UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES CERO-DIMENSIONAL

DARCELLYS EDEAMI RODRÍGUEZ VEGA

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2006

APROBADO POR:

Jaime Gutiérrez

DOCTOR JAIME GUTIERREZ
PRESIDENTE

M.SC. ELMIR DE CARVALHO
MIEMBRO

M.SC. OMAR OLIVEROS
MIEMBRO

Aida Luz Moreno S.

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 28 de abril de 2006

DEDICATORIA

Dedico esta tesis con todo mi amor a mis padres Silvo y Jovita quienes con su ejemplo y sabios consejos han inculcado en mí el anhelo de superación y amor al trabajo.

A mis hermanos y hermanas: Angel, Jaime, Islián, Frida, Fary, Mary quienes siempre me han apoyado y dado una voz de aliento en los buenos momentos y en los no tan buenos. A mis sobrinos: Kris, Sue, Jaimito, Lilia, Orlando y Angelito.

AGRADECIMIENTO

Doy gracias a Dios por darme la fortaleza y el espíritu necesario para culminar una nueva etapa en mi preparación académica.

Al Dr. Jaime Gutiérrez mi eterno agradecimiento por brindarme su valioso tiempo, ayuda y apoyo en los momentos en que lo solicité.

A todos mis compañeros de estudio con quienes compartí amenos momentos, en especial a mi amiga Ana Varela quien de una u otra forma fue un gran apoyo tanto moral como en los momentos de estudio.

Agradezco, además a todas aquellas personas que contribuyeron con su voz de aliento para que este trabajo sea una realidad.

ÍNDICE GENERAL

Resumen

En este trabajo estudiamos y caracterizamos las imágenes homeomórficas de los números irracionales. Inicialmente se presentan las nociones básicas, la topología de los espacios métricos y se revisan algunas definiciones y resultados relativos a los conceptos de base, separabilidad y homeomorfismo. Se estudian además algunas aplicaciones y propiedades de los espacios de Baire y de los espacios ultramétricos y se hace una caracterización topológica de los espacios ultramétricos.
Finalmente definimos el concepto de fracciones continuadas, discutiendo algunas propiedades relativas a la misma y damos el resultado más importante de este trabajo de tesis el cual construye un homeomorfismo entre el conjunto de los números irracionales y el espacio de Baire.

Summary

In this work we studied and we characterized the homeomorphics images of the irrational numbers. Initially we presented the basic slight knowledge, the topology of the metric spaces and some definitions and results relative to the base concepts, separability and homeomorphisms are reviewed. Some applications appear in addition and properties of the spaces of Baire and the ultrametric spaces and a topologic characterization becomes of the ultrametric spaces. Finally we defined the concept of continued fractions, discussing some properties relative to the same one and give the most important result of this work which constructs to a homeomorphisms between the set of the irrational numbers and the space of Baire.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se presenta como requisito final para la obtención del grado de maestría en Matemática.

En los cursos de Análisis matemático y de Topología tomados en la maestría, se recalcó la importancia de los espacios métricos, en general, y en particular la relevancia de los subconjuntos de los números reales dotados de la métrica usual o euclideana.

En este trabajo estudiaremos y caracterizaremos las imágenes homeomórficas de los números irracionales, para lo que resulta fundamental, revisar algunas nociones básicas de la topología de los espacios métricos, el axioma de completitud de los números reales, el concepto de cero-dimensionalidad, los espacios ultramétricos y el espacio de Baire.

El estudio de los subconjuntos de los números reales desde la perspectiva aquí planteada brinda la oportunidad de ampliar y profundizar conocimientos sobre los espacios métricos, además que de forma natural nos introduce a la discusión de temas avanzados de Análisis matemático, de Topología y de otras áreas.

Este trabajo se desarrolla utilizando la información registrada en ciertos documentos bibliográficos en especial el artículo An Introduction to Images of the irrational numbers del autor Jerry E. Vaughan y algunos documentos obtenidos vía internet los cuales nos han permitido ampliar nuestro conocimiento acerca de los espacios métricos, los espacios de Baire y los espacios ultramétricos.

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el primer capítulo se presentan las nociones básicas de los espacios métricos, se definen y se demuestran algunos resultados relacionados con los conceptos de base, separabilidad y homeomorfismo. En el segundo capítulo estudiamos los espacios de Baire y los espacios ultramétricos, presentamos sus aplicaciones y propiedades y hacemos una caracterización topológica de los espacios ultramétricos.

En el tercer capítulo definimos el concepto de fracciones continuadas, hacemos la expansión en fracciones continuadas de un número real y construímos el homeomorfismo entre el espacio de Baire $\mathbb{B}$, y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, dotado de la métrica usual.

El resultado más importante que concluye este trabajo de tesis es el teorema que asegura que cada espacio métrico separable, 0-dimensional, es homeomórfico a algún subconjunto de los números irracionales.

CAPÍTULO I

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES 0-DIMENSIONAL.

En este capítulo definiremos los conceptos básicos que guiarán la exposición del tema de esta tesis. En primer lugar, presentamos las nociones básicas sobre los espacios métricos. En particular revisamos algunas definiciones y resultados relacionados con los conceptos de base, separabilidad y homeomorfismo.

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS.

Definición 1.1 Definición de espacios topológicos

Sean X un conjunto no vacío y τ una colección de subconjuntos de X, diremos que τ es una topología sobre X o que (X, τ) es un espacio topológico si:

T.1 $\varnothing$ y X son elementos de τ.

T.2 Si $\{ A_i \}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de τ, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un elemento de τ.

T.3 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son elementos de τ, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un elemento de τ.

Si (X, τ) es un espacio topológico, a los elementos de τ los llamaremos τ abiertos, o abiertos en caso de no existir riesgos de confusión.

Ejemplos 1.1:

1. Sean X un conjunto no vacío y $\tau_0 \neq \{ \varnothing, X \}$. Obviamente τ_0 es una topología sobre X, frecuentemente denominada la topología caótica.
2. Sean X un conjunto no vacío y τ_∞ la colección de todos los subconjuntos de X. Es claro que τ_∞ es una topología sobre X. Al espacio topológico (X, τ_∞) se le denomina espacio topológico discreto.

3. Sea $X = \{ 1,2 \}$ sobre X existen cuatro topologías a saber τ_0, $\tau_1 = \{ \varnothing, \{1\}, X \}$, $\tau_2 = \{ \varnothing, \{X\}, \{2\} \}$ y τ_∞.

Definición 1.2 Espacios pseudométricos.

Sea X un conjunto no vacío, una función

$$D: X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [\, 0, +\infty)$$

es una pseudométrica sobre X si:

1. $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in Y$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Si d es una pseudométrica sobre X diremos que (X, d) es un espacio pseudométrico.

En caso de cumplirse:

4. $d(x, y) = 0$, implica que $x = y$; para todo $x, y \in X$, diremos que d es una métrica sobre X y que (X, d) es un espacio métrico.

En un espacio pseudométrico se distingue un tipo especial de conjunto denominado bola abierta. Si (X, d) es un espacio pseudométrico, $x \in X$, y $\varepsilon > 0$, llamamos bola abierta centrada en x de radio ε, al conjunto denotado por $B(x, \varepsilon)$ y definido

$$B(x, \varepsilon) = \{ y \in X: d(x, y) < \varepsilon \}$$

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico, diremos que $A \subseteq X$ es abierto si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Resulta que

$$\tau = \{ A \subseteq X : A \text{ es abierto} \}$$

es una topología sobre X.

Observación: la demostración de este resultado se puede encontrar en el libro Ignacio Iribarren. Topología de los espacios métricos.

Ejemplos de Espacios métricos 1.2:

1. Sea E un conjunto cualquiera, no vacío.

   Definamos la función

$$d: E \times E \to \mathbb{R}$$

   tal que para todo $x, y \in E$

$$d(x,y) = 1, \text{ si } x \neq y; \; d(x,y) = 0 \text{ si } x = y.$$

2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y la función $d(x,y) = |x - y|$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$.

   Mediante sencilla aplicación de las propiedades del valor absoluto se comprueba que d es una métrica. Esta confiere a $\mathbb{R}$ estructura de espacio métrico, el cual se llama usualmente la "recta real".

1.2 SUBESPACIOS MÉTRICOS

Si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subset X$, la métrica inducida sobre Y es $d / (Y \times Y)$. Así $(Y, d / (Y \times Y))$ es un espacio métrico y es llamado un subespacio de (X,d).

Ejemplo 1.3:

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ tiene la métrica usual, asimismo el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, es un subespacio de $\mathbb{R}$. En ambos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ tienen muchos conjuntos los cuales son abiertos y cerrados al mismo tiempo, y esos conjuntos juegan un papel importante en esos espacios. En nuestro caso el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es el espacio métrico objeto de este estudio.

Si (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Si $y \in Y$ y $r > 0$, sea $N_y(y, r)$ denota la vecindad básica de y en el espacio Y, y sea $N_x(y, r)$ denota la vecindad básica de y en X. Entonces $\underline{N_Y}(y, r) = N_x(y, r) \cap Y$. Se sigue que un conjunto $A \subset Y$ es abierto en Y si y sólo si existe un conjunto abierto U en X tal que $A = U \cap Y$. Análogamente un conjunto $B \subseteq Y$ es cerrado en Y si y sólo existe un conjunto cerrado V en X tal que $B = V \cap \mathrm{Y}$.

Ejemplo 1.4:

Sea $\mathbb{R}$ un espacio métrico y a, b $\in \mathbb{R}$ con $a < b$ entonces $(a,b) \cap \mathbb{I}$ es abierto en $\mathbb{I}$ y cerrado en $\mathbb{I}$.

Definición 1.3

Un conjunto $A \subset X$ es clopen (llamaremos **clopen** a los conjuntos que son abiertos y cerrados) en A si es abierto y cerrado en X. Si $U \subset Y \subset X$, entonces U puede ser abierto (o cerrado) en Y sin ser abierto (o cerrado) en X.

Ejemplo 1.5:

Sea $a,b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$ entonces $(a,b) \cap \boldsymbol{I}$ es ambos abierto y cerrado en $\boldsymbol{I}$, pero no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Definición 1.4

Sea (X,τ) un espacio topológico y β una familia de elementos de τ. Una familia β de subconjuntos abiertos de X es llamada una base para X si cada conjunto abierto es unión de elementos de β.

Ejemplo 1.6:

El conjunto de todos los intervalos abiertos con extremos racionales es una base contable de $\mathbb{R}$, y cuando se intersecta con $\mathbb{I}$ forma una base contable para $\mathbb{I}$.

Teorema 1.1

Un conjunto $D \subset X$ es llamado denso si cada conjunto abierto no vacío contiene un miembro de D. Un espacio métrico X es llamado separable si X tiene un conjunto denso. Es bien conocido que un espacio métrico es separable si y sólo si tiene una base contable.

Demostración:

Sea $S \subseteq X$, S contable y

$$\beta = \{ N(x,r) / \ x \in S \text{ y } r \in \mathbb{Q}^+ \},$$

es fácil comprobar que β es contable y es una base de X como espacio métrico.

Por otro lado si $\beta = \{ A_i \}_{i \in I}$ es una base para X, entonces, para cada $i \in I$, tomamos $x_i \in A_i$ y definimos $S = \{ x_i / \ i \in I \}$ y resulta que S es denso y contable

Hablamos de un espacio métrico separable siempre y cuando tengamos una base contable en mente.

1.3 HOMEOMORFISMOS.

El estudio de los números irracionales tiene en consideración espacios los cuales son "idénticos en el sentido de la topología" al espacio de los números irracionales

Definición 1.5

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios topológicos, y $f: X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es continua definida como $f^{-1}(V) = \{ x \in X: f(x) \in V \}$ es abierto en X para cada conjunto abierto $V \subset Y$ (la continuidad puede ser definida, por supuesto, en términos de dos métricas d y ρ).

Una función que es ambas inyectiva y sobre es llamada una biyección. Una biyección f es tal que f y f^{-1} son continuas y llamadas bicontinuas.

Definición 1.6

Una función $h: X \longrightarrow Y$ es llamada un homeomorfismo (entre los dos espacios métricos (X, d) y (Y, ρ) si:

i) h es una biyección

ii) h es continua

iii) h^{-1} es continua (por lo tanto, h es bicontinua)

Decimos también que X y Y son homeomórficos, o X es homeomórfico a Y. Usaremos en diversas ocasiones el hecho obvio de que la composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.

Ejemplo 1.7:

Sea $X = (a,b)$ y $Y = (c,d)$ dos intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, entonces X y Y son homeomórficos.

Prueba:

Sea h una función lineal cuyo gráfica es una línea recta en el plano (a,d) y (b,c) entonces h es una biyección, y es continua (aún diferenciable) y h^{-1} es continua donde su gráfica es también una línea recta en el plano.

Ejemplo 1.8:

La recta real $\mathbb{R}$ es homeomórfica a el intervalo $(-1, 1)$ (y por lo tanto $\mathbb{R}$ es homeomórfica a cada intervalo abierto definido en el ejemplo 1.6)

Prueba:

Definamos $h: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ por $h(x) = x / (1 + |x|)$. Para ver que h^{-1} es continua notemos que $h^{-1}(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $h^{-1}(x) = x / (1 - |x|)$.

Para una prueba alterna de que $\mathbb{R}$ es homeomórfica para cada intervalo abierto, use la función *arc tan(x)* la cual proyecta a $\mathbb{R}$ sobre $(-\pi/2, \pi/2)$.

Una propiedad es llamada invariante bajo homeomorfismo si para cualesquiera dos espacios homeomórficos, uno tiene la propiedad si y sólo si el otro también la tiene.

Una propiedad la cual es invariante bajo homeomorfismo es llamada una propiedad topológica. Cualquier propiedad la cual es preservada por continuidad, es una propiedad topológica. Un ejemplo de una propiedad la cual no es una propiedad topológica es la de ser acotado. Por ejemplo (-1, 1) y $\mathbb{R}$ son homeomórficos, pero (-1, 1) es acotado y $\mathbb{R}$ no lo es.

Definición 1.7

Si X es un conjunto y d, ρ son dos métricas sobre X, decimos que d y ρ son topológicamente equivalentes si se da la condición que la topología sobre X inducida por la métrica d es igual a la topología sobre X inducida por la métrica ρ, en otras palabras, si damos la función identidad sobre X, $id: (X, d) \longrightarrow (X,\rho)$ es un homeomorfismo.

1.4 DOS NOCIONES DE DIMENSIÓN CERO

Concluímos esta sección con una breve discusión de dos nociones de dimensión cero en espacios métricos. Primero recordaremos alguna terminología.

.Definición 1.8

Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ dos familias de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Una familia $\mathcal{U}$ es llamada disjunta dos a dos si para cada $U, U' \in \mathcal{U}$, si $U \neq U'$, entonces $U \cap U' = \emptyset$. Decimos que $\mathcal{V}$ es refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ es una familia de conjuntos abiertos que refina a $\mathcal{U}$, y cubre el mismo conjunto que cubre $\mathcal{U}$ $(\cup \mathcal{V} = \cup \mathcal{U})$

Ejemplo 1.8:

La familia $\mathcal{U} = \{(n, n+1) \cap \mathbb{I}$: n es un entero$\}$, es un ejemplo de un clopen disjunto dos a dos cubrimiento de los números irracionales, y

$\mathcal{V} = \{(n/2, (n+1)/2) \cap \mathbb{I}: n$ es un entero$\}$ es un clopen disjunto dos a dos cubrimiento de $\mathbb{I}$ tal que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.

Definición 1.9

Un espacio métrico (X, d) es llamado cero-dimensional si para cada $x \in X$ y cada $r > 0$ existe un conjunto U el cual es clopen y $x \in U \subset N(x, r)$.

Un espacio métrico (X, d) se dice que tiene dimensión de cubrimiento cero si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, existe un cubrimiento abierto disjunto dos a dos $\mathcal{V}$ de X de forma que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.

Teorema 1.2

Todo espacio con dimensión de cubrimiento cero, es 0- dimensional.

Demostración:

Sea $x \in X$ y $r > 0$. Consideremos

$$\mathcal{U} = \{ N(y, \frac{r}{2}) : y \in X \}.$$

Es claro que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X, por lo tanto, existe un refinamiento abierto disjunto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Resulta entonces que cada miembro de V es clopen. Tomemos $v \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$, como $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, existe $y \in X$ con

$$x \in V \subseteq B(y, \frac{r}{2})$$

Tenemos que $x \in V \subseteq B(x, r)$, con V clopen y esto prueba que X tiene dimensión cero. El recíproco no es cierto, para existen ejemplos, uno de ellos es el de un espacio métrico el cual es cero-dimensional, pero no tiene un cubrimiento de dimensión cero, dado en 1962 por Prabir Roy. Otros ejemplos semejantes son ahora conocidos. Dos ejemplos fáciles fueron dados en 1990 por John Kulesza y Adam Ostaszewski.

Es a menudo, más sencillo ver si un espacio es cero-dimensional, que si este tiene una dimensión de cubrimiento cero. Por ejemplo los números racionales e irracionales, con su métrica usual, son obviamente cero-dimensional. Ahora damos un resultado que implica que $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$ tienen dimensión de cubrimiento cero.

Lema 1.1

Cada espacio métrico X separable cero-dimensional tiene una base contable constituída por conjuntos clopen. En particular, $\mathbb{I}$ tiene una tal base.

Prueba:

Para cada $x \in X$, y cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto B(x, ε) tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subset N(x, \varepsilon)$. Claramente, $\{B(x, \varepsilon): x \in X, \varepsilon > 0\}$ es una base para X formada por conjuntos clopen. Como X tiene una base contable, sabemos que cada base contiene un subconjunto el cual es también una base.

Así existe una base contable que consta de subconjuntos de esos abiertos B(x, ε) y que completa la prueba.

Teorema 1.3

Sea (X, d) un espacio métrico separable, entonces (X, d) es 0-dimensional si y sólo si (X, d) tiene dimensión de cubrimiento cero. En particular, $\mathbb{I}$ tiene dimensión de cubrimiento cero.

Prueba:

Dado que cada espacio con dimensión de cubrimiento cero es 0-dimensional, sólo necesitamos probar que, si X es 0-dimensional y separable, entonces X tiene dimensión de cubrimiento cero. Por el lema 1.1, X tiene una base contable $\boldsymbol{B}$ compuesta de conjuntos clopen. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X, y sea

$$\mathcal{W} = \{ B \in \boldsymbol{B}: B \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U} \}.$$

Como $\mathcal{W}$ es contable, pero $\mathcal{W} = \{B_n: n \in \omega\}$. Ahora $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, pero no necesariamente disjunto dos a dos. Definiremos una sucesión de conjuntos abiertos por inducción.

Consideremos $V_0 = B_0$, y para cada n ≥ 1 definimos $V_n = B_n \setminus \cup \{ B_i : i < n \}$.

Claramente $\mathcal{V} = \{ V_n : n \in \omega \}$ es una familia de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos

(y cerrados), cada uno de los cuales está contenido es algún miembro de $\mathcal{U}$. Para completar la prueba necesitamos sólo probar que $\mathcal{V}$ cubre a X, y esto es claro ya que para cada $x \in X$ existe un primer n tal que $x \in B_n$; así $x \in V_n$. Así $\mathcal{U}$ tiene refinamiento abierto disjunto dos a dos.

Si $\mathcal{U}$ es una familia no vacía de subconjuntos de un espacio métrico X, recordemos que el diámetro de un conjunto U está definido por

$diam(U) = sup\{ d(x, y : x, y \in U \}$, y la longitud de una familia de conjuntos $\mathcal{U}$ está definida por long ($\mathcal{U}$) = $sup\{ diam(U): U \in \mathcal{U}\}$.

Definición 1.10

Dos espacios métricos (X, d) y (Y, ρ) se dice que son isométricos si existe una biyección $h: X \longrightarrow Y$ tal que para todo $a, b \in X$ tenemos que $d(a, b) = \rho(h(a), h(b))$. Así una función h es llamada una isometría . Claramente cada isometría es un homeomorfismo, pero no todo homeomorfismo es una isometría.

CAPÍTULO II

ESPACIO DE BAIRE Y ESPACIOS ULTRAMÉTRICOS

En este capítulo introducimos la clase de espacios topológicos llamados los espacios de Baire, que denotaremos por $\mathbb{B}$, y los espacios ultramétricos; además presentamos algunas aplicaciones y propiedades de estos dos espacios.

Como la métrica natural sobre $\mathbb{B}$, es una ultramétrica, estos espacios tienen propiedades métricas las cuales son muy diferentes de las propiedades de la métrica usual sobre espacios euclideanos, por lo tanto, estudiaremos estos espacios y haremos una caracterización topológica de los espacios ultramétricos.

2.1 EL ESPACIO DE BAIRE.

En lo sucesivo denotaremos por ω a el primer ordinal infinito (conjunto de enteros no negativos), y por ${}^{\omega}\omega$ a el conjunto de todas las funciones

$$f: \omega \longrightarrow \omega.$$

Podemos pensar que un punto f en $\mathbb{B}$ es una sucesión de enteros no negativos

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots).$$

Definición 2.1

Para dos funciones distintas $f, g \in {}^{\omega}\omega$, sea $k(f,g)$ denota el primer $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$. Definimos una métrica d sobre ${}^{\omega}\omega$ por

$$d(f,g) = \begin{cases} 1/(k(f,g)+1 & si\ f \neq g \\ 0 & si\ f = g \end{cases}$$

Lema 2.1

La función d es una métrica sobre ${}^{\omega}\omega$

Prueba:

Sólo necesitamos probar la desigualdad triangular ya que es obvio que d cumple las propiedades ((1) y (2) en la definición (1.2)

Sea $f, h, g \in {}^{\omega}\omega$ demostraremos

$$d(f,h) \leq \max \{d(f,g), d(g,h)\} \quad (*)$$

y de aquí se deduce que

$$d(f,h) \leq d(f, g) + d(g,h)$$

Si $f = h, f = g$ o $g = h$ entonces (*) se cumple; así que asumiremos la otra condición, sea $n = k(f,h)$, $m= k(f,g)$ y $q= k(g,h)$.

Basta mostrar que

$1/(n + 1) \leq 1/(m + 1)$, o

$1/(n + 1) \leq 1/(q + 1)$; o equivalentemente, mostrar que

$m \leq n$ ó $q \leq n$.

Supongamos que $m > n$ entonces $f(n) = g(n)$ y así $g(n)= f(n) \neq h(n)$, pero esto significa que $q \leq n$.

Definición 2.2

El espacio métrico $\mathbb{B} = ({}^{\omega}\omega, d)$, donde d está definido en 2.1 es llamado el espacio de Baire.

La vecindad básica N(f, ε) en el espacio de Baire puede ser descrita en otra forma. Para cada $n \in \omega$, sea ${}^{n}\omega$ denota el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,\ldots n\}$ en ω , y sea ${}^{<\omega}\omega = \bigcup\{ {}^{n}\omega : n \in \omega\}$.

Para cada $\sigma \in {}^{n}\omega$, definimos

$$[\sigma] = \{ f \in {}^{\omega}\omega : \sigma \subset f \}.$$

Lema 2.2

Para cada n sea $f \in {}^{\omega}\omega$, y $r > 0$. Si $r > 1$, entonces en $\mathbb{B}$, $N(r,f) = {}^{\omega}\omega$.

Si $r \leq 1$, entonces $N(f,r) = [f / m]$, donde $m \geq 2$ es el primer número natural tal que

$1/m < r \leq 1/(m-1)$.

Prueba:

La primera conclusión, se deduce del hecho de que

$$d(f, g) < 1, \text{ por lo tanto } f, g \in \mathbb{B}$$

y la segunda conclusión, se tiene directamente de la definición de d.

Se sigue del lema 2.2 que las vecindades básicas en $\mathbb{B}$ son los mismos conjuntos de la forma $[\sigma]$ para $\sigma \in {}^{<\omega}\omega$. Esos conjuntos $[\sigma]$, por supuesto, forman la base natural para la topología producto sobre $\mathbb{B}$. Para $f \in {}^{\omega}\omega$ y $m \in \omega$, usamos la notación $f / m = \{(i,j) \in f : i < m\}$; así $f / m \in {}^{m}\omega$.

Queremos considerar una representación diferente del espacio de Baire.

Sea ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ el conjunto de todas las funciones f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Definamos:

$$\mathbb{B}_2 = (\mathbb{Z} \times {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}) = \{ (z,h): z \in \mathbb{Z}, \text{ y } h \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \}$$

Un punto p $\in \mathbb{B}_2$ puede ser considerado una sucesión ($p_0, p_1, ...p_n, ...$) donde $p_0 \in \mathbb{Z}$ y $p_n \in \mathbb{N}$ para $n \geq 1$. Si $p \neq q$ en $\mathbb{B}_2$, sea $k_2(p,q)$ denota el primer entero $n \geq 0$ tal que $p_n \neq q_n$.

Definición 2.3

Para $p, q \in \mathbb{B}_2$ definimos

$$d_2(p,q) = \begin{cases} 1/k_2(p,q)+1 & si \quad p \neq q \\ 0 & si \quad p = q \end{cases}$$

Lema 2.3

La función d_2 es una métrica sobre $\mathbb{B}_2$

La prueba de este lema es similar a la prueba dada en el lema 2.2

Teorema 2.1

($\mathbb{B}$, d) y ($\mathbb{B}_2$, d_2) son homeomórficos

Prueba:

Sea $\emptyset$: $\omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ y ψ: $\omega \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección . Usando la notación $f = (f_0, f_1, ..., f_n, ...)$ para un punto en $\mathbb{B}$, definimos una función $\Psi : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}_2$ por $\Psi(f) = (\emptyset(f_0), \psi(f_1), ..., \psi(f_n), ...)$.

Como $\emptyset$ y ψ son biyectivas entonces Ψ es biyectiva.

Además, podemos garantizar que Ψ es bicontinua a partir de la siguiente observación:

Si $f, g \in \mathbb{B}$, y $p = \Psi(f)$, $q = \Psi(g)$, entonces el primer lugar donde f y g difieren es el mismo punto donde p y q difieren. Así para f, g distintos,

$$d_2(p,q) = d_2(\Psi(f), \Psi(g)) = \frac{1}{k_2(\Psi(f), \Psi(g)) + 1}$$

$$= \frac{1}{k(f,g) + 1}$$

$$= d(f,g)$$

En la siguiente sección mostraremos que $\mathbb{B}_2$ (por lo tanto $\mathbb{B}$) es homeomórfico a los números irracionales.

2.2 ESPACIOS ULTRAMÉTRICOS.

Definición 2.4

Una métrica d sobre un conjunto X es llamado una ultramétrica (o una métrica no arquimediana) sobre X y (X,d) es llamada un espacio ultramétrico (o no arquimediano) si d satisface la siguiente forma fuerte de la desigualdad triangular. Para todo $x,y\ z \in X$,

$$d(x,z) \leq max\ \{d(x,y),\ d(y,z)\} \text{ (desigualdad triangular fuerte)}$$

La desigualdad triangular fuerte puede ser llamada la "Desigualdad del triángulo isósceles", porque ella implica que si $x,y,z \in X$ por lo menos dos los números $d(x,y)$, d(y,z) y d(z,x) son iguales.

La prueba de 1.3 muestra que la métrica d definida sobre ${}^{\omega}\omega$ es una ultramétrica. Así $(\mathbb{B}, d)$ es un espacio ultramétrico, e igual es el caso de $(\mathbb{B}_2, d_2)$.

Note que la métrica usual sobre $\mathbb{I}$ (el subespacio de irracionales) no es una ultramétrica.

Ejemplo 2.1:

Sea $x = \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$ y $z = 2 + \sqrt{2}$

$2 \leq \max \{ 1,1 \} = 1$

$d(x,z) = 2 > max \{ d(x,y), d(y,z)\} = 1$

El siguiente resultado muestra que tan diferente es una ultramétrica del espacio usual euclideano.

Teorema 2.2

Sea (X,d) un espacio ultramétrico entonces se tiene lo siguiente:

a) Para cada $x \in X$ y cada $r > 0$, $N(x,r)$ es un conjunto abierto y cerrado.

Prueba:

Para $N(x,r)$ es abierto por la definición de la topología métrica. Para ver que $N(x,r)$ es cerrado mostraremos que $X \setminus N(x,r)$ es abierto. Sea $y \in X \setminus N(x,r)$; entonces $d(x,y) \geq r$. Afirmamos que $N(y, r) \cap N(x, r) = \emptyset$. Si esto no fuese cierto, entonces existe un punto $z \in N(y,r) \cap N(x,r)$; así $d(z,y) < r$ y $d(z,x) < r$.

Por la desigualdad fuerte del triángulo, tenemos que

$$r \leq d(x,y) \leq \max \{d(x,z), d(z,y)\} < r,$$

pero esto es claramente una contradicción.

Así $N(y,r) \cap N(x,r) = \emptyset$, y por lo tanto se tiene que $N(x,r)$ es cerrado.

b) Si dos vecindades básicas tiene un punto en común, entonces uno está contenido en el otro, es decir, si $N(x,r) \cap N(y,s) \neq \emptyset$ y $r \leq s$, entonces

$$N(x,r) \subset N(y,s)$$

Prueba:

Sea $z \in N(x,r)$ y $w \in N(x,r) \cap N(y,r)$

$$d(z,y) \leq max \{d(z,w), d(w,y)\}$$

$$\leq max \{ max \{d(z,x), d(x,w)\}, d(w,y)\}$$

$$\leq s$$

c) Si $N(x, r) \cap N(y, r) \neq \emptyset$ entonces $N(x, r) = N(y,r)$

Prueba:

Se deduce inmediatamente de (b)

d) Cada punto en una vecindad básica limita a su centro. Es decir, si y $\in N(x, r)$ entonces $N(x, r) = N(y, r)$

Prueba:

Si $y \in N(x,r) \Longrightarrow y \in N(x,r) \cap N(y,r)$

$$\Longrightarrow N(x,r) \cap N(y,r) \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow N(x,r) = N(y,r) \quad (\text{ por c})$$

e) Sea $S(y,r) = \{x \in X: d(x,y) \leq r\}$. Si $x \in S(y, r)$ entonces $N(x, r) \subset S(y, r)$.

Prueba:

Sea $z \in N(x, r)$ y supongamos que $x \in S(y, r)$

$\Longrightarrow$ $d(z, y) \leq max \{ d(z,x), d(x,y) \} \leq r$

$\Longrightarrow$ $z \in S(y, r)$. Así $N(x, r) \subseteq S(y, r)$

f) Toda intersección no vacía, finita, de vecindades básicas es una vecindad básica.

Prueba:

Sea $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, y $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{R}$

tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} N(x_i, r_i) \neq \emptyset$$

sea $r_j = min\ \{ r_i / 1 \leq i \leq n\}$, aplicando (b)

se prueba que

$$\bigcap_{i=1}^{n} N(x_i,\ r_i) = N(x_j, r_j)$$

g) Todo conjunto abierto es una unión de familias de vecindades básicas disjuntos dos a dos

Prueba:

Sea A abierto, A es unión de vecindades básicas, pero por (c), dos de tales bolas son iguales o son disjuntas, entonces se obtiene la afirmación.

h) Toda unión de vecindades del mismo radio es clopen.

Prueba:

Sea r > 0, $A \subseteq X$ y

$B = \bigcup_{x \in A} N(x,r) \underset{\neq}{\subset} X$

Sea $y \in cl(B) \Longrightarrow N(y, r) \cap \text{B} \neq \emptyset$

Si $z \in N(y, r) \cap \text{B} \Longrightarrow \exists\ x \in A$ tal que $z \in N(y, r)$

$\Longrightarrow N(y, r) \cap N(x, r) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow\ N(y,r) = N(x,r)$

$\Longrightarrow\ y \in N(x, r) \subseteq\ B \Longrightarrow y \in B.$

Así B es cerrado

Teorema 2.3

Los espacios ultramétricos son 0-dimensionales.

La prueba de este teorema se obtiene directamente de (a) en el teorema 2.2

2.3 UNA CARACTERIZACIÓN DE ESPACIOS ULTRAMETRIZABLES.

Daremos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.4

Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes tres condiciones son equivalentes.

1. Existe una ultramétrica ρ sobre X la cual es topológicamente equivalente a d.
2. (X, d) tiene un cubrimiento de dimensión cero.
3. Existe un sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ de cubrimientos abiertos disjunto dos a dos de X tal que:
   (i) si $U \in \mathcal{U}_i$, entonces $\operatorname{diam}(U) \leq 2^{-(i+1)}$, y
   (ii) $\mathcal{U}_{i+1}$ refina a $\mathcal{U}_i$, para todo $i \in \omega$.

Prueba de $1 \Longrightarrow 2$.

Sea ρ una ultramétrica sobre X tal que ρ y d son topológicamente equivalentes. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X (como ρ y d son topológicamente equivalentes el término abierto no es ambiguo). Necesitamos encontrar un cubrimiento $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos disjuntos tal que $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$. Para cada x en X, sea

$$i(x) = \min\{i \geq 1 : \exists\, U \in \mathcal{U} \text{ tal que } N_\rho(x, 1/i) \subset U\}.$$

Sea $\mathcal{V} = \{N_\rho(x, 1/i) : x \in X\}$. Claramente $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto de X el cual refina a $\mathcal{U}$; así solo necesitamos mostrar que $\mathcal{V}$ es disjunto dos a dos.

Sean $N_\rho(x, 1/i(x))$ y $N_\rho(y, 1/i(y))$ elementos distintos de $\mathcal{V}$, y supongamos que ellos no son disjuntos, supongamos que

$$z \in N_\rho(x,\ 1/i(x)) \cap N_\rho(y,\ 1/i(y))$$

De 1.7(b), una de estas vecindades básicas está contenida en la otra.

Digamos que $N_\rho(x,\ 1/i(x)) \subset N_\rho(y,\ 1/i(y))$. Por definición de i(y) existe U $\in \mathcal{U}$ tal que $N_\rho(y,\ 1/i(y)) \subset U$. Como x está en $N_\rho(y,\ 1/i(y))$, se tiene que $N_\rho(y,\ 1/i(y)) = N_\rho(x,\ 1/i(y))$, y por lo tanto

$$N_\rho(x,\ 1/i(y)) = N_\rho(y,\ 1/i(y)) \subset U.$$

Por la definición de i(x), tenemos i(x) $\leq$ i(y); así

$$N_\rho(x,\ 1/i(x)) \supset N_\rho(x,\ 1/i(y)) = N_\rho(y,\ 1/i(y))$$

De aquí $N_\rho(x,\ 1/i(x)) = N_\rho(y,\ 1/i(y))$ lo cual contradice nuestra suposición de que esos dos elementos de V son distintos.

Prueba de 2 $\Longrightarrow$ 3.

Por hipótesis, X tiene un cubrimiento de dimensión cero. Sea $\mathcal{U}_0$ un refinamiento abierto disjunto dos a dos de $\{N(x,1) : x \in X\}$.

Asumimos que se tiene definido un cubrimiento abierto disjunto dos a dos $\mathcal{U}_i$, para $i \leq n$ tal que la propiedad (i) y (ii) en (3) se mantienen para todo $i \leq n$.

Construiremos $\mathcal{U}_{n+1}$ como sigue. Sea

$\mathcal{V} = \{N(x,\ 2^{-(n+3)}) : x \in X\}$, y $\mathcal{W} = \{N \cap U : N \in \mathcal{V}$ y $U \in \mathcal{U}_n\}$.

Entonces $\mathcal{W}$ es un cubrimiento abierto de X; así por hipótesis, existe un refinamiento abierto disjunto dos a dos de W, al que llamamos $\mathcal{U}_{n+1}$.

Es fácil ver que una sucesión $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ satisface las condiciones dadas en (3).

Prueba de $3 \Longrightarrow 1$

Sea $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ una sucesión de cubrimientos abiertos que satisfacen las propiedades en (3). Definiremos una ultramétrica ρ sobre X como sigue:

Para cualquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ definimos

$k(x,y) = min\{ i \in \omega : x$ y y están en miembros diferentes de $\mathcal{U}_i\}$

La propiedad (i) implica que $k(x,y)$ está bien definida. Para cualquier $x,y \in X$ definimos

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1/(k(x,y)+1) & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

Tenemos que verificar primero que ρ es una ultramétrica, y la única parte de la definición que no es obvia, es la forma fuerte de la desigualdad triangular.

Sean $x, y, z \in X$. Debemos mostrar que:

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$$

Si $x = y$ trivial. Asumamos que $x \neq y$. Por (i) existe un primer $n \geq 0$ tal que x y y están en diferentes miembros de $\mathcal{U}_n$; así $k(x,y) = n$.

Sean $U, U' \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$, $y \in U'$. Si z no está en U, entonces z y x están en diferentes miembros de $\mathcal{U}_n$; lo cual implica que $k(z, x) \leq n$; así

$$\rho(z, x) \geq 1/(n+1) = \rho(x, y), \text{ y la desigualdad se mantiene.}$$

Si z no está en U', entonces z y y están en diferentes miembros de $\mathcal{U}_n$ por lo tanto la desigualdad se mantiene.

La posibilidad que queda es que $z \in U \cap U'$ pero esto es imposible porque $\mathcal{U}_n$ es una familia de disjuntos dos a dos.

Para finalizar la prueba debemos mostrar que ρ es topológicamente equivalente a la métrica original d sobre X. Es claro que cualquier sucesión de familias de conjuntos abiertos en (X, d) satisfaciendo (i) es una base para (X, d). Por definición de la topología métrica $\{N_\rho(x, r): x \in X \text{ y } r > 0\}$ es una base para (X, ρ); así para ver que topología (X, d) es igual a la topología (X, ρ) es suficiente mostrar que

$$(1) \qquad \{N_\rho(x,r): x \in X \text{ y } r > 0\} = U\{ \mathcal{U}_n : n \in \omega \} \in U\{X\}.$$

Para finalizar, sea $N = N_\rho(x, r)$. Si $r > 1$, entonces $N = X$. Si $r \leq 1$; existe $n \geq 1$ tal que $1/(n+1) < r \leq 1/n$. Como $\mathcal{U}_{n-1}$ cubre a X, existe $U \in \mathcal{U}_{n-1}$ tal que $x \in U$.

Afirmamos que $U = N$. Si $y \in U$, entonces x y y están en el mismo elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$ así por (ii) , $k(x,y) \geq n$.

De aquí $\rho(x,y) \leq 1/(n+1) < r$; así $y \in N$.

Recíprocamente, si $y \in N$, y $y \neq x$, entonces sea $m \in \omega$ tal que $k(x, y) = m$.

Como $y \in N$, tenemos que

$$\rho(x, y) = 1/(m+1) < r \leq 1/n; \text{ así } n < m + 1$$

de aquí

$$n - 1 < k(x, y).$$

Luego x y y están en el mismo miembro de $\mathcal{U}_{n-1}$; así $y \in U$.

Para completar la prueba de la igualdad dada en (1), sea $n \in \omega$ y $U \in \mathcal{U}_n$.

Afirmamos que $U = N_\rho(x, 1/(n+1))$ para cualquier x en U.

Si $y \in U$, entonces x y y están en el mismo elemento de U_n; así

$$k(x,y) \geq n+1$$

luego

$$\rho(x, y) \leq 1/(n+2) < 1/(n+1), \text{ y así } y \in N_\rho(x, 1/(n+1))$$

Si $y \in N_\rho(x, 1/(n+1))$ entonces $\rho(x, y) \leq 1/(n+2)$ luego

$$k(x, y) \geq n + 1$$

De aquí x y y están en el mismo miembro de $\mathcal{U}_n$, y así $y \in U$. Esto completa la prueba del teorema 2.10

Observación 2.1: Algunas partes del teorema 2.9 fueron conocidas primero para el caso de Espacio de Baire en Feller, W., y Tornier, E (1930). Mas-und Inhaltstheorie des Baireschen

CAPÍTULO III

UN HOMEOMORFISMO VÍA FRACCIONES CONTINUADAS

En está capítulo damos la definición de fracciones continuadas, discutimos algunas propiedades y hacemos algunas observaciones importantes, por ejemplo, hacemos la expansión en fracciones continuadas de un número racional y definimos una sucesión de familias de intervalos abiertos para construir un homeomorfismo entre el espacio de Baire $\mathbb{P}$ y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ dotado de la métrica usual.

Este homeomorfismo del espacio de Baire y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es el resultado más importante de este trabajo de tesis.

3.1 FRACCIONES CONTINUADAS

Una expresión de la siguiente forma es llamada una fracción continuada

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{\ddots}{\cdots \cfrac{1}{x}}}}} = [a_0, a_1, \ldots, x]$$

Sólo consideramos el caso especial cuando $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leq i < n$, y x es cualquier entero positivo $x \neq 1$ (si $x = 1$, escribimos $[\, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$ en lugar de $[\, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 1])$. La notación $[\, a_0, a_1, \ldots, x\,]$ es comúnmente usada para denotar la fracción continuada dada arriba, donde $[\, a_0] = a_0$.

Notemos las siguientes tres propiedades obvias:

(1) Si el último término x en $[\, a_0, \ldots, x\,]$ es un entero positivo $x = a_n$, entonces el número $[\, a_0, \ldots, a_n]$ es un número racional.

(2) $[\, a_0, \ldots, a_n\,] = a_0 + 1/\,[\, a_1, \ldots, a_n]$

(3) Para cualquier número $x \neq 0$, $[\, a_0, \ldots, a_{n-1}, x\,] = [\, a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{x}\,]$.

La expansión en fracciones continuadas de un número racional puede ser encontrada usando el algoritmo euclideano y es única, en efecto

Teorema 3.1

Si a, b son dos números enteros, $b>0$, por el algoritmo de Euclides existen q y r tales que

$$a = bq + r \text{ donde } 0 \leq r < b.$$

Aplicamos el algoritmo de Euclides repetidamente y construímos la sucesión de igualdades

$$\begin{aligned} a &= r_0 q_0 + r_1 \quad \text{donde } 0 \leq r_1 < r_0 \\ r_0 &= r_1 q_1 + r_2 \quad \text{donde } 0 \leq r_2 < r_1 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \quad \text{donde } 0 \leq r_n < r_{n-1}. \end{aligned}$$

Como r_i forman una sucesión decreciente de enteros positivos, este proceso terminará en un número finito de pasos. Es decir, existe algún entero n tal que $r_n = 0$. A partir de las igualdades anteriores, podemos escribir

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots \ddots \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Con la notación anterior $\quad \dfrac{a}{b} = [\, q_0, q_1, \ldots, q_n \,]$

Para ver esto, reescribimos la familia de igualdades de arriba, como sigue

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r_0} = q_0 + \frac{r_1}{r_0}$$

$$\frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad o \quad \frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1}, \quad o \quad \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{q_{n-1}}$$

Teorema 3.2

Todo número racional puede ser representado como fracciones continuadas y recíprocamente, toda fracción continuada finita es un número racional.

A continuación enunciamos algunos resultados concernientes a las fracciones continuadas.

Lema 3.1

Sean x, y números reales con $x < y$ y n un entero mayor o igual que cero, entonces

(i) Si n es par entonces $[\, a_0, a_1, \ldots, a_n, x\,] > [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, y\,]$.

(ii) Si n es impar $[\, a_0, a_1, \ldots, a_n, x\,] < [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, y\,]$.

Prueba:

Procederemos por inducción

Para el caso $n = 0$ tenemos $[\, a_0, x\,] = a_0 + \frac{1}{x} > a_0 + \frac{1}{y} = [\, a_0, y\,]$.

Para $n = 1$, tenemos $a_1 + \frac{1}{x} > a_1 + \frac{1}{y}$; así para el caso $n = 0$ tenemos

$$[\, a_0, a_1, x \,] = [\, a_0, a_1 + \frac{1}{x} \,] < [\, a_0, a_1 + \frac{1}{y} \,] = [\, a_0, a_1, y \,]$$

Prueba de (i). Asumamos que el resultado se mantiene para $2n$ y $2n + 1$.

Sean $x' = a_{2n+2} + \frac{1}{x}$, y $y' = a_{2n+2} + \frac{1}{y}$; así $y' < x'$.

Ahora tenemos por (ii)

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, y] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}, y'] < [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}, x'] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, x\,].$$

Prueba de (ii).

Sea $x' = a_{2n+3} + \frac{1}{x}$ y $y' = a_{2n+3} + \frac{1}{y}$

luego $y' < x'$. Por (i) se tiene que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n+3}, x] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, x'] < [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, y'] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+3}, y\,].$$

Corolario 3.1

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

(i) Si n es par, $[\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k \,] > [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1]$,

(ii) Si n es impar, $[\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k \,] < [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1]$.

De este corolario vemos que la sucesión $\{[\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k] : k \in \mathbb{N}\}$ es monótona (decreciente para n par, y creciente para n impar).

Lo siguiente que verificaremos es que esta sucesión converge a $[\, a_0, a_1, \ldots, a_n\,]$.

Lema 3.2

La sucesión $\{[a_0, a_1, \ldots, a_n, k] : k \in \mathbb{N}\}$ converge a $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Prueba:

Claramente

$$[a_0, k] = a_0 + \frac{1}{k} \rightarrow a_0 = [a_0],$$

y

$$[a_0, a_1, k] = a_0 + 1/[a_1, k] \rightarrow a_0 + 1/a_1 \quad (\text{ por el caso } n = 0).$$

El resultado ahora se sigue por inducción de la igualdad

$$[a_0, \ldots, a_n, k] = a_0 + 1/[a_1, \ldots, a_n, k].$$

Ahora definimos una sucesión $\{\mathcal{U}_i : i < \omega\}$ de familias de intervalos abiertos con extremos racionales. Trabajando por inducción, los intervalos abiertos con esos extremos son reunidos en forma de una sucesión de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ de los irracionales. Usaremos entonces esos cubrimientos abiertos para definir el homeomorfismo.

Desde un punto de vista esos cubrimientos abiertos son moderadamente fáciles de visualizar. Cada $\mathcal{U}_i$ consiste de muchos intervalos contables disjuntos dos a dos con extremos racionales.

Para construir $\mathcal{U}_{i+1}$ de $\mathcal{U}_i$, tomamos cada intervalo $I = (a,b) \in \mathcal{U}_i$; y los intervalos contables I_j $(j \in \omega)$ en la siguiente forma:

Construiremos una sucesión de números racionales (p_n) que comienza con uno de los extremos $(p_0 = b$ cuando i es par; $p_0 = a$ cuando i es impar$)$ y converge monótonamente a el otro extremo. Los números racionales consecutivos en esta sucesión son usados como extremos de intervalos en $\mathcal{U}_{i+1}$ (nosotros definimos la sucesión (p_n) usando fracciones continuadas).

Sea

$$\mathcal{U}_0 = \{ (a_0, a_0 + 1) : a_0 \in \mathbb{Z} \}, \text{ y } \mathcal{U}_1 = \{ ([a_0, k{+}1], [a_0, k]) : a_0 \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}.$$

Supongamos que $\mathcal{U}_{2n+1}$, y que cada intervalo en $\mathcal{U}_{2n+1}$ es de la forma

$$[a_0, a_1 \ldots, a_{2n}, k+1], [a_0,a_1 ,\ldots, a_{2n}, k].$$

Para cada $(a_0, a_1, \ldots,a_{2n+1})$ definamos $\mathcal{U}_{2n+2}((a_0,a_1, \ldots, a_{2n+1}))$ para ser el siguiente conjunto de intervalos contables:

$\{ [a_0, a_1,\ldots,a_{2n+1}, k], [a_0, a_1,\ldots, a_{2n+1}, k{+}1]) : a_0 \in \mathbb{Z} , a_i \in \mathbb{N}(i \leq 2n{+}1), \ k \geq 1\}.$

Por el corolario (3.1) $\{ [a_0, a_1,\ldots,a_{2n+1}, k] : k \geq 1\}$es una sucesión creciente con los elementos mínimos $[a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1}, 1] = [a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1} + 1]$,

Y por el lema (3.2) converge a $[a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1}]$.

Así cada intervalo en $\mathcal{U}_{2n+2}((a_0,a_1, \ldots, a_{2n+1}))$ es un subconjunto del intervalo

$$\boldsymbol{I} = ([a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1} +1], [a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1}]) \in \mathcal{U}_{2n+1}$$

Como cada miembro de esta sucesión creciente, excepto el mínimo, es un número estrictamente entre los extremos de $\boldsymbol{I}$, la clausura de cada intervalo en $\mathcal{U}_{2n+2}((a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}))$ está contenido en $\boldsymbol{I}$, excepto el intervalo que tiene a $[a_0, a_1, \ldots , a_{2n+1} + 1]$ como un extremo.

Definamos

$$\mathcal{U}_{2n+2} = \bigcup \{ \mathcal{U}_{2n+2}((a_0,a_1, \ldots, a_{2n+1}) : a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}(i \leq 2n{+}1)\}$$

Análogamente, definimos $\mathcal{U}_{2n+3}(a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2})$ para cada $(a_0 ,a_1, \ldots, a_{2n+2})$, y definamos $\mathcal{U}_{2n+3}$ como la unión sobre todas esas familias contables de intervalos.

Como la sucesión $\{ [a_0, a_1,\ldots,a_{2n+2}, k]: k \geq 1\}$es decreciente y converge a $[a_0,a_1,\ldots, a_{2n+2}]$ vemos que cada intervalo en $\mathcal{U}_{2n+3}(a_0,a_1,\ldots,a_{2n+2})$ es un subconjunto del intervalo

$$\mathrm{I}' = ([a_0, a_1,\ldots,a_{2n+2}], [a_0, a_1,\ldots,a_{2n+2} + 1]) \in \mathcal{U}_{2n+2}$$

Más aún, como cada término de esta sucesión decreciente es un elemento del intervalo abierto I', excepto el máximo, cada intervalo en $\mathcal{U}_{2n+3}(a_0,a_1,\ldots,a_{2n+2})$ tiene esta clausura de un subconjunto de I' también, excepto para ese único intervalo el cual tiene a $[a_0,a_1,\ldots,a_{2n+2}+1]$ como un extremo.

En general, como ningún punto extremo de un intervalo en el cubrimiento $\mathcal{U}_{j+2}$ es usado como un extremo para algún intervalo en $\mathcal{U}_j$, tenemos que todo intervalo en $\mathcal{U}_{j+2}$ tiene este subconjunto clausura de algún intervalo en $\mathcal{U}_j$.

Queremos mostrar que el $\lim_{n\to\infty}$(medida $\mathcal{U}n$) = 0. Primero damos un estimado de la distancia entre dos fracciones continuas. Este estimado puede ser mejorado, pero es adecuado a nuestros propósitos.

Lema 3.3

Sea $1 \leq x < y$ y $n \geq 1$,

i) si n es par, $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] - [a_0, a_1, \ldots, a_n, y] < \dfrac{y-x}{xy+n}$

ii) si n es impar, $[a_0, a_1, \ldots, a_n, y] - [a_0, a_1, \ldots, a_n, x] < \dfrac{y-x}{xy+n}$

Prueba:

Para $n = 0$, $n < 1$ verificaremos que

$$[a_0, x] - [a_0, y] = \frac{y-x}{xy}.$$

y damos el paso inductivo.

Asumamos que el resultado es válido para $2n$ y $2n+1$. Para (i), hagamos

$X = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, x]$ y $Y = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}]$, y sea $x' = a_{2n+2} + \dfrac{1}{x}$ y

$y' = a_{2n+2} + \frac{1}{y}$ (así $y' < x'$). Por (ii) y el hecho que $1 \leq a_{2n+1}, x, y$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
X - Y &= [\, a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, x] - [\, a_0, a_1, \ldots, a_{2n+2}, y\,] \\
&= [\, a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}, x'\,] - [a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}, y'\,] \\
&\leq \frac{x'-y'}{x'y'+2n+1} \\
&= \frac{(a_{2n+1} + \frac{1}{x}) - (a_{2n+1} + \frac{1}{y})}{(a_{2n+1} + \frac{1}{y})\,(a_{2n+1} + \frac{1}{x}) + 2n+1} \\
&= \frac{y-x}{xya_{2n+1}^2 + a_{2n+1}(x+y) + (2n+1)xy} \\
&\leq \frac{y-x}{xy+2n+2}
\end{aligned}
$$

La prueba de (ii) es similar.

Corolario 3.2.

Para $n \geq 1$, la medida $(\mathcal{U}_n) < \frac{1}{n+1}$

Prueba:

La medida de $\mathcal{U}_0$ es obviamente 1, y la medida de $\mathcal{U}_1$ es fácil ver que es ½.

Sea I un intervalo arbitrario en $\mathcal{U}_n$ ($n \geq 2$), n par, decimos que

$$I = (\, [\, a_0, a_1, \ldots, an, k+1\,]\, , [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k])$$

así, la longitud de I es

$$L = [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k] - [\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k+1\,]$$

Por el lema 3.3 obtenemos

$$L < \frac{(k+1)-k}{k(k+1)+n} < \frac{1}{1+n}$$

El caso par n impar es similar.

Observación 3.1

(1) Cada $\mathcal{U}_i$ es una familia de intervalos abiertos con extremos racionales, y $\mathcal{U}_i$ cubre a $\mathbb{I}$.

(2) Los intervalos en $\mathcal{U}_i$ son disjuntos dos a dos,

(3) $\mathcal{U}_{i+1}$ refina a $\mathcal{U}_i$, lo que significa que cada intervalo en $\mathcal{U}_{i+1}$ es un subconjunto de (necesariamente único) intervalos en $\mathcal{U}_i$.

(4) $\overline{\mathrm{U}_{i+2}}$ refina $\mathcal{U}_i$, lo que significa que la clausura de cada intervalo en $\mathcal{U}_{i+2}$ es un subconjunto de algún intervalo en $\mathcal{U}_i$.

(5) Para n > o, medida ($\mathcal{U}_i$) < $\frac{1}{i+1}$

Corolario 3.3

Para cada número irracional x, existe una sucesión

$$\{a_i : \mathrm{i} \in \omega, a_0 \in \mathbb{Z}, \text{ y } a_i \in \mathbb{N} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

tal que

1. (caso par) x es el único punto en

$$\cap\{([a_0, a_1, \ldots, a_n], [a_0, a_1, \ldots, a_n + 1]) : n \in \omega, n \text{ par}\}, \text{ y}$$

2. (caso impar), x es el único punto en

$$\cap\{([a_0, a_1, \ldots, a_n + 1], [a_0, a_1, \ldots, a_n]) : n \in \omega, n \text{ impar}\}.$$

Prueba:

Sea x un número irracional. Por la observación 3.1(1), existe un intervalo $I_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $x \in I_0$. Por la construcción, existe un entero a_0 tal que $I_0 = (\, a_0, a_0 + 1)$. Por inducción, afirmamos que hemos construído (para $i \leq n$) intervalos $I_i \in \mathcal{U}_i$, y enteros positivos a_i (para $1 \leq i < n$) tal que:

1. $x \in I_i \subset I_{i-1}$
2. $I_i = ([\, a_0, a_1, \ldots, a_i\,], [\, a_0, a_1, \ldots, a_i + 1])$ para i par,

   e $I_i = ([\, a_0, a_1, \ldots, a_i + 1], [\, a_0, a_1, \ldots, a_i\,])$ para i impar.

Encontrar I_{n+1} es trivial, ya que existe exactamente un intervalo en $\mathcal{U}_{n+1}$ el cual contiene a x. Más aún, $I_{n+1} \subset I_n$; así si n es par, por la construcción, I_{n+1} es un intervalo definido a partir de la construcción de una sucesión que comienza con el extremo izquierdo de I_n y converge al extremo derecho de I_n. Por lo tanto, existe un entero positivo k tal que

$$I_{n+1} = ([\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k + 1\,], [([\, a_0, a_1, \ldots, a_n, k\,])$$

Tomemos $a_{n+1} = k$. El caso que n es impar es similar.

Ya estamos preparados para construir un homeomorfismo ϕ de $\mathbb{B}$ sobre $\mathbb{Z}$. Trabajamos, sin embargo, con $\mathbb{B}_2$ el cual es homeomórfico a $\mathbb{B}$ por el teorema 2.1

Definición 3.1

$\phi((a_i))$ es el único punto en

$$\cap\{([\, a_0, a_1, \ldots, a_n], [\, a_0, a_1, \ldots, a_n + 1]) : \text{n par}\}.$$

Obviamente, tenemos también $\phi((a_i))$ es el único punto en

$$\cap\{([\, a_0, a_1, \ldots, a_n + 1], [\, a_0, a_1, \ldots, a_n]) : n \text{ impar}\}.$$

Debemos verificar que ϕ está bien definido. La intersección que define ϕ es no vacía porque la intersección de esos intervalos abiertos son iguales a la intersección de su clausura por observación 3.1(4) (y entonces la intersección es no vacía pues $\mathbb{R}$ es localmente compacto).

La intersección es un conjunto unitario por la observación 3.1(5). El único punto x en esta intersección es irracional, porque cada número racional tiene una expansión por fracciones continuadas y por lo tanto aparece como un extremo de un intervalo en algún $\mathcal{U}_i$. Así por la observación 3.1(4), x no es tal extremo y por consiguiente es irracional.

Teorema 3.2

ϕ es un homeomorfismo de $\mathbb{B}_2$ sobre $\mathbb{I}$.

Prueba:

ϕ es inyectiva

Sea $(a_i) \neq (b_i)$ y sea j el menor entero tal que tal que $a_j \neq b_j$.

Si $j = 0$ entonces $a_0 \neq b_0$ y los intervalos (a_0, $a_0 + 1$), y (b_0, $b_0 + 1$) son disjuntos; así $\phi((a_i)) \neq \phi((b_i))$.

En el caso $j > 0$ y par (por lo tanto $j - 1$ es impar) tenemos

$$\phi((a_i)) \in ([a_0, a_1, \dots , a_{j-1}, a_j], [a_0, a_1, \dots , a_{j-1}, a_j + 1]) \quad \text{y}$$

$$\phi((bi)) \in ([a_0, a_1, \dots , a_{j-1}, b_j], [a_0, a_1, \dots , a_{j-1}, b_j + 1]).$$

Como $a_j \neq b_j$, los dos intervalos arriba son elementos distintos de $\mathcal{U}_j$, por lo tanto disjuntos. Se sigue que $\phi((a_i)) \neq \phi((b_i))$. El caso para $j > 0$ e impar es similar.

ϕ es suryectiva

Esto se sigue inmediatamente del corolario 3.3

ϕ es bicontinua

Es suficiente mostrar que existe una base $\mathcal{B}$ para el espacio de Baire, y una base $\mathcal{U}$ para el conjunto de los irracionales tales que la función ϕ envía cada $B \in \mathcal{B}$ sobre algún $U \in \mathcal{U}$, y cada $U \in \mathcal{U}$ está es la imagen de algún $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ tomamos la base usual para la topología métrica sobre $\mathbb{B}_2$,

$$\mathcal{N} = \{ N(x, 1/n) : n \in \mathbb{N} \},$$

y como $\mathcal{U}$ tomamos

$$\mathcal{U} = \cup \{ \mathcal{U}_i : i < \omega \},$$

la cual es claramente una base por la observación 3.1(1),(5). Cuando usamos $\mathcal{N}$ en $\mathbb{B}_2$, es de utilidad notar que

$$d_2(x, y) < \frac{1}{n} \quad \text{si y sólo si } x_i = y_i \text{ para } i < n.$$

Ahora, es suficiente mostrar que cada $a \in \mathbb{B}_2$ y

$$B = N(a, 1/n) = \{ f \in \mathbb{B}_2 : f_i = a_i \text{ para } i < n \}$$

tenemos que

(i) para n par, $\phi(B) = ([\, a_0, a_1, \ldots, a_n\,], [\, a_0, a_1, \ldots, a_n + 1])$.

(ii) para n impar, $\phi(B) = ([\, a_0, a_1, \ldots, a_n + 1], [\, a_0, a_1, \ldots, a_n])$.

Prueba de (i)

Para n par, por la definición de ϕ y la propiedad de los intervalos encajados, se tiene que

$$X \in \phi(B) \quad \text{sii } \exists b \in B, b_i = a_i \ (i \leq n) \text{ y } \phi(b) = x$$

$$\text{sii } x \in \bigcap([a_0, a_1, \ldots , a_i], [a_0, a_1, \ldots , a_{i-1}, a_i + 1]): i \text{ par} \leq n\}$$

$$\text{sii } x \in ([a_0, a_1, \ldots , a_n], [a_0, a_1, \ldots , a_{n-1}, a_n + 1]).$$

La prueba de (ii) es similar.

Uno de los muchos rasgos útiles del espacio de Baire es que para algunos propósitos este puede ser usado en lugar del espacio de los irracionales. El siguiente teorema ilustra esta situación. El teorema es un caso general y es el objetivo de este trabajo.

Teorema 3.3

Cada espacio métrico separable, 0-dimensional es homeomórfico a algún subconjunto de los números irracionales.

Prueba:

Sea X un espacio métrico separable, 0-dimensional. Es suficiente probar que X es homeomórfico a un subconjunto de $\mathbb{B}$. Por el teorema 1.3, podemos encontrar una familia $\{ \mathcal{U}_i : i \in \omega \}$de cubrimientos clopen de X satisfaciendo las condiciones en el teorema 2.4 (3).

Por separabilidad, cada $\mathcal{U}_i$ es a lo más contable; nombramos su cardinalidad por k_i; donde $k_i \leq \omega$ para todo $i \in \omega$. Nombremos a los elementos de $\mathcal{U}_i$ como$\{ U_{i,j}: j < k_i \}$

en una forma uno-uno. Para cada $x \in X$ y cada i existe un único $U \in \mathcal{U}_i$ tal que $x \in U$, de aquí una forma de escoger un único entero $f_x(i)$ tal que $x \in U_{i,f_x(i)}$

Esto define una función f_x donde

$$f_x \in \prod_{i<\omega} k_i = \{ f \in \mathbb{B} : f(\mathrm{i}) < k_i \text{ para todo } i < \omega \},$$

y

$$x \in \bigcap \{ U_{i,f_x(i)} : i \in \omega \}.$$

Afirmamos que la función $\phi : \mathrm{X} \to \mathbb{B}$ definida por $\phi(\mathrm{x}) = f_{\mathrm{x}}$ es un homeomorfismo sobre la imagen de ϕ

ϕ es inyectiva: si $x \neq y$ entonces existe i tal que x,y están en distintos elementos de $\mathcal{U}_i$; así $f_x(\mathrm{i}) \neq f_y(\mathrm{i})$.

ϕ es un homeomorfismo: primero note que para $i,j \in \omega$, $\sigma(i,j) = \{ f \in \mathbb{B} : f(i) = j \}$, es un conjunto abierto en $\mathbb{B}$, y más aún, el conjunto de todos los $\sigma(i,j)$ para $i, j \in \omega$ es una subbase en la topología métrica sobre $\mathbb{B}$. Por lo tanto la familia

$$\{\sigma(\mathrm{i,j}) \cap \phi(\mathrm{X}) : \mathrm{i} \in \omega, \mathrm{j} < \mathrm{k_i}\}$$

forma una subbase para $\phi(X)$ ya que $\phi(x) = f_{\mathrm{x}} \in \prod_{i<\omega} k_i$.

Ahora, es suficiente mostrar que cada conjunto en la base $\cup\{ \mathcal{U}_i : \mathrm{i} < \omega\}$ para X es proyectada por ϕ sobre un conjunto de la subbase, y cada conjunto de la subbase es la imagen de algún $U \in \cup\{ \mathcal{U}_i : \mathrm{i} < \omega\}$. Por lo tanto es suficiente probar

$$\phi(U_{i,j}) = [\langle i,j \rangle] \cap \phi(X)]$$

para $i < \omega$, y $j < k_i$. Esto sigue inmediatamente de la definición.

CONCLUSIONES

Al culminar este trabajo podemos concluir que:

Todo espacio con cubrimiento de dimensión cero, es cero dimensional.

Todo espacio ultramétrico tiene dimensión cero

Los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ con la métrica usual, tienen cubrimiento de dimensión cero.

El conjunto de los números racionales puede ser representado como fracciones continuadas y toda fracción continuada finita es un número racional, el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es homeomórfico a el espacio de Baire $\mathbb{B}$.

Cada espacio métrico separable, cero-dimensional es homeomórfico a algún subconjunto de los números irracionales.

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDROFF, P., y URYSOHN, P (1928). Über nulldimensionale Punktmegen. Math Annalen. págs 89-106.

BACHMAN, G. (1964). Introduction to p-adic numbers and valuation theory. Academic Press, New York.

BAIRE, R (1909). Sur la représentation des functions discontinues (deuxiéme partie). Acta Math. 32. Págs 97- 176

FELLER, W., y TORNIER, E (1933). Mass- und Inhaltstheorie des Baireschen Nullraumes. Math Annalen 1. págs 65 – 187.

IRIBARREN, I. (1987). TOPOLOGÍA DE ESPACIOS METRICOS . Editorial Limusa, S.A. México, D.F.

KULESZA, J (1990). An example in the dimension theory of metrizable spaces. Topology and Appl. no. 2-3. págs109 -120.

MOORE, T. (1964). Elementary General Topology. Estados Unidos.

MUNKRES, J.(2002). TOPOLOGíA. España.

OSTASZEWSKI, A (1990).A note on Prabir Roy's space.Topology and Appl. 35. no. 2-3. págs 95-107

OSTROWISKI, A (1918). Über einige lösungen der funktionalgleichung $\emptyset(x).\emptyset(y) = \emptyset(x.y)$. Acta Math 41. págs 271- 284

ROY, P (1968) Non equality of dimension for metrics spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134. págs117-132.

SIERPINSKI, W. (1921). Sur les ensembles connexes et non connexes. Fund.Math.2. págs 81-95

SIMMONS, G.F. (1963). Introduction to Topology and Modern Analysis. Japón.

STEEN, L., y SEEBACH, J. (1978). Counter examples in Topology. New York