UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE PANAMÁ OESTE

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS

ESQUEMAS DE DEMOSTRACIÓN UTILIZADOS AL HACER DEMOSTRACIONES FORMALES POR ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DEL CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE PANAMÁ OESTE

ELABORADO POR:
NELSON MENDOZA MARTÍNEZ

PANAMÁ OESTE, REPÚBLICA DE PANAMÁ

OCTUBRE, 2019

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE PANAMÁ OESTE

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS

ESQUEMAS DE DEMOSTRACIÓN UTILIZADOS AL HACER DEMOSTRACIONES FORMALES POR ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DEL CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO DE PANAMÁ OESTE

ELABORADO POR:
Nelson Mendoza Martínez
4-701-537
Opción al Trabajo de Graduación sometido a consideración para optar por el título de Magister en Matemática Educativa.

PANAMÁ OESTE, REPÚBLICA DE PANAMÁ

OCTUBRE, 2019

ÍNDICE

Página

AGRADECIMIENTO

A Dios que nos da las fuerzas y sabiduría para cada día ser mejor.

A mis padres Basilio Mendoza y Lucía Martínez, por su acompañamiento desde el momento que inicié el programa de maestría hasta su culminación.

A la Doctora. María Corrales por su dedicación, actitud científica y oportuna asesoría durante el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los profesores del Centro Regional Universitario de Coclé, Dr. Bernardo Lombardo, que dieron su aporte con la validación del instrumento de investigación, ellos fueron los Magister Ceferino Moreno, Olga Barahona, Nivia de Him, Ricauter Tuñón y Boris Ortega.

A la Magister Zoila Rodríguez, por su apoyo y motivación para llevar a cabo esta investigación.

ÍNDICE DE CUADROS

Página

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

RESUMEN EJECUTIVO

El trabajo que se presenta, pretende identificar los esquemas de razonamiento utilizados por los estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste al realizar demostraciones y su grado de conocimiento de los métodos de demostración más utilizados. Para ello se aplicó una encuesta que contenía 15 reactivos, los primeros 10 son de opciones múltiples, que abarca aspectos generales y los otros 5 son más específicos al contenido referente a demostraciones, métodos de demostración; demostraciones a ordenar y una parte para desarrollar demostraciones; cuyo objetivo era estudiar los esquemas de demostración que seguían los estudiantes y las dificultades que tienen para llevar a cabo una demostración matemática. Los resultados muestran en un alto porcentaje, que los estudiantes han logrado adquirir los conceptos y definiciones referentes a los métodos de demostración, pero no han asimilado la aplicación de los métodos de demostración lo que constituye una dificultad para seguir estudios, ya que en Matemática siempre se debe verificar la validez de los teoremas y de las proposiciones con las que se trabaja.

Palabras claves: Demostración Matemática, esquemas de demostración, métodos de demostración, hipótesis, teoremas.

SUMMARY

The work that is presented pretends to identify the reasoning schemes used by the students of Bachelor's Degree in mathematics of the Centro Regional Universitario de Panamá Oeste to carry out demonstrations and their level of knowledge of the most used methods. The survey contained fifteen questions, the other ten of multiple options, which cover general aspects and the other five are more specific to the content related to demonstrations, demonstration methods, demonstrations to order and a part to develop demonstrations; whose objective was to study the demonstration schemes that the students followed and the difficulties they have to carry out a mathematical demonstration. The results show on a high percentage, that the students have managed to acquire the concepts and definitions referring to the demonstration methods, but they have not assimilated the application of the demonstration methods which constitutes a difficulty to continue studies, since in Mathematics always The validity of the theorems and the propositions with which we work must be verified.

Keywords: Mathematics demonstration, demonstration scheme, demonstration methods, hypotheses, theorems.

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una ciencia exacta, sin embargo, no se mantiene estática, la capacidad de generar continuamente conocimientos nuevos es intrínseco en ella; conocimientos que deben ser corroborados y contrastados para ser aceptados por la comunidad científica.

La necesidad de verificación y prueba forma parte de su esencia, esta característica de la matemática se ve reflejada como un aspecto fundamental que debe poseer un especialista en Matemática; ya que de acuerdo al Proyecto Alfa Tuning América Latina (donde participan 230 especialistas y responsables de la educación superior de los países latinoamericanos y europeos), al finalizar la licenciatura, los egresados deben tener la capacidad de construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones; y también poseer capacidades de abstracción, incluido el desarrollo lógico de teorías matemáticas y las relaciones entre ellas.

Consideramos que la verificación de los datos, la explicación de los procesos, que en muchos casos lleva al descubrimiento de nuevas leyes o principios matemáticos son funciones asociados a la demostración en la actividad matemática.

En este trabajo presentamos un estudio realizado con los estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste, donde se pretende determinar el nivel de argumentación que tienen los estudiantes al demostrar de manera formal y, paralelamente, estudiar los esquemas de demostración que siguen para probar la veracidad de un enunciado matemático.

El estudio surge debido a que las demostraciones formales de enunciados, que en Matemática constituyen una de las mayores tareas que se realizan, parecen ser una de las mayores dificultades con las que se encuentran los estudiantes desde los primeros años de la carrera en la Licenciatura en Matemática. Esto se observa, ya que, al ingresar a la Licenciatura en Matemática, los estudiantes pasan de desarrollar una matemática algorítmica o procedimental, al estudio y análisis de diferentes ramas de la Matemática que requieren mayor abstracción y la verificación o pruebas de los procesos realizados.

Este trabajo ha sido estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1: Aspectos Generales. Está conformado por el planteamiento del problema; la justificación de la investigación; la formulación de los objetivos generales y específicos, que orientan la misma, y finalmente se describen los alcances y las limitaciones del estudio.

Capítulo 2: Marco Referencial y/o teórico. Se presentan algunos resultados obtenidos en investigaciones realizadas sobre demostraciones matemáticas; una breve historia del proceso de demostración en matemática; la necesidad de interpretar lenguaje matemático para llevar a cabo una demostración matemática, definiciones de los términos más sobresalientes y la demostración matemática en la formación del matemático actual.

Capítulo 3: Marco Metodológico. Abordamos en este capítulo los aspectos relacionados al diseño de la investigación; las definiciones operacionales de las variables; se detalla la población y muestra; y se describe tanto el instrumento aplicado para recolectar la información como los procedimientos llevados a cabo.

Capítulo 4: Análisis e interpretación de resultados. Es en este capítulo donde se presenta la descripción y análisis de los resultados obtenidos. Se elaboraron tablas y gráficas a partir de la información recopilada al aplicar el instrumento de investigación, y se comentan los hallazgos.

Y finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones producto del estudio y la bibliografía de referencia.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se presentan los aspectos que generaron nuestra investigación.

1.1. Antecedentes del Problema

Una de las actividades que caracteriza a un matemático es justificar los procedimientos que ejecuta en sus análisis.

Desde la época antigua, el rigor en la argumentación matemática ha sido necesario y a medida que el conocimiento se desarrolla las exigencias son mayores. Sin embargo, observamos que este proceso de justificación y prueba no se adquiere con facilidad, aún en estudiantes de la Licenciatura en Matemática, que en un gran porcentaje confunden los procesos de validación de argumentación matemática.

Se han investigado desde distintas perspectivas esta problemática, tanto a nivel internacional como en nuestro país.

Así tenemos que, a nivel internacional, las dificultades con las demostraciones formales han sido estudiadas por diferentes investigadores, y entre los problemas que se han investigado podemos señalar: describir los procesos que siguen los estudiantes de Matemáticas (tanto de bachillerato como a nivel universitario) en el proceso de validación de una prueba, identificar los errores más comunes que se cometen, interpretar los procesos que se siguen en una demostración, etc.

Entre las investigaciones realizadas sobre el tema de estudio que aportan información sobre aspectos estudiados a nivel internacional, y que sirven de referencia a nuestro trabajo, tenemos:

Ibáñez y Ortega (1994), de la Universidad de Valladolid, España, realizan una investigación donde describen el proceso evolutivo de la demostración en matemática y hacen una reflexión sobre los esquemas de prueba.

Años después, Martínez (2001), de la Universidad de Granada (España), estudió la problemática para realizar demostraciones con 429 estudiantes de la Universidad de Córdoba, que iniciaban estudios en diferentes escuelas, encontrando factores comunes, tales como: la incapacidad para traducir el lenguaje matemático y que no identificaban las hipótesis de las conclusiones.

Ferreira (2008) en un trabajo presentado en el CLAME 21 (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa), presenta una mirada histórica sobre la demostración en matemática. El CLAME, se constituyó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que se celebró en Puerto Rico en agosto de 1996. En dicha reunión se acordó también, cambiar el nombre a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) y continuar la numeración de tal manera que se convocara a la Undécima Reunión en 1997.

Alvarado y González (2010), luego de una investigación realizada en la Universidad Juárez del Estado de Durango (México), con tres grupos de estudiantes de la Licenciatura de Matemática Aplicada, determinan que los estudiantes tienen deficiencias lógicas y poca lingüística, al enfrentar demostraciones matemáticas.

Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013), investigadores de la Universidad de Santander y Pedagógica Nacional de Colombia en conjunto con la Universidad de Valencia, España;

presentan un documento que constituye una recopilación de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones que se han realizado a nivel primario, medio, y universitario destacando líneas de investigación que se relacionan entre sí y concluyen en la necesidad de hacer más trabajos investigativos sobre el tema, ya que influye en la formación de los futuros educadores.

En nuestro país también se ha investigado sobre las dificultades que se tienen al realizar demostraciones, y esto se evidencia en investigaciones realizadas al respecto; entre las que se destacan:

González y Arias (1997). La problemática de las Demostraciones Matemáticas (tesis de licenciatura). Centro Regional Universitario de Coclé, Universidad de Panamá. Ellos presentan una recopilación de información nacional e internacional con el fin de analizar la problemática de las demostraciones en matemática y los errores que se cometen y determinar cuáles son los más comunes para no incidir en ellos y concluyen que en la problemática de las demostraciones inciden factores que abarcan los conocimientos del estudiante con respecto al tema de estudio, la metodología del docente, entre otros.

También, Molina (2007), en su trabajo "Los métodos de demostración y su aplicación en el desarrollo del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas en el Centro Regional Universitario de Coclé" (tesis de licenciatura), Universidad de Panamá, realiza una investigación en la cual las fuentes de información fueron los profesores que imparten clases en la Escuela de Matemática y los estudiantes de la Licenciatura de Matemática. Se llega a la conclusión que es necesario la elaboración de un documento que desarrolle los métodos de demostración y que ilustre la aplicación de los mismos en las distintas asignaturas de la Licenciatura de Matemática.

1.2. Planteamiento del problema

Nuestro estudio surge de observar las dificultades que presentan los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas al momento de realizar demostraciones en los diferentes cursos de la carrera, por lo cual buscamos describir esta problemática para luego proponer una solución.

Partimos de datos teóricos como son:

- Los tipos de demostración en Matemática, Solow (1993).
- Los aspectos históricos sobre demostración matemática, Ferreira (2008).
- Problemas que se enfrentan al hacer una demostración, Martínez (2001); Alvarado y González (2010).

La experiencia nos ha llevado a conjeturar que esta dificultad obedece a que los estudiantes de la Licenciatura en Matemática:

- No reconocen los métodos de demostración.
- Que hay dificultad para interpretar el lenguaje matemático.
- Que no se posee un conocimiento matemático claro de ciertos conceptos y relaciones fundamentales para desarrollar una demostración.

A partir de los datos teóricos y empíricos nos formulamos la pregunta: ¿cómo orientar a los estudiantes de Matemática a reconocer los procesos e interpretar enunciados matemáticos para llevar a cabo una demostración?

De igual forma para facilitar el análisis del problema nos planteamos las siguientes interrogantes:

¿Conocen los estudiantes de la Licenciatura los métodos de demostración?

Para llevar a cabo una demostración en Matemática, y según el enunciado, los estudiantes pueden recurrir a diferentes métodos de demostración como: contradicción, directo, por inducción, por contraejemplos, entre otros.

¿Posee el estudiante el lenguaje simbólico suficiente para hacer una demostración matemática?

Para llevar a cabo una demostración el estudiante debe ser capaz de manejar un lenguaje matemático de manera que pueda traducir el enunciado con simbología matemática; identificar la tesis de la hipótesis y determinar cuál es el método de demostración a aplicar.

¿Qué procesos siguen los estudiantes de Matemáticas y cómo interpretan los enunciados para llevar a cabo una demostración formal?

Se requiere identificar qué tipo de procesos siguen los estudiantes al realizar una demostración. De igual forma analizar si la interpretación que dan a los enunciados es correcta, o en qué se equivocan.

¿Hasta qué nivel de desarrollo llegan las demostraciones que esbozan los estudiantes?

Se puede presentar una demostración enumerando los pasos, en secuencia que parten de una hipótesis y así llegar a la veracidad de la conclusión; o redactando formalmente todo el proceso seguido hasta llegar a alcanzar la veracidad del enunciado. Deseamos estudiar si el estudiante culmina dicho proceso o, en caso contrario, en qué nivel se detiene su razonamiento.

La relevancia de la investigación se sustenta en el hecho de querer proponer recomendaciones basados en los resultados encontrados para hacer demostraciones matemáticas, partiendo de que existen diferentes métodos, pero estamos tratando de que los estudiantes de Matemática o cualquier otra persona que desee profundizar en este tema, desde sus conocimientos previos y de su razonamiento intuitivo, puedan llevar a cabo una demostración formal.

1.3. Justificación

Al ingresar a estudiar la Licenciatura en Matemática, los estudiantes pasan de una matemática algorítmica a una matemática más deductiva, donde todo debe ser probado o verificado antes de ser aceptado; es decir, al momento de aceptar algo (proposiciones, teoremas o corolarios) como verdadero se deben conocer sus fundamentos (definiciones y axiomas) y dar una justificación (o prueba) del mismo. Esta situación lleva a muchos estudiantes, que no se adaptan a tan brusco cambio, a desertar de esta carrera. Es por ello que consideramos necesario analizar cómo razonan e interpretan los enunciados matemáticos los estudiantes de la Licenciatura al plantear o desarrollar una demostración, y determinar cuáles son los esquema de demostración utilizados al realizar demostraciones, para que en función del análisis de los resultados se den recomendaciones que coadyuven en este tema.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

- Analizar los esquemas de demostración alcanzado por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática al llevar a cabo una demostración matemática formal.

1.4.2. Específicos

- Identificar los conocimientos sobre los métodos de demostración que tienen los estudiantes de la Licenciatura de Matemática.
- Reconocer los esquemas de demostración que poseen los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste al desarrollar una demostración matemática.
- Valorar la necesidad de realizar orientaciones para hacer demostraciones matemáticas formales.

1.5. Hipótesis General

Para nuestro trabajo de investigación nos basamos en el desarrollo de los objetivos propuestos.

1.6. Delimitación

El trabajo de investigación se desarrolló en el Centro Regional Universitario de Panamá Oeste; con los estudiantes desde primero hasta el cuarto año de la carrera de

Licenciatura en Matemática, que son la fuente de investigación. Este estudio tendrá una duración de dos semestres académicos.

1.7. Limitaciones

Para la realización de esta investigación una de las limitaciones que se presentaron fue el momento de aplicar la encuesta, ya que los grupos no fueron posibles contactarlos en un solo día.

CAPÍTULO 2: MARCO REFERENCIAL Y/O TEÓRICO

2.1. Conceptualización

Para el desarrollo de este trabajo es importante considerar las definiciones de algunos conceptos fundamentales relacionados con el estudio de las demostraciones.

Demostración Matemática: Es una cadena finita de proposiciones verdaderas, que se obtienen con ayuda de reglas de inferencias lógicas partiendo de una proposición cuya verdad es conocida.

Teorema: Son proposiciones que afirman una verdad demostrable. Se parte de una hipótesis (supuesto), afirma una racionalidad (tesis o conclusión) evidente por sí misma.

Demostración Matemática formal: Demostración que se desarrolla en un lenguaje simbólico, siguiendo una estricta derivabilidad axiomática.

Axioma: Proposición o enunciado cuya verdad es obvia que escapa a una demostración y se usan reglas o puntos de partida para construir una teoría.

Corolario: Es una verdad que se deriva como consecuencia de un teorema. Suelen ser pequeños teoremas que suelen derivarse de otros teoremas casi de forma inmediata, generalmente como casos particulares.

Lema: Es un teorema auxiliar que necesitamos durante el proceso de demostrar otro teorema que generalmente es más importante.

Teorema directo**:** Es un teorema escrito de la forma $H \Rightarrow T$, siendo H la hipótesis y T la tesis y se lee "si se verifica H, entonces se verificará T". Hay otros teoremas relacionados con el directo:

- Teorema contrario. Si no se verifica H, entonces no se verificará T (no H ⇒ no T).
- Teorema recíproco. Si se verifica T, entonces se verificará H (T ⇒H).
- Teorema contrarrecíproco. Si no se verifica T, entonces no se verificará H (no T ⇒no H).

Métodos de demostración: Son modelos o esquemas más generales que encontramos en los procesos deductivos que están fundamentados lógicamente en teoremas o reglas de inferencia ya establecidos.

Método directo o método de la hipótesis auxiliar o demostración condicional: Se basa en que: "Dado un conjunto de premisas en una teoría, si bajo el supuesto de que una proposición P es verdadera, y utilizando las premisas disponibles se puede hacer una demostración de que una proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera, entonces en esa teoría puede concluirse que es verdadero”.

Método del contrarrecíproco**:** El teorema del contrarrecíproco $(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow \sim Q \Longrightarrow \sim P$ da lugar a una variante del método directo, que se utiliza mucho en matemáticas y es conocido como método del contrarrecíproco. Este método puede resumirse así: Supongamos que se quiere demostrar que una proposición específica $P \Rightarrow Q$ es teorema, y la negación de Q nos ofrece más información para recurrir a conceptos previos y teoremas conocidos, entonces se procede a demostrar por el método contrarrecíproco $(\sim Q \Longrightarrow \sim P)$. Si se consigue este objetivo queda establecida la validez de $P \Longrightarrow Q$ al hacer sustitución por equivalencia lógica.

Método de demostración por contradicción o reducción al absurdo: El método de demostración por reducción al absurdo se fundamenta en la condición de no contradicción para una teoría, básicamente la estrategia consiste en suponer explícitamente la negación de la proposición a demostrar, a partir de esta hipótesis se trata de generar una contradicción, esto es: que la teoría con ese supuesto es inconsistente y, en consecuencia, tal hipótesis es falsa, o lo que es equivalente, que su negación es verdadera, quedando validada la proposición inicial.

Demostración por inducción: Consta de dos etapas. Si deseamos probar que una determinada propiedad P se cumple para todo número natural, entonces procedemos aplicando el siguiente esquema:

- Se demuestra que P(1) es cierta.
- Se prueba que si P(k) es cierta, entonces P(k+1) también lo es.
- En ese caso, la propiedad P(n) es válida para cualquier $n \in N$.

Método de demostración por contraejemplo**:** Consiste en obtener un ejemplo en el que no se cumple la condición que se quiere probar, demostrando entonces que, en general, la propiedad en cuestión es falsa.

Demostración constructiva o por construcción: Es la construcción de un ejemplo concreto con una propiedad específica para mostrar que algo que posea esa propiedad existe.

Método de casos. (Silogismo disyuntivo): La regla de inferencia de ese nombre da lugar a este método de demostración, casi de forzosa utilización cuando la hipótesis o una de las hipótesis es una disyunción de dos o más proposiciones, en cuyo caso procedemos así:

1. Suponemos la hipótesis dada correspondiente a una disyunción (es decir, en base a dos premisas que se excluyen y que no pueden ser ciertas al mismo tiempo, e incluso tampoco pueden ser falsas simultáneamente). Esto es, que dada dos premisas obligatoriamente una debe ser falsa y la otra verdadera.
2. A partir de cada una de las proposiciones que integran la disyunción se obtiene una conclusión parcial por el método directo.
3. Se concluye finalmente la disyunción de las conclusiones parciales.

2.1. Definiciones Operacionales

El conjunto de procedimientos que describe las actividades de nuestro trabajo de investigación son las siguientes:

- Identifica las características de cada uno de los métodos de demostración.
- Separa correctamente la hipótesis de la conclusión en un teorema.
- Desarrolla demostraciones matemáticas siguiendo los pasos lógicos de algún método de demostración.

La evolución del conocimiento matemático nos muestra, desde tiempos antiguos, la necesidad de contrastación lógica de los resultados obtenidos; por ello presentamos una breve evolución histórica de este proceso.

2.2. Historia del proceso de demostración en matemática

El origen del conocimiento matemático, de acuerdo a los documentos escritos que han llegado hasta nosotros, se dio en las civilizaciones babilónicas y egipcias, sin embargo, en su totalidad los historiadores concuerdan que el origen de la demostración matemática tuvo lugar en la Antigua Grecia.

Se considera que los griegos crearon el método deductivo o axiomático, y que según Morales (2008) lo recoge así: “En el siglo IV a.C. surgiendo de la praxis de la academia platónica, se tiene la monumental obra de Aristóteles, discípulo de Platón, que consiste en la primera construcción de los fundamentos de la Lógica como la ciencia formal del razonamiento.” (p. 10).

Como vemos Aristóteles, fue uno de los primeros matemáticos en trabajar de forma deductiva, y así encontramos a otros filósofos que se agruparon en escuelas en los siglos IV y III a. C., que dan forma al lenguaje de la lógica matemática.

Otro de los aportes brindados por Aristóteles a dar forma a la Matemática formal son:

- Principio de no contradicción: una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa.

- Principio del tercero excluido: toda proposición es verdadera o es falsa a la vez.

Estos principios son parte del fundamento lógico de los métodos de demostración indirectos, es decir que "la teoría de la demostración o razonamiento científico aparece en la obra aristotélica intitulada Segundos Analíticos donde se desarrolla el método axiomático o método deductivo, afirmando que es el método sobre todo adecuado para la matemática. En los Primeros Analíticos Aristóteles realiza el análisis formal del razonamiento o silogismo." (Garrido, M. p.502).

En este contexto, "los filósofos Megáricos y Estoicos entre los que sobresale Crisipo de Solos, definen por primera vez los elementos de la lógica proposicional como los conectivos lógicos y formas de razonamientos que tienen la forma de argumentos como el Modus Ponens, asentados como los "indemostrables". (Morales, 2008, p. 12).

Siguiendo con los ejemplos de dar a la Matemática un carácter formal, nos dicen Sánchez y Gil (2015), citando a Bombal (2010), que se le atribuye a Tales de Mileto las primeras demostraciones matemáticas y que se evidencia cuando demostró como un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales, que los ángulos de un triángulo suman dos rectos y que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

Pitágoras, en el siglo VI a. C. trabajó con los átomos individuales e indivisibles, lo que sugirió la idea de que todas las magnitudes eran conmensurables, y que por lo tanto existía una medida común para ambas; esta conceptualización llevó a la Escuela Pitagórica a visualizar algunos resultados geométricos, convirtiéndolos en aritméticos, y desarrollar numerosos resultados de Geometría Plana.

Sobre las distintas épocas, expuestas arriba, Sánchez y Gil (1999), explican lo siguiente: “El punto de inflexión se desarrolló en el siglo V a. C. cuando se descubrieron magnitudes inconmensurables como la diagonal y el lado de un pentágono regular, y la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Estos hechos llevaron a la primera crisis en los fundamentos de las Matemáticas; ya que los matemáticos de la época se dieron cuenta de que no siempre se podía trabajar aritméticamente en Geometría y que los objetos matemáticos no son tan simples como podían parecer. Estos hechos supusieron el verdadero origen de la demostración. Se puede resaltar el estudio de estos problemas, tanto en el marco aritmético como en el geométrico, unido a las paradojas del infinito de Zenón, condujo a la creación del método axiomático deductivo en la segunda mitad del siglo V a. C.” (p.165).

Como se puede constatar en esta cita y que ya habíamos expuesto anteriormente los primeros indicios de los conceptos matemáticos en la explicación de situaciones cuantitativas como la creación del método axiomático deductivo (s V a.C.) se da en el marco de la aritmética y de la geometría.

En este contexto de importantes hallazgos, tenemos a una figura importante como lo es Euclides, quien aportó ejemplos claros al afirmar que se puede partir de axiomas para tener nuevos resultados, a partir de la utilización de la Lógica Deductiva. Así lo expone Sánchez y Gil (2015): “En Los Elementos de Euclides, encontramos uno de los ejemplos más claros, ya que parte de una serie de verdades evidentes o axiomas (en este caso 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes) y utilizando las leyes de la Lógica deductiva se van construyendo nuevos resultados. Este sigue siendo el método utilizado actualmente, con la diferencia de que hemos variado las condiciones iniciales. Los métodos utilizados por Euclides en su obra fueron el germen de la nueva Matemática. Sólo Hilbert, tras más de 2000 años, fue capaz de percibir la omisión (no de errores) de la justificación de ciertos resultados en su método." (Sánchez y Gil, p. 165)

Luego, durante el Imperio Bizantino y la influencia de los árabes, que llevaron los conocimientos griegos a toda Europa. A la cultura árabe se les atribuye haber enriquecido algunos procesos aritméticos y algebraicos. Por ejemplo, resolvieron la ecuación de segundo grado con técnicas geométricas.

Durante 18 siglos las matemáticas griegas permanecieron intactas, hasta que el Siglo XI, se dieron intentos de solucionar problemas relacionados a situaciones reales (estudios de movimientos, problemas geográficos, militares, etc.), dejando de considerar posibles obstáculos lógicos que podían producirse con el uso de conceptos relacionados con el infinito y dando prioridad a la generación de resultados. Estas ideas siguieron su curso en el Renacimiento con los estudios de los matemáticos Kepler y Cavalieri, quienes propusieron técnicas de los indivisibles para calcular volúmenes. Ellos tenían plena consciencia de que sus procedimientos les hacían falta rigor, sin embargo, lograron sustentar sus métodos a través de los extraordinarios resultados que obtenían.

Es importante señalar que, en esta misma época, el desarrollo simbólico que se produjo le permitió a la escuela italiana obtener fórmulas de resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado mediante radicales. Este logro se convirtió, entonces, en uno de los principales hilos conductores del posterior desarrollo del Álgebra.

Posteriormente, (siglo XVII) surgió el estudio de la relación entre los problemas de la tangente a una curva y el área encerrada bajo una curva. Esto provocó la introducción de nuevos métodos que propiciaron la invención del Cálculo. Los registros históricos de las matemáticas atañen los inicios del cambio de forma de pensar a Descartes y Fermat, quienes “al transformar los métodos geométricos de expresar magnitud como suma de indivisibles en técnicas aritméticas de sumación de series infinitas, sientan las bases de la Geometría Analítica” (Sánchez y Gil, p. 166). En el transcurso de este proceso de aritmetización se creó un ente abstracto fundamental llamado “infinitésimo” que no es más que fraccionar un todo en multiplicidad de fragmentos que lo hacen infinito. Estas técnicas de manipulación a partir del infinitésimo finalizaron con la invención del Cálculo llevada a cabo por Newton y Leibniz.

Sobre la invención del cálculo, Sánchez y Gil (2001), en su estudio resalta que: “La importancia de la invención del Cálculo, tanto en las Matemáticas, como en su aplicación a situaciones reales, era sin ningún lugar a dudas espectacular, pero esta espectacularidad contrastaba con la debilidad de los fundamentos lógicos en los que se sustentaba. Esta cuestión fue objeto de preocupación por parte de algunos matemáticos de la época, entre los que se encontraba el propio Leibniz, aunque en absoluto se consideraba una cuestión primordial.” (Sánchez y Gil, p. 166).

Se puede ver claramente que todo hallazgo, matemático no pude dar cabida a dudas, dado que los resultados deben ser demostrables.

Entre los muchos aportes de Leibniz al Cálculo, se destaca el orden de sus trabajos que reducen las discusiones lógicas a una forma sistemática, donde introdujo algunos símbolos que llevan a una especie de Algebra Lógica. (Boyer, p. 298)

En el recorrido histórico (siglo XVIII) de los fundamentos de las matemáticas**,** aparece Leonhard Euler, quien realizó aportaciones muy diversas en campos como la aritmética, la física, la astronomía o la geografía. Gracias a su trabajo, hoy en días las cuestiones matemáticas y físicas se representan en términos aritméticos. Legó las fórmulas, los polinomios, las constantes o las líneas de Euler y las integrales euclidianas.

A lo expuesto, se suman los métodos que dejaron de lado, en gran medida, el rigor. Al respecto, Sánchez y Gil, afirman que Euler "considera una demostración, más que una verdad matemática incontestable, como una predicción con una alta fiabilidad, corroborada con un número suficiente de casos particulares." (Sánchez y Gill p. 166)". De acuerdo con estos autores, la idea esbozada, al no ser completamente compartida por la comunidad matemática, provocó serias disputas relacionadas con la veracidad de ciertos resultados, originando multiplicidad de contraejemplos sobre los resultados que iban apareciendo. De esta manera se produjo mucha inseguridad global. En el marco de esta situación, es oportuno presentar un ejemplo citado por Boyer relativo a los logaritmos de números negativos. Puesto que mientras Leibniz sostenía que eran imaginarios basándose en trabajos de series divergentes, Johann Bernoulli defendía que:

$$(-\boldsymbol{n}) = \mathbf{log}(\boldsymbol{n}), \text{ ya que } \mathbf{2\,log}(-\boldsymbol{n}) = \mathbf{log}(-\boldsymbol{n})^{\mathbf{2}} = \mathbf{log}\,\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}} = \mathbf{2\,log}\,\boldsymbol{n}$$

Las irregularidades lógicas que producía el uso de infinitésimos, produjo la aparición de grandes detractores, como Berkeley, quien, según enuncia Sánchez y Gil “acusó a los seguidores de Newton y Leibniz de utilizar métodos que no comprendían, basados en inconsistencias lógicas y en conceptos ambiguos.” (Sánchez y Gil, p. 166). Berkeley adujo que algunos de los resultados a los que llegan pueden ser correctos como consecuencia de compensación de errores. Esta idea sería repetida por matemáticos como Lagrange o Maclaurin que buscaron con posterioridad una justificación a la fundamentación del Cálculo.

El conocimiento matemático continúa desarrollándose pues, en los inicios del siglo XIX, con la revisión de los fundamentos del Cálculo, por Cauchy, basando su desarrollo en la definición de infinitésimo variable, con límite cero. La obra de Cauchy la culmina Weiertrass definiendo formalmente el concepto de límite en términos de ε-δ, que permitiría la construcción del Cálculo en función de las propiedades del sistema de números reales.” (Sánchez y Gil, p. 167)

Es evidente, de acuerdo con lo sostenido en el planteamiento anterior, que a medida que avanzan las investigaciones de grandes figuras de las matemáticas, el concepto de rigor hace que vaya variando paulatinamente. En esta situación, los matemáticos de este siglo trataron de encontrar ya no sólo la fundamentación rigurosa del Cálculo, sino de toda la Matemática.

Se comenzaron a encontrar relaciones entre resultados enmarcados en teorías distintas, lo que hizo que se relegara la importancia de la naturaleza de objeto, en favor de las relaciones con otros objetos y que de este modo aparecieran las estructuras algebraicas básicas. El nacimiento de éstas y otras nuevas teorías no hacía más que aumentar la inestabilidad de la comunidad matemática porque nadie garantizaba que los nuevos resultados que se iban generando estuvieran sustentados en unos cimientos estables desde el punto de vista lógico. Había que aclarar las reglas del juego para terminar con las contradicciones y para ello se volvió a recurrir al método axiomático griego.

Durante un tiempo se pensó que la Lógica y la Teoría de Conjuntos podían ser esos cimientos estables, pero las paradojas que surgieron en esta teoría hicieron que también tuviera que axiomatizarse. Esto llevó a Hilbert a proponer fundamentar la Matemática con métodos finitistas. El primer trabajo de Hilbert sobre funciones invariantes le llevó en 1888 a la demostración en su famoso teorema de finitud. Años más tarde Hilbert se dio cuenta de que era necesario seguir un camino completamente diferente. Como resultado, demostró el teorema fundamental de Hilbert que consistió en mostrar la existencia de un conjunto finito de generadores, para las invariantes cuánticas en cualquier número de variables, pero de forma abstracta. Demostró la existencia de dicho conjunto, pero no de forma algorítmica sino mediante un teorema de existencia.

Hilbert propuso utilizar la lógica simbólica para crear un lenguaje artificial, siendo muy cuidadoso al establecer sus reglas, de modo que no surgieran contradicciones. De hecho, Álvarez, Freyre y Rivera (2002) señalan que: "…se crean la lógica simbólica, la escuela formal, la lógica booleana, el cálculo proposicional, la inducción matemática, el cálculo de secuentes. Personajes muy notables de esta etapa son: Peano, Hilbert, Frege, Boole, de Morgan, Gentzen, Russell, Gödel y Whitehead. A Rusell y Gödel se deben los planteamientos de las limitantes de la lógica y de la ciencia en general". Es notorio que, en ningún momento**,** se pensó que la forma de trabajar en Matemáticas fuera de este modo, sino que, si fuera posible esta teoría, se podría utilizar para ver cuál es el verdadero potencial de las Matemáticas y hasta dónde podría llegar.

Los planteamientos de Hilbert cayeron cuando Gödel demostró (1931) que la idea de Hilbert fallaba incluso si se hubiera centrado únicamente en la Aritmética elemental consistente en los números naturales con las operaciones de la adición y el producto.

Los teoremas de incompletitud de Gödel son dos célebres teoremas de lógica matemática demostrados por Kurt Gödel en 1931. Ambos están relacionados con la existencia de proposiciones indecidibles en ciertas teorías aritméticas.

El primer teorema de incompletitud afirma que, bajo ciertas condiciones, ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa. Es decir, si los axiomas de dicha teoría no se contradicen entre sí, entonces existen enunciados que no se pueden probar ni refutar a partir de ellos. En particular, la conclusión del teorema se aplica siempre que la teoría aritmética en cuestión sea recursiva, esto es, una teoría en la que el proceso de deducción se pueda llevar a cabo mediante un algoritmo.

La prueba del teorema es totalmente explícita y en ella se construye una fórmula, denotada habitualmente G en honor a Gödel, para la que, dada una demostración de la misma, se puede construir una refutación, y viceversa. Sin embargo, la interpretación natural de dicha sentencia en términos de números naturales es verdadera.

El segundo teorema de incompletitud es un caso particular del primero: afirma que una de las sentencias indecidibles de dicha teoría es aquella que «afirma» la consistencia de la misma. Es decir, que, si el sistema de axiomas en cuestión es consistente, no es posible demostrarlo mediante dichos axiomas.

En Inglaterra, 1936, Turing publicó un trabajo titulado "Números Computables: Una Aplicación al Entscheidungsproblem", en el que expone “es un modelo computacional que realiza una lectura/escritura de forma automática sobre una entrada y generando una salida, basándose su funcionamiento en una función de transición." (Sánchez y Gil, p.168). La publicación de Turing respondía a cuestionamientos propuestos por Hilbert en 1928, que pensaba en la existencia de un procedimiento mecánico que verificara si una demostración era o no era correcta. A pesar de que Hilbert nunca llegó a aclarar con precisión su idea de procedimiento mecánico, Turing entendió este procedimiento a través de lo que hoy denominamos una máquina de Turing.

El hallazgo de Turing se hace valedero gracias a que, concretamente, se puede ejecutar cualquier cómputo que pueda realizar un ser humano. De aquí surge la inquietud de: ¿qué le sería imposible a esta máquina? La respuesta de Turing se centró en la afirmación de que si una máquina de Turing (o un programa de ordenador) acabará por hallar su solución deseada y, por tanto, se detendrá, esta respuesta se cimente en la imposición de un límite de tiempo, pero en caso contrario no era tan sencillo. Es interesante, en todo esto, un corolario que indica que, de no haber una forma de determinar mediante cálculos si un programa va a detenerse o no, tampoco puede haberla mediante razonamientos lógicos. El mérito de Turing fue que demostró que ningún sistema axiomático formal puede ser completo.

El siguiente paso lo dio Gregory Chaitin quien en 2003, quien hizo importantes contribuciones a la teoría algorítmica de la información y a la metamatemática, en particular un teorema de la incompletitud similar en espíritu al teorema de incompletitud de Gödel. Chaitin definió la constante de Chaitin (Ω), un número real cuyos dígitos están equidistribuidos y expresa la probabilidad de detención de un programa escogido al azar.

Tiene numerosas propiedades matemáticas interesantes, incluyendo el hecho de ser definible pero no computable.

El trabajo de Chaitin en la teoría algorítmica de la información continuó con el trabajo anterior de Kolmogórov en varios aspectos y propone que los matemáticos deben abandonar la acción de probar todo, y ser más cuasi empíricos, pues los hechos matemáticos son ciertos de por si..

Al extrapolar las ideas expuestas a las Matemáticas, se puede constatar que los axiomas son finitos y bastante concisos, los resultados matemáticos abarcan un tamaño descomunal. Desde este enfoque, es evidente que el teorema de incompletitud de Gödel no es ni misterioso ni complicado, sino más bien natural.

Los aportes de grandes figuras del campo de las matemáticas a lo largo de la historia de la humanidad, han hecho de la lógica Matemática un hecho de gran interés, al darle el carácter formal y que ha ayudado a la evolución tecnología de nuestro día.

2.3. La necesidad de interpretar lenguaje matemático para llevar a cabo una demostración matemática

Los retos que llevan a realizar diferentes demostraciones, como la resolución de algunos problemas, ha sido, y de hecho siguen siendo, la mayor fuente de inspiración para la obtención de nuevos conocimientos y técnicas matemáticas, sin embargo, llevar a cabo demostraciones no ha sido un proceso fácil para los estudiosos de esta ciencia a pesar de ser un proceso validativo que se utiliza para justificar un procedimiento matemático.

Alvarado y González (2009), en su trabajo con estudiantes universitarios que ingresan a la Licenciatura de Matemática en la Universidad Juárez-México, en relación con la demostración formal, determinó que algunas fuentes de las dificultades que tienen los estudiantes para realizar demostraciones son: la falta de habilidad para formular postulados, el poco entendimiento intuitivo de los conceptos involucrados en la demostración, las imágenes inadecuadas que poseen de los conceptos y la ausencia de entrenamiento para generar y usar sus propios ejemplos.

Señala García y Cuárez (2014), en trabajo realizado para analizar el lenguaje matemático simbólico con estudiantes de cuarto año de ciencias para la Universidad de Carabobo-Venezuela, señalan que cuando hablamos de lenguaje matemático nos estamos refiriendo a dos cuestiones distintas pero interrelacionadas, por una parte, nos referimos a la simbología utilizada en matemática y por otra, nos referimos a la estructura y presentación de los contenidos matemáticos.

2.4. Interpretación de los esquemas de demostraciones

Como anteriormente señalamos, hacer una demostración matemática constituye una actividad en cierta forma traumática para la gran mayoría de los estudiantes que cursan alguna asignatura de Matemática donde se requiera realizar demostraciones formales; por este motivo, se han realizado varios trabajos de investigación al respecto. Sin embargo, en los diversos intentos que se hacen para llevar una demostración se siguen procesos con la intención de aplicar alguno de los métodos de demostración estudiados anteriormente.

Uno de los investigadores sobre las respuestas que se obtienen al realizar demostraciones es Martínez (1999), quien, en su trabajo doctoral, hace referencia a la categorización de las respuestas que dan los estudiantes al realizar una demostración, clasificándolas en cinco niveles como son:

- La respuesta es muy deficiente (confusa, incoherente,...).
- Comprueba la proposición con ejemplos, sin errores significativos.
- Comprueba la proposición con ejemplos, afirmando además su cumplimiento en general.
- Justifica lógicamente la validez de la proposición, apoyándola en otros teoremas o proposiciones conocidas, de forma parcialmente correcta.
- Aporta una demostración sustancialmente correcta, que incluye una simbolización adecuada.

Así mismo, más adelante Martínez (1999) interpreta las respuestas utilizando esquemas personales, y los clasifica como: argumentación explicativa, prueba empírico-inductiva, prueba deductiva informal y demostración deductiva.

- Argumentación explicativa: Son respuestas que consisten en una mera comprobación de la proposición a demostrar, mediante ejemplos particulares. Para estas respuestas los procesos que da el sujeto proceden a explicarse a sí mismo, mediante ejemplos concretos, el significado de la proposición que se trata de demostrar. No hay verdadera intención validativa, y no se pretende afirmar el cumplimiento en general de la proposición, válido para todos los casos posibles. Sólo se trata de una intención explicativa, descriptiva.

- Prueba empírico-inductiva: Estas respuestas están basadas en la comprobación mediante ejemplos particulares, con intención de justificar el cumplimiento general de la proposición que se trata de demostrar.
- Prueba deductiva informal: Esta etapa está constituidas por demostraciones desarrolladas siguiendo criterios lógicos, pero con una lógica intuitiva, no simbólica, apoyándose en generalizaciones no contrastadas.
- Demostración deductiva: Las demostraciones en este nivel, siguen criterios lógicos formales, que son aplicados de acuerdo con esquemas simbólicos, atendiendo más a las reglas de transformación del lenguaje simbólico dentro del cual operan dichos términos que dan la significación concreta a los términos usados.

Cabe resaltar que este sería el nivel en que se esperaría se ubicaran los razonamientos seguidos por alumnos de la Licenciatura en Matemática ya que es aquí donde se evidencia que este alumno posee madurez de pensamiento, habilidad en el manejo de principios lógicos, capacidad de análisis y desarrollo de razonamiento deductivo; competencias fundamentales en un especialista en Matemática.

Existen otras clasificaciones sobre los esquemas de demostración que conllevan a que las personas pueden tener simultáneamente más de un tipo de esquema. Trabajos realizados por Harel y Sowder (1998), proponen esquemas de demostración cuyo centro es el convencimiento propio y la persuasión de quien se enfrenta a una situación determinada.

Ellas son:

Esquemas de demostración externos:

Este esquema se divide en:

- Autoritaria. El estudiante se convence (demuestra) solo porque lo vio en un libro e incluso lo que dijo un profesor o compañero el cual considere con más conocimiento.
- Rituales. El estudiante considera válido un cambio de enunciado-objeto (razonamiento) por la forma del mismo, sin que se reflexione o se repare el contenido (rigor de la escritura).
- Simbólicas. Se usan símbolos sin hacer referencia y dejando atrás las relaciones que tienen con el objeto en cuestión.

Esquemas de demostración empíricos.

Se presentan dos diferenciaciones en la ejemplificación los cuales son:

- Perceptivos. La ejemplificación con la seriación de los dibujos es común para este esquema de demostración.
- Inductivos. El estudiante no alcanza a generalizar, sino por el contrario a particularizar una situación.

Esquema de demostración analítico.

Para este esquema se reconocen dos tipos los de transformación y los axiomáticos.

- Transformación. Para este tipo de demostración se debe concurrir por estos momentos: Imágenes espaciales, transformación simbólica y construcción.

- Axiomático. Es una justificación que se deriva de resultados por consecuencias lógicas anteriores, considerados como válidos.

2.5. La Demostración Matemática en la formación del matemático actual

Consideramos que una de las ventajas que presentan las demostraciones matemáticas radica en evitar que la Matemática sea solamente algoritmos, evitando el aprendizaje mecánico de fórmulas y la aplicación de las mismas de forma rutinaria.

Utilizar las demostraciones como un tipo de problemas a resolver, lleva a los alumnos a comprender que se trata de procedimientos necesarios para la resolución de problemas y no vean al proceso de demostrar como algo innecesario.

Los distintos tipos de argumentaciones en Matemática permiten que se adquiera el dominio de formas de razonamiento que si bien pueden aplicarse inicialmente a un dominio formal, posteriormente les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas de cualquier origen.

Señala Crespo (2014) que: "la demostración en Matemática se relaciona con la racionalidad dominante en la sociedad y la cultura en la cual se desarrolla. Tener la habilidad para argumentar no debe restringirse a los contenidos matemáticos, sino que está marcado por una concepción epistemológica no solo de la comunidad científica, sino también por una concepción cultural que valora la fundamentación racional".

2.5.1. Perfil del Egresado de la Licenciatura de Matemática

Una vez analizada la evolución histórica de la Lógica de la Matemática, los diferentes métodos de demostración y la importancia de la interpretación del lenguaje matemático, comparamos ahora con el perfil que establece la Universidad de Panamá de los egresados de la Licenciatura de Matemática.

Según el programa de estudio de la Licenciatura de Matemática de la Universidad de Panamá se establece que el perfil del egresado es:

- Capaz de participar, sobre las bases de sus conocimientos matemáticos en la discusión y solución de los problemas nacionales.
- Apto para continuar estudios de Especialización, Maestría y Doctorado en áreas de la Matemática y otras áreas del conocimiento.
- Consiente de la importancia de la autoformación en Matemática y otras ciencias.
- Competente para aplicar, con fundamentación teórica, la matemática en otras ramas del saber.
- Diestro en el uso de herramientas tecnológica para el desarrollo de actividades académicas y de investigación en Matemática y en otras ciencias.

Como podemos observar, es importante que el egresado de la Licenciatura en Matemática tenga una sólida formación en la Lógica Matemática, para continuar estudios superiores y que también posea los conocimientos y habilidades que le permitan plantear y resolver distintas situaciones que se le presenten, no sólo de matemáticas, sino de áreas científicas y tecnológicas afines.

A nivel global, tenemos el Proyecto Alfa Tunig America Latina el cual ha propuesto 23 competencias específicas que deben poseer un licenciado en Matemática, dentro de las que destacamos tres que se relacionan con el perfil del egresado de la Licenciatura de Matemática en Panamá.

Tenemos entonces, que la segunda competencia específica, establecida por el Proyecto Tuning indica que un Licenciado en Matemática debe tener la: "Capacidad para construir y desarrollar argumentaciones lógicas con una identificación clara de hipótesis y conclusiones". Se busca que el egresado de la Licenciatura en Matemática, debe saber identificar las partes que forman un enunciado para validar su veracidad.

Las otras competencias que queremos resaltar del Proyecto Tuning América Latina son las competencias cuatro y dieciocho, que son expresadas de la siguiente manera:

> "Capacidad de abstracción, incluido el desarrollo lógico de teorías matemáticas y las relaciones entre ellas"; y

> "Capacidad para presentar los razonamientos matemáticos y sus conclusiones con claridad y precisión y de forma apropiada para la audiencia a la que van dirigidos, tanto oralmente como por escrito".

Como lo expresan estas competencias específicas, la capacidad de deducción y abstracción, a la par del desarrollo lógico de los razonamientos matemáticos son aptitudes que deben estar en todo egresado que realice estudios en Matemática, dichas capacidades le permitirán el dominio de formas de razonamiento que enriquecen su manera de razonar lógicamente, para dar solución a situaciones reales de distinta índole.

CAPÍTULO 3 MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la metodología utilizada en el desarrollo de esta investigación para analizar los conocimientos sobre demostración que tienen los estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Panamá del Centro Regional de Panamá Oeste.

3.1. Tipo de investigación

Esta es una investigación descriptiva, ya que se hace un estudio sobre las dificultades que presentan los estudiantes de la Licenciatura en Matemática para construir una demostración y así en base a los hallazgos sugerir recomendaciones que coadyuven al desarrollo de demostraciones matemáticas de manera formal.

Aplicaremos el método inductivo-analítico, pues los datos son registrados y luego analizados.

3.2. Definición operacional de términos y /o variables

Variables	Definición conceptual	Indicadores
Independiente: Demostraciones matemáticas formales	Demostración que se desarrolla en un lenguaje simbólico, siguiendo una estricta derivabilidad axiomática.	Define demostraciones matemáticas.
Dependientes: Teoremas.	Son proposiciones que afirman una verdad demostrable. Se parte de una hipótesis (supuesto), afirma una racionalidad (tesis o conclusión) evidente por sí misma.	Define teorema, hipótesis y tesis. Diferencia la hipótesis de la conclusión en un teorema. Ordena la estructura de los teoremas en hipótesis y conclusión.
Métodos de demostraciones	Son modelos o esquemas más generales que encontramos en los procesos deductivos que están fundamentados lógicamente en teoremas o reglas de inferencia ya establecidos.	Identifica los métodos de demostraciones más utilizados. Desarrolla demostraciones aplicando los métodos más conocidos.
Esquemas personales de demostración.	Consiste en todo aquello que constituye convencimiento y persuasión para esa persona.	Presenta argumentación explicativa. Demuestra con prueba empírico-inductiva. Aplica prueba deductiva formal. Realiza demostración deductiva.

3.3. Población y muestra

Se seleccionaron para la aplicación del instrumento a todos los estudiantes de la Universidad de Panamá de la Licenciatura de Matemática. El instrumento se diseñó para ser desarrollado en 90 minutos. En el anexo se incluyen algunos de los trabajos realizados por los estudiantes.

3.4. Técnicas e Instrumentos de Recolección y Análisis de Datos

3.4.1. Técnicas

Para la recolección de información para el estudio, aplicamos una encuesta.

3.4.2. Instrumentos

Planteamos una encuesta con 15 reactivos, los primeros 10 son de opciones múltiples, que abarca aspectos generales y los otros 5 son más específicos al contenido referente a demostraciones, métodos de demostración; demostraciones a ordenar y la última parte donde se pide desarrollar demostraciones.

Dicho instrumento se sometió al criterio de validación de expertos a cargo de tres profesores especialistas de matemática del Centro Regional Universitario de Coclé.

3.5. Procedimientos

Para nuestro trabajo, las variables no son manipuladas, tenemos una investigación descriptiva, en la cual se analizan los resultados obtenidos del instrumento para determinar el nivel de razonamiento matemático que alcanzan los estudiantes de la Licenciatura en Matemática en el desarrollo de demostraciones matemáticas de manera formal.

CAPÍTULO 4 RESULTADOS, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

4.1. Análisis de los resultados

Con el objetivo de identificar los niveles de razonamiento matemático alcanzado por los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas al llevar a cabo una demostración matemática formal, se aplicó una encuesta a estudiantes del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste.

Se tiene en la Cuadro 1 que el 56,7% de los estudiantes encuestados son de primer año de la licenciatura; el 13,3% de segundo; el 3,3% del tercer año y el 26,7% del cuarto año.

Cuadro 1. Estudiantes encuestados en el Centro Regional Universitario de Panamá Oeste por sexo según el nivel. Noviembre 2018.

Sexo-Nivel			Porcentajes
	Masculino	Femenino	
TOTAL	30		100,0
Primero	11	6	56,7
Segundo	2	2	13,3
Tercero	0	1	3,3
Cuarto	6	2	26,7

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

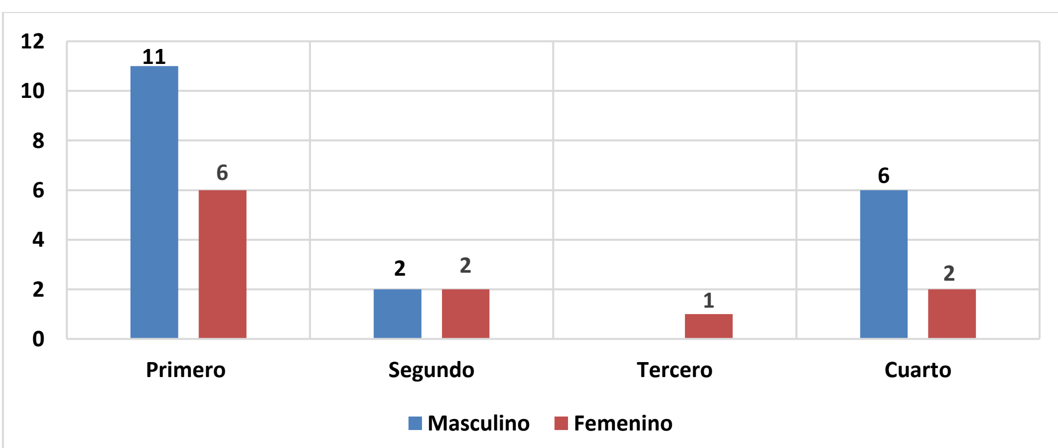


Figura 1. Estudiantes encuestados en el Centro Regional Universitario de Panamá Oeste por sexo según nivel. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Se preguntó a los estudiantes encuestados si reconocían los diferentes elementos en una demostración, se observa en el Cuadro 2 que el 83,3% de los estudiantes encuestados, reconocen el concepto de demostración frente a 16,7 % que no lo logra.

Cuadro 2. Identificación del concepto de Demostración por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Concepto de Demostración					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Teorema	4	1	0	0	16,7
Demostración	13	3	1	8	83,3
Tesis	0	0	0	0	0,0
Hipótesis	0	0	0	0	0,0

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes.

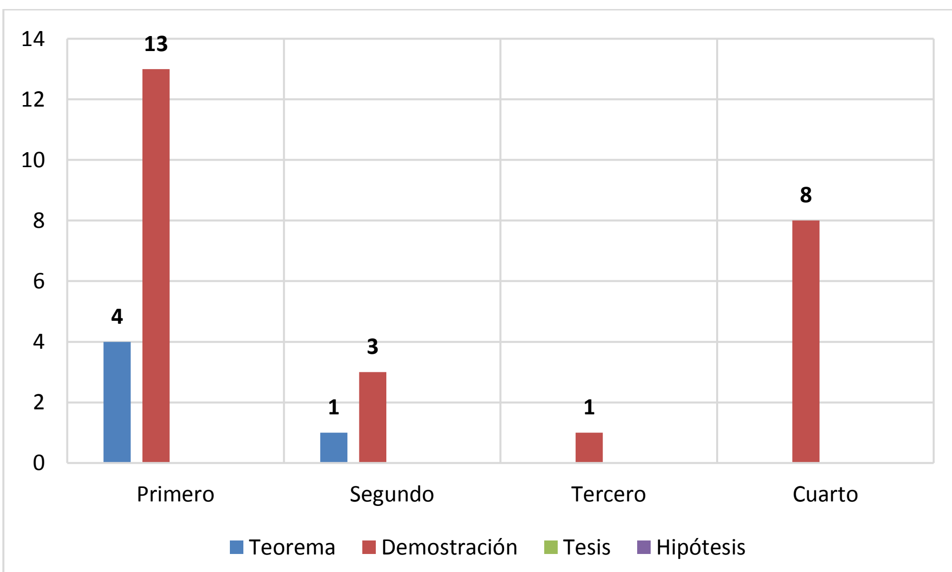


Figura 2. Reconocimiento del concepto de Demostración por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes.

A los estudiantes encuestados se le presentó la definición del concepto de Demostración por Casos para que lo identificaran de una lista de métodos de demostración, como se observa en el Cuadro 3, el 50,0% de los estudiantes encuestados logran identificar el concepto de Demostración por Casos frente a otro 50,0% que no logra dar con el concepto en estudio.

Cuadro 3. Identificación del concepto de Demostración por Casos por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Método Demostración Por Casos					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Directa	2				6,7
Por casos	6	3		6	50,0
Contraejemplo	5	1	1		23,3
Inversa	1				3,3
Reducción al Absurdo				2	6,7
Inducción	2				6,7
No Respondió	1				3,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

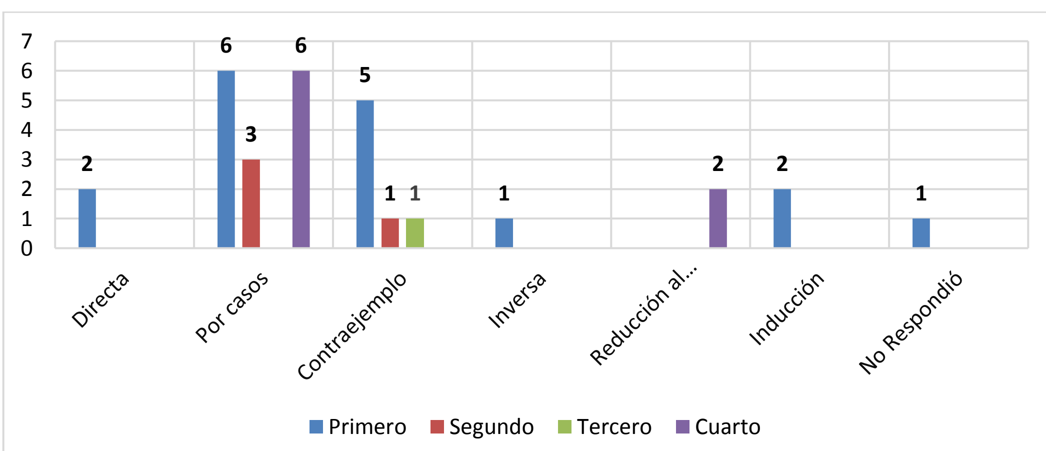


Figura 3. Identificación del concepto de Demostración por Casos por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Se tiene en la Cuadro 4 que al solicitarles a los estudiantes encuestados identificaran el concepto de Demostración por Contraejemplo dada la definición, se encontró que el 43,3% identificó el concepto; un 40% indicó que era reducción al absurdo; 3,3% indicó que era inversa, el 6,7% señalo que era inducción y otro 6,7% no respondió.

Cuadro 4. Identificación del concepto de Demostración por contraejemplo por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Demostración Por Contraejemplos					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Directa					0
Por casos					0
Contraejemplo	5	3		5	43,3
Inversa				1	3,3
Reducción al Absurdo	11	1			40,0
Inducción	1			1	6,7
No Respondió			1	1	6,7

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

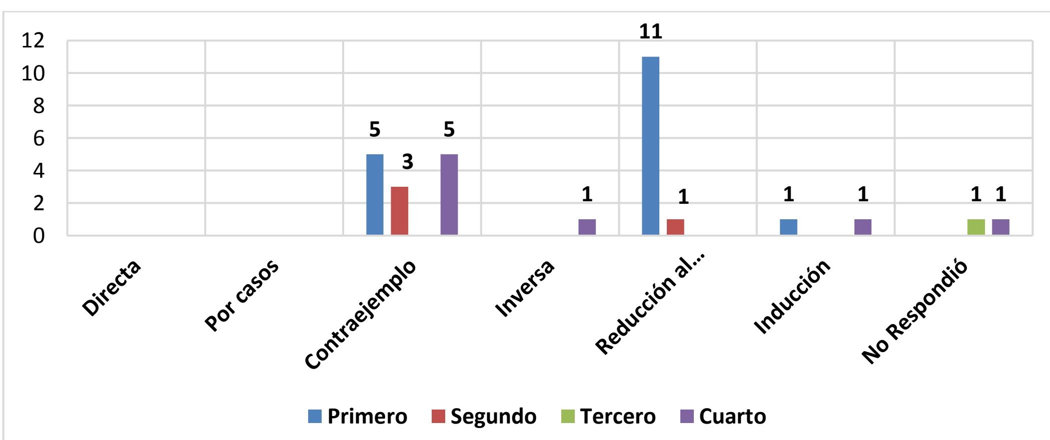


Figura 4. Identificación del concepto de Demostración por contraejemplo por estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Se les pidió a los estudiantes encuestados que identificaran el concepto de Demostración por Inducción, dado su definición, se observa en la Cuadro 5 que el 70% de los estudiantes reconocen el concepto de demostración por Inducción, un 30% de los estudiantes encuestado no lo identifica y el 13,3% lo confunde con el Método de demostración Directa.

Cuadro 5. Identificación del Método de Demostración por Inducción según estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Demostración Por Inducción					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Directa	3		1	3	23,3
Por casos					0,0
Contraejemplo					0,0
Inversa					0,0
Reducción al Absurdo	1			1	6,7
Inducción	14	4		3	70,0
No Respondió					0,0

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

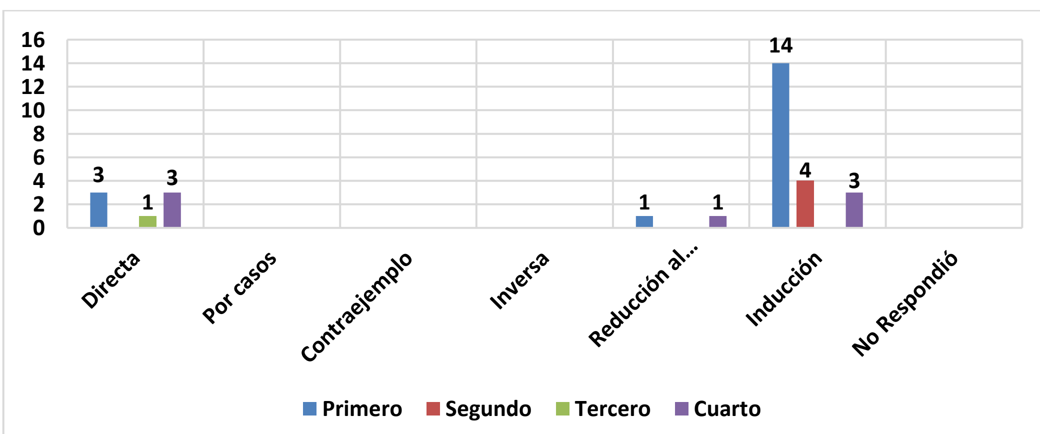


Figura 5. Concepto de Demostración por Inducción según los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Con el objetivo de determinar si los estudiantes encuestados identifican el concepto de Demostración por construcción, se muestra en el Cuadro 6 que un 86,7 % de los encuestados identifica el concepto de Demostración por construcción; el 10% indica que es una demostración por contraejemplo; el 36,7% dice que es inversa, y un 3,3% no respondió.

Cuadro 6**.** Concepto de Demostración por construcción por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Método Construcción					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Construcción	14	4	1	7	86,7
Por casos					0,0
Contraejemplo	2			1	10,0
Inversa					0,0
Reducción al Absurdo					0,0
Inducción					0,0
No Respondió	1				3,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

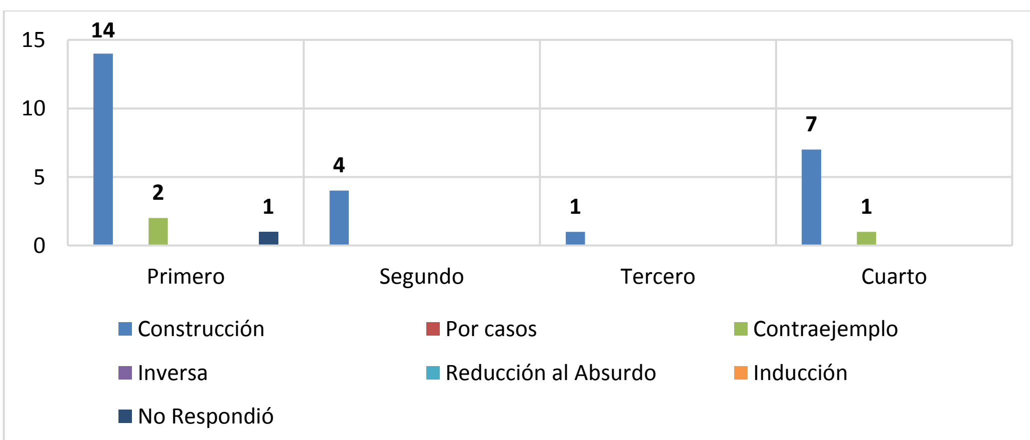


Figura 6. Concepto de Demostración por Construcción por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

A los estudiantes encuestados se les pidió seleccionar la contraposición a una situación dada, se obtuvo en el Cuadro 7 donde el 46,7% de los encuestados seleccionan el contrapositivo correcto, un 30,0% indica que un contrapositivo es: si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, entonces el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo con un ángulo recto y un 23,3% se inclina por proponer como contrapositivo: si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, entonces el cuadrilátero ABCD no es un paralelogramo con un ángulo recto.

Cuadro 7 Selección de principio contrapositivo por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Método Contrapositivo					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Rectángulo y paralelogramo	6	0	0	3	30,0
No rectángulo no paralelogramo	8	1	0	5	46,7
Rectángulo y no paralelogramo	3	3	1	0	23,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

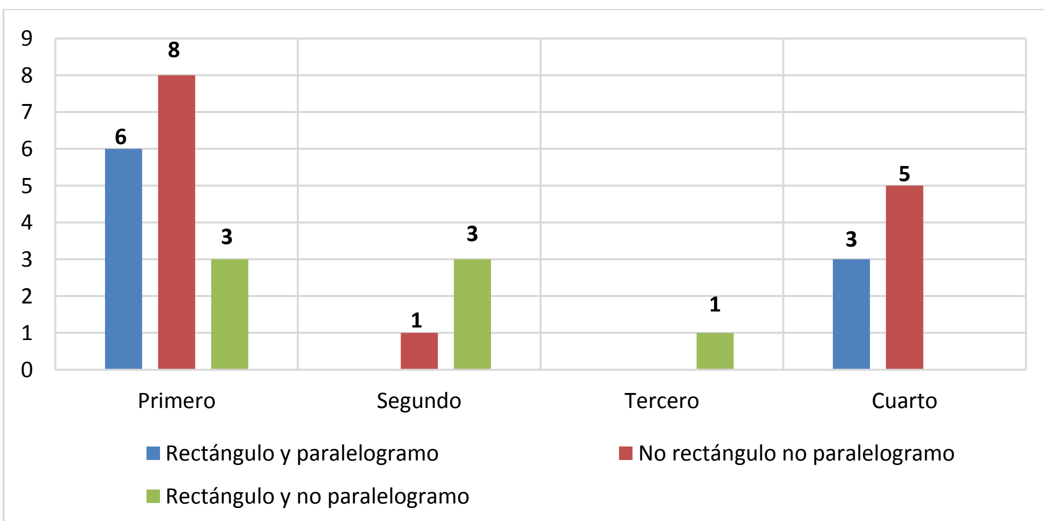


Figura 7. Selección de principio contrapositivo por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

En atención al reactivo 7, que buscaba que los estudiantes identificaran el concepto del Método de Demostración Directa dada la definición, se tiene que el 66,7% de los encuestados identifica el concepto de demostración directa; un 13,3% indica que es el concepto de demostración por casos; un 3,3% indica que es contraejemplo; un 13,3% señala que es por inducción y un 3,3% no respondió, como se muestra en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Identificación del concepto de Método Demostración Directa por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Demostración Directa					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Directa	14	4	1	1	66,7
Por casos	3			1	13,3
Contraejemplo	1				3,3
Inversa					0,0
Reducción al Absurdo					0,0
Inducción	1			3	13,3
No Respondió				1	3,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

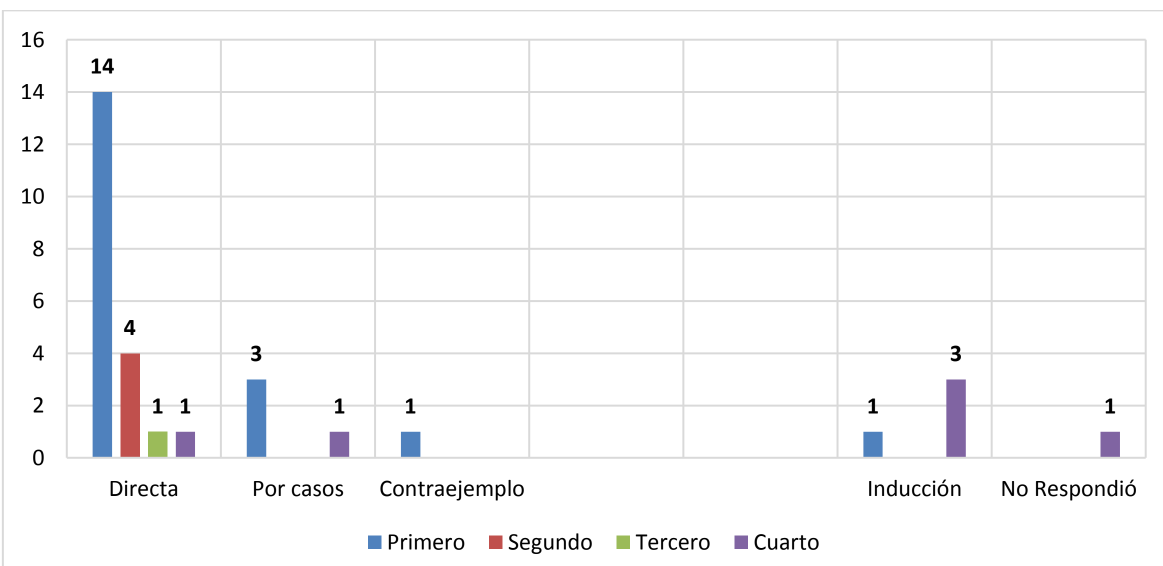


Figura 8. Identificación del concepto de Método Demostración Directa por parte de los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

En el reactivo 8, se solicitaba a los estudiantes encuestados discriminar los elementos de una demostración. En el Cuadro 9 se tiene que el 83,3% de los encuestados discrimina hipótesis de la tesis; el 13,3% no hace diferencia mientras que el 3,3% no identifica las hipótesis.

Cuadro 9. Discriminación de los elementos hipótesis y tesis en una demostración matemática por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Hipótesis vs Tesis					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL			30		100,0
a y b ambos positivos	0	0	1	0	3,3
a y b son dos números distintos	1	1	0	2	13,3
a y b son dos números distintos ambos positivos	16	3	0	6	83,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

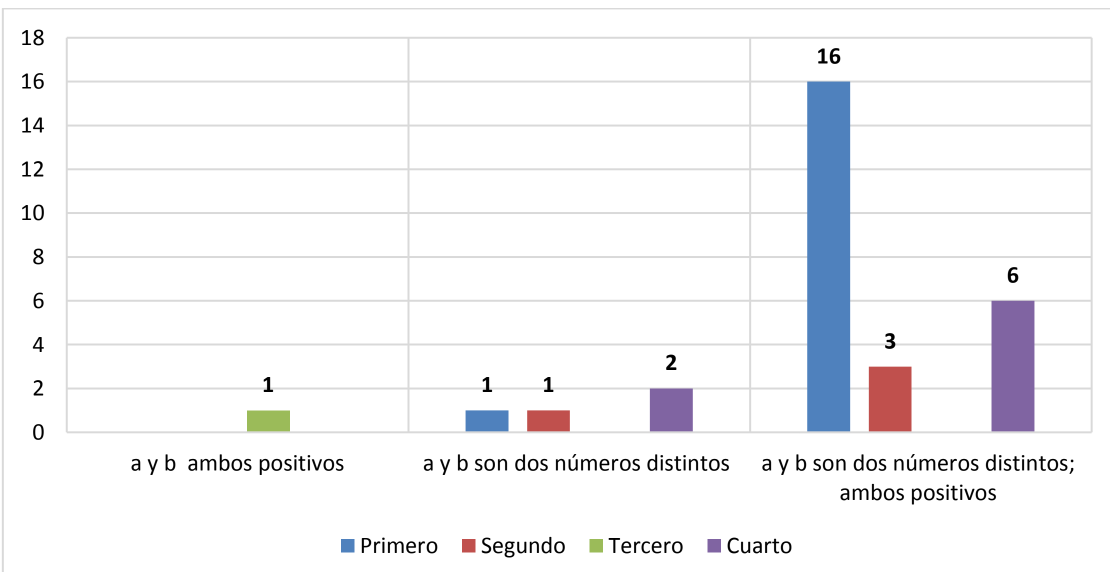


Figura 9. Clasificación de hipótesis y tesis por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Con el objetivo de determinar si los estudiantes encuestados dominan el Método de Contradicción, se incluye el reactivo 9 donde se presenta un enunciado simbólico a fin de que seleccione la opción que corresponde a la situación presentada, se observa en el Cuadro 10 que un 16,7% de los encuestados seleccionaron la respuesta correcta; el 60% señaló que "a+b<1 para llegar a que a < 0 y b < 0 y concluir la demostración"; un 13,3% dice que la respuesta es "a < 0 y b < 0 para llegar a que a + b < 1 y concluir la demostración", y el 10,0% no respondió.

Cuadro 10. Aplicación del método de contradicción por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Método Contradicción	Cantidad				Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
a < 0 ó b < 0 para llegar a que a + b < 1 y concluir la demostración	5	0	0	0	16,7
a+b<1 para llegar a que a < 0 y b < 0 y concluir la demostración	9	3	0	6	60,0
a < 0 y b < 0 para llegar a que a + b < 1 y concluir la demostración	1	0	1	2	13,3
No respondió	2	1	0	0	10,0

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

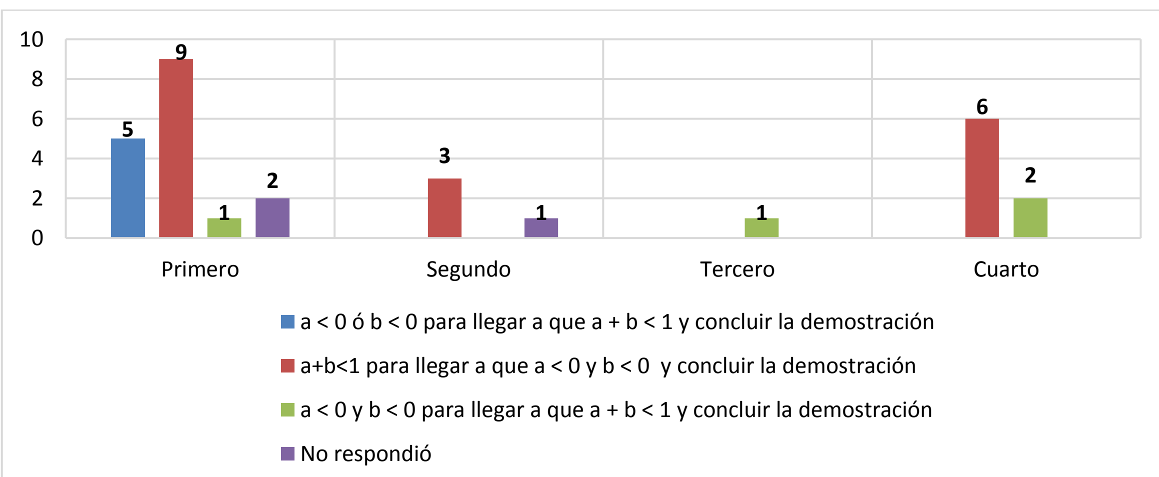


Figura 10. Aplicación del método de contradicción por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

En atención al reactivo 10, que buscaba que el estudiante identificara el concepto del Método de Reducción al Absurdo, dada la definición, se tiene que el 43,3% de los estudiantes identificó correctamente el método de demostración por reducción al absurdo; el 20,0% dijo que era inversa; un 13,3% señaló que es directa; el 10,0% respondió que era contraejemplo; un 6,7% expreso que era inducción y otro 6,7% no respondió, como se muestra en el Cuadro 11.

Cuadro 11. Aplicación del método de demostración por reducción al absurdo por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Método Reducción al Absurdo					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Directa	4				13,3
Por casos					0,0
Contraejemplo	1			2	10,0
Inversa	5			1	20,0
Reducción al Absurdo	4	4	1	4	43,3
Inducción	1			1	6,7
No Respondió	2				6,7

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

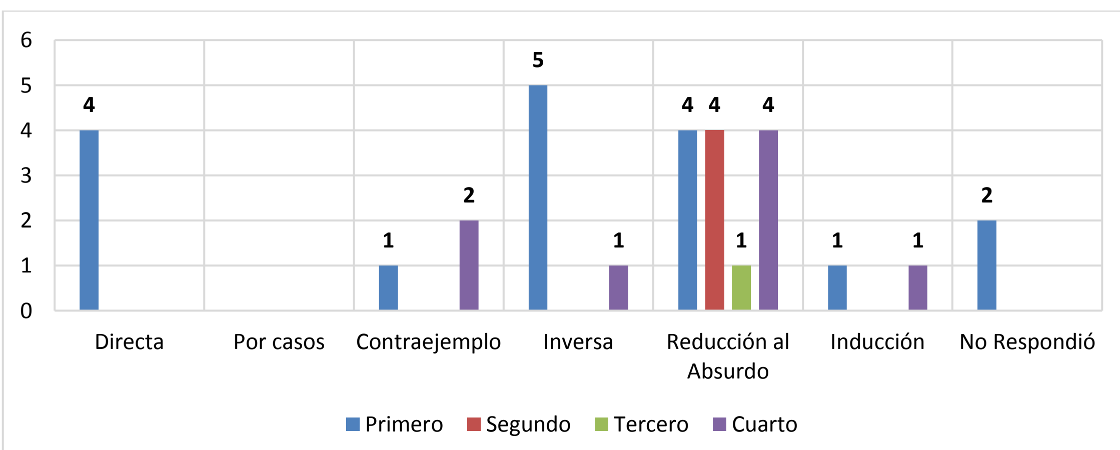


Figura 11. Aplicación del método de demostración por reducción al absurdo por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

En el reactivo 11 se presenta para ordenar los pasos de una demostración para: "El número $\sqrt{2}$ es irracional"; se obtiene el Cuadro 12 donde: 36,7% de los encuestados trataron de ordenar la demostración propuesta, un 50,0% no presentó nada y solo un 13,3% ordenaron la demostración de modo correcta.

Cuadro 12. Ordenamiento de los pasos en una demostración por contradicción por parte de los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste sobre un problema planteado. Noviembre 2018.

Ordenar demostración por contradicción					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL			30		100,0
Sí	4	0	0	0	13,3
Lo intenta	7	0	0	4	36,7
No	6	4	1	4	50,0

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

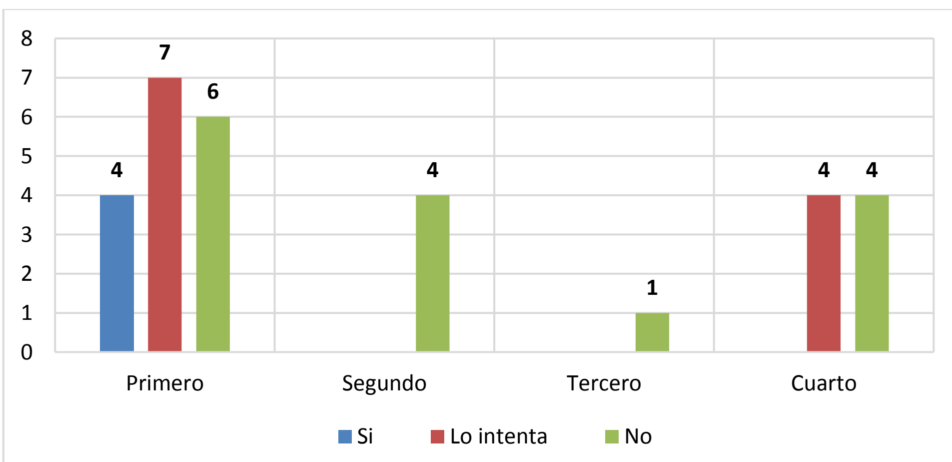


Figura 12**.** Ordenamiento de los pasos en una demostración por contradicción por parte de los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste sobre un problema planteado. Noviembre 2018.

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Con el objetivo de determinar el conocimiento de los estudiantes encuestados sobre demostración directa, en el reactivo 12 se les pide ordenar la demostración para: "Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en su interior (a,b). Si f(a) = 0 = f(b), entonces existe un número c en (a,b) tal que f '(c)= 0"; en el Cuadro 13 se observa que el 63,3% de los estudiantes no ordenaron la demostración, y un 36,7 intenta realizar alguna ordenación lógica.

Cuadro 13. Ordenamiento de los pasos para una demostración directa por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste sobre un problema planteado. Noviembre 2018.

Ordenar demostración directa					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Sí	0	0	0	0	0,0
Lo intenta	8	0	0	3	36,7
No	9	4	1	5	63,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

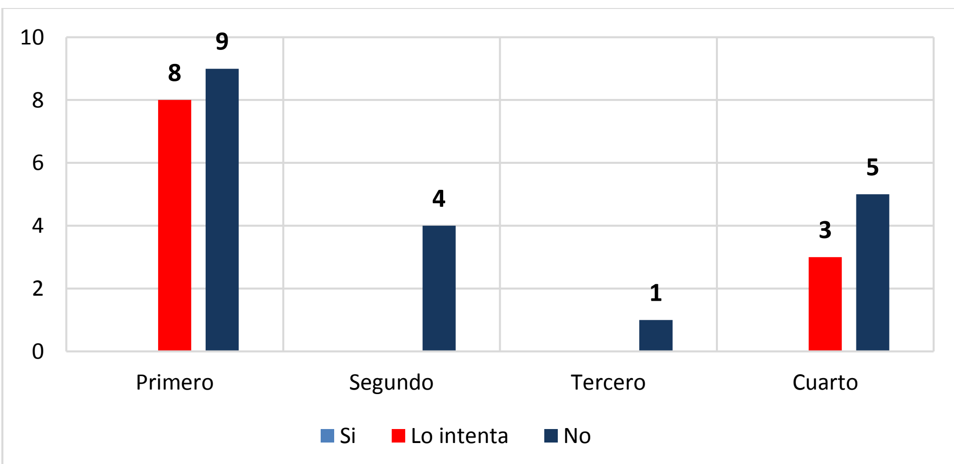


Figura 13. Ordenamiento de los pasos para una demostración directa por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste sobre un problema planteado. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada por Nelson Mendoza.

En el reactivo 13, se propone a los estudiantes que demuestre: “Si n^2 es impar, entonces n es impar”, y se obtiene el Cuadro 14 donde el 33,3% presenta una argumentación explicativa; el 6,7% desarrolla pruebas empírico-inductiva; un 3,3% logra demostrar deductivamente y el 56,7% de los encuestados deja el reactivo sin desarrollar.

Cuadro 14. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Plantear demostración 1					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Argumentación explicativa	8			2	33,3
Prueba empírico-inductiva	2				6,7
Prueba deductiva formal					0,0
Demostración deductiva	1				3,3
En blanco	7	3	1	6	56,7

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

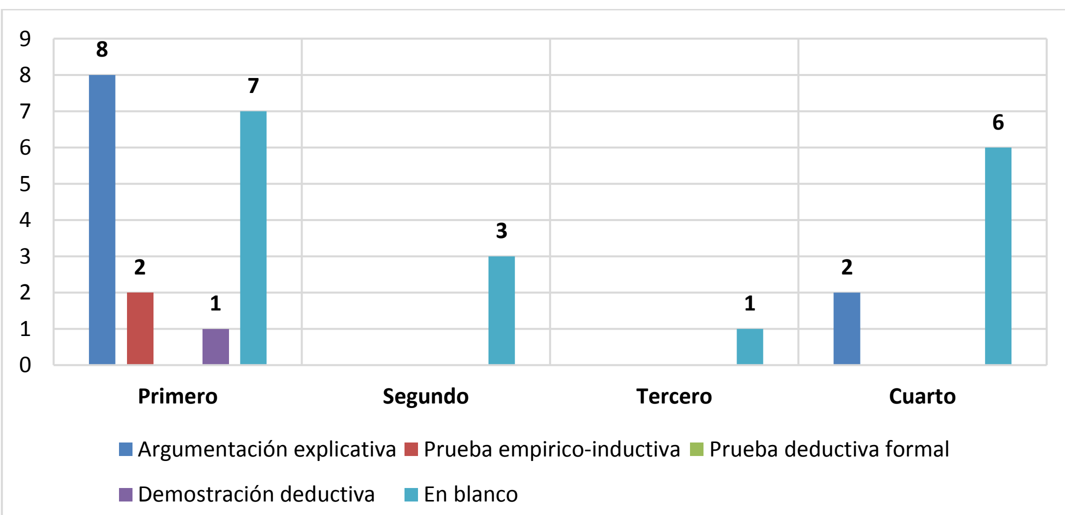


Figura 14. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

En nuestro instrumento, para el reactivo 14, se propone a los estudiantes que planteen una demostración para: “Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único”, obtenemos el Cuadro 15, donde el 3,3% de los encuestados proponen una argumentación explicativa; otro 3,3% intentan una prueba empírico-inductiva; un 3,3% desarrolla una demostración deductiva y el 90% deja el reactivo en blanco.

Cuadro 15. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Plantear demostración 2					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Argumentación explicativa				1	3,3
Prueba empírico-inductiva				1	3,3
Prueba deductiva formal					0,0
Demostración deductiva				1	3,3
En blanco	18	3	1	5	90,0

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

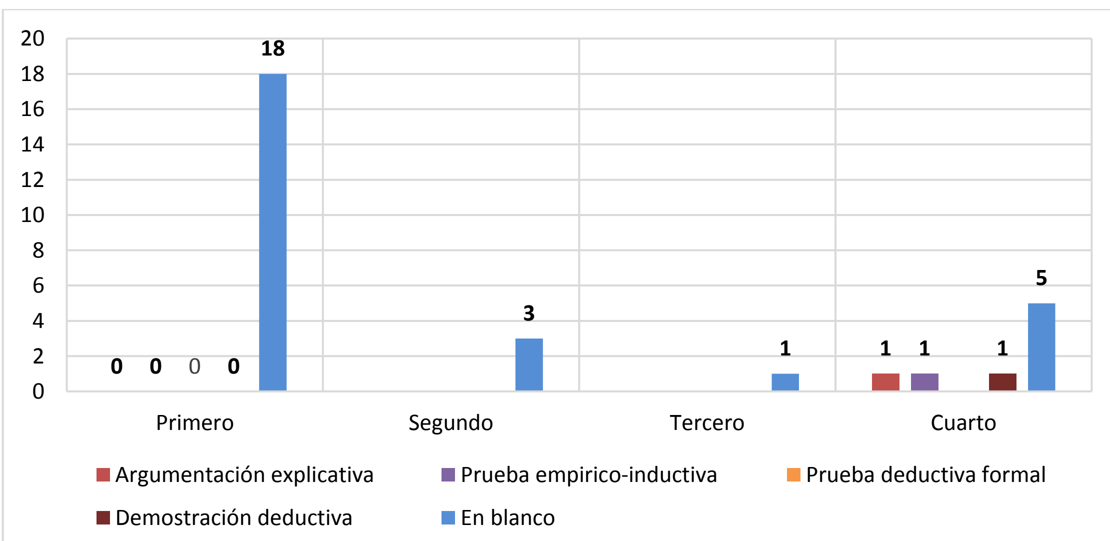


Figura 15. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta realizada a estudiantes.

En el reactivo 15, se les pidió a los estudiantes que demostraran: “que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in \mathbb{N}$)”, los datos que se obtuvieron se presentaron en el Cuadro 16, donde el 26,7% planteó una demostración tipo argumentación explicativa; el 6,7% presentó una prueba empírico-inductiva; el 3,3% desarrolló una demostración deductiva y el 63,3% dejó el reactivo en blanco.

Cuadro 16. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.

Plantear demostración 3					Porcentaje
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	
TOTAL		30			100,0
Argumentación explicativa	6			2	26,7
Prueba empírico-inductiva	2				6,7
Prueba deductiva formal					0,0
Demostración deductiva	1				3,3
En blanco	8	4	1	6	63,3

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

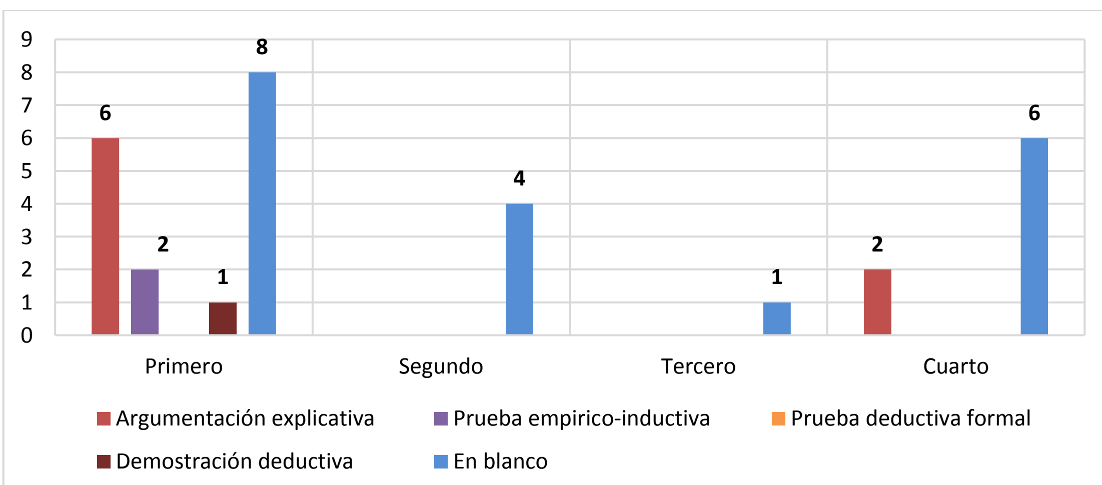


Figura 16. Planteamiento de demostración por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste. Noviembre 2018.
Fuente: Encuesta realizada a estudiantes.

CONCLUSIONES

Luego de haber realizado esta investigación y en base a los resultados de la encuesta aplicada podemos concluir lo siguiente:

Los estudiantes de la Licenciatura en Matemática del Centro Regional de Panamá Oeste reconocen el concepto de demostración, los métodos de demostración y pueden identificar la hipótesis de la tesis o conclusión. Estos resultados se midieron desde el reactivo 1 hasta el 12, donde se obtuvo que el 83,3% de los estudiantes encuestados, reconocen el concepto de demostración y ese mismo porcentaje discrimina correctamente la hipótesis de la tesis.

Los métodos de demostración que más los estudiantes identificaron fueron: el método directo, con un 66,7 %; el método de inducción, por un 70 % de los estudiantes encuestados, y el método de demostración por construcción, que, de acuerdo a los resultados de la encuesta aplicada, evidencian un 86,7 % de los estudiantes lo identificó correctamente.

Un menor porcentaje discriminó adecuadamente otros métodos de demostración; tales como la demostración por casos, solo la mitad de los estudiantes supo identificarlo correctamente. Mientras que el método de demostración por contraejemplo fue identificado, dada la definición, por el 43,3% de los encuestados. De igual forma, se obtuvo que el concepto del método de reducción al absurdo, dada la definición, este fue reconocido por el 43,3% de los estudiantes. Y solo un 46,7% de los encuestados seleccionan el contrapositivo correcto dada una situación presentada.

En cuanto al ordenamiento lógico de demostraciones se obtuvo que el 36,7% de los encuestados trataron de ordenar la demostración propuesta, un 50,0% no presentó nada y solo un 13,3% ordenaron la demostración de modo correcta. Infiriéndose de ello que les cuesta abstraer relaciones y principios matemáticos que le permitan deducir lógicamente y secuencialmente los enunciados de la demostración.

Finalmente, en la última parte de la encuesta donde se pidió demostrar que "Si n^2 es impar, entonces n es impar", el 33,3% presenta una argumentación explicativa; el 6,7% desarrolla pruebas empírico-inductiva; un 3,3% logra demostrar deductivamente y el 56,7% de los encuestados deja el reactivo sin desarrollar; siendo los estudiantes de primer año los que intentaron de alguna forma presentar una demostración.

En un segundo problema para demostrar: "Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro **e** de G es único", obtenemos que el 3,3% de los encuestados proponen una argumentación explicativa; otro 3,3% intentan una prueba empírico-inductiva; un 3,3% desarrolla una demostración deductiva y el 90% deja el reactivo en blanco, en esta ocasión son los estudiantes de cuarto año que intentaron hacer alguna demostración.

Para el tercer problema a demostrar cuyo enunciado era: "la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in N$)", los datos arrojaron que el 26,7% planteó una demostración tipo argumentación explicativa; el 6,7% presentó una prueba empírico-inductiva; el 3,3% desarrolló una demostración deductiva y el 63,3% dejó el reactivo en blanco; nuevamente los estudiantes de primer año de la Licenciatura de Matemática son los que intentaron plantear alguna demostración.

El proceso de demostración como se ha evidenciado a través de su desarrollo evolutivo, es un proceso complejo que requiere un gran dominio, tanto de los conceptos involucrados en el teorema, como de los métodos de demostración aplicables y la simbología y notación matemática empleada. Esta complejidad se ha visto manifiesta en esta investigación, ya que sólo un 33% de los estudiantes encuestados desarrolla correctamente la demostración formal y solo un pequeño porcentaje realiza los procesos iniciales de los esquemas de razonamiento, acercándose al nivel 2, de argumentación explicativa.

RECOMENDACIONES

Los resultados de esta investigación sugieren que los estudiantes de la Licenciatura en Matemática no poseen dominio de los métodos de demostración empleados en matemática, por ello se recomiendan las siguientes acciones:

Divulgar los resultados de esta investigación en actividades de la Escuela de Matemática del CRUPO; y particularmente, recomendar a los profesores de Matemática que dictan cursos en la Licenciatura que cada vez que se realice una demostración a los estudiantes en cualquiera de sus cursos, les enuncien el método que se está aplicando para consolidarlos y que a medida que avanza en su formación académica, logre reconocerlos e internalizarlos.

Promover cursos propedéuticos para estudiantes que deseen ingresar a la licenciatura de Matemática, sobre Introducción a la Lógica Matemática y Fundamentos de la Matemática, de modo que se familiarice poco a poco con la temática de estudio.

Organizar seminarios de verano con estudiantes de segundo y tercer año de la especialidad donde se analicen los obstáculos más comunes al realizar demostraciones y se ejecuten actividades que conlleven a la adquisición de destrezas en la teoría de la demostración.

Elaborar material didáctico con problemas demostrados que involucren distintos métodos de demostración y actividades autoformativas para afianzar este importante, pero complejo proceso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado M., Angelina y González A., M. (2010). ***La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de caso***. Recuperado el 15 de agosto de 2017 desde: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/189097/353376

- Boyer, Carl B. (1999). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. España.

- Crespo C., Cecilia. (2014). *Argumentar Matemáticamente: Su importancia en el aula*. II Congreso Virtual de Enseñanza de las Matemáticas CVEM. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/272175083_ARGUMENTAR_MATEMATICAMENTE_SU_IMPORTANCIA_EN_EL_AULA

- Diccionario de la Lengua Española. (2014). Vigesimotercera Edición. La Tipográfica Varese Srl, Varese, Italia.

- Fiallo, Jorge; Camargo, Leonor; Gutiérrez, Angel. (2013). *Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas*. Revista Integración. Escuela de Matemática. Universidad de Industrial de Santander. Colombia. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/rein/v31n2/v31n2a07.pdf

- Ferreira, Nora; Rechimont, Estela y Parodi, Carlos. (2008). *Diferentes marcos en la resolución de problemas por demostrar*. Recuperado desde: https://clame.org.mx/uploads/actas/alme21.pdf

- García D., Kerlyn y Cuarez R., Maritza. (2014). *Lenguaje matemático simbólico escrito y usado por estudiantes de 1er año diversificado de Educación Media Diversificada de Educación Media General*. (Tesis de Grado). Universidad de Carabobo, Venezuela. Recuperado de http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/1555/17.pdf?sequence=3

- Garrido, Manuel (2005). *Lógica Simbólica*. Tecnos. España.
- González F., Ana M., y Arias L., Manuel de Jesús. (1997). *La problemática de las demostraciones matemáticas***.** (Tesis de pregrado). Universidad de Panamá.
- Harel, Guershon & Sowder, Larry. (1998). *Students´ Proof Schemes: Results from exploratory studies*. CBMS Issues in Mathematics Education. Volumen 7.
- Ibáñez, Marcelino y Ortega, Tomás (1994). *Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los Esquemas de Prueba. Aspectos Cognitivos*. Recuperado desde http://www4.uva.es/didamatva/investigacion/Publicaciones/origen_nudo_desenlace.pdf
- Ivorra C., Carlos (s.f). *Lógica y teoría de conjuntos*. Recuperado el 4 de noviembre de 2018 desde: https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf
- Martínez R., Ángel. (1999). *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica* (Tesis doctoral). Recuperado el 15 de agosto de 2017 desde: https://core.ac.uk/download/pdf/12341855.pdf
- Molina O., Tomás A. (2007). *Los métodos de demostración y su aplicación en el desarrollo del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas en el Centro Regional Universitario de Coclé*. (Tesis de pregrado). Universidad de Panamá.
- Morales S., Carlos A. (2008). *Los Métodos de Demostración en Matemática. (Tesis de Maestría)*. Universidad de San Carlos de Guatemala. Recuperado desde http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/07/07_1914.pdf
- Otero G., Jorge. (s.f.). *La enseñanza de la demostración matemática*. Recuperado el 17 de septiembre de 2017 desde: http://www.uan.edu.mx/d/a/sip/jov_invest/con_est_cien_tec/presen_oral/basic_ing/4.docx

- Proyecto Tuning América Latina. (2004-2008). “En línea”. http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=content&task=view&id=233&Itemid=262.

- Sampieri H., Roberto; Fernández C., Carlos; Baptista L., María del P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta edición. Mc Graw Hill. México.

- Sánchez F., Enrique y Gil P., Juan A. (2015). *La demostración en las Matemáticas. Un ejemplo de aplicación en el aula con alumnos de 3.º ESO*. Enseñanza & Teaching. Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado el 4 de noviembre de 2018 desde: https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/129567/1/La_demostracion_en_las_matematicas_Un_ej.pdf

- Solow, Daniel. (1993). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas***.** Puerto Rico: Limusa.

ANEXO

CUESTIONARIO DE ENCUESTA

Respetados participantes:

La Universidad de Panamá a través de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado y la Unidad Técnica de Investigación está realizando una investigación denominada: **Interpretación de enunciados para hacer demostraciones formales en estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste**. Solicitamos su ayuda respondiendo con transparencia y veracidad las preguntas de este cuestionario, las mismas serán de gran importancia; por lo que les agradecemos dar su respuesta, colocando una equis (x) en el recuadro correspondiente y añadir información cuando se solicita aclarar alguna respuesta específica.

I. Datos Generales:

Sexo: A. Masculino ☐ B. Femenino ☐

Nivel que cursa: A. Segundo ☐ B. Tercero ☐ C. Cuarto ☐

II. Datos Específicos:

1. Razonamiento o deducción lógica que partiendo de unas hipótesis nos permite llegar a unas tesis o conclusiones es:
   A. Teorema ☐ B. Demostración ☐ C. Tesis ☐ D. Hipótesis ☐

2. Tipo de demostración que no se puede hacer para todos los casos a la vez y que debemos demostrar todos los casos que se presentan:
   A. Demostración directa☐ B. Demostración por casos ☐

   C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐
   E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

3. Demostración que consiste en encontrar un caso particular para demostrar que la hipótesis es falsa.
   A. Demostración directa☐ B. Demostración por casos ☐

   C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐
   E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

4. Para todo entero $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Podemos obtener una verificación por:
   A. Demostración directa☐ B. Demostración por casos ☐

   C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐

E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

5. Encontrar un ejemplo directo de una afirmación, que demuestra la verdad de la hipótesis, corresponde a la:
   A. Demostración por construcción ☐ B. Demostración por casos ☐
   C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐
   E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

6. Un principio contrapositivo para el siguiente enunciado: "Si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo con un ángulo recto, entonces el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, es:
   A. Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, entonces el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo con un ángulo recto ☐
   B. Si el cuadrilátero ABCD no es un rectángulo, entonces el cuadrilátero ABCD no es un paralelogramo con un ángulo recto☐
   C. Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, entonces el cuadrilátero ABCD no es un paralelogramo con un ángulo recto☐

7. Demostrar que H ⇒ T, asumiendo que H es cierta y si mediante una serie de pasos y procesos lógicos llegamos a la conclusión T, el teorema estaría demostrado por:
   A. Demostración directa☐ B. Demostración por casos ☐
   C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐
   E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

8. En el enunciado: Si a y b son números distintos, ambos positivos y se obtiene que $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$; la hipótesis y la tesis, respectivamente:
   A. a y b ambos positivos; $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$ ☐
   B. a y b son dos números distintos y $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$ ☐
   C. a y b son dos números distintos; ambos positivos y $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$ ☐

9. Al aplicar el método de demostración por contradicción a la proposición: si a y b son números reales $a + b \geq 1 \rightarrow a \geq 0 \vee b \geq 0$, se parte de la hipótesis y se supone que:

   A. a < 0 ó b < 0 para llegar a que a + b < 1 y concluir la demostración☐
   B. a+b<1 para llegar a que a < 0 y b < 0 y concluir la demostración ☐
   C. a < 0 y b < 0 para llegar a que a + b < 1 y concluir la demostración ☐

10. Suponer que la tesis (T) es falsa y …a que la hipótesis (H) también lo es, con lo cual demostramos que H ⇒ T, corresponde a:

A. Demostración directa☐ B. Demostración por casos ☐

C. Demostración por contraejemplo ☐ D. Demostración inversa ☐

E. Demostración por reducción al absurdo ☐ F. Demostración por inducción ☐

Enumere en orden lógico, las siguientes demostraciones:

11. Si tenemos que “El número $\sqrt{2}$ es irracional”,

_____ Tenemos una contradicción o absurdo y de ella concluimos que $\sqrt{2}$ no es racional, es decir, es irracional.

_____ Por lo tanto tenemos que b^2 es par y de aquí también b es par.

_____ Elevamos los dos miembros al cuadrado y tenemos: $a^2 = 2b^2$ y por lo tanto a^2 es par

_____ Entonces a que a y b son pares, pero esto contradice el hecho de que a y b son primos entre sí.

_____ Esta igualdad podemos escribirla de la siguiente forma: a =$\sqrt{2}$ b

_____ Negamos la tesis y suponemos que $\sqrt{2}$ es racional.

_____ Se puede expresar como $\frac{a}{b}$ con a, b ∈ $\mathbb{Z}$ y primos entre sí.

_____ Sustituimos en la expresión anterior: $a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2b^2$; pero dividiendo entre 2 llegamos a que $2p^2 = b^2$

_____ Pero si a^2 es par significa que a es par y podemos escribir a = 2p con p ∈ $\mathbb{Z}$.

12. Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en su interior (a,b). si f(a) = 0 = f(b), entonces existe un número c en (a,b) tal que f ’(c)= 0

____ De manera análoga, si f tiene valores negativos, podemos considerar su valor mínimo f(c) y concluir que f ’(c) = 0

_____ Si f tienen valores positivos, consideramos su valor máximo, f(c).

_____ Ahora, c no es un extremo de [a,b], pues f(a) = 0 y f(b)=0.

_____ Si f no tiene valores positivos ni negativos, entonces f se anula idénticamente en [a,b], por lo que f ’(c)=0 para todo c en (a,b)

_____ Por tanto, c es un puno de (a,b). Pero sabemos que f es diferenciable en c; es una función constante, f ’(c) = 0

_____ f es continua en [a,b], por la propiedad del valor máximo.

Plantee una demostración a cada uno de las siguientes proposiciones, anote cualquier argumentación que tenga.

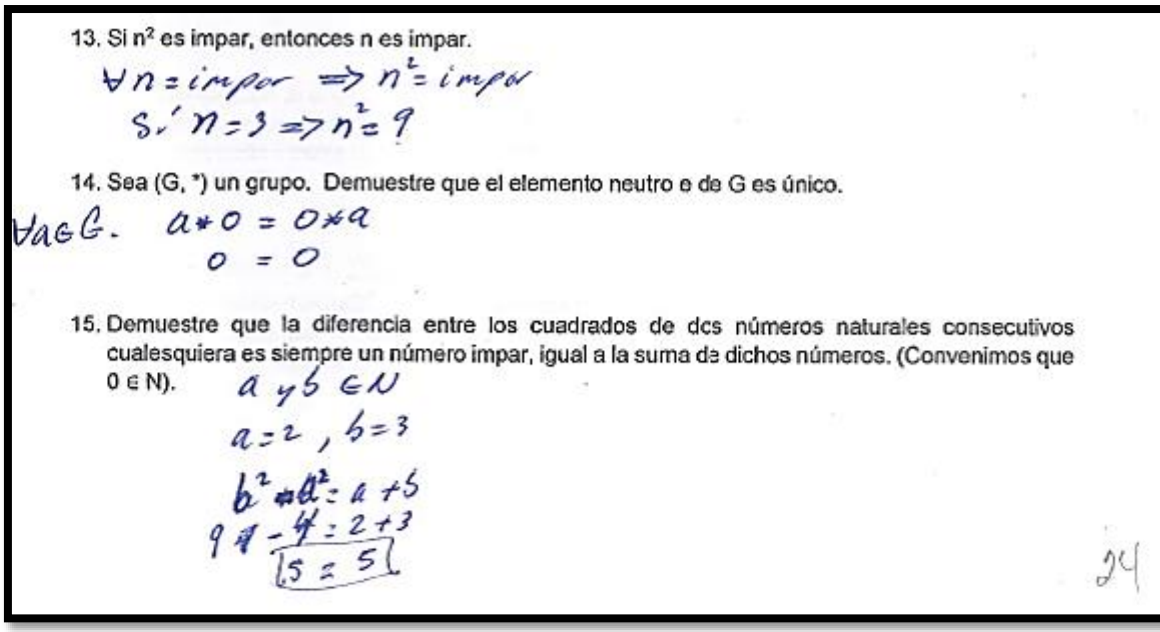
13. Si n^2 es impar, entonces n es impar.

14. Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único.

15. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in N$).

Muestras de las diferentes demostraciones realizadas por los estudiantes de la Licenciatura de Matemática del Centro Regional Universitario de Panamá Oeste.

Argumentación explicativa: Son respuestas que consisten en una mera comprobación de la proposición a demostrar, mediante ejemplos particulares. No hay verdadera intención validativa, y no se pretende afirmar el cumplimiento en general de la proposición, válido para todos los casos posibles. Sólo se trata de una intención explicativa, descriptiva.



13. Si n^2 es impar, entonces n es impar.

$\forall n = impar \Rightarrow n^2 = impar$

Si $n = 3 \Rightarrow n^2 = 9$

14. Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único.

$\forall a \in G.$ $a * 0 = 0 * a$

$0 = 0$

15. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que 0 ∈ N).

a y $b \in N$

$a = 2$, $b = 3$

$b^2 - a^2 = a + b$

$9 - 4 = 2 + 3$

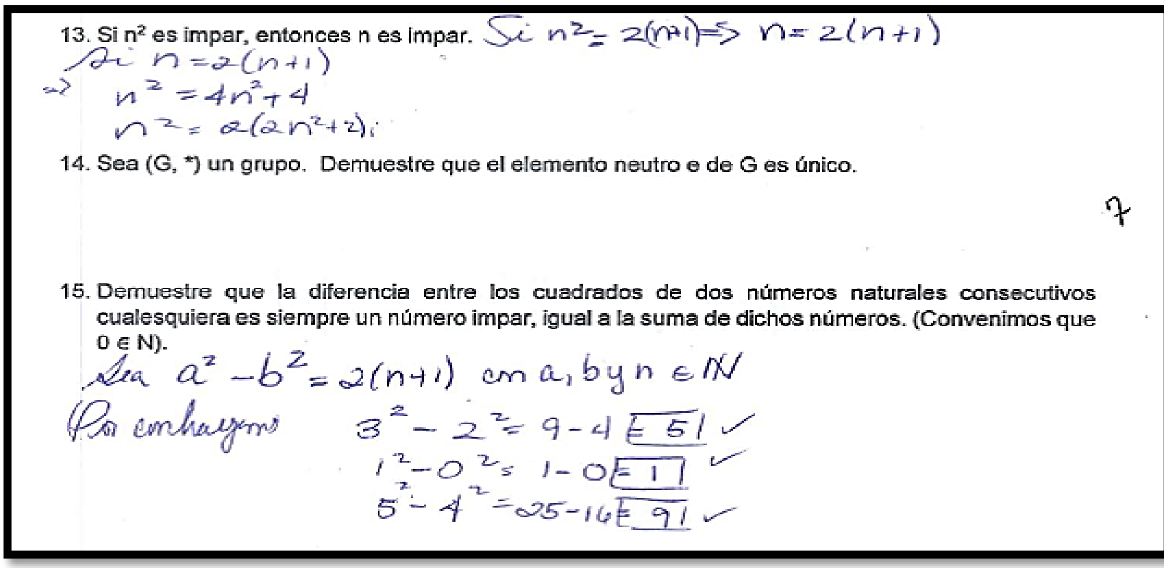
$\boxed{5 = 5}$

24

Figura 17. Demostración que muestra ser argumentativa explicativa.

En la figura 17, se presenta una muestra de una demostración que se clasifica como argumentación explicativa, se observa que se presentan ejemplos particulares que tratan de describir la situación planteada, y no da una generalización para las proposiciones propuestas.

Prueba empírico-inductiva: Estas respuestas están basadas en la comprobación mediante ejemplos particulares, con intención de justificar el cumplimiento general de la proposición que se trata de demostrar.



13. Si n^2 es impar, entonces n es impar. Si $n^2 = 2(n+1) \Rightarrow n = 2(n+1)$

Si $n = 2(n+1)$

$\Rightarrow n^2 = 4n^2 + 4$

$n^2 = 2(2n^2+2)$;

14. Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único.

7

15. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in N$).

Sea $a^2 - b^2 = 2(n+1)$ con a, b y $n \in N$

Por ensayos $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = \boxed{5}$ ✓

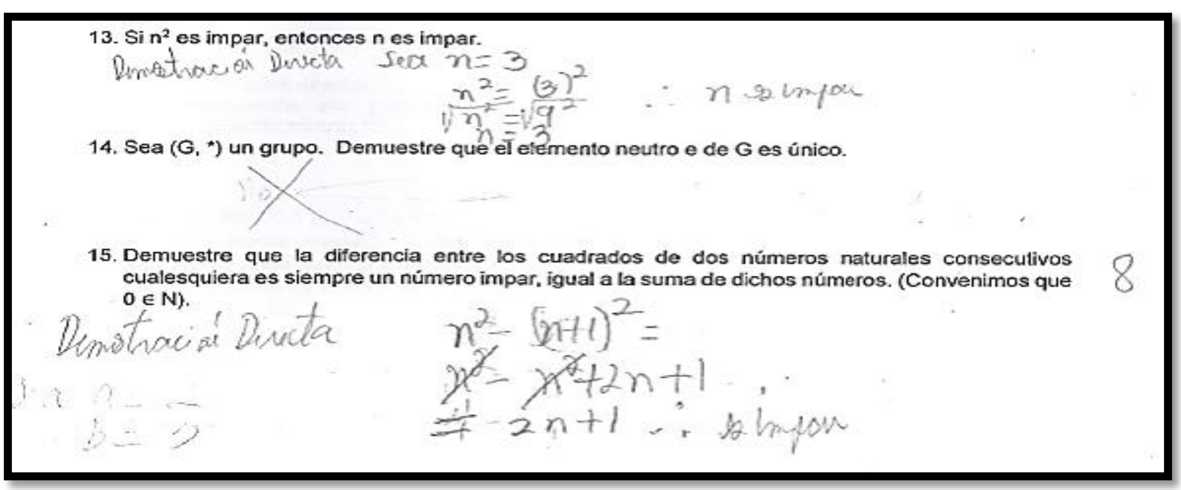
$1^2 - 0^2 = 1 - 0 = \boxed{1}$ ✓

$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = \boxed{9}$ ✓

Figura 18: Muestra de prueba empírico-inductiva

En la figura 18, se observa que se intenta justificar la comprobación por medio de ejemplos particulares.

Prueba deductiva informal: Esta etapa está constituida por demostraciones desarrolladas siguiendo criterios lógicos, pero con una lógica intuitiva, no simbólica, apoyándose en generalizaciones no contrastadas.



13. Si n^2 es impar, entonces n es impar.

Demostración Directa Sea $n = 3$

$n^2 = (3)^2$ ∴ n es impar

$\sqrt{n^2} = \sqrt{9^2}$

$n = 3$

14. Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único.

15. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in N$).

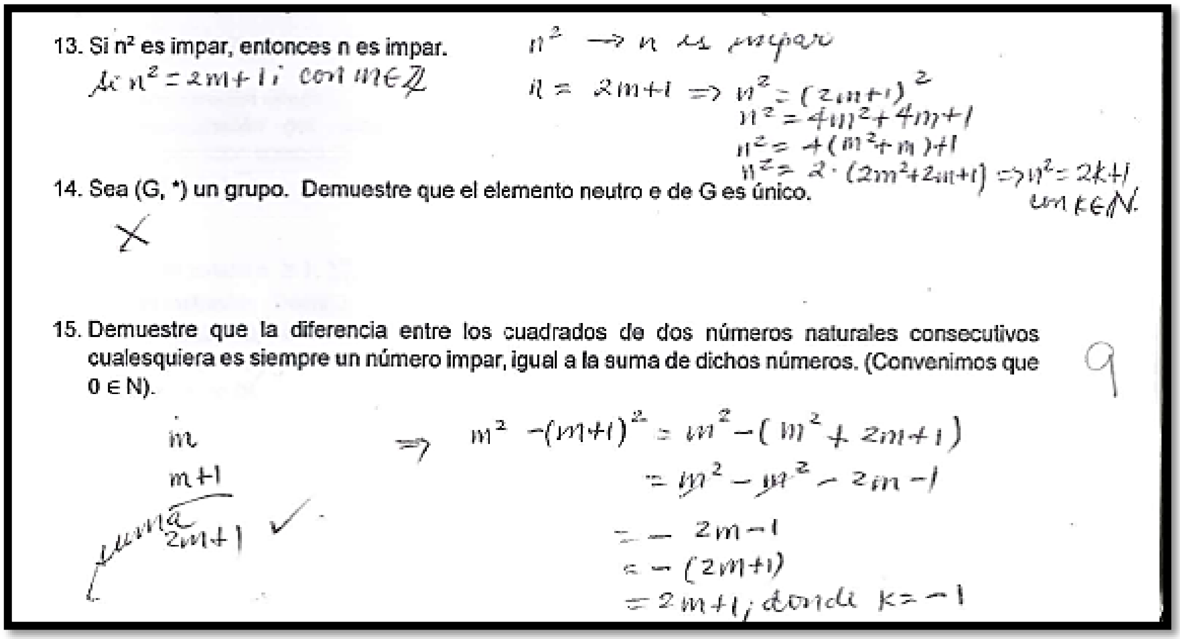
8

Demostración Directa $n^2 - (n+1)^2 =$

$\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 2n + 1$

$= 2n + 1$ ∴ es impar

Demostración deductiva: Las demostraciones en este nivel, siguen criterios lógicos formales, que son aplicados de acuerdo con esquemas simbólicos, atendiendo más a las reglas de transformación del lenguaje simbólico dentro del cual operan dichos términos que a la significación concreta de los términos usados.



13. Si n^2 es impar, entonces n es impar.

$n^2 \to n$ es impar

Si $n^2 = 2m+1$; con $m \in \mathbb{Z}$

$n = 2m+1 \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2$

$n^2 = 4m^2+4m+1$

$n^2 = 4(m^2+m)+1$

$n^2 = 2\cdot(2m^2+2m+1) \Rightarrow n^2 = 2k+1$ con $k \in N$.

14. Sea (G, *) un grupo. Demuestre que el elemento neutro e de G es único.

X

15. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Convenimos que $0 \in N$).

9

m

$m+1$

suma $2m+1$ ✓

$\Rightarrow m^2 - (m+1)^2 = m^2 - (m^2 + 2m+1)$

$= m^2 - m^2 - 2m - 1$

$= -2m-1$

$= -(2m+1)$

$= 2m+1$; donde $k = -1$

En la figura se observa, el uso de símbolos matemáticos, se sigue un orden lógico formal y se llega a una deducción formal.