UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGIA

# ESPACIOS DE MEDIDA CUÁNTICA

RONALL N GARCIA O

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2012

Titulo de la Tesis **ESPACIOS DE MEDIDA CUANTICA**

TESIS

Sometida para optar al titulo de Maestria en Matematica

Vicerrectoria de Investigacion y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnologia

APROBADO POR

**Doctor Jorge Hernandez U**
**Presidente**

**Doctor Josue Ortiz**
**Miembro**

**Profesor Pedro J Salamanca R**
**Miembro**

**REFRENDADO POR**

**REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO**

**FECHA** 25 de julio de 2012

## AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso por permitirme lograr esta meta

Al Doctor Jorge Hernández, por su valioso tiempo y dedicación para llevar esta investigación a feliz término

A todos los profesores del Programa por sus valiosos conocimientos

*¡Mil Gracias!*

# ÍNDICE GENERAL

## RESUMEN

En esta investigación presentamos los resultados mas importantes sobre espacios medibles Estudiaremos los espacios de medida cuantica los cuales carecen de algunas propiedades fundamentales de las medidas clásicas Aunque hay una teoria general sobre espacios de medida cuantica consideraremos solamente los espacios finitos Definiremos medida cuantica y analizaremos un ejemplo muy interesante de particulas antiparticulas donde se muestra claramente que falla la adtividad de la medida clasica Probaremos algunos resultados que seran utilizados para construir medidas cuánticas a partir de una medida clásica y una función de interferencia cuantica Estudiaremos la compatibilidad el centro y los cubrimientos cuanticos de los espacios de medida cuántica Finalmente, a manera de generalizacion de las medidas cuánticas incluiremos las medidas super cuánticas

## ABSTRACT

This work presents the most important results about measurable spaces We will study the quantum measure spaces which lack some fundamental properties of classical measures Although there is a general theory about quantum measure spaces we will only consider finite spaces We will define quantum measure and analyze a very interesting example of particles antiparticles, showing clearly that fails the additivity of the classical measure We prove some results which will be used to build quantum measures from a classical measure and a function of quantum interference We will study the compatibility, the center and the quantum covers of the quantum measure spaces Finally by way of generalization of quantum measures, we will include super quantum measures

# INTRODUCCIÓN

La teoría de la medida e integración es un campo bien definido de la matemática que tiene cerca de 100 años Esta teoría posee profundos y elegantes teoremas, y tiene importantes aplicaciones en análisis funcional teoría de la probabilidad, etc Aunque la teoría de la medida finita en la cual el espacio de medida tiene solamente un número finito de elementos es mucho más simple que la teoría general ésta también tiene importantes aplicaciones en la teoría de probabilidad combinatoria y ciencias computacionales En esta investigación se trabajará con espacios finitos de medida cuántica

Al ir más allá de la medida clásica e introducirnos en el campo de la mecánica cuántica, pero desde el punto de vista matemático nos encontraremos con la medida cuántica y por tanto con los espacios de medida cuántica Al estudiar estos espacios veremos comportamientos muy raros que no ocurren en medida clásica Estos comportamientos se deben a un fenómeno que se conoce como interferencia cuántica En este trabajo se presentará un ejemplo de medida cuántica sobre partículas antipartículas que nos demostrará que una medida cuántica no necesita ser una medida clásica

Probaremos resultados que nos permitan construir medidas cuánticas a partir de una medida clásica y una función de interferencia cuántica Estudiaremos la compatibilidad el centro y los cubrimientos cuánticos así como ejemplos que nos ayudarán a comprender estos conceptos claramente Terminaremos abordando las medidas super cuanticas, que son una generalización de las medidas cuánticas

Para un mejor manejo el documento se ha dividido en tres capitulos En el primer capitulo se estudian los principales resultados sobre unión interseccion y producto cartesiano de familia de conjuntos asi como las estructuras de semianillo $\sigma$ conjunto álgebra, anillo y $\sigma$ álgebra de conjuntos El segundo capitulo trata sobre los espacios medibles medida medida exterior medida signada medidas reales y complejas En el tercer capitulo se abordan los espacios de medida cuantica en donde se presenta una reseña historica la medida cuántica, interferencia cuántica compatibilidad y el centro cubrimientos cuánticos y medidas super cuanticas

Esperamos que el esfuerzo del presente trabajo sirva como motivación a los interesados en el estudio del Análisis Real para que sigan profundizando en el estudio de la Teoria de la Medida Cuantica y puedan desarrollar la correspondiente Teoria de Integración Cuántica, la cual tiene buena aplicación en la teoria general de la Física Cuántica

# CAPÍTULO I

# FAMILIA DE CONJUNTOS

# 1 FAMILIA DE CONJUNTOS

En este capítulo se abordarán los principales resultados sobre Unión, Intersección y Producto Cartesiano de Familia de Conjuntos así como las estructuras de Semianillo, $\sigma$ conjunto, Álgebra, Anillo y $\sigma$ álgebra de conjuntos que serán utilizados para desarrollar la Teoría de Espacios Medibles y Espacios de Medida Cuántica

## 1 1 OPERACIONES ENTRE FAMILIA DE CONJUNTOS

**Definición 1 1 1** *Una **Familia de Conjuntos** es un conjunto no vacío $\mathcal{F}$ cuyos elementos son a su vez conjuntos también*

Se denota de la siguiente manera supongamos que $f$ es una función de un conjunto no vacío $I$ en un conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto dado. El conjunto $I$ es llamado el *conjunto índice*, y cada elemento del conjunto $I$ se denomina *índice*. El rango $\mathcal{F}$ de la función es llamado *conjunto indexado* y el valor de la función $f$ en el índice $i$ es llamado un *termino de la familia*. Las notaciones

$$\{A_i\}_{i\in I} \qquad \{A_i \; i \in I\} \qquad \text{o} \qquad \{A_i\}$$

denotan una familia de conjuntos cuyos elementos son los conjuntos $A_i$. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos y tomamos

$$I = \mathcal{F} \qquad y \qquad f(i) = i = A_i$$

para cada $i \in I$ podemos expresar $\mathcal{F}$ como $\{A_i\}_{i\in I}$

**Definición 1 1 2** *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos entonces la* ***unión de la familia*** *se define como*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \quad \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$$

A veces la $\bigcup_{i\in I} A_i$ se denota por $\bigcup A_i$ Tambien si $I = \mathbf{N}$ la unión de la familia se denota por

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Definición 1 1 3** *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacia de conjuntos, entonces la* ***intersección de la familia*** *se define como*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \quad x \in A_i \text{ para cada } i \in I\}$$

A veces la $\bigcap_{i\in I} A_i$ se denota por $\bigcap A$ También si $I = \mathbf{N}$ la interseccion de la familia se denota por

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Teorema 1 1 1** (Leyes de Morgan) *Para una familia $\{A_i\}_{\in I}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ las siguientes identidades se cumplen*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \qquad y \qquad \left(\bigcap_{\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

**Demostración**

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow x \notin A_i \text{ para todo } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in A_i^{\,c} \text{ para todo } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^{\,c}
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra la primera identidad. Para la segunda identidad, note que

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\
&\Leftrightarrow x \notin A_i \text{ para algun } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in A_i^{\,c} \text{ para algun } i \in I \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^{\,c}
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra la segunda identidad.

**Teorema 1.1.2** *Sea $f : X \to Y$ una funcion. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $X$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $Y$, entonces las siguientes relaciones se cumplen:*

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

**Demostración**

1. Note que

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ tal que } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i \text{ y } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } y \in f(A_i) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i) \end{aligned}$$

Lo que demuestra la relación 1

2. Sabemos que

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq f(A_i)$$

para cada $i$, luego

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

Lo que demuestra la relación 2

3 Note que

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B\ ) \end{aligned}$$

Lo que demuestra la relación 3

4 Note que

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\subset I} B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_i \text{ para cada } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B\ ) \text{ para cada } i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\in I} f^{-1}(B\ ) \end{aligned}$$

Lo que demuestra la relacion 4

**Definición 1 1 4** *Sea $\{A\ \}_{\in I}$ una familia de conjuntos El* ***Producto Cartesiano*** *de $\{A_i\}_{i\in I}$ se define como el conjunto de todas las funciones*

$$f \quad I \to \bigcup_{i\in I} A_i,$$

*tal que $f(i) = x\ \in A_i$ para cada $i \in I$ El Producto Cartesiano se denota por*

$$\prod_{i\in I} A_i \quad ó \quad \prod A_i$$

El Producto Cartesiano de una familia finita de conjuntos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ se denota por $A_1 \times \cdots \times A_n$ y sus elementos son denotados como n-uplas, esto es

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}$$

Si la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ cumple que $A_i = A$ para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ se escribe como $A^I$, es decir

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\}$$

## 1.2 SEMIANILLO DE CONJUNTOS

**Definición 1.2.1** *Sea $X \neq \emptyset$. Una familia no vacía $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $X$ es un **Semianillo de Conjuntos** si satisface las tres propiedades siguientes:*

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$
2. *Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$*
3. *Si $A, B \in \mathcal{S}$, existe una familia finita $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en $\mathcal{S}$ tal que*

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

*con $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$.*

**Observacion**

1 Si $A$ $B \in \mathcal{S}$ y $A \setminus B \in \mathcal{S}$ entonces obviamente $A \setminus B$ satisface la condición 3 de la Definición 1 2 1 es decir, $A \setminus B$ se puede escribir como una unión finita de elementos de $\mathcal{S}$ disyuntos dos a dos

**Ejemplo 1 2 1** *Sea $a$ $b \in \mathbf{R}$ tal que $[a\ b) = \emptyset$ si $a \geq b$ y*

$$[a\ b) = \{x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b\}$$

*si $a < b$ La familia*

$$\mathcal{S} = \{[a\ b); \quad a\ b \in \mathbb{R}\}$$

*es un semianillo de subconjuntos de $\mathbb{R}$*

En efecto,

1 $\emptyset \in \mathcal{S}$, ya que sólo hay que tomar $a \geq b$

2 Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$ ya que $A \cap B$ es vacio o es de la forma $[a, b)$ y ambos casos están en $\mathcal{S}$

3 Sea $A$ $B \in \mathcal{S}$ $A \setminus B$ sólo puede ser $A$, el vacio, un conjunto de la forma $[a\ b)$ con $a$ $b \in \mathbf{R}$ $a < b$, ó dos conjuntos disyuntos de la forma $[a\ b)$ con $a$ $b \in \mathbb{R}$ $a < b$ Como todas las opciones se pueden escribir como una union finita de elementos de $\mathcal{S}$ disyuntos dos a dos, entonces se satisface la condición 3 de la Definición 1 2 1

Asi pues $\mathcal{S} = \{[a, b) \quad a\ b \in \mathbf{R}\}$ es un semianillo de subconjuntos de $\mathbf{R}$

**Ejemplo 1 2 2** *Sea $\mathcal{S}$ la familia de todos los subconjuntos $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ para los cuales existen intervalos $[a_1\ b_1),\quad [a_n\ b_n)$ tal que*

$$\mathcal{A} = [a_1\ b_1) \times \quad \times [a_n\ b_n)$$

*Si $a_i \geq b_i$ para algun $i$ entonces $[a\ \ b\ ) = \emptyset$ y $A = \emptyset$ Entonces $\mathcal{S}$ es un semianillo de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$*

En efecto segun la Definición 1 2 1 debemos probar tres propiedades Las dos primeras son triviales Para probar la tercera propiedad utilizaremos la siguiente identidad

$$A \times B \setminus C \times D = [(A \setminus C) \times B] \cup [(A \cap C) \times (B \setminus D)],$$

donde los conjuntos del lado derecho de la igualdad son disyuntos Para demostrar esto usaremos induccion sobre $n$ El caso $n = 1$ es el Ejemplo 1 2 1 Supongamos que se cumple para $n$ y demostremos que se cumple para $n + 1$ es decir que

$$[a_1\ b_1) \times \quad \times [a_n\ b_n) \times [a_{n+1}\ b_{n+1}) \setminus [c_1, d_1) \times \quad \times [c_n, d_n) \times [c_{n+1}\ d_{n+1})$$

puede ser escrito como una unión finita de conjutos disyuntos de la familia $\mathcal{S}$ En efecto tomemos

$$A = [a_1\ b_1) \times \quad \times [a_n\ b_n), \qquad B = [a_{n+1}, b_{n+1});$$

$$C = [c_1\ d_1) \times \quad \times [c_n, d_n) \qquad D = [c_{n+1}\ d_{n+1})$$

luego usando la identidad anterior se tiene que

$$[a_1\ b_1) \times \quad \times [a_n\ b_n) \times [a_{n+1}\ b_{n+1}) \setminus [c_1\ d_1) \times \quad \times [c_n\ d_n) \times [c_{n+1}\ d_{n+1}) =$$

$$= A \times B \setminus C \times D$$

$$= [(A \setminus C) \times B] \cup [(A \cap C) \times (B \setminus D)]$$

Utilizando la hipótesis de inducción se concluye que esta diferencia puede escribirse como una unión finita de conjuntos disyuntos de la familia $S$

Así pues se demuestra que $S$ es un semianillo de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

## 1 3 $\sigma$ CONJUNTO

**Definicion 1 3 1** *Sea $S$ un semianillo de elementos de $X$ Un subconjunto $A$ de $X$ es un $\sigma$ Conjunto respecto a $S$ si existe una sucesión disyunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $S$ tal que*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

**Teorema 1 3 1** *Sea $S$ un semianillo de elementos de $X$ Entonces*

*1 Si $A \in S$ y $A_1, A_2, \quad A_n$ en $S$ entonces*

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

*se puede escribir como una unión finita de conjuntos disyuntos de $S$ y por ello,*

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

*es un $\sigma$ conjunto*

2 *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{S}$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *entonces* $A$ *es un* $\sigma$ *conjunto*

3 *Las uniones enumerables y las intersecciones finitas de* $\sigma$ *conjuntos es un* $\sigma$ *conjunto*

**Demostración**

1 Por inducción sobre $n$ El caso $n = 1$ se deduce directamente de la Definición 1 2 1 Supongamos que la propiedad se cumple para $n$ y sea

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{S}$$

Entonces

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = \left( A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) \setminus A_{n+1}$$

Por la hipótesis de inducción

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{k=1}^{p} C_k,$$

con $C_m \cap C_n = \emptyset$ si $m \neq n$ y $C_k \in \mathcal{S}$ para $k = 1, 2, \ldots, p$ Luego

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = \bigcup_{k=1}^{p} C_k \setminus A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{p} (C_k \setminus A_{n+1})$$

Por la Definición 1 2 1 cada $C_k \setminus A_{n+1}$ puede ser escrito como una unión finita de conjuntos disyuntos de $\mathcal{S}$ y como $C_m \cap C_n = \emptyset$ si $m \neq n$ entonces $A \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$ puede ser escrito como una unión finita de conjuntos disyuntos de $\mathcal{S}$ Con lo que se demuestra la propiedad y, por ello $A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ es un $\sigma$ conjunto

2 Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}$ y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ Construyamos la sucesion $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue

$$B_1 = A_1 \quad B_2 = A_2 \setminus A_1 \qquad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Observe que por la construcción de la sucesion se tiene que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ Por otro lado, por la propiedad 1 de este teorema cada $B_i$ es un $\sigma$ conjunto Luego como

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

se tiene que $A$ es un $\sigma$-conjunto

3 La demostración de que las uniones enumerables de $\sigma$ conjuntos es un $\sigma$ conjunto se deduce de la demostración de la propiedad anterior La demostración de que las intersecciones finitas de $\sigma$-conjuntos es un $\sigma$ conjunto se deduce de la Definición 1 2 1

## 1 4 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

**Definición 1 4 1** *Una familia no vacia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto no vacio $X$ es un* ***algebra de conjuntos*** *si cumple que*

1 *Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$*

2 *Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $A^c \in \mathcal{S}$*

**Teorema 1 4 1** *Sea $\mathcal{S}$ un algebra de partes de $X$ entonces*

*1* $\emptyset\ X \in \mathcal{S}$

*2* *$\mathcal{S}$ es estable para la formación de uniones e intersecciones finitas*

*3* *$\mathcal{S}$ es un semianillo*

**Demostración**

1 Como $\mathcal{S} \neq \emptyset$ existe al menos un elemento $A \in \mathcal{S}$ Luego por la Defincíón 1 4 1 se tiene que $A \ \in \mathcal{S}$ Asi $\emptyset = A \cap A \ \in \mathcal{S}$ y $X = \emptyset^c \in \mathcal{S}$

2 Sea $A_1, A_2 \quad A_n \in \mathcal{S}$ Probemos por inducción que

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{S}$$

Si $n = 1$ se cumple Supongamos que se cumple para n Probemos que se cumple para $n+1$ Sea $A_1 \ A_2 \quad , A_n, A_{n+1} \in \mathcal{S}$ Por la hipotesis de induccion se cumple que

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{S}$$

Luego, por la Definición 1 4 1

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A_{n+1} \in \mathcal{S}$$

Luego $\mathcal{S}$ es estable para la formación de intersecciones finitas

Probemos que $\mathcal{S}$ es estable para la formación de uniones finitas Sea

$$A_1\ A_2,\quad A_n \in \mathcal{S}$$

Por la Definición 1 4 1 se tiene que $A_1^c\ A_2^c\quad A_n^c \in \mathcal{S}$ Luego

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j{}^c \in \mathcal{S}$$

Como

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j{}^c\right)^c$$

se tiene que

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j{}^c\right)^c \in \mathcal{S}$$

Lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es estable para la formación de uniones finitas

3 Por la parte 1 de este Teorema, $\emptyset \in \mathcal{S}$ Por la Definicion 1 4 1 si $A, B \in \mathcal{S}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$ Para que $\mathcal{S}$ sea semianillo sólo falta probar que si $A\ B \in \mathcal{S}$ entonces existe una familia finita $C_1\ C_2,\quad C_n \in \mathcal{S}$ tal que

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

con $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$

Sea $A\ B \in \mathcal{S}$ Con $A \setminus B = A \cap B^c$ luego por la Definición 1 4 1 $B^c \in \mathcal{S}$ y $A \cap B^c \in \mathcal{S}$ Por consiguiente

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{S}$$

Con lo que se demuestra que $\mathcal{S}$ es un semianillo

**Corolario 1.4.1** *$\mathcal{S} \subset P(X)$ es un algebra de conjuntos si y sólo si*

*i)* $X \in \mathcal{S}$

*ii) Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $A^c \in \mathcal{S}$*

*iii) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{S}$*

**Demostración**

Es consecuencia inmediata de Teorema 1.4.1

## 1.5 ANILLO DE CONJUNTOS

**Definición 1.5.1** ***Un anillo de conjuntos*** *es una familia no vacia $\mathcal{R}$ de partes de un conjunto $X \neq \emptyset$ que satisface las siguientes propiedades*

1. *Si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{R}$*

2. *Si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{R}$*

**Teorema 1.5.1** *Las siguientes propiedades se cumplen*

1. *Todo anillo de conjuntos contiene al $\emptyset$*

2. *Toda algebra de conjuntos es un anillo de conjuntos y todo anillo de conjuntos es un semianillo de conjuntos*

**Demostración**

1. Sea $A \in \mathcal{R}$. Por la Definición 1.5.1, $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$

2 Probemos primero que un álgebra de conjuntos es un anillo Sea $\mathcal{R}$ un álgebra de conjuntos y sea $A$ $B \in \mathcal{R}$, luego por la Definición 1 4 1

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{R} \qquad \text{y} \qquad A \cup B = (A \cap B^c)^c \in \mathcal{R}$$

Lo que demuestra que un álgebra de conjuntos es un anillo Probemos ahora que todo anillo es un semianillo Sea $\mathcal{R}$ un anillo, entonces por la parte 1 $\emptyset \in \mathcal{R}$ Ahora bien, si $A$ $B \in \mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$ es un anillo entonces $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$ Con lo que se demuestra que $\mathcal{R}$ es un semianillo

## 1 6 $\sigma$-ÁLGEBRA

**Definicion 1 6 1** *Sea $S$ un algebra de conjuntos de un conjunto no vacio $X$ $S$ es un $\sigma$* ***algebra de conjuntos*** *si es estable para la formación de uniones enumerables*

**Teorema 1 6 1** *Todo $\sigma$ algebra de conjuntos es estable para la formacion de intersecciones enumerables*

**Demostración**

Sea $S$ un $\sigma$ álgebra y sea $A_1$ $A_2$ $\in S$ Luego

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n{}^c \right)^c$$

Como $S$ es un $\sigma$ álgebra por la Definición 1 6 1 se tiene que $A_1^c$ $A_2^c$ $\in S$ y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n{}^c \in S$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c\right)^c \in \mathcal{S}$$

**Ejemplo 1 6 1** *Sea $\mathcal{S}$ la familia de todos los subconjuntos de $[0\ 1)$ que pueden ser escritos como uniones finitas de subconjuntos de $[0\ 1)$ de la forma $[a\ b)$ $\mathcal{S}$ es un algebra de conjuntos pero no un $\sigma$ algebra de conjuntos*

En efecto sea

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \qquad y \qquad B = \bigcup_{j=1}^{m} [c_j\ d_j)$$

1 $A \cup B \in \mathcal{S}$ ya que la unión de dos uniones finitas de subconjuntos de $[0\ 1)$ de la forma $[a\ b)$ sigue siendo una union finita de subconjuntos de $[0, 1)$, de la forma $[a\ b)$

2

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [a_i\ b_i) \cap [c_j\ d_j) \in \mathcal{S},$$

ya que $[a_i, b_i) \cap [c_j, d_j)$ es un subconjunto de $[0\ 1)$ de la forma $[a\ b)$

3

$$A^c = [0,1) \setminus A = \bigcap_{i=1}^{n} \{[0,1) \setminus [a_i, b_i)\} \in \mathcal{S}$$

ya que $[0,1)\setminus[a_i, b_i)$ puede ser escrito como unión finita de subconjuntos de $[0,1)$ de la forma $[a,b)$

$\mathcal{S}$ no es un $\sigma$ álgebra ya que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{S}$$

(ver Teorema 1 6 1)

**Teorema 1 6 2** *La intersección de cualquier familia no vacía de $\sigma$ algebras de partes de $X$ es un $\sigma$ algebra de partes de $X$*

**Demostración**

Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria no vacía de $\sigma$ álgebras de partes de $X$ Probemos que la $\bigcap_{i\in I} S_i$ es un $\sigma$ álgebra

1 Supongamos que $A, B \in \bigcap_{i\in I} S_i$ Entoces $A, B \in S_i$ para todo $i \in I$ Luego $A \cap B \in S_i$ para todo $i \in I$, ya que los $S_i$ son $\sigma$ álgebras Lo que implica que

$$A \cap B \in \bigcap_{i\in I} S_i$$

2 Supongamos que $A \in \bigcap_{i \in I} S_i$ Entoces $A \in S_i$ para todo $i \in I$ Luego $A^c \in S_i$ para todo $i \in I$ ya que los $S_i$ son $\sigma$ álgebras Lo que implica que

$$A^c \in \bigcap_{i \in I} S_i$$

3 Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \bigcap_{i \in I} S_i$ Entonces para cada $i \in I$ se tiene que $A_j \in S_i$ para todo $j$ Luego $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S_i$ para todo $i \in I$ ya que los $S_i$ son $\sigma$ algebras Lo que implica que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{i \in I} S_i$$

Por 1, 2, 3 y la Definicion 1 6 1 se tiene que $\bigcap_{i \in I} S_i$ es un $\sigma$ álgebra Lo que demuestra el teorema

**Corolario 1 6 1** *Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de $X$ Existe un $\sigma$ algebra minimal $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ de $X$ que contiene a $\mathcal{C}$ Se llama minimal en el sentido que si $\mathcal{S}$ es un $\sigma$ álgebra de $X$ que contiene a $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$ A este $\sigma$ algebra $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ de $X$ se le llama el $\sigma$ algebra generada por $\mathcal{C}$*

**Demostración**

Para probarlo simplemente hagamos $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ igual a la intersección de todos los $\sigma$ álgebras de $X$ que contienen a $\mathcal{C}$ Luego por el Teorema 1 6 2 $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ es un $\sigma$ álgebra de $X$ ya que la familia de todos los $\sigma$ álgebras de $X$ que contienen a $\mathcal{C}$ no es vacía porque para todo $X$ no vacio siempre existe el $\sigma$ álgebra $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que contiene a $\mathcal{C}$

**Ejemplo 1 6 2** (Clase de los Conjuntos de Borel) *Sea $X$ un conjunto no vacío Definamos una topología $\tau$ sobre $X$ Un $\sigma$ algebra muy importante es el $\sigma$ álgebra generado por la topología $\tau$ Los miembros de este $\sigma$ algebra reciben el nombre de Conjuntos de Borel o elementos bolerianos de la topología $\tau$*

Si reemplazamos $X$ por $\mathbb{R}$, entonces tendremos el $\sigma$ álgebra de Borel generado por todos los conjuntos abiertos de la recta real y se denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Tambien, si reemplazamos $X$ por $\mathbf{R}^n$ tendremos el $\sigma$ álgebra de Borel generado por todos los conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$, y se denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

**Ejemplo 1 6 3** *Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ pertenecen al $\sigma$ algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*

*1* $(a\ b)$ *para cualquier* $a < b$

*2* $(-\infty\ a)$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$

*3* $(a, \infty)$ *para cualquier* $a \in \mathbf{R}$

*4* $[a, b]$ *para cualquier* $a \leq b$

*5* $(-\infty, a]$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$

*6* $[a, \infty)$ *para cualquier* $a \in \mathbf{R}$

*7* $(a\ b]$ *para cualquier* $a < b$

*8* $[a\ b)$ *para cualquier* $a < b$

*9* *Cualquier subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$

En efecto,

- Como $(a\ b)$ es abierto entonces por definición pertenece al $\sigma$ algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $(-\infty\ a)$ es abierto entonces por definición pertenece al $\sigma$ algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $(a\ \infty)$ es abierto, entonces por definición pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $[a\ b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}\ b + \frac{1}{n}\right)$ entonces pertenece al $\sigma$ algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $(-\infty\ a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty\ a + \frac{1}{n}\right)$ entonces pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $[a, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$ entonces pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right)$ entonces pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Como $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)$ entonces pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Sea $F$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ entonces $F^c$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ lo que implica que por definición pertenece al $\sigma$ álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por ser $F^c$ un elemento del $\sigma$ álgebra de Borel $F = (F^c)^c$ pertenece al $\sigma$ algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

# CAPÍTULO II

# ESPACIOS MEDIBLES

## II ESPACIOS MEDIBLES

En este capítulo abordaremos los espacios medibles Para ello estudiaremos el concepto de medida el cual surge del manejo y cálculo de longitudes áreas y volumenes hace aproximadamente 5000 anos

Las primeras demostraciones sobre áreas y volumenes aparecen con Euclides y su libro **Los Elementos**, aunque no se encuentra definición alguna de estos conceptos en dicho libro Paso el tiempo sin mucho avance en este tema y no es hasta el ano de 1883 cuando Cantor presenta la primera definición de medida de un conjunto arbitrario acotado $A \subset \mathbf{R}^n$ Otros autores como Stolz y Harnack presentaron definiciones equivalentes en $\mathbf{R}$

Segun estas definiciones un conjunto y su adherencia median lo mismo, lo que implicaba que los racionales y los irracionales de $[0\ 1]$ median 1, al igual que todo el intervalo $[0,1]$

Peano es el primero en considerar qué conjuntos $A$ son medibles y presentar una defínción de medida en 1887 Introduce el concepto de medida exterior conjunto medible y demostro que la medida era aditiva

Borel marca un paso importante en esta teoría al considerar la aditividad enumerable para sus medidas Introduce el concepto de medida nula al concluir que los racionales de $[0\ 1]$ medían menos que $\varepsilon \sum \frac{1}{n^2}$, y por tanto cero considerando para cada $r_n \in \mathbf{Q} \cap [0\ 1]$ un segmento de longitud $\frac{\varepsilon}{n^2}$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno Esto contradecia a sus antecesores, para los cuales la medida de los racionales de $[0,1]$

era 1

Finalmente Lebesgue desarrolla la teoría de integración abstracta a partir de su tesis de 1902 gracias a los aportes de Borel Peano y Jordan principalmente

Veamos ahora los principales resultados que actualmente se manejan, sobre los conceptos de medida medida exterior, medida signada medida real y medida compleja gracias a los aportes de las personalidades antes mencionadas y muchos otros personajes matemáticos que dieron su granito de arena para el desarrollo de tan importante teoría sobre espacios medibles

## 2 1 MEDIDA

**Definición 2 1 1** *Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos de un conjunto no vacío $X$ Una función de conjunto $\mu$ $\mathcal{S} \to [0, \infty]$ es una* ***medida sobre*** *$\mathcal{S}$ si verifica las siguientes propiedades*

*1* $\mu(\emptyset) = 0$

*2* *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion disyunta en $\mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Lo que significa que $\mu$ es $\sigma$ aditiva*

*Al triple $(X, \mathcal{S}\ \mu)$, donde $X$ es un conjunto no vacío, $\mathcal{S}$ es un semianillo de subconjuntos de $X$ y $\mu$ es una medida sobre $\mathcal{S}$ se le llama* ***espacio de medida***

**Observaciones**

1 Si la propiedad 2 de la Definición 2 1 1 sólo es válida para sucesiones finitas de conjuntos disyuntos $A_1, \quad A$ entonces llamaremos a la medida $\mu$ una medida finitamente aditiva

2 Una medida $\mu$ es llamada finita si $\mu(X) < \infty$

3 Una medida $\mu$ es llamada infinita si $\mu(X) = \infty$

4 Una medida finita tal que $\mu(X) = 1$, es llamada una medida de probabilidad y el triple $(X \; S \; \mu)$ es llamado un espacio de probabilidad Aquí $X$ recibe el nombre de espacio de muestra y los elementos de $S$ son llamados eventos

5 Una medida $\mu$ sobre $S$ es llamada $\sigma$ finita si exite una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $S$ tal que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \qquad y \qquad \mu(A_n) < \infty,$$

para todo $n \in \mathbf{N}$

**Definición 2 1 2** *Un espacio de medida $(X, S \; \mu)$ es un espacio de medida completo si para cada $B \subset A$, con $A \in S$ y $\mu(A) = 0$ se tiene que $B \in S$*

**Teorema 2 1 1** *Sea $(X \; S \; \mu)$ un espacio de medida Entonces*

*1 Si $A_1, \quad A_n \in S$ son conjuntos disyuntos dos a dos y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

*lo que significa que $\mu$ es finitamente aditiva*

2 *Si $A$ $B \in \mathcal{S}$ y $A \subseteq B$, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

*lo que significa que $\mu$ es monotona*

**Demostración**

1 Sea $A_1 \quad A_n \in \mathcal{S}$ una familia de conjuntos disyuntos dos a dos tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$$

Tomemos $A_i = \emptyset$ para $i > n$ Luego $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disyunta de $\mathcal{S}$ que cumple que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$$

Luego por la Definición 2 1 1

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1} \mu(A_i)$$

Así $\mu$ es finitamente aditiva

2 Sea $A$ $B \in \mathcal{S}$ tal que $A \subseteq B$ Por la Definicion 1 2 1 existen $C_1 \quad C_n \in \mathcal{S}$ disyuntos dos a dos tales que

$$B \setminus A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

Luego

$$B = A \cup C_1 \cup \quad \cup C_r$$

la cual es una unión disyunta Por la parte 1 de este teorema obtenemos que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \quad + \mu(C_n) \geq \mu(A)$$

Con lo que se demuestra que $\mu(A) \leq \mu(B)$

**Ejemplo 2 1 1** (Medida de Conteo) *Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Definamos $\mu \quad \mathcal{S} \to [0, \infty]$ por*

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } A \text{ es un subconjunto infinito de } X \\ \#(A) & \text{si } A \text{ es un subconjunto finito de } X \end{cases}$$

*Entonces $(X \ \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida*

En efecto

1 $\mu(\emptyset) = \#(\emptyset) = 0$

2 Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{S}$ una sucesión disyunta tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{S},$$

entonces

a) El primer caso es que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sea un conjuto finito Si esto ocurre entonces todos, excepto una cantidad finita de $A_n$ son diferentes del vacío Supongamos que

$$k = \#\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \text{la cantidad de elementos de } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ luego}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = k$$

ya que los conjuntos son disyuntos

$b)$ El segundo caso es que la $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sea un conjunto infinito Entonces,

- La primera opcion es que por lo menos un $A_n$ sea un conjunto infinito

  Luego tanto

  $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \text{como} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

  van a ser igual al $\infty$

- La segunda opción es que todos los $A_n$ sean finitos y diferentes del vacio Al igual que en el caso anterior tanto

  $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \text{como} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

  van a ser igual al $\infty$

Por lo anterior tenemos que $(X\ S\ \mu)$ es un espacio de medida

**Ejemplo 2.1.2** (Medida de la Probabilidad Discreta) *Sea* $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *y* $p_1, p_2, \ldots \in [0, 1]$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

*Para cada* $A \subset X$ *se define*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n I_A(x_n)$$

*donde* $I_A(\,)$ *representa la función indicadora del conjunto* $A$ *definida por*

$$I_A(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n \notin A \\ 1, & \text{si } x_n \in A \end{cases}$$

*Entonces* $P$ *es una medida de probabilidad sobre* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$*, llamada la medida de probabilidad discreta*

En efecto

1. $P(\emptyset) = 0$, ya que el conjunto vacío no contiene a ningún $x_n \in X$

2. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es una sucesión disyunta tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

entonces

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(x_i)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i I_{A_n}(x_i)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

3

$$P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n I_X(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Por lo anterior tenemos que $P$ es una medida de probabilidad discreta sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

**Ejemplo 2 1 3** (Medida Delta de Dirac) *Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Fijemos un elemento $a \in X$ y definamos $\mu$ $\mathcal{S} \to [0, \infty)$ por*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si\ a \notin A \\ 1, & si\ a \in A \end{cases}$$

*Entonces $(X\ \mathcal{S}\ \mu)$ es un espacio de medida, llamado la probabilidad concentrada en $a$ y suele denotarse con $\delta_a$*

En efecto

1 $\mu(\emptyset) = 0$ ,ya que el conjunto vacío no contiene a $a \in X$

2. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ es una sucesión disyunta tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Para probar esto tenemos dos casos

a) El primer caso es que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ esto quiere decir que el punto característico $a \in X$ está en uno de los $A_n$ y solamente en uno porque los $A_n$ son disyuntos Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 1$ ya que $\mu(A_n) = 0$ para todos los $A_n$ que no contienen a $a \in X$

b) El segundo caso es que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ esto quiere decir que el punto característico $a \in X$ no está en ninguno de los $A_n$ luego la $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$ ya que $\mu(A_n) = 0$ para todos los $A_n$, porque ninguno contiene a $a \in X$

Por lo anterior tenemos que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de medida

**Teorema 2 1 2** *Sea $\mathcal{S}$ un semianillo y $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ una funcion de conjunto Entonces $\mu$ es una medida sobre $\mathcal{S}$ si y solamente si satisface las siguientes propiedades*

*1* $\mu(\emptyset) = 0$

*2* *Si $A \in \mathcal{S}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ y se cumple que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \quad y \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

*para $i \neq j$ entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

3 *Si $A \in \mathcal{S}$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ tal que*

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

*entonces*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Esto es, $\mu$ es $\sigma$ subaditiva*

**Demostración**

$\Rightarrow$] Asumamos que $\mu$ es una medida Entonces

1 $\mu(\emptyset) = 0$ ya que $\mu$ es una medida

2 Sea $A \in \mathcal{S}$ $A_1$ $A_n \in \mathcal{S}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \quad \text{y} \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

para $i \neq j$ Por el Teorema 1 3 1 existen conjuntos disyuntos $B_1$ $B_m \in \mathcal{S}$ tal que

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

Definamos la sucesion $\{C\}_{\leq n+n}$ como sigue

$$C_1 = A_1, \quad , C_n = A_n \quad \text{y} \quad C_{n+i} = B_i \qquad \text{para } 1 \leq i \leq m$$

Como los conjuntos $C_1 \quad C_{n+m} \in \mathcal{S}$ son disyuntos dos a dos y

$$A = \bigcup_{i=1}^{i+m} C_i \in \mathcal{S}$$

entonces por el Teorema 2 1 1 se tiene que

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{=1}^{n+m} C\right) = \sum_{=1}^{n+m} \mu(C_i) \geq \sum_{=1}^{n} \mu(A_i)$$

3 Asumamos que $A \in \mathcal{S}$ y $\{A\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ con

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$$

Definamos la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue

$$B_1 = A_1 \quad \text{y} \quad B_{n+1} = A_{+1} \setminus \bigcup_{=1}^{n} A_i \qquad \text{para } n \geq 1$$

Entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad B_n \subseteq A_n$$

para cada $n$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disyunta Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ entonces por el Teorema 1 3 1 para cada $n \geq 2$ existen conjuntos disyuntos

$$C_1^n \quad C_k^n \in \mathcal{S}$$

tal que

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{k} C_i^n$$

Por la propiedad 2 anterior y por el hecho de que $\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n \subseteq A_n$ para cada $n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_i^n) \leq \mu(A_n)$$

Para $n = 1$, se toma $k_1 = 1$ y $C_1^1 = A_1$ Por otro lado, tenemos que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n}(C_i^n \cap A)$$

es una unión disyunta Como $\mu$ es una medida entonces por la Definición 2 1 1 tenemos que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mu(C_i^n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} \mu(C_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$\Leftarrow$] Recíprocamente supongamos que $\mu$ $S \to [0\ \infty]$, satisface las propiedades 1, 2 y 3 Entonces

i) $\mu(\emptyset) = 0$ por la propiedad 1

ii) De las propiedades 2 y 3 se deduce directamente que $\mu$ es $\sigma$ aditiva

Por lo tanto $\mu$ es una medida

**Definición 2 1 3** (Medida Finitamente Aditiva) *Sea $S$ un semianillo de conjuntos de un conjunto no vacio $X$ Una función de conjunto $\mu : S \to [0, \infty]$ es una* ***medida finitamente aditiva*** *sobre $S$ si verifica las siguientes propiedades*

*1* $\mu(\emptyset) = 0$

*2* *Si $A_1, \ldots, A_n \in S$ es una sucesión disyunta tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

**Teorema 2 1 3** *Sea $\mu$ una medida finitamente aditiva sobre un semianillo $S$, $A, B \in S$ y $A \subseteq B$ Entonces se cumple que $\mu(A) \leq \mu(B)$ lo que significa que $\mu$ es monotona*

**Demostración**

Sea $A, B \in S$ tal que $A \subseteq B$ Por la Definicion 1 2 1 existen $C_1, \ldots, C_n \in S$ disyuntos dos a dos tales que

$$B \setminus A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

luego $B = A \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$, la cual es una unión disyunta Como $A, C_1, \ldots, C_n \in S$ son conjuntos disyuntos dos a dos y $B \in S$ con $B = A \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$, entonces como $\mu$ es una medida finitamente aditiva,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(C_1) + \cdots + \mu(C_n) \geq \mu(A)$$

Con lo que se demuestra que $\mu(A) \leq \mu(B)$

**Teorema 2 1 4** *Si $\mu$ es una medida entonces $\mu$ es una medida finitamente aditiva*

**Demostración**

Esto es consecuencia inmediata del Teorema 2 1 1

Veamos el siguiente ejemplo para demostrar que la recíproca del Teorema 2 1 4 no es cierta

**Ejemplo 2 1 4** *Consideremos el anillo $S = \{A \subseteq \mathbf{R} \quad A$ es a lo sumo enumerable$\}$*

*Definamos $\mu \quad S \to [0, \infty]$ por*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito enumerable} \end{cases}$$

*Probemos que $\mu$ es una medida finitamente aditiva*

En efecto sea $A_1, \quad , A_n \in S$ disyuntos dos a dos y

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

entonces $A \in S$ ya que la unión finita de conjuntos enumerables es enumerable

Tenemos dos casos

1 El primer caso es que todos los $A_i$ sean conjuntos finitos luego la $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un conjuto finito y por lo tanto su medida es cero También $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = 0$, ya que todos los conjuntos $A$ son finitos

2 El segundo caso es que uno de los $A_i$ sea un conjunto infinito enumerable Luego $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un conjunto infinito enumerable y por lo tanto

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A\right) = \infty$$

Tambien

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \infty,$$

ya que por lo menos un $A_i$ es infinito enumerable

Como $\mu(\emptyset) = 0$ por lo anterior tenemos que $\mu$ es una medida finitamente aditiva

Probemos ahora que $\mu$ no es una medida Para ello probaremos que $\mu$ no es $\sigma$ aditiva

Sabemos que $\mathbf{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ Por otro lado tenemos que $\mu(\mathbf{N}) = \infty$, pero

$$\infty = \mu(\mathbf{N}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0$$

Lo que demuestra que $\mu$ no es $\sigma$ aditiva y por lo tanto no es una medida

## 2 2 MEDIDA EXTERIOR

**Definición 2 2 1** *Sea $X$ un conjunto no vacio Una funcion $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$ es una **medida exterior** sobre $X$ si satisface las siguientes propiedades*

*1* $\mu(\emptyset) = 0$

*2* $\mu(A) \leq \mu(B)$, *siempre que $A \subseteq B$ lo que significa que $\mu$ es monotona*

*3*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $X$, lo que significa que $\mu$ es $\sigma$ subaditiva*

**Definición 2 2 2** *Sea $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ \infty]$ una medida exterior sobre $X$ Un sub conjunto $E \subseteq X$ es **medible** respecto a la medida exterior $\mu$ si para todo $A \subseteq X$, se tiene que*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E\ )$$

**Definición 2 2 3** *Sea $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$ una medida exterior sobre $X$ y $E \subseteq X$ $E$ es un conjunto nulo si $\mu(E) = 0$*

**Teorema 2 2 1** *Sea $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ \infty]$ una medida exterior sobre $X$ y $E \subseteq X$ Si $E$ es un cojunto nulo, entonces $E$ es medible*

**Demostración**

Supongamos que $\mu(E) = 0$ Sea $A \subseteq X$, un conjunto arbitrario Sabemos que

$$A \cap E \subseteq E \quad \text{y que} \quad A \cap E \subseteq A$$

Por la Definición 2 2 1

$$\mu(A \cap E) \leq \mu(E) = 0 \quad \text{y} \quad \mu(A \cap E) \leq \mu(A)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu[(A \cap E) \cup (A \cap E^c)] &\leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \\ &= 0 + \mu(A \cap E^c) \\ &= \mu(A \cap E^c) \\ &\leq \mu(A) \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$$

Lo que demuestra el teorema

**Teorema 2 2 2** *Sea $\mu$ $\mathcal{P}(X) \to [0\ \infty]$ una medida exterior sobre $X$ $A \subseteq X$ y $E_1,\ \ ,E_n$ conjuntos disyuntos y medibles de $X$, entonces*

$$\mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i)$$

**Demostración**

Haremos la demostración por inducción matemática sobre $n$ Si $n = 1$ el resultado es inmediato Asumamos que se cumple para $n$ es decir que

$$\mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i)$$

Demostremos que se cumple para $n+1$ Tomemos $E_1 \quad , E_n, E_{n+1}$ conjuntos disyuntos y medibles de $X$ Consideremos ahora las siguientes identidades

1 $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$

2 $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap (E_{n+1})^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$

Como $E_{n+1}$ es un conjunto medible y aplicando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right)\right] &= \mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}\right] + \mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap (E_{n+1})^c\right] \\
&= \mu(A \cap E_{n+1}) + \mu\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] \\
&= \mu(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A \cap E_i)
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema

**Teorema 2 2 3** *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida La función de conjunto*

$$\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty],$$

*definida por*

$$\mu \ (A) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \right\}$$

*si no existe una sucecion $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces $\mu \ (A) = \infty$ es una medida exterior, llamada la medida exterior generada por $\mu$*

**Demostración**

1 $\mu \ (\emptyset) = 0$ es evidente

2 Supongamos que $A \ B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ tal que $A \subseteq B$ Si

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{con} \qquad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S},$$

entonces es claro que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{y} \qquad \mu \ (A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Así que

$$\mu \ (B) = inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \right\} \geq \mu \ (A)$$

Por otro lado si $\mu \ (B) = \infty$, entonces obviamente $\mu \ (A) \leq \mu \ (B)$

Así pues $\mu \ (A) \leq \mu \ (B)$

3 Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión cualquiera en $X$ Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n) = \infty$$

entonces se tiene que

$$\mu\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n)$$

Podemos entonces asumir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_i) < \infty$$

y escojamos un $\epsilon > 0$ arbitrario Para cada $i \in \mathbf{N}$ podemos escoger una sucesión

$\{A_n^i\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $\mathcal{S}$ tal que

$$A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu\ (A_i) + 2^{-}\ \epsilon$$

Note que $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ está en $\mathcal{S}$ para cada $i$ y $n$, y además

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^i$$

por lo cual

$$\mu\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}[\mu\ (A\ ) + 2^{-i}\epsilon] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\ (A_i) + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$ Luego

$$\mu\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n)$$

De todo lo anterior se tiene que $\mu$ es una medida exterior

**Teorema 2.2.4** *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $\mu^*$ la medida exterior generada por $\mu$. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

**Demostración**

Sea $A \in \mathcal{S}$ y definamos $A_1 = A$, $A_n = \emptyset$, para todo $n > 1$. De lo anterior se tiene que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y por la definición de $\mu^*$ se tiene que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

de donde

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad (*)$$

Por otro lado, si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces por el Teorema 2.1.2,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

por lo cual

$$\mu(A) \leq inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \right\} = \mu^*(A) \qquad (**)$$

De (*) y (**) se concluye que $\mu(A) = \mu^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{S}$.

**Ejemplo 2.2.1** *Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, X\}$ y considere la medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ definida por $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{3\}) = \mu(\{1,2\}) = 1$ y $\mu(X) = 2$. Describamos la medida exterior $\mu^*$ generada por la medida $\mu$.*

En efecto, la medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$ generada por $\mu$, está definida por

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre al $\emptyset$ es el $\emptyset$ con medida 0.

2. $\mu^*(\{1\}) = 1$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre al $\{1\}$ es el $\{1,2\}$, con medida 1.

3. $\mu^*(\{2\}) = 1$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre al $\{2\}$ es el $\{1,2\}$, con medida 1.

4. $\mu^*(\{3\}) = 1$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre al $\{3\}$ es el $\{3\}$, con medida 1.

5. $\mu^*(\{1,2\}) = 1$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre al $\{1,2\}$ es el $\{1,2\}$, con medida 1.

6. $\mu^*(\{1,3\}) = \mu^*(\{2,3\}) = \mu^*(\{1,2,3\}) = 2$, ya que el cubrimiento de $\mathcal{S}$ con menor medida que cubre a $\{1,3\}$, a $\{2,3\}$ y a $\{1,2,3\}$ es $X$, con medida 2.

**Teorema 2 2 5** *Sea $(X\ S\ \mu)$ un espacio de medida $\mu$ la medida exterior generada por $\mu$ y $E$ un subconjunto de $X$ Los siguientes enunciados son equivalentes*

*1* *$E$ es $\mu$ medible*

*2* *Para todo $A \in S$, $\mu(A) < \infty$, se cumple que $\mu(A) = \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c)$*

*3* *Para todo $A \in S$ $\mu(A) < \infty$ se cumple que $\mu(A) \geq \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c)$*

*4* *Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $\mu\ (A) \geq \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E\ )$*

**Demostración**

- $1 \Rightarrow 2$] Supongamos que $A \in S$ y $\mu(A) < \infty$ Como $E$ es $\mu$ medible, se tiene que

$$\mu\ (A) = \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c)$$

Por otro lado como $A \in S$ por el Teorema 2 2 4 se tiene que $\mu(A) = \mu\ (A)$ Así pues

$$\mu(A) = \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c)$$

- $2 \Rightarrow 3$] Es obvio

- $3 \Rightarrow 4$] Sea $A \subseteq X$ un conjunto arbitrario Si $\mu\ (A) = \infty$ no hay nada que probar Supongamos que $\mu\ (A) < \infty$ Sea $\epsilon > 0$ y tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $S$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu\ (A) + \epsilon < \infty$$

Por hipótesis se tiene que

$$\mu\ (A_n \cap E) + \mu\ (A_n \cap E^c) \leq \mu(A_n)$$

para cada $n \in \mathbf{N}$ Luego

$$\begin{aligned}
\mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c) &\leq \mu\ \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E\right] + \mu\ \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E^c\right] \\
&= \mu\ \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right] + \mu\ \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E^c)\right] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n \cap E^c) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu\ (A_n \cap E) + \mu\ (A_n \cap E^c)] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&\leq \mu\ (A) + \epsilon
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$ Por consiguiente

$$\mu\ (A) \geq \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c)$$

- $4 \Rightarrow 1$] Por la $\sigma$ subaditividad de $\mu$ se tiene que

$$\mu\ (A) = \mu\ [(A \cap E) \cup (A \cap E^c)] \leq \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c), \qquad (*)$$

para todo $A \subseteq X$ Por hipótesis se tiene que

$$\mu\ (A) \geq \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c) \qquad (**)$$

para todo $A \subseteq X$ Luego de (*) y (**), se tiene que

$$\mu\ (A) = \mu\ (A \cap E) + \mu\ (A \cap E^c),$$

para todo $A \subseteq X$ Por lo tanto $E$ es $\mu$ medible

## 2.3 MEDIDA SIGNADA O MEDIDA CON SIGNO

Supongamos que $\mu_1$ y $\mu_2$ son dos medidas sobre un semianillo $S$ de subconjuntos de un conjunto no vacío $X$. Si definimos para cada conjunto $A$ en $S$

$$\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$$

tendremos que $\mu$ obviamente es una medida. Otra forma de obtener una nueva medida es multiplicar una medida $\mu$ por una constante arbitraria no negativa.

Pero si en vez de multiplicar a la medida $\mu$ por una contante arbitraria no negativa lo hacemos por una constante arbitraria negativa veamos lo que pasa. Tomemos el ejemplo del párrafo anterior, pero ahora multiplicando $\mu_2$ por $-1$, tendremos que

$$\mu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$$

Analizando este caso tendremos dos posibles problemáticas. La primera es que $\mu$ puede tomar valores negativos sobre algunos elementos de $S$, lo cual es algo interesante para estudiar. La segunda es más delicada aun, si

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \infty$$

estaríamos en serios problemas ya que

$$\mu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A) = \infty - \infty$$

Recordemos que la suma en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]$ es la de $\mathbb{R}$ y

1. $a + \infty = \infty + a = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$

2. $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$

3. $\infty + \infty = \infty$

4. $-\infty - \infty = -\infty$

5. El orden se extiende, siendo $-\infty < x < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Pero la expresión $\infty - \infty$ no está definida. Para evitar esta forma indeterminada debemos acordar que la sustracción de dos medidas solo se efectuará si al menos una de ellas es finita.

Para referirnos a lo anterior utilizaremos el concepto de ***medida signada*** o ***medida con signo***, el cual surge cuando se considera de manera natural la diferencia entre dos medidas positivas.

**Definición 2.3.1** *Sea $S$ un $\sigma$-algebra de conjuntos de un conjunto no vacío $X$ y*

$$\mu : S \to [-\infty, +\infty]$$

*una función de conjuntos. $\mu$ es una* ***medida signada*** *o* ***medida con signo*** *si satisface las siguientes propiedades*

*1. $\mu(\emptyset) = 0$*

*2. $\mu$ asume a lo sumo uno de los valores $\infty$ y $-\infty$*

*3. $\mu$ es $\sigma$-aditiva, esto es, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion disyunta en $S$ tal que*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$$

*entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*Al triple $(X, S, \mu)$, se le llama* ***espacio de medida signada****, o* ***espacio de medida con signo*** *A los elementos de $S$ les llamaremos los subconjuntos medibles de $X$*

La medida signada $\mu$ se dice que es finita si $\mu(X) \in \mathbb{R}$ La medida signada $\mu$ se dice que es $\sigma$ finita si existe una sucesion $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $S$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \quad \text{y} \quad \mu(A_n) \in \mathbb{R}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$

**Observaciones**

1 Si $\mu$ es una medida signada y una sucesión disyunta $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ en $S$ satisface

$$\left| \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \right| < \infty,$$

entonces como cualquier permutación de $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tiene la misma unión que la sucesión original, de la Definición 2 3 1, se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ es invariante bajo reordenamiento Por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \mid \mu(A_n) \mid$ es convergente en $\mathbb{R}$

2 Si $\mu$ es una medida signada entonces $-\mu$ es una medida signada

3 Claramente, toda medida es una medida signada

4 Toda medida signada es finitamente aditiva

**Teorema 2 3 1** *Sea $(X\ S\ \mu)$ un espacio de medida signada y sean $A\ B \in S$ tales que $|\ \mu(A)\ | < \infty$ y $B \subseteq A$, entonces*

$$|\ \mu(B)\ | < \infty \qquad y \qquad \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

**Demostración**

Como $A = (A \setminus B) \cup B$ por la Definición 2 3 1

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$$

Como $\mu(A)$ es un numero real y $\mu$ asume a lo sumo uno de los valores $\infty$ y $-\infty$ se tiene que tanto $\mu(A \setminus B)$ como $\mu(B)$ son numeros reales Por consiguiente

$$|\ \mu(B)\ | < \infty \qquad \text{y} \qquad \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

**Definición 2 3 2** *Sea $(X\ S\ \mu)$ un espacio de medida signada y $A \in S$ $A$ es un conjunto positivo, y lo denotamos por $A \geq 0$, si $\mu(E \cap A) \geq 0$ para todo $E \in S$ En otras palabras, un conjunto $A \in S$ es un conjunto positivo si $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in S$, $E \subseteq A$*

**Ejemplo 2 3 1** *El conjunto vacío es un conjunto positivo*

En efecto $\mu(E \cap \emptyset) = 0$, para cada $E \in \mathcal{S}$

**Teorema 2 3 2** *Sea $\mathcal{S}$ un $\sigma$ algebra de conjuntos de un conjunto no vacio $X$ $\mu$ una medida signada sobre $\mathcal{S}$ y $A$ un conjunto positivo Si $E$ es un conjunto medible tal que $E \subseteq A$ entonces $E$ es un conjunto positivo*

**Demostración**

Supongamos que $A$ es un conjunto positivo luego $\mu(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathcal{S}$ con $B \subseteq A$ Como $E \subseteq A$ y $E$ es un conjunto medible entonces $\mu(E) \geq 0$ y además $\mu(C) \geq 0$, para todo $C \in \mathcal{S}$ con $C \subseteq E$ Así pues $E$ es un conjunto positivo

**Teorema 2 3 3** *Sea $\mathcal{S}$ un $\sigma$ algebra de conjuntos de un conjunto $X$ y $\mu$ una medida signada sobre $\mathcal{S}$ Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de conjuntos positivos en $\mathcal{S}$ entonces*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

*es un conjunto positivo*

**Demostracion**

Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de conjuntos positivos en $\mathcal{S}$ y sea $B_1 = A_1$,

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

para $n \geq 1$ Note que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion disyunta en $S$ Además

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

y $B_n \subseteq A_n$ para todo $n$ Luego por el Teorema 2 3 2 los $B_n$ son conjuntos positivos Por lo tanto, para cada conjunto medible $E$ se tiene que

$$\mu(E \cap A) = \mu\left[E \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right] = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n) \geq 0$$

por lo tanto $A$ es un conjunto positivo

**Definición 2 3 3** *Sea $(X\ S\ \mu)$ un espacio de medida signada y $A \in S$ $A$ es un* ***conjunto negativo****, y lo escribiremos $A \leq 0$ si $\mu(E \cap A) \leq 0$ para cada $E \in S$*

**Ejemplo 2 3 2** *El conjunto vacio es un conjunto negativo*

En efecto, $\mu(E \cap \emptyset) = 0$, para cada $E \in S$

**Observación** Al igual que los conjuntos positivos los subconjuntos medibles de conjuntos negativos son conjuntos negativos y la unión enumerable de conjuntos negativos es un conjunto negativo

**Teorema 2 3 4** *Sea $S$ un $\sigma$ algebra de conjuntos de un conjunto $X$ $\mu$ una medida signada sobre $S$ y sea $E \in S$ con $\mu(E) > 0$ Entonces existe un conjunto positivo $A$ tal que $A \subseteq E$ y $\mu(A) > 0$*

**Demostración**

Si para cada subconjunto medible $B$ de $E$ se tiene que $\mu(B) \geq 0$ entonces $E$ es un conjunto positivo y no hay nada que probar Supongamos que existe algun $B \in S$ con $B \subseteq E$ y $\mu(B) < 0$

Por el Lema de Zorn existe una familia maximal $\mathcal{C}$ de subconjuntos disyuntos y medibles de $E$ tal que $\mu(C) < 0$ para cada $C \in \mathcal{C}$ Probemos que $\mathcal{C}$ es a lo sumo enumerable En efecto, note que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

donde

$$\mathcal{C}_n = \left\{ C \in \mathcal{C} \quad \mu(C) < -\frac{1}{n} \right\}$$

Por otro lado si algun $\mathcal{C}_n$ no es finito entonces este debe contener un subconjunto enumerable de $\mathcal{C}$ es decir $\{C_1 \ C_2 \quad \}$ Pero el conjunto medible

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

satisface que

$$C \subseteq E \qquad \text{y} \qquad \mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = -\infty$$

Esto implica que

$$\mu(E) = \mu(E \setminus C) + \mu(C) = -\infty$$

lo cual es una contradicción Así pues, cada $\mathcal{C}_n$ es finito y $\mathcal{C}$ es a lo sumo enumerable El conjunto

$$D = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

2. $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap A_1)$

3. $\mu(E \cap B) = \mu(E \cap B_1)$

*para cada* $E \in S$

**Demostración**

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mu(E) \neq \infty$ para cada $E \in S$ (si este no es el caso reemplazamos $\mu$ por $-\mu$). Sea

$$a = sup\{\mu(E) \quad E \geq 0\} \geq 0$$

Escojamos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = a$$

Entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

es un conjunto positivo, y como

$$\mu(A_n) \leq \mu(A) \leq a$$

se tiene que

$$a = \mu(A) < \infty$$

Probemos que $B = X \setminus A$ es un conjunto negativo con respecto a $\mu$. En efecto, supongamos que existe un subconjunto medible $C$ de $B$ con $\mu(C) > 0$. Por el Teorema

2.3.4 existe un conjunto positivo $E$ con $E \subseteq C$ y $\mu(E) > 0$. De donde se sigue que $A \cup E \geq 0$ y

$$a + \mu(E) = \mu(A) + \mu(E) = \mu(A \cup E) \leq a < \infty$$

lo que es imposible. Luego $B = X \setminus A$ es un conjunto negativo y $(A, B)$ es una descomposición de Hahn de $X$ con respecto a $\mu$.

Para probar la "unicidad" de la descomposición de Hahn, supongamos que $(A_1, B_1)$ es otra descomposicion de Hanh de $X$. Como

$$A \setminus A_1 \subseteq A \qquad \text{y} \qquad A \setminus A_1 = A \cap A_1^c = A \cap B_1 \subseteq B_1$$

se sigue que

$$\mu(A \setminus A_1) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \mu(A \setminus A_1) \leq 0$$

de donde,

$$\mu(A \setminus A_1) = 0$$

De manera similar

$$\mu(A_1 \setminus A) = 0,$$

y

$$\mu(A \triangle A_1) = \mu[(A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A)] = \mu(A \setminus A_1) + \mu(A_1 \setminus A) = 0$$

Igualmente se prueba que

$$\mu(B \triangle B_1) = 0$$

Para probar el enunciado 2 supongamos que, $E \in \mathcal{S}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mu(E \cap A) &= \mu\{E \cap [(A \setminus A_1) \cup (A \cap A_1)]\} \\
&= \mu[E \cap (A \setminus A_1)] + \mu(E \cap A \cap A_1) \\
&= \mu(E \cap A \cap A_1) \\
&= \mu[E \cap (A_1 \setminus A)] + \mu(E \cap A \cap A_1) \\
&= \mu\{E \cap [(A_1 \setminus A) \cup (A_1 \cap A)]\} \\
&= \mu(E \cap A_1)
\end{aligned}$$

Por la simetria de la situación, el enunciado 3 es cierto Así pues, queda demostrado el teorema

## 2 4 MEDIDAS REALES Y COMPLEJAS

**Definición 2 4 1** *Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos de un conjunto no vacio $X$ Una función de conjunto $\mu$ $\mathcal{S} \to \mathbf{R}$ es una* ***medida real*** *sobre $\mathcal{S}$ si verifica las siguientes propiedades*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion disyunta en $\mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Es importante destacar que a una medida signada finita también se le llama medida real

**Definición 2 4 2** *Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos de un conjunto no vacío $X$ Una función de conjunto $\mu$ $\mathcal{S} \to \mathbf{C}$ es una* ***medida compleja*** *sobre $\mathcal{S}$ si verifica las siguientes propiedades*

*1* $\mu(\emptyset) = 0$

*2* *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión disyunta en $\mathcal{S}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Observaciones**

1 Las medidas reales son un subconjunto de las medidas complejas

2 Cada medida compleja $\mu$ puede escribirse de forma unica como

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2,$$

donde $\mu_1$ y $\mu_2$ son medidas reales

3 La serie de la propiedad 2, de la Definición 2 4 2 ,es una serie absolutamente convergente, ya que ella converge a un mismo valor complejo, para cualquier reordenación que se haga de la serie porque la unión no cambia

# CAPÍTULO III

# ESPACIOS DE MEDIDA CUÁNTICA

# III ESPACIOS DE MEDIDA CUANTICA

En este capítulo abordaremos la teoría de los espacios de medida cuántica. Así como la mecánica cuántica posee una cierta *rareza cuantica*, estos espacios carecen de algunas propiedades clásicas. Aunque hay una teoría general sobre espacios de medida cuántica, en este capítulo consideraremos solamente los espacios de medida cuánticos finitos, los cuales presentan algunas de las propiedades inusuales de los objetos cuánticos. Gran parte de este comportamiento raro se debe a un fenómeno llamado interferencia cuántica.

Presentaremos una reseña histórica, la definición de medida cuántica y ejemplos de espacios de medida cuántica. También abordaremos la interferencia cuántica, la compatibilidad y el centro de un espacio de medida cuántica, los cubrimientos cuánticos y a manera de generalización, los espacios de medida super cuántica.

## 3.1 RESEÑA HISTORICA

Los Espacios de Medida Cuántica fueron introducidos por Rafael D. Sorkin [46] en sus estudios de las historias abordadas por la mecánica cuántica y sus aplicaciones a la gravedad cuántica y cosmología. Sus estudios se basan en el fallo de la aditividad clásica de probabilidades, que lo demuestra con el famoso experimento de dos aberturas. Este mismo experimento lo hace también con tres aberturas. Los mismos llevan a Sorkin en 1994 a referirse a una jerarquía en las Reglas de Suma

(Grados de Aditividad) En el primer nivel está la interferencia nula, la cual trivializa la medida y no tiene importancia. En el segundo nivel aparece la Aditividad de Grado-1 el cual expresa la medida clásica que conocemos. En el tercer nivel esta la Aditividad de Grado-2 el cual define una generalización de la teoría clásica de la medida, esta es la teoría de la medida cuántica. El cuarto y niveles siguientes definen formas mas generales de la teoría de la medida, las cuales pueden ser consideradas como extensiones naturales de la mecánica cuántica.

Desde entonces pocas investigaciones han aparecido sobre el tema. Dichas investigaciones se han centrado en los espacios finitos de medida cuántica, es decir, en los espacios de medida cuántica en los cuales el número de puntos simples es finito.

## 3.2 MEDIDA CUANTICA

La definición de medida fue abordada en el capítulo anterior. Ahora nos compete abordar la medida cuántica. Para realizar este estudio debemos entrar en la rama de la física llamada mecánica cuántica y abordarla matemáticamente. Nuestro primer inconveniente es que la medida cuántica no necesita ser aditiva, contrario a lo que estamos acostumbrados a ver en la medida estudiada en el capítulo anterior. La pregunta sería ¿cómo puede fallar una propiedad tan simple como esta en una teoría física como la mecánica cuántica? Bien, la respuesta es que este fallo se debe a un fenómeno llamado interferencia cuántica. Esto es, si $X$ es un conjunto finito formado por objetos cuánticos, entonces ellos pueden interferir con cada uno de los otros objetos cuánticos, ambos destructivamente o constructivamente. Por ejemplo, si $x_1$ y

$x_2$ son partículas subatómicas y $\mu$ la medida de sus masas entonces podríamos tener que

$$\mu(\{x_1\}) > 0 \qquad y \qquad \mu(\{x_2\}) > 0,$$

pero podría ser que $x_1$ y $x_2$ sean un par de partículas antipartículas lo que las anularía produciendo solamente energía Si esto ocurre, tendríamos que $\mu(\{x_1\ x_2\}) = 0$ Lo que implicaría que

$$\mu(\{x_1, x_2\}) \neq \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\})$$

provocando que falle la propiedad de la aditividad y por tanto que la medida cuántica no sea necesariamente aditiva

Luego de esta pequena introduccion, un poco desconcertante vamos a ver una serie de definiciones y observaciones que nos ayudarán a comprender esta rara medida cuántica y por tanto a los espacios de medida cuántica

La Definición 2 1 1 del capítulo anterior nos presenta el concepto de medida En la Observación 1 de esta definición podemos ver el concepto de medida aditiva o función de conjunto aditiva

Para efectos de este capítulo consideremos las siguientes observaciones

**Observaciones**

1 El concepto de medida, visto en la Definición 2 1 1 del capítulo anterior, de ahora en adelante lo llamaremos medida clasica, para diferenciarlo del concepto de medida cuántica que veremos en este capitulo

2 Una funcion de conjunto aditiva se dice que es aditiva de Grado-1

3 Un espacio de medida clasico tambien se le conce como espacio de medida Grado-1

4 Sea $X$ un conjunto finito no vacio y $A$ $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ usaremos la notación $A \sqcup B$, para referirnos a $A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$

Veamos ahora unas definiciones y observaciones importantes

**Definición 3 2 1** (Aditividad de Grado 2) *Sea $X$ un conjunto no vacio Una función de conjunto $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ es* ***Aditiva de Grado-2*** *si cumple que*

$$\mu(A \sqcup B \sqcup C) = \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C)$$

**Definición 3 2 2** (Regular) *Una funcion de conjunto $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0 +\infty)$ es* ***Regular,*** *si cumple las dos condiciones siguientes*

*1 Si $\mu(A) = 0$ entonces $\mu(A \sqcup B) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$*

*2 Si $\mu(A \sqcup B) = 0$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$*

**Observaciones**

1 La Definición 3 2 1 es una generalizacion de la aditividad

2 Aditividad de Grado-1 implica Aditividad de Grado-2 pero lo contrario no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3 2 1** *Sea $X = \{x_1\ x_2\ x_3\}$ Definamos la función*

$$\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$$

*como sigue*

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{x_1\}) = 0 \qquad y \qquad \mu(A) = 1$$

*para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \setminus \{\emptyset, \{x_1\}\}$ Entonces $\mu$ es Aditiva de Grado 2, pero $\mu$ no es Aditiva de Grado 1*

En efecto

$$\mu(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1$$

y

$$\mu(\{x_1\ x_2\}) + \mu(\{x_1\ x_3\}) + \mu(\{x_2\ x_3\}) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_2\}) - \mu(\{x_3\}) = 1+1+1-0-1-1 = 1$$

Pero

$$1 = \mu(\{x_1\ x_2, x_3\}) \neq \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) = 2$$

**Observaciones**

1 Una función Aditiva de Grado-2 $\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ es llamada una Medida de Grado-2

2 Si $\mu$ es una función Aditiva de Grado-2 entonces $\mu(\emptyset) = 0$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset) &= \mu(\emptyset \sqcup \emptyset) + \mu(\emptyset \sqcup \emptyset) + \mu(\emptyset \sqcup \emptyset) - \mu(\emptyset) - \mu(\emptyset) - \mu(\emptyset) \\
&= \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) - \mu(\emptyset) - \mu(\emptyset) - \mu(\emptyset) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3 Una función Aditiva de Grado-2 $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ en general no es monótona

**Definición 3 2 3** (Medida Cuántica) *Una* ***Medida Cuántica*** $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ *es una medida de Grado 2 regular Si $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ es una medida cuantica entonces $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ es un espacio de medida cuantica*

**Definición 3 2 4** (Medida Cuántica Signada) *Una* ***Medida Cuantica Signada*** *es una Medida Cuantica $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{R}$*

**Definición 3 2 5** (Medida Cuántica Compleja) *Una* ***Medida Cuántica Compleja*** *es una Medida Cuantica $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$*

**Observación**

1 Un espacio de medida clásica es un espacio de medida cuántica pero lo contrario no es cierto

*pero $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ no es un espacio de medida clasica*

En efecto,

2 Ahora probemos que $\mu$ es Regular

*a*) Si $\mu(A) = 0$ significa que $A = \emptyset$, luego

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(B)$$

$$\mu(A \sqcup C) = \mu(C)$$

$$\mu(A \sqcup E) = \mu(E)$$

Por lo tanto $\mu(A \sqcup M) = \mu(M)$ para todo $M \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ disyunto de $A$

*b*) Como $A$ es el unico conjunto cuya medida es cero se cumple que

$$\text{Si } \mu(A \sqcup B) = 0 \text{ entonces } \mu(A) = \mu(B)$$

De 1 y 2 se tiene que $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ es un espacio de medida cuántica

Note que

$$\begin{aligned} 6 = \mu(\{x_1\ x_2\}) &\neq \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu$ no es una medida clásica

Así pues, $\mu$ es una medida cuántica y $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ es un espacio de medida cuantica pero $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ no es un espacio de medida clásica

Una vez conocida la definición de medida cuántica y espacios de medida cuántica estudiemos un poco la matemática de la mecánica cuántica para describir las propiedades que poseen estos espacios de medida cuantica

**Definición 3 2 6** *Sea $X$ un conjunto de objetos cuanticos Una* ***Función Decoherencia*** *$D$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \times P(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$ es una fución que representa (al menos su parte real) la cantidad de interferencia entre pares de subconjuntos de $X$ y cumple las siguientes propiedades*

$$
\begin{aligned}
D(A \sqcup B\ C) &= D(A\ C) + D(B\ C) && (3\ 1)\\
D(A, B) &= \overline{D(B\ A)} && (3\ 2)\\
D(A\ A) &\geq 0 && (3\ 3)\\
\mid D(A\ B) \mid^2 &\leq D(A\ A) D(B\ B) && (3\ 4)
\end{aligned}
$$

*La barra horizontal que aparece en la ecuacion 3 2 se refiere al conjugado complejo*

**Ejemplo 3 2 3** *Sea $\nu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$ una medida clasica compleja sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ La función*

$$D \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$$

*definida por*

$$D(A\ B) = \nu(A)\overline{\nu(B)},$$

*es una función decoherencia En efecto,* 3 1

$$
\begin{aligned}
D(A \sqcup B\ C) &= \nu(A \sqcup B)\overline{\nu(C)} \\
&= [\nu(A) + \nu(B)]\overline{\nu(C)} \\
&= \nu(A)\overline{\nu(C)} + \nu(B)\overline{\nu(C)} \\
&= D(A\ C) + D(B\ C)
\end{aligned}
$$

3 2

$$
\begin{aligned}
D(A, B) &= \nu(A)\overline{\nu(B)} \\
&= \overline{\overline{\nu(A)}}\,\overline{\nu(B)} \\
&= \overline{\nu(B)\overline{\nu(A)}} \\
&= \overline{D(B\ A)}
\end{aligned}
$$

3 3

$$
\begin{aligned}
D(A\ A) &= \nu(A)\overline{\nu(A)} \\
&= |\ \nu(A)\ |^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

3 4

$$
\begin{aligned}
| D(A\ B) |^2 &= | \nu(A)\overline{\nu(B)} |^2 \\
&= \nu(A)\overline{\nu(B)}\ \overline{\nu(A)\overline{\nu(B)}} \\
&= \nu(A)\overline{\nu(B)}\ \overline{\nu(A)}\nu(B) \\
&= \nu(A)\overline{\nu(A)}\nu(B)\overline{\nu(B)} \\
&= D(A\ A)D(B\ B)
\end{aligned}
$$

Asi pues la funcion $D$ es una función decoherencia

**Teorema 3 2 1** *Sea $D$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$ una funcion decoherencia, entonces la funcion*

$$\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$$

*definida por*

$$\mu(A) = D(A\ A)$$

*es una medida cuantica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$*

**Demostración**

1 Primero probemos que $\mu$ es Aditiva de Grado-2 es decir

$$\mu(A \sqcup B \sqcup C) = \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C)$$

En efecto por las propiedades de la función decoherencia $D$ se tiene que

$$\mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) =$$

$$\begin{aligned}
&= D(A \sqcup B, A \sqcup B) + D(A \sqcup C, A \sqcup C) + D(B \sqcup C, B \sqcup C) \\
&\quad -\mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= D(A, A \sqcup B) + D(B, A \sqcup B) + D(A, A \sqcup C) + D(C, A \sqcup C) + D(B, B \sqcup C) \\
&\quad +D(C, B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= \overline{D(A \sqcup B, A)} + \overline{D(A \sqcup B, B)} + \overline{D(A \sqcup C, A)} + \overline{D(A \sqcup C, C)} \\
&\quad +\overline{D(B \sqcup C, B)} + \overline{D(B \sqcup C, C)} - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= \overline{D(A, A) + D(B, A)} + \overline{D(A, B) + D(B, B)} + \overline{D(A, A) + D(C, A)} \\
&\quad +\overline{D(A, C) + D(C, C)} + \overline{D(B, B) + D(C, B)} + \overline{D(B, C) + D(C, C)} \\
&\quad -\mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= \overline{D(A, A)} + \overline{D(B, A)} + \overline{D(A, B)} + \overline{D(B, B)} + \overline{D(A, A)} + \overline{D(C, A)} \\
&\quad +\overline{D(A, C)} + \overline{D(C, C)} + \overline{D(B, B)} + \overline{D(C, B)} + \overline{D(B, C)} + \overline{D(C, C)} \\
&\quad -\mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= D(A, A) + D(A, B) + D(B, A) + D(B, B) + D(A, A) + D(A, C) \\
&\quad +D(C, A) + D(C, C) + D(B, B) + D(B, C) + D(C, B) + D(C, C) \\
&\quad -\mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
&= D(A, A) + D(A, A) - \mu(A) + D(B, B) + D(B, B) - \mu(B) \\
&\quad +D(C, C) + D(C, C) - \mu(C) + D(A, B) + D(B, A) + D(B, C)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+D(C\ B)+D(A\ C)+D(C\ A) \\
=\ & D(A\ A)+D(B,B)+D(C\ C)+D(A\ B)+D(B\ A)+D(B\ C) \\
&+D(C\ B)+D(A\ C)+D(C\ A) \\
=\ & D(A,A)+D(B,A)+D(C\ A)+D(A,B)+D(B\ B)+D(C\ B) \\
&+D(A\ C)+D(B,C)+D(C,C) \\
=\ & D(A\sqcup B\ A)+D(C\ A)+D(A\sqcup B\ B)+D(C\ B) \\
&+D(A\sqcup B,C)+D(C,C) \\
=\ & D(A\sqcup B\sqcup C\ A)+D(A\sqcup B\sqcup C\ B)+D(A\sqcup B\sqcup C\ C) \\
=\ & \overline{D(A\ A\sqcup B\sqcup C)}+\overline{D(B,A\sqcup B\sqcup C)}+\overline{D(C\ A\sqcup B\sqcup C)} \\
=\ & \overline{D(A\ A\sqcup B\sqcup C)+D(B\ A\sqcup B\sqcup C)}+\overline{D(C\ A\sqcup B\sqcup C)} \\
=\ & \overline{D(A\sqcup B\ A\sqcup B\sqcup C)}+\overline{D(C,A\sqcup B\sqcup C)} \\
=\ & \overline{D(A\sqcup B\ A\sqcup B\sqcup C)+D(C,A\sqcup B\sqcup C)} \\
=\ & \overline{D(A\sqcup B\sqcup C\ A\sqcup B\sqcup C)} \\
=\ & D(A\sqcup B\sqcup C,A\sqcup B\sqcup C) \\
=\ & \mu(A\sqcup B\sqcup C)
\end{aligned}
$$

Así pues $\mu$ es Aditiva de Grado 2

2 Ahora probemos que $\mu$ es Regular

a) Probemos primeramente que si $\mu(A)=0$, entonces $\mu(A\sqcup B)=\mu(B)$ para todo $B\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$

En efecto, por las propiedades de la función decoherencia se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B) &= D(A \sqcup B, A \sqcup B) \\
&= D(A, A \sqcup B) + D(B, A \sqcup B) \\
&= \overline{D(A \sqcup B, A)} + \overline{D(A \sqcup B, B)} \\
&= \overline{D(A, A) + D(B, A)} + \overline{D(A, B) + D(B, B)} \\
&= \overline{D(A, A)} + \overline{D(B, A)} + \overline{D(A, B)} + \overline{D(B, B)} \\
&= D(A, A) + D(B, B) + D(A, B) + \overline{D(A, B)} \\
&= D(A, A) + D(B, B) + 2Re[D(A, B)] \\
&= \mu(A) + \mu(B) + 2Re[D(A, B)]
\end{aligned}$$

Por 3.4 tenemos que

$$| D(A, B) |^2 \leq D(A, A) D(B, B) = \mu(A)\mu(B)$$

Luego como $\mu(A) = 0$, se tiene que $D(A, B) = 0$ y

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(B)$$

*b*) Debemos probar ahora que si $\mu(A \sqcup B) = 0$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$

En efecto, por lo probado en la parte *a*, se tiene que

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) + 2Re[D(A, B)]$$

luego por la desigualdad de Cauchy - Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B) &= \mu(A) + \mu(B) + 2Re[D(A\ B)] \\
&\geq \mu(A) + \mu(B) - 2 \mid D(A, B) \mid \\
&\geq \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A)^{\frac{1}{2}}\mu(B)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\mu(A)^{\frac{1}{2}} - \mu(B)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

Finalmente como $\mu(A \sqcup B) = 0$ se tiene que $\mu(A) = \mu(B)$

Por a) y b) se tiene que $\mu$ es regular

Por 1 y 2 se tiene que $\mu$ es una medida cuántica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

**Observaciones**

1 Si $\nu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$ es una medida clásica compleja sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ Entonces por el Ejemplo 3 2 3 la función

$$D \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{C}$$

definida por

$$D(A, B) = \nu(A)\overline{\nu(B)}$$

es una función decoherencia Luego por el Teorema 3 2 1, la función

$$\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$$

definida por

$$\mu(A) = D(A, A)$$

es una medida cuántica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

Note que

$$\begin{aligned} \mu(A \sqcup B) &= \mid \nu(A \sqcup B) \mid^2 \\ &= \mid \nu(A) + \nu(B) \mid^2 \\ &= \mid \nu(A) \mid^2 + \mid \nu(B) \mid^2 + 2Re\left[\nu(A)\overline{\nu(B)}\right] \\ &= \mu(A) + \mu(B) + 2Re\left[\nu(A)\overline{\nu(B)}\right] \end{aligned}$$

Luego, si $Re\left[\nu(A)\overline{\nu(B)}\right] \neq 0$ entonces

$$\mu(A \sqcup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$$

Por lo tanto, $\mu$ no puede ser una medida clásica

2 Una medida cuántica $\mu$ no siempre tiene la forma $\mu(A) = D(A\ A)$ para una función decoherencia $D$

En efecto probemos que la medida cuántica $\mu$ del Ejemplo 3 2 2, no tiene la forma $\mu(A) = D(A, A)$ para una función decoherencia, $D$ Si este fuera el caso por la parte $a$ del punto 2 de la demostracion del Teorema 3 2 1 se tendria que

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) + 2Re[D(A\ B)]$$

luego

$$\begin{aligned} \mu(\{x_1\} \sqcup \{x_2\}) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + 2Re[D(\{x_1\}\ \{x_2\})] \\ &= 1 + 1 + 2Re[D(\{x_1\}\ \{x_2\})] \end{aligned}$$

Como

$$\mu(\{x_1\} \sqcup \{x_2\}) = \mu(X) = 6$$

tenemos que

$$D(\{x_1\}, \{x_2\}) = 2,$$

pero esto contradice la propiedad 3 4 de la función decoherencia Por lo tanto $\mu$ no tiene la forma $\mu(A) = D(A\ A)$ para una función decoherencia $D$

A continuación presentamos un ejemplo interesante de medida cuántica finita

**Ejemplo 3 2 4** *Sea* $X = \{x_1 \quad x_m\ y_1 \quad y_m\ z_1, \quad z_n\}$ *y sea*

$$(x\ \ y\ ) \qquad para \qquad i = 1 \quad m$$

*lo que llamaremos pares destructivos o pares de partículas antipartículas*

*Definamos la función*

$$\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$$

$$\mu(A) = \mid A \mid -2 \mid \{(x\ \ y_i)\ \ x_i\ y_i \in A\} \mid$$

*para cada* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$*, donde* $\mid A \mid$ *es el cardinal del conjunto* $A$ *Es decir, por ejemplo,*

$$\mu(\{x_1, y_1\ z_1\}) = 1, \qquad \mu(\{x_1, y_1\ y_2\ z_1\}) = 2 \qquad y \qquad \mu(\{x_1\ y_1\}) = 0$$

*Entonces* $\mu$ *así definida es una medida cuántica sobre* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$

En efecto

1 Primero probemos que $\mu$ es Aditiva de Grado-2 Sea

$$A_1\ A_2\ A_3 \in \mathcal{P}(\mathcal{X}),$$

no vacíos y disyuntos dos a dos Si

$$x_i \in A_q \qquad y \qquad y_j \in A_r \qquad para \qquad q\ r = 1\ 2\ 3$$

al par $(x_i\ y_j)$ lo llamaremos el par $qr$ destructivo o par $qr$ de partículas anti partículas Debemos probar que

$$\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3) = \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_2 \sqcup A_3) - \mu(A_1) - \mu(A_2) - \mu(A_3)$$

En efecto como $A_1$ $A_2$ $A_3$ son disyuntos dos a dos por la definición de $\mu$ se tiene que $\mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_2 \sqcup A_3) - \mu(A_1) - \mu(A_2) - \mu(A_3) =$

$$\begin{aligned}
= \ & | A_1 \sqcup A_2 | -2 | \{par - qr\ q\ r = 1,2\} | + | A_1 \sqcup A_3 | -2 | \{par - qr\ q,r = 1\ 3\} | \\
& + | A_2 \sqcup A_3 | -2 | \{par - qr\ q\ r = 2\ 3\} | - | A_1 | +2 | \{par - qr\ q;r = 1\} | \\
& - | A_2 | +2 | \{par - qr\ q\ r = 2\} | - | A_3 | +2 | \{par - qr\ q\ r = 3\} | \\
= \ & | A_1 | + | A_2 | -2 | \{par - qr\ q\ r = 1,2\} | + | A_1 | + | A_3 | \\
& -2 | \{par - qr\ q\ r = 1\ 3\} | + | A_2 | + | A_3 | \\
& -2 | \{par - qr, q, r = 2\ 3\} | - | A_1 | +2 | \{par - qr\ q\ r = 1\} | - | A_2 | \\
& +2 | \{par - qr\ q,r = 2\} | - | A_3 | +2 | \{par - qr\ q\ r = 3\} | \\
= \ & | A_1 | + | A_2 | + | A_3 | -2 | \{par - qr, q\ r = 1\ 2\} |
\end{aligned}$$

$$-2 \mid \{par - qr \; q, r = 1 \; 3\} \mid -2 \mid \{par = qr \; q \; r = 2 \; 3\} \mid$$

$$+2 \mid \{par - qr \; q \; r = 1\} \mid +2 \mid \{par - qr \; q \; r = 2\} \mid +2 \mid \{par - qr \; q, r = 3\} \mid$$

$$= \mid A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \mid -2 \mid \{par - qr, q, r = 1 \; 2 \; 3\} \mid$$

$$= \mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3)$$

Asi pues $\mu$ es Aditiva de Grado-2

2 Ahora probemos que $\mu$ es Regular

a) Si $\mu(A) = 0$ significa que $A = \emptyset$ o bien $A$ es de la forma

$$A = \{x_{i_1}, y_{i_1} \quad x_{i_j} \; y_{i_j}\}$$

Sea $M \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ tal que $A \cap M = \emptyset$ luego

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup M) &= \mid A \mid + \mid M \mid -2 \mid \{(x_i \; y_i) \;\; x_i, y_i \in A\} \mid -2 \mid \{(x_i, y_i) \;\; x_i, y_i \in M\} \mid \\
&= \mid M \mid -2 \mid \{(x_i \; y_i) \;\; x_i, y_i \in M\} \mid \\
&= \mu(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(A \sqcup M) = \mu(M)$ para todo $M \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ disyunto de $A$

b) Supongamos que $\mu(A \sqcup B) = 0$ luego $z_i \notin A \sqcup B$ para $i = 1 \; 2, \quad n$ Por otro lado tenemos que si $x_i \in A$ entonces $y_i \in A \sqcup B$ y si $y_i \in A$ entonces $x_i \in A \sqcup B$ Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= |A| - 2\,|\{(x_i, y_i) : x_i, y_i \in A\}| \\
&= |\{x_i \in A : y_i \in B\}| + |\{y_i \in A : x_i \in B\}| \\
&= |\{y_i \in B : x_i \in A\}| + |\{x_i \in B : y_i \in A\}| \\
&= \mu(B)
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que si $\mu(A \sqcup B) = 0$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$

Por a) y b) tenemos que $\mu$ es regular

De todo lo anterior se tiene que $\mu$ es una medida cuántica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ y, por lo tanto $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X}), \mu)$ es un espacio de medida cuántica

Note que

$$\begin{aligned}
0 = \mu(\{x_1, y_1\}) &\neq \mu(\{x_1\}) + \mu(\{y_1\}) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu$ no es una medida clásica

El siguiente teorema presenta una caracterización de las funciones Aditivas de Grado-2

**Teorema 3 2 2** *Sea* $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ $\mu$ *es Aditiva de Grado 2 si y solo si satisface que*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \Delta B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B)$$

*para todo* $A\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

**Demostración**

$\Rightarrow$] Supongamos que $\mu$ es Aditiva de Grado-2 Luego

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B) &= \mu[(A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B) \sqcup (A \cap B)] \\
&= \mu[(A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B)] + \mu[(A \cap B^c) \sqcup (A \cap B)] + \mu[(A^c \cap B) \sqcup (A \cap B)] \\
&\quad -\mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B) - \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A \Delta B) + \mu[(A \cap B^c) \sqcup (A \cap B)] + \mu[(A^c \cap B) \sqcup (A \cap B)] \\
&\quad -\mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B) - \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A \Delta B) + \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B) - \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \Delta B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B)
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \Delta B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B)$$

para todo $A\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ disyuntos dos a dos y denotemos

$$A_1 = A \sqcup C, \qquad B_1 = B \sqcup C$$

Luego por hipótesis

$$
\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B \sqcup C) &= \mu(A_1 \cup B_1) \\
&= \mu(A_1) + \mu(B_1) - \mu(A_1 \cap B_1) + \mu(A_1 \triangle B_1) - \mu(A_1 \cap B_1^c) - \mu(A_1^c \cap B_1) \\
&= \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A_1 \cap B_1) + \mu(A_1 \triangle B_1) - \mu(A_1 \cap B_1^c) \\
&\quad - \mu(A_1 \cap B_1) \\
&= \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(C) + \mu(A_1 \triangle B_1) - \mu(A_1 \cap B_1^c) - \mu(A_1^c \cap B_1) \\
&= \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(C) + \mu[(A_1 \cap B_1^c) \cup (A_1^c \cap B_1)] - \mu(A_1 \cap B_1^c) \\
&\quad - \mu(A_1^c \cap B_1) \\
&= \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(C) + \mu(A \sqcup B) - \mu(A) - \mu(B) \\
&= \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C)
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra que $\mu$ es Aditiva de Grado-2

El siguiente teorema muestra que la Aditivad de Grado-2 puede extenderse a más de tres conjuntos disyuntos dos a dos

**Teorema 3 2 3** *Sea $\mu$ $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ una funcion Aditiva de Grado 2 Entonces para cualquier $m \geq 3$ se tiene que*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i<j=1}^{m} \mu(A_i \sqcup A_j) - (m-2)\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

**Demostración**

Probemos el teorema por inducción matemática sobre $m$ Es claro que para $m = 3$ se cumple la igualdad Supongamos que el teorema se cumple para $m-1 \geq 3$ y probemos que se cumple para $m \geq 3$ En efecto, como

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \mu\left[A_1 \sqcup A_2 \sqcup \quad \sqcup A_{m-2} \sqcup (A_{m-1} \sqcup A_m)\right]$$

por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i\right) &= \mu\left[A_1 \sqcup A_2 \sqcup \quad \sqcup A_{m-2} \sqcup (A_{m-1} \sqcup A_m)\right] \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2} \mu(A_i \sqcup A_j) + \sum_{i=1}^{m-2} \mu[A_i \sqcup (A_{m-1} \sqcup A_m)] \\
&\quad -[(m-1)-2]\left[\sum_{i=1}^{m-2} \mu(A_i) + \mu(A_{m-1} \sqcup A_m)\right] \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2} \mu(A_i \sqcup A_j) + \sum_{i=1}^{m-2} \mu[A_i \sqcup (A_{m-1} \sqcup A_m)] \\
&\quad -(m-3)\left[\sum_{i=1}^{m-2} \mu(A_i) + \mu(A_{m-1} \sqcup A_m)\right]
\end{aligned}$$

Como $\mu$ es Aditiva de Grado-2

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-2} \mu[A_i \sqcup (A_{m-1} \sqcup A_m)] &= \mu(A_1 \sqcup A_{m-1} \sqcup A_m) + \mu(A_2 \sqcup A_{m-1} \sqcup A_m) \\
&\quad + \quad + \mu(A_{m-2} \sqcup A_{m-1} \sqcup A_m) \\
&= \mu(A_1 \sqcup A_{m-1}) + \mu(A_1 \sqcup A_m) + \mu(A_{m-1} \sqcup A_m) - \mu(A_1) \\
&\quad -\mu(A_{m-1}) - \mu(A_m) + \mu(A_2 \sqcup A_{m-1}) + \mu(A_2 \sqcup A_m) \\
&\quad +\mu(A_{m-1} \sqcup A_m) - \mu(A_2) - \mu(A_{m-1}) \\
&\quad -\mu(A_m) + \quad + \mu(A_{m-2} \sqcup A_{m-1}) + \mu(A_{m-2} \sqcup A_m) \\
&\quad +\mu(A_{m-1} \sqcup A_m) - \mu(A_{m-2}) - \mu(A_{m-1}) - \mu(A_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m-2} \mu(A_i \sqcup A_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-2} \mu(A_i \sqcup A_m) + (m-2)\mu(A_{m-1} \sqcup A_m)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)-(m-2)\mu(A_{m-1})-(m-2)\mu(A_m)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{m}A_i\right) &= \sum_{i<j=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\mu[A_i\sqcup(A_{m-1}\sqcup A_m)] \\
&\quad -(m-3)\left[\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)+\mu(A_{m-1}\sqcup A_m)\right] \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_{m-1})+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_m) \\
&\quad +(m-2)\mu(A_{m-1}\sqcup A_m)-\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)-(m-2)\mu(A_{m-1})-(m-2)\mu(A_m) \\
&\quad -(m-3)\left[\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)+\mu(A_{m-1}\sqcup A_m)\right] \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_{m-1})+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_m)-\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i) \\
&\quad -(m-3)\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)-(m-2)\mu(A_{m-1})-(m-2)\mu(A_m) \\
&\quad +(m-2)\mu(A_{m-1}\sqcup A_m)-(m-3)\mu(A_{m-1}\sqcup A_m) \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_{m-1})+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_m) \\
&\quad +[-1-(m-3)]\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)-(m-2)[\mu(A_{m-1})+\mu(A_m)] \\
&\quad +[(m-2)-(m-3)]\mu(A_{m-1}\sqcup A_m) \\
&= \sum_{i<j=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_j)+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_{m-1})+\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i\sqcup A_m) \\
&\quad -(m-2)\sum_{i=1}^{m-2}\mu(A_i)-(m-2)[\mu(A_{m-1})+\mu(A_m)]+\mu(A_{m-1}\sqcup A_m) \\
&= \sum_{i<j=1}^{m}\mu(A_i\sqcup A_j)-(m-2)\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)
\end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que la igualdad se cumple para $m \geq 3$ y se demuestra el teorema

A diferencia de una medida clásica $\nu$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, una medida cuántica $\mu$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ no se puede determinar usando los valores sobre conjuntos unitarios Gracias al Teorema 3 2 3, una medida cuántica $\mu$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ se puede determinar utilizando los valores sobre conjuntos unitarios y sobre conjuntos de dos elementos siempre y cuando el conjunto a medir tenga tres o más elementos y $X$ sea finito

## 3 3 INTERFERENCIA CUÁNTICA

La interferencia cuántica es un parámetro físicamente relevante que puede ser usado para determinar medidas cuánticas

**Definición 3 3 1** *Sea $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ una medida cuántica sobre*

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

***La función de interferencia cuántica***

$$I_\mu : X \times X \to \mathbf{R}$$

*se define como*

$$I_\mu(x_i, x_j) = \mu(\{x_i, x_j\}) - \mu(\{x_i\}) - \mu(\{x_j\}),$$

*si $i \neq j$ e $I_\mu(x_i, x_i) = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$*

La función $I_\mu$ es un indicador de la interferencia entre los elementos $x_i$ y $x_j$. Esta función $I_\mu$ puede ser positiva o negativa.

**Ejemplo 3.3.1** *Sea $X = \{x_1, x_2\}$ y $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ la medida cuántica definida en el Ejemplo 3.2.2. La función de interferencia cuántica $I_\mu : X \times X \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$\begin{aligned} I_\mu(x_1, x_2) = I_\mu(x_2, x_1) &= \mu(\{x_1, x_2\}) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_2\}) \\ &= 6 - 1 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

**Observación** Como por el Teorema 3.2.3 una medida cuántica $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ sobre un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ queda determinada por los números $\mu(\{x_i\})$ y $\mu(\{x_i, x_j\})$, entonces $\mu$ queda determinada por los números $\mu(\{x_i\})$ y $I_\mu(x_i, x_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Por otro lado, como una medida clásica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ queda determinada por los valores que tome sobre los conjuntos unitarios, podemos extender $I_\mu$ a una medida signada

$$\alpha_\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\alpha_\mu(B) = \sum_{(x_i, x_j) \in B} I_\mu(x_i, x_j)$$

Como $I_\mu(x_i, x_j) = I_\mu(x_j, x_i)$, se deduce que $\alpha_\mu$ es simétrica en el sentido que $\alpha_\mu(A \times B) = \alpha_\mu(B \times A)$ para todo $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. A la medida $\alpha_\mu$ se le llama la ***parte de interferencia de $\mu$***.

**Definición 3 3 2** *Sea $X = \{x_1\ x_2\ \ x_n\}$ y $\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ una medida cuántica sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ La **Parte Clásica** de $\mu$ se define como la unica medida $\nu_\mu$ sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que satisface que*

$$\nu_\mu(\{x_i\}) = \mu(\{x_i\}) \qquad para \qquad i = 1\ 2\ \ \ n$$

**Ejemplo 3 3 2** *Sea $X = \{x_1\ x_2\}$ y $\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ la medida cuantica definida en el Ejemplo 3 2 2 La parte clasica $\nu_\mu$ de $\mu$ esta definida por*

$$\nu_\mu(\emptyset) = 0 \qquad \nu_\mu(\{x_1\}) = \nu_\mu(\{x_2\}) = 1 \qquad y \qquad \nu_\mu(X) = 2$$

*La parte de interferencia de $\mu$ esta definida por*

$$\alpha_\mu(\emptyset) = 0 \qquad \alpha_\mu(\{(x_1\ x_1)\}) = \alpha_\mu(\{(x_2\ x_2)\}) = 0$$

$$\alpha_\mu(\{(x_1\ x_2)\}) = \alpha_\mu(\{(x_2\ x_1)\}) = 4$$

Veamos a continuación un teorema que muestra que siempre es posible des componer una medida cuántica $\mu$ en su parte clásica y en su parte de interferencia

**Teorema 3 3 1** *Si $\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$ es una medida cuantica sobre $X = \{x_1\ x_2\ \ \ x_n\}$, entonces para cada $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que*

$$\mu(A) = \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(A \times A) = \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\sum_{(x_i\ x_j) \in A} I_\mu(x_i\ x_j)$$

**Demostración**

Primero probemos que la función $\beta : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\beta(A) = \alpha_\mu(A \times A)$$

es una medida signada Aditiva de Grado-2 sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. En efecto, como $\alpha_\mu$ es una medida signada simétrica,

$\beta(A \sqcup B) + \beta(A \sqcup C) + \beta(B \sqcup C) - \beta(A) - \beta(B) - \beta(C) =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_\mu(A \sqcup B \times A \sqcup B) + \alpha_\mu(A \sqcup C \times A \sqcup C) + \alpha_\mu(B \sqcup C \times B \sqcup C) \\
&\quad -\alpha_\mu(A \times A) - \alpha_\mu(B \times B) - \alpha_\mu(C \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \times A \sqcup A \times B \sqcup B \times A \sqcup B \times B) + \alpha_\mu(A \times A \sqcup A \times C \sqcup C \times A \sqcup C \times C) \\
&\quad +\alpha_\mu(B \times B \sqcup B \times C \sqcup C \times B \sqcup C \times C) - \alpha_\mu(A \times A) - \alpha_\mu(B \times B) - \alpha_\mu(C \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \times A) + 2\alpha_\mu(A \times B) + \alpha_\mu(B \times B) + \alpha_\mu(A \times A) + 2\alpha_\mu(A \times C) \\
&\quad +\alpha_\mu(C \times C) + \alpha_\mu(B \times B) + 2\alpha_\mu(B \times C) + \alpha_\mu(C \times C) \\
&\quad -\alpha_\mu(A \times A) - \alpha_\mu(B \times B) - \alpha_\mu(C \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \times A) + \alpha_\mu(B \times B) + \alpha_\mu(C \times C) \\
&\quad +2\alpha_\mu(A \times B) + 2\alpha_\mu(A \times C) + 2\alpha_\mu(B \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \times A) + \alpha_\mu(A \times B) + \alpha_\mu(A \times C) + \alpha_\mu(B \times A) + \alpha_\mu(B \times B) \\
&\quad +\alpha_\mu(B \times C) + \alpha_\mu(C \times A) + \alpha_\mu(C \times B) + \alpha_\mu(C \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \times A \sqcup A \times B \sqcup A \times C \sqcup B \times A \sqcup B \times B \sqcup B \times C \sqcup C \times A \sqcup C \times B \sqcup C \times C) \\
&= \alpha_\mu(A \sqcup B \sqcup C \times A \sqcup B \sqcup C) \\
&= \beta(A \sqcup B \sqcup C)
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\beta$ es una función Aditiva de Grado-2. Ahora bien, como $\nu_\mu$ es una medida, se tiene que

$$\nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(A \times A)$$

es una medida signada Aditiva de Grado-2 sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(\{x_i\}) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(\{x_i\} \times \{x_i\}) &= \nu_\mu(\{x_i\}) + \frac{1}{2}I_\mu(x_i, x_i) \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) + \frac{1}{2}(0) \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) \\
&= \mu(\{x_i\})
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Además para $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\nu_\mu(\{x_i, x_j\}) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(\{x_i, x_j\} \times \{x_i, x_j\}) &= \nu_\mu(\{x_i\}) + \nu_\mu(\{x_j\}) + \frac{1}{2}[I_\mu(x_i, x_i) \\
&\quad + I_\mu(x_i, x_j) + I_\mu(x_j, x_i) + I_\mu(x_j, x_j)] \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) + \nu_\mu(\{x_j\}) + \frac{1}{2}[I_\mu(x_i, x_j) + I_\mu(x_j, x_i)] \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) + \nu_\mu(\{x_j\}) + \frac{1}{2}[I_\mu(x_i, x_j) + I_\mu(x_i, x_j)] \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) + \nu_\mu(\{x_j\}) + \frac{1}{2}[2I_\mu(x_i, x_j)] \\
&= \nu_\mu(\{x_i\}) + \nu_\mu(\{x_j\}) + I_\mu(x_i, x_j) \\
&= \mu(\{x_i\}) + \mu(\{x_j\}) + \mu(\{x_i, x_j\}) - \mu(\{x_i\}) \\
&\quad - \mu(\{x_j\}) \\
&= \mu(\{x_i, x_j\}),
\end{aligned}$$

Así pues, $\mu(A) = \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(A \times A)$ para todos los conjuntos $A$ unitarios o de dos elementos

Como

$$\mu \qquad y \qquad A \mapsto \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(A \times A)$$

son medidas signadas Aditivas de Grado-2 sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, por el Teorema 3 2 3 se tiene que

$$\mu(A) = \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\alpha_\mu(A \times A)$$

para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

**Ejemplo 3 3 3** *Consideremos la medida cuantica* $\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0 +\infty)$ *definida en el Ejemplo 3 2 4 Luego*

$$\nu_\mu(\{x_i\}) = 1 \textit{ para cada } i = 1\ 2 \quad n$$

$$\begin{aligned} I_\mu(x_i, y_i) = I_\mu(y_i\ x_i) &= \mu(\{x_i, y_i\}) - \mu(\{x_i\}) - \mu(\{y_i\}) \\ &= 0 - 1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

y $I_\mu = 0$ para todos los otros pares de puntos Luego

$$\mu(A) \quad = \quad \nu_\mu(A) + \frac{1}{2}\sum_{(x\ y)\in A\times A} I_\mu(x\ y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mid A \mid + \frac{1}{2}(-2)(2 \mid \{(x_i, y_i) \quad x_i, y_i \in A\} \mid) \\
&= \mid A \mid -2 \mid \{(x_i, y_i) \quad x_i \; y_i \in A\} \mid
\end{aligned}
$$

que es la forma como se define $\mu$

Veamos algunos ejemplos donde se utiliza el Teorema 3 3 1 para construir medidas cuánticas $\mu$ a partir de una medida clásica $\nu_\mu$ y una función de interferencia cuántica $I_\mu$

**Ejemplo 3 3 4** *Sea* $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $\nu_\mu(\{x_i\}) = 0$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$ *y*

$$I_\mu(x_i, x_j) = 1$$

*para todo* $i \neq j$ *Por el Teorema 3 3 1 se puede construir una medida cuántica*

$$\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$$

*como sigue*

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \mid A \mid (\mid A \mid -1),$$

*para cada* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

En efecto

$$
\begin{aligned}
\mu(A) &= \nu_\mu(A) + \frac{1}{2} \sum_{(x_i, x_j) \in A} I_\mu(x_i, x_j) \\
&= 0 + \frac{1}{2} \mid A \mid (\mid A \mid -1) \\
&= \frac{1}{2} \mid A \mid (\mid A \mid -1)
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 3 3 5** *Sea* $X = \{x_1 \quad x_{2n+1}\}$ $\nu_\mu(x_i) = n$ *para cada* $i = 1\ 2 \quad 2n+1$, *y*

$$I_\mu(x_i\ x_j) = -1$$

*para todo* $i \neq j$ *Por Teorema 3 3 1 se puede construir una medida cuantica*

$$\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0\ +\infty)$$

*como sigue*

$$\mu(A) = \frac{1}{2} \mid A \mid [\mid X \mid - \mid A \mid]$$

*para cada* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \nu_\mu(A) + \frac{1}{2} \sum_{(x\ y) \in A} I_\mu(x\ y) \\
&= n \mid A \mid + \frac{1}{2}(-1) \mid A \mid (\mid A \mid -1) \\
&= n \mid A \mid - \frac{1}{2} \mid A \mid (\mid A \mid -1) \\
&= \mid A \mid \left[n - \frac{1}{2}(\mid A \mid -1)\right] \\
&= \mid A \mid \left[n - \frac{1}{2} \mid A \mid + \frac{1}{2}\right] \\
&= \mid A \mid \left[\frac{2}{2}n - \frac{1}{2} \mid A \mid + \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} \mid A \mid [2n + 1 - \mid A \mid] \\
&= \frac{1}{2} \mid A \mid [\mid X \mid - \mid A \mid]
\end{aligned}$$

## 3 4 COMPATIBILIDAD Y EL CENTRO

**Definición 3 4 1** *Sea $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuantica Decimos que $A\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ son $\mu$* ***compatibles*** *si cumplen que*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

*Si $A$ es $\mu$ compatible con $B$ escribiremos $A\mu B$*

**Observaciones**

Sea $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuántica

1 Note que $A\mu A$ para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, o sea que $\mu$ es reflexiva

2 Si $A\mu B$ entonces $B\mu A$, o sea que $\mu$ es simétrica

3 $\mu$ no es transitiva

En efecto consideremos la medida cuantica definida en el Ejemplo 3 2 4 y los conjuntos

$$A = \{x_1\} \qquad B = \emptyset \qquad y \qquad C = \{y_1\}$$

Note que $A\mu B$ y $B\mu C$, pero

$$\mu(A \cup C) = \mu(\{x_1, y_1\}) = 0$$

$$\mu(A) + \mu(C) - \mu(A \cap C) = 1 + 1 - 0 = 2$$

o sea que

$$\mu(A \cup C) \neq \mu(A) + \mu(C) - \mu(A \cap C)$$

Por lo tanto $A$ no es $\mu$ compatible con $C$

4 Por el Teorema 3 2 2 se tiene que

$$\begin{aligned} A\mu B &\iff \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &\iff \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &\qquad + \mu(A \triangle B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B) \\ &\iff \mu(A \triangle B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(A^c \cap B) \end{aligned}$$

**Definición 3 4 2** *Sea $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuantica El $\mu$* ***Centro de*** *$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ se define como*

$$Z_\mu = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad A\mu B \text{ para todo } B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})\}$$

Los elementos de $Z_\mu$ son llamados ***conjuntos macroscopicos***

**Teorema 3 4 1** *Sea $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuantica y $A\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Luego se tiene que*

*1 Si $A \subseteq B$, entonces $A\mu B$*

*2 Si $A\mu B$ entonces $A^c\mu B^c$*

*3 El $\emptyset$ y $X$ son elementos de $Z_\mu$*

*4 Si $A \in Z_\mu$ entonces $A^c \in Z_\mu$*

**Demostración**

1 Si $A \subseteq B$, entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Luego $A \mu B$

2 Supongamos que $A \mu B$, entonces

$$\mu(A \triangle B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(A^c \cap B)$$

Luego

$$\begin{aligned} \mu(A^c \triangle B^c) &= \mu(A \triangle B) \\ &= \mu(A \cap B^c) + \mu(A^c \cap B) \\ &= \mu[(A^c) \cap B] + [A^c \cap (B^c)^c] \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^c \mu B^c$

3 Sea $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset \cup B) = \mu(B) &= \mu(\emptyset) + \mu(B) - \mu(\emptyset) \\ &= \mu(\emptyset) + \mu(B) - \mu(\emptyset \cap B) \end{aligned}$$

$$\mu(X \cup B) = \mu(X) = \mu(X) + \mu(B) - \mu(B)$$
$$= \mu(X) + \mu(B) - \mu(X \cap B)$$

Así pues, $\emptyset$ $X \in Z_\mu$

4 Si $A \in Z_\mu$ entonces $A\mu B$, para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Por el punto 2, $A^c\mu B^c$ para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ o lo que en este caso es lo mismo $A^c\mu B^c$ para todo $B^c \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Luego $A^c \in Z_\mu$

**Definición 3 4 3** *Sea $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuántica Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es un $\mu$* ***Ruptura*** *si*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c),$$

*para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$*

**Teorema 3 4 2** *Sea $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuántica Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es un $\mu$ ruptura si y solo si $A \in Z_\mu$*

**Demostración**

$\Rightarrow]$ Supongamos que $A$ es un $\mu$ ruptura entonces para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que

$$\mu(A \cup B) = \mu[(A \cup B) \cap A] + \mu[(A \cup B) \cap A^c] = \mu(A) + \mu(B \cap A^c),$$

pero

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$$

o sea que

$$\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A)$$

Por lo tanto

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Así pues $A\mu B$ para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $A \in Z_\mu$

$\Leftarrow$] Supongamos que $A \in Z_\mu$ entonces para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que

$$\mu(A \cup B) = \mu[A \cup (B \cap A^c)] = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) - \mu[A \cap (B \cap A^c)] = \mu(A) + \mu(B \cap A^c)$$

Por otro lado como

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A \cup B) - \mu(A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) \end{aligned}$$

Luego $A$ es un $\mu$ ruptura

**Teorema 3 4 3** *Sea $(X\ \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuantica $Z_\mu$ es un algebra de conjuntos y la restricción $\mu \mid Z_\mu$ de $\mu$ a $Z_\mu$ es una medida Ademas si $A_i \in Z_\mu$ son disyuntos dos a dos para $i = 1\ 2\ \ldots, n$, entonces para cada $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que*

$$\mu\left[\bigsqcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}\mu(B \cap A_i)$$

**Demostración**

Por el Teorema 3 4 1 se tiene que $X \in Z_\mu$ y $A^c \in Z_\mu$ siempre que $A \in Z_\mu$ Supongamos que $A\ B \in Z_\mu$ y $C \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Por el Teorema 3 4 2 $A$ y $B$ son $\mu$ ruptura Luego

$$\begin{aligned}
\mu[C \cap (A \cup B)] &= \mu[(C \cap A) \cap (A \cup B)] + \mu[(C \cap A^c) \cap (A \cup B)] \\
&= \mu(C \cap A) + \mu(C \cap A^c \cap B),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mu(C) &= \mu(C \cap A) + \mu(C \cap A^c) \\
&= \mu(C \cap A) + \mu(C \cap A^c \cap B) + \mu(C \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu[C \cap (A \cup B)] + \mu[C \cap (A \cup B)^c]
\end{aligned}$$

Como $C$ es un conjunto arbitrario de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que $A \cup B$ es un $\mu$ ruptura y, por el Teorema 3 4 2, $A \cup B \in Z_\mu$ Asi pues, $Z_\mu$ es un álgebra de conjuntos

Probemos ahora que $\mu \mid Z_\mu$ es una medida En efecto sea $A, B \in Z_\mu$ con $A \cap B = \emptyset$ Como $A \in Z_\mu$ entonces $A\mu B$ luego

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Por lo que $\mu \mid Z_\mu$ es una medida, ya que $X$ es un conjunto finito

Probemos el ultimo enunciado del teorema Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n \in Z_\mu$ una sucesión disyunta dos a dos, y sea

$$S_r = \bigsqcup_{i=1}^{r} A_i \qquad 1 \leq r \leq n$$

Probemos por inducción matematica sobre $r$ que para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que

$$\mu(B \cap S_r) = \sum_{i=1}^{r} \mu(B \cap A_i)$$

El caso $r = 1$ es obvio Supongamos que se cumple para $r < n - 1$ y demostremos que se cumple para $r + 1$ Como $Z_\mu$ es un álgebra de conjuntos tenemos que $S_r \in Z_\mu$ y por el Teorema 3 4 2 tenemos que $S_r$ es un $\mu$ ruptura, luego

$$\begin{aligned}
\mu(B \cap S_{r+1}) &= \mu(B \cap S_{r+1} \cap S_r) + \mu(B \cap S_{r+1} \cap S_r') \\
&= \mu(B \cap S_r) + \mu(B \cap A_{r+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mu(B \cap A_i) + \mu(B \cap A_{r+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \mu(B \cap A_i)
\end{aligned}$$

Por lo anterior, el resultado es cierto para $r = n$ Luego

$$\mu\left[\bigsqcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)\right] = \mu(B \cap S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B \cap A_i)$$

**Teorema 3 4 4** *Sea* $X = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n\}$ *y*

$$\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$$

*la medida cuantica definida en el Ejemplo 3 2 4 Entonces $A\mu B$ si y solo si $x_i \in A\cap B$ implica que $y_i \notin B \cap A^c$ y si $y_i \in A \cap B^c$ implica que $x_i \notin B \cap A^c$ es decir*

$$A\mu B \iff [(x_i \in A \cap B^c \Longrightarrow y \notin B \cap A\ ) \wedge (y \in A \cap B^c \Longrightarrow x_i \notin B \cap A^c)]$$

**Demostración**

$\Rightarrow$] Supongamos que $A\mu B$ Por el Teorema 3 2 2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A\triangle B) &= \mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) + \mu(A \ \cap B) \\
&= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) - \mu(A) - \mu(B) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) + \mu(A^c \cap B) \\
&= \mu(A \cap B^c) + \mu(A^c \cap B)
\end{aligned}$$

Asumamos sin perdida de generalidad que los pares destructivos del conjunto $A \cap B^c$ son

$$\{x_1, y_1, x_2\ y_2 \quad x_r\ y_r\},$$

y que los pares destructivos del conjunto $A^c \cap B$ son

$$\{x_{r+1}\ y_{\ +1}\ x_{\ +2}\ y_{r+2} \quad x_s\ y\ \}$$

y que además existen otros pares destructivos en $A\triangle B$ que es el conjunto

$$C = \{x_{\ +1}\ y_{s+1}\ x_{s+2}\ y_{s+2} \quad x_t\ y_t\}$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
\mid A\triangle B \mid -2t &= \mu(A\triangle B) \\
&= \mu(A \cap B^c) + \mu(B \cap A^c) \\
&= \mid A \cap B^c \mid -2r + \mid B \cap A^c \mid -2(s - r)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-2t = -2r - 2(s-r) = -2r - 2s + 2r = -2s,$$

de donde se tiene que $t = s$, por lo que $C = \emptyset$ Lo que significa que si $x_i \in A \cap B$ implica que $y_i \notin B \cap A^c$ y $y_i \in A \cap B^c$ implica que $x_i \notin B \cap A^c$

$\Leftarrow$] Supongamos que si $x_i \in A \cap B$ implica que $y_i \notin B \cap A^c$ y $y_i \in A \cap B^c$ implica que $x_i \notin B \cap A^c$ Esto es equivalente a decir que si $\{x_i, y_i\} \subseteq A \triangle B$ entonces $\{x_i, y_i\} \subseteq A \cap B^c$ o $\{x_i, y_i\} \subseteq B \cap A^c$ Sin pérdida de generalidad asumamos que

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r\} \subseteq A \cap B,$$

$$\{x_{r+1}, y_{r+1}, x_{r+2}, y_{r+2}, \ldots, x_s, y_s\} \subseteq B \cap A^c$$

y que no existe otro par destructivo en $A \triangle B$ Luego

$$\begin{aligned}
\mu(A \triangle B) &= |A \triangle B| - 2s \\
&= |A \cap B^c| - 2r + |B \cap A^c| - 2(s-r) \\
&= \mu(A \cap B^c) + \mu(B \cap A^c)
\end{aligned}$$

Pero como por el Teorema 3 2 2,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \triangle B) - \mu(A \cap B^c) - \mu(A^c \cap B)$$

se tiene que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Por consiguiente $A \mu B$

**Corolario 3 4 1** *Sea* $X = \{x_1, \quad , x_m \; y_1 \quad y \quad z_1 \quad z_n\}$ *y*

$$\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0 \; +\infty)$$

*la medida cuantica definida en el Ejemplo 9 2 4 Entonces* $A \in Z_\mu$ *si, y solo si para cada* $i = 1 \; 2, \quad n$, *se tiene que* $\{x_i \; y_i\} \subseteq A$ *ó* $\{x \, , y \, \} \subseteq A^c$

**Demostración**

$\Rightarrow$] Supongamos que $A \in Z_\mu$ luego $A \mu A^c$ Por el Teorema 3 4 4 tenemos que si $x_i \in A$, entonces $y_i \notin A^c$ lo que implica que $y_i \in A$ y similarmente si $y_i \in A$ entonces $x_i \in A$

$\Leftarrow$] Supongamos que para un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que para cada $i = 1, 2, \quad , n$

$$\{x \quad y_i\} \subseteq A \qquad o \qquad \{x_i \; y_i\} \subseteq A^c$$

Luego, para todo $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) &= \mid B \cap A \mid -2 \mid \{(x_i \; y\,) \quad \{x \quad y_i\} \subseteq B \cap A\} \mid \\ &\quad + \mid B \cap A^c \mid -2 \mid \{(x_i \; y_i) \quad \{x \quad y_i\} \subseteq B \cap A^c\} \mid \\ &= \mid B \mid -2 \mid \{(x_i \; y\,) \quad \{x \quad y\,\} \subseteq B\} \mid \\ &= \mu(B) \end{aligned}$$

Así pues $A$ es un $\mu$ ruptura y, por el Teorema 3 4 2 se tiene que $A \in Z_\mu$

**Corolario 3 4 2** *Sea* $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n\}$ *y*

$$\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$$

*la medida cuantica definida en el Ejemplo 3 2 4 Entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

*1* $A \mu A^c$

*2* $A \in Z_\mu$

*3* $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$

**Demostración**

1⇒ 2] Supongamos que $A\mu A^c$, luego por el Teorema 3 4 4 se tiene que si $x_i \in A$, entonces $y_i \notin A$ lo que implica que $y_i \in A$ y similarmente si $y_i \in A$ entonces $x_i \in A$ Así por el Corolario 3 4 1 se tiene que $A \in Z_\mu$

2⇒ 3] Supongamos que $A \in Z_\mu$ Luego por el Teorema 3 4 2 $A$ es un $\mu$ ruptura y para cada $B \in P(X)$ (en particular $B = X$) se tiene que

$$\mu(X) = \mu(X \cap A) + \mu(X \cap A^c)$$

de donde

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$$

3$\Rightarrow$ 1] Supongamos que $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$, luego

$$\begin{aligned} \mu(A \cup A^c) = \mu(X) &= \mu(A) + \mu(A^c) \\ &= \mu(A) + \mu(A^c) - 0 \\ &= \mu(A) + \mu(A^c) - \mu(\emptyset) \\ &= \mu(A) + \mu(A^c) - \mu(A \cap A^c) \end{aligned}$$

Así pues $A \mu A^c$

Finalizamos esta sección con el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3 4 1** *Sea $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}$ $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$ la medida cuántica definida en el Ejemplo 3 2 4 Encontremos $Z_\mu$*

En efecto por el Teorema 3 4 1 el $\emptyset$ y $X$ son elementos de $Z_\mu$

$X$ tiene dos pares destructivos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$

Los elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que tengan el elemento $x_1$ pero no tengan el elemento $y_1$ (ó viceversa) no son $\mu$ compatibles con $\{y_1\}$ ($\{x_1\}$ respectivamente) De la misma forma los elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que tengan el elemento $x_2$, pero no tengan el elemento $y_2$ (ó viceversa) no son $\mu$ compatibles con $\{y_2\}$ ($\{x_2\}$ respectivamente) Por lo tanto no son elementos de $Z_\mu$

Los conjuntos

$$\{z_1\} \quad \{x_1, y_1\} \quad \{x_2, y_2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

son $\mu$ compatibles con todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, luego son elementos de $Z_\mu$.

Por el Teorema 3.4.1, sus complementos

$$\{x_1, x_2, y_1, y_2\},\ \{x_2, y_2, z_1\},\ \{x_1, y_1, z_1\} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

también son elementos de $Z_\mu$.

Así pues

$$Z_\mu = \{\emptyset, X, \{z_1\}, \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_1, x_2, y_1, y_2\}, \{x_2, y_2, z_1\}, \{x_1, y_1, z_1\}\}$$

Por el Teorema 3.4.3, la restricción $\mu/Z_\mu$ es una medida sobre $Z_\mu$ y

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{x_1, y_1\}) = \mu(\{x_2, y_2\}) = \mu(\{x_1, x_2, y_1, y_2\}) = 0$$

$$\mu(X) = \mu(\{z_1\}) = \mu(\{x_1, y_1, z_1\}) = \mu(\{x_2, y_2, z_1\}) = 1$$

## 3 5 CUBRIMIENTOS CUÁNTICOS

Sea $\mu$ una medida cuántica sobre $X = \{x_1\ x_2\ \ \ x_n\}$ Llamaremos a $\mu$ una ***probabilidad cuantica*** si $\mu(X) = 1$ Por ser $\mu$ una medida cuántica sabemos que ella no necesita ser aditiva, razón por la cual pueden pasar cosas muy extranas Por ejemplo, que $\mu(A) > 1$, para un $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ Sin embargo estas probabilidades cuanticas tienen ciertas aplicaciones Se puede formar una probailidad cuántica a partir de una medida cuántica $\mu$ sobre $X$ siempre y cuando $\mu(X) \neq 0$ Esto lo podemos lograr normalizando $\mu$ para formar la probabiliad cuantica $\mu_1 = \frac{\mu}{\mu(X)}$ Ademas, si sabemos que $\mu(X) \neq 0$ esto nos podria indicar lo que está pasando en $X$ Pero saber si $\mu(X) \neq 0$ no se puede verificar fácilmente Esto se dificulta cuando $X$ es grande En algunas aplicaciones de medida cuántica, $X$ representa todo el universo fisico En este caso las medidas cuánticas son utilizadas para estudiar la evolución del universo en el Big Bang Especificamente, $X$ representa el conjunto de las posibles historias que explican la evolucion del universo y para un $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ $\mu(A)$ indica la propensidad de que cierta historia sea un elemento de $A$ Esto se estudia en el campo de la gravedad cuántica y cosmología Verificar que $\mu(X) = 0$ podría ser más facil si verificamos que las medidas cuánticas de los subconjuntos de $X$ sean cero Si la mayoria de estos subconjuntos de $X$ tienen medida cuantica cero esto podría ser un indicador de que $\mu(X) = 0$, pero no una garantia Esta garantía la dan los cubrimientos cuánticos Recordemos que $X$ representa un conjunto finito

**Definición 3 5 1** *Una familia de conjuntos* $\{B_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *es un* ***Cubrimiento*** *para* $X$ *si*

$$X = \bigcup_{i\in I} B_i$$

Si $\nu$ es una medida clasica entonces por la aditividad de $\nu$ tenemos que $\nu(X) \neq 0$ si y solo si $X$ no tiene un cubrimiento formado por conjuntos de medida cero Pero como sabemos, la aditividad no es necesaria en medidas cuánticas, por lo que esto no aplica para las mismas Veamos el siguiente ejemplo

**Ejemplo 3 5 1** *Sea* $X = \{x_1\ x_2\ x_3\}$ *y definamos la función*

$$\mu\ \ \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0\ +\infty)$$

*como sigue*

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{x_1\ x_2\}) = \mu(\{x_1\ x_3\}) = 0$$

$$\mu(\{x_1\}) = \mu(\{x_2\}) = \mu(\{x_3\}) = \mu(X) = 1$$

$$\mu(\{x_2, x_3\}) = 4$$

$\mu$ *es una medida cúantica sobre* $X$ *donde se verifica que hay un cubrimiento formado por conjuntos de medida cero que cubren a* $X$, *sin embargo* $\mu(X) \neq 0$

En efecto,

1. Primero probemos que $\mu$ es Aditiva de Grado-2. Note que

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{A = \emptyset,\ B = \{x_1\},\ C = \{x_2\},\ D = \{x_3\},\ E = \{x_1, x_2\},\ F = \{x_1, x_3\},$$

$$G = \{x_2, x_3\},\ H = \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

Luego, para $A$, $B$, $C$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B \sqcup C) &= \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup C) + \mu(B \sqcup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\
\mu(\{x_1, x_2\}) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_1, x_2\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_2\}) \\
0 &= 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Para $A$, $B$, $D$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B \sqcup D) &= \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup D) + \mu(B \sqcup D) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(D) \\
\mu(\{x_1, x_3\}) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_1, x_3\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_3\}) \\
0 &= 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 1 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Para $A$, $B$, $G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup B \sqcup G) &= \mu(A \sqcup B) + \mu(A \sqcup G) + \mu(B \sqcup G) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(G) \\
\mu(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2, x_3\}) + \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_2, x_3\}) \\
1 &= 1 + 4 + 1 - 0 - 1 - 4 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Para $A$, $C$, $D$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup C \sqcup D) &= \mu(A \sqcup C) + \mu(A \sqcup D) + \mu(C \sqcup D) - \mu(A) - \mu(C) - \mu(D) \\
\mu(\{x_2, x_3\}) &= \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_2, x_3\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_2\}) - \mu(\{x_3\}) \\
4 &= 1 + 1 + 4 - 0 - 1 - 1 \\
4 &= 4
\end{aligned}$$

Para $A$, $C$, $F$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup C \sqcup F) &= \mu(A \sqcup C) + \mu(A \sqcup F) + \mu(C \sqcup F) - \mu(A) - \mu(C) - \mu(F) \\
\mu(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_1, x_3\}) + \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_2\}) - \mu(\{x_1, x_3\}) \\
1 &= 1 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Para $A$, $D$, $E$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A \sqcup D \sqcup E) &= \mu(A \sqcup D) + \mu(A \sqcup E) + \mu(D \sqcup E) - \mu(A) - \mu(D) - \mu(E) \\
\mu(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_1, x_2\}) + \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) - \mu(\emptyset) - \mu(\{x_3\}) - \mu(\{x_1, x_2\}) \\
1 &= 1 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Para $B$ $C, D$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mu(B \sqcup C \sqcup D) &= \mu(B \sqcup C) + \mu(B \sqcup D) + \mu(C \sqcup D) - \mu(B) - \mu(C) - \mu(D) \\
\mu(\{x_1\ x_2\ x_3\}) &= \mu(\{x_1\ x_2\}) + \mu(\{x_1, x_3\}) + \mu(\{x_2\ x_3\}) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_2\}) - \mu(\{x_3\}) \\
1 &= 0 + 0 + 4 - 1 - 1 - 1 \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Así pues ,$\mu$ es Aditiva de Grado-2

2 Ahora probemos que $\mu$ es Regular

a) Si $\mu(K) = 0$, significa que

$$K = A = \emptyset \quad K = E = \{x_1\ x_2\} \quad ó \quad K = F = \{x_1\ x_3\}$$

Luego para $K = A = \emptyset$ se tiene que

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(B)$$

$$\mu(A \sqcup C) = \mu(C)$$

$$\mu(A \sqcup D) = \mu(D)$$

$$\mu(A \sqcup E) = \mu(E)$$

$$\mu(A \sqcup F) = \mu(F)$$

$$\mu(A \sqcup G) = \mu(G)$$

$$\mu(A \sqcup H) = \mu(H)$$

Para $K = E = \{x_1, x_2\}$ se tiene que

$$\mu(E \sqcup A) = \mu(\{x_1, x_2\}) = 0 = \mu(A)$$

$$\mu(E \sqcup D) = \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1 = \mu(D)$$

Para $K = F = \{x_1, x_3\}$, se tiene que

$$\mu(F \sqcup A) = \mu(\{x_1, x_3\}) = 0 = \mu(A)$$

$$\mu(F \sqcup C) = \mu(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1 = \mu(C)$$

Por lo tanto $\mu(K \sqcup M) = \mu(M)$ para todo $M \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ disyunto de $K$

b) Como $\mu(A \sqcup E) = \mu(\{x_1, x_2\}) = 0$, entonces

$$\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0 = \mu(\{x_1, x_2\}) = \mu(E)$$

Como $\mu(B \sqcup C) = \mu(\{x_1, x_2\}) = 0$, entonces

$$\mu(B) = \mu(\{x_1\}) = 1 = \mu(\{x_2\}) = \mu(C)$$

Como $\mu(A \sqcup F) = \mu(\{x_1, x_3\}) = 0$ entonces

$$\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0 = \mu(\{x_1, x_3\}) = \mu(F)$$

Y como $\mu(B \sqcup D) = \mu(\{x_1\ x_3\}) = 0$, entonces

$$\mu(B) = \mu(\{x_1\}) = 1 = \mu(\{x_3\}) = \mu(D)$$

Así pues si $\mu(K \dot{\sqcup} M) = 0$ entonces $\mu(K) = \mu(M)$

De 1 y 2 se tiene que $\mu$ es un medida cuantica sobre $X$

Note que $\mu(\{x_1\ x_2\}) = 0$ y $\mu(\{x_1\ x_3\}) = 0$ Es claro que estos dos conjuntos forman un cubrimiento de $X$ y que los dos tienen medida cero, pero

$$\mu(X) \neq 0$$

**Definición 3 5 2** *Un cubrimiento $\{B_i\}_{i\in I}$ de $X$ es un* ***Cubrimiento Cuantico de X*** *si $\mu(B_i) = 0$ para todo $i \in I$ implica que $\mu(X) = 0$ para toda medida cuantica $\mu$ sobre $X$*

Note que los cubrimientos cuánticos aplican a todas las medidas cuánticas de $X$

**Definición 3 5 3** *Un cubrimiento $\{B_i\}_{i\in I}$ de $X$ es una* ***Particion de X*** *si*

$$B_i \cap B_j = \emptyset,$$

*para todo $i \neq j$*

**Ejemplo 3 5 2** *Una partición arbitraria $\{B_1\ B_2\ \ \ B_n\}$ de $X$ es un cubrimiento cuántico de $X$*

En efecto sea $\mu$ una medida cuantica de $X$ y supongamos que $\mu(B\ ) = 0$, para $i = 1\ 2,\ \ n$ Como $\mu$ es una medida cuantica por regularidad se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(X) &= \mu(B_1 \sqcup B_2 \sqcup \quad \sqcup B_n) \\
&= \mu(B_2 \sqcup \quad \sqcup B_n) \\
&= \mu(B_3 \sqcup \quad \sqcup B_n) \\
& \\
&= \mu(B_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo anterior es válido para cualquier medida cuantica $\mu$ de $X$ Asi pues, la partición $\{B_1\ B_2,\ \ B_n\}$ de $X$ es un cubrimiento cuántico de $X$

**Definición 3 5 4** *Un subconjunto $A \subseteq X$ es un* ***k conjunto*** *si $|\ A\ | = k$ El* ***k-cubrimiento*** *de $X$ es la familia de todos los $k$ conjuntos de $X$ Es decir, el 1 cubrimiento de $X$ es la familia de todos los subconjuntos unitarios de $X$ el 2 cubrimiento de $X$ es la familia de todos los subconjuntos de $X$ que tienen dos elementos, etc*

**Teorema 3 5 1** *Sea* $X = \{x_1, x_2, \ , x_n\}$ *Los k cubrimientos de* $X$ *son cubrimientos cuanticos* $(1 \leq k \leq n)$

**Demostración**

Si $k = 1$, el 1 cubrimiento se convierte en una partición y por el Ejemplo 3 5 2 es un cubrimiento cuántico

Sea $2 \leq k \leq n$ y supongamos que cada k conjunto tiene medida cuántica cero Por el Teorema 3 2 3 para cualquiera elementos distintos $i_1 \ i_2 \quad i_k \in \{1 \ 2, \quad n\}$ se tiene que

$$0 = \mu(\{x_{i_1}, x_{i_2} \quad , x_{i_k}\}) = \sum_{r<s=1}^{k} \mu(\{x_{i_r} \ x_{i_s}\}) + (2-k)\sum_{j=1}^{k}\mu(x_{i_j})$$

Recordemos que $\binom{n}{k}$ indica las posibles formas de escoger un subconjunto de $k$ elementos de un conjunto de $n$ elementos Ahora sumemos todos los $\binom{n}{k}$ posibles k conjuntos de $X$ Como $x_{i_j}$ solo aparece en $\binom{n-1}{k-1}$ k conjuntos, ya que si son $n$ elementos y escojo uno $(x_{i_j})$, solo me quedan $\binom{n-1}{k-1}$ formas posibles de escojer $k-1$ elementos Por la misma razón el conjunto $\{x \quad x\}$ solo aparece en $\binom{n-2}{k-2}$ k conjuntos Luego se tiene que

$$0 = \binom{n-2}{k-2}\sum_{r<s=1}^{n}\mu(\{x_r \ x_s\}) + \binom{n-1}{k-1}(2-k)\sum_{j=1}^{n}\mu(x_j)$$

de donde

$$\binom{n-2}{k-2}\sum_{r<s=1}^{n}\mu(\{x_r, x_s\}) = (k-2)\binom{n-1}{k-1}\sum_{j=1}^{n}\mu(x_j)$$

$$\sum_{r<s=1}^{n}\mu(\{x_r \ x_s\}) = \frac{(k-2)\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{k-2}}\sum_{j=1}^{n}\mu(x_j)$$

Resolviendo esta fracción

$$
\begin{aligned}
\frac{(k-2)\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{k-2}} &= \frac{(k-2)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}} \\
&= \frac{(k-2)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k-2)!(n-k)!}{(n-2)!} \\
&= \frac{(k-2)(n-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(k-2)!}{(n-2)!} \\
&= \frac{(k-2)(n-1)!(k-2)!}{(k-1)!(n-2)!} \\
&= \frac{(k-2)(n-1)(n-2)!(k-2)!}{(k-1)(k-2)!(n-2)!} \\
&= \frac{(k-2)(n-1)}{(k-1)}
\end{aligned}
$$

Así

$$\sum_{r<s=1}^{n} \mu(\{x_r, x_s\}) = \frac{(k-2)(n-1)}{(k-1)} \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

Como $k \leq n$ por el Teorema 3 2 3 se tiene que

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \sum_{r<s=1}^{n} \mu(\{x_r, x_s\}) - (n-2) \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

Pero, como

$$\sum_{r<s=1}^{n} \mu(\{x_r, x_s\}) = \frac{(k-2)(n-1)}{(k-1)} \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

Se tiene que

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \frac{(k-2)(n-1)}{(k-1)} \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j) - (n-2) \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{(k-2)(n-1)}{(k-1)} - (n-2)\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{(k-2)(n-1) - (k-1)(n-2)}{k-1}\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{kn - k - 2n + 2 - (kn - 2k - n + 2)}{k-1}\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{kn - k - 2n + 2 - kn + 2k + n - 2}{k-1}\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{k-n}{k-1}\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j)$$

Y

$$\mu(X) = \mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \left[\frac{k-n}{k-1}\right] \sum_{j=1}^{n} \mu(x_j) \leq 0$$

Luego como $\mu(X) \geq 0$ se tiene que $\mu(X) = 0$. Por consiguiente, los k cubrimientos son cubrimientos cuánticos.

A continuación presentamos una generalización de los k cubrimientos.

**Definición 3.5.5** *Una **anticadena** en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ es una familia no vacía de conjuntos $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ que es incomparable. Es decir, $B_i \not\subseteq B_j$ para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Diremos que una anticadena $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ es maximal si ésta no está contenida estrictamente en otra anticadena más grande. Esto es, para cualquier $D \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ se tiene que $D \subseteq B_i$ o $B_i \subseteq D$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$.*

De la definición anterior podemos deducir que una anticadena maximal

$$\{B_1, B_2 \quad B_n\}$$

forma un cubrimiento para $X$ ya que para cualquier $x \in X$ existe un $B_i$ tal que $x \in B_i$ Luego

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

**Ejemplo 3 5 3** *Sea $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X})\ \mu)$ un espacio de medida cuantica Los k cubrimientos $(C_k)$ son anticadenas maximales*

En efecto, son anticadenas ya que dos diferentes k conjuntos son incomparables Y son maximales ya que si $D \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, entonces puede ser que $| D |< k$ en este caso existe un k conjunto $B \in C_k$, tal que $D \subsetneq B$ mientras que si $| D |\geq k$ entonces existe un k conjunto $B \in C_k$, tal que $B \subseteq D$

Con esto se concluye que las anticadenas maximales generalizan los k cubrimientos $k = 1\ 2, \quad n$

La pregunta obvia que nos debemos hacer ahora es

*¿Es toda cadena maximal un cubrimiento cuantico?*

Esta es una pregunta abierta, para todos los que se interesen en este tema y es una motivación para seguir profundizando en el

## 3 6 MEDIDAS SÚPER - CUÁNTICAS

**Definición 3 6 1** *Una funcion*

$$\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0 \; +\infty)$$

*es una **Medida de Grado m** si $\mu$ satisface la condición de Aditividad de Grado m*

$$\mu(A_1 \sqcup \quad \sqcup A_{n+1}) = \sum_{i_1 < \quad < _m =1}^{m+1} \mu(A_{i_1} \sqcup \quad \sqcup A_{i_m}) - \sum_{i_1 < \quad < _m \; j=1}^{m+1} \mu(A_{i_1} \sqcup \quad \sqcup A_{i_{m-1}})$$
$$+ \quad + (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i)$$

**Definición 3 6 2** *Una **Medida Super Cuántica** es una Medida de Grado m para $m \geq 3$*

Las medidas super cuánticas pueden describir teorias que son más generales que la mecánica cuántica

**Teorema 3 6 1** *Sea*

$$\mu \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, +\infty)$$

*una medida cuantica, entonces $\mu$ es una medida super cuantica de Grado 3*

**Demostración**

Supongamos que $\mu$ es una medida cuántica luego $\mu$ es Aditiva de Grado-2 Por el Teorema 3 2 3 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4) &= \sum_{i<j=1}^{4} \mu(A_i \sqcup A_j) - 2\sum_{i=1}^{4}\mu(A_i) \\
&= 2\sum_{i<j=1}^{4} \mu(A_i \sqcup A_j) - 3\sum_{i=1}^{4}\mu(A_i) - \sum_{i<j=1}^{4} \mu(A_i \sqcup A_j) + \sum_{i=1}^{4}\mu(A_i)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
2\sum_{i<j=1}^{4} \mu(A_i \sqcup A_j) - 3\sum_{i=1}^{4}\mu(A_i) &= 2[\mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_1 \sqcup A_4) + \mu(A_2 \sqcup A_3) \\
&\quad +\mu(A_2 \sqcup A_4) + \mu(A_3 \sqcup A_4)] - 3[\mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) \\
&\quad +\mu(A_4)] \\
&= \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_1 \sqcup A_3) \\
&\quad +\mu(A_1 \sqcup A_4) + \mu(A_1 \sqcup A_4) + \mu(A_2 \sqcup A_3) + \mu(A_2 \sqcup A_3) \\
&\quad +\mu(A_2 \sqcup A_4) + \mu(A_2 \sqcup A_4) + \mu(A_3 \sqcup A_4) + \mu(A_3 \sqcup A_4) \\
&\quad -\mu(A_1) - \mu(A_1) - \mu(A_1) - \mu(A_2) - \mu(A_2) - \mu(A_2) \\
&\quad -\mu(A_3) - \mu(A_3) - \mu(A_3) - \mu(A_4) - \mu(A_4) - \mu(A_4) \\
&= \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_2 \sqcup A_3) - \mu(A_1) - \mu(A_2) \\
&\quad -\mu(A_3) + \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_1 \sqcup A_4) + \mu(A_2 \sqcup A_4) \\
&\quad -\mu(A_1) - \mu(A_2) - \mu(A_4) + \mu(A_1 \sqcup A_3) + \mu(A_1 \sqcup A_4) \\
&\quad +\mu(A_3 \sqcup A_4) - \mu(A_1) - \mu(A_3) - \mu(A_4) + \mu(A_2 \sqcup A_3)
\end{aligned}$$

Sea $\mu$ una medida Grado-3 sobre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ Definamos la parte clásica $\alpha_\mu^1 = \nu_\mu$ la función de interferencia de dos puntos $I_\mu^2 = I_\mu$ igual que en la Definición 3 3 1 y la función de interferencia de tres puntos como

$$I_\mu^3(x_i, x_j, x_k) = \mu(\{x_i, x_j, x_k\}) - \mu(\{x_i, x_j\}) - \mu(\{x_i, x_k\}) - \mu(\{x_j, x_k\}) + \mu(\{x_i\}) + \mu(\{x_j\}) + \mu(\{x_k\}),$$

si $i$, $j$ y $k$ son distintos y $I_\mu^3 = 0$ en otro caso Note que $I_\mu^3 = 0$ para medidas cuánticas ya que Aditividad de Grado-2 implica que

$$\mu(\{x_i, x_j, x_k\}) = \mu(\{x_i, x_j\}) + \mu(\{x_i, x_k\}) + \mu(\{x_j, x_k\}) - \mu(\{x_i\}) - \mu(\{x_j\}) - \mu(\{x_k\})$$

Esta interferencia introduce un nuevo tipo de fenómeno que no parece ocurrir en mecánica cuántica

Definamos ahora las medidas simetricas signadas $\alpha_\mu^2$ $\alpha_\mu^3$ sobre $\mathcal{P}(X^2)$ y $\mathcal{P}(X^3)$, respectivamente

$$\alpha_\mu^2(B) = \sum\{I_\mu^2(x_i, x_j) \quad (x_i, x_j) \in B\}$$

$$\alpha_\mu^3(B) = \sum\{I_\mu^3(x_i, x_j, x_k) \quad (x_i, x_j, x_k) \in B\}$$

El siguiente Teorema extiende el Teorema 3 3 1

**Teorema 3 6 3** *Si $\mu$ es una medida Grado 3 entonces para cada $B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, se tiene que*

$$\mu(B) = \alpha_\mu^1(B) + \frac{1}{2!}\alpha_\mu^2(B^2) + \frac{1}{3!}\alpha_\mu^3(B^3)$$

**Demostración**

Del Teorema 3 6 2 se tiene que el lado derecho de la igualdad es una medida signada Grado 3 Como se hizo en el Teorema 3 3 1 esta demostración se termina si se prueba que la igualdad se da para conjuntos unitarios, conjuntos de dos elementos y conjutos de tres elementos En el Teorema 3 3 1, se probó que se da la igualdad para conjuntos unitarios y para conjuntos de dos elementos ya que para estos dos casos $\alpha_\mu^3(B^3) = 0$ Supongamos que $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ luego

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu^1(B) + \frac{1}{2!}\alpha_\mu^2(B^2) + \frac{1}{3!}\alpha_\mu^3(B^3) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) + I_\mu^2(x_1, x_2) \\
&\quad + I_\mu^2(x_1\ x_3) + I_\mu^2(x_2\ x_3) + I_\mu^3(x_1\ x_2\ x_3) \\
&= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_1\ x_2\}) - \mu(\{x_1\}) \\
&\quad - \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_1\ x_3\}) - \mu(\{x_1\}) - \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_2\ x_3\}) \\
&\quad - \mu(\{x_2\}) - \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_1\ x_2, x_3\}) - \mu(\{x_1\ x_2\}) \\
&\quad - \mu(\{x_1\ x_3\}) - \mu(\{x_2\ x_3\}) + \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) \\
&= \mu(\{x_1\ x_2\ x_3\})
\end{aligned}$$

Para finalizar el Teorema 3 6 3 se puede generalizar a medidas Grado-$m$ usando

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\alpha_\mu^i(B^i)$$

39 OXTOBY J C 1980 *Measure and Category* Second Edition Springer Verlag New York 61 págs

40 PHILLIPS E R *An introduction to analysis and integration theory* In text London (1971)

41 RIOS, J M 2002 *Teoria de la Medida* 44 págs

42 RUDIN W 1970 *Real and Complex Analysis* First Edition McGraw Hill, New York 424 págs

43 RUDOLF, O , WRIGHT, J D *Homogeneous decoherence functionals in standard and history quantum mechanics* Commun Math Phys 204 (1999) 249 267

44 SALGADO R *Some identities for the quantum measure and its generalizations*, Mod Phys Lett A 17 (2002), 711 728

45 SÁNCHEZ J D 2005 *Teoria de la Medida e Integracion* 94 pags

46 SORKIN R *Quantum measure theory and its interpretation* Quantum Classical Correspondence Proceedings of the 4$^{th}$ Drexel Symposium on Quantum Nonintegrability eds D H Feng and B L Hu (1994), 229 251

47 SORKIN R *Quantum mechanics as quantum measure theory* Mod Phys Lett A 9 (1994) 3119 3127

48 SORKIN, R *Quantum mechanics without the wave function* J Phys A 40 (2007) 3207 3231

49 SPIEGEL, M R 1990 *Theory and Problems of Real Variables* First Edition McGraw Hill, Inc New York, 201 pags

50 SURYA, S WALLDEN, P *Quantum covers in quantum measure theory* arxiv quant ph 0809 1951 (2008)

51 WEIR A 1973 *Lebesgue Integration and Measure* First Edition Cambridge University Press, New York 146 pags

52 WHEEDEN R.L , ZYGMUND A 1977 *Measure and Integral An Introduction to Real Analysis* First Edition Marcel Dekker Inc New York 144 págs

53 WILDE, I F 2009 *Measure, Integration & Probability* Departamento de Matemática Keng's College London