (Convergencia de estrategias neuronales). *Bajo condiciones de regularidad, las estrategias de cobertura obtenidas mediante DQN convergen a la estrategia óptima cuando la capacidad de la red y el número de iteraciones tienden a infinito. (Para mayor detalle se invita al lector a consultar Powell (2022))*

Capítulo 2

Discusión Parte 1: Precio de Riesgo Equitativo

2.0.1. Existencia y Unicidad del PRE

Vamos a introducir la noción clave en este trabajo de investigación. Hasta que el *precio de riesgo equitativo* se introdujo a la literatura de las matemáticas financieras en Guo y Zhu (2017), se había intentado resolver el problema de valoración de opciones en mercados incompletos buscando cotas y abordándolo para medidas de riesgo correspondientes ya sea al escritor de la opción o al comprador (ver por ejemplo Xu (2006))

Con la introducción de este concepto se logró un avance fundamental en este problema de valoración por sus propiedades y por la eficiencia que logra en las formulaciones computacionales (ver para más detalles Marzban y col. (2022)).

Definición 2.0.1 (Proceso de ganancias, Restricciones de intercambio convexas). Para cada estrategia de intercambio Q -admisibles y autofinanciada disponible en el mercado que requiere capital inicial cero, llamamos a su proceso de riqueza descontado un proceso de ganancias. Denotemos por $\mathbb{G}$ el conjunto de todos los procesos de ganancias posibles en el mercado. Se asume que el conjunto $\mathbb{G}$ es convexo y contiene el proceso cero.

Requerimos que $\mathbb{G}$ sea un conjunto de procesos progresivamente medibles que satisfagan las siguientes condiciones:

- (i) Todo $G \in \mathbb{G}$ es una Q -martingala cuadrado integrable con $G_0 = 0$;
- (ii) $0 \in \mathbb{G}$;
- (iii) Para cualesquiera $G, H \in \mathbb{G}$ y cualquier constante $\lambda \in [0, 1]$, tenemos $\lambda G + (1 - \lambda)H \in \mathbb{G}$.

El conjunto G servirá como una descripción adecuada de nuestras restricciones de intercambio, ya que contiene precisamente el conjunto de valores de portafolio descontados posibles, ajustados por sus valores iniciales.

El modelo de mercado descrito aquí es bastante general ya que solo requiere la existencia de una medida martingala. Consideremos la valuación de una opción europea que expira en el tiempo T con un pago descontado $\mathcal{F}_T$ -medible de Z . Si el mercado es completo, el precio único libre de arbitraje de esta reclamación en el tiempo 0 está dado por $\pi = \mathbb{E}^Q Z$. Este precio es aceptado tanto por el comprador como por el vendedor del contrato, ya que son capaces de replicar perfectamente sus flujos de efectivo mediante estrategias de cobertura.

Sin embargo, la replicación perfecta ya no es posible si se imponen restricciones de intercambio y el mercado se vuelve incompleto. En este caso, el argumento clásico libre de arbitraje, así como cualquier argumento unilateral basado en utilidad, solo son capaces de proporcionar un intervalo de precios.

La falla de la cobertura perfecta señala la presencia de riesgo en este escenario, que también se ve afectado por el precio de la opción. Intuitivamente, un precio de opción más alto aumenta la exposición al riesgo del comprador y disminuye la exposición al riesgo del vendedor, mientras que un precio de opción más bajo tiene el efecto opuesto. Para que el comprador y el vendedor lleguen a un acuerdo durante la negociación del precio, un enfoque posible es elegir un precio π de modo que el comprador y el vendedor de la reclamación enfrenten la misma cantidad de riesgo.

Definición 2.0.2 (Función de riesgo). Una función $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función de riesgo si satisface las siguientes condiciones:

- (i) R es no decreciente, convexa y acotada inferiormente.
- (ii) $R(0) = 0$ y $R(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Definición 2.0.3 (Riesgo esperado para opciones europeas). Sean R_s, R_c funciones de riesgo que satisfacen la Definición 2.0.2. Dada cualquier variable aleatoria $\mathcal{F}_T$ -medible cuadrado integrable X que representa un pasivo descontado en el tiempo T , sean $\rho_s(X)$ y $\rho_c(X)$ las funciones de riesgo esperado del vendedor y del comprador de X , definidas como

$$\rho_s(X) := \inf_{G \in G} \mathbb{E}^Q R_s(X - G_T) \quad (2.1)$$

$$\rho_c(X) := \inf_{G \in G} \mathbb{E}^Q R_c(X - G_T) \quad (2.2)$$

Nota: Para resultados que se mantienen tanto para ρ_s como para ρ_c , podemos usar las notaciones $\rho_{s,c}$ y $R_{s,c}$ por conveniencia.

Comentario 2.0.1. Las funciones de riesgo esperado $\rho_s(X)$ y $\rho_c(X)$ representan los riesgos mínimos al cubrir el pasivo X .

Se asume que el vendedor y el comprador tienen aversión al riesgo y les gustaría minimizar las pérdidas seleccionando una estrategia de intercambio apropiada $G \in \mathcal{G}$. La medida martingala Q se elige como una medida de valoración de riesgo. Si hay más de una medida martingala disponible, cada una correspondería a sus propias funciones de riesgo esperado.

Definición 2.0.4. Sea Z una variable aleatoria de cuadrado integrable y $\mathcal{F}_t$ -medible. Considera una opción europea con función de recompensa descontada Z . Un precio de riesgo equitativo (PRE) (ver Guo y Zhu (2017)) para esta opción, denotada por $\pi(Z)$, es un valor constante que satisface la ecuación $\rho_s(Z - \pi(Z)) = \rho_c(Z - \pi(Z))$

Para demostrar la unicidad y existencia del PRE, probemos primero el siguiente lema sobre funciones de riesgo y funciones de recompensa:

Proposición 2.0.1 (Lema). Sean X y Y variables aleatorias cuadrado integrables y $\mathcal{F}_t$ -medibles que satisfacen que $\mathbb{E}_Q R_{s,c}(X) < \infty$ y $\mathbb{E}_Q R_{s,c}(Y) < \infty$. Entonces, las funciones de riesgo esperado correspondientes ρ_s y ρ_c tienen las siguientes propiedades:

- (i) $R_{s,c}(\mathbb{E}_Q Y) \leq \rho_{s,c}(Y) \leq \mathbb{E}_Q R_{s,c}(Y)$
- (ii) Monotonicidad: Si $X \leq Y$ entonces $\rho_{s,c}(X) \leq \rho_{s,c}(Y)$
- (iii) Convexidad: Para cualquier constante $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que:
 $\rho_{s,c}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho_{s,c}(X) + (1 - \lambda) \rho_{s,c}(Y)$.
- (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{s,c}(Y - x) \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{s,c}(Y + x)$

Demostración. (i) Acordémonos que $\rho_{s,c}(Y) := \inf_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{E}_Q R_{s,c}(Y - G_T)$. La cota superior $\rho_{s,c}(Y) \leq \mathbb{E}_Q R_{s,c}(Y)$ se obtiene cuando $G_T = 0$ ya que $\rho_{s,c}(Y)$ asume su valor máximo, mientras que la cota inferior $R_{s,c}(\mathbb{E}_Q Y) \leq \rho_{s,c}(Y)$ se infiere de la desigualdad de Jensen y que $\mathbb{E}_Q G_T = 0$.

(ii) La monotonicidad de $\rho_{s,c}$ se sigue de que $R_{s,c}$ es monótono por definición de función de riesgos.

(iii) La convexidad de $\rho_{s,c}$ se deduce de la convexidad de $R_{s,c}$ y $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \rho_{s,c}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= \inf_{G, H \in \mathcal{G}} \mathbb{E}_Q R_{s,c}(\lambda X + (1 - \lambda)Y - (\lambda G + (1 - \lambda)H)_T) \\ &\leq \inf_{G, H \in \mathcal{G}} (\lambda \mathbb{E}_Q R_{s,c}(X - G_T) + (1 - \lambda) \mathbb{E}_Q R_{s,c}(Y - H_T)) = \lambda \rho_{s,c}(X) + (1 - \lambda) \rho_{s,c}(Y) \end{aligned}$$

Aquí se aplica la propiedad (i). (iv) Usaremos las cotas de (i). El límite superior está dado por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho_{s,c}(Y + x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} R_{s,c}(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Y + x) \geq R_{s,c}(0) = 0 \quad (2.3)$$

por definición de R como función de riesgo.

Para la cota inferior, nótese que para valores positivos de x

$$\begin{aligned} \rho_{s,c}(Y - x) &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} R_{s,c}(Y - x) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (R_{s,c}(0) \mathbb{1}_{Y-x \leq 0} + R_{s,c}(Y) \mathbb{1}_{Y-x > 0}) \end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada, a medida que $x \rightarrow \infty$,

$$R_{s,c}(Y - x) \mathbb{1}_{Y-x > 0} = 0$$

y por definición el término de la izquierda es $R_{s,c}(0) = 0$. Se deduce entonces la cota deseada. $\square$

Ahora sí, probemos estas propiedades sobre el precio de riesgo equitativo:

Proposición 2.0.2. *El precio de riesgo equitativo existe y es único*

Considera un modelo de mercado con restricciones de intercambio convexas.

Para cualquier opción europea con una función de recompensa descontada Z de cuadrado integrable, $\mathcal{F}_t$ -medible que satisface

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} R_{s,c}(|Z| + c) < \infty, \text{ para todo } c \in \mathbb{R}$$

existe un único precio equitativo de riesgo π . Y específicamente, π es la solución a la ecuación:

$$\rho_s(Z - \pi(Z)) = \rho_c(Z - \pi(Z)) \quad (2.4)$$

Adicionalmente, $\pi(Z)$ es monótona en Z .

Demostración. Sea $v \in \mathbb{R}$, se considera la función

$$v \rightarrow \rho_c(v - Z) - \rho_s(Z - v) \quad (2.5)$$

Gracias al lema sabemos que $v \rightarrow \rho_c(v - Z)$ y $v \rightarrow \rho_s(Z - v)$ son funciones convexas reales que son no decrecientes y no crecientes respectivamente. Por ende, la función que consideramos previamente es continua y no decreciente. Más allá de eso, la parte (iv) del lema implica que este mapa toma valores negativos y positivos, y al ser continuo, eso implica que toma el valor de 0 gracias al teorema del valor intermedio. Por lo que existe al menos un valor para el cual $\rho_c(v - Z) = \rho_s(Z - v)$. Y, sustituyendo v por π donde π

es el precio de riesgo equitativo deseado como uno de estos valores tenemos la existencia de al menos un precio de riesgo equitativo.

Ahora, probemos la unicidad de π .

Asumamos, por el contrario, que existiera más de una solución, y tomemos al par de soluciones que tendrían que existir entonces, ν y $\nu + k$ donde $k > 0$. Entonces, por la monotonicidad de ρ_s y ρ_c ,

$$\rho_c(\nu + k - Z) \geq \rho_c(\nu - Z) = \rho_s(Z - \nu) \geq \rho_s(Z - \nu - k) = \rho_c(\nu + k - Z) \quad (2.6)$$

Como algo no puede ser mayor a sí mismo, tenemos que se debe tener igualdad en todas estas desigualdades, y de ahí tenemos que $\rho_c(\nu + k - Z) = \rho_c(\nu - Z)$. Por la monotonicidad y convexidad de ρ_c , eso implica que $\rho_c(x - Z)$ tendría que ser función constante para todo $x \leq \nu + k$. Y por el inciso (iv) del lema previo, tenemos que $\rho_c(\nu + k - Z) = \rho_c(\nu - Z) \leq 0$.

Ahora, aplicando el inciso (i) del lema y expandiendo por definición, tenemos las siguientes desigualdades:

$$R_c(\nu + k - \mathbb{E}_Q Z) \leq 0, R_s(\mathbb{E}_Q Z - \nu) \leq 0. \quad (2.7)$$

Y como al menos uno de $\nu + k - \mathbb{E}_Q Z$ o $\mathbb{E}_Q Z - \nu$ tiene que ser positivo, esto sería una contradicción con la definición de función de riesgos en la condición que $R_{s,c}(x) > 0 \forall x > 0$.

Por lo cual, nuestra suposición original de que hay más de una solución tiene que ser falsa. Y de esto vemos que la solución es única. Inmediatamente también tenemos que $\pi(Z)$ es monótona como ρ_s y ρ_c son funciones monótonas. $\square$

2.0.2. Compatibilidad con esquema de mercados completos

Comentario 2.0.2. Veamos ahora que esta definición de riesgo de precio equitativo es compatible con los argumentos estándar de valoración libre de arbitraje. En particular, veamos que el precio de riesgo equitativo se reduce al precio en un mercado libre de arbitraje si el mercado es completo en vez de incompleto y se remueven las restricciones de intercambio. Esto permite ver este abordaje como una extensión de la teoría clásica ya establecida. Ver Anexo C.

Definición 2.0.5. Tomemos la siguiente definición de arbitraje bajo restricciones de intercambio. Un arbitraje del vendedor consiste en una terna $(Z, \pi, G) \in L^1(Q) \times \mathbb{R} \times G$ donde

$$\pi - Z + G_T \geq 0, Q(\pi - Z + G_T > 0) > 0.$$

Un arbitraje del comprador, en cambio, consiste en una terna $(Z, \pi, G) \in L^1(Q) \times \mathbb{R} \times G$ donde

$$Z - \pi + G_T \geq 0, Q(Z - \pi + G_T > 0) > 0.$$

Proposición 2.0.3. *Bajo un precio equitativo de riesgos no es posible realizar un arbitraje. Primero probamos lo siguiente:*

Proposición 2.0.4. *Dada una opción europea con recompensa descontada Z , el precio equitativo de riesgos π evita cualquier oportunidad de arbitraje, como previamente definido para el comprador y el escritor.*

Demostración. Supongamos que existe un arbitraje del vendedor (Z, π, G) . Entonces debemos tener que $\pi - Z + G_T \geq 0$ y que $\mathbb{E}_Q(\pi - Z) = \mathbb{E}_Q(\pi - Z + G_T) > 0$. Esto implica la siguiente cadena de desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 = R_s(0) &\geq \mathbb{E}_Q R_s(Z - \pi - G_T) \geq \inf_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{E}_Q R_s(Z - \pi - G_T) \\ &= \rho_s(Z - \pi) = \rho_s(\pi - Z) \geq R_c(\mathbb{E}_Q(\pi - Z)) > R_c(0) = 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, ya que 0 no puede ser mayor que 0. Entonces, no puede haber un arbitraje del vendedor. De manera análoga, vemos que tampoco puede haber un arbitraje del comprador. $\square$

Ahora, asumamos que estamos ante la situación de un mercado completo y veamos que el precio de riesgo equitativo coincide exactamente con el precio único libre de arbitraje.

Proposición 2.0.5. *El precio de riesgo equitativo coincide con el precio único libre de arbitraje*

En el caso cuando el mercado se vuelve completo, $\mathcal{G}$ corresponde al conjunto de todas las Q -martingalas cuadrado integrables con valor inicial cero.

Si $\mathcal{G}$ es el conjunto de todas las martingalas Q cuadrado integrables, con valor inicial 0, entonces tenemos lo siguiente:

- (i) Para cualquier variable aleatoria X cuadrado integrable, $\mathcal{F}_T$ medible, tenemos que $\rho_s(X) = R_s \mathbb{E}_Q X$ y $\rho_c(X) = R_c \mathbb{E}_Q X$.
- (ii) Considera una opción europea con una recompensa Z cuadrado integrable, $\mathcal{F}_T$ medible. Entonces, la siguiente igualdad se cumple:

$$\rho_s(Z - \mathbb{E}_Q Z) = \rho_c(Z - \mathbb{E}_Q Z) = 0$$

Entonces, el precio de riesgo equitativo está dado por $\pi = \mathbb{E}_Q Z$ y ambas partes pueden cubrir la opción perfectamente sin ningún riesgo.

Demostración. Por el lema previo, ya sabemos que $\rho_{s,c}(X) \geq R_{s,c}(\mathbb{E}_Q X)$. Para que se dé la igualdad, tomemos $G \in \mathbb{G}$ la estrategia de cobertura perfecta para X , así que:

$$X = \mathbb{E}_Q X + G_T$$

Esta elección de G es posible gracias al teorema de representación de las martingalas.

Entonces tenemos que:

$$\rho_{s,c}(X) \leq \mathbb{E}_Q R_{s,c}(X - G_T) = R_{s,c}(\mathbb{E}_Q X)$$

Por lo tanto,

$$\rho_{s,c}(X) = R_{s,c}(\mathbb{E}_Q X)$$

Entonces, la segunda proposición se tiene como consecuencia de que $R_{s,c}$ es monótono, $R_{s,c}(0) = 0$ y la primera proposición. $\square$

Esto establece una compatibilidad con el modelo clásico para mercados completos.

Comentario 2.0.3. *Mencionamos que, aunque todas estas nociones de precios de riesgo equitativo se pueden aplicar al caso de las opciones americanas, no nos adentramos en dicha teoría ya que, a diferencia del caso de las opciones europeas, no se ha formulado cerradamente como es el caso de Black-Scholes de manera que se pueda verificar la compatibilidad entre ambos abordajes y, por ende, lo que existe son aproximaciones.*

Comentario 2.0.4. *Como es posible ejecutar una opción americana en cualquier momento, y hay una asimetría entre los tiempos óptimos de ejecución para el comprador y vendedor, desarrollar la teoría matemática necesaria para tratar este tipo de opciones no está a nuestro alcance.*

Capítulo 3

Discusión Parte 2: Formulación dinámico discreta

3.0.1. Formulación dinámico discreta bajo el peor escenario posible

Veamos cómo es posible plantear una formulación dinámico discreta del problema Watkins y Dayan (1992) y dar solución a nivel computacional al mismo, en el caso donde las medidas de riesgo que consideramos sean el peor escenario posible, para ambas partes de la transacción.

Definición 3.0.1 (Intervalo de precio justo). Dada una medida de riesgo del escritor ρ_e y una medida de riesgo del comprador ρ_c , el intervalo de precio justo se define como el intervalo de precios para el cual, tanto el escritor como el comprador no pueden explotar el mercado para cubrir completamente el riesgo del contrato que han acordado. Matemáticamente, el intervalo de precio justo toma la forma $[p_c^0, p_e^0]$, donde

$$p_c^0 = \sup\{p_0 \mid \mathcal{R}_c(p_0) \leq 0\}$$

y

$$p_e^0 = \inf\{p_0 \mid \mathcal{R}_e(p_0) \leq 0\}.$$

Comentario 3.0.1. Es importante diferenciar el IPJ del intervalo sin arbitraje. En particular, este último se define como el intervalo $[\bar{p}_c^0, \bar{p}_e^0]$, tal que:

$$\bar{p}_c^0 := \sup\{p_0 \mid \text{existe } X \in \mathcal{X}(-p_0), F(S_T, Y_T) + X_T \geq 0 \text{ casi seguramente}\}$$

y

$$\bar{p}_e^0 := \inf\{p_0 \mid \text{existe } X \in \mathcal{X}(p_0), F(S_T, Y_T) - X_T \leq 0 \text{ casi seguramente}\}.$$

Comentario 3.0.2. Se puede fácilmente aprovechar el hecho de que las medidas de riesgo se interpretan como equivalentes de certeza y son monótonas para mostrar que el IPJ, que tiene en cuenta que las dos partes no son arbitrariamente adversas al riesgo, es necesariamente un subconjunto del intervalo sin arbitraje. Mientras que el intervalo de precio sin arbitraje siempre está garantizado no estar vacío, esto no es necesariamente el caso para el IPJ. Un IPJ vacío captura la existencia de un precio, para el cual tanto el escritor como el comprador terminan estando expuestos a un riesgo negativo, haciendo así menos relevante el paradigma de precio de riesgo equitativo (PRE).

Tengamos en cuenta también que tanto el precio de riesgo equitativo como el intervalo de precio justo, solo pueden medirse si las medidas de riesgo ρ_e y ρ_c son conocidas.

3.0.2. Intervalo de Precio Justo

Proposición 3.0.1 (Intervalo de Precio Justo). *Dado que tanto ρ_e como ρ_c son medidas de riesgo convexas, existe un precio de riesgo equitativo si y sólo si el intervalo de precio justo está acotado. Además, cuando existe, es igual a:*

$$p_0^* = \frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{C}(0)}{2}$$

que es el centro del intervalo de precio justo si este último no es vacío.

Esta demostración se basa principalmente en la propiedad de invariancia de traslación junto con la siguiente propiedad de $\mathcal{X}(p_0)$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(p_0) &= \{X \mid \text{existe } \xi_s, \text{existe } c \in \mathbb{R} \\ &\quad X_t = p_0 + \int_0^t \xi_s \, dS_s \geq c; \text{para todo } t \in [0, T]\} \\ &= p_0 + \{X' \mid \text{existe } \xi_s, \text{existe } c \in \mathbb{R} \\ &\quad X'_t = \int_0^t \xi_s \, dS_s \geq c; \text{para todo } t \in [0, T]\} \\ &= p_0 + \mathcal{X}(0) \end{aligned}$$

donde $p_0 + \mathcal{X}(0)$ se refiere a la adición de conjuntos.

Estas dos propiedades pueden ser ambas utilizadas para mostrar que ambos:

$$\begin{aligned}
q^e(p_0) &= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)+p_0} \rho^e(F(S_T, Y_T) - X_T) \\
&= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \rho^e(F(S_T, Y_T) - X_T - p_0) \\
&= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \rho^e(F(S_T, Y_T) - X_T) - p_0 \\
&= \inf \left\{ s \mid \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \rho^e(F(S_T, Y_T) - X_T) \leq s \right\} - p_0 \\
&= \inf \{ s \mid q^e(s) \leq 0 \} - p_0 = p_0^e - p_0
\end{aligned} \tag{A5}$$

y de forma similar,

$$\begin{aligned}
q^c(p_0) &= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)-p_0} \rho^c(-X_T - F(S_T, Y_T)) \\
&= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \rho^c(-X_T - F(S_T, Y_T)) + p_0 \\
&= \inf \{ s \mid q^c(0) \leq s \} + p_0 \\
&= \inf \{ s \mid q^c(-s) \leq 0 \} + p_0 \\
&= -\sup \{ -s \mid q^c(-s) \leq 0 \} + p_0 \\
&= -p_0^c + p_0
\end{aligned} \tag{A6}$$

Entonces podemos obtener nuestro resultado al verificar ambas direcciones del si y sólo si. Primero, dado que existe un PRE, digamos que $p_0^* \in \mathbb{R}$, debe ser tal que tanto $q^e(p_0^*)$ como $q^c(p_0^*)$ son miembros de $\mathbb{R}$. Esto necesariamente implica que $p_0^e \in \mathbb{R}$ y $p_0^c \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, el intervalo de precio justo está acotado. De forma recíproca, si el intervalo de precio justo está acotado, entonces uno puede verificar que el punto medio $p_0^* := (p_0^e + p_0^c) / 2$ sí satisface la condición de PRE:

$$q^e(p_0^*) = p_0^e - p_0^* = p_0^e/2 - p_0^c/2 = -p_0^c + p_0^* = q^c(p_0^*)$$

Más allá de eso, este punto medio puede ser calculado así:

$$\begin{aligned}
p_0^* &= (1/2) (\inf \{ p_0 \mid q^e(p_0) \leq 0 \} - \sup \{ -s \mid q^c(-s) \leq 0 \}) \\
&= (1/2) (p_0^e + p_0^c) = (1/2) (q^e(0) - q^c(0))
\end{aligned}$$

siguiendo exactamente los mismos argumentos que en las ecuaciones previas (A5) y (A6). Esto concluye nuestra demostración. $\square$

Comentario 3.0.3. Basándonos en la Proposición 3.0.1, cuando se utilizan medidas de riesgo

convexas, el precio de riesgo equitativo se puede encontrar simplemente evaluando los dos límites del intervalo de precio justo.

Siguiendo una preocupación importante planteada sobre el enfoque de fijación de precios de arbitraje ϵ , basado en un resultado de Xu (2006), podemos confirmar el hecho de que para medidas de riesgo convexas que satisfacen la propiedad de riesgo de mercado acotado, el precio de riesgo equitativo está libre de arbitraje bajo condiciones débiles.

Lema 3.0.1. Si el intervalo de precio justo existe y no está vacío y ambas ρ_e y ρ_c son medidas de riesgo convexas, entonces el precio de riesgo equitativo se encuentra en el intervalo de precios sin arbitraje.

Demostración. Citando la propiedad 2 en Xu (2006).

Propiedad 2: El precio de venta está acotado superiormente por el precio de supercobertura y el precio de compra está acotado inferiormente por el precio de subcobertura.

Dado que los precios de subcobertura y supercobertura abarcan el intervalo de precios sin arbitraje, los precios de venta y compra están libres de arbitraje. En particular, tenemos que p_0^e está acotado superiormente por el precio de supercobertura y p_0^c está acotado inferiormente por el precio de subcobertura. Por lo tanto, dado que $p_0^c \leq p_0^e$, debemos tener que el intervalo de precios justos es un subconjunto del intervalo sin arbitraje. Esto nos permite concluir que el precio de riesgo equitativo también es un miembro del intervalo sin arbitraje. $\square$

A continuación, se mostrará cómo se puede aprovechar aún más el resultado de la Proposición 3.0.1 para identificar el precio de riesgo equitativo de opciones de estilo europeo utilizando programación dinámica, en un contexto donde la cobertura se implementa en puntos de tiempo discretos.

Observación 1 Debemos notar aquí que en el caso donde las medidas de riesgo no satisfacen la propiedad de invariancia traslacional, pero aún se puede explotar la observación anterior de que el precio de riesgo equitativo cae dentro del intervalo de precio justo y, por lo tanto, está libre de arbitraje, asumiendo que este intervalo no está vacío. Es decir, si tal precio existe, se puede identificar empleando un algoritmo de bisección que puede establecer $\mathcal{E}(p_0) := \mathcal{E}(p_0) - \mathcal{C}(p_0) = 0$. La convergencia de un método de bisección puede basarse en el hecho de que $\mathcal{E}(p_0)$ es no creciente y que es mayor o igual a cero en p_0^c y menor o igual a cero en p_0^e .

3.0.3. Planteamiento Dinámico Discreto para el Marco de Fijación de Precio Riesgo Equitativo

En contextos donde el comercio solo puede ocurrir en períodos específicos de tiempo $\{t_k\}_{k=0}^{K-1} \subset [0, T[$, típicamente se redefine el conjunto de todas las estrategias de cobertura

autofinanciadas admisibles en términos de la riqueza acumulada en cada período:

$$\bar{X}(p_0) = \left\{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K \mid \text{existe } \{\xi_k\}_{k=0}^{K-1}, X_k = p_0 + \sum_{k'=0}^{k-1} \xi_{k'} \Delta S_{k'+1}, \text{ para todo } k = 1, \dots, K \right\},$$

donde $\Delta S_{k+1} = S_{t_{k+1}} - S_{t_k}$ y donde, para cada $k = 0, \dots, K-1$, la estrategia de cobertura ξ_k es $\mathcal{F}_{t_k}$ -medible y captura el número de acciones de los activos riesgosos mantenidos en la cartera durante el período $[t_k, t_{k+1}]$. Finalmente, se asume que todas las variables aleatorias de interés en el problema de cobertura discreta están bien comportadas.

Suposición 3.0.1. *Existe algún $p \in [1, \infty]$ tal que todo $X \in \bar{X}(p_0)$ es tal que para todos $k = 1, \dots, K$ tenemos que $X_k \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$ y que la función de pago $F(S_T, Y_T) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.*

Definición 3.0.2 (Medidas de riesgo que pueden descomponerse en un paso). La medida $\rho : \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ se puede descomponer en un paso si existe un conjunto de medidas de riesgo $\{\rho_k\}_{k=0}^{K-1}$ tal que $\rho(X) = \rho_0(\rho_1(\dots \rho_{K-2}(\rho_{K-1}(X)) \dots))$ y donde cada medida $\rho_k : \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$ es una aplicación de riesgo condicional (como se define en Ruszczyński y Shapiro (2006)), es decir, satisface las siguientes propiedades de convexidad, monotonicidad e invariancia de traslación condicional:

■ **Convexidad condicional:**

para todo $\theta \in [0, 1]$, para todo $X, Y \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P})$

,

$\rho_k(\theta Y + (1 - \theta)X) \leq \theta \rho_k(Y) + (1 - \theta) \rho_k(X)$ casi seguramente

■ **Monotonicidad condicional:**

para todo $X, Y \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P})$, $Y \geq X$ casi seguramente

implica que $\rho_k(Y) \geq \rho_k(X)$ casi seguramente

■ **Invariancia de traslación condicional:**

para todo $X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$, $Y \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P})$, $\rho_k(X + Y) = X + \rho_k(Y)$ casi seguramente

Adicionalmente, una medida de riesgo coherente se dice que 'se puede descomponer coherentemente en un paso' si cada medida ρ_k también satisface:

■ **Invariancia de escala condicional:**

para todo $\alpha \geq 0$, para todo $X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P})$, $\rho_k(\alpha X) = \alpha \rho_k(X)$ casi seguramente

Entre todas las medidas de riesgo que se pueden descomponer en un paso, se puede demostrar que una clase especial de medidas de riesgo es especialmente atractiva desde un punto de vista computacional. Se hará referencia a estas medidas como medidas de riesgo *Markovianas*, las cuales se pueden usar cuando el espacio medible filtrado $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio de producto progresivamente revelado, lo que vamos a definir de forma subsiguiente.

Definición 3.0.3. Un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ se dice que está *soportado* en un espacio de producto *progresivamente revelado* si existe una sucesión $\{(\Omega_k, \Sigma_k)\}_{k=1}^K$ tal que $(\Omega, \mathcal{F})$ es el espacio de producto, es decir, $\Omega := \prod_{k=1}^K \Omega_k$ y $\mathcal{F} := \otimes_{k=1}^K \Sigma_k$, y $\mathbb{F}$ es la filtración natural en este espacio, es decir, $\mathcal{F}_{t_k} := \sigma(\pi_{k'} : k' \leq k)$, donde $\pi_k(\omega) := \omega_k$.

Definamos entonces lo que es una medida de riesgo Markoviana:

Definición 3.0.4 (Medida de riesgo Markoviana). Dado que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ está soportado en un espacio de producto progresivamente revelado definido a través de $\{(\Omega_k, \Sigma_k)\}_{k=1}^K$, una medida de riesgo que puede descomponerse en un paso se dice que es Markoviana si existe un proceso estocástico $\mathbb{F}$ medible $\theta_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $k = 0, \dots, K$, que sigue algunas dinámicas $\theta_{k+1}(\omega) = f(\theta_k(\omega), \omega_k)$ para alguna $f : \mathbb{R}^m \times \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}^m$, y alguna $\bar{\rho}_k : \mathcal{L}_p(\Omega_{k+1}, \Sigma_{k+1}, \mathbb{P}_{k+1}) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mathbb{P}_{k+1}$ la marginalización de $\mathbb{P}$ en Ω_{k+1} tal que:

$$\rho_k(X, \omega) = \bar{\rho}_k(\bar{\Pi}_k(X, \omega), \theta_k(\omega))$$

donde $\bar{\Pi}_k(X, \omega)$ es una variable aleatoria en $\mathcal{L}_p(\Omega_{k+1}, \Sigma_{k+1}, \mathbb{P}_{k+1})$ definida como $\bar{\Pi}_k(X, \omega, \bar{\omega}_{k+1}) = X(\omega_{1:k}, \bar{\omega}_{k+1}, \omega_{k+1:K})$.

Finalmente, dado que la medida de riesgo que puede descomponerse en este documento se utilizará en un mercado financiero libre de arbitraje, se puede formular una suposición que impone la suposición del mercado acotado 4.0.1 en cada transformación de riesgo condicional.

Suposición 3.0.2 (Riesgo de mercado condicional acotado). Una medida de riesgo que puede descomponerse en un paso ρ se dice que expresa riesgo de mercado condicional acotado si cada mapeo de riesgo condicional ρ_k satisface las siguientes propiedades.

$$0 \geq \inf_{\xi_k, \dots, \xi_{K-1}} \rho_{k,K} \left(- \sum_{\ell=k}^K \xi_\ell \Delta S_{\ell+1} \right) > -\infty \text{ casi seguramente}$$

donde $\rho_{k,K}(X) := \rho_k(\rho_{k+1}(\dots \rho_{K-1}(X) \dots))$. Además, si es condicionalmente invariante a escala, entonces $\inf_{\xi_k, \dots, \xi_{K-1}} \rho_{k,K} \left(- \sum_{\ell=k}^K \xi_\ell \Delta S_{\ell+1} \right) = 0$.

En lo que sigue, derivamos ecuaciones dinámicas que pueden ser usadas para calcular el precio de riesgo equitativo de opciones de estilo europeo en el comercio en tiempo

discreto. Además, explotamos las propiedades de invariancia traslacional y markovianas para reducir la dimensión del espacio de estados requerido para formular las ecuaciones de Bellman.

3.1. Opciones de Estilo Europeo

Para evaluar el precio de riesgo equitativo de opciones de la forma $F(S_T, Y_T)$ en tiempo discreto con medidas de riesgo convexas, como se describe en la Proposición 3.0.1, se deben resolver los problemas (1a) y (1b) bajo el conjunto factible de estrategias $\bar{X}(0)$.

Proposición 3.0.2. *Dado que ρ_e y ρ_c son medidas de riesgo que pueden descomponerse en un paso como se define en la Definición 3, entonces $\mathcal{E}(0) = V_0^e$ y $\mathcal{C}(0) = V_0^c$, donde cada V_k^e y V_k^c para $k = 0, \dots, K$ se definen de la siguiente manera:*

Modelo del Escritor:

$$V_k^e(\omega) := \inf_{\xi_k} \rho_k^e(-\xi_k \Delta S_{k+1} + V_{k+1}^e, \omega), \quad k = 0, \dots, K-1$$

$$V_K^e(\omega) := F(S_K(\omega), Y_K(\omega)).$$

Modelo del Comprador:

$$V_k^c(\omega) := \inf_{\xi_k} \rho_k^c(-\xi_k \Delta S_{k+1} + V_{k+1}^c, \omega), \quad k = 0, \dots, K-1$$

$$V_K^c(\omega) := -F(S_K(\omega), Y_K(\omega)),$$

y asumiendo que cada $V_k^e \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$ y $V_k^c \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$. Además, la política de cobertura de riesgo mínima tanto para el escritor como para el comprador se puede describir respectivamente como:

$$\xi_k^{e*}(\omega) \in \arg \min_{\xi_k} \rho_k^e(-\xi_k \Delta S_{k+1} + V_{k+1}^e, \omega)$$

para todo $k = 1, \dots, K-1$

$$\xi_k^{c*}(\omega) \in \arg \min_{\xi_k} \rho_k^c(-\xi_k \Delta S_{k+1} + V_{k+1}^c, \omega)$$

para todo $k = 1, \dots, K-1$

Demostración. Se hace énfasis en proporcionar los argumentos que respaldan las afirmaciones para el modelo del vendedor, ya que estos son análogos al modelo del comprador. Al hacerlo, seguiremos de cerca la teoría presentada en Pichler y col. (2022). Comenzamos construyendo el llamado sistema de preferencia aditiva $\{\mathcal{R}_{k,l}\}_{(k,l) \in \{0,\dots,K\}^2: k < l}$ (también conocido como una medida de riesgo dinámica) basada en ρ^e , donde cada $\mathcal{R}_{k,l} : \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}) \times \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{P}) \times \dots \times \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_l, \mathbb{P})$ toma la forma:

$$\mathcal{R}_{k,\ell}(Z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_\ell) := \rho_k^e \left(\rho_{k+1}^e \left(\dots \rho_K^e \left(\sum_{k'=k}^{\ell} Z_{k'} \right) \dots \right) \right),$$

para todo $0 \leq k < \ell \leq K$

Con base en esta definición de $\mathcal{R}_{k,\ell}$, se desprende sin mayor dificultad que:

$$\varrho^e(0) = \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \mathcal{R}_{0,K}(0, 0, \dots, 0, F(S_T, Y_T) - X_K)$$

Dado que ρ^e se puede descomponer en un paso, se puede mostrar que $\mathcal{R}$ es tanto 'Monótona' como 'Rekursiva' (ver definiciones 2.3 y 4.1 en Pichler y col. (2022)). En particular, para la monotonía tenemos que:

para todo $Z_k, \dots, Z_\ell$ implica que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{k,\ell}(Z_k, \dots, Z_\ell) &= \rho_k^e \left(\rho_{k+1}^e \left(\dots \rho_{v-1}^e \left(\rho_v^e \left(\dots \rho_K^e \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \left. \sum_{k'=k}^{\ell} Z_{k'} \right) \dots \right) \right. \right. \\ &= \rho_k^e \left(\rho_{k+1}^e \left(\dots \rho_{v-1}^e \left(\sum_{k'=k}^{v-1} Z_{k'} + \rho_v^e \left(\dots \rho_K^e \left(\sum_{k'=v}^{\ell} Z_{k'} \right) \dots \right) \right. \right. \right. \\ &= \rho_k^e \left(\rho_{k+1}^e \left(\dots \rho_{v-1}^e \left(\sum_{k'=k}^{v-1} Z_{k'} + \mathcal{R}_{v,\ell}(Z_v, \dots, Z_\ell) \right) \dots \right) \right. \\ &= \rho_k^e \left(\rho_{k+1}^e \left(\dots \rho_{v-1}^e \left(\rho_v^e \left(\dots \rho_K^e \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \left. \sum_{k'=k}^{v-1} Z_{k'} + \mathcal{R}_{v,\ell}(Z_v, \dots, Z_\ell) \right) \dots \right) \right. \right. \\ &= \mathcal{R}_{k,v}(Z_k, \dots, Z_{v-1}, \mathcal{R}_{v,\ell}(Z_v, \dots, Z_\ell)) \end{aligned}$$

donde explotamos la monotonía, la definición de $\mathcal{R}_{v,\ell}$ y la invariancia de transición condicional de ρ_k^e para todos $k = v, \dots, K$.

Verificando estas condiciones, la Proposición 4.0.2 y algunas aplicaciones son las que siguen en la Sección 4 de Pichler y col. (2022) permiten concluir que:

$$\begin{aligned} \varrho^e(0) &= \inf_{X \in \mathcal{X}(0)} \mathcal{R}_{0,K}(0, 0, \dots, 0, F(S_T, Y_T) - X_K) \\ &= \inf_{\xi_0} \mathcal{R}_{0,1} \left(0, \inf_{\xi_1} \mathcal{R}_{1,2} \left(0, \dots, \inf_{\xi_{K-1}} \mathcal{R}_{K-1,K}(0, F(S_T, Y_T) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - X_K) \dots \right) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q^e(0) = \bar{V}_0^e(0, \omega)$ donde

$$\begin{aligned}\bar{V}_k^e(X_k, \omega) &:= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(\bar{V}_{k+1}^e(X_k + \xi_k \Delta S_{k+1}), \omega) \\ \bar{V}_K^e(X_K, \omega) &:= F(S_T(\omega), Y_T(\omega)) - X_K(\omega)\end{aligned}$$

Además, el conjunto de políticas óptimas para el problema (1a) debe contener las siguientes políticas de cobertura:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_k^{e*}(X_k, \omega) &\in \arg \min_{\xi_k} \rho_k^e(\bar{V}_{k+1}^e(X_k + \xi_k \Delta S_{k+1}), \omega) \\ &\text{para todo } k = 0, \dots, K-1\end{aligned}$$

Sin embargo, por la invariancia de traslación condicional, sabemos que:

$$\bar{V}_K^e(X_K, \omega) = V_K^e(\omega) - X_K(\omega)$$

Y recursivamente deducimos que:

$$\begin{aligned}\bar{V}_k^e(X_k, \omega) &= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(\bar{V}_{k+1}^e(X_k + \xi_k \Delta S_{k+1}), \omega) \\ &= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(V_{k+1}^e - X_k - \xi_k \Delta S_{k+1}, \omega) \\ &= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(V_{k+1}^e - \xi_k \Delta S_{k+1}, \omega) - X_k(\omega) \\ &= V_k^e(\omega) - X_k(\omega)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $q^e(0) = \bar{V}_0^e(0, \omega) = V_0^e(\omega)$. Un razonamiento similar confirma que el conjunto de políticas óptimas para el problema (1a) contiene para todos $k = 0, \dots, K-1$

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_k^{e*}(X_k, \omega) &\in \arg \min_{\xi_k} \rho_k^e(\bar{V}_{k+1}^e(X_k + \xi_k \Delta S_{k+1}), \omega) \\ &= \arg \min_{\xi_k} \rho_k^e(V_{k+1}^e - \xi_k \Delta S_{k+1}, \omega) - X_k(\omega) \\ &= \arg \min_{\xi_k} \rho_k^e(V_{k+1}^e - \xi_k \Delta S_{k+1}, \omega),\end{aligned}$$

por lo tanto, equivalente a $\bar{\xi}_k^{e*}(\omega)$. Concluyendo la demostración. $\square$

Demostración. Luego se obtiene que si el espacio de probabilidad filtrado está soportado en un espacio producto progresivamente revelado, si tanto ΔS_k como $\Delta Y_k := Y_k - Y_{k-1}$ son medibles en Σ_k , de modo que coexisten en $\mathcal{L}p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y en $\mathcal{L}p(\Omega_k, \Sigma_k, \mathbb{P}_k)$, y si tanto ρ^e como ρ^c satisfacen la suposición Markoviana con respecto a θ^e y θ^c respectivamente, entonces podemos derivar ecuaciones de Bellman de dimensión finita, que nos permiten calcular el precio de riesgo equitativo. Estas se pueden definir de la siguiente manera:

$$\tilde{V}_K^e(S_K, Y_K, \theta_K^e) := F(S_K, Y_K)$$

y recursivamente:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_k^e(S_k, Y_k, \theta_k^e) := & \inf_{\xi_k} \bar{\rho}_k(-\xi_k \Delta S_{k+1} + \tilde{V}_{k+1}^e(S_k + \Delta S_{k+1}, Y_k \\ & + \Delta Y_{k+1}, f_k(\theta_k^e)), \theta_k^e) \end{aligned}$$

donde cada $\tilde{f}_k(\theta_k^e)$ puede ser considerado una variable aleatoria en $\mathcal{L}_p(\Omega_{k+1}, \Sigma_{k+1}, \mathbb{P}_{k+1})$. Estas ecuaciones tienen la propiedad de que:

$$V_K^e(\omega) = \tilde{V}_K^e(S_K(\omega), Y_K(\omega), \theta_K^e(\omega))$$

y recursivamente vemos que si $V_{k+1}^e(\omega) = \tilde{V}_{k+1}^e(S_{k+1}(\omega), Y_{k+1}(\omega), \theta_{k+1}^e(\omega))$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} V_k^e(\omega) &= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(-\xi_k \Delta S_{k+1} + V_{k+1}^e, \omega) \\ &= \inf_{\xi_k} \rho_k^e(-\xi_k \Delta S_{k+1} + \tilde{V}_{k+1}^e(S_{k+1}, Y_{k+1}, \theta_{k+1}^e), \omega) \\ &= \inf_{\xi_k} \bar{\rho}_k^e(\bar{\Pi}_k(-\xi_k \Delta S_{k+1} \\ &\quad + \tilde{V}_{k+1}^e(S_{k+1}, Y_{k+1}, \theta_{k+1}^e)), \theta_k^e(\omega)) \\ &= \inf_{\xi_k} \bar{\rho}_k^e(-\xi_k \Delta S_{k+1} + \tilde{V}_{k+1}^e(S_k(\omega) + \Delta S_{k+1}, Y_k(\omega) \\ &\quad + \Delta Y_{k+1}, f(\theta_k^e)), \theta_k^e(\omega)) \\ &= \tilde{V}_k^e(S_k(\omega), Y_k(\omega), \theta_k^e(\omega)) \end{aligned}$$

De estas derivaciones se ve que $q^e(0) = V_0^e = \tilde{V}_0^e(S_0, Y_0, \theta_0^e)$. En el caso del comprador, derivaciones análogas nos llevan a las siguientes ecuaciones de Bellman:

$$\tilde{V}_K^c(S_K, Y_K, \theta_K^c) := -F(S_K, Y_K)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{V}_k^c(S_k, Y_k, \theta_k^c) := & \inf_{\xi_k} \bar{\rho}_k^c(-\xi_k \Delta S_{k+1} \\ & + \tilde{V}_{k+1}^c(S_k + \Delta S_{k+1}, Y_k + \Delta Y_{k+1}, f_k(\theta_k^c)), \theta_k^c) \end{aligned}$$

que pueden ser utilizadas para calcular $q^c(0) = V_0^c = \tilde{V}_0^c(S_0, Y_0, \theta_0^c)$. Podemos entonces concluir que $p_0^* = (\tilde{V}_0^e(S_0, Y_0, \theta_0^e) - \tilde{V}_0^c(S_0, Y_0, \theta_0^c)) / 2$. $\square$

Capítulo 4

Discusión Parte 3: Aplicaciones y Simulación Numérica

Lo que buscamos en esta sección es llevar a la práctica la teoría que desarrollamos en la discusión para poder trabajar en mercados incompletos.

Para poder hacer esto, vamos a apoyarnos en algunos nuevos conceptos de redes neuronales que son necesarios para poder llevar esto a la práctica porque nos encontramos con un impedimento muy serio dado el problema de la dimensionalidad o ‘curse of dimensionality’ como se conoce en la literatura científica, el cual fue un término introducido por Richard Bellman en el contexto de problemas de programación dinámica, como la formulación que acabamos de ver en la discusión. Bellman y col. (1957)

Sin embargo, al reformular este problema de programación dinámica como un problema de aprendizaje profundo por refuerzo, encontramos un camino donde sí es práctico evitar este problema de la maldición de la dimensionalidad al usar muchas características para modelar el mercado financiero (favor referirse a Carbonneau y Godin (2021)).

Primero, en esta sección se busca introducir una noción muy interesante de la literatura que precede a la introducción del PRE Bertsimas y col. (2001), pero con la modificación introducida en Carbonneau y Godin (2021) para el esquema PRE.

Dentro de uno de los abordajes previos al problema de dar un precio razonable tanto para el comprador como para el escritor de la opción, se introdujo una noción que nos permite capturar cuán incompleto es un mercado en primer lugar.

Definición 4.0.1 (ϵ^* medida de completitud del mercado). Definimos ϵ^* como el nivel de riesgo residual que enfrenta el coberturista (hedger) de cualquier posición short o long en el reclamo contingente si el precio es el precio de riesgo equitativo y las estrategias de cobertura óptima fueron utilizadas para ambas posiciones:

$$\epsilon^* := \epsilon^{(L)}(-C_0^*) = \epsilon^{(S)}(C_0^*)$$

donde ϵ^* y ϵ^*/C_0^* se refieren respectivamente a la medida de exposición residual al riesgo por contrato derivativo y por dólar invertido.

Siguiendo lo que se probó en Carbonneau y Godin (2021) ϵ^* es el promedio de la exposición al riesgo medida de tanto posiciones short como long óptimamente cubiertas sobre el reclamo contingente Φ , asumiendo que el valor inicial de la cartera sea cero.

Es decir,

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon^{(L)}(0) + \epsilon^{(S)}(0)}{2}$$

En esta sección, se busca presentar una implementación de la teoría previamente discutida, utilizando métodos diferentes de aprendizaje automático, en particular de aprendizaje por refuerzo.

Además de esto, se va a implementar esto con respecto a una medida de riesgo particular, el CVaR, el cual nos da un promedio del valor en riesgo y tiene la propiedad de ser una medida coherente de riesgo.

Se propone una solución factible para implementar el marco de valoración de riesgo equitativa. El enfoque utiliza el reciente algoritmo de cobertura profunda de Buehler y col. (2019) para entrenar dos redes neuronales distintas que se utilizan para aproximar la estrategia de cobertura óptima, respectivamente, para la posición larga y corta en el derivado.

Definición 4.0.2 (Red neuronal de propagación directa). Sea $X \in \mathbb{R}^{d_{in} \times 1}$ un vector de características de dimensiones $d_{in} \in \mathbb{N}$ y $L, d_1, \dots, d_{L-1}, d_{out} \in \mathbb{N}$ con $L \geq 2$.

Se define una red neuronal de propagación directa (RNPD) como la aplicación $F_\theta : \mathbb{R}^{d_{in}} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{out}}$ con parámetros entrenables θ :

$$F_\theta(X) := A_L \circ F_{L-1} \circ \dots \circ F_1,$$

$$F_l := \sigma \circ A_l, \quad l = 1, \dots, L-1,$$

donde $\circ$ denota el operador de composición de funciones, y para cualquier $l = 1, \dots, L$, la función A_l se define como $A_l(Y) := W^{(l)}Y + b^{(l)}$ con

- $W^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_{in}}, b^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_1 \times 1}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d_{in} \times 1}$ si $l = 1$, - $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l \times d_{l-1}}, b^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l \times 1}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d_{l-1} \times 1}$ si $l = 2, \dots, L-1$ y $L \geq 3$, - $W^{(L)} \in \mathbb{R}^{d_{out} \times d_{L-1}}, b^{(L)} \in \mathbb{R}^{d_{out} \times 1}$ y $Y \in \mathbb{R}^{d_{L-1} \times 1}$ si $l = L$.

La función de activación $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se aplica elemento por elemento a las salidas de las funciones de preactivación A_l . Además,

$$\theta := \{W^{(1)}, \dots, W^{(L)}, b^{(1)}, \dots, b^{(L)}\}$$

es el conjunto de parámetros entrenables de la RNPd.

La siguiente definición de conjuntos de RNPd se usará a lo largo del resto de la sección para definir, por ejemplo, las dos redes neuronales utilizadas para cubrir la posición larga y corta en el derivado, la solución factible para el marco de valoración de y el procedimiento de optimización de redes neuronales.

Definición 4.0.3 (Conjuntos de RNPd). Sea $NN_{\infty}^{\sigma, d_{in}, d_{out}}$ el conjunto de todas las RNPd que aplican de $\mathbb{R}^{d_{in}} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{out}}$ como en la Definición 5.0.2 con una función de activación fija σ y un número arbitrario de capas y neuronas por capa. Dado que se considera una única función de activación en la sección numérica, sea $NN_{\infty}^{d_{in}, d_{out}} := NN_{\infty}^{\sigma, d_{in}, d_{out}}$. Además, para todo $M \in \mathbb{N}$ y $R_M \in \mathbb{N}$ que dependa de M , sea $\Theta_{M, d_{in}, d_{out}} \subseteq \mathbb{R}^{R_M}$. Definimos $NN_{M, d_{in}, d_{out}}$ como el conjunto de redes neuronales F_{θ} como en (5.0.2) con $\theta \in \Theta_{M, d_{in}, d_{out}}$:

$$NN_{M, d_{in}, d_{out}} := \{F_{\theta} : \theta \in \Theta_{M, d_{in}, d_{out}}\}.$$

La sucesión de conjuntos $\{NN_{M, d_{in}, d_{out}}\}_{M \in \mathbb{N}}$ se asume que tiene las siguientes propiedades:

- Para cualquier $M \in \mathbb{N}$: $NN_{M, d_{in}, d_{out}} \subset NN_{M+1, d_{in}, d_{out}}$ donde $\subset$ denota inclusión estricta,
- $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} NN_{M, d_{in}, d_{out}} = NN_{\infty}^{d_{in}, d_{out}}$.

4.0.1. PRE con dos redes neuronales

Para formular cómo dos redes neuronales distintas pueden aproximar arbitrariamente bien la cobertura óptima de la posición larga y corta en un derivado, se aplica la siguiente suposición para el resto del documento.

Suposición 4.0.1. *Para cada posición (larga y corta) en el derivado, existe una función $f : \mathbb{R}^{\tilde{D}} \rightarrow \mathbb{R}^D$ (distinta para la posición larga y corta) tal que en cada fecha de rebalanceo (vale la pena explicar el rebalanceo de una cartera: este ocurre cuando el gestor de la cartera hace intercambios entre la asignación de capitales de los activos mediante la compraventa de diferentes cantidades de los mismos para mantenerse alineado con su estrategia de inversión, tomando en cuenta las fluctuaciones en los precios de los activos que ocurren con el tiempo en cualquier mercado de capitales), la cobertura óptima es de la forma $\delta_{n+1}^{(1:D)} = f(S_n, V_n, I_n, T - t_n)$ donde $\tilde{D} := D + 2 + \dim(I_n)$ con I_n siendo algún vector aleatorio que engloba información necesaria y relevante para calcular la estrategia de cobertura óptima, que depende del marco de mercado considerado.*

Nótese que la Suposición 5.0.1 típicamente se cumple para procesos $\{I_n\}_{n=0}^N$ de baja dimensión cuando se asume alguna forma de dinámica de Markov común en la literatura de cobertura. Véase, por ejemplo, François y col. (2014) para el caso de modelos con cambio de régimen.

En lo que sigue, L y S usados tanto como subíndices y superíndices denotan respectivamente las coberturas de posición larga y corta.

Definición 4.0.4 (Cobertura con dos redes neuronales). Sea $X_n := (S_n, V_n, I_n, T - t_n) \in \mathbb{R}^{\tilde{D}}$ el vector de características para cada tiempo de negociación $t_n \in \{t_0, \dots, t_{N-1}\}$. Para algún $M_L \in \mathbb{N}$, sea $F_\theta^L \in NN_{M_L, \tilde{D}, D}$ una RNPD. Dado X_n como entrada, F_θ^L produce un vector D-dimensional del número de acciones de cada uno de los D activos riesgosos mantenidos en la cartera de cobertura de la posición larga durante el período $(t_n, t_{n+1}]$, es decir, $\delta_{n+1}^{(1:D)} = F_\theta^L(X_n)$. De manera similar, para algún $M_S \in \mathbb{N}$, $F_\theta^S \in NN_{M_S, \tilde{D}, D}$ es una RNPD distinta que calcula la posición en los D activos riesgosos para cubrir la posición corta en la opción en cada paso de tiempo. Estas dos RNPD se denominan la NN-larga y NN-corta.

Comentario 4.0.1. En el enfoque del presente trabajo, las dos redes neuronales se entrenan por separado para minimizar diferentes funciones de costo. Como tal, F_θ^L y F_θ^S posiblemente tendrán una estructura diferente, por ejemplo, un diferente número de capas, un número de neuronas por capa y diferentes valores de parámetros entrenables.

El problema de evaluar la exposición al riesgo medida de las posiciones largas y cortas bajo cobertura óptima ahora puede formularse como un problema clásico de optimización de aprendizaje profundo. Dado que la entrada y salida de F_θ^L y F_θ^S son siempre de dimensiones $\tilde{D}$ y D respectivamente, sean $\Theta_{M_L} := \Theta_{M_L, \tilde{D}, D}$ y $\Theta_{M_S} := \Theta_{M_S, \tilde{D}, D}$ los conjuntos de valores de parámetros entrenables como en (5.0.4) para la NN-larga y NN-corta respectivamente.

4.0.2. Riesgo de lado largo y corto con dos redes neuronales

Para $M_L, M_S \in \mathbb{N}$, defínase $\pi^{(M_L)}(V_0)$ y $\pi^{(M_S)}(V_0)$ como la exposición al riesgo medida de la posición larga y corta en el derivado si F_θ^L y F_θ^S se utilizan para calcular las estrategias de cobertura y el valor inicial. La cartera de cobertura es V_0 :

$$\pi^{(M_L)}(V_0) := \min_{\theta \in \Theta_{M_L}} \rho \left(-\Phi(S_N, Z_N) - B_N(V_0 + G_N^{\delta^{(L, \theta)}}) \right), \quad (4.1)$$

$$\pi^{(M_S)}(V_0) := \min_{\theta \in \Theta_{M_S}} \rho \left(\Phi(S_N, Z_N) - B_N(V_0 + G_N^{\delta^{(S, \theta)}}) \right), \quad (4.2)$$

donde $\delta^{(L, \theta)}$ y $\delta^{(S, \theta)}$ en (3.4) y (3.5) deben entenderse respectivamente como las estrategias de negociación obtenidas a través de F_θ^L y F_θ^S .

Comentario 2 Siguiendo pasos similares a los de la demostración de la Proposición 4.0.1, se puede demostrar que

$$\pi^{(M_L)}(V_0) = \pi^{(M_L)}(0) - B_N V_0, \quad \pi^{(M_S)}(V_0) = \pi^{(M_S)}(0) - B_N V_0.$$

Comentario 3 Supóngase que se satisface la Suposición 5.0.1. Utilizando el teorema de aproximación universal de funciones de Hornik (1991) que esencialmente establece que una RNPD aproxima funciones multivariadas arbitrariamente bien, Buehler y col. (2019) se muestra que para cualquier dinámica de precios de activos y reclamos contingentes suficientemente bien comportados e integrables (véase la Proposición 4.3 de su artículo):

$$\lim_{M_S \rightarrow \infty} \pi^{(M_S)}(0) = \pi^{(S)}(0), \quad \lim_{M_L \rightarrow \infty} \pi^{(M_L)}(0) = \pi^{(L)}(0). \quad (4.3)$$

Por lo tanto, este resultado muestra que para ambas posiciones, larga y corta, existe una RNPD grande que puede aproximar arbitrariamente bien la estrategia de cobertura óptima.

4.0.3. Fijación de precios bajo PRE y medida de ϵ -completitud con dos redes neuronales

Defínase $C_0^{(*,NN)}$ como el PRE si F_θ^L y F_θ^S se utilizan para calcular las estrategias de cobertura, es decir, $C_0^{(*,NN)} := C_0$ tal que:

$$\pi^{(M_L)}(-C_0) = \pi^{(M_S)}(C_0).$$

Además, sea $\epsilon^{(*,NN)}$ la medida de incompletitud del mercado si el precio del derivado es $C_0^{(*,NN)}$:

$$\epsilon^{(*,NN)} := \pi^{(M_L)}(-C_0^{(*,NN)}) = \pi^{(M_S)}(C_0^{(*,NN)}).$$

Comentario 4 Siguiendo pasos similares a los de la demostración del Teorema 2.1 y la Proposición 2.3 de Carboneau y Godin (2021), se puede demostrar que

$$C_0^{(*,NN)} = \frac{\pi^{(M_S)}(0) - \pi^{(M_L)}(0)}{2B_N}, \quad \epsilon^{(*,NN)} = \frac{\pi^{(M_L)}(0) + \pi^{(M_S)}(0)}{2}.$$

De aquí, toca entonces optimizar los parámetros de las redes neuronales.

4.0.4. Procedimiento de optimización de redes neuronales

A continuación, se describe el procedimiento para entrenar las dos redes neuronales, una para la posición larga y otra para la posición corta.

Este procedimiento sigue el algoritmo de cobertura profunda de Buehler y col. (2019) y se basa en minimizar la pérdida cuadrática esperada de la cobertura.

4.0.5. Algoritmo de cobertura profunda

El algoritmo de cobertura profunda busca entrenar una red neuronal para replicar el precio de un derivado bajo la medida física. Dado un conjunto de datos $\{(S_t^i, Z_t^i)\}_{i=1}^N$, que representa las trayectorias de precios y factores de riesgo observados en el mercado, el objetivo es minimizar la siguiente función de pérdida:

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\Phi(S_T^i, Z_T^i) - G(S_{0:T}^i; \theta) \right)^2$$

donde θ representa los parámetros de la red neuronal y $G(S_{0:T}^i; \theta)$ es la estimación del precio del derivado basada en la trayectoria $S_{0:T}^i$ utilizando la red neuronal entrenada.

4.0.6. Optimización de los parámetros

Para optimizar los parámetros θ , se emplea el método de descenso de gradiente estocástico (SGD) o sus variantes, como Adam (ver Goodfellow (2016) para un tratamiento mas detallado de estos metodos). El procedimiento de optimización puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Inicialización de los parámetros θ de la red neuronal.
2. Para cada iteración: a. Seleccionar un mini-batch de muestras $\{(S_t^i, Z_t^i)\}_{i \in \mathcal{B}}$. b. Calcular la pérdida $\mathcal{L}(\theta)$ en el mini-batch. c. Actualizar los parámetros θ utilizando la regla de SGD:

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta)$$

donde η es la tasa de aprendizaje.

3. Repetir el paso 2 hasta la convergencia.

Ahora, finalmente veamos la implementación a nivel conceptual por Carbonneau y Godin (2021) de esto aplicándolo al CVaR:

4.0.7. Procedimiento numérico

Se considera un único activo riesgoso (es decir, $D = 1$) de precio inicial $S_0 = 100$. Se puede asumir que es una acción que no paga dividendos. La tasa libre de riesgo continua

anualizada es $r = 0.02$. Se aplica un rebalanceo diario con 260 días hábiles por año, es decir, $t_i - t_{i-1} = 1/260$ para $i = 1, \dots, N$. El reclamo contingente a valorar es una opción put europea vanilla sobre el activo riesgoso con vencimiento $T = 60/260$. Se consideran diferentes niveles de cercanía al valor del activo subyacente: $K = 90$ para OTM, $K = 100$ para at-the-money (ATM) y $K = 110$ para in-the-money (ITM). Se asume que la medida de riesgo convexa utilizada por el coberturista es la medida de riesgo CVaR.

4.0.8. Modelo de cambio de régimen

Para $n = 1, \dots, N$, se asume, a menos que se indique lo contrario, que los rendimientos logarítmicos diarios $y_n := \log(S_n/S_{n-1})$ siguen un modelo gaussiano de cambio de régimen (RS). Los modelos RS tienen la capacidad de reproducir hechos estilizados ampliamente aceptados de los rendimientos de activos, tales como heteroscedasticidad, autocorrelación en rendimientos absolutos, efecto de apalancamiento y colas pesadas, véase, por ejemplo, Ang y Timmermann (2012).

Bajo los modelos RS, los rendimientos logarítmicos dependen de un proceso de tiempo discreto no observable. Sea $h = \{h_n\}_{n=0}^N$ una cadena de Markov de tiempo discreto que toma valores en $\{1, \dots, H\}$ para un entero positivo H , donde h_n es el régimen o estado del mercado durante el período $[t_n, t_{n+1})$. Sean $\{\gamma_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{H,H}$ las probabilidades de transición homogéneas de la cadena de Markov, donde para $n = 0, \dots, N-1$:

$$P(h_{n+1} = j | F_n, h_n, \dots, h_0) = \gamma_{h_n, j}, \quad j = 1, \dots, H.$$

Sea $\Delta := 1/260$. Se asume que los rendimientos logarítmicos diarios tienen la siguiente dinámica:

$$y_{n+1} = \mu_{h_n} \Delta + \sigma_{h_n} \sqrt{\Delta} \epsilon_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

donde $\{\epsilon_n\}_{n=1}^N$ son variables aleatorias normales estándar independientes y $\{\mu_i, \sigma_i\}_{i=1}^H$ son los parámetros anuales del modelo con $\mu_i \in \mathbb{R}$ y $\sigma_i > 0$.

4.0.9. Estructura de la red neuronal

El entrenamiento de la NN-larga y NN-corta se realiza como se describe en la sección previa con 100 épocas, un tamaño de minibatch de 1,000 sobre un conjunto de entrenamiento (dentro de la muestra) de 400,000 trayectorias simuladas independientes y una tasa de aprendizaje de 0.0005 con el algoritmo Adam (ver Goodfellow (2016)). Los resultados numéricos presentados se obtienen de un conjunto de prueba (fuera de muestra) de 100,000 trayectorias independientes. La estructura de cada red neuronal es de 3 capas con 56 neuronas por capa y la función de activación es la unidad lineal rectificada (ReLU) donde $\text{ReLU}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ se define como $\text{ReLU}(x) := \max(0, x)$.

4.0.10. Modelo de Black-Scholes discreto

Bajo el modelo Black-Scholes discreto, se asume que los rendimientos logarítmicos son variables aleatorias normales i.i.d. con media y varianza diarias de respectivamente $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta$ y $\sigma^2\Delta$:

$$y_n = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\epsilon_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son los parámetros anuales del modelo, y $\{\epsilon_n\}_{n=1}^N$ son variables aleatorias normales estándar independientes. El vector de características de la red neuronal es $X_n = [S_n, V_n, T - t_n]$.

De forma subsiguiente, podemos ver una implementación en pseudocódigo del algoritmo arriba descrito:

4.1. Aplicación: Cobertura de Opciones con Redes Neuronales

Algorithm 3 Deep Hedging - Parte 1: Configuración y Generación de Datos

Entrada: Parámetros del mercado y hiperparámetros del modelo

FASE 1: Configuración inicial y generación de datos

Definir parámetros del mercado:

- $\sigma = 0.1952$, $\mu = 0.0892$ (parámetros anuales)
- $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 60/260$, $r = 0.02$
- $n_{sims} = 500000$, $n_{timesteps} = 60$

Generar dataset de trayectorias BSM:

para $i = 1$ **to** n_{sims} **hacer**

 Generar $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ para $t = 1, \dots, n_{timesteps}$

$$S_t = S_0 \prod_{j=1}^t \exp\left((\mu - \sigma^2/2)h + \sigma\sqrt{h}Z_j\right)$$

fin para

Preprocesar precios: Aplicar transformación log-moneyness: $\tilde{S}_t = \log(S_t/K)$

Crear inputs de entrenamiento y prueba:

- train_input: $[n_{timesteps} + 1, 400000, 2]$ (precio + tiempo al vencimiento)
- test_input: $[n_{timesteps} + 1, 100000, 2]$

Calcular factores de descuento: $\text{disc}[t] = \exp(-r \cdot t \cdot h)$

Algorithm 4 Deep Hedging - Parte 2: Arquitectura y Entrenamiento

FASE 2: Arquitectura de la Red Neuronal

Definir clase DeepAgent con:

- Input: $[n_{timesteps} + 1, batch_size, 3]$ (precio, tiempo, valor portafolio)
- 2 capas ocultas con 56 neuronas cada una (activación ReLU)
- Capa de salida: 1 neurona (posición en el activo)
- Optimizador Adam con $\alpha = 0.0005$

FASE 3: Entrenamiento para posición SHORT

position_type $\leftarrow$ 'Short'

Inicializar FFNN_short

para época = 1 to *epochs* **hacer**

 pérdida_total $\leftarrow$ 0

para cada lote de tamaño *batch_size* **hacer**

$V_0 \leftarrow 0$ (valor inicial del portafolio)

para paso $t = 0$ to $n_{timesteps} - 1$ **hacer**

 input_t $\leftarrow [S_t, T - t, V_t]$ (concatenar características)

$\delta_t \leftarrow \text{FFNN}(\text{input_t})$ (posición óptima)

 factor $\leftarrow \exp(rh)$

$V_{t+1} \leftarrow V_t \cdot \text{factor} + \delta_t \cdot (S_{t+1} - S_t \cdot \text{factor})$

fin para

 payoff $\leftarrow \max(K - S_T, 0)$ (payoff de put)

 hedging_err $\leftarrow \text{payoff} - \exp(rT) \cdot G_T$ (error de cobertura)

 pérdida $\leftarrow \text{CVaR}_{\alpha=0.95}(\text{hedging_err})$ (riesgo condicional)

 Aplicar retropropagación y Adam optimizer

fin para

fin para

Algorithm 5 Deep Hedging - Parte 3: Evaluación y Cálculo del PRE

FASE 4: Entrenamiento para posición LONG $\text{position_type} \leftarrow \text{'Long'}$ Repetir FASE 3 con $\text{hedging_err} \leftarrow -\text{payoff} - \exp(rT) \cdot G_T$ **FASE 5: Evaluación y cálculo del PRE****Para posición SHORT:**

Cargar modelo entrenado

Calcular estrategias en conjunto de prueba

 $\text{CVaR}_{.95_short_test} \leftarrow \text{measured_risk_exposures}(\dots)$ **Para posición LONG:**

Cargar modelo entrenado

Calcular estrategias en conjunto de prueba

 $\text{CVaR}_{.95_long_test} \leftarrow \text{measured_risk_exposures}(\dots)$ **Calcular métricas finales:**
$$\text{PRE} \leftarrow \frac{\text{CVaR}_{.95_short_test} - \text{CVaR}_{.95_long_test}}{2 \exp(rT)}$$
$$\epsilon \leftarrow \frac{\text{CVaR}_{.95_long_test} + \text{CVaR}_{.95_short_test}}{2}$$
Salida: PRE, ϵ

Algorithm 6 Función para medir exposiciones de riesgo

Entrada: δ (estrategias), paths (precios), disc_paths (factores descuento), strike, position_type

Salida: CVaR calculado para las estrategias dadas

Desnormalizar precios:

si prepro_stock == "Log-moneyness" **entonces**

paths $\leftarrow K \cdot \exp(\text{paths})$

si no si prepro_stock == "Log" **entonces**

paths $\leftarrow \exp(\text{paths})$

fin si

discount_price $\leftarrow \text{paths} \times \text{disc_paths}$

inc_disc_ret $\leftarrow \text{discount_price}[1:] - \text{discount_price}[: -1]$

option_payoff $\leftarrow \max(K - \text{paths}[-1], 0)$

disc_gain $\leftarrow \sum(\delta \times \text{inc_disc_ret})$

cumulative_factor $\leftarrow 1 / \text{disc_paths}[-1]$

si position_type == 'Short' **entonces**

hedging_err $\leftarrow \text{option_payoff} - \text{cumulative_factor} \times \text{disc_gain}$

si no si position_type == 'Long' **entonces**

hedging_err $\leftarrow - \text{option_payoff} - \text{cumulative_factor} \times \text{disc_gain}$

fin si

loss $\leftarrow \text{mean}(\text{sort}(\text{hedging_err})[\text{int}(\alpha \times \text{len}(\text{hedging_err})) :])$

retornar loss

Capítulo 5

Conclusión

Con la teoría y los algoritmos hasta ahora discutidos en este trabajo de investigación, se tienen los mejores métodos conocidos hasta la fecha para resolver el problema de cobertura y valoración de opciones cuando lo vemos en el escenario más cercano a la realidad, que es el de los mercados incompletos.

Además, es posible tomar en cuenta las fricciones de los mercados bursátiles, como los costos de transacción y las maneras dispares que pueden tener compradores y vendedores de opciones para evaluar el riesgo.

Así pues, se espera que la misma sirva para que quien necesite obtener precios que mejoren la liquidez y la participación en estos mercados de transferencia de riesgo pueda disponer de ella y de los métodos aquí expuestos.

Esta también permite evaluar de forma indirecta el grado de incompletitud de ciertos mercados financieros, vía el algoritmo dado. Esto puede ser importante para quienes quieran medir medidas alternas del riesgo de mercado, en particular la dificultad de transferir ciertos riesgos en mercados de poca profundidad.

Un tema pendiente a explorar más allá para una investigación ampliada es extender estas técnicas al caso de las opciones americanas o exóticas.

Apéndice A

Fundamentos de Finanzas

Para poder tener una noción básica del mundo de las finanzas y del mercado bursátil, se requiere introducir nociones generales de finanzas y del tema a tratar en este escrito, que son las opciones (favor referirse a Hull (2009) para un tratamiento detallado).

A.0.1. Cartera

En primer lugar, es posible empezar por definir qué es una cartera y cómo se establece:

En el ámbito financiero, una cartera se refiere a un conjunto de activos financieros que una persona o entidad posee, como efectivo, seguridades mercadeables, acciones, bonos, bienes raíces, títulos, entre otros. Un ejemplo de una cartera sería el siguiente:

Cuadro A.1: Cartera de Inversión			
Activo	Cantidad	Precio (\$)	Total (\$)
Efectivo	1	2,500.00	2,500.00
Acciones AAPL	100	150.00	15,000.00
Bonos del Tesoro	50	100.00	5,000.00
ETF S&P 500	25	400.00	10,000.00
Seguridades Mercadeables	1	2,500.00	2,500.00
Total Cartera			35,000.00

Cuando tenemos una cartera, la diversificación juega un papel muy importante, la cual implica la distribución de los activos de manera estratégica para gestionar el riesgo y maximizar el rendimiento. Se busca que al tener activos menos correlacionados entre

sí, se mitiguen los riesgos de que por un evento adverso aislado, toda la cartera quede en peligro.

La selección y gestión de una cartera de inversión suele ser parte de la estrategia financiera de inversores individuales, fondos de inversión u otras entidades financieras.

La construcción y gestión de carteras de activos es tan importante que hay muchísimos autores que dedican obras a este tema.

La construcción de una cartera de inversión implica varios pasos, y la estrategia puede variar según los objetivos financieros, el horizonte de inversión (ósea el tiempo que el inversor está dispuesto a esperar por un retorno) y el perfil de riesgo del inversor.

Aquí hay algunos pasos comunes en el proceso de establecer una cartera de inversión:

- Establecer objetivos financieros dependiendo de si es una cartera de individuos, empresas o instituciones: Los objetivos financieros pueden ser la acumulación de fondos para la jubilación, capitalización, la educación de los hijos en el caso de individuos, para mejorar los dividendos y para financiar expansión, así como fusiones y adquisiciones en el caso de empresas, y para inversionistas institucionales como un fondo soberano o un fondo a perpetuidad para fundear una Universidad, garantizar la solvencia del desembolso anual contra el capital que se destina con los fines preestablecidos, por ejemplo fundear un centro de investigación en perpetuidad.
- Perfil de riesgo: Determinar la tolerancia al riesgo del inversor. Algunos inversores pueden estar dispuestos a asumir más riesgos en busca de mayores rendimientos, mientras que otros pueden preferir estrategias más conservadoras.
- Diversificación: Seleccionar una variedad de activos financieros para reducir el riesgo. La diversificación puede incluir diferentes clases de activos, como acciones, bonos, bienes raíces, por industria y geográficamente diversificar las inversiones.
- Asignación de activos:
Distribuir los recursos financieros entre diferentes clases de activos de acuerdo con la estrategia de diversificación y el perfil de riesgo. Esto puede implicar decidir qué porcentaje de la cartera se asignará a acciones, bonos u otros instrumentos financieros.
- Reevaluación periódica: Es importante revisar y ajustar la cartera periódicamente para asegurarse de que siga siendo coherente con los objetivos financieros y las condiciones del mercado.

A.0.2. Bolsa de Valores

También, es importante destacar a lo que se entenderá por Bolsa de Valores:

Es un sistema organizado donde se negocian valores financieros, que son instrumentos que representan activos o pasivos de una entidad. Estos mercados proporcionan un entorno donde los inversores pueden transaccionar instrumentos financieros: comprar y vender acciones, futuros, materias primas, bonos, opciones, renta fija, renta variable, hipotecas. La Bolsa de Valores facilita la transferencia con celeridad de recursos financieros entre inversores y emisores.

En los mercados financieros al incorporarse a la transferencia de activos hay cierta terminología que se debe conocer:

Long Position:

Definición: Un inversor toma un Long Position al comprar un activo con la perspectiva de que su precio aumentará en el futuro. La ganancia potencial se da si el precio del activo aumenta, ya que el inversor puede venderlo a un precio más alto que el de compra. El riesgo principal es que el precio del activo disminuya en el tiempo, lo que resultaría en pérdidas si se vende a un precio más bajo del que se compró.

Short Position:

Definición: Un inversor toma una Short Position al vender un activo que no posee con la perspectiva de que su precio disminuirá.

La ganancia potencial se da si el precio del activo disminuye, ya que el inversor puede comprar el activo a un precio más bajo del que lo vendió. Una Short Position se puede tomar sin cobertura o cubierta, cuando el inversor no posee los instrumentos se le llama sin cobertura y cuando los pide prestados se le llama cubierta. Tomarlos prestados requiere del pago de una tasa de interés a quien los prestó. En muchas bolsas de valores, está prohibido tomar una Short Position sin cobertura por los riesgos asociados.

El riesgo principal es que el precio del activo aumente en el tiempo, lo que obligaría al inversor a comprar el activo a un precio más alto del que lo vendió, resultando en pérdidas.

En la producción filmatográfica, *The Big Short*, se puede ver una exposición de este concepto en el contexto de la crisis financiera de 2008.

Volatilidad en los mercados financieros

Una medida de riesgo se da por el concepto de volatilidad, el cual debemos definir antes de continuar:

En los mercados financieros, la **volatilidad** es una medida estadística de la dispersión de los retornos de un activo financiero en un periodo de tiempo dado. Matemáticamente, la volatilidad se expresa como la desviación estándar (σ) de los retornos logarítmicos de un activo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}$$

Donde:

- R_i : Es el retorno logarítmico en el periodo i , calculado como $R_i = \ln \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)$, donde P_i es el precio del activo en el momento i .
- $\bar{R}$: Es el promedio de los retornos logarítmicos.
- N : Es el número total de observaciones.

La volatilidad puede interpretarse como un indicador del riesgo asociado a la variabilidad de los precios de un activo:

- **Alta volatilidad:** Señala grandes fluctuaciones en los precios, lo que implica tener un mayor riesgo.
- **Baja volatilidad:** Indica movimientos de precio más estables, lo que sugiere menor riesgo.

En la práctica, la volatilidad puede estimarse históricamente (volatilidad histórica) o inferirse del precio de las opciones sobre un activo (volatilidad implícita).

La capacidad de realizar operaciones de compra (long) y venta en corto (short), permite a los participantes del mercado aprovechar tanto los movimientos alcistas como bajistas en los precios de los activos, lo que permite controlar riesgos.

Estas estrategias también aportan liquidez y eficiencia al mercado de valores, al permitir que los inversores manifiesten sus opiniones sobre la evolución futura de los precios.

Ahora bien, más allá de tomar Long Position o Short Position en acciones o bonos, un inversor puede optar por mantener una parte de su cartera en efectivo y otra en instrumentos financieros (opciones).

A.0.3. Opciones

Una opción es un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de un activo subyacente.

Veamos qué se entiende por opciones:

Las opciones financieras son contratos que conceden a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente a un precio específico, conocido como precio de ejecución, en un plazo determinado o fecha de vencimiento.

Así se ve una opción en la práctica, a modo de ejemplo:

Cuadro A.2: Contrato de Opción de Compra (Call) sobre IBM

Característica	Detalle
Tipo de Opción	Call (Compra)
Activo Subyacente	Acciones IBM
Precio de Ejercicio (Strike)	\$150.00
Fecha de Vencimiento	15 de marzo de 2026
Prima por Contrato	\$5.50
Número de Contratos	10
Acciones por Contrato	100
Prima Total	\$5,500.00
Valor Nocional	\$150,000.00

A.0.4. Gestión de cartera

Una cartera se maneja con seguridades mercadeables, efectivo y opciones. Es común que los inversores, al evaluar cómo gestionar su cartera, destinen una parte de ella a efectivo y consideren el uso de opciones. A continuación, se explorarán las razones detrás de cada enfoque: Veamos algunas razones por las cuales asignar una parte de una cartera a efectivo (cash):

- **Liquidez y Flexibilidad:** Mantener una porción de la cartera en efectivo proporciona liquidez inmediata. Esto significa que puedes aprovechar oportunidades de inversión que puedan surgir rápidamente o cumplir con necesidades financieras urgentes sin tener que vender activos existentes.
- **Reducción de Riesgos y Volatilidad:** El efectivo actúa como un colchón en momentos de volatilidad del mercado. Puede ayudar a reducir la exposición a pérdidas cuando los mercados están a la baja y proporcionar estabilidad a la cartera.
- **Opcionalidad:** Mantener efectivo permite esperar momentos de oportunidad en el mercado. Cuando los precios de los activos bajan, puedes tener el capital disponible para comprar a precios más bajos.
- **Cobertura para Gastos Futuros:** Si tienes gastos planificados en el corto plazo, mantener una parte de la cartera en efectivo puede ser útil para cubrir estos gastos sin tener que vender activos en momentos inoportunos.

Antes de continuar, discutamos lo que es una opción call y put:

Opción Call: Una opción call otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de **comprar** un activo subyacente a un precio específico (*strike*) en o antes de una fecha determinada.

Opción Put: Una opción put otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de **vender** un activo subyacente a un precio específico (*strike*) en o antes de una fecha determinada.

Veamos algunas razones para asignar parte de una cartera a opciones:

- **Hedging (Cobertura):** Las opciones pueden utilizarse como instrumentos de cobertura para proteger la cartera contra movimientos adversos del mercado. Por ejemplo, comprar opciones de venta (puts) puede ayudar a limitar las pérdidas en caso de una caída significativa en el valor de las acciones.
- **Generación de Ingresos:** Al vender opciones, los inversionistas pueden generar ingresos adicionales. La venta de opciones de compra cubiertas sobre acciones que ya se poseen es una estrategia común para generar ingresos adicionales.
- **Especulación y Apalancamiento:** Al comprar opciones de compra (calls) o de venta (puts), los inversores pueden especular sobre movimientos futuros del mercado con un capital inicial relativamente pequeño. Las opciones también ofrecen la posibilidad de utilizar apalancamiento, lo que significa que puedes controlar una gran cantidad de activos con una inversión menor.
- **Ajuste de Estrategias:** Las opciones permiten realizar ajustes a la cartera sin tener que comprar o vender directamente activos subyacentes. Por ejemplo, un inversor puede utilizar opciones para ajustar la asignación de activos o cambiar la exposición al riesgo de la cartera.

A.0.5. Tipos de Opciones

Existen varios tipos de opciones, y las diferencias entre ellas se centran principalmente en los derechos y las restricciones que ofrecen al titular de la opción. Aquí hay una descripción de algunos tipos comunes de opciones:

- **Opciones Americanas:** En una opción americana, el titular tiene el derecho de ejercer la opción en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento. Esto brinda mayor flexibilidad al inversor, ya que puede aprovechar las condiciones favorables del mercado antes de la fecha de vencimiento.
- **Opciones Europeas:** En una opción europea, el titular solo puede ejercer la opción en la fecha de vencimiento. No se permite la ejecución antes de esa fecha. Esto puede afectar la estrategia de inversión, ya que el titular no puede aprovechar las oportunidades del mercado antes del vencimiento.

- Opciones Asiáticas: En una opción asiática, el pago del titular se basa en el precio promedio del activo subyacente durante un período específico antes del vencimiento. Esto puede ser un promedio diario, semanal o mensual, dependiendo de los términos del contrato. La idea es reducir la volatilidad a corto plazo.
- Opciones de Barrera: Tienen un nivel específico (barrera) que, si se alcanza, activa o desactiva la opción. Las opciones de barrera pueden ser up-and-in(activadas cuando el precio alcanza un nivel específico), up-and-out (desactivadas cuando el precio alcanza un nivel específico), y variantes similares para opciones de venta.
- Opciones de Rendimiento: También conocidas como opciones binarias, estas opciones pagan una cantidad fija o nada en absoluto, dependiendo de si se cumple o no una condición específica al vencimiento. Pueden ser opciones de efectivo o nada, activo o nada, entre otras.

Profundizando en más nociones relevantes de opciones, veamos ahora qué significa que una opción está cerca de su valor (at the money), dentro de su valor (in the money) o fuera de su valor (out of the money):

At the Money (ATM): Una opción se considera 'At the Money' cuando el precio de ejecución de la opción es igual o muy cercano al precio actual del activo subyacente. En este caso, la opción no tiene un valor intrínseco significativo y gran parte de su valor se compone de valor temporal.

In the Money (ITM): Una opción está 'In the Money' cuando el precio de ejercicio de una opción de compra es menor que el precio actual del activo subyacente, o el precio de ejercicio de una opción de venta es mayor que el precio actual del activo subyacente. En este escenario, la opción tiene valor intrínseco.

Out of the Money (OTM): Una opción se considera 'Out of the Money' cuando el precio de ejercicio de una opción de compra es mayor que el precio actual del activo subyacente, o el precio de ejercicio de una opción de venta es menor que el precio actual del activo subyacente. En este caso, la opción no tiene valor intrínseco y su valor se compone principalmente de valor temporal.

Vale la pena recalcar que no hay una relación lineal entre el precio del activo subyacente y el valor de ejecución de la opción. Si fuera así, no tendría importancia la fórmula de valuación de activos.

Con respecto a los tres escenarios que se pueden dar en las opciones, at the money, in the money y out of the money, sería conveniente ver un ejemplo:

Análisis de una opción call

Supongamos que tenemos una opción call con las siguientes características:

- **Precio de ejercicio (strike):** \$100.
- **Precio del activo subyacente:** Variable (\$100, \$120 o \$80).
- **Volatilidad implícita:** 20 %.
- **Tiempo al vencimiento:** 30 días.
- **Tasa de interés libre de riesgo:** 3 % anual.

Escenarios

1. At the Money (ATM): Precio del activo subyacente = \$100

- **Valor intrínseco:** \$0 (sin ganancia inmediata, ya que comprar a \$100 y vender a \$100 no genera utilidad).
- **Valor temporal:** Entre \$3-\$5, debido a la volatilidad y el tiempo restante.
- **Precio esperado de la prima:** \$3-\$5.

2. In the Money (ITM): Precio del activo subyacente = \$120

- **Valor intrínseco:** \$20 (ganancia inmediata: \$120 - \$100).
- **Valor temporal:** Entre \$3-\$5, por posibilidad de más subidas antes del vencimiento.
- **Precio esperado de la prima:** \$23-\$25.

3. Out of the Money (OTM): Precio del activo subyacente = \$80

- **Valor intrínseco:** \$0 (no tiene sentido ejercer la opción).
- **Valor temporal:** Entre \$0.50-\$1, por baja probabilidad de subir por encima de \$100.
- **Precio esperado de la prima:** \$0.50-\$1.

Precio del subyacente	Clasificación	Valor intrínseco	Valor temporal	Prima total
\$100	At the Money	\$0	\$3-\$5	\$3-\$5
\$120	In the Money	\$20	\$3-\$5	\$23-\$25
\$80	Out of the Money	\$0	\$0.50-\$1	\$0.50-\$1

Cuadro A.3: Comparativa de opciones call en diferentes escenarios de precio del subyacente.

Relación entre el precio del subyacente y el precio de la opción

- **Cuando el precio del activo subyacente sube:** La prima de la opción aumenta, especialmente al pasar de At The Money a In The Money debido al valor intrínseco adicional.
- **Cuando el precio del activo subyacente baja:** La prima disminuye rápidamente, y las opciones Out of The Money solo conservan un pequeño valor temporal.

Veamos también el caso particular de los warrants, y las opciones de crédito:

Un warrant es un instrumento financiero derivado que otorga al titular el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente (como acciones, índices o materias primas) a un precio predeterminado (precio de ejercicio o strike) en o antes de una fecha específica. Se emiten en particular a los altos directivos de las empresas como parte de su paquete de compensación. Aunque los warrants son similares a las opciones, tienen características particulares que los diferencian:

Características de los warrants: Los warrants son emitidos por empresas, en contraste con las opciones que se negocian en mercados secundarios. Dilución de acciones: Si un warrant es ejercido, la empresa puede emitir nuevas acciones, diluyendo el valor para los accionistas existentes. Plazo más largo: Generalmente tienen vencimientos más largos que las opciones estándar. Mercado secundario limitado: Los warrants suelen tener menor liquidez que las opciones. Los warrants se emiten sobre acciones ya existentes.

Las opciones de crédito son derivados que ofrecen exposición a los cambios en el riesgo crediticio de un emisor (por ejemplo, bonos corporativos o soberanos). Uno de los mayores usos que tiene es con relación a la deuda soberana. La ventaja que tienes con un derivado de crédito es que la fluctuación en el riesgo no va a afectar al tenedor.

Se utilizan para: Cobertura contra impagos. Especulación sobre el deterioro o mejora del perfil crediticio de un emisor. Ejemplos comunes:

Credit Default Swaps (CDS): Un seguro contra el impago de deuda. Credit Spread Options: Opciones basadas en el diferencial de tasas entre bonos con diferentes calificaciones crediticias.

También vale la pena hablar de la distinción entre opciones extrabursátiles (Over The Counter) y opciones estandarizadas o 'vanilla options' como son comúnmente conocidas.

Una manera sencilla de comprender qué es algo que se puede transar 'Over The Counter' son la diferencia entre un jarabe para la tos que puede ser comprado de esa manera y un antibiótico, el cual no puede ser comprado sin receta.

- Opciones OTC (Over-The-Counter): Las opciones OTC son contratos personalizados que se negocian directamente entre dos partes, sin pasar por un mercado organizado. Estas opciones ofrecen flexibilidad en términos de diseño y características específicas del contrato, pero pueden tener menor liquidez y están sujetas a un mayor riesgo crediticio.
- Opciones estandarizadas: Las opciones estandarizadas son contratos estandarizados que se negocian en mercados organizados, como bolsas de valores. Estas opciones tienen términos uniformes, lo que facilita la transparencia y la liquidez. Los inversores pueden comprar y vender estas opciones de manera más eficiente, pero tienen menos flexibilidad en términos contractuales.

Diferencias Clave entre las opciones OTC y las estandarizadas:

- Personalización vs. Estandarización: Las opciones OTC son personalizadas y se adaptan a las necesidades específicas de las partes involucradas. Las opciones estandarizadas tienen términos uniformes para facilitar la negociación.
- Mercado vs. Transacción Directa: Las opciones OTC se negocian directamente entre las partes, mientras que las opciones estandarizadas se negocian en mercados organizados como el Chicago Board Options Exchange.
- Liquidez y Riesgo Crediticio: Las opciones estandarizadas tienden a tener mayor liquidez y menor riesgo crediticio y de contraparte, ya que se compensan y liquidan a través de cámaras de compensación. Las opciones OTC pueden tener menor liquidez y están sujetas al riesgo crediticio y de contraparte entre las partes involucradas.

A.0.6. Arbitraje

Ya con estas nociones generales sobre las opciones introducidas, se pasa ahora a la noción de arbitraje para poder abordar el tema de la valoración de opciones:

En términos muy generales, el *arbitraje* se puede definir como la compra y venta de un instrumento financiero (aquel que tiene valor monetario y puede ser vendido o comprado en un mercado financiero) en mercados diferentes para obtener una ganancia, la cual usualmente es pequeña.

La clave es la posibilidad de obtener ganancias sin asumir un riesgo neto. En otras palabras, una oportunidad de arbitraje representa la posibilidad de obtener beneficios en un mercado financiero, sin riesgo y sin necesidad de una inversión inicial de capital.

Estas oportunidades, en caso de existir, suelen ser muy efímeras, ya que rápidamente son identificadas y explotadas por otros participantes del mercado.

Un arbitraje exitoso implica comprar y vender activos de manera secuencial o simultánea, para capitalizar las diferencias de precio. Los participantes en esta estrategia buscan explotar oportunidades de mercado, donde el costo total de la inversión sea menor que la ganancia esperada.

El arbitraje también puede pensarse como una estrategia financiera que toma ventaja de dos o más instrumentos financieros cuyo valor está incorrectamente determinado. Esta segunda concepción es tal vez la más aceptada por los mercados, pero no necesariamente la más correcta. Un caso típico es el oro: puede ser que en un mercado X, a las 2 p.m., el precio del oro sea 2668.60, y en otro mercado Y, a las 4 a.m. en otra zona horaria, el precio sea 2608.00 debido a un error humano. Claramente, aquí hay una oportunidad de arbitraje, ya que puedo comprar oro a 2608.00 en el mercado Y y venderlo por 2668.60 en el mercado X.

Esto genera una ganancia de 60.60 sin riesgo. Esta es la esencia del arbitraje: producir una ganancia sin riesgo. El problema es que este no es el único caso donde el arbitraje surge.

Es común que, para producir una estrategia financiera rentable, se combinen posiciones cortas y largas relacionadas con instrumentos financieros, lo que reduce el riesgo y da la oportunidad de obtener una ganancia razonable en la inversión. A este tipo de inversión se le conoce como *hedging* o cobertura. Pero no necesariamente estas transacciones son sencillas; de hecho, pueden ser muy complicadas. Lo interesante es que, en ocasiones, surgen situaciones de este tipo en las cuales la ganancia es segura. Este tipo de transacciones, en las cuales la ganancia es segura, se conocen como arbitraje.

Ahora, modelemos una opción típica. Queremos comprar acciones en el futuro a un precio fijo (que no esté influenciado por la volatilidad). Típicamente, las acciones se venden a \$100 por acción. Podemos asumir que, después de un periodo fijo de tiempo, un año, el precio será \$200 o bien \$50.

Asumamos que, por el costo C , puedo comprar una opción para adquirir acciones en el futuro, en un año, a un precio de \$150. Si todo sale bien, al final de un año tendré una ganancia de

$$200 - 150 = 50$$

dólares por cada una de las opciones compradas. Si, en un año, el valor de la acción es menor que \$150, la opción no tendrá valor.

Además de la opción, podemos comprar x acciones en el momento inicial al costo de $100x$. Cada acción valdrá \$200 en un año o bien \$50. Podemos asumir que, si x es negativo, cero o positivo, no podemos vender o comprar ambos (la opción y las acciones). Ejemplo: si x es negativo, estamos vendiendo x acciones, lo que produce un retorno de $-100x$. Entonces seremos responsables de comprar y devolver $-x$ acciones en el tiempo de un

año, con un costo de o bien \$200 o \$50 por acción (*short selling*, ya que no somos dueños de las acciones).

Nuestro interés es mostrar que hay una combinación de compras que nos dará siempre una ganancia positiva. Determinaremos el valor de C (la opción).

Sea r la tasa nominal hoy. Si

$$C = \frac{100 - 50(1 + r)^{-1}}{3}$$

lograremos nuestro objetivo.

En efecto, supongamos que hoy compramos x acciones y y unidades de opciones. Es claro que mi costo con relación a la transacción es $100x + CS_0$. Aquí es donde todo se pone interesante.

Si la cantidad es positiva (recordar que x puede ser negativo, cero o positivo), puedo pedir a un banco esta cantidad y , al final del año 1, pagar el interés. Si la cantidad es negativa $-(100x + CS_0)$, lo natural es tomar lo recibido y colocarlo en un banco para que genere interés.

¿Qué ocurre al final de un año? Depende del valor del activo subyacente: la acción.

- Si el valor de la acción es \$200, se tendrá $200x + 50C$. - Si el valor es \$50, solo tendremos $50x$, ya que la opción no tiene valor.

Recuerde que si la acción se aprecia a \$200, las unidades de opciones a un costo de \$150 se valoran en $C(\$200 - \$150) = 50C$.

Para buscar una posición neutral, supongamos que el valor de la transacción, es decir, las opciones, es el mismo independientemente del valor de la acción.

Sea pues:

$$200x + 50C = 50x,$$

esto es:

$$150x + 50C = 0,$$

y

$$C = -3x.$$

Notemos que los signos de x y C son opuestos. Esto significa que: - Si $x > 0$, compramos x acciones en el tiempo 0 y vendemos $3x$ opciones en el tiempo de 1 año. - Si $x < 0$, $-x$ acciones se vendieron y $-3x$ unidades de opciones se compraron en el tiempo 0.

En cualquier caso, si $C = -3x$, después de pagar intereses por el préstamo (cuando $100x + CS_0 > 0$) o bien retirar el dinero del banco (cuando $100x + CS_0 < 0$), lo ganado será:

$$50x - (100x + CS_0)(1 + r) = 50x - (100x - 3xC)(1 + r),$$

lo que equivale a:

$$50x - 100x(1 + r) + 3xC(1 + r).$$

Factorizando, obtenemos:

$$x(1+r) \left[50(1+r)^{-1} + 3C - 100 \right].$$

De esta expresión, si $3C = 100 - 50(1+r)^{-1}$, la ganancia es nula. Si $3C > 100 - 50(1+r)^{-1}$, la ganancia es positiva.

Debemos tomar en cuenta lo siguiente: si $3C \neq 100 - 50(1+r)^{-1}$, podemos garantizar una ganancia positiva sin importar cuál sea el precio de la acción en un año. ¿Cómo? Basta que: - $x > 0$ cuando $3C > 100 - 50(1+r)^{-1}$. - $x < 0$ cuando $3C < 100 - 50(1+r)^{-1}$.

¡Excelente resultado en relación con lo asumido!

Ejemplo concreto

Supongamos que $(1+r)^{-1} = 0.85$, y asumimos que el costo por opción es \$15. Si compramos 1 acción y vendemos 4 opciones, el costo es:

$$100 - 4(15) = 100 - 60 = 40,$$

lo cual corresponde a lo que debemos tomar en préstamo.

El valor de la transacción en un año será \$50, independientemente de si la acción se aprecia o no. Entonces,

$$40(1+r) = 47.0589,$$

lo que produce una ganancia de:

$$47.0589 - 45 = 2.9411.$$

Esta ganancia está garantizada.

Asumamos ahora que el costo de la opción es \$12. Si vendemos una acción y compramos 3 unidades de opción, considerando que estamos en el caso $x = -1$, la ganancia inicial es:

$$100 - 4(12) = 52.$$

Esta cantidad se coloca en un banco, obteniendo:

$$52(1+r) = 61.1765 \quad \text{en un año.}$$

Como la inversión en un año toma el valor de -50 , la ganancia es:

$$61.1765 - 50 = 11.1765 \quad (\text{garantizada}).$$

En estos casos, claramente hay arbitraje. Sin embargo, para

$$C = \frac{100 - 48}{3} = \frac{52}{3},$$

no tendremos arbitraje, y ese es el único valor que elimina esta oportunidad.

Como se puede observar, el arbitraje puede aparecer en transacciones sencillas e incluso al considerarse contratos *forward* y otros derivados. No es algo sencillo de evitar.

El principio de no arbitraje establece que un modelo matemático de un mercado financiero no debería permitir la existencia de oportunidades de arbitraje.

A.0.7. Cobertura

A continuación, se definirá ahora lo que es el hedging o cobertura y se explorarán diferentes estrategias de hedging, que se pueden emplear para mitigar diversos riesgos financieros:

El hedging, o cobertura, es una estrategia financiera diseñada para reducir o mitigar el riesgo de pérdida asociado con movimientos adversos en el valor de los activos. Los inversores utilizan estrategias de cobertura para protegerse contra la volatilidad del mercado y preservar el valor de sus carteras.

Las siguientes son algunas estrategias de Cobertura con Opciones o Derivados Financieros:

- Adquisición de Opciones Put:

Proteger contra la caída del precio de un activo. Al comprar opciones de venta, el inversor adquiere el derecho, pero no la obligación, de vender un activo a un precio predeterminado. Si el precio del activo disminuye, la opción de venta compensa las pérdidas en el valor del activo subyacente.

- Adquisición de Opciones Call:

Proteger contra la subida del precio de un activo. Al comprar opciones de compra, el inversor obtiene el derecho, pero no la obligación, de comprar un activo a un precio específico. Si el precio del activo aumenta, la opción de compra ayuda a compensar las pérdidas al permitir la compra a un precio fijo.

- Estrategia diferencial:

Reducir el costo de las opciones o limitar el riesgo. Implica combinar opciones de compra o venta con diferentes precios de ejecución y/o fechas de vencimiento. Esto permite a los inversionistas ajustar el riesgo y el rendimiento, de acuerdo con sus objetivos.

- **Forward y Futuros:**

Fijar precios futuros y reducir la incertidumbre. Contratos forward y futuros permiten a los inversores fijar un precio para comprar o vender un activo en el futuro. Estos contratos ayudan a gestionar el riesgo de fluctuaciones de precios.

- **Collar:**

Limitar el rango de movimientos de precios. Combina la compra de opciones de venta y la venta de opciones de compra, para establecer un rango de precios en el que el inversor está dispuesto a aceptar movimientos de precios. Proporciona protección limitada y limita las ganancias.

Aunque las estrategias de cobertura (hedging) son herramientas valiosas para gestionar el riesgo en los mercados financieros, existen algunas limitaciones y consideraciones importantes a tener en cuenta:

- **Costo de la Cobertura:**

Emplear estrategias de cobertura puede implicar costos directos, como el precio de las opciones o contratos de futuros. Estos costos pueden reducir los beneficios potenciales de la inversión.

- **Complejidad de Implementación:**

Algunas estrategias de cobertura, especialmente aquellas que involucran derivados financieros más complejos, pueden requerir un conocimiento especializado para su implementación efectiva. La falta de comprensión adecuada puede llevar a resultados no deseados.

- **Limitación de Ganancias:**

Las estrategias de cobertura a menudo limitan el potencial de ganancias junto con el riesgo. Mientras protegen contra pérdidas, también pueden limitar la capacidad de beneficiarse de movimientos favorables del mercado.

- **Correlación Cambiante:**

La efectividad de las estrategias de cobertura puede depender de la correlación entre los activos. Esta correlación puede cambiar con el tiempo, lo que afecta la eficacia de la cobertura.

- **Disponibilidad de Instrumentos Financieros:**

En algunos casos, puede ser difícil o costoso encontrar instrumentos financieros adecuados para implementar ciertas estrategias de cobertura, especialmente en mercados menos líquidos.

■ Restricciones Regulatorias:

Las regulaciones gubernamentales financieras pueden imponer restricciones o requisitos específicos para ciertas estrategias de cobertura. Es importante conocer y cumplir con las regulaciones aplicables.

■ Riesgo Residual:

No hay garantía de que una estrategia de cobertura elimine completamente el riesgo. Si bien puede reducir el riesgo, siempre existe la posibilidad de que ocurran eventos imprevistos que no estén cubiertos.

■ Tiempos de Vencimiento:

Algunas estrategias de cobertura, como las opciones, tienen tiempos de vencimiento. La elección del período de cobertura correcto puede ser crucial para la efectividad de la estrategia.

Igual que hicimos de forma previa, demos un ejemplo de cobertura usando opciones para ilustrar:

Cuadro A.4: Estrategia de Cobertura - Protective Put

Posición Actual		
Acciones TSLA	1,000	\$200.00/acción
Valor Total Posición		\$200,000.00
Estrategia de Cobertura		
Instrumento	Put TSLA	
Cantidad de Contratos	10	(100 acciones c/u)
Strike		\$180.00
Vencimiento	30 de junio 2025	
Prima por Put		\$8.50
Costo Total Cobertura		\$8,500.00
Análisis de Riesgo		
Máxima Pérdida Posible		\$28,500.00
Punto de Equilibrio		\$191.50

Nota sobre como hicimos el analisis de riesgo:

- Máxima pérdida = (Strike - Precio Actual) × Acciones + Prima Total
- Punto de equilibrio = Precio Actual + Prima por Acción

A.0.8. Profundidad del Mercado y Riesgo Residual

La profundidad del mercado es una medida de la capacidad de un mercado para absorber grandes órdenes de compra o venta sin causar cambios significativos en el precio del activo subyacente. Un mercado se considera profundo si cuenta con un volumen considerable de órdenes pendientes (ofertas y demandas) a diferentes niveles de precios, lo que proporciona estabilidad y facilita la ejecución de transacciones de gran tamaño. En América Latina, solo México, Argentina y Brasil son considerados mercados profundos. Por ello, en el caso de un país que no cuenta con estas características, como Panamá, es necesario recurrir a un mercado internacional de valores.

Veamos a modo de ejemplo concreto qué significa la profundidad del mercado, digamos que yo necesito 100 millones de yenes en un mes, tengo que saber dónde encontrarlos, si yo puedo encontrarlos dentro de ese mes en el mercado de divisas local, eso me indica que es un mercado con profundidad. Si se me hiciese muy difícil o imposible encontrar algo cercano a esa suma, entonces se trataría de un mercado que no goza de profundidad.

El riesgo residual se refiere al riesgo que permanece después de haber implementado todas las medidas posibles para mitigar, transferir o gestionar otros riesgos principales. Este riesgo suele ser inevitable debido a la incertidumbre inherente o a eventos extremos e imprevistos que no pueden ser completamente controlados o eliminados.

Aquí la clave es que si el mercado tiene menor profundidad, entonces habrá más transacciones que no serán posibles, ya que no tendrían contraparte, y por ende habrá mayor riesgo residual en el mercado.

Un ejemplo claro de riesgo residual es el impacto del terremoto de Kobe en Japón en 1995. A pesar de que Japón contaba con estrictos códigos de construcción, sistemas avanzados de gestión de riesgos y seguros diseñados para proteger contra desastres naturales, el terremoto tuvo consecuencias económicas significativas que no pudieron evitarse completamente. Las pérdidas económicas directas e indirectas superaron los 100 mil millones de dólares, y muchas empresas enfrentaron costos inesperados, interrupciones en la cadena de suministro y colapsos financieros.

El colapso de Barings Bank, uno de los casos más famosos de especulación con opciones y fraude contable, está ligado a este terremoto de Kobe ya que el mismo causó que el índice Nikkei, que representa al mercado de valores japonés, se desplomara y, de ahí, el banco no fue capaz de repagar préstamos que había tomado a sus acreedores, lo que lo hizo materializar sus pérdidas que antes estaban solo en libros y escondidas de manera fraudulenta.

Nick Leeson fue la persona que estaba manejando la estrategia de arbitraje y especulación con opciones del banco, y causó una pérdida de más de 1,000 millones de dólares. Eventualmente, el banco se declaró en bancarrota y miles de trabajadores perdieron su empleo. Nick Leeson pagó pena de cárcel por sus acciones. A partir de este caso, se im-

pusieron controles más estrictos en la industria como la necesidad de una supervisión contable independiente de los gestores de portafolio (ver Leeson y col. (1996) y de forma relacionada Dunbar (2000) y Rubinstein (2006)).

A.0.9. Cartera Replicadora

Ahora sí, retomando con las nociones financieras a introducir, veamos la noción de cartera replicadora:

Una cartera replicadora es una estrategia de inversión diseñada para replicar el rendimiento de un activo o un conjunto de activos subyacentes. La idea es que, al combinar diferentes activos en ciertas proporciones, la cartera pueda imitar de cerca las fluctuaciones de precio del activo que se está replicando. Este enfoque es común en derivados financieros, donde se crea una cartera que replica el comportamiento de una opción o un contrato financiero complejo.

Suponiendo que se tiene una opción de compra (call) sobre las acciones de una compañía en particular. Es posible construir una cartera replicadora comprando una cantidad específica de acciones de esa misma compañía y bonos del gobierno. La combinación de acciones y bonos se ajusta de manera que la cartera tenga un rendimiento similar al de la opción de compra. Esto se hace para eliminar cualquier oportunidad de arbitraje.

Cuanto mayor sea la volatilidad, mayor será la probabilidad de que el precio del activo se mueva significativamente. En el caso de las opciones, una mayor volatilidad implica un mayor precio de la opción, ya que aumenta en general la posibilidad de que la opción termine 'in the money'.

A.0.10. Relevancia a Panamá

Hagamos un paréntesis en esta discusión conceptual para hablar de por qué nos interesa este tema en el contexto de Panamá.

A este punto ya se tiene que las opciones se pueden emplear para mitigar riesgos financieros en el contexto de carteras de inversión. Sin embargo, aquí vale la pena hablar también, no solo de inversores individuales o institucionales que buscan maximizar los rendimientos de un conjunto de activos que poseen, sino también de empresas que incurren en riesgos financieros, en particular riesgo de mercado por la naturaleza de su negocio y a las cuales también les resulta atractivo el uso de opciones para reducir la exposición que tienen a las fluctuaciones de los mercados en sus márgenes operativos.

Al comprar opciones de compra sobre materias primas, las corporaciones que tienen una gran parte de sus costos en estas materias primas pueden mitigar el impacto que una subida rápida en los precios de estas materias primas pudiera tener sobre sus márgenes. Por ejemplo, esto se da cuando una empresa tiene como uno de sus costos principales el costo del combustible, como navieras y aerolíneas. Hay varias navieras y aerolíneas que

tienen operaciones en Panamá. Estas compran opciones de compra sobre una parte importante de su consumo esperado de combustible a futuro, y así aseguran su rentabilidad a mediano plazo, y tienen tiempo para responder a una subida más permanente en costos, ya que el corto y mediano plazo están cubiertos por estos instrumentos.

A.0.11. Crisis del 2008

Hablando de aplicaciones a la vida cotidiana, cabe mencionar cómo los derivados de activos jugaron un papel importante en la última gran crisis financiera global. En 2008, el mundo financiero se tambaleó al borde del abismo en lo que se conoció como la Gran Recesión.

Fue un colapso económico global desencadenado por una combinación de factores complejos y de largo alcance. Una de las piezas clave en este rompecabezas fue la crisis hipotecaria en Estados Unidos, donde el sueño americano se desmoronó para muchos.

El escenario estaba plagado de una irresponsabilidad flagrante por parte de reguladores y agencias de calificación crediticia. Las instituciones financieras, inundadas por la codicia y la búsqueda de ganancias rápidas, se embarcaron en una carrera imprudente para otorgar préstamos hipotecarios, incluso a aquellos que no podían permitírselos.

Este frenesí de préstamos se facilitó aún más con la creación de derivados financieros complejos, como los famosos 'CDO' (obligaciones de deuda colateralizada). Los CDO eran paquetes de préstamos hipotecarios, a menudo de baja calidad, que se dividían en 'tranches' con diferentes niveles de riesgo. Los inversores, atraídos por altos rendimientos, compraban estos tranches sin comprender completamente la complejidad de los productos y los riesgos subyacentes.

La película 'The Big Short' arroja luz sobre este caos financiero, siguiendo a un grupo de inversores que, al reconocer las señales de alarma y la burbuja inmobiliaria que se estaba gestando, tomaron posiciones cortas contra el mercado hipotecario. Estos inversores visionarios, aunque ridiculizados y subestimados en su momento, finalmente cosecharon enormes ganancias al apostar contra el sistema.

Detrás de este colapso se encontraban los incentivos que promovían la transferencia de riesgos. La desregulación financiera de la década de 1990, que eliminó muchas de las restricciones a las actividades bancarias, permitió a las instituciones financieras crear y comercializar productos financieros cada vez más complejos y riesgosos. Los bancos, en lugar de retener los préstamos que originaban, los empaquetaban en CDO y los vendían a inversores, deslindándose así de las consecuencias de los préstamos incobrables.

Decir que, sin los préstamos estatales, los bancos habrían quedado liquidados.

Había el principio de 'Too Big To Fail', y por ende no se afectó tanto; si se hubiera ido a la quiebra el banco Wells Fargo, se hubieran ido todos los grandes bancos a la par por su interdependencia.

En última instancia, la burbuja hipotecaria estalló, dejando a su paso un rastro de des-

trucción financiera. Millones de personas perdieron sus hogares, los mercados financieros se tambalearon y la confianza en el sistema bancario se desplomó. La crisis del 2008 sirvió como una llamada de atención masiva sobre la necesidad de una regulación financiera más estricta y una mayor responsabilidad corporativa para evitar que tales calamidades se repitan en el futuro.

Las agencias de calificación crediticia, como Moody's, Standard and Poor's y Fitch, desempeñaron un papel crucial y, lamentablemente, controvertido. Estas agencias otorgaron calificaciones extremadamente altas a los CDO respaldados por hipotecas, incluso cuando estos contenían una gran proporción de préstamos subprime. Esta práctica contribuyó a crear una falsa sensación de seguridad en el mercado y permitió que la crisis se extendiera a nivel global.

En Europa en particular, la crisis fue peor, ya que al existir esta interdependencia financiera con los bancos de Estados Unidos, los bancos europeos también requirieron apoyo de sus gobiernos para no quebrar y causar una calamidad de proporciones mayores a sus depositantes y en sus países. Sin embargo, como varios gobiernos europeos estaban ya con finanzas públicas deterioradas, esta ayuda se financió con deuda adicional, lo que ocasionó una crisis de deuda soberana, particularmente en los países del Sur de Europa, como Grecia, España e Italia, entre otros. Dicha crisis adicionalmente llevó a los prestamistas a imponer duras condiciones de austeridad fiscal a dichos gobiernos, lo que tuvo un efecto procíclico negativo sobre esas economías ya en recesión, y por ende les tomó aún más tiempo que en Estados Unidos recuperarse.

La crisis de 2008 dejó lecciones importantes sobre los riesgos asociados con los derivados financieros y la importancia de una regulación prudencial. Los efectos a largo plazo de esta crisis incluyen un mayor escrutinio de las instituciones financieras, una reforma regulatoria significativa y una mayor conciencia pública sobre los riesgos del sistema financiero.

Apéndice B

Fundamentos de Teoría de Medida y Procesos Estocásticos

B.0.1. Teoría de medida

Para desarrollar la idea formal de estos conceptos financieros, es necesario introducir varios conceptos de teoría de la medida y probabilidad: la noción de σ -álgebras, espacios medibles, espacios de medida (para mayor información véase, por ejemplo, Folland (2013) y Shiryaev y Wilson (2013)), medida de Lebesgue, espacios probabilísticos, espacios filtrados y martingalas (ver por ejemplo Rosenthal (2006) y Karatzas y Shreve (2012)).

B.0.2. Espacios medibles y σ -álgebras

Definición B.0.1 (σ -álgebra). Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se llama σ -álgebra sobre X si satisface las siguientes propiedades:

1. $X \in \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces su complemento $A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}$
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Comentario B.0.1. De las propiedades de la definición B.0.1 se deducen las siguientes consecuencias:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ (por complementación de X)

2. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones numerables. En efecto, por las **leyes de De Morgan**:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{F}$$

B.0.3. Álgebras y σ -álgebras generadas

Definición B.0.2 (Álgebra). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Un conjunto de subconjuntos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto potencia de X) se dice que es un **álgebra** sobre X si satisface las siguientes propiedades:

1. $X \in \mathcal{A}$ y $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces su complemento $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces su unión $A \cup B \in \mathcal{A}$

Comentario B.0.2. Tenemos las siguientes observaciones:

1. Las σ -álgebras son álgebras.
2. Si $X = \emptyset$ entonces el álgebra sería el conjunto cuyo único elemento es el vacío.
3. Como cuando $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$, tenemos la siguiente equivalencia por complementos: $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, por lo que no es necesario precisar que $A \cap B \in \mathcal{A}$ cuando $A, B \in \mathcal{A}$.

Proposición B.0.1 (Álgebras generadas). Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de $X \neq \emptyset$. Entonces:

1. Existe una única álgebra $\alpha(\mathcal{C})$, la más pequeña de todas las álgebras que contiene a todos los subconjuntos de $\mathcal{C}$.
2. Existe una única σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C})$, la menor de las σ -álgebras que contiene a $\mathcal{C}$.

A estas álgebras se les denomina las **álgebras generadas** por $\mathcal{C}$.

B.0.4. Conjuntos de Borel

Se cuenta con varias formas de definir el concepto de conjunto de Borel. El desarrollo de los conjuntos de Borel es una respuesta a problemas fundamentales del análisis matemático, particularmente vinculados a la teoría de la integración y a la probabilidad. En la Francia del fin de siglo XIX, se plantearon de manera muy nueva para entonces las preguntas sobre lo fundamental: ¿cómo se podía medir una función?, ¿qué era una función

medible?, ¿cómo construir una teoría de la medida?, ¿qué se podía integrar?, ¿qué era la medida?, ¿cómo debía ser una función integrable?, etc.

En 1888, L. Lebesgue, en su *Histoire des fonctions d'une propre réelle*, muy influyente, retoma estos conceptos. Un concepto que se compartía ampliamente era el conjunto medible.

Conjunto de Borel

El conjunto de Borel es el conjunto más pequeño que contiene a los intervalos abiertos y está cerrado bajo operaciones de unión numerable, intersección numerable y complemento.

Este conjunto es también un conjunto topológico y se le puede entender como una σ -álgebra. Un conjunto de Borel es una subcolección de subconjuntos que, generada por los conjuntos abiertos de un espacio topológico, es el conjunto más pequeño que contiene a la topología del espacio y está cerrado bajo las mencionadas tres operaciones básicas.

Definición B.0.3 (σ -álgebra de Borel). Si (X, τ) es un espacio topológico, la σ -álgebra de Borel en X , denotada por $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$, es la σ -álgebra generada por τ , la colección de conjuntos abiertos en la topología.

Es decir, $\mathcal{B}(X)$ es la colección de subconjuntos de X que se pueden construir a partir de conjuntos abiertos mediante uniones numerables, intersecciones numerables y complementos.

Definición B.0.4 (Conjunto de Borel). Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}_X$ la colección de todos los abiertos en X . La σ -álgebra generada por este conjunto de abiertos es llamada **álgebra de Borel**. El conjunto de Borel está formado por todos los elementos de esta álgebra, y cada uno de ellos es llamado **conjunto de Borel**.

Ejemplos

- Intervalos
- Conjuntos abiertos
- El conjunto de Cantor (medida cero)

Definición B.0.5 (Conjunto boreliano). Un conjunto $B \subseteq X$ se llama un **conjunto boreliano** si $B \in \mathcal{B}(X)$.

Nota histórica

(*) Cabe observar que fue su alumno Henri Lebesgue quien, en términos paradigmáticos, resolvió el problema propuesto por Borel en el año de 1901 (en su tesis doctoral titulada *Intégrale, longueur, aire*).

Conjuntos Medibles segun Lebesgue No-Boreliano

Lebesgue fue no solo un alumno muy querido, pero debe recordarse que él propuso (construyó) un ejemplo de conjunto medible según Lebesgue que no es de Borel.

Lebesgue estableció que existe un ejemplo de subconjunto medible según Lebesgue de $[0, 1]$ que no es de Borel y lo construyó con el axioma de la elección.

B.0.5. Medidas y espacios de medida

Definición B.0.6 (Medida). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ se llama **medida** si satisface las siguientes propiedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$, donde $\emptyset$ es el conjunto vacío
2. $\mu(A) > 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$
3. **σ -aditividad:** Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos en $\mathcal{F}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición B.0.7 (Espacio de medida). La terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$, donde $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible y μ es una medida sobre $\mathcal{F}$, se denomina **espacio de medida**.

Comentario B.0.3 (Espacio medible vs. espacio de medida). *Es importante distinguir entre estos conceptos:*

- En un **espacio medible** no se necesita medida alguna.
- Un **espacio de medida** sí está dotado de una medida.

B.0.6. Conjuntos de medida cero y completitud

Definición B.0.8 (Conjunto de medida cero). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $C \in \mathcal{F}$ se dice de **medida cero** o **conjunto nulo** si $\mu(C) = 0$.

Definición B.0.9 (Propiedad que se cumple casi en todas partes). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y C un conjunto de medida cero. Una propiedad que se da para todo $x \in X \setminus C$ se dice que se da **casi en todas partes**.

Definición B.0.10 (Espacio de medida completo). Un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es **completo** si todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible y tiene medida cero.

Comentario B.0.4. *Que un espacio de medida sea completo depende de la medida y no de la σ -álgebra. Todo espacio de medida está contenido en un espacio de medida completo, el cual es el menor espacio completo que lo contiene.*

B.0.7. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Definición B.0.11 (Medida de productos de intervalos). Sea I_k un intervalo acotado para $k = 1, \dots, n$. Si $I = \prod_{k=1}^n I_k$, entonces definimos:

$$\mu(I) = \prod_{k=1}^n (\sup I_k - \inf I_k)$$

Definición B.0.12 (Medida exterior en $\mathbb{R}^n$). Se define una medida exterior en $\mathbb{R}^n$ por la función:

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$$

dada por: para $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones numerables $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ de productos de intervalos que cubren A .

Definición B.0.13 (Conjuntos medibles según Lebesgue). Los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^n$ según Lebesgue son:

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A) \text{ para todo } B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\}$$

Definición B.0.14 (Medida de Lebesgue). La **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$ se define como la restricción:

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$$

donde $\mu(A) = \mu^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$.

Comentario B.0.5 (Medida de Borel-Lebesgue). La restricción $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ es la **medida de Borel-Lebesgue**, que es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ que extiende a la medida inicial μ definida en productos de intervalos. Además, μ es la única medida definida en $\mathcal{M}$ que extiende a la medida original μ .

B.0.8. Funciones medibles

Definición B.0.15 (Función medible). Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice **medible** si y sólo si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

En el caso de $\mathbb{R}$, tenemos que para todo conjunto de Borel $U \subset \mathbb{R}$, f es una función medible si y sólo si para todo U abierto tal que $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

Proposición B.0.2. *Propiedades de las funciones medibles:*

1. Las funciones continuas son medibles según Borel.
2. La composición de una función continua con una función medible es medible.
3. Si $f : X \rightarrow Y$ es medible y $g : Y \rightarrow Z$ es continua, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es medible.

Proposición B.0.3 (Caracterización de funciones medibles a $\mathbb{R}$). Si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es medible si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

1. $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

B.0.9. Integración

En probabilidad y procesos estocásticos, muchas funciones relevantes no son integrales en el sentido de Riemann y, por ende, tenemos que trabajar con integrales de Lebesgue, las cuales trataremos ahora. Esto se debe a las siguientes razones:

- Las funciones de interés suelen estar definidas en términos de variables aleatorias que pueden ser discontinuas a trozos o incluso altamente irregulares.
- La integral de Riemann requiere particiones finas del dominio y evalúa la función en puntos específicos, lo que no es adecuado para tratar con funciones altamente oscilatorias o no continuas.

- La integral de Lebesgue es más general y está diseñada para trabajar con funciones cuya área bajo la curva se calcula en términos de la medida de los conjuntos en los que la función es constante o aproximadamente constante, en lugar de dividir el dominio en intervalos.

Por estas razones, la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos utilizan la integral de Lebesgue, ya que permite trabajar con una clase mucho más amplia de funciones.

B.0.10. Integrabilidad según Lebesgue

Definición B.0.16 (Función Lebesgue integrable). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se define como **integrable según Lebesgue** si es medible y la integral de $|f|$ es finita:

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Definición B.0.17 (Función cuadrado integrable). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **cuadrado integrable** si es medible y:

$$\int_X |f(x)|^2 d\mu < \infty$$

B.0.11. Funciones simples e integración

Definición B.0.18 (Función simple). Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una **función simple** es una función de la forma:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{A}$ son disjuntos, y χ_{A_i} es la función característica de A_i .

Equivalentemente, si s toma los valores distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, entonces:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde $A_i = s^{-1}(\alpha_i) = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$.

Definición B.0.19 (Integral de una función simple). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple positiva. La **integral de s sobre X** se define como:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

Teorema B.0.1 (Aproximación por funciones simples). *Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas.*

B.0.12. Integral de Lebesgue para funciones positivas

Definición B.0.20 (Integral de Lebesgue para funciones positivas). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ una función medible positiva. La **integral de Lebesgue** de f se define como:

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ simple} \right\}$$

Definición B.0.21 (Función integrable). Una función $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es **integrable** si es medible y $\int f \, d\mu < \infty$.

Definición B.0.22 (Integral sobre un conjunto medible). Si $A \subset X$ es medible y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es medible, se define:

$$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu$$

B.0.13. Teoremas fundamentales de convergencia

Teorema B.0.2 (Lema de Fatou). Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Teorema B.0.3 (Teorema de la Convergencia Monótona (TCM)). Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas tales que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para casi todo $x \in X$. Supongamos además que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente en X cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Comentario B.0.6 (Importancia del TCM). El teorema de la convergencia monótona establece que, bajo las condiciones mencionadas:

- Si una sucesión de funciones es **monótona creciente** ($f_n \leq f_{n+1}$) y converge puntualmente a una función límite f , entonces la integral de f_n también converge a la integral de f .
- Es crucial que las funciones sean no negativas para que el teorema sea válido.

Este resultado es fundamental en la teoría de la medida, ya que permite intercambiar límites e integración bajo ciertas condiciones.

Demostración del Teorema B.0.3. 1. Por definición de convergencia puntual, para todo $x \in X$, se tiene que:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

2. Dado que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo n y que $f_n(x) \geq 0$, la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente y está acotada inferiormente por cero.

3. Por el Lema de Fatou (una herramienta clave en la teoría de la medida):

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Dado que $f_n \leq f_{n+1}$, se cumple que $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Por lo tanto:

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

4. Por otro lado, dado que $f_n(x) \leq f(x)$ para todo n , tenemos:

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \text{para todo } n$$

5. Al tomar el límite superior en n , se obtiene:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

6. Combinando los resultados de $\liminf$ y $\limsup$, concluimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

□

B.0.14. Probabilidad y Procesos Estocásticos

Ahora trataremos las nociones de probabilidad y procesos estocásticos, en las que utilizaremos los conceptos medida e integración.

B.0.15. Espacios de probabilidad

Definición B.0.23 (Medida de probabilidad). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ se llama **medida de probabilidad** si $\mathbb{P}(X) = 1$.

Definición B.0.24 (Espacio de probabilidad). La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde:

- Ω es el espacio muestral, es decir, el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio
- $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra sobre Ω , que contiene los eventos medibles
- $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que:
 1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$
 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 3. Para cualquier colección numerable de eventos disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

se denomina **espacio de probabilidad**.

B.0.16. Variables aleatorias

Definición B.0.25 (Variable aleatoria). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo conjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}$, se cumple:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

En otras palabras, X asigna un valor real a cada resultado $\omega \in \Omega$ de manera que los conjuntos de eventos generados por X son medibles.

Definición B.0.26 (Casi Seguramente). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Un evento $A \in \mathcal{F}$ ocurre **casi seguramente** si y sólo si:

$$P(A) = 1 \tag{B.1}$$

Equivalentemente, A ocurre casi seguramente si:

$$P(A^c) = 0 \tag{B.2}$$

donde A^c denota el complemento de A .

B.0.17. Procesos estocásticos

Definición B.0.27 (Proceso estocástico). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y T un conjunto de índices, donde $T \subseteq \mathbb{R}$. Un **proceso estocástico** es una colección $\{X_t\}_{t \in T}$ de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Para cada $t \in T$, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria.

Comentario B.0.7 (Tipos de procesos estocásticos). Según el conjunto de parámetros T :

- Si T es numerable (por ejemplo, $T = \mathbb{N}$ o $T = \{0, 1, 2, \dots\}$), el proceso se llama de **tiempo discreto**.
- Si T es no numerable (por ejemplo, $T = [0, \infty)$ o $T = \mathbb{R}$), el proceso se llama de **tiempo continuo**.

B.0.18. Filtraciones y adaptabilidad

Definición B.0.28 (Filtración). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y T un conjunto de índices totalmente ordenado. Una **filtración** es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ tal que:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \text{para todo } s \leq t$$

La cuádrupla $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathbb{P})$ se denomina **espacio de probabilidad filtrado**.

Definición B.0.29 (Proceso adaptado). Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice **adaptado** a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si, para cada $t \in T$, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Definición B.0.30 (Filtración natural). Dado un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$, la **filtración natural** generada por el proceso es:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$$

es decir, la σ -álgebra generada por todas las variables aleatorias X_s con $s \leq t$.

B.0.19. Esperanza condicional

Definición B.0.31 (Esperanza condicional). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria integrable y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. La **esperanza condicional** de X dado $\mathcal{G}$, denotada $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, es cualquier variable aleatoria $\mathcal{G}$ -medible Y tal que:

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{G}$$

Teorema B.0.4 (Existencia y unicidad de la esperanza condicional). *Para toda variable aleatoria integrable X y toda sub- σ -álgebra $\mathcal{G}$, existe una única (salvo conjuntos de medida cero) esperanza condicional $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.*

Proposición B.0.4 (Propiedades de la esperanza condicional). *Sean X, Y variables aleatorias integrables y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra. Entonces:*

1. **Linealidad:** $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
2. **Ley de expectativas totales:** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
3. **Propiedad de extracción:** Si Z es $\mathcal{G}$ -medible y acotada, entonces $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$
4. **Propiedad de torre:** Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

Teorema B.0.5 (Desigualdad de Jensen en terminos de la esperanza condicional). *Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, X una variable aleatoria integrable y $\mathcal{G}$ una sub- σ -álgebra. Si $\varphi(X)$ es integrable, entonces:*

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}]$$

B.0.20. Martingalas

Definición B.0.32 (Martingala). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado donde $T = \mathbb{N}$ o $T = [0, \infty)$. Un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \in T}$ se llama **martingala** respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si:

1. M_t es $\mathcal{F}_t$ -adaptado para todo $t \in T$
2. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ para todo $t \in T$
3. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ para todo $s \leq t$

Definición B.0.33 (Submartingala y supermartingala). Un proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ se llama:

- **Submartingala** si $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ para todo $s \leq t$
- **Supermartingala** si $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ para todo $s \leq t$

Teorema B.0.6 (Teorema de interrupción opcional de Doob). *Sea $\{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala continua por la derecha y τ un tiempo de parada acotado. Entonces:*

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$$

B.0.21. Aplicaciones a las finanzas

La teoría de medida y probabilidad desarrollada anteriormente proporciona el fundamento matemático riguroso necesario para el análisis de instrumentos financieros complejos. En particular:

- Los **espacios de probabilidad** modelan la incertidumbre inherente en los mercados financieros
- Las **filtraciones** representan el flujo de información disponible a los agentes del mercado
- Las **martingalas** son fundamentales para la valoración neutral al riesgo
- La **integración de Lebesgue** permite trabajar con pagos discontinuos y estrategias de cobertura complejas

B.1. Teoremas importantes del análisis funcional

Teorema B.1.1 (Stone-Weierstrass). *Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ (el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$) que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{A}$ contiene las funciones constantes
2. $\mathcal{A}$ separa puntos, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$

Entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(X, \mathbb{R})$ con respecto a la topología de la convergencia uniforme, es decir, la topología generada por los conjuntos

$$\left\{ g \in \mathbb{C}^X : \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| < n^{-1} \right\} \quad (n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{C}^X).$$

(ver para mas detalles Folland (2013)).

B.2. Teorema de Hahn-Banach

B.2.1. Versión analítica

Teorema B.2.1 (Hahn-Banach Analítico). *Sea X un espacio vectorial real, sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal (es decir, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $\lambda \geq 0$), sea M*

un subespacio vectorial de X , y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.

Entonces existe una extensión lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Referimos al lector a Ok (2007) para más detalles.

B.2.2. Versión geométrica

Teorema B.2.2 (Hahn-Banach Geométrico). Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio vectorial topológico localmente convexo X . Si A es compacto y B es cerrado, entonces existen un funcional lineal continuo $f \in X^*$ y un número real α tales que:

$$\sup_{a \in A} f(a) < \alpha < \inf_{b \in B} f(b)$$

Corolario B.2.1 (Extensión de funcionales lineales acotados). Sea X un espacio normado, M un subespacio de X , y $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) un funcional lineal acotado. Entonces existe una extensión $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que:

$$F|_M = f \tag{B.3}$$

$$\|F\| = \|f\| \tag{B.4}$$

Teorema B.2.3 (Contracción). Una contracción en un espacio métrico (M, d) es una función f de M en sí mismo, con la propiedad de que existe algún número real $0 \leq k < 1$ tal que para todo x e y en M ,

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

El menor valor de k se llama la **constante de Lipschitz** de f . Las contracciones a veces se llaman **funciones lipschitzianas**.

Teorema B.2.4 (Teorema del Punto Fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo y f una función. Se dice que f es una **contracción** si existe una constante K con $0 < K < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Un **punto fijo** z de f es un punto de X tal que $f(z) = z$. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una contracción en X . Entonces existe un único punto fijo de f .

Además, el teorema establece que para todo punto x_0 de X la sucesión $\{x_n = f(x_{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a dicho punto fijo.

Apéndice C

Valoración de Opciones en Mercados Completos

C.1. Movimiento browniano y cálculo estocástico

C.1.1. Fundamentos matemáticos

En esta sección seguimos a Márquez-Carreras (2024) para sentar las definiciones preliminares que nos lleven a la noción de movimiento Browniano.

Definición C.1.1 (Aplicación Medible). Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(E, \mathcal{E})$ dos espacios medibles. Una aplicación $X : \Omega \rightarrow E$ es **medible** si

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } B \in \mathcal{E} \quad (\text{C.1})$$

En otras palabras, X es medible si la imagen inversa de cualquier conjunto medible en el espacio de llegada es un conjunto medible en el espacio de partida.

Definición C.1.2 (Ley de un Vector Aleatorio). Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A la probabilidad $P \circ X^{-1}$ se le llama, en el análisis matemático, **medida imagen** de P para X y en la teoría de la probabilidad, **ley del vector** X .

Definición C.1.3 (Función de Distribución). La **función de distribución** de X es la función de distribución de su ley, es decir,

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.2})$$

donde $(-\infty, x] = \prod_{i=1}^n (-\infty, x_i]$ y $X \leq x$ significa $X_i \leq x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Teorema C.1.1 (Ley Gaussiana Multidimensional). Sean $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Λ una matriz simétrica de orden n definida no negativa. Entonces, existe una probabilidad en $\mathbb{R}^n$, que designaremos por $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ y denominaremos **normal n -dimensional** (o **Gaussiana n -dimensional**), que tiene por función característica

$$\varphi(t) = \exp \left(it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Lambda t \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.3})$$

donde $t^T \mu = \langle t, \mu \rangle$.

Las funciones características de las variables Gaussianas unidimensionales $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ son, respectivamente:

$$\varphi_X(t) = \exp \left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$\varphi_Z(t) = \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \quad (\text{C.5})$$

Definición C.1.4 (Distribuciones de dimensión finita). Consideremos un proceso estocástico $X_t, t \in T$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con valores en un espacio medible $(S, \mathcal{S})$. Este espacio medible se denomina espacio de estados del proceso.

Para todo conjunto finito $v = \{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$, la aplicación medible $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ induce una probabilidad:

$$\mathbb{P}_v = \mathbb{P} \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}$$

en el espacio producto $(S^v, \mathcal{S}^v)$.

A la familia de probabilidades $\{\mathbb{P}_v : v \subset T, |v| < \infty\}$ se le denomina **distribución de dimensión finita** del proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$.

Definición C.1.5 (Proceso gaussiano). Un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ es **gaussiano** si todas sus distribuciones de dimensión finita son leyes gaussianas multidimensionales. Es decir, para cualquier conjunto de tiempos $\{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$, el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ satisface una ley gaussiana multidimensional.

C.1.2. Movimiento browniano estándar

Definición C.1.6 (Movimiento browniano unidimensional - Primera caracterización). Un **movimiento browniano unidimensional** $(B_t, t \geq 0)$ es un proceso estocástico gaussiano con esperanza cero y función de covarianza dada por:

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \min(t, s)$$

Definición C.1.7 (Movimiento browniano estándar - Segunda caracterización). Un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ es un **movimiento browniano estándar** si y sólo si:

1. $B_0 = 0$ casi seguramente
2. Para cualesquiera $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $B_t - B_s$ es independiente de $\{B_r : 0 \leq r \leq s\}$
3. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ para todo $0 \leq s < t$
4. Las trayectorias son continuas casi seguramente

Proposición C.1.1 (Propiedades básicas del movimiento browniano). Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano estándar. Entonces:

1. $\mathbb{E}[W_t] = 0$ para todo $t \geq 0$
2. $\text{Var}(W_t) = t$ para todo $t \geq 0$
3. $\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$ para todo $s, t \geq 0$

Demostración. 1. Por la segunda definición, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ para $0 \leq s < t$ donde $\mathcal{N}$ denota una distribución normal. Tomando $s = 0$ y usando que $W_0 = 0$ casi seguramente, tenemos $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$; por lo tanto $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

2. Como para una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0, 1)$ la varianza es 1, y dado que $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, se sigue que $\text{Var}(W_t) = t$.

3. Para $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= \mathbb{E}[W_s W_t] \\ &= \mathbb{E}[W_s (W_s + (W_t - W_s))] \\ &= \mathbb{E}[W_s^2] + \mathbb{E}[W_s (W_t - W_s)] \\ &= s + 0 = s \end{aligned}$$

donde utilizamos la independencia de los incrementos. Si $t \leq s$, entonces análogamente tendríamos que esto será igual a t . Por ende, la covarianza es igual al mínimo de s y t . □

Teorema C.1.2 (Teorema de Representación de Martingalas). Sea $W = (W^1, \dots, W^d)$ un movimiento browniano d -dimensional y sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración generada por W .

Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala continua con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$ tal que $M_0 = 0$, entonces existen procesos estocásticos $\{\phi_t^1\}, \dots, \{\phi_t^d\}$ adaptados tales que:

$$M_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_s^i dW_s^i$$

donde cada ϕ^i satisface $\int_0^T (\phi_s^i)^2 ds < \infty$ casi seguramente para todo $T > 0$.

C.1.3. Movimiento browniano geométrico

Definición C.1.8 (Movimiento browniano geométrico). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano unidimensional. El proceso estocástico $\{S_t\}_{t \geq 0}$ se denomina **movimiento browniano geométrico** si satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

donde:

- $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de tendencia
- $\sigma > 0$ es el parámetro de volatilidad.
- $S_0 > 0$ es el valor inicial
- d no es un diferencial exacto, sino de Itô, dada la presencia del termino estocástico dB_t por lo que su integral de linea no es independiente del camino.

C.1.4. Integral estocástica de Itô

Definición C.1.9 (Integral de Itô). Para un proceso adaptado y medible $f(t)$ que satisface $\mathbb{E}[\int_0^T f(t)^2 dt] < \infty$, la **integral de Itô** se define como:

$$\int_0^T f(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

donde la convergencia es en L^2 y $\{t_i\}$ es una partición del intervalo $[0, T]$.

Teorema C.1.3 (Isometría de Itô). Para un proceso $f(t)$ que cumple las condiciones de la Definición C.1.9:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t)^2 dt \right]$$

Demostración. Paso 1: Aproximación por sumas de Riemann

Para una partición fija $\{t_i\}_{i=0}^n$ de $[0, T]$ con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, definimos la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (\text{C.6})$$

Esta suma aproxima la integral estocástica $\int_0^T f(t) dW_t$.

Paso 2: Cálculo de $\mathbb{E}[S_n^2]$

Expandimos el cuadrado:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right)^2 \right] \quad (\text{C.7})$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \right] \quad (\text{C.8})$$

Por linealidad de la esperanza:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] \quad (\text{C.9})$$

Paso 3: Análisis de los términos cruzados

Consideremos dos casos:

Caso 1: $i \neq j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $i < j$, es decir, $t_{i-1} < t_i \leq t_{j-1} < t_j$.

Dado que $f(t_{i-1})$ y $f(t_{j-1})$ son $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medibles y $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -medibles respectivamente, y usando la propiedad de incrementos independientes del movimiento Browniano:

$$\mathbb{E}[f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] \quad (\text{C.10})$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_j}]] \quad (\text{C.11})$$

Como $(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ y tiene esperanza cero:

$$= \mathbb{E}[f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \cdot \mathbb{E}[W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \quad (\text{C.12})$$

$$= \mathbb{E}[f(t_{i-1})f(t_{j-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \cdot 0] = 0 \quad (\text{C.13})$$

Caso 2: $i = j$. En este caso:

$$\mathbb{E}[f(t_{i-1})^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \quad (\text{C.14})$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(t_{i-1})^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \quad (\text{C.15})$$

Como $f(t_{i-1})$ es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible:

$$= \mathbb{E}[f(t_{i-1})^2 \mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \quad (\text{C.16})$$

$$= \mathbb{E}[f(t_{i-1})^2] \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (\text{C.17})$$

donde usamos que $\mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = t_i - t_{i-1}$.

Paso 4: Resultado para la suma finita

Por tanto:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f(t_{i-1})^2](t_i - t_{i-1}) \quad (\text{C.18})$$

Paso 5: Paso al límite

Cuando $n \rightarrow \infty$ y $\max_i |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$, la suma de Riemann converge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f(t_{i-1})^2](t_i - t_{i-1}) = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t)^2 dt \right] \quad (\text{C.19})$$

Por otro lado, por la definición de la integral estocástica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^T f(t) dW_t \quad (\text{C.20})$$

y por continuidad de la esperanza (bajo las condiciones de integrabilidad apropiadas):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \right] \quad (\text{C.21})$$

Por tanto:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t)^2 dt \right] \quad (\text{C.22})$$

□

C.1.5. Procesos de Itô y fórmula de Itô

Definición C.1.10 (Proceso de Itô). Un proceso X_t es un **proceso de Itô** si puede expresarse como:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

donde tanto el coeficiente de deriva $\mu(t, X_t)$ como el coeficiente de volatilidad $\sigma(t, X_t)$ deben ser procesos adaptados que satisfacen condiciones apropiadas de integrabilidad:

- $\int_0^T |\mu(s, X_s)| ds < \infty$ casi seguramente
- $\int_0^T \sigma^2(s, X_s) ds < \infty$ casi seguramente

Para mayor detalle referimos al lector a Oksendal (2013)

Teorema C.1.4 (Fórmula de Itô). Sea X_t un proceso de Itô de la forma $dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t$, y sea $f(X_t, t)$ una función de clase $C^{1,2}$. Entonces $f(X_t, t)$ también sigue un proceso de Itô:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

donde:

- $\frac{\partial f}{\partial t}$ es la derivada parcial de f respecto al tiempo
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada parcial de f respecto a x
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ es la segunda derivada parcial de f respecto a x

Teorema C.1.5 (Solución del movimiento browniano geométrico). La solución explícita de la ecuación diferencial estocástica en la Definición C.1.8 está dada por:

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sustitución logarítmica:

Para resolver la EDE $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$, aplicaremos la fórmula de Itô a la función logarítmica. Definimos:

$$f(S_t, t) = \ln(S_t)$$

Esta elección es estratégica porque el logaritmo convierte productos en sumas y permite linealizar la ecuación.

Cálculo de las derivadas parciales:

Calculamos todas las derivadas parciales de $f(S_t, t) = \ln(S_t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\ln(S_t)] = 0 \quad (\text{no hay dependencia explícita en } t) \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}[\ln(S)] = \frac{1}{S} \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left[\frac{1}{S} \right] = -\frac{1}{S^2} \quad (\text{C.25})$$

Identificación de los coeficientes del proceso original:

De la EDE original $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$, identificamos:

$$\mu(S_t, t) = \mu S_t \quad (\text{coeficiente de deriva}) \quad (\text{C.26})$$

$$\sigma(S_t, t) = \sigma S_t \quad (\text{coeficiente de difusión}) \quad (\text{C.27})$$

Aplicación de la fórmula de Itô:

Aplicamos la fórmula de Itô con $f(S_t, t) = \ln(S_t)$:

$$d(\ln S_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS_t)^2 \quad (\text{C.28})$$

Sustituyendo las derivadas calculadas:

$$d(\ln S_t) = 0 \cdot dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (dS_t)^2 \quad (\text{C.29})$$

Sustitución de dS_t :

Sustituimos $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$:

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \quad (\text{C.30})$$

Simplificando el primer término:

$$\frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) = \mu dt + \sigma dB_t \quad (\text{C.31})$$

Cálculo del término cuadrático $(dS_t)^2$:

Para el término cuadrático, expandimos:

$$(dS_t)^2 = (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \quad (C.32)$$

$$= (\mu S_t)^2 (dt)^2 + 2(\mu S_t)(\sigma S_t) dt dB_t + (\sigma S_t)^2 (dB_t)^2 \quad (C.33)$$

Aplicando las reglas del cálculo estocástico:

- $(dt)^2 = 0$ (términos de orden superior)
- $dt dB_t = 0$ (términos cruzados)
- $(dB_t)^2 = dt$ (variación cuadrática del movimiento browniano)

Por tanto:

$$(dS_t)^2 = (\sigma S_t)^2 dt = \sigma^2 S_t^2 dt \quad (C.34)$$

Sustitución del término cuadrático:

Sustituyendo en la fórmula de Itô:

$$d(\ln S_t) = \mu dt + \sigma dB_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) \sigma^2 S_t^2 dt \quad (C.35)$$

$$= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \quad (C.36)$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \quad (C.37)$$

Integración de la ecuación transformada:

Integramos ambos lados desde 0 hasta t :

$$\int_0^t d(\ln S_s) = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dB_s \quad (C.38)$$

El lado izquierdo da:

$$\ln S_t - \ln S_0 = \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \quad (C.39)$$

El lado derecho da:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \quad (C.40)$$

Por tanto:

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \quad (\text{C.41})$$

Solución explícita:

Aplicando la función exponencial a ambos lados:

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right) \quad (\text{C.42})$$

Multiplicando por S_0 :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right) \quad (\text{C.43})$$

□

C.2. Modelo de valoración de activos financieros

C.2.1. Modelo CAPM

Al considerar el precio de un activo particular con respecto al mercado como un todo, introducimos el siguiente modelo de valoración que captura las variables importantes a evaluar. Asumimos la existencia de un activo libre de riesgo, un mercado de capitales, y al menos un activo de capital, ver Fernholz (2013). De ahí planteamos lo siguiente:

Definición C.2.1 (Modelo de valoración de activos de capital). El **modelo de valoración de activos de capital** (CAPM) por sus siglas en inglés, Capital Asset Pricing Model, establece que el rendimiento esperado de un activo está dado por:

$$\mathbb{E}[R_i] = R_f + \beta_i(\mathbb{E}[R_m] - R_f)$$

donde:

- R_f es la tasa libre de riesgo
- R_m es el rendimiento del mercado
- $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$ es el coeficiente beta del activo, es decir la prima de riesgo mercado. Este concepto nos dice que obtenemos un retorno por asumir el riesgo de invertir nuestro capital en el mercado.

Definición C.2.2 (Activo libre de riesgo). Un **activo libre de riesgo** es aquel que proporciona un rendimiento conocido con certeza durante su período de inversión. Matemáticamente:

$$\mathbb{P}(R = R_f) = 1$$

En la práctica, se consideran activos libres de riesgo los bonos gubernamentales de corto plazo de economías sólidas y las letras del Tesoro.

C.2.2. Valoración neutral al riesgo

Definición C.2.3 (Medida de probabilidad neutral al riesgo). La **medida de probabilidad neutral al riesgo**, denotada $\mathcal{Q}$, es una medida de probabilidad equivalente a la medida real $\mathbb{P}$ bajo la cual (favor referirse a Musiela y Rutkowski (2006)):

$$S_t = S_0 e^{rt} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\frac{S_T}{S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

donde:

- S_t es el precio del activo en tiempo t
- T es el tiempo de vencimiento
- r es la tasa libre de riesgo
- $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural

Teorema C.2.1 (Principio fundamental de valoración neutral al riesgo). *Bajo la medida neutral al riesgo $\mathcal{Q}$, el precio de cualquier derivado financiero V_t viene dado por:*

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[V_T | \mathcal{F}_t]$$

Este principio establece que:

- *Todos los activos tienen el mismo rendimiento esperado r bajo $\mathcal{Q}$*
- *El precio de un derivado es el valor esperado de sus pagos futuros descontados*
- *La valoración es independiente de las preferencias de riesgo de los inversores*

Comentario C.2.1. *Implicaciones sobre la estructura del mercado*

1. *La unicidad de la medida neutral al riesgo implica la completitud del mercado.*
2. *La existencia de una medida neutral al riesgo es equivalente a la ausencia de arbitraje.*

C.3. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein

C.3.1. Construcción del modelo binomial

Comentario C.3.1 (Desarrollo histórico del modelo binomial). *El modelo de Cox-Ross-Rubinstein o de árboles binomiales fue desarrollado inicialmente por Cox para ilustrar el modelo de Black-Scholes a sus estudiantes. Aunque en el límite es equivalente al modelo de Black-Scholes para opciones europeas, resulta más útil y práctico para opciones americanas que pueden ejecutarse en cualquier momento.*

William Sharpe fue uno de los primeros en presentar este modelo a nivel práctico en su libro Investments de 1978. Posteriormente, fue formalizado por Cox, Ross y Rubinstein en Cox y col. (1979).

Definición C.3.1 (Modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein). En el **modelo binomial**, el mercado consiste en:

- Un activo libre de riesgo $B_t = (1 + r)^t B_0$
- Un activo con riesgo S_t que en cada período puede:
 - Subir con factor $u > 1$ con probabilidad p
 - Bajar con factor $d < 1$ con probabilidad $1 - p$

donde $d < 1 + r < u$ para evitar arbitraje.

Teorema C.3.1 (Valoración en el modelo binomial). *En un mercado binomial completo, es decir, un mercado con 2 activos de riesgo y que es un mercado completo (como vimos en el Capítulo 2, Definición 1.012), existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathcal{Q}$ con:*

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

y el precio de cualquier opción viene dado por:

$$V_0 = \frac{1}{(1 + r)^T} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[V_T]$$

Demostración. 1. Primero, mostremos que q es una medida de probabilidad:

- $q > 0$ pues $1 + r > d$ por ausencia de arbitraje
- $q < 1$ pues $u > 1 + r$ por ausencia de arbitraje

2. Bajo $\mathcal{Q}$, el proceso de precios descontados $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}$ es una martingala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] &= \frac{1}{1+r}(qu + (1-q)d)\tilde{S}_t \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r-d}{u-d}u + \frac{u-(1+r)}{u-d}d \right) \tilde{S}_t \\ &= \tilde{S}_t\end{aligned}$$

3. La unicidad se sigue de la completitud del mercado. □

Ejemplo C.3.1 (Valoración de opción call en modelo binomial). *Consideremos una opción call europea con:*

- Precio al contado $S_0 = 100$
- Precio de ejercicio $K = 100$
- Tasa libre de riesgo $r = 5\%$
- Volatilidad $\sigma = 20\%$
- Tiempo hasta vencimiento $T = 1$ año
- Pasos $n = 2$

El método binomial procede como sigue:

- **Paso 1: Construir el árbol binomial:** Se comienza con el precio al contado del activo subyacente y se construye un árbol con n pasos. En cada paso, el precio del activo subyacente puede subir o bajar, de acuerdo con las probabilidades p y q .
- **Paso 2: Calcular el valor intrínseco en cada nodo:** El valor intrínseco de una opción call es el máximo entre $(S - K)$ y 0 , y el valor intrínseco de una opción put es el máximo entre $(K - S)$ y 0 .
- **Paso 3: Descontar los valores intrínsecos:** Se descuentan los valores intrínsecos en cada nodo del árbol, utilizando la tasa libre de riesgo.
- **Paso 4: Promediar los valores descontados:** Se promedian los valores descontados en cada nodo para obtener el precio de la opción.
- **1. Construcción del árbol binomial:**
Árbol binomial con 2 pasos:

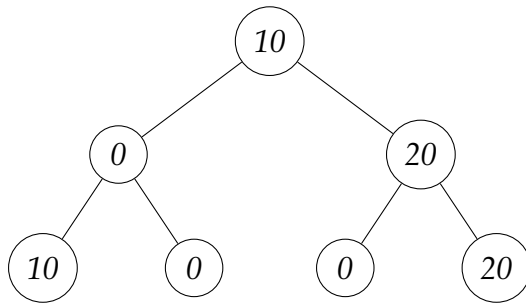
■ 2. Cálculo del valor intrínseco:

Nodo 1: 10

Nodo 2: 0

Nodo 3: 20

Nodo 4: 0



■ 3. Descuento de los valores intrínsecos:

Nodo 1: $10 / (1 + 0.05)^1 = 9.52$

Nodo 2: $0 / (1 + 0.05)^1 = 0$

Nodo 3: $20 / (1 + 0.05)^1 = 19.05$

Nodo 4: $0 / (1 + 0.05)^1 = 0$

■ 4. Promedio de los valores descontados:

$(9.52 + 0 + 19.05 + 0) / 4 = 9.12$

Precio de la opción call: 9.12

C.4. Modelo de Black-Scholes

C.4.1. Supuestos del modelo

Suposición C.4.1 (Supuestos del modelo de Black-Scholes). *El modelo de Black-Scholes se basa en los siguientes supuestos:*

1. No hay restricciones sobre la venta en corto
2. El precio de las acciones sigue un movimiento browniano geométrico
3. No hay costos de transacción ni impuestos
4. No se pagan dividendos y no hay arbitraje
5. La tasa de interés libre de riesgo es constante

6. La negociación de valores es continua

7. Todos los valores se pueden dividir perfectamente

C.4.2. Derivación de la ecuación de Black-Scholes

Teorema C.4.1 (Ecuación diferencial de Black-Scholes). *Consideremos una cartera Π compuesta por una posición larga en la opción $V(S, t)$ y una posición corta en Δ unidades del activo subyacente. El cambio en el valor de la cartera es:*

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

Aplicando la fórmula de Itô y eligiendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ para eliminar el riesgo, obtenemos la ecuación de Black-Scholes Black y Scholes (1973):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Demostración. Cálculo del cambio en el valor de la cartera

El cambio infinitesimal en el valor de la cartera es:

$$d\Pi = d[V(S_t, t) - \Delta S_t] \quad (\text{C.44})$$

$$= dV(S_t, t) - \Delta dS_t \quad (\text{C.45})$$

Aplicación de la fórmula de Itô a $V(S_t, t)$

Como $V(S_t, t)$ es una función de dos variables (S_t y t), aplicamos la fórmula de Itô multivariada:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} dS_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (dt)^2 \quad (\text{C.46})$$

Aplicando las reglas del cálculo estocástico:

- $(dt)^2 = 0$ (términos de orden superior)
- $dS_t dt = 0$ (términos cruzados)

Por tanto:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 \quad (\text{C.47})$$

Sustitución de dS_t y cálculo de $(dS_t)^2$

Sustituimos $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \quad (\text{C.48})$$

Para el término cuadrático:

$$(dS_t)^2 = (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \quad (\text{C.49})$$

$$= (\mu S_t)^2 (dt)^2 + 2(\mu S_t)(\sigma S_t) dt dW_t + (\sigma S_t)^2 (dW_t)^2 \quad (\text{C.50})$$

$$= 0 + 0 + (\sigma S_t)^2 dt = \sigma^2 S_t^2 dt \quad (\text{C.51})$$

donde usamos $(dt)^2 = 0$, $dt dW_t = 0$, y $(dW_t)^2 = dt$.

Expansión completa de dV

Sustituyendo todo en la ecuación (C.47):

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S_t dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt \quad (\text{C.52})$$

Reagrupando términos determinísticos y estocásticos:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \quad (\text{C.53})$$

Sustitución en el cambio de la cartera

Sustituyendo (C.53) y $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ en (C.45):

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \quad (\text{C.54})$$

$$- \Delta(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \quad (\text{C.55})$$

Expandiendo:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta \mu S_t \right) dt \quad (\text{C.56})$$

$$+ \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S_t \right) dW_t \quad (\text{C.57})$$

Factorizando:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (\text{C.58})$$

$$+ \sigma S_t \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW_t \quad (\text{C.59})$$

Eliminación del riesgo mediante cobertura delta

Para eliminar el riesgo estocástico (el término con dW_t), elegimos:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Esta elección se conoce como **cobertura delta** o **delta hedging**.

Con esta elección, $\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta = 0$, y la ecuación (C.59) se reduce a:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (\text{C.60})$$

Principio de no arbitraje

Como la cartera Π ya no tiene riesgo estocástico (es determinística), debe generar el mismo rendimiento que una inversión libre de riesgo para evitar oportunidades de arbitraje.

Por tanto, el cambio en la cartera debe ser:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (\text{C.61})$$

donde r es la tasa libre de riesgo.

Cálculo del valor actual de la cartera

Con $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, el valor de la cartera es:

$$\Pi = V(S_t, t) - \frac{\partial V}{\partial S} S_t \quad (\text{C.62})$$

Igualación de las expresiones para $d\Pi$

Igualando (C.60) y (C.61):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S_t \right) dt \quad (\text{C.63})$$

Dividiendo por dt y reordenando:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - rS_t \frac{\partial V}{\partial S} \quad (\text{C.64})$$

Ecuación de Black-Scholes

Reordenando todos los términos al lado izquierdo:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0} \quad (\text{C.65})$$

Esta es la **ecuación diferencial parcial de Black-Scholes**.

□

Comentario C.4.1 (Interpretación de la Ecuación). *La ecuación de Black-Scholes tiene la siguiente interpretación económica:*

- $\frac{\partial V}{\partial t}$: cambio en el valor de la opción debido al paso del tiempo (theta)
- $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$: cambio en el valor debido a la convexidad (gamma)
- $rS \frac{\partial V}{\partial S}$: cambio en el valor debido al crecimiento esperado del subyacente
- rV : costo de financiamiento de la posición en la opción

Comentario C.4.2. *Note que la deriva μ del proceso estocástico del activo subyacente **no aparece** en la ecuación final. Esto es consecuencia del argumento de no arbitraje y es una característica fundamental del modelo de Black-Scholes.*

C.4.3. Solución de la ecuación de Black-Scholes

Teorema C.4.2 (Fórmula de Black-Scholes para opción call). *La solución de la ecuación de Black-Scholes para una opción call europea es:*

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada normal estándar.

Demostración. Cambio de variables

Para transformar la ecuación en una expresión más manejable, realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\tau = T - t \quad (\text{tiempo hasta vencimiento}) \quad (\text{C.66})$$

$$x = \ln(S/K) \quad (\text{C.67})$$

$$v(x, \tau) = \frac{V(S, t)}{K} \quad (\text{precio normalizado}) \quad (\text{C.68})$$

Cálculo de las derivadas transformadas:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -K \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (\text{C.69})$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} \quad (\text{C.70})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = K \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = K \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{C.71})$$

Sustitución en la ecuación de Black-Scholes:

$$-K \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \cdot K \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rS \cdot K \frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0 \quad (\text{C.72})$$

Simplificando y dividiendo por K :

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0 \quad (\text{C.73})$$

Reordenando:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - rv \quad (\text{C.74})$$

Segundo cambio de variables para obtener la ecuación del calor:

Para eliminar los términos de primer orden y el término constante, hacemos el cambio:

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (\text{C.75})$$

donde α y β son constantes a determinar.

Cálculo de las derivadas de v :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad (\text{C.76})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (\text{C.77})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{C.78})$$

Sustitución en la ecuación (C.74):

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad (\text{C.79})$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{C.80})$$

$$+ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r e^{\alpha x + \beta \tau} u \quad (\text{C.81})$$

Dividiendo por $e^{\alpha x + \beta \tau}$ y reagrupando:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[\sigma^2 \alpha + r - \frac{\sigma^2}{2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{C.82})$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \alpha - r - \beta \right] u \quad (\text{C.83})$$

Escogiendo α y β para obtener la ecuación del calor:

Para eliminar los términos de primer orden y constante, elegimos:

$$\sigma^2 \alpha + r - \frac{\sigma^2}{2} = 0 \quad \text{implica que} \quad \alpha = -\frac{r - \sigma^2/2}{\sigma^2} = -\frac{2r - \sigma^2}{2\sigma^2} \quad (\text{C.84})$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \alpha - r - \beta = 0 \quad (\text{C.85})$$

Sustituyendo α :

$$\beta = \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \alpha - r = -\frac{(2r - \sigma^2)^2}{8\sigma^2} \quad (\text{C.86})$$

Con estas elecciones, obtenemos la **ecuación del calor**:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{C.87})$$

Transformación de la condición de frontera:

La condición de frontera original $V(S, T) = \text{máx}(S - K, 0)$ se transforma en:

$$v(x, 0) = \frac{\text{máx}(Ke^x - K, 0)}{K} = \text{máx}(e^x - 1, 0) \quad (\text{C.88})$$

$$u(x, 0) = \frac{v(x, 0)}{e^{\alpha x}} = \frac{\text{máx}(e^x - 1, 0)}{e^{\alpha x}} \quad (\text{C.89})$$

Ahora aplicamos una técnica estándar en la resolución de ecuaciones parciales diferenciales: la aplicación de la función de Green, para más detalles ver Evans (2010).

Definición C.4.1 (Función de Green para la ecuación del calor). La función de Green $G(x, \tau; \xi, 0)$ para la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ es:

$$G(x, \tau; \xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right)$$

Esta función representa la solución fundamental de la ecuación del calor y satisface:

- $\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ para $\tau > 0$
- $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} G(x, \tau; \xi, 0) = \delta(x - \xi)$ (función delta de Dirac)

Resolviendo mediante la función de Green:

La solución de la ecuación del calor (C.87) con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ está dada por:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \tau; \xi, 0) f(\xi) d\xi \quad (\text{C.90})$$

En nuestro caso:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \frac{\text{máx}(e^{\xi} - 1, 0)}{e^{\alpha\xi}} d\xi \quad (\text{C.91})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \frac{e^{\xi} - 1}{e^{\alpha\xi}} d\xi \quad (\text{C.92})$$

donde el límite inferior cambia a 0 porque $\text{máx}(e^{\xi} - 1, 0) = 0$ para $\xi \leq 0$.

Evaluación de la integral:

La integral se descompone en dos partes:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right) e^{(1-\alpha)\xi} d\xi \quad (\text{C.93})$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}\right) e^{-\alpha\xi} d\xi \quad (\text{C.94})$$

Para la primera integral: Completando el cuadrado en el exponente:

$$-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau} + (1-\alpha)\xi = -\frac{1}{2\sigma^2\tau} \left[\xi^2 - 2\xi(x + (1-\alpha)\sigma^2\tau) + x^2 \right] \quad (\text{C.95})$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2\tau} \left[(\xi - (x + (1-\alpha)\sigma^2\tau))^2 - (x + (1-\alpha)\sigma^2\tau)^2 + x^2 \right] \quad (\text{C.96})$$

Esto da:

$$\exp\left(x(1-\alpha) + \frac{(1-\alpha)^2\sigma^2\tau}{2}\right) \cdot N\left(\frac{x + (1-\alpha)\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (\text{C.97})$$

Para la segunda integral: De manera similar:

$$\exp\left(-x\alpha + \frac{\alpha^2\sigma^2\tau}{2}\right) \cdot N\left(\frac{x - \alpha\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (\text{C.98})$$

Recordando que $v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$ y sustituyendo los valores de α y β :

Después de cálculos algebraicos extensos (que involucran las sustituciones $x = \ln(S/K)$ y $\tau = T - t$), obtenemos:

$$\boxed{C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)} \quad (\text{C.99})$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (\text{C.100})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (\text{C.101})$$

□

Veamos la interpretación financiera de los términos en la fórmula resultante:

- $SN(d_1)$: Valor presente esperado del activo subyacente si la opción se ejecuta.
- $Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$: Valor presente del precio de ejecución multiplicado por la probabilidad de ejercicio.
- $N(d_2)$: Probabilidad (bajo la medida neutral al riesgo) de que la opción termine in-the-money.

C.5. Teoremas fundamentales

C.5.1. Teorema de Lévy

Teorema C.5.1 (Caracterización de Lévy del movimiento browniano). Sea M_t un proceso continuo y adaptado con $M_0 = 0$. Entonces M_t es un movimiento browniano si y sólo si:

1. M_t es una martingala local
2. $\langle M \rangle_t = t$ para todo $t \geq 0$

donde $\langle M \rangle_t$ denota la variación cuadrática del proceso.

Demostración. 1. ($\Rightarrow$) Si M_t es un movimiento browniano:

- Es una martingala por sus incrementos independientes y centrados
- Para cualquier partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$:

$$\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t$$

2. ($\Leftarrow$) Sea M_t una martingala local con $\langle M \rangle_t = t$. Por el teorema de representación de martingalas continuas, los incrementos son independientes y normales, por lo tanto M_t es un movimiento browniano.

□

C.5.2. Teorema de Girsanov

Teorema C.5.2 (Teorema de Girsanov). Sea θ_t un proceso adaptado que satisface la condición de Novikov:

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right) \right] < \infty$$

Entonces existe una nueva medida de probabilidad $\mathcal{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que:

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

es un movimiento browniano bajo $\mathcal{Q}$.

Esbozo de la demostración. 1. Se define el proceso:

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

2. Por la condición de Novikov y el teorema de Lévy, Z_t es una martingala con $\mathbb{E}[Z_t] = 1$

3. Se define $\mathcal{Q}$ por: $\left. \frac{d\mathcal{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$

4. Por el teorema de Lévy, $\tilde{W}_t$ es un movimiento browniano bajo $\mathcal{Q}$

□

C.6. Teorema Fundamental de Valoración de Activos

C.6.1. Marco general

Definición C.6.1 (Mercado financiero general). Consideremos un mercado financiero con Delbaen y Schachermayer (1994):

1. Un activo libre de riesgo $B_t = e^{rt}$
2. d activos con riesgo que siguen:

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_t^j), \quad i = 1, \dots, d$$

donde $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ es un movimiento browniano d -dimensional

Definición C.6.2 (Prima de riesgo). El vector de **primas de riesgo** $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^T$ se define como:

$$\theta = \sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$$

donde:

- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T$ es el vector de tasas de deriva de los activos riesgosos

- r es la tasa libre de riesgo
- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ es el vector de unos de dimensión d
- σ es la matriz de volatilidades (asumida invertible)
- σ^{-1} es la matriz inversa de σ

Teorema C.6.1 (Existencia de medida neutral al riesgo). *En un mercado libre de arbitraje y completo, existe una única medida de probabilidad $\mathcal{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que:*

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

es un movimiento browniano bajo $\mathcal{Q}$, y los precios descontados $\tilde{S}_t^i = e^{-rt} S_t^i$ son martingalas bajo $\mathcal{Q}$.

Teorema C.6.2 (Teorema Fundamental de Valoración de Activos). *En un mercado libre de arbitraje y completo, el precio en t de cualquier derivado con función de pagos H_T viene dado por:*

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[H_T | \mathcal{F}_t]$$

Además, existe una estrategia autofinanciada $\phi_t = (\phi_t^0, \dots, \phi_t^d)$ que replica H_T :

$$V_T = \phi_0 B_T + \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_T^i = H_T$$

Esbozo de la demostración. 1. Sea V_t el precio del derivado. Por ausencia de arbitraje, $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ debe ser una martingala bajo $\mathcal{Q}$

2. Por la propiedad de martingala:

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t] = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[H_T | \mathcal{F}_t]$$

3. Por lo tanto: $V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[H_T | \mathcal{F}_t]$

4. La existencia de la estrategia replicante se sigue del teorema de representación de martingalas y de la completitud del mercado

□

C.6.2. Recuperación de Black-Scholes

Corolario C.6.1 (Black-Scholes como caso particular del TFVA). *El modelo de Black-Scholes es un caso particular del TFVA donde:*

- $d = 1$ (un solo activo con riesgo)
- μ y σ son constantes
- $H_T = (S_T - K)^+$ para una opción call

En este caso:

1. La prima de riesgo es constante: $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$
2. Bajo $\mathcal{Q}$: $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$
3. S_T sigue una distribución log-normal bajo $\mathcal{Q}$
4. La fórmula de Black-Scholes se obtiene calculando:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Comentario C.6.1 (Importancia del TFVA). *El Teorema Fundamental de Valoración de Activos proporciona el marco teórico unificado para la valoración de derivados en mercados completos, generalizando resultados específicos como Black-Scholes y conectando la ausencia de arbitraje con la existencia de medidas neutrales al riesgo.*

Referencias

- Ang, A. & Timmermann, A. (2012). Regime Changes and Financial Markets. *Annual Review of Financial Economics*, 4(Volume 4, 2012), 313-337. <https://doi.org/https://doi.org/10.1146/annurev-financial-110311-101808>
- Bellman, R., Corporation, R. & Collection, K. M. R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press. <https://books.google.com.pa/books?id=wdtoPwAACAAJ>
- Bertsimas, D., Kogan, L. & Lo, A. W. (2001). Hedging derivative securities and incomplete markets: An -arbitrage approach. *Operations research*, 49(3), 372-397.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.
- Buehler, H., Gonon, L., Teichmann, J. & Wood, B. (2019). Deep hedging. *Quantitative Finance*, 19(8), 1271-1291.
- Carbonneau, A. & Godin, F. (2021). Equal risk pricing of derivatives with deep hedging. *Quantitative Finance*, 21(4), 593-608.
- Cox, J. C., Ross, S. A. & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)
- Delbaen, F. (2006). *The mathematics of arbitrage*. Springer.
- Delbaen, F. & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische annalen*, 300(1), 463-520.
- Dunbar, N. (2000). *Inventing Money: The Story of Long-Term Capital Management and the Legends Behind It*. Wiley. <https://books.google.com.pa/books?id=RffRAAAAIAAJ>
- Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. https://books.google.com.pa/books?id=Xnu0o_EJrCQC
- Fernholz, E. (2013). *Stochastic Portfolio Theory*. Springer New York. <https://books.google.com.pa/books?id=wQDqBwAAQBAJ>
- Folland, G. (2013). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley. <https://books.google.com.pa/books?id=wI4fAwAAQBAJ>
- François, P., Gauthier, G. & Godin, F. (2014). Optimal hedging when the underlying asset follows a regime-switching Markov process. *European Journal of Operational Research*, 237(1), 312-322. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.01.03>

- Friedman, R. M. (2022). The 100th Anniversary of Einstein's Nobel Prize: Facts and Fiction. *Annalen der Physik*, 534(11), 2200305. <https://doi.org/10.1002/andp.202200305>
- Goodfellow, I. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
- Guo, I. & Zhu, S.-P. (2017). Equal risk pricing under convex trading constraints. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 76, 136-151.
- Harrison, J. M. & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3), 215-260. <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:spapps:v:11:y:1981:i:3:p:215-260>
- Hornik, K. (1991). Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural Networks*, 4(2), 251-257. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(91\)90009-T](https://doi.org/10.1016/0893-6080(91)90009-T)
- Hull, J. (2009). *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson/Prentice Hall. <https://books.google.com.pa/books?id=sEmQZoHoJCcC>
- Karatzas, I. & Shreve, S. (2012). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer New York. <https://books.google.com.pa/books?id=hGP1BwAAQBAJ>
- Leeson, N., Leeson, N. & Whitley, E. (1996). *Rogue Trader: How I Brought Down Barings Bank and Shook the Financial World*. Little, Brown. <https://books.google.com.pa/books?id=A9qIQgAACAAJ>
- Márquez-Carreras, D. (2024). El Movimiento Browniano. *Revista Metropolitana de Matemáticas*, 2(1), 99-124. <https://doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/damaco>
- Marzban, S., Delage, E. & Li, J. Y.-M. (2022). Equal risk pricing and hedging of financial derivatives with convex risk measures. *Quantitative Finance*, 22(1), 47-73.
- Musiela, M. & Rutkowski, M. (2006). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer Berlin Heidelberg. <https://books.google.com.pa/books?id=iojEts9YAxiC>
- Ok, E. (2007). *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press. <https://books.google.com.pa/books?id=f2V7ppFuE7oC>
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer Berlin Heidelberg. <https://books.google.com.pa/books?id=XbDxCAAAQBAJ>
- Pichler, A., Liu, R. P. & Shapiro, A. (2022). Risk-averse stochastic programming: Time consistency and optimal stopping. *Operations Research*, 70(4), 2439-2455.
- Powell, W. (2022). *Reinforcement Learning and Stochastic Optimization: A Unified Framework for Sequential Decisions*. Wiley. <https://books.google.com.pa/books?id=y8V6EAAAQBAJ>
- Rosenthal, J. (2006). *A First Look at Rigorous Probability Theory*. World Scientific. <https://books.google.com.pa/books?id=PYNAgzDffDMC>
- Rubinstein, M. (2006). *A History of the Theory of Investments: My Annotated Bibliography*. John Wiley & Sons. <https://books.google.com.pa/books?id=5Cm4DAEACAAJ>

- Ruszczyński, A. & Shapiro, A. (2006). Conditional Risk Mappings. *Mathematics of Operations Research*, 31(3), 544-561.
- Shiryaev, A. & Wilson, S. (2013). *Probability*. Springer New York. <https://books.google.com.pa/books?id=r0zUBwAAQBAJ>
- Watkins, C. J. & Dayan, P. (1992). Q-learning. *Machine learning*, 8, 279-292.
- Xu, M. (2006). Risk measure pricing and hedging in incomplete markets. *Annals of Finance*, 2(1), 51-71.