UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

TESIS

SEGUNDO SEMESTRE 2025

# DESARROLLO DE LA COMPETENCIA ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE PREMEDIA DEL COLEGIO PANAMERICAN SCHOOL OF PANAMA

ESTUDIANTE
RAFAEL COPRI

CÉDULA
8-930-2283

PROFESOR ASESOR
NARCISO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

ESCUELA DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

TRIBUNAL EXAMINADOR

MGTER. NARCISO RODRÍGUEZ
ASESOR

MGTER. MARIELA GONZÁLEZ
Miembro

MGTER. ABNEL FERNÁNDEZ
Miembro

DRA. IRIS M. JIMÉNEZ H.
Directora
Escuela de Matemática

## ÍNDICE


Introducción........................................................................................................ 6

Capítulo I. Aspectos generales de la investigación

1.1 Situación actual y planteamiento del problema....................................... 8

1.2 Hipótesis........................................................................................... 10

1.3 Objetivos.......................................................................................... 10

1.3.1 Objetivo general.......................................................................... 10

1.3.2 Objetivos específicos.................................................................... 11

1.4 Delimitación del estudio...................................................................... 11

1.5 Justificación....................................................................................... 11

Capítulo II. Marco conceptual y teórico

2.1 Antecedentes..................................................................................... 21

2.2 Marco conceptual................................................................................ 27

2.3 Marco teórico...................................................................................... 29

2.3.1 Competencia espacial.................................................................... 29

2.3.2 Visualización.................................................................................. 31

2.3.3 Procesos cognitivos........................................................................ 33

2.3.4 Las aprehensiones.......................................................................... 38

2.3.5 Las imágenes................................................................................. 42

2.3.6 Habilidades de visualización............................................................ 45

2.3.7 Relaciones espaciales..................................................................... 50

Capítulo III. Metodología

3.1 Diseño de investigación....................................................................... 52

3.2 Participantes....................................................................................... 52

3.3 Instrumento de evaluación................................................................... 52

3.4 Procedimiento..................................................................................... 55

3.4.1 Fase de planificación...................................................................... 55

3.4.2 Fase de aplicación........................................................................ 56
3.4.3 Fase de análisis.............................................................................. 57
Capítulo IV. Instrumento de medición: Prueba de competencias espaciales y procesos cognitivos
4.1 Descripción general del instrumento...................................................... 58
4.2 Estructura de la prueba.......................................................................... 58
4.2.1 Visualización y trasformación espacial........................................... 58
4.2.2 Razonamiento geométrico y volumétrico......................................... 58
4.2.3 Razonamiento lógico-combinatorio y mecánico............................. 59
4.3 Evidencia de validez y confiabilidad...................................................... 59
4.4 Justificación para su uso en esta investigación..................................... 61
Capítulo V. Análisis de datos
5.1 Planteamiento.......................................................................................... 63
5.2 Panorama general de la muestra............................................................ 63
5.2.1 Media aritmética.................................................................................. 65
5.2.2 Mediana............................................................................................... 66
5.2.3 Desviación estándar........................................................................... 66
5.2.4 Rango.................................................................................................. 67
5.3 Análisis por ítem individual..................................................................... 68
5.4 Rendimiento por nivel de dificultad......................................................... 69
5.5 Rendimiento por nivel de competencia.................................................... 71
5.5.1 Visualización y trasformación espacial........................................... 73
5.5.2 Razonamiento geométrico y volumétrico......................................... 73
5.5.3 Razonamiento lógico-combinatorio y mecánico............................. 73
5.6 Análisis según el sexo............................................................................. 74
Capítulo VI. Recomendaciones
6.1 Implementación de herramientas tecnológicas e interactivas................ 79
6.2 Estrategias didácticas basadas en la manipulación de materiales........ 80

**6.3 Estrategias específicas según el género................................................ 81**
**6.4 Desarrollo del pensamiento lógico y la resolución de problemas........ 82**
**6.5 Evaluaciones formativas y seguimiento del progreso estudiantil........ 83**
**Bibliografía........................................................................................................ 84**
**Anexo................................................................................................................ 87**

# INTRODUCCIÓN

Gardner (1983, p.8) considera que la capacidad espacial es esencial para el pensamiento científico, sostiene que es una de las “competencias intelectuales humanas relativamente autónomas”. La mayoría de las ocupaciones técnicas y científicas requieren personas con un percentil por encima del 90% en capacidad espacial. En el caso de las matemáticas, Hadamark (1945), argumenta que gran parte del pensamiento que se requiere en las matemáticas superiores es de naturaleza espacial y como él, muchos otros matemáticos y educadores creen que esta capacidad junto con la imaginación juega un papel importante en el pensamiento matemático y en el éxito de muchas carreras.

Todos aquellos que tenemos la experiencia en enseñar matemáticas y los que han tratado de aprenderla, seguramente han llegado a la conclusión que la mayor dificultad está en resolver problemas, razón por la cual uno de los propósitos que se persigue con la enseñanza de las matemáticas, a nivel superior es que el docente sea capaz de desarrollar en sus alumnos la visualización a través de la representación plana de sólidos, el cálculo de volúmenes y capacidades.

El presente trabajo de investigación titulado: Desarrollo de la competencia espacial en estudiantes de noveno grado de Premedia del colegio Panamerican School of Panama, Panamá, 2024; pretende dar a conocer el nivel de competencia espacial que poseen los estudiantes de noveno grado y las diferencias respecto al género después de haber completado los indicadores de una prueba que implica el uso de habilidades de visualización, rotación de imágenes mentales y percepción en el espacio.

# CAPÍTULO I

# ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1. Situación actual y planteamiento del problema

En Panamá al igual que en otros países se está intentando transformar el sistema educativo para atender los nuevos retos que irrumpen en la sociedad actual frente a los cambios que exige un mundo globalizado, fenómeno del siglo XXI.

Aunque no lo parezca, el mundo en el que vivimos está basado en las matemáticas. Si miramos a nuestro alrededor detenidamente podríamos ver que todo tiene un detalle basado en esta ciencia suprema, sin embargo, a muchas personas se les dificulta identificar los mismos. La habilidad que tienen las personas de asimilar o percibir formas ante una situación abstracta en dicho momento y manipular en la imaginación objetos se le conoce como competencia espacial.

En el ámbito escolar presente es muy común ver profesionales que carecen de competencia espacial, lo que les dificulta en gran manera materias como geometría y algebra, materias que enfocan superficies y planos tridimensionales que están enfocadas en las representaciones internas en la cual los individuos crean cierto tipo de configuración para aquellas situaciones abstractas y lo concretan en una imagen.

Si bien es cierto que la educación panameña secundaria ofrece al estudiantado una amplia variedad de temas en la básica general y bachilleres afines, pero la competencia espacial no está entre los objetivos primordiales de la enseñanza de la misma, aunque se requieran de la competencia, para lograr un mayor y eficaz desempeño en la comprensión de los distintos contenidos matemáticos, especialmente los que se ven en el área de geometría.

En geometría de I, II Y III el alumno debe establecer una relación figura-espacio, y tiene que hacer uso del conocimiento espacial que poseen para llevar a cabo demostraciones en la materia, y la mayoría de las veces este conocimiento es paupérrimo y en casos extremos es nulo, lo que también conlleva a deserción estudiantil en la carrera de matemática.

Para un individuo resulta tedioso el hecho de tener que configurar en sí una situación que no ve y aún más tener que transmitirlo, competencia que todo docente debe tener para poder transmitirlo a sus estudiantes. Un ejemplo claro de que a nuestros estudiantes no se les desarrolla el conocimiento espacial es que se les dificulta configurar una forma geométrica para completar una superficie determinada o figura, en otros casos se observa, que algunos estudiantes logran desarrollar su pensamiento espacial pero debido a concepciones erróneas pueden llegar a un punto en el cual tienden a confundirse y antes de buscar solución, deciden dejar de desarrollar esta competencia.

Es preciso reconocer que la competencia espacial no es una dimensión especialmente atendida en la educación primaria y secundaria en Panamá, justamente porque el profesional que la enseña no desarrolla cierta competencia durante la carrera debido a que no se destaca en materias de demostraciones y sus habilidades lógico y verbal son muy escasas.

Por toda la razón analizada, anteriormente, surge el siguiente planteamiento: **¿Qué nivel de Competencia Espacial presentan los estudiantes de noveno grado de Premedia, en el Colegio Panamerican School of Panama, Panamá, para el año 2024?**

## 1.2. Hipótesis

A continuación, se presenta la hipótesis que dirige nuestro problema de investigación:

- Los estudiantes de noveno grado de Premedia, Colegio Panamerican School of Panama, Panamá, para el año 2024 presentan una baja competencia espacial debido a que las estrategias y actividades en las materias de geometría no favorecen este tipo de competencia.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

- Evaluar el nivel de competencia espacial en estudiantes de noveno grado de Premedia, Colegio Panamerican School of Panama, Panamá, para el año 2024

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Determinar los mayores porcentajes alcanzados por los estudiantes de noveno grado de premedia del Colegio Panamerican School of Panama, para el año 2024, según el género en los indicadores de:
    - Visualización.
    - Rotación.
    - Relaciones Espaciales.

- Determinar el nivel de Competencia Espacial que presentan los estudiantes de noveno grado de premedia, Colegio Panamerican School of Panama, Panamá, para el año 2024, según género.

### 1.4. Delimitación del estudio

Entre algunas de las delimitaciones del trabajo investigativo se encuentran:

- El tiempo de estudio investigativo será desde abril de 2024 hasta Julio de 2024.
- El ámbito geográfico e institucional será el Colegio Panamerican School of Panamá.
- La población serán los estudiantes de noveno grado de Premedia.

### 1.5. Justificación

La Competencia Espacial es una habilidad integradora que permite al estudiante el desarrollo del pensamiento espacial. De acuerdo a la National Research Council (2006) el pensamiento espacial es parte integrante de la vida cotidiana. La gente, los objetos naturales, los objetos y las estructuras hechas por el hombre existen en algún lugar del espacio, y las interacciones entre las personas y las cosas deben ser entendidas en términos de ubicaciones, distancias, direcciones, formas y patrones. Esta implica tres componentes: "conceptos de espacio, herramientas de representación y procesos de razonamiento". Implica entender las relaciones dentro y entre estructuras espaciales y, a través de una amplia variedad de representaciones posibles (de dibujos a modelos de computadora), implica los medios para comunicarse sobre ellos.

Cuando un niño gira un prisma rectangular para encajar en el castillo que está construyendo en el centro del bloque, emplea el razonamiento espacial, al igual que el estudiante que usa un diagrama de un rectángulo para probar que la fórmula para encontrar el área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. El razonamiento espacial nos informa de manera vital nuestra capacidad para investigar y resolver problemas, especialmente los problemas no rutinarios o nuevos, en matemáticas.

La geometría, que se traduce aproximadamente como "medida de la Tierra", trata directamente de medir y mover objetos en el espacio. La geometría es el fundamento de la matemática tal como la conocemos hoy en día. Se desarrolló para explicar fenómenos y resolver problemas que inciden directamente en la vida cotidiana, como medir el tiempo o navegar a través del mar. El pensamiento espacial dio origen a las primeras formas de pensamiento matemático sofisticado, sin embargo, a pesar de su importancia, se ha demostrado que, en la mayoría de las escuelas públicas en Panamá, la geometría recibe el menor tiempo, comparado con otros temas en la instrucción en el aula.

La competencia espacial comprende la interacción entre el razonamiento espacial y el aprendizaje de las matemáticas. Sabemos que, al concentrarnos en el desarrollo de tareas que impulsen el desarrollo de competencias espaciales en nuestros estudiantes fomentamos el pensamiento espacial, de forma que se pueda aprovechar para fortalecer la diversidad de las debilidades estudiantiles. Un enfoque en el pensamiento espacial permite que las matemáticas se conviertan en un esfuerzo más visual y se conecte con lo que los matemáticos "reales" hacen cuando están explorando patrones en el mundo y haciendo descubrimientos. Al explorar los aspectos espaciales de la matemática, lo hacemos más accesible, más atractivo y más relevante. Albert Einstein concibió su teoría de la relatividad, que produjo posiblemente la ecuación más familiar de todos los tiempos ($E = mc^2$), visualizándose a sí mismo sobre un haz de luz. Stephen Hawking ha explicado que "al perder la destreza más fina de mis manos, fui obligado a recorrer el universo en mi mente, y tratar de visualizar las formas en que funcionó" (Johnson, 2014). Necesitamos fomentar continuamente el compromiso creativo de los estudiantes en matemáticas y prestar atención al pensamiento espacial.

Este trabajo de investigación es fundamental porque permite conocer el nivel de competencia espacial que poseen los estudiantes de noveno grado de premedia del Panamerican School of Panama. A través de este análisis, se busca determinar si los estudiantes han desarrollado habilidades espaciales esenciales para su formación académica y cómo estas habilidades influyen en su desempeño en matemáticas y otras áreas del conocimiento. Las competencias espaciales están directamente relacionadas con procesos cognitivos clave como la visualización geométrica, el razonamiento lógico-matemático y la resolución de problemas. No se trata simplemente de habilidades complementarias, sino de capacidades matemáticas fundamentales, necesarias para comprender conceptos de geometría, medición, proporción, y ubicación en el espacio. Tener conciencia de estas competencias permite al estudiante identificar, utilizar y potenciar estas habilidades de forma más eficiente, mejorando así su rendimiento académico general, especialmente en matemáticas.

El desarrollo de estas competencias no solo es vital para el aprendizaje de la matemática en niveles escolares, sino que también tiene un impacto directo en áreas como las ciencias, la tecnología y situaciones de la vida cotidiana. Su fortalecimiento desde etapas tempranas es, por tanto, crucial para una formación académica integral. Según Shumway (2013), la investigación en competencia espacial confirma su importancia en el desarrollo de habilidades en geometría, medición y resolución de problemas, competencias esenciales tanto en la escuela primaria como en niveles superiores, especialmente en campos relacionados con STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Diversos estudios respaldan esta conexión. Investigaciones realizadas por Mix y Cheng (2012) han demostrado que existe una fuerte relación entre el pensamiento espacial y el rendimiento en matemáticas. En términos generales, las personas con sólidas habilidades espaciales también tienden a tener mayor facilidad en disciplinas matemáticas. Esta relación no se limita a un área específica de la matemática, sino que abarca desde la aritmética y los problemas verbales, hasta la geometría, el álgebra y el cálculo.

¿Quién necesita pensar espacialmente? En realidad, todos. Vivimos en un mundo tridimensional, y la navegación, interpretación y análisis del espacio que nos rodea requiere habilidades espaciales constantes. Sin embargo, estas habilidades se vuelven especialmente críticas en carreras relacionadas con STEM. De hecho, se ha demostrado que la capacidad espacial es un fuerte predictor de éxito en estas áreas (Newcombe, 2010, 2013; Wai, Lubinski & Benbow, 2009). Además, el pensamiento espacial también es ampliamente utilizado en campos como las artes, la arquitectura, el diseño gráfico, la computación, la biología, la física, la química, la geología, la geografía e incluso la medicina. Por ejemplo, la interpretación de imágenes médicas como rayos X o resonancias magnéticas exige un alto nivel de razonamiento espacial. Esto demuestra que la competencia espacial no es una habilidad secundaria, sino una capacidad transversal, aplicable a múltiples disciplinas. Tal vez debido a su complejidad y porque aún tenemos mucho que entender al respecto, actualmente faltan apoyos de instrucción para la enseñanza y el aprendizaje explícitos de las estrategias espaciales. La buena noticia es que esto está cambiando.

En un informe presentado en Canadá, el pensamiento espacial es una habilidad cognitiva esencial que permite a los individuos visualizar, interpretar, transformar y razonar sobre la ubicación, las dimensiones, la forma y la relación entre objetos en el espacio. En su informe "Aprendiendo a pensar espacialmente", la National Research Council (2006) hizo un llamado urgente a los sistemas educativos para reconocer que el pensamiento espacial no debe limitarse al estudio de las matemáticas o la geografía, sino que debe integrarse transversalmente a través de las áreas temáticas del currículo escolar.

Las áreas temáticas se refieren a los distintos campos de conocimiento impartidos en el ámbito escolar, tales como Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia, Educación Artística, Tecnología, y otras asignaturas. En todas estas disciplinas, los estudiantes se enfrentan a situaciones donde el pensamiento espacial juega un papel fundamental: desde interpretar mapas históricos, comprender la estructura del ADN, hasta analizar gráficos y modelos tridimensionales en física o tecnología.

Para abordar esta necesidad educativa, surge el concepto de alfabetización espacial, entendido como la capacidad de una persona para comprender, razonar y comunicarse utilizando representaciones del espacio. Esto incluye el dominio de conceptos como escala, orientación, rotación, simetría, perspectiva, y ubicación relativa. Así como la alfabetización lectora permite interpretar y producir textos, la alfabetización espacial permite a los estudiantes interpretar diagramas, construir modelos mentales y solucionar problemas espaciales, lo que mejora su desempeño académico y sus habilidades para la vida cotidiana.

Por lo tanto, fomentar la alfabetización espacial desde niveles educativos intermedios, como el 9° grado de premedia, resulta crucial para potenciar las capacidades cognitivas y el rendimiento en múltiples asignaturas, preparando a los estudiantes no solo para trayectorias académicas avanzadas, sino también para enfrentar retos del mundo real que requieren pensamiento espacial sofisticado.

De igual forma en el informe, describen la situación actual como un "punto ciego importante" en la educación y sostiene que, sin prestar atención explícita al pensamiento espacial, los conceptos, herramientas y procesos que lo sustentan "permanecerán encerrados en una curiosa zona crepuscular educativa: ampliamente confiada en todo el currículo, pero no explícita y sistemáticamente se instruye en cualquier parte del plan de estudios ".

Las investigaciones sobre competencias espaciales y procesos cognitivos no solo arrojan datos sobre el nivel de desarrollo de estas habilidades en los estudiantes, sino que también abren una ventana crítica para reflexionar sobre la calidad y pertinencia de los planes y programas que estructuran el sistema educativo panameño. Surge la interrogante de si dichos planes, especialmente en los niveles de educación premedia y media, han sido diseñados para responder verdaderamente a las exigencias de la sociedad contemporánea, caracterizada por el avance tecnológico, la interdisciplinariedad y la demanda de habilidades cognitivas superiores.

Es fundamental cuestionar si los contenidos curriculares, las estrategias pedagógicas y las metodologías propuestas fomentan el pensamiento crítico, la creatividad, la resolución de problemas y, particularmente, el desarrollo del pensamiento espacial, o si, por el contrario, perpetúan modelos de enseñanza tradicionales que limitan al estudiante a la memorización mecánica y al cumplimiento superficial de objetivos sin profundidad cognitiva. En este sentido, el rol del docente es clave: no debe ser un simple transmisor de contenidos, sino un mediador activo que promueva experiencias significativas de aprendizaje, que estimulen la visualización, la abstracción y la conexión entre el conocimiento escolar y los contextos reales.

Si los sistemas educativos no incorporan conscientemente actividades y entornos de aprendizaje que desarrollen las habilidades espaciales —por ejemplo, mediante el uso de recursos manipulativos, tecnologías interactivas, juegos geométricos o proyectos integradores—, se corre el riesgo de formar generaciones de estudiantes con escasa iniciativa, poco desarrollo cognitivo autónomo y limitadas capacidades para enfrentar desafíos del mundo moderno. En este escenario, más que preparar ciudadanos para construir, diseñar o innovar, se estaría reproduciendo un modelo educativo que forma seres inertes, pasivos, incapaces de usar su pensamiento de manera estratégica y funcional.

En consecuencia, la investigación sobre el nivel de competencia espacial en los estudiantes no solo tiene un valor diagnóstico, sino también un profundo valor crítico y propositivo, ya que permite evaluar si el sistema educativo está cumpliendo su función formativa de manera efectiva o si es necesario replantear enfoques y políticas para construir una educación más coherente con las demandas del siglo XXI.

En esta línea, se considera relevante abordar la competencia espacial no solo como un indicador de desempeño, sino como una pieza clave del pensamiento matemático funcional y contextualizado. Este enfoque permite ir más allá de la evaluación puntual, proponiendo que el desarrollo de habilidades espaciales sea visto como un componente activo y transversal del proceso de enseñanza-aprendizaje. Las dificultades que enfrentan muchos estudiantes en temas como la geometría, el análisis gráfico o la interpretación de representaciones visuales podrían explicarse, en parte, por la escasa atención que se da al fortalecimiento de estas competencias desde los primeros niveles educativos.

Por tanto, se sugiere que la formación docente incorpore de manera más sistemática estrategias didácticas que promuevan el pensamiento espacial, reconociendo que este no surge espontáneamente, sino que puede ser estimulado mediante experiencias concretas, manipulativas y visuales. Actividades como la construcción de modelos, el uso de software interactivo, la interpretación de mapas o diagramas, así como el trabajo con materiales concretos, resultan fundamentales para desarrollar esta capacidad. Incluso propuestas como el ajedrez, el origami o el diseño gráfico pueden funcionar como herramientas pedagógicas potentes si se integran con intencionalidad.

Asimismo, esta investigación apunta a generar una mayor conciencia educativa sobre la necesidad de integrar lo espacial con lo lógico y lo abstracto. Fortalecer la competencia espacial no solo mejora el desempeño académico en asignaturas específicas, sino que también favorece el desarrollo del pensamiento crítico, la creatividad matemática y la resolución de problemas en contextos reales. En un entorno cada vez más orientado hacia lo visual, lo tridimensional y lo tecnológico, preparar a los estudiantes para interpretar, representar y transformar el espacio se convierte en una necesidad formativa fundamental.

En capítulos posteriores, se presentarán recomendaciones concretas que permitan implementar propuestas didácticas basadas en estos planteamientos, con el objetivo de enriquecer la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva más integral, activa y significativa. Estas sugerencias estarán orientadas tanto a docentes como a diseñadores curriculares y autoridades educativas que deseen fortalecer las competencias espaciales como parte del desarrollo matemático en la educación básica.

# CAPÍTULO II

# MARCO CONCEPTUAL Y TEÓRICO

## 2.1. Antecedentes

Con frecuencia se observa una reducida competencia espacial en el desempeño de alumnos que ingresan a carreras universitarias que la requieren, tales como ingeniería, arquitectura, química, diseño y matemáticas, entre otras. Las debilidades observadas pueden relacionarse con el escaso tiempo destinado al desarrollo de la competencia espacial en la escolaridad previa, a pesar de estar la misma vinculada con el pensamiento crítico y la imaginación.

Una investigación desarrollada por (Vázquez & Noriega, 2010)),en Argentina, estudio con diseño preexperimental, se analizó el nivel de competencia espacial de jóvenes que ingresan a la universidad y sus diferencias en competencia espacial por carreras y sexo usando para tales propósitos la prueba de competencia Imaginativa (Rapetti & Difabio, 2003).Se seleccionó una muestra de 854 estudiantes de nuevo ingreso en la universidad en carreras técnicas, 596 alumnos pertenecientes al ciclo básico de las carreras de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad de Buenos Aires y 258 de la carrera de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional. Se observó que los alumnos de la carrera de Ingeniería aventajan en competencia espacial al grupo de Arquitectura y Diseño. Entre los factores posibles que explican esta diferencia, puede señalarse el aprendizaje de Física y de Dibujo Técnico que traen los alumnos que ingresan en Ingeniería, los cuales proceden de escuelas técnicas en un 75%, mientras que, en el caso de los que ingresan en Arquitectura y Diseño, ese porcentaje es de sólo 25%. En cuanto a la diferencia por sexos, al inicio del curso los varones aventajan a las mujeres en el puntaje y en ambos factores de competencia espacial. Esto confirma los resultados obtenidos en investigaciones previas, que señalan que la mayor diferencia se da en las habilidades referidas a la rotación; en cambio, en la muestra, la mayor diferencia se halla en los ítems de visualización, que resultan los más difíciles para ambos sexos, aunque los varones se desempeñan significativamente mejor que las mujeres. Esto puede deberse a que, en la prueba aplicada en el trabajo, las rotaciones que se incluyen son todas globales y en el plano. Las diferencias se mantienen al finalizar el curso de ingreso, lo que verifica que la mejora es significativa para ambos sexos, en el caso de los sujetos que parten de niveles bajos o moderados. Este resultado avala la interpretación de un modelo explicativo interaccionista en cuanto a las diferencias por sexos en la competencia espacial.

Otra investigación relacionada con nuestro trabajo es la llevada a cabo en Colombia por Morales y Majé (2010), cuyo propósito fue contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de competencia matemática, particularmente en la formulación y resolución de problemas mediante el estudio del objeto matemático cuadriláteros, apoyado en un programa de geometría dinámica.

El estudio empleó un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, y contó con la participación de 40 estudiantes (equivalentes al 25 % de la población total) y 3 docentes del área de matemáticas (60 % del comité académico de la institución). Los autores analizaron el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, así como el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes en torno al pensamiento espacial.

En sus hallazgos, se identificaron tres tipos de errores o dificultades recurrentes en los estudiantes: aquellos relacionados con estereotipos y misconcepciones (creencias erróneas sobre conceptos geométricos), el fenómeno de la no-congruencia y el déficit en las clasificaciones inclusivas respecto al objeto matemático de los cuadriláteros. Estos resultados aportan una comprensión valiosa sobre las limitaciones cognitivas vinculadas al pensamiento espacial y su incidencia en el aprendizaje geométrico.

Asimismo, los autores destacan la importancia de emplear recursos tecnológicos y estrategias didácticas innovadoras que favorezcan la exploración activa y la manipulación visual de las figuras geométricas. El estudio resalta que el fortalecimiento del pensamiento espacial no solo contribuye al dominio de conceptos geométricos, sino que también potencia habilidades cognitivas superiores, como la abstracción, la visualización mental y el razonamiento lógico. Este aporte resulta especialmente relevante para el campo educativo, ya que evidencia cómo la mediación tecnológica puede transformar la enseñanza tradicional de la geometría, promoviendo aprendizajes más significativos y comprensivos.

Otro estudio efectuado por (Noriega, Vázquez, & García, 2011), en Argentina, se centra en la evaluación de tres componentes que integran el aspecto de la competencia espacial denominado visualización: el desarrollo de superficies y el reconocimiento de volúmenes a partir de sus desarrollos en el plano, las rotaciones complejas y el reconocimiento de proyecciones. La exploración se hizo sobre una muestra compuesta por 716 alumnos de la Universidad de Buenos Aires. Para la medición de la variable competencia espacial se usó una prueba preparada ad hoc, compuesta por 12 ítems. El análisis de los datos muestra la validez y confiabilidad de la prueba usada para evaluar a los ingresantes a las carreras de Arquitectura y Diseño en las habilidades de rotación, desarrollo de volúmenes y proyecciones, las que se distinguen como factores diversos dentro de la prueba. Se ha hallado que esta última habilidad es la que presenta el mayor nivel de dificultad, lo que puede relacionarse con el tipo de estrategias requeridas para el desempeño en tareas de esta naturaleza. Cabe observar que la media de competencia espacial es de 6.85, con el 35% de los sujetos por debajo de los 6 puntos y 40% con un puntaje igual o mayor a 8.33; es decir que la prueba resulta de una dificultad moderada y este resultado parece un tanto sorprendente, pues durante el desarrollo de las clases los alumnos evidencian dificultades en los ejercicios que requieren visualización. Esta discrepancia podría deberse a que, en los ítems propuestos, las transformaciones deben ser percibidas, pero no construidas; por lo que se prevé una nueva exploración, con ejercicios que exijan la construcción de la solución.

Otra investigación relevante de (Noriega & García, 2011), en Argentina, cuyo fin era evaluar el rol que juegan las diversas formas de motivación, el uso de estrategias metacognitivas y cognitivas en la relación entre la competencia espacial y el rendimiento académico de alumnos ingresantes a las carreras: Arquitectura, Diseño Gráfico, Industrial, Indumentaria y Textil, de Imagen y Sonido, y Paisaje. En una muestra de 149 sujetos se aplica una prueba de competencia espacial elaborada ad hoc a partir de instrumentos existentes, y el Cuestionario de motivación y estrategias de Pintrich. Se verifica una relación significativa pero débil entre competencia espacial y rendimiento académico, que indica la mediación de patrones motivacionales y uso de estrategias. En estos dos aspectos las mujeres superan a los varones, compensando el déficit en competencia espacial, que tiene una media más alta en los varones. En particular, el rendimiento académico se asocia con la motivación intrínseca por el aprender, con el valor que se asigna a las tareas de estudio, la aplicación de esfuerzo y el empleo de estrategias de elaboración y de organización, de manejo de tiempo y de ambiente de estudio. Este resultado permite extraer algunas pautas para la intervención pedagógica, que debe promover en los alumnos la importancia del compromiso personal con los estudios.

Otro estudio realizado en Bogotá, por (Contreras, Tristancho, & Vargas, 2013), tuvo como propósito evaluar los factores de entorno que afectan el desarrollo de habilidades espaciales en estudiantes de primer semestre en Ingeniería Industrial, en ese estudio se implementó una encuesta y la prueba de rotación mental (MRT) compuesta por 20 preguntas y un tiempo de aplicación máximo de 60 minutos, la cual se aplicó el primer día de clases de la asignatura de Dibujo. Los resultados muestran que un 60% de la muestra no superó la prueba y que el nivel de buenos resultados (excelente y bueno) corresponde solo al 23%.

Para tratar de determinar los factores de entorno que pudieron afectar el desarrollo de habilidades espaciales, se crearon dos nuevos subgrupos: los estudiantes de nivel bueno y excelente, y los estudiantes con nivel muy insuficiente. Luego se hizo un análisis para determinar características, tales como, distribución de género y experiencia previa de dibujo. Los resultados muestran una alta dependencia de género, el grupo de buen desempeño se tiene una relación hombre-mujer de 6 a 1, en el bajo rendimiento es casi de 1 a 2. Con relación a los estudiantes que tenían experiencia previa en dibujo se pudo ver que el grupo con buen desempeño tiene menos experiencia de clase orientada. También se identificó que los métodos tradicionales usados en las clases de dibujo de los colegios parecen no lograr incentivar el desarrollo de habilidades espaciales.

Otro resultado de comparación entre disponibilidad y hábitos tecnológicos muestran que el uso de herramientas tecnológicas permite a los estudiantes desarrollar de manera efectiva las habilidades espaciales necesarias.

Cabe señalar, que la información bibliográfica en Panamá sobre Competencia Espacial es muy escasa. Sin embargo, existe un estudio de Mariela González quien abordó el tema sobre el desarrollo del pensamiento espacial en niños del nivel primario haciendo alusión al modelo curricular de la Educación Panameña y en donde se enfatiza que el sistema panameño le da más importancia a la enseñanza de la Aritmética dejando relegada la Geometría que ofrece la oportunidad para fomentar la riqueza imaginativa y la orientación espacial. También, se señala que una de las causas del deterioro de esta materia (Geometría) se debe a que el contenido en matemática es muy extenso y los profesores elaboran el plan trimestral sin consignar esta materia como contenido. Además, sustenta la relevancia que tiene el desarrollo del pensamiento espacial en edades tempranas ya que esta es la base de carreras existentes en nuestra sociedad, al igual que se debería implementar la geometría desde preescolar hasta el último grado de escolaridad ya que en los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial.

## 2.2. Marco Conceptual

Los términos básicos que se presentan en esta investigación son los siguientes:

- Aritmética: “Es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: adición, resta, multiplicación y división” (Wikipedia, 2017).
- Competencia: “Es un conjunto de conocimientos que, al ser utilizados mediante habilidades de pensamiento en distintas situaciones, generan diferentes destrezas en la resolución de los problemas de la vida y su transformación” (Laura Frade, 2017)
- Competencia Espacial: Según (Vázquez & Noriega, 2010), esta capacidad implica la selección, interpretación, traducción y utilización de distintas representaciones para reflejar una situación, interactuar con un problema o presentar el propio trabajo. Las representaciones pueden ser gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas o materiales concretos.
- Competencia matemática: Según PISA (2015), es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia permite comprender el papel de las matemáticas en el mundo y tomar decisiones fundamentadas, propias de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, destacando así su valor funcional y contextual en la vida cotidiana.

- Estrategia Cognitiva: Según Chadwick (1996), las estrategias Cognitiva son procesos de dominio general para el control del funcionamiento de las actividades mentales, incluyendo las técnicas, destrezas y habilidades que la persona usa consciente o inconscientemente para manejar, controlar, mejorar y dirigir sus esfuerzos en los aspectos cognitivos, como procesamiento, atención y ejecución, en el aprendizaje.
- Estrategias metacognitivas: las estrategias metacognitivas constituyen un grupo de estrategias de aprendizaje (los otros tres grupos son las estrategias comunicativas, las cognitivas y las socioafectivas). Consisten en los diversos recursos de que se sirve el aprendiente para planificar, controlar y evaluar el desarrollo de su aprendizaje.
- Matematización: Esta capacidad permite transformar un problema definido en el mundo real en una forma propiamente matemática (que puede incluir la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones o formulación de un modelo). Es también interpretar o valorar un resultado o un modelo matemático con relación al problema original.
- Percepción Espacial: Según (CogniFit, 2017) La Percepción espacial es la capacidad que tiene el ser humano de ser consciente de su relación con el entorno en el espacio que nos rodea (procesos exteroceptivos) y de nosotros mismos (procesos interoceptivos)
- Razonamiento y argumentación: Esta capacidad permite transformar un problema definido en el mundo real en una forma propiamente matemática (que puede incluir la estructuración, conceptualización, elaboración de

suposiciones o formulación de un modelo). Es también interpretar o valorar un resultado o un modelo matemático con relación al problema original.

- Representación: Esta capacidad implica la selección, interpretación, traducción y utilización de distintas representaciones para reflejar una situación, interactuar con un problema o presentar el propio trabajo. Las representaciones pueden ser gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas o materiales concretos.
- Rotación Mental: "aptitud para situarse correctamente respecto de un determinado punto de referencia" (Samara & Clements, 2009, p.161-162)
- Visualización: "la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual" (Hershkowitz, 1989, p. 75)

## 2.3. Marco teórico

### 2.3.1. Competencia espacial

La competencia espacial es un aspecto de la capacidad intelectual, Loman (citado por (Vázquez & Noriega, 2010), que es unitaria en sí misma, pero está compuesta de múltiples subhabilidades que pueden estar más o menos acentuadas en las distintas personas y que influyen en el nivel de logros en diversos campos. Se reconoce que las habilidades espaciales se hallan implicadas en la resolución de problemas geométricos, en el dibujo técnico, la interpretación de mapas, las actividades de manejo de naves, diseño mecánico, educación física y danza, entre otras múltiples actividades tanto académicas como de la vida cotidiana. No hay un acuerdo total en cuanto a la definición del concepto, pero a partir de los numerosos trabajos que se han ocupado del tema, Linn y Peterson (citado por (Bogue & Marra, 2017)) caracterizan la competencia espacial como la habilidad de representar, generar, recordar y transformar información simbólica no lingüística, la cual puede agruparse en dos categorías:

- Visualización espacial: es la habilidad de reconocer objetos tridimensionales mediante el plegado y desplegado de sus caras.
- Relaciones espaciales: se define como la habilidad para imaginar rotaciones en 2D y 3D. (Según los autores, esta capacidad incluye las categorías "rotaciones mentales" y "percepción espacial").

Según (Gutiérrez, 2010), los factores cognitivos de la capacidad espacial se desarrollan cuando los seres humanos interactúan con el mundo que los rodea. Las personas adquieren conocimientos a partir de la interacción con los objetos, utilizando y manipulando los elementos que nos rodea de forma que el conocimiento se adquiere a través de la observación y la interacción. Además, que las habilidades espaciales comienzan a desarrollarse, cuando siendo bebés interactuamos con el entorno y al avanzar en edad, se desarrolla la comprensión del espacio mediante la inteligencia.

En nuestra investigación usaremos la clasificación de Linn y Peterson para identificar las dimensiones que integran la competencia espacial. Estas dimensiones básicas de la cognición espacial involucran el aprendizaje, la memoria y el razonamiento. Veamos detalladamente cada una de ellas.

### 2.3.2. Visualización

Históricamente, la visualización ha sido objeto de interés en numerosas investigaciones especialmente en el área de las matemáticas, constancia de esto se encuentra el trabajo de Presmeg (2006) en el cual la autora sintetiza más de ciento cuarenta estudios distintos sobre la visualización y en otras áreas en el que destacan su uso tales como: la geometría, la trigonometría el cálculo diferencial, el álgebra y el razonamiento matemático.

De acuerdo con Gómez-Chacón (2012), en el documento de Presmeg, los estudios sobre visualización en el ámbito de las matemáticas comenzaron a surgir con mayor fuerza a partir de la primera mitad del siglo XX, especialmente durante las décadas de 1970 y 1980. Investigaciones como las de Bishop (1973) y Cooper (1988), y posteriormente la tesis doctoral de Presmeg (1989), que abordó el papel de los procesos visualmente mediados en la enseñanza de las matemáticas en secundaria, marcaron los primeros avances significativos. Hasta entonces, había pocos estudios específicos en el campo de la educación matemática que abordaran de forma directa el papel de la visualización, como lo hicieron Clements (1982), Krutetski (1976) y Suwarsono (1982).

Este interés se justifica si consideramos que las matemáticas no se construyen únicamente a través de números o fórmulas, sino también por medio de diagramas, tablas, configuraciones espaciales y otros significantes visuales, como los símbolos. A partir de la década de 1990, la investigación en visualización comenzó a diversificarse, abordando distintas líneas temáticas: el desarrollo curricular en áreas específicas de la matemática; nuevas metodologías de enseñanza, como la visualización dinámica; las diferencias de género en la interpretación visual; y estudios sobre categorización de imágenes, como los de Presmeg, y los esquemas de imaginería mental, como los planteados por Dörfler. También se comenzó a explorar el estatus de la visualización en el pensamiento matemático, incluyendo fenómenos como el rechazo a visualizar y la identificación de imágenes prototípicas utilizadas por los estudiantes.

A partir del año 2006, el enfoque investigativo se amplió hacia los aspectos semióticos de la visualización. Esta línea de estudio se centra en cómo las ideas matemáticas toman forma a través de representaciones simbólicas y visuales, y cómo dichas representaciones permiten su comprensión, comunicación y generalización. Desde esta perspectiva, los objetos matemáticos no solo se presentan como entidades abstractas, sino que adquieren cuerpo a través de signos, imágenes, gráficos y otros recursos que median el pensamiento. Este enfoque semiótico reconoce que la visualización no es simplemente una herramienta de apoyo, sino un proceso fundamental para acceder al significado de las matemáticas. Así, las representaciones visuales y simbólicas funcionan como puentes entre la experiencia concreta y el razonamiento abstracto, y su adecuada interpretación es clave en el desarrollo de competencias matemáticas profundas.

En este marco, los aspectos semióticos aluden a los signos, símbolos, representaciones gráficas, algebraicas, geométricas y verbales que forman parte del lenguaje matemático. Son elementos esenciales que permiten construir y expresar el pensamiento, así como interpretar ideas dentro del sistema matemático. En tanto, los sistemas semióticos son los conjuntos organizados de esos signos, regulados por normas y convenciones propias del discurso matemático. Por ejemplo, el sistema simbólico (operadores, letras, números), el gráfico (gráficas, figuras, diagramas), y el lingüístico (lenguaje verbal o escrito matemático) permiten que los estudiantes no solo resuelvan problemas, sino que también traduzcan, comuniquen y reflexionen sobre ideas desde múltiples perspectivas representacionales. El dominio de estos sistemas fortalece la capacidad de razonamiento y apoya la transición entre el pensamiento concreto y el pensamiento abstracto.

En los últimos años, la creciente integración de elementos visuales en la sociedad como gráficos, íconos, objetos pictóricos e imágenes digitales ha potenciado aún más el papel de la visualización como medio esencial para representar y comunicar información. Según Vázquez y Noriega (2010), visualizar implica ejecutar acciones mentales como la manipulación, la inversión o la identificación de cuerpos simétricos, es decir, reconocer figuras reflejadas o rotadas mentalmente en tres dimensiones. Este tipo de razonamiento es fundamental en tareas que exigen transformar o reinterpretar visualmente un objeto para comprender su comportamiento en distintos contextos espaciales.

Autores como Zaskis, Dubinsky y Dauterman (1996) explican que la visualización permite transitar entre el contexto externo las representaciones gráficas o simbólicas y la mente. En la misma línea, Hershkowitz (1989) asocia la visualización con la capacidad de representar, transformar, generalizar, comunicar y reflexionar sobre información visual. Arcavi (2003), integrando estas ideas, define la visualización como una capacidad, un proceso y un producto que permite crear, interpretar, usar y reflexionar sobre imágenes mentales, dibujos en papel o producciones tecnológicas para representar y comunicar pensamientos.

En el contexto matemático, la visualización cumple un papel crucial en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Permite explorar cómo los estudiantes interpretan, manipulan o imaginan objetos matemáticos al resolver problemas. Este fenómeno ha motivado la aparición de términos relacionados como visualización matemática, representación espacial, competencia visual o visualización espacial. Aunque a menudo se utilizan como sinónimos, cada uno aborda matices distintos del proceso visual, los cuales se detallarán en el apartado siguiente.

Finalmente, Zimmerman y Cunningham (1991) definen la visualización matemática como el proceso de generar y utilizar representaciones geométricas y gráficas de conceptos o problemas matemáticos, ya sea a mano o mediante tecnología digital. Por su parte, Laurendeau y Pinard (1980) sostienen que la representación espacial tiene un origen sensorio-motriz, es decir, se inicia con la acción física sobre objetos reales, pero se extiende hacia la manipulación mental de objetos simbólicos o representados, una habilidad esencial para el razonamiento matemático abstracto.

### 2.3.3. Los procesos cognitivos

En el análisis propuesto por Raymond Duval (citado por Castellanos, 2010), se identifica que uno de los principales problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y por extensión de las matemáticas, es la dificultad que tienen los estudiantes para coordinar tres procesos cognitivos fundamentales: la representación, la construcción y el razonamiento. Estos procesos no ocurren de forma aislada, sino que están interrelacionados en la actividad mental del estudiante cuando enfrenta tareas matemáticas.

El proceso de representación requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Según Duval citado por Espinosa (1998), para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente ese objeto matemático, al menos en dos diferentes representaciones. Las consideraciones visuales son, bajo estos supuestos, importantes en la resolución de problemas. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas. Por ejemplo, para obtener la generalización de la suma S de los números impares, los estudiantes de primaria podrían emplear la representación mostrada en la figura 1 en lugar de los símbolos formales de la ecuación $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ veamos el caso para $k = 7 \rightarrow S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$.

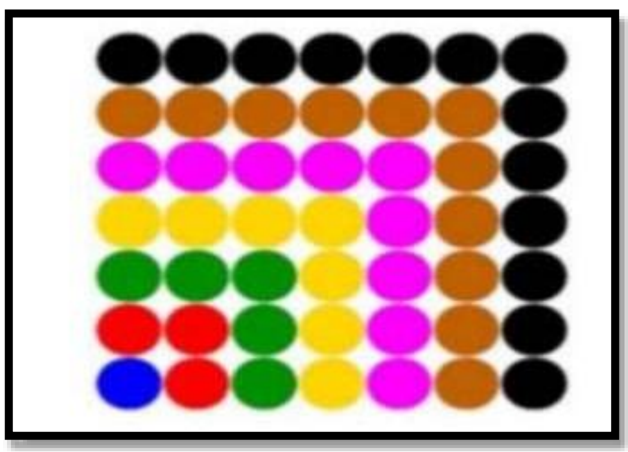


**Figura 1. Representación visual de la suma de números impares para k=7**.

Fuente: (Císcar, 2015), en su Tesis Doctoral Características del razonamiento en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría, p.47.

La práctica de la visualización requiere de distintos tipos de representaciones, el estudiante puede hacer construcciones geométricas utilizando regla y compas, de hecho, ese ha sido el inicio del aprendizaje de la geometría. En la actualidad ha surgido una nueva tendencia didáctica y una de ellas es el uso de la tecnología. Mediante estos ordenadores se pueden examinar más representaciones o ejemplos que no son posibles hacer a mano, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente.

El proceso de construcción, se da lugar cuando el individuo genera algo concreto a partir de imágenes o viceversa, por ejemplo, al visualizar una función no solo se trata de verla o contemplar su figura, de hecho es posible visualizar sin verla, esto se da cuando un individuo a partir de una ecuación matemática como $y = x^2$ puede imaginar, qué recorrido tiene está al ser representada en un plano cartesiano sin ser dibujada, solo utilizando su imaginación, conceptos y conocimientos. Es decir, la concepción imaginativa es un vehículo para representar objetos no visuales y relacionarlos.

En cambio, el proceso de razonamiento consiste en el conjunto de representaciones mentales y construcciones de uno o varios objetos. Todo ello hace que el razonamiento ofrezca, por un lado, una base sólida para el razonamiento geométrico formal y, por otro lado, herramientas cognitivas fundamentales para análisis geométricos formales.

En el trabajo de tesis doctoral, León citado por Blanco (2011) relaciona tres aspectos cognitivos que vinculan de manera natural visualización y aprendizaje de las matemáticas:

- El primero, tiene que ver con su función en la elaboración del conocimiento matemático tanto en el desarrollo de procesos complejos para la matemática (como las demostraciones), como en la constitución de intuiciones básicas (como la de la noción de infinito) (De Guzmán, 1996).
- El segundo aspecto es la relación con la actividad sensorial, que permite la aprehensión de los objetos del mundo físico a través de los sentidos. Desde esta perspectiva, existen diversas formas de percepción: visual, táctil, gustativa, auditiva y olfativa. Entre ellas, se destaca la percepción visual como una forma privilegiada para la visualización (Fischbein, 1987, 1998).
- La tercera relación se establece con el tipo de proceso semiótico que convierte a la visualización en una forma de representación analógica. Esta representación está determinada por el modo en que se aprehenden las formas simbólicas del sistema semiótico, por las relaciones entre dichas formas dentro del sistema y por su nivel de referencia al objeto matemático (Duval, 1999, 2004). En términos sencillos, un proceso semiótico es el conjunto de actividades mentales utilizadas para crear, interpretar y transformar signos —como dibujos, letras, números o diagramas— con el propósito de representar ideas matemáticas. Por su parte, un sistema semiótico es el conjunto organizado de esos signos junto con las reglas que determinan cómo se relacionan entre sí (por ejemplo, las convenciones del lenguaje algebraico o las normas de construcción de un diagrama geométrico).

### 2.3.4. Las aprehensiones

Aprehensión, en el ámbito cognitivo y según el Diccionario de la Lengua Española (RAE, 2017), es “la captación de las formas de las cosas sin emitir juicio sobre ellas, sin afirmar ni negar”. Es decir, se trata de la percepción pura y directa de un objeto o una representación, antes de analizarla, interpretarla o valorarla. En el aprendizaje matemático, la aprehensión permite al estudiante reconocer los elementos esenciales de una figura, un diagrama o un símbolo, de modo que pueda luego operar con ellos de manera adecuada.

A partir de esta idea, (Quesada & Torregrosa, 2007) Plantean tres tipos de aprehensión, que están involucrados con el proceso de visualización:

Aprehensión perceptiva: La aprehensión perceptiva es un tipo de procesamiento mental que permite captar de forma inmediata e intuitiva las características visuales generales de un objeto o forma sin necesidad de hacer un análisis detallado o consciente. Esta aprehensión se basa en la percepción visual y es el primer paso para el reconocimiento y la interpretación de elementos en nuestro entorno. Es una experiencia rápida y global: se reconoce la forma, el tamaño, la orientación o la disposición de los elementos sin realizar operaciones mentales complejas. Por ejemplo, identificar un polígono como “algo de muchos lados” antes de distinguir si es un pentágono o un hexágono.

Aprehensión discursiva: es la acción por la que se produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, acciones…). Esta asociación puede realizarse de dos maneras: Cambio de anclaje visual al discursivo en donde el observador identifica en el dibujo características de una figura, y cambio de anclaje discursivo al anclaje visual, en la que el estudiante tiene la capacidad de realizar un dibujo con sus características sin hacer una asociación matemática mediante un cambio de anclaje visual a discursivo y de discursivo a visual (Figura 2)

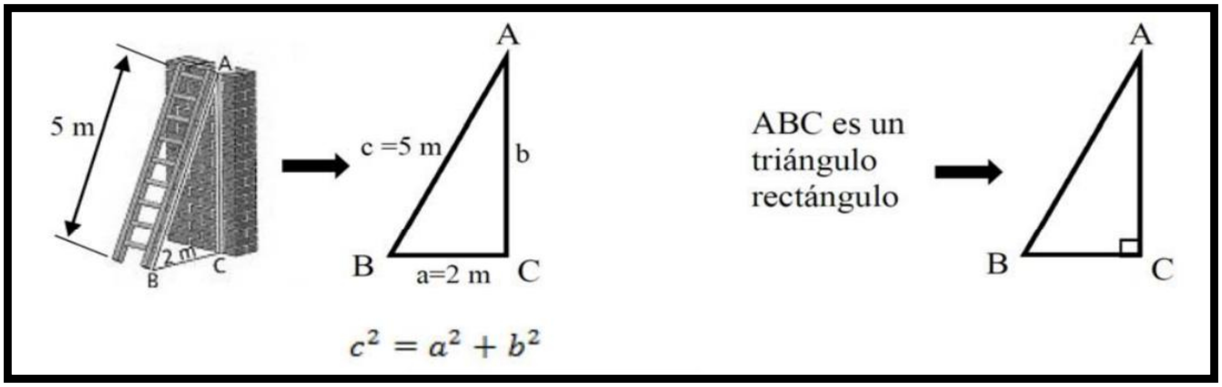



**Figura 2. Aprehensión discursiva con cambio del anclaje visual al anclaje discursivo (a); y del anclaje discursivo al anclaje visual (b).**

Fuente: Quezada y Terragoza (citado por (Císcar, 2015)), en su Tesis Doctoral Características del razonamiento en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de probar geometría, p.65.

Aprehensión operativa: es un tipo de aprehensión cognitiva que va más allá de simplemente percibir una figura o situación geométrica; implica una interacción activa del sujeto con la configuración visual con el propósito de modificarla y así resolver un problema. Es decir, el estudiante no solo observa, sino que realiza transformaciones mentales o gráficas sobre la figura, lo cual requiere una comprensión más profunda de los elementos involucrados. Este tipo de aprehensión es fundamental en la resolución de problemas geométricos, ya que permite explorar alternativas, imaginar cambios, y construir nuevas relaciones entre los componentes de una figura.

Se reconocen dos formas principales dentro de la aprehensión operativa:

Aprehensión operativa de cambio configural: ocurre cuando el estudiante añade elementos geométricos nuevos a una figura existente para analizarla o resolver un problema. Por ejemplo, al observar la figura compuesta por dos triángulos opuestos, el estudiante puede reorganizar mentalmente la configuración al identificar que comparten lados de igual longitud. Esta reconfiguración le permite introducir relaciones geométricas como la congruencia de triángulos mediante el criterio Lado-Lado-Lado (LLL), lo que a su vez facilita el razonamiento necesario para concluir que los ángulos ∠B y ∠D son congruentes. En este proceso, al añadir elementos nuevos como líneas auxiliares, también es posible descubrir nuevas propiedades que no eran evidentes en la configuración inicial. (Figura 3).

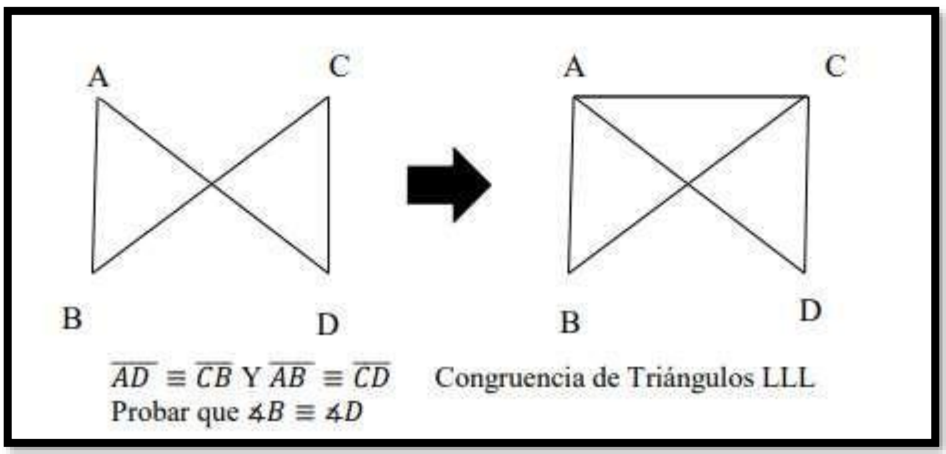



**Figura 3. Aprehensión operativa con cambio configural.**

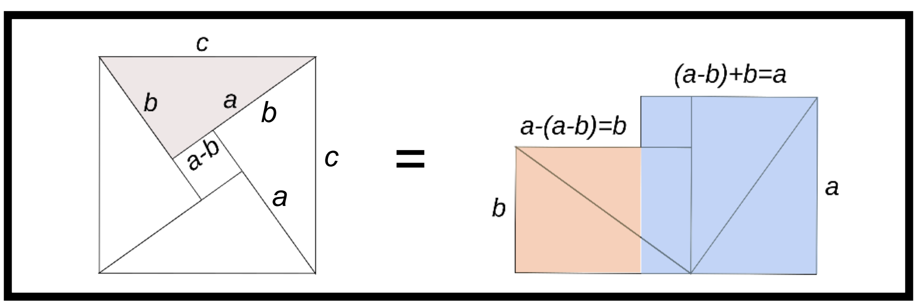
Fuente: Quezada y Terragoza (citado por (Císcar, 2015)), en su Tesis Doctoral Características del razonamiento en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de probar geometría, p.65

Aprehensión operativa de reconfiguración: implica que el estudiante reorganiza mental o físicamente las partes de una figura ya dada, sin agregar nuevos elementos. Es comparable a manipular piezas de un rompecabezas: el estudiante identifica subconfiguraciones y las reacomoda para lograr una solución. Por ejemplo, si se da una figura compuesta por varios triángulos, el estudiante puede moverlos mentalmente para formar un paralelogramo o un rectángulo, entendiendo cómo se conservan o transforman ciertas propiedades geométricas.

La Figura 4 constituye un ejemplo representativo de aprehensión operativa por reconfiguración, uno de los tipos de aprehensión visual propuestos por Duval.

La construcción parte de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, y cuya hipotenusa es c. En la figura, este triángulo se replica cuatro veces para formar un cuadrado mayor, en cuyo interior se inscribe un cuadrado blanco. Esta disposición permite visualizar que el área del cuadrado externo es **c²**, ya que su lado mide c.

Posteriormente, las mismas piezas (los cuatro triángulos y el cuadrado blanco central) se reorganizan para formar dos rectángulos de lados **a** y **b**, además de un cuadrado de lado (**a - b**). A partir de esta configuración, es posible deducir dos cuadrados: uno de lado a y otro de lado b. Al calcular sus áreas, se obtiene **a²** y **b²**, respectivamente, lo que conduce a una representación visual del teorema de Pitágoras mediante la manipulación y reconfiguración de figuras.




$$\boldsymbol{c^2} \quad = \quad \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{a^2}$$

**Figura 4. Aprehensión operativa con reconfiguración. Ilustración del teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Realizada por Bhaskara en el siglo XII.**

Fuente: Ilustración del Teorema de Pitágoras, por Bhaskara. Autor: Francisco Javier Blanco González (España). Diagrama elaborado con Inkscape. Agosto de 2006.

En cuanto a estos tres tipos de aprehensión, la perceptiva está conectada con la discursiva y la operativa. A medida que se desarrollan la aprehensión operativa y la discursiva, queda más atenuada la acción en la que subyace la aprehensión perceptiva como mero nexo entre ellas (Quesada & Torregrosa, 2007).

Identificar las diferentes aprehensiones puede facilitar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a los problemas de geometría.

#### 2.3.5. Las imágenes.

La visualización matemática no se limita a observar o reproducir gráficos, sino que implica la construcción y manipulación de imágenes mentales que permiten comprender conceptos, resolver problemas y comunicar ideas matemáticas. En este contexto, Duval (1998), citado por Torregrosa y Quesada (2007), subraya la relevancia de distinguir entre figura y dibujo. Esta diferenciación es esencial, ya que muchas dificultades en el aprendizaje surgen cuando los estudiantes confunden el objeto matemático con su representación gráfica.

Según Duval, la figura es la imagen mental que una persona construye sobre un objeto, ya sea físico o abstracto; es decir, una representación interna que permite pensar en propiedades y relaciones más allá de lo que se ve. Por otro lado, el dibujo es la representación externa o gráfica de esa figura, como lo que se realiza en el papel o la pantalla. Esta distinción permite comprender que una misma figura puede representarse mediante dibujos distintos, dependiendo del propósito o del punto de vista adoptado, y que no toda interpretación debe depender del dibujo visualizado, sino del concepto que representa.

Así, trabajar con imágenes en matemáticas implica más que observar figuras; significa activar procesos mentales que integren visualización, razonamiento y simbolización, lo que permite al estudiante avanzar desde lo concreto hacia lo abstracto de forma significativa. Como observamos en definiciones anteriores, la visualización en matemáticas se vincula estrechamente con el uso de figuras e imágenes que surgen de representaciones mentales. Es decir, no se trata únicamente de dibujos concretos sobre papel o pantalla, sino de la capacidad del estudiante para imaginar, transformar y manipular mentalmente formas geométricas, relaciones espaciales o símbolos abstractos. En este sentido, Presmeg (1986) describe diversos tipos de imágenes mentales que los estudiantes pueden formar al enfrentarse a una situación matemática. Estas imágenes cumplen un papel crucial en la comprensión, ya que permiten anticipar resultados, establecer conjeturas y justificar propiedades, incluso antes de usar procedimientos formales. La visualización, entonces, no es solo una herramienta auxiliar, sino una forma esencial de pensamiento matemático que interactúa con los procesos simbólicos y analíticos del razonamiento.

- Imágenes concretas pictóricas: Son aquellos figurativos de objetos físicos creados en la mente, son bidimensional y no adquieren movimiento; sino que, mantienen una representación estática.
- Imágenes de fórmulas: Es la adquisición de una imagen mental, se adquieren al observar una figura concreta ya sea presente en un libro y que se mantiene en el subconsciente de una persona. El alumno concibe las fórmulas como identidades obtenidas “como por arte de magia” y accesibles tan sólo a los “genios” es por ello que él no es capaz de crearla

y la mantiene en su subconsciente hasta el momento que ha de utilizarla.

- Imágenes de patrones: estas son muy similares a las imágenes de fórmulas. Mantienen una relación grafica-significado. Ya que asocia la representación de la gráfica a partir de la definición que la caracteriza.
- Imágenes cinéticas: Son Imágenes parte físicos y parte mentales. Sus primeras representaciones son imágenes mentales, concretizadas a partir de momentos o gestos físicos propios de las personas.
- Imágenes dinámicas: Son Imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan; se dice que, son evaluadas tridimensionalmente, eventualmente en software u ordenadores. Adicionalmente, la visualización es el proceso entre la construcción y la Matematización de la imagen. En particular Bishop (citado por (Suárez Moya, 2016)) hace la distinción de las imágenes visuales físicas o mentales como objetos que se manipulan en la actividad de visualización, la cual puede realizarse según dos tipos de procesos:
- Procesamiento visual (VP). Proceso de conversión de información abstracta en imágenes visuales, y transformación de imágenes visuales en otras.
- Interpretación de información figurativa (IFI). Proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer información.

### 2.3.6. Las habilidades de visualización.

Otro componente fundamental en el estudio de la visualización son las habilidades cognitivas que poseen los individuos para crear, manipular y procesar imágenes visuales. Del Grande (1990) propuso una clasificación detallada de las habilidades de visualización, organizada en la Tabla 1, que facilita su análisis y aplicación en el ámbito educativo.

**Tabla 1. Habilidades de visualización**

<table>
<tr><th>Habilidad</th><th>Descripción</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Coordinación motriz de los ojos</td><td rowspan="2">Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo</td><td>Completar un trazado sin levantar un lápiz y sin pasar dos veces por el mismo lugar.</td></tr>
<tr><td>Reproducir una figura o un objeto presente con la mano o con el mouse de la computadora</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificación visual</td><td rowspan="3">Es la habilidad de reconocer una figura determinada aislándola de su contexto</td><td>Describir figuras dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas</td></tr>
<tr><td>Describir intersección entre figuras</td></tr>
<tr><td>completar figuras</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Discriminación Visual</td><td rowspan="4">Es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre si</td><td>Distinguir figuras o cuerpos congruentes</td></tr>
<tr><td>Descubrir las figuras diferentes dentro de un conjunto</td></tr>
<tr><td>Describir errores en la reproducción de una Figura</td></tr>
<tr><td>Completar Rompecabezas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Memoria Visual</td><td rowspan="3">Es la habilidad de recordar características visuales de un conjunto de objetos que no están a la vista</td><td>Reproducir figuras ausentes</td></tr>
<tr><td>Completar de memoria una figura mostrada durante breves instantes</td></tr>
<tr><td>Ubicar cuerpos y figuras según el modelo Visto</td></tr>
</table>

En estas clasificaciones podemos observar algunas capacidades que hacen referencia a habilidades generales y otras que son más específicas para su utilización en contextos matemáticos, en particular para el campo de la geometría. Se pueden definir otras habilidades interesantes, pero casi siempre se trata de combinaciones o de interpretaciones de las habilidades indicadas antes.

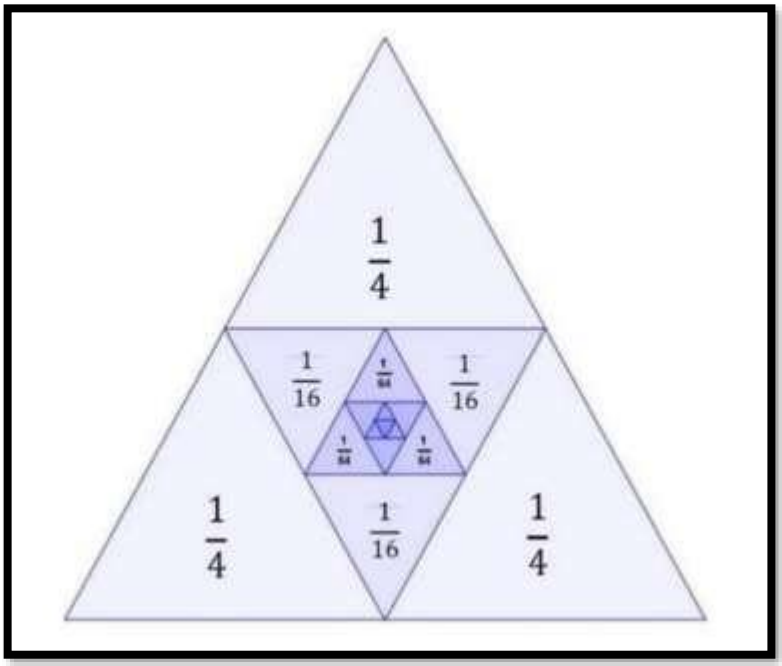
La visualización desempeña un papel clave en el desarrollo del razonamiento matemático, ya que permite al estudiante construir una comprensión más intuitiva y global de los conceptos. No se trata únicamente de ver imágenes, sino de representar mentalmente ideas abstractas mediante esquemas, gráficos, diagramas o figuras geométricas que permiten establecer conexiones entre lo concreto y lo simbólico. Esta capacidad favorece una forma de pensamiento que articula la intuición con el análisis formal.

Cuando el alumno visualiza un concepto, lo internaliza no solo de manera verbal o algebraica, sino también a través de una imagen mental que facilita la comprensión profunda y flexible del contenido matemático. En este sentido, visualizar no es simplemente observar, sino comprender a través de la representación visual.

Ben-Chaim, Lappan y Houang (citado por Blanco, 2011) destacan que la visualización cumple una función crucial en diversos tipos de razonamiento matemático. Por ejemplo, en el razonamiento inductivo, la representación gráfica de patrones numéricos —como la sucesión de los números impares— actúa como catalizador para la detección de regularidades, permitiendo anticipar generalizaciones. Por otro lado, en el razonamiento deductivo, la visualización puede ser un recurso para verificar conjeturas, identificar propiedades o incluso guiar una demostración formal.Asimismo, en el razonamiento proporcional, los esquemas visuales como diagramas de razones, rectas numéricas o modelos de doble entrada permiten al estudiante representar relaciones de forma más accesible y facilitar la resolución de problemas. En todos estos casos, la visualización no sustituye al razonamiento, sino que lo potencia y lo complementa, haciendo que el pensamiento matemático sea más estructurado, comprensible y significativo.

Otra muestra de su importancia surge a partir de la prueba del Teorema de Pitágoras realizado por el matemático hindú Bhaskara en el siglo XII, es un ejemplo claro de cómo los matemáticos antiguos encontraron evidencias de relaciones matemáticas haciendo dibujos (Figura 4).

Además, la visualización ayuda a detectar errores y validar soluciones al permitir contrastar los resultados obtenidos con una representación visual esperada. Esta verificación gráfica fortalece el pensamiento crítico del estudiante. También promueve la creatividad, al abrir caminos alternativos para interpretar y solucionar un problema. El uso de representaciones visuales en la resolución de problemas estimula la perseverancia, ya que ofrece distintas perspectivas cuando una estrategia falla. Así, la visualización se convierte en una herramienta indispensable en la construcción de un pensamiento matemático sólido y flexible. Los estudiantes necesitan visualizar esas configuraciones, generar y organizar datos, buscar patrones, formular conjeturas y después validarlas a través de un soporte argumentativo. Veamos ahora, un ejemplo donde se muestra la representación visual de la suma infinita de la serie geométrica siguiente:




$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{4^i} = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \ldots = 1$$

**Figura 5. La Representación visual de la suma de una serie.**

Fuente: (Císcar, 2015) en su Tesis Doctoral Características del razonamiento en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de probar geometría, p.9

En el dibujo anterior, partimos de un triángulo equilátero de área una unidad, posteriormente, a partir del punto medio de cada uno de los lados lo dividimos en cuatro triángulos semejantes al primero, pero de área un cuarto de unidad; repitiendo este procedimiento construimos un objeto fractal (Mandelbrot, 1975) auto similar de profundidad infinita que mediante un razonamiento visual nos posibilita reconocer la convergencia de una serie. Esta argumentación ayuda a resolver problemas analíticos utilizando el auxilio de un dibujo que permite la transferencia de conceptos matemáticos complejos a algún tipo de representación visual o viceversa. En el ejemplo mostrado, la adición de cada nuevo sumando de la serie se corresponde con el incremento de la superficie que recubre el triángulo inicial con nuevas subconfiguraciones (triángulos semejantes pero cuya área es un cuarto del área del triángulo del paso anterior) que, tras infinitos pasos, consigue ocuparlo completamente. Esta representación visual puede crear la imagen mental de infinitos triángulos semejantes cada vez más pequeños que colapsan hacia el interior de un triángulo equilátero, ocupando completamente su área.

En general, los objetos geométricos están relacionados en la mayoría de las ocasiones con una entidad física o visual, de ahí que la relación entre geometría y visualización sea más complicada de lo que se "percibe" inicialmente. Por otra parte, se debe tener en cuenta que la actividad geométrica implica "habilidades visuales y no visuales, sobre todo en la resolución de problemas y tareas, lo que hace que sea necesario estudiar qué tipo de estrategias son utilizadas y para qué tipo de tareas son importantes dichas estrategias" (Gorgorió, 1998, p. 209). La visualización es un aspecto que está siendo descuidado en la enseñanza de las matemáticas, Cantoral (2001) argumenta "que, si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, inevitablemente tienen que visualizar", pero la visualización no se entrena en la escuela y debe ser entrenada, es decir, es una habilidad que tiene que ser desarrollada a lo largo de la vida de un estudiante.

### 2.3.7. Las relaciones espaciales

Para (Illinois Early Learning Project, 2017) las relaciones espaciales se refieren a la comprensión de cómo los objetos y las personas se mueven en relación con otros. De acuerdo a (Lowel, 1986) los términos empleados por algunos pueblos primitivos indican que el propio cuerpo es la fuente de conceptos espaciales. Para ellos, la palabra ojo puede significar delante; la palabra espalda puede significar detrás de, y la palabra pie puede significar debajo. Sus ideas propias de espacio tienen sus orígenes en situaciones personales y concretas ya que en algunos pueblos no pueden separar mentalmente el espacio de lo concreto y lo afectivo. (Vázquez & Noriega, 2010) Argumentan: "una diferencia importante entre la visualización y las relaciones espaciales es la velocidad de respuesta: la visualización implica complejidad de procesamiento, de allí que las respuestas lleven más tiempo que en el caso de la captación de relaciones espaciales, que se dan por insight" . De igual manera se tiene que dentro de las relaciones espaciales se da la clasificación de rotación y percepción espacial.

Este argumento que brindan Noriega y Vázquez lo podríamos entender como una diferenciación clave en cómo procesamos información relacionada con el espacio. Ellos destacan que la visualización, al involucrar una mayor complejidad cognitiva, requiere más tiempo para generar una respuesta. Esto se debe a que estamos construyendo o recreando mentalmente una imagen de un objeto o situación, lo que implica un esfuerzo más prolongado. En cambio, las relaciones espaciales, como la rotación y la percepción, se captan de manera más inmediata y directa, lo cual se explica por el "insight", un proceso rápido que permite entender la disposición o posición de los objetos sin necesidad de un análisis detallado.

# CAPÍTULO III

# METODOLOGÍA

### 3.1 Diseño de investigación

Este estudio se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo y con un diseño descriptivo. Se utilizó una muestra de 52 estudiantes de 9° grado del Colegio Panamerican School of Panamá, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia. La investigación se centró en la recopilación de datos a través de una prueba estructurada y el análisis estadístico de los resultados obtenidos.

### 3.2 Participantes

La muestra estuvo compuesta por 52 estudiantes de noveno grado, de los cuales se tomó en cuenta la distribución por género, edad y desempeño académico previo en matemáticas. La participación en el estudio fue voluntaria y se garantizó el anonimato de los datos recopilados.

### 3.3 Instrumento de evaluación

Para medir el nivel de competencia espacial, se aplicó una prueba estandarizada diseñada para evaluar tres dimensiones clave: visualización espacial, rotación mental y relaciones espaciales. La prueba consistió en una serie de ejercicios con figuras geométricas presentadas en diversas posiciones y orientaciones, lo que permitió evaluar la capacidad de los participantes para comprender y manipular mentalmente las relaciones espaciales.

La validez del instrumento se estableció a través de pruebas piloto, lo que permitió asegurar que las preguntas de la prueba realmente medían las dimensiones que se pretendían evaluar. Por otro lado, la confiabilidad del instrumento se calculó utilizando el coeficiente de consistencia interna Alfa de Cronbach. Este coeficiente es una herramienta estadística que se utiliza para medir la fiabilidad de un conjunto de ítems, es decir, cuán consistente es la información proporcionada por los diferentes elementos de una prueba.

El coeficiente de Cronbach funciona evaluando la correlación entre los ítems de la prueba. En otras palabras, calcula qué tan bien los diferentes ítems están relacionados entre sí y si están midiendo el mismo constructo subyacente, en este caso, la competencia espacial. Un valor cercano a 1 indica que los ítems están muy correlacionados, lo que sugiere que la prueba es fiable y consistente. Por el contrario, un valor bajo indica que los ítems no están bien relacionados, lo que podría implicar que algunos de los elementos de la prueba no son adecuados o no están midiendo lo que se supone que deben medir.

Generalmente, se considera que un valor de alfa de Cronbach de 0.70 o superior es adecuado para garantizar una buena consistencia interna, mientras que valores menores a 0.70 podrían sugerir la necesidad de revisar y ajustar algunos de los ítems de la prueba para mejorar su fiabilidad.

El enfoque se basa en evaluar la capacidad de realizar transformaciones mentales, sin hacer una distinción específica entre quienes utilizan predominantemente imágenes visuales para resolver tareas intelectuales (conocidos como “visualizadores”) y aquellos que recurren con mayor frecuencia a estrategias verbales (“verbalizadores”). Lo que nos interesa es identificar esta habilidad para aprovecharla como un recurso de aprendizaje que favorezca la comprensión y aplicación de conceptos.

Existen diversas pruebas diseñadas para evaluar esta capacidad en entornos educativos; sin embargo, su uso en el aula puede presentar ciertos desafíos debido a su complejidad o extensión. Algunos ejemplos incluyen el **Purdue Spatial**

**Visualization Test** (Guay, 1976), los **Differential Aptitude Tests-SR** (Bennett y otros, 1949) y los **rompecabezas impresos** (Yela, 1974). Además, algunos investigadores han utilizado cuestionarios o informes personales para analizar el uso de la imaginación en diferentes contextos (Overly y otros, 1998; Giorgetti y Antonietti, 1992).

El instrumento que proponemos está compuesto por 12 ejercicios (detallados en el apéndice), los cuales incluyen:

- **P.1.** Reorganizar dos columnas con seis fragmentos desordenados.
- **P.2.** Identificar, entre cuatro opciones, tres representaciones del mismo objeto en distintas posiciones.
- **P.3.** Vincular un desarrollo plano de un cubo con su correspondiente figura ensamblada.
- **P.4. y P.5.** Determinar el número de caras y aristas resultantes al realizar cortes en los vértices de un cubo, generando triángulos.
- **P.6.** Reconstruir el marco de un cuadro a partir de seis piezas, de las cuales solo cuatro encajan correctamente.
- **P.7. y P.8.** Partiendo de un cubo compuesto por 27 cubitos con su exterior pintado, contar cuántos de ellos tienen pintura en exactamente dos caras y cuántos no tienen pintura en ninguna.
- **P.9.** Identificar de cuántas maneras diferentes se pueden unir cuatro cuadrados por sus lados, sin considerar las mismas formas en posiciones distintas.

- **P.10.** Analizar el movimiento de cuatro engranajes alineados, determinando la dirección en la que gira el último si el primero gira en sentido antihorario.
- **P.11.** A partir de ocho imágenes, reconocer cuáles corresponden a una casa observada desde cuatro perspectivas diferentes.
- **P.12.** Rotar tres banderas 90° hacia la izquierda (sentido antihorario) y 90° hacia la derecha (sentido horario), tomando un punto central como referencia.

Los ejercicios **1, 2, 6, 10 y 12** requieren realizar rotaciones mentales, ya sea para encajar figuras en el plano o para representarlas gráficamente. El ejercicio **3** implica ensamblar mentalmente un cubo a partir de su desarrollo plano y compararlo con los modelos propuestos. Para resolver el ejercicio **9**, es necesario rotar figuras en el plano para identificar combinaciones equivalentes. En el caso del ejercicio **11**, se debe imaginar la vista de una casa desde distintas posiciones y relacionarlas con las opciones presentadas. Finalmente, los ejercicios **4, 5, 7 y 8** requieren contar elementos no visibles, lo que implica una representación mental de estos.

### 3.4 Procedimiento

El proceso de recolección de datos se llevó a cabo en tres fases principales, garantizando un desarrollo estructurado y riguroso que permitiera obtener resultados confiables y representativos. A continuación, se describen en detalle cada una de estas etapas:

#### 3.4.1. Fase de planificación

En esta primera etapa, se establecieron las bases para la correcta ejecución del estudio. Se inició con la gestión de los permisos necesarios ante la administración del colegio, asegurando el cumplimiento de los lineamientos institucionales y éticos. Para ello, se presentó un documento formal que explicaba el propósito de la investigación, la metodología utilizada y las medidas para resguardar la confidencialidad de los datos de los participantes. Paralelamente, se llevó a cabo una reunión informativa con los estudiantes seleccionados, en la cual se les explicó en qué consistía la prueba, cuál era su finalidad y cómo se utilizarían los resultados. Se enfatizó que su participación era voluntaria y que los datos recopilados serían tratados de manera anónima. Asimismo, se resolvieron dudas y se establecieron instrucciones claras para evitar confusiones al momento de la aplicación. Adicionalmente, en esta fase se elaboró el material necesario para la recolección de datos, incluyendo la impresión de los instrumentos de evaluación, la selección del aula donde se aplicaría la prueba y la planificación del cronograma para minimizar interrupciones en la jornada escolar.

### 3.4.2. Fase de aplicación

La prueba fue administrada en un entorno controlado, dentro del horario escolar, asegurando condiciones equitativas para todos los participantes. Se eligió un aula con iluminación adecuada y sin distracciones para garantizar la concentración de los estudiantes. Antes de iniciar, se recordaron las instrucciones generales y se reiteró la importancia de responder de manera honesta y reflexiva. Para evitar posibles sesgos, los participantes no recibieron asistencia en la resolución de las actividades, salvo en aspectos técnicos o de comprensión de enunciados.

El tiempo de duración fue previamente establecido con base en pruebas piloto, permitiendo que los estudiantes completaran la evaluación sin presiones innecesarias. Durante la aplicación, se mantuvo un registro de incidencias para documentar cualquier eventualidad que pudiera influir en los resultados, como distracciones externas, dificultades técnicas o cualquier otro factor que requiriera consideración en el análisis posterior.

### 3.4.3 Fase de análisis

Una vez finalizada la aplicación de la prueba, se procedió con el procesamiento de los datos obtenidos. En primera instancia, se realizó una revisión de los instrumentos para verificar su completitud y descartar respuestas inválidas o inconsistentes. Posteriormente, los datos fueron organizados y tabulados en un software especializado para el análisis estadístico. Se aplicaron técnicas de estadística descriptiva e inferencial, incluyendo pruebas de normalidad para determinar la distribución de los datos y medidas de tendencia central (media, mediana y moda) para caracterizar los resultados generales. Además, se calcularon medidas de dispersión, como la desviación estándar y el rango intercuartílico, con el fin de analizar la variabilidad en las respuestas de los participantes.

# CAPÍTULO IV

## INSTRUMENTO DE MEDICIÓN: PRUEBA DE COMPETENCIAS ESPACIALES Y PROCESOS COGNITIVOS

## 4.1 Descripción general del instrumento

La Prueba de Competencias Espaciales y Procesos Cognitivos, elaborada por Rapetti y Difabio de Anglat (2003), es un instrumento diseñado con el propósito de evaluar la competencia imaginativa en estudiantes de educación media. Se entiende por competencia imaginativa la capacidad de imaginar, transformar y manipular mentalmente objetos y figuras, habilidad fundamental para la resolución de problemas geométricos, el aprendizaje matemático y el desarrollo del pensamiento científico.

La prueba está compuesta por 12 problemas gráficos que exploran diferentes dimensiones de la cognición espacial:

- Visualización y rotación mental de figuras bidimensionales.
- Relación 2D–3D, como el paso de un desarrollo plano a un sólido.
- Conteo de elementos no visibles en poliedros y cubos.
- Razonamiento lógico-combinatorio en configuraciones espaciales.
- Razonamiento mecánico-causal en sistemas simples (ej. engranajes).

La aplicación es colectiva, con un tiempo aproximado de 40 a 50 minutos, y no requiere materiales adicionales más allá de lápiz, borrador y bolígrafo.

## 4.2 Estructura de la prueba

Los ítems pueden agruparse en tres categorías principales:

### 4.2.1 Visualización y transformación espacial

Problemas 1, 2, 6, 11 y 12: implican rotación mental, recomposición de figuras y adopción de diferentes perspectivas.

### 4.2.2 Razonamiento geométrico y volumétrico

Problemas 3, 4, 5, 7 y 8: exigen la construcción mental de sólidos, el conteo de caras y aristas, y la representación de elementos no visibles.

#### 4.2.3 Razonamiento lógico-combinatorio y mecánico

Problemas 9 y 10: demandan análisis de configuraciones posibles y comprensión de relaciones causales en sistemas mecánicos.

Esta estructura permite evaluar no solo la visualización espacial, sino también los procesos cognitivos subyacentes como la abstracción, la flexibilidad mental y el razonamiento lógico.

### 4.3. Evidencias de validez y confiabilidad

De acuerdo con Rapetti y Difabio de Anglat (2003), la prueba presenta cualidades psicométricas sólidas:

- Validez de constructo: Los ítems muestran correlaciones biseriales significativas con el puntaje total (r = 0.28 a 0.65), lo que confirma que todos los problemas miden un mismo constructo: la competencia imaginativa.
- Confiabilidad interna: El instrumento alcanza un alfa de Cronbach de 0.76, considerado aceptable para estudios educativos. Con el método de mitades, la confiabilidad oscila entre 0.78 y 0.87, valores que la teoría psicométrica califica como “considerables”.
- Discriminación de ítems: Los índices de discriminación varían entre 0.30 y 0.94, lo que indica que los problemas diferencian de forma efectiva entre estudiantes con mayor o menor desempeño en la prueba.
- Nivel de dificultad equilibrado: La prueba contiene ítems muy fáciles, fáciles, medios, difíciles y muy difíciles, garantizando una adecuada distribución para diferenciar distintos niveles de rendimiento.

Para facilitar la comprensión de los conceptos estadísticos utilizados en este estudio, a continuación, se explican de manera sencilla:

| Término | Qué significa | Ejemplo cotidiano |
|---|---|---|
| **Coeficiente alfa de Cronbach** | Indica qué tan bien trabajan juntas las preguntas de una prueba para medir lo mismo. Valores cercanos a 1 significan mayor consistencia; se considera aceptable a partir de 0.70. | Como una receta: si varias personas siguen la misma receta y siempre obtienen un plato con el mismo sabor, la receta es “confiable”. |
| **Índice de discriminación** | Mide si cada pregunta distingue bien entre estudiantes de alto y bajo nivel. | En un concurso, una prueba que solo los más expertos superan diferencia a los participantes según su habilidad. |
| **Correlación biserial** | Mide qué tanto cada pregunta se relaciona con el resultado total de la prueba. | En un examen de manejo, si quienes conducen mejor siempre aprueban la prueba de estacionamiento, esta pregunta está bien correlacionada con el resultado global. |

**Tabla 1. Términos importantes.**

En términos simples, estos indicadores permiten asegurar que la prueba es confiable (alfa de Cronbach), que sus preguntas realmente discriminan entre distintos niveles de habilidad (índice de discriminación) y que todas las preguntas contribuyen a evaluar el mismo tipo de competencia (correlación biserial).

### 4.4. Justificación para su uso en esta investigación

El presente estudio utiliza la Prueba de Competencias Espaciales y Procesos Cognitivos porque:

- Evalúa las mismas habilidades que constituyen el objeto de análisis de la investigación (visualización espacial, razonamiento geométrico y procesos cognitivos).
- Cuenta con evidencias sólidas de validez y confiabilidad, demostradas en poblaciones escolares comparables con la muestra de este estudio.
- Permite un análisis detallado por categorías de competencias, lo cual enriquece la interpretación de los resultados.
- Su aplicación es práctica y su calificación rápida, características valiosas en contextos educativos.

# CAPÍTULO V

# ANÁLISIS DE DATOS

### 5.1. Planteamiento

El Tal como se expuso en la introducción de este proyecto, las competencias espaciales y los procesos cognitivos son habilidades esenciales para el aprendizaje de las matemáticas, las ciencias y las áreas tecnológicas. Sin embargo, en los niveles de premedia estas capacidades suelen ser poco estimuladas, lo que puede limitar el desarrollo académico de los estudiantes.

En este capítulo se presenta el análisis detallado de los resultados obtenidos con la Prueba de Competencias Espaciales y Procesos Cognitivos, instrumento validado por Rapetti y Difabio (2003) como confiable para medir estas habilidades. El objetivo es diagnosticar el nivel actual de estas competencias en la muestra estudiada y evidenciar las áreas que requieren mayor atención pedagógica.

El análisis se organiza en cuatro apartados:

- Panorama general de los resultados de la prueba.
- Rendimiento por nivel de dificultad de los ítems.
- Rendimiento por tipo de competencia, con especial énfasis en la Competencia Espacial.
- Comparación por sexo.

### 5.2. Panorama general de la muestra

La prueba fue aplicada a 52 estudiantes de premedia. Cada uno resolvió 12 ítems con puntaje 0 (incorrecto) o 1 (correcto). Los puntajes totales (suma de aciertos) van de 0 a 12.

Datos globales:

- Suma de puntajes (S): 296
- Número de estudiantes (N): 52

| Número | Género | 1 MF | 2 M | 3 F | 4 F | 5 D | 6 MF | 7 MD | 8 D | 9 D | 10 MF | 11 M | 12 F | Nº Ac |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | F | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| 2 | M | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 9 |
| 3 | F | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 4 | F | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 5 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 8 |
| 6 | F | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 7 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 |
| 8 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 9 | M | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 10 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| 11 | F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 12 | F | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 13 | M | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| 14 | F | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 15 | F | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 16 | F | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 17 | M | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 18 | F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 19 | F | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 5 |
| 20 | M | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 21 | M | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 22 | F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 23 | M | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 24 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 25 | M | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 26 | F | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 27 | M | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| 28 | M | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 29 | F | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 30 | M | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 7 |
| 31 | F | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 32 | M | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 33 | F | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 34 | M | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| 35 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 8 |
| 36 | F | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 37 | F | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 |
| 38 | F | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| 39 | M | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| 40 | F | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 41 | M | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 8 |
| 42 | M | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 43 | M | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 44 | F | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 45 | F | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 |
| 46 | F | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 47 | F | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 48 | M | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| 49 | F | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 50 | M | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 51 | M | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 52 | F | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| Total Ac - Item | | 35 | 22 | 32 | 31 | 11 | 39 | 8 | 13 | 20 | 35 | 21 | 29 | 296 |

**Tabla 2. Resultados individuales utilizados para el análisis de competencias.**

En la tabla presentada se muestra la suma de los aciertos por ítem y por estudiante. Estos datos son fundamentales, ya que servirán de base para los distintos análisis descritos previamente.

- La última columna ("Nº Ac") indica el número total de aciertos de cada estudiante.
- La última fila ("Total Ac – Ítems") corresponde a la suma total de aciertos de la muestra en cada ítem.
- En la celda donde se cruzan la última fila y la última columna se encuentra el valor global, es decir, la suma total de los puntajes obtenidos por todos los estudiantes.

### 5.2.1 Media aritmética

La media se obtiene sumando todos los puntajes y dividiendo entre el número total de estudiantes:

$$\bar{x} = \frac{S}{N}$$

Donde la suma de puntajes es $S = 296$ y el número de estudiantes es $N = 52$

$$\bar{x} = \frac{296}{52} = 5.6923 \ldots \approx 5.69$$

La media de 5.69 indica que, en promedio, los estudiantes responden correctamente cerca de 6 ítems de los 12 que conforman la prueba (≈47 % del total).

Este resultado refleja un rendimiento general bajo, pues la media está por debajo de la mitad del puntaje máximo.

### 5.2.2 Mediana

Se ordenan los puntajes de menor a mayor. Al haber un número par de estudiantes (N=52), la mediana es el promedio de los dos valores centrales (luego de ordenarlos). Ambos valores centrales fueron 5, por lo que:

$$\text{Mediana} = \frac{5+5}{2} = 5$$

La mediana señala el punto medio de la distribución: el 50 % de los estudiantes obtuvo 5 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 5 puntos o más. Esto confirma que la mitad de la muestra no alcanza la mitad del puntaje total posible, coincidiendo con el diagnóstico de bajo desempeño.

### 5.2.3 Desviación estándar

La desviación estándar muestral se obtiene con la fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Para el cálculo de la desviación estándar, se utilizaron directamente los puntajes individuales obtenidos en la prueba, los cuales se encuentran en la columna “Nº Ac” de la tabla de resultados.

Esta columna registra el número total de aciertos por estudiante, lo que permite, junto con la media aritmética previamente calculada (5.69), determinar la dispersión de los puntajes.

A partir de estos datos se aplicó la fórmula muestral de la desviación estándar, tal como se muestra a continuación:

$$s = \sqrt{\frac{(7-5.69)^2 + (9-5.69)^2 + \cdots + (7-5.69)^2 + (8-5.69)^2}{52-1}} = \sqrt{\frac{123.08}{51}} \approx 1.55$$

La desviación estándar moderada (1.55) indica variabilidad: hay alumnos que rinden por debajo del promedio con cierta concentración alrededor del centro. En términos prácticos, esto significa que la mayoría de jóvenes de premedia no domina las destrezas espaciales y cognitivas que la prueba evalúa; dado que la prueba es un instrumento validado, esto refleja una realidad educativa que requiere intervención.

### 5.2.4 Rango

$$\text{Rango} = \text{Puntaje máximo} - \text{Puntaje mínimo} = 9 - 2 = 7$$

La diferencia entre el estudiante de mejor desempeño (9) con el de peor desempeño (2) es de 7 puntos. Aunque algunos logran puntajes relativamente altos, son pocos y no cambian la tendencia general de rendimiento deficiente.

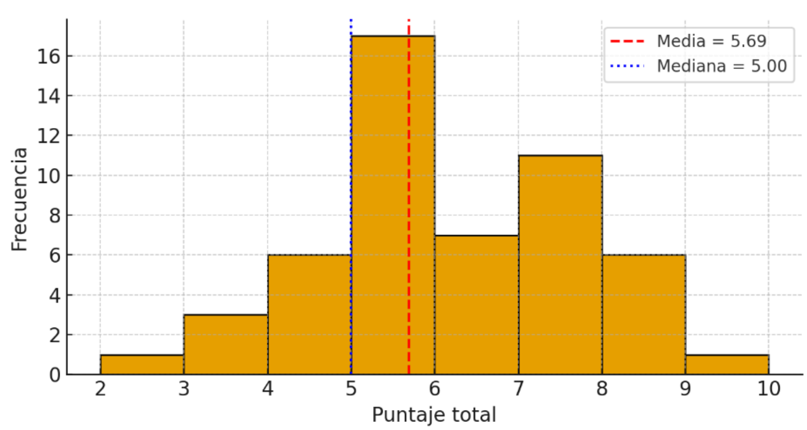



**Figura 6. Histograma de frecuencia de puntajes.**

Fuente: Los gráficos fueron generados utilizando Python con las bibliotecas Matplotlib y Seaborn.

### 5.3. Análisis por ítem individual

Para cada ítem se calculó el porcentaje de acierto (p):

$$p = \frac{N° \, Ac}{N} \cdot 100$$

Procederemos a realizar el cálculo del primer ítem; los demás se resolverán de manera análoga, tomando como referencia la columna de número de aciertos.

$$p = \frac{35}{52} \cdot 100 = 67.3\%$$

| Ítem | Nº Ac | % Ac | Nivel de dificultad |
|---|---|---|---|
| **1** | 35 | 67.3 | Fácil |
| **2** | 22 | 42.3 | Media |
| **3** | 32 | 61.5 | Fácil |
| **4** | 31 | 59.6 | Fácil |
| **5** | 11 | 21.2 | Muy difícil |
| **6** | 39 | 75 | Muy fácil |
| **7** | 8 | 15.4 | Muy difícil |
| **8** | 13 | 25 | Difícil |
| **9** | 20 | 38.5 | Difícil |
| **10** | 35 | 67.3 | Fácil |
| **11** | 21 | 40.4 | Media |
| **12** | 29 | 55.8 | Fácil |

**Tabla 3. Porcentaje de todos los ítems de la prueba en el orden que se presentaron.**

Ítems 6, 1 y 10: son los más accesibles ya que evalúan procesos básicos de reconocimiento y rotación en 2D que los estudiantes ya manejan.

Ítems 5 y 7: los más críticos: <22 % de aciertos. Ambas tareas pertenecen al bloque volumétrico (conteos / manipulación 3D). Indican que la habilidad para representar tridimensionalmente y analizar sólidos es muy débil en el alumnado.

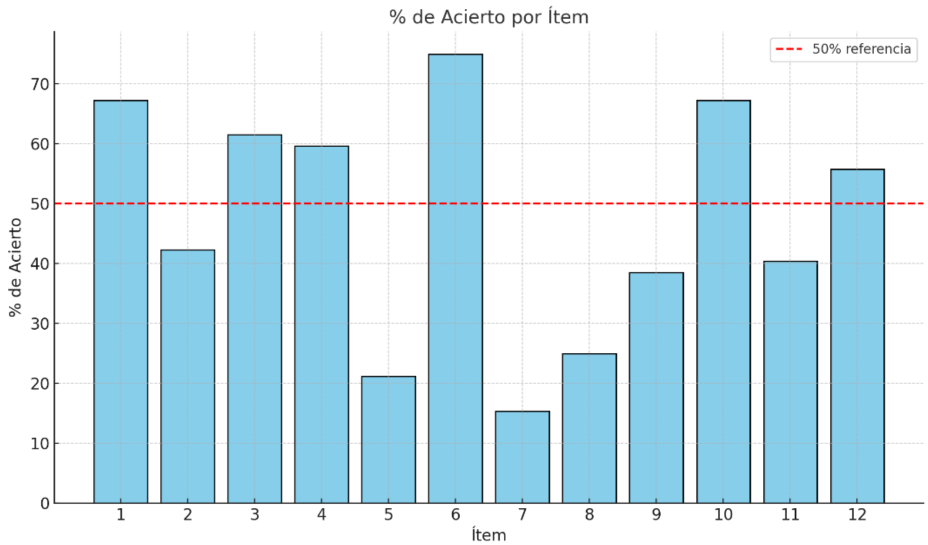



**Figura 6. Gráfico de porcentaje de acierto por ítem.**

Fuente: Los gráficos fueron generados utilizando Python con las bibliotecas Matplotlib y Seaborn.

## 5.4. Rendimiento por nivel de dificultad

Este análisis busca identificar qué tan bien se desempeñan los estudiantes en función de la complejidad de los ítems. Cada ítem tiene un nivel de dificultad (Muy fácil, Fácil, Medio, Difícil, Muy difícil). Esto ayuda a ver dónde se rompen los procesos cognitivos: si fallan en lo simple (problemas perceptivos) o en lo complejo (razonamiento 3D o combinatorio).

Porcentaje de acierto por nivel de dificultad está dada por la siguiente fórmula:

$$AND = \frac{\sum A_g}{N \cdot n_g} \cdot 100$$

Donde $A_g$ es la suma de aciertos en los ítems del grupo de dificultad "g", $N$ es el número total de estudiantes, $n_g$ número de ítems incluidos en ese nivel de dificultad y $\sum A_g$ es el total de respuestas correctas de todos los estudiantes en ese grupo.

Se realizará el cálculo para el primer nivel de dificultad, los demás porcentajes se obtuvieron de forma análoga. Para el nivel de dificultad muy fácil se tenían 3 ítems que corresponden al 1, 6, y 10 apoyándonos en la tabla #2, obtenemos que $A_1 = 35, A_6 = 39 \ y \ A_{10} = 35.$

La suma de los aciertos del grupo sería:

$$\sum A_g = A_1 + A_6 + A_{10} = 35 + 39 + 35 = 109.$$

Número de ítems del grupo $n_g = 3$

Reemplazado los elementos obtenidos tenemos:

$$AND = \frac{109}{52 \cdot 3} \cdot 100 = 0.698717948 \ldots \cdot 100 \approx 69.87\%$$

| Nivel de dificultad | Ítems | % Ac |
|---|---|---|
| **Muy fácil** | 1, 6, 10 | 69.87 |
| **Fácil** | 3, 4, 12 | 58.97 |
| **Medio** | 2, 11 | 42.31 |
| **Difícil** | 5, 8, 9 | 28.21 |
| **Muy difícil** | 7 | 15.38 |

**Tabla 4. Porcentaje de acierto de los ítems agrupados según el nivel de dificultad.**

El rendimiento disminuye gradualmente conforme aumenta la dificultad del ítem.

La mayor fortaleza se ubica en los ítems “Fáciles” y “Muy fáciles” (visualización 2D). Los niveles Medio y Difícil evidencian una brecha en la comprensión volumétrica y la manipulación mental de figuras tridimensionales.

Los Muy difíciles (5 y 7) implican razonamiento espacial avanzado (conteo de cubos ocultos, rotaciones de cuerpos) y son resueltos correctamente por menos del 20% del grupo. Esto refleja una baja consolidación de la competencia espacial y un aprendizaje probablemente basado en la memoria visual más que en el razonamiento estructural o proyectivo.

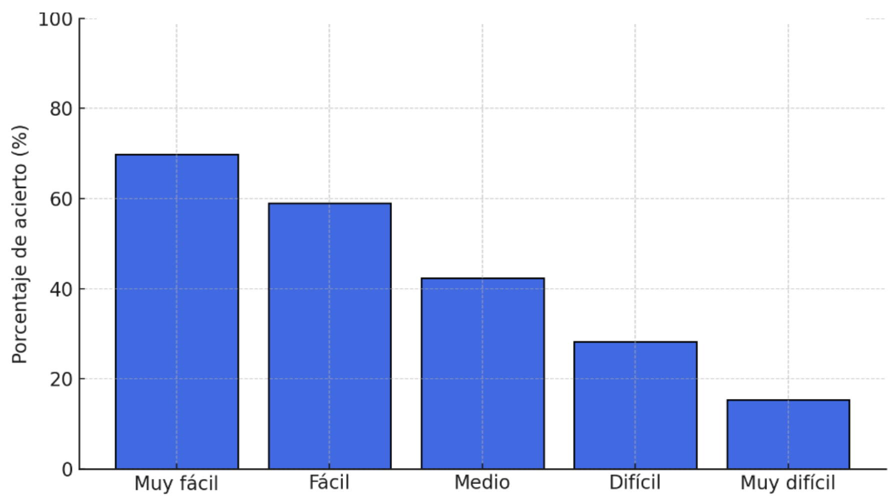



**Figura 7. Gráfico de porcentaje de acierto por nivel de dificultad.**

Fuente: Los gráficos fueron generados utilizando Python con las bibliotecas Matplotlib y Seaborn.

## 5.5. Rendimiento por nivel de competencia

Evalúa qué tipo de proceso cognitivo domina o falla el grupo:

- Visualización y transformación espacial: percepción, rotación y recomposición de figuras.
- Razonamiento geométrico/volumétrico (competencia espacial): construcción mental de sólidos y conteo de elementos no visibles.
- Razonamiento lógico-combinatorio: inferencia causal, patrones y relaciones mecánicas simples.

Porcentaje de acierto por nivel de competencia está dada por la siguiente fórmula:

$$ANC = \frac{\sum A_c}{N \cdot n_c} \cdot 100$$

Donde $A_c$ es la suma de aciertos en los ítems del grupo de la competencia “c”, $N$ es el número total de estudiantes, $n_c$ número de ítems incluidos en ese nivel de competencia y $\sum A_c$ es el total de respuestas correctas de todos los estudiantes en ese grupo.

Se realizará el cálculo para el nivel de competencia espacial, los demás porcentajes se obtuvieron de forma análoga. Para el nivel de competencia espacial se tenían 5 ítems que corresponden al 3, 4, 5, 7 y 8 apoyándonos en la tabla #2, obtenemos que $A_3 = 32,\ A_4 = 31,\ A_5 = 11,\ A_7 = 8\ y\ A_8 = 13$.

La suma de los aciertos del grupo seria:

$$\sum A_c = A_3 + A_4 + A_5 + A_7 + A_8$$

$$\sum A_c = 32 + 31 + 11 + 8 + 13$$

$$\sum A_c = 95$$

Número de ítems del grupo $n_c = 5$

Reemplazado los elementos obtenidos tenemos:

$$AND = \frac{95}{52 \cdot 5} \cdot 100 = 0.365384615 \ldots \cdot 100 \approx 36.54\%$$

| Tipo de competencia | Ítems | % Ac |
|---|---|---|
| **Visualización y transformación espacial** | 1, 2, 6, 11 y 12 | 56.54 |
| **Razonamiento geométrico y volumétrico (Competencia espacial)** | 3, 4, 5, 7, 8 | 36.54 |
| **Razonamiento lógico-combinatorio y mecánico** | 9, 10 | 52.88 |

**Tabla 4. Porcentaje de acierto de los ítems agrupados según el nivel de dificultad.**

### 5.5.1 Visualización y transformación espacial (56.5%)

Los estudiantes muestran un desempeño moderado, lo que indica que pueden reconocer y rotar mentalmente figuras bidimensionales. Sin embargo, aún no logran extrapolar esas rotaciones a contextos tridimensionales. Este nivel de rendimiento sugiere una dependencia de la percepción visual directa más que del razonamiento espacial profundo.

### 5.5.2 Razonamiento geométrico y volumétrico (Competencia espacial) (36.5%)

Es la competencia más débil, lo que refuerza el diagnóstico de que los jóvenes tienen baja habilidad para construir mentalmente objetos 3D. Los errores en ítems volumétricos (como conteo de cubos ocultos o visión desde otra perspectiva) indican dificultad en la rotación mental tridimensional. Este hallazgo respalda la necesidad de intervenciones didácticas en visualización espacial, especialmente en premedia, etapa donde se consolidan las estructuras mentales espaciales según Piaget.

### 5.5.3 Razonamiento lógico-combinatorio y mecánico (52.9%)

Refleja una capacidad aceptable de razonamiento abstracto, conteo y causalidad. No obstante, la conexión entre este razonamiento lógico y la representación espacial aún es débil. Sugiere que los estudiantes pueden resolver relaciones simbólicas, pero sin lograr integrar el espacio físico a sus inferencias.

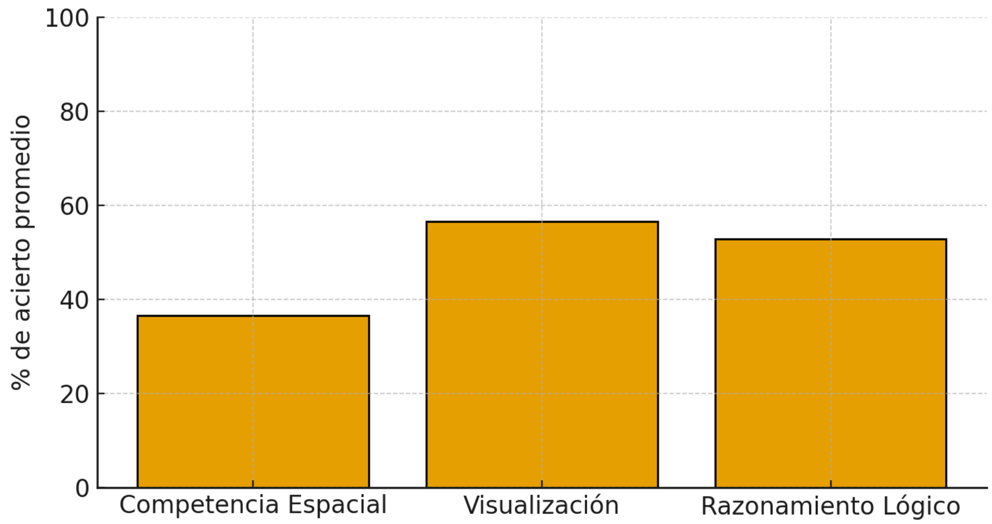



**Figura 8. Gráfico de porcentaje de acierto por tipo de competencia.**

Fuente: Los gráficos fueron generados utilizando Python con las bibliotecas Matplotlib y Seaborn.

## 5.6. Análisis según el sexo

Se evaluará si el rendimiento medio difiere significativamente entre hombres y mujeres. Se utiliza la t de Welch, porque las varianzas de ambos grupos no son idénticas (una versión más robusta de la t de Student).

Utilizaremos formulas directas ya vistas anteriormente como la media aritmética, la desviación estándar entre otras, pero ya que las varianzas no son iguales utilizaremos formulas complementarias para corregir ciertos aspectos y de esta forma relacionar de mejor forma el análisis.

Empezaremos con el estadístico t de Welch, cuya formula es:

$$t = \frac{\bar{x}_F - \bar{x}_M}{\sqrt{\frac{s_F^2}{n_F} + \frac{s_M^2}{n_M}}}$$

Donde $\bar{x}_F$ es la media de aciertos en los ítems del grupo de las mujeres, $\bar{x}_M$ es la media de aciertos en los ítems del grupo de los varones; $s_F$ y $s_M$ son las desviaciones estándar para mujeres y varones, respectivamente; así como también; $n_F$ y $n_M$ son los tamaños muestrales para mujeres y varones; y $\sqrt{\frac{s_F^2}{n_F} + \frac{s_M^2}{n_M}}$ corresponde al error estándar de la diferencia (SE).

Valores de los tamaños muestrales $n_F = 28$ y $n_M = 24$.

Media aritmética para las estudiantes (promedios):

$$\bar{x}_F = \frac{S_F}{n_F}$$

Se obtuvo una suma total de puntajes de $141$ para $28$ estudiantes.

$$\bar{x}_F = \frac{141}{28} = 5.035714 \ldots \approx 5.04$$

Media aritmética para los estudiantes (promedios):

$$\bar{x}_M = \frac{S_M}{n_M}$$

Se obtuvo una suma total de puntajes de $152$ para $24$ estudiantes.

$$\bar{x}_M = \frac{152}{24} = 6.458333 \ldots \approx 6.46$$

Esto significa que, en promedio, los estudiantes masculinos respondieron correctamente 1.42 ítems más que las estudiantes femeninas. La diferencia parece importante, pero aún necesitamos saber si es estadísticamente significativa o podría deberse al azar.

A partir de estos datos se aplicó la fórmula muestral de la desviación estándar para cada género y también el error estándar de la diferencia (SE), tal como se muestra a continuación:

$$s_F^2 = \frac{(7-5.04)^2 + (6-5.04)^2 + \cdots + (8-5.04)^2}{28-1} = 2.183862 \ldots \approx 2.18$$

$$s_M^2 = \frac{(9-6.46)^2 + (8-6.46)^2 + \cdots + (7-6.46)^2}{24-1} = 1.650362 \ldots \approx 1.65$$

La varianza es simplemente el cuadrado de la desviación estándar y representa la dispersión promedio al cuadrado. Aunque la varianza femenina es ligeramente mayor, la diferencia es pequeña, lo que sugiere que la heterogeneidad del grupo femenino es apenas más alta, pero no significativamente distinta.

$$SE = \sqrt{\frac{2.18386 \ldots}{28} + \frac{1.65036 \ldots}{24}} = \sqrt{0.14683161 \ldots} = 0.383801 \ldots \approx 0.38$$

Para encontrar el valor de la desviación estándar solamente hay que aplicar raíz a la varianza, lo cual sería:

$$s_F = \sqrt{\frac{(7-5.04)^2 + \cdots + (8-5.04)^2}{28-1}} = \sqrt{2.18386 \ldots} = 1.47778 \ldots \approx 1.48$$

$$s_M = \sqrt{\frac{(9-6.46)^2 + \cdots + (7-6.46)^2}{24-1}} = \sqrt{1.65036\ldots} = 1.28466\ldots \approx 1.28$$

A La desviación estándar indica cuánto se dispersan los puntajes alrededor de la media. En este caso, ambas son similares aproximadamente 1.6, lo que muestra que la variabilidad interna (es decir, cuánto difieren los estudiantes dentro de cada grupo) es comparable. Esto significa que tanto niñas como niños tienen una consistencia parecida en su desempeño, aunque la media masculina sea más alta.

Ahora con los valores obtenidos realizaremos el cálculo del estadístico t (Welch), el cual es la comparación de medias con varianzas distintas:

$$t = \frac{\bar{x}_F - \bar{x}_M}{\sqrt{\frac{s_F^2}{n_F} + \frac{s_M^2}{n_M}}}$$

$$t = \frac{5.04 - 6.46}{0.38} = -3.7368\ldots \approx -3.74$$

Ahora La prueba t de Welch se usa para comparar las medias de dos grupos independientes cuando sus varianzas y tamaños pueden ser distintos. Evalúa la hipótesis nula de que las medias son iguales, contra la alternativa de que son diferentes.

El valor t = -3.18 indica que la diferencia entre medias es equivalente a 3.18 desviaciones estándar por debajo de la media conjunta. Cuanto más grande sea |t|, más fuerte es la evidencia contra la hipótesis nula (es decir, más improbable que la diferencia observada sea producto del azar).

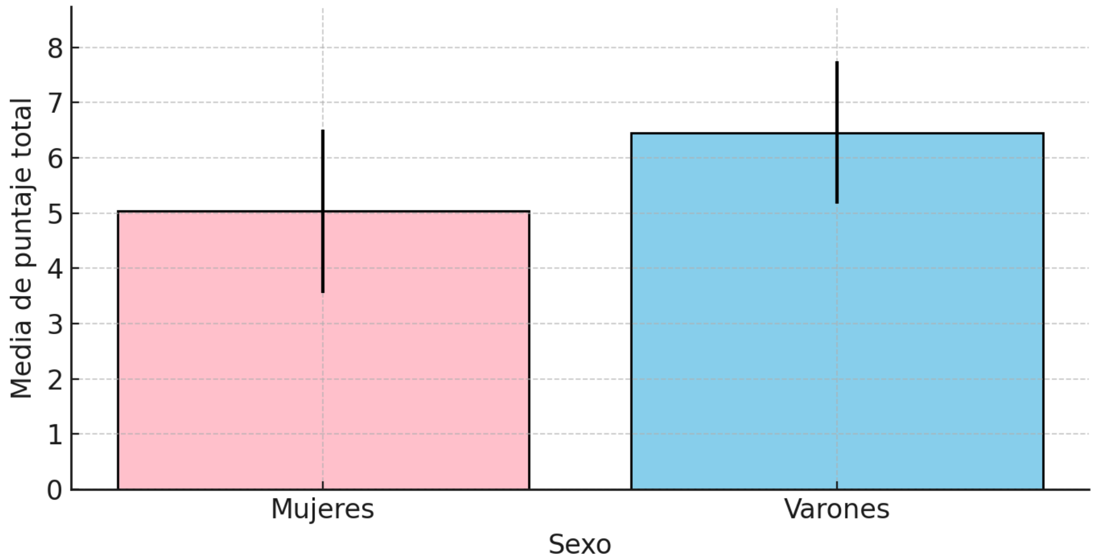



**Figura 8. Gráfico de las medias junto con su desviación estándar.**

Fuente: Los gráficos fueron generados utilizando Python con las bibliotecas Matplotlib y Seaborn.

Sintetizando los resultados del análisis realizado según el sexo de los participantes, se evidencia una diferencia notable en el rendimiento global obtenido en la prueba. Al comparar el número total de aciertos alcanzado por los estudiantes masculinos y femeninos, los primeros mostraron un promedio superior de desempeño general. En términos descriptivos, la media de aciertos en el grupo masculino fue de 6.46, mientras que en el grupo femenino alcanzó 5.04, reflejando una diferencia de 1.42 puntos a favor de los varones. Esta diferencia inicial sugiere una tendencia hacia un mejor rendimiento en el grupo masculino.

En cuanto a la variabilidad interna de los resultados, las desviaciones estándar fueron 1.28 para los estudiantes masculinos y 1.48 para las estudiantes femeninas, lo que indica que ambos grupos presentan una dispersión similar de los puntajes en torno a su respectiva media. Por lo tanto, el desempeño más alto de los varones no se asocia con una mayor o menor homogeneidad en sus respuestas, sino con un promedio globalmente más elevado.

De forma coherente con este hallazgo, las varianzas fueron también semejantes: 1.65 en el grupo masculino y 2.18 en el femenino, evidenciando que las fluctuaciones internas de los datos no explican por sí mismas la diferencia observada en el rendimiento. Para verificar si dicha diferencia entre medias es estadísticamente significativa, se aplicó la prueba t de Welch, adecuada en este caso por la posible desigualdad de varianzas y tamaños muestrales. El resultado obtenido fue $t = -3.18$, lo que confirma que la diferencia entre ambos grupos no es producto del azar.

# CAPÍTULO VI

# RECOMENDACIONES

En este capítulo, se presentan un conjunto de recomendaciones fundamentadas en los hallazgos obtenidos durante el análisis de los datos. Estas sugerencias están orientadas a mejorar el desarrollo del razonamiento espacial y las habilidades cognitivas de los estudiantes evaluados. Las propuestas incluyen estrategias metodológicas, el uso de herramientas tecnológicas, y enfoques pedagógicos adaptados a las dificultades específicas observadas en los diferentes niveles de desempeño.

### 6.1. Implementación de herramientas tecnológicas interactivas

El uso de recursos tecnológicos es fundamental para potenciar las competencias espaciales. Se recomienda la incorporación de software educativo que permita la visualización y manipulación de objetos tridimensionales, favoreciendo el desarrollo de la percepción espacial y la capacidad de transformación mental de figuras.

- Geogebra 3D y Cabri Geometry: Aplicaciones que permiten explorar figuras tridimensionales, identificar sus propiedades y realizar transformaciones geométricas en tiempo real.
- Realidad Aumentada (RA) y Realidad Virtual (RV): Implementación de experiencias inmersivas que permitan a los estudiantes interactuar con modelos geométricos en un entorno digital, mejorando la comprensión de volúmenes, planos y estructuras espaciales.
- Simulaciones y Modelado Digital: Uso de programas como SketchUp y Blender para la construcción y manipulación de figuras geométricas, facilitando la transición entre representaciones bidimensionales y tridimensionales.

- El aprovechamiento de estas herramientas no solo fortalece la percepción espacial, sino que también promueve el aprendizaje autónomo y la exploración activa de conceptos geométricos complejos.

### 6.2. Estrategias didácticas basadas en la manipulación de materiales concretos

Para fortalecer la relación entre la teoría y la práctica, se recomienda el uso de materiales manipulables que permitan a los estudiantes experimentar directamente con las figuras geométricas y los conceptos espaciales. Algunas estrategias incluyen:

- Construcción de modelos físicos: Uso de cubos, poliedros y figuras geométricas de cartón, madera o plástico para explorar propiedades de los cuerpos tridimensionales.
- Plegado y descomposición de figuras: Aplicación de técnicas de origami y recortes de papel para analizar cómo se forman los sólidos a partir de sus caras y redes.
- Uso de rompecabezas geométricos: Implementación de rompecabezas y tangrams que estimulen la resolución de problemas espaciales y la identificación de patrones.
- Exploración con Lego y bloques estructurales: Construcción de modelos utilizando piezas modulares para desarrollar la intuición espacial y la capacidad de abstracción geométrica.
- El enfoque basado en la manipulación permite a los estudiantes desarrollar una comprensión intuitiva de las relaciones espaciales, reforzando su capacidad de análisis y resolución de problemas.

### 6.3. Estrategias específicas según el género para reducir brechas en el desempeño

El análisis de los datos evidenció una diferencia significativa en el rendimiento entre los géneros, donde los estudiantes masculinos obtuvieron una media de aciertos superior en comparación con las estudiantes femeninas. Para abordar esta disparidad, se recomienda:

- Enfoques personalizados: Diseñar estrategias de enseñanza diferenciadas para cada grupo, atendiendo a sus necesidades y dificultades específicas en la resolución de problemas espaciales.
- Fomentar la participación equitativa: Crear ambientes de aprendizaje que incentiven la interacción y colaboración entre géneros, eliminando estereotipos sobre la capacidad en matemáticas.
- Mentoría y modelos a seguir: Incorporar figuras femeninas destacadas en campos relacionados con la geometría, la arquitectura y la ingeniería, con el fin de inspirar y motivar a las estudiantes a fortalecer sus habilidades espaciales.
- Uso de ejemplos contextualizados: Presentar problemas geométricos y espaciales en contextos relevantes para cada género, fomentando el interés y la conexión con la realidad.
- Estas estrategias buscan reducir la brecha de desempeño y garantizar un desarrollo más equitativo de las competencias espaciales en ambos géneros.

### 6.4. Desarrollo del pensamiento lógico y la resolución de problemas espaciales

El fortalecimiento del razonamiento lógico es esencial para mejorar la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas espaciales. Para ello, se recomienda:

- Uso de problemas abiertos y desafiantes: Plantear situaciones en las que los estudiantes deban formular hipótesis, probar diferentes estrategias y justificar sus respuestas.
- Aplicación de la metodología de aprendizaje basado en problemas (ABP): Fomentar la exploración y resolución de situaciones espaciales a partir de contextos del mundo real.
- Entrenamiento en la visualización mental de figuras: Implementar actividades en las que los estudiantes imaginen rotaciones, simetrías y transformaciones geométricas sin el uso de representaciones gráficas.
- Integración de juegos y actividades lúdicas: Uso de videojuegos educativos, escape rooms matemáticos y desafíos de construcción para estimular el pensamiento espacial.
- Estas estrategias permitirán que los estudiantes mejoren su capacidad de abstracción y análisis, fortaleciendo su desempeño en tareas espaciales y geométricas.

## 6.5. Evaluaciones formativas y seguimiento del progreso estudiantil

Para monitorear el avance de los estudiantes en el desarrollo de sus competencias espaciales y procesos cognitivos, se sugiere:

- Aplicación de pruebas diagnósticas periódicas: Evaluaciones que permitan identificar fortalezas y debilidades en el razonamiento espacial de cada estudiante.
- Uso de rúbricas de evaluación: Instrumentos detallados que describan los criterios de desempeño en visualización espacial, relaciones geométricas y resolución de problemas.
- Implementación de portafolios de aprendizaje: Registro de los avances individuales de los estudiantes a lo largo del curso, con actividades que evidencien la mejora en sus habilidades espaciales.
- Autoevaluación y coevaluación: Estrategias en las que los propios estudiantes analicen sus respuestas y retroalimenten a sus compañeros para reforzar el aprendizaje colaborativo.
- El seguimiento continuo del progreso estudiantil permitirá ajustar las estrategias didácticas según las necesidades detectadas, asegurando una mejora sostenida en el desarrollo de las competencias espaciales.

# BIBLIOGRAFÍA

Arcavi.A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematic, 215-241.

Berciano, A., Jiménez, C., & Anasagasti, J. (2017). Tratamiento de la orientación espacial en los proyectos editoriales de educación infantil. Educación Matemática, 117-140.

Blanco, T. F. (16 de septiembre de 2011). Tesis Doctoral. Una Aproximación Ontosemiótica a la Visualización y el razonamiento Espacial. Granada, Santiago, compostela.

Bogue, B., & Marra, R. (15 de agosto de 2017). Obtenido de Visual Spatial Skills: http://www.engr.psu.edu/AWE/ARPresources.aspx

Castellanos, I. (24 de Noviembre de 2010). Tesis Doctoral. Visualización y Razonamiento en las construcciones matemáticas utilizando el software de Geogebra con alumnos de segundo magisterio de la E.N.M.P.N. Honduras, Tegucigalpa.

Císcar, F. C. (diciembre de 2015). Tesis Doctoral. Características del Razonamiento Configural en estudiantes para maestros en la resolución de problemas de probar en geometría. Universidad de Alicante.

Contreras, L., Tristancho, J., & Vargas, L. (2013). Evaluación de factores de entorno que afectan el desarrollo de habilidades espaciales en estudiantes de primer semestre en Ingeniería Industrial. Academia y Virtualidad, 17-32.

Contreras, L., Tristancho, J., & Vargas, L. (2017). Evaluación de factores de entorno que afectan el desarrollo de. Revista Academia y Virtualidad, 17-32.

Council, N. R. (2006). Learning to think spatially: GIS as a support system in the K–12

Ibatá, O. D. (2011). Las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner aplicadas a la. *Revista de la Universidad Jorge Tadeo Lozano*, 100-139.

Mix, K. S. (s.f.). The relation between space and math: Developmental and . *2012*, 50-61.

Noriega, M. V. (2011). Competencia espacial, motivación y rendimiento académico. . 45-70.

Rapetti, V. &. (2003). Cualidades Psicométricas de una prueba de Competencia . 91-108.

Shumway, J. F. (2013). Building bridges to spatial reasoning. Teaching Children Mathematics, . En J. F. Shumway, *Building bridges to spatial reasoning. Teaching Children Mathematics,* (págs. 44-51).

# ANEXO

PRUEBA DE COMPETENCIAS ESPACIALES Y PROCESOS COGNITIVOS

ANÁLISIS DE VISUALIZACIÓN, RELACIONES ESPACIALES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ESTUDIANTES DE PREMEDIA (9° GRADO)

EDAD: _______ SEXO: F ☐ M ☐

**Indicaciones:** Esta prueba es diagnóstica y no afectará su calificación. Tienen 40 minutos para completarla, usando únicamente lápiz, borrador y bolígrafo. Lean cada pregunta con atención y muestren los pasos en los ejercicios. Si tienen dudas, levanten la mano sin hablar con compañeros.

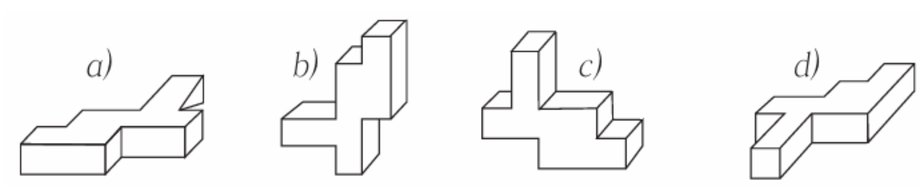
**Problema N°1:** Recompone con estos fragmentos desordenados 2 columnas. Si es necesario rote las figuras presentadas con el fin de hacer que encajen

**Ilustración del problema:**


**Respuesta:**

**Problema N°2:** Entre estas figuras, hay 3 que representan el mismo objeto en distintas posiciones. ¿Cuáles son?

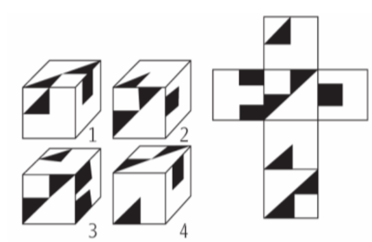
**Ilustración del problema:**




**Respuesta:**

**Problema N°3:** A la derecha encontramos un cubo desarmado ¿Cuál es el correspondiente cubo armado?

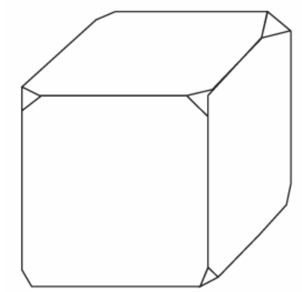
**Ilustración del problema:**




**Respuesta:**

En un cubo se efectuaron cortes en cada uno de los vértices de modo que queden formados triángulos, como muestra la figura. El cuerpo obtenido tiene 24 vértices.

**Ilustración del problema 4 y 5:**



**Problema N°4:** ¿Cuántas caras tiene?

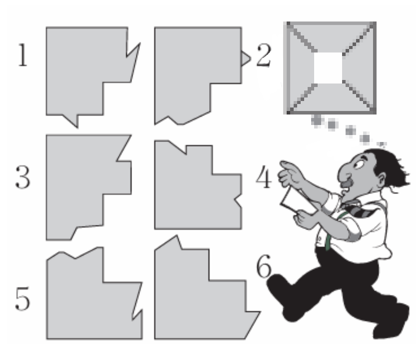
**Respuesta:**

**Problema N°5:** ¿Cuántas aristas tiene?

**Respuesta:**

**Problema N°6:** Se presentan a modo de rompecabezas, diversas partes de distintos marcos de cuadros. Sólo 4 de ellas se ajustan perfectamente entre sí para formar un marco. ¿Cuáles son?

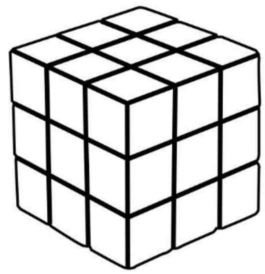
**Ilustración del problema:**




**Respuesta:**

Para formar un cubo se usan 27 cubitos y se pinta el exterior del cubo.

**Ilustración del problema 7 y 8:**



**Problema N°7:** ¿Cuántos cubitos tienen sólo dos caras pintadas?

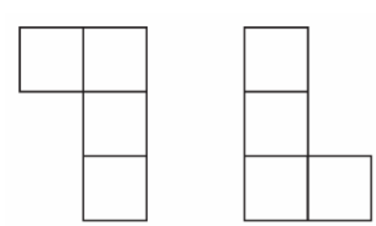
**Respuesta:**

**Problema N°8:** ¿Cuántos cubitos no tienen caras pintadas?

**Respuesta:**

**Problema N°9:** ¿De cuántas formas se pueden unir cuatro cuadrados por los lados? El dibujo muestra una de ellas. No han de tomarse en cuenta las mismas formas en distinta posición, como la que aparecen en la parte inferior, ya que ambas son iguales. Cuenta sólo las formas diferentes.

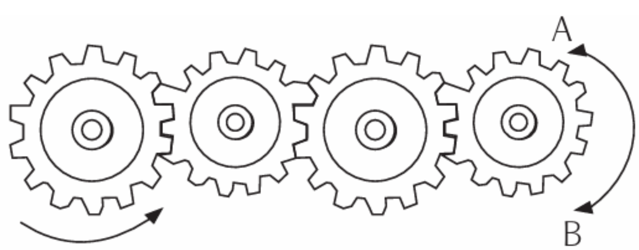
**Ilustración del problema:**



**Respuesta:**

**Problema N°10:** En que dirección, A o B, gira el engranaje de la derecha cuando el engranaje de la izquierda gira en la dirección indicada?

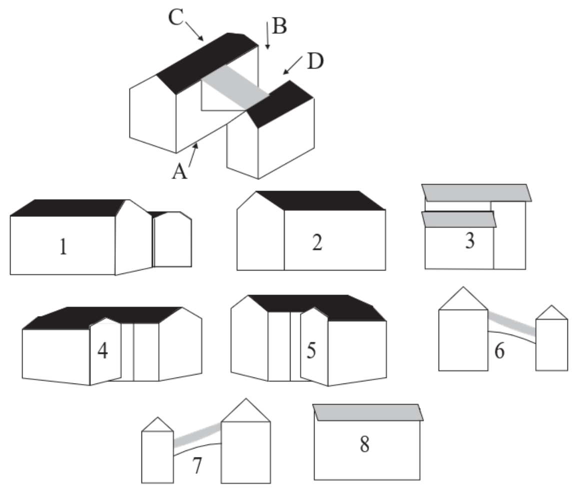
**Ilustración del problema:**




**Respuesta:**

**Problema N°11:** Para resolver este problema, necesitas identificar cómo se ve la casa desde los puntos de vista A, B, C, y D en el esquema de la parte superior, y luego relacionar esas vistas con los dibujos numerados en la parte inferior.

**Ilustración del problema:**




**Respuesta:**

**Problema N°12 A:** Dibuja cada una de las banderas después de girar 90° hacia la izquierda, teniendo como centro el punto señalado.

**Ilustración del problema:**

**Respuesta:**

**Problema N°12 B:** Dibuja cada una de las banderas después de girar 90° hacia la derecha, teniendo como centro el punto señalado.

**Ilustración del problema:**

**Respuesta:**