UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

MODELO DE BLACK-SCHOLES PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES

Por
MARÍA MAGDALENA BUSTAMANTE DE ICAZA

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el título de Maestra en Ciencias con Especialización en Investigación de Operaciones

PANAMÁ, REPÚPLICA DE PANAMÁ
2002

APROBADO POR:

M. en I.O. ELOY RICO
PRESIDENTE

DR. ROGELIO ROSAS
MIEMBRO

M. en C. JUAN GONZÁLEZ
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 16/agosto/2002

DEDICATORIA

"Si por el azar encuentras algo en mi que te guste o te agrade, es porque parte de lo bello que tu me has dado, se refleja hacia ti en tu proximidad conmigo"

Betty Ann

Dedico este trabajo con mucho cariño a mi padre Francisco "Pacho" Bustamante (Q E P D), a mi madre Rosalía De Icaza y a mi tía Rosa Bustamante, ya que mis éxitos de hoy son el producto de las cosas buenas que ellos sembraron en mí

LULU

AGRADECIMIENTO

Mi sincero agradecimiento a aquellas personas que de alguna manera u otra siempre supieron brindarme una palabra de aliento y su apoyo para seguir adelante En especial al profesor Eloy Rico, quien de manera desinteresada me ofreció su valioso asesoramiento, el cual fue clave para la culminación de este trabajo

Muchas gracias

RESUMEN

(SUMMARY)

Las opciones son instrumentos financieros (derivados) que establecen un contrato entre un comprador y un vendedor Existen dos tipos de opciones opción call y opción put Los activos sobre los cuales se instrumenta la opción se denominan activos subyacente y la cantidad que le permite al comprador adquirir el derecho de la opción se denomina prima Las opciones pueden ser utilizada por el inversionista para protegerse del riesgo y como instrumento de inversión o especulación El precio de compra o venta de los activos garantizados por una opción es el precio de ejercicio Una opción de compra o "call" le confiere al tenedor el derecho, pero no la obligación, de comprar una cantidad determinada de activos financieros, a un precio preestablecido a ser ejercido en cualquier momento previo o hasta la expiración del contrato Una opción de venta o "put" da a su tenedor el derecho de vender un número fijo de acción a un precio preestablecido antes o hasta la fecha de expiración del contrato Si la opción se puede ejercer en cualquier momento desde su adquisición, se denomina Opción Americana y si solamente se puede ejercer en una fecha determinada se denomina Opción Europea Un problema importante en el manejo de las opciones es el de su valoración Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton desarrollaron un modelo para valorar opciones europeas, el Modelo de Black-Scholes, bajo el supuesto que su activo subyacente sigue un movimiento browniano y el modelo depende del precio de la opción, el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio de la opción, la tasa de interés libre de riesgo, tiempo de vencimiento Este modelo estocástico se basa en ecuaciones diferenciales estocásticas, y en especial el Lema de Ito Los conceptos matemáticos en los que se basa el modelo son complejos y avanzados, pero su aplicación es sencilla, ya que se permite su cálculo a través de calculadoras y softwares

The options are financial instruments (derivatives) that establish a contract between buyer and a seller There are two types of options call option and put option The assets on which the option is orchestrated are called underlying assets and the quantity that allows the buyer to acquire the right of the option is named premium The options can be used by the investor to be protected from the risk and as instrument of investment or speculation The price of buy or sell of the assets guaranteed by an option is the exercise price A buy or call option allows his holder the right, but not the obligation, of buying specific an specific quantity of financial assets, to a preestablished price that can be exercised in any prior moment or in the expiration date of the contract A sell or put option confers on his holder the right, but not the obligation, to sell certain number of assets in a preestablished price before or on the expiration date of the contract If the option can be exercised at the time up to the expiration day, is named American Option and if the option can only be exercised at expiry, is called European Option An important problem in the managing of the options is that of the valuation of options Fisher Black, Myron Scholes and Robert Merton developed a model to value European options, the Black-Scholes's model, under the supposition that its underlying assets follows a brownian motion and the model depends on the option price, the underlying assets price, the exercise price of the option, the risk free interest rate, expiry date This stochastic model is based on stochastic differential equations, and specially on Ito's Lemma The mathematical concepts on which the model is based are complex and advanced, but its application is simple, since its calculation is allowed using calculators and softwares

INDICE GENERAL

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

El uso de la Matemática a través de lenguaje y sus herramientas del análisis en el mundo financiero, ha adquirido una enorme importancia en los años recientes, sobre todo en los sofisticados mercados de derivados

Uno de los instrumentos más relevantes de estos mercados son las opciones Las opciones han existido desde los tiempos de los fenicios, griegos y romanos quienes negociaban con cláusulas de opciones sobre las mercancías que transportaban en sus naves

A través de este trabajo, denominado "**Modelo de "Black-Scholes para Valoración de Opciones"**, se presenta uno de los modelos matemáticos que constituye una gran aplicación de la matemática hacia otras ciencias, como lo son las finanzas económicas Cabe destacar que este modelo revolucionó la teoría de opciones y su desarrollo le significó a Scholes y a Merton el premio Nobel de Economía en 1977

Antes de explicar el modelo se presenta una breve historia del origen de las opciones y de cómo un grupo de ilustres hombres brillantes se preocuparon por resolver problemas prácticos

Se desea también, dar a conocer como el uso de un modelo matemático ha cambiado radicalmente los análisis habituales del mundo financiero, permitiendo su optimización y por ende un desarrollo de sus actividades financieras

Para una mejor compresión del tema, el trabajo se ha dividido en dos capítulos En el primero titulado "**Conceptos Fundamentales**" se explican los conceptos básicos para el desarrollo y operaciones financieras Se manejan temas como Antecedentes sobre opciones, definiciones, conceptos y componentes, estrategias, utilización y límites de las opciones financieras

En el segundo capítulo, "**El Modelo de Black-Scholes para la Valoración de Opciones**", se hace el desarrollo matemático del modelo a través del Cálculo Diferencial e Integral, del Cálculo de Probabilidades, el Cálculo Estocástico (Proceso Estocástico, Random Walk), las Ecuaciones Diferenciales Parciales (Ecuación de Calor, Lema de Ito), entre otros, que son vitales para el estudio de problemas de valoración de activos financieros Al final del capítulo se anexa un apéndice en donde se desarrolla una solución para la Ecuación de Calor

El modelo de Black-Scholes es de gran interés, ya que siendo un modelo económico fundamentado en matemática avanzanda, permitió a sus creadores, en octubre de 1997, obtener el premio Nobel de Economía otorgado por la Academia Sueca de Ciencias

Se desea que este modelo sirva de ejemplo para que los matemáticos panameños empleen sus conocimientos en el crecimiento de otras disciplinas, así como para que aquellas personas interesadas en invertir pueden utilizar el modelo para incrementar sus ganancias, lo cual se puede realizar a través de internet

En la actualidad hay muchos mercados de derivados con amplísimos volúmenes de negociaciones y la demanda de profesionales con una alta formación matemática se requiere por importantes instituciones bancarias de inversión de Wall Street para trabajar en la confección y valorización de instrumentos financieros

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LAS OPCIONES

1.1. Antecedentes Históricos

Los derivados financieros, como su nombre lo indica, son productos que se derivan de otros productos financieros (opciones, futuros, índices, etc) en otras palabras, los derivados son operaciones hipotéticas que se liquidan por diferencia entre el precio de mercado del activo subyacente y el precio pactado

La finalidad de los derivados es cubrir los posibles riesgos que aparecen en cualquier operación financiera, estabilizando y por tanto concretizando el costo financiero real de la operación Este producto tiene **efecto palanca**[1] muy elevado ya que pequeñas inversiones pueden generar substanciosos beneficios y a la inversa, en su gran mayoría son operaciones de especulación pura

Los derivados tienen la siguiente particularidad la ganancia de una persona implica la pérdida para otra

Algunos instrumentos derivados como las opciones se han convertido en mercados muy importantes en el mundo de las finanzas y de las inversiones Las opciones son dentro de los derivados, el producto más versátil y difundido Para comprender el por qué de esta afirmación hay que tener presente el concepto de riesgo En finanzas, el término riesgo se emplea de manera precisa para referirse a todo tipo de incertidumbre sobre el precio o el valor de un determinado activo determinado o posesión, o sobre cualquier otra característica que afecte a la operación del mercado El riesgo abarca tanto la evolución benéfica como adversa, es decir, que evitar el riesgo implica evitar no sólo los malos resultados, sino también los buenos

---

[1] En el argot financiero se denomina "efecto palanca" de una posicion especulativa al cociente entre el valor monetario de la posicion especulativa y la inversion requerida para tomar dicha decision

En este sentido las opciones son únicas ya que permiten al comprador la capacidad de evitar solamente los malos resultados y conservar los buenos Dividiendo el riesgo en dos para desechar la parte negativa Sin embargo, estos excelentes productos, no son gratis Lógicamente, existe un costo para acceder a ellas, pero el inversor que desea manejar el riesgo en vez de evitarlo, este costo lo paga con gusto

El concepto de opción no es nuevo, en la Antigua Grecia, Thales de Mileto hizo una gran fortuna negociando con opciones sobre aceitunas basándose en una previsión acertada de la cosecha, en contra de la opinión generalizada Decidió Thales negociar con los propietarios de almazaras el derecho a disponer en determinada fecha del uso exclusivo de sus instalaciones a cambio de pequeñas sumas de dinero La predicción de Thales fue correcta y tras la recogida, Thales disponía prácticamente de toda la capacidad de la molienda Es importante señalar que los fenicios y los romanos negociaban contratos con cláusulas de opción sobre la mercancía que transportaban en sus naves

El primer mercado de opciones con cierto nivel de organización aparece en el siglo XVII en Holanda, en estos mercados se negociaba la posibilidad de comprar o vender (calls o puts) bulbos de tulipanes en una fecha futura predeterminada Mediante estos contratos, los comerciantes holandeses se aseguraban el precio de compra de las partidas de tulipanes que deberían servir a sus clientes en el futuro y los agricultores podían comprar el derecho a vender sus cosechas futuras a un precio predeterminado (opciones de venta) En 1640, por las fuertes oscilaciones de los precios en dichos mercados, la enorme incertidumbre y el incumplimiento de los contratos, la burbuja financiera que generaba toda esta especulación desenfrenada provocó la quiebra de un buen número de especuladores, produciéndose una verdadera catástrofe económica

Las opciones como instrumentos de control y modificación del riesgo, se iniciaron en los países anglosajones, aunque la primera referencia escrita que se tiene es en español En 1688 un judío español asentado en Amsterdan, José de la Vega, fue testigo del bullicioso negocio de Amsterdam, y publicó su libro “Confusión de Confusiones”, en él describe costumbres y práctica de la Bolsa de Amsterdan, y proporciona la etimología de la palabra opción

*"Llamáronle los flamencos **opsie,** derivado del verbo latino **optio, optionis**, que significa elección, por quedar a elección de quien lo da el poder pedir o entregar la partida al que recibe pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más le convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea"*

Por más que José de la Vega trató de influenciar a la población española a dar más auge a las opciones, sus esfuerzos fueron inútiles, ya que por esas fechas se desarrolló un sistema financiero moderno en países como Inglaterra, Holanda y posteriormente Estados Unidos con tendencias mucho más mercantilistas

Existen otros ejemplos históricos que señalan las existencias de los mercados de opciones El incumplimiento de los compromisos en las opciones, se extendió hasta Europa, creando así la idea de que los mercados de opciones eran muy peligrosos En Inglaterra, a inicios, del siglo XVIII, se comenzaron a negociar opciones sobre acciones de las principales compañías comerciales Debido al escándalo por la fuerte caída de precios de la South Sea Company, en 1720, atribuído en parte a la especulación con opciones de esta compañía, el mercado de opciones fue declarado ilegal, prohibición que se mantuvo vigente hasta el inicio del siglo XX, aunque también es cierto que se continuaron haciendo operaciones sobre opciones de forma "semiclandestina"

A fines del siglo XVIII, se negociaban en Nueva York opciones ya también sobre instrumentos financieros, como acciones, y no sólo sobre materias primas tangibles Pero la negociación era privada y no había un mercado organizado que se responsabilizara del cumplimiento de los contratos Los frecuentes incumplimientos de los contratos trajeron la prohibición de la negociación de opciones

Desde ese momento hasta nuestros días se han creado numerosos mercados de opciones en las principales plazas financieras del internacionales, negociándose en los mismos, una amplísima gama de activos financieros y no financieros, con un elevado número de contratos, con cifras astronómicas y su uso generalizado para todo tipo de agentes económicos

Es importante señalar que el problema de fijar el precio de una opción, es decir, de valuarla, fue abordado desde el punto de vista matemático a finales del siglo XIX Para el año de 1900 en Francia, el matemático Louis Bachelier, considerado el padre de la teoría moderna de las opciones, publicó su tesis doctoral llamada ***"Théorie de la Spéculation"*** en los ***Annales de la Ecole Normale Superieur,*** aquí presenta la primera fórmula para calcular el precio de una opción

Bachelier consideró que la información que llega a los mercados financieros ejerce presiones sobre los precios empujándolos hacia arriba y hacia abajo, y que la llegada de esta información seguía un régimen aleatorio en el que subyacía una cierta tendencia determinística Para este comportamiento, postuló en su tesis que los precios de los activos seguían un movimiento browniano con una determinada tendencia (el ingrediente determinista) y un factor, hoy muy popular, la volatilidad, que medía la amplitud del impacto de la información recibida sobre los precios Se trata de una modelización de mecánica estadística

Bachelier introduce en este trabajo, con el objetivo de modelizar el comportamiento de los mercados financieros, el concepto matemático de movimiento browniano con la ecuación de calor, pero su movimiento browniano no estaba formalizado y era completamente funcional, faltaban dos ingredientes Sólo le faltó entender que la información afecta la rentabilidad (no a los precios en sí) y el otro, identificar la tendencia, por lo que, su formulación matemática tuvo que esperar

Norbet Wiener fue quién formalizó el concepto de movimiento browniano y lo presentó como paso al límite del camino aleatorio Pero fue Kiyosi Ito quien desarrolló el cálculo diferencial e integral asociado a los procesos brownianos, es decir, la teoría que permite obtener, a partir de información local cómo evoluciona el proceso, esto es, a partir de las leyes de probabilidad que gobiernan los distintos saltos infinitesimales, y las distribuciones de probabilidad que tiene el proceso en cada instante de tiempo Lo que motivó a Ito para la creación de todo este aparato de cálculo fue dar sentido a la teoría creada por Wiener y los trabajos desarrollados por Bachelier

Paul Samuelson, Premio Nobel de Economía en 1970, utilizó en la modernización de los mercados financieros el movimiento browniano geométrico, que él llamó, movimiento browniano económico El movimiento browniano económico no es más que la exponencial de un proceso y por tanto siempre es positivo De hecho, Samuelson ya postula el paradigma actual de que *Los rendimientos de los activos siguen un movimiento Browniano con tendencia* Pero no identificaba cual tendencia, lo que tuvo que esperar los trabajos de Black, Scholes y Merton

En 1973 Black, Scholes y Merton publicaron los artículos que fueron fundamentales para el ***Modelo del Precio de una Opción*** A partir de esta fecha comenzó rápidamente el cambio con apertura de opciones comerciales en el intercambio de opciones en la bolsa de Chicago y la llegada de los contratos de futuros financieros basados en las corrientes extranjeras en el Mercado Monetario Internacional de Intercambio Mercantil de Chicago

Posterior al modelo de Black-Scholes surge otro modelo propuesto por Linter, Sharpe y Treynor, denominado "CAMP" (Capital Asset Pricing Model) cuyas predicciones son muy generales, imprecisas, sujetas a grandes funciones macro y microeconómicas de difícil parametrización exacta Por lo cual, el modelo más conveniente en práctica hasta la fecha es el de Black-Scholes

1.1.1. MERCADOS ORGANIZADOS Y MERCADOS OTC.

El primer mercado de opciones organizado, el CBOE (Chicago Board Option Exchange) inició operaciones el 26 de abril de 1973 En cuanto a Europa, el moderno mercado llamado E O E (European Options Exchange) abre sus puertas en 1977, en 1978 el de Amsterdan y desde 1982 la corporación de bancos suizos hace de soporte de un mercado de opción En España se inicia en noviembre de 1989, con el nacimiento del mercado OM Ibérica En marzo de 1990 nace el MEFF (Mercado Español de Futuros Financieros), esta aparición dio origen a una situación inadecuada para un mercado pequeño como el español

En el año 1991, estos dos mercados españoles se unieron y crearon dos cámaras especializadas, la MEFF renta variable para compensar futuros y opciones sobre índices bursátiles y acciones La segunda MEFF renta fija para compensar futuros y opciones sobre tipos de interés y divisas

Los primeros mercados eran OTC (Over the Counter, Fuera de Bolsa), se llama así a todo mercado no organizado, ni oficial, paralelo a uno que si lo es, pudiendo coexistir con él El segundo mercado bursátiles se inició cuando los agentes que compraban y vendían acciones a lo largo de EEUU se unieron para formar el National Association of Security Dealers (Asociación Nacional de Negociantes de Valores), a fin de velar por la organización y correcto funcionamiento del mercado Posteriormente este mercado se automatizó, formando el NASDAQ (National Association of Security Dealers Automated Quotation) Esta clase de mercado, permite realizar operaciones con mayor discreción y flexibilidad que el mercado regulado, pero no existe un organismo central de las operaciones, con lo cual el riesgo de contrapartida es usualmente para el banco con el que se hace la operación

En el siguiente esquema presentamos las principales diferencias entre los mercados organizados y los mercados OTC, éstas serían

DIFERENCIAS CONCEPTUALES ENTRE LOS MERCADOS ORGANIZADOS Y LOS MERCADOS OTC

MERCADOS ORGANIZADOS	***MERCADOS OTC***
Riesgo de incumplimiento por la cámara de compensación	Riesgo de incumplimiento por el comprador
Relación entre el comprador y el vendedor a través de la cámara de compensación	Relación directa entre comprador y el vendedor
Contrato estandarizado	Contrato a la medida de ambos
Regulación a nivel gubernamental	No regulado
Formación de precios por cotización	Formación de precios por negociación
Liquidez amplia	Escasa liquidez en muchos contratos

1.2 DEFINICIONES.

Es importante familiarizarse con la terminología de las opciones así como sus términos anglosajones ya que es la nomenclatura normalmente utilizada A continuación se definen los términos y concepto básicos

DEFINICIÓN DE OPCIÓN: Una opción es un contrato que da derecho a su poseedor a comprar o vender un activo a un precio determinado, en una fecha determinada Por la posibilidad de ejercer dicho derecho el comprador de la opción, esta obligado a pagar al vendedor de dicha opción en precio o prima Es importante resaltar que el poseedor de la opción tiene el DERECHO PERO NO EL DEBER de ejercer dicha opción

TIPOS DE LA OPCION

TIPO DE OPCION Los términos que se definen a continuación tienen su origen en el mercado OTC

a) **OPCION DE COMPRA (opción CALL):** Cuando se adquiere una opción de CALL, se tiene el derecho a comprar un determinado activo a un precio específico, en una determinada fecha, a cambio se tendrá que desembolsar previamente una prima

b) **OPCION DE VENTA (opción PUT):** A cambio de un precio determinado o prima, se obtiene el derecho a vender un activo, como en el caso anterior, a un precio y a fecha determinada

Por tanto, de estas dos definiciones se desprende el siguiente cuadro

	COMPRADOR	VENDEDOR
CALL	DERECHO A COMPRAR	OBLIGACIÓN DE VENDER
PUT	DERECHO A VENDER	OBLIGACIÓN DE COMPRAR

La principal diferencia entre las opciones y los títulos clásicos (acciones y obligaciones) radica en que las opciones no representan un derecho sobre el activo emisor Es decir, un accionista ordinario tiene derecho sobre una parte de los beneficios y de los activos de la compañía, mientras que el poseedor de una opción de compra sólo tiene derecho a comprar acciones en el futuro, lo que representa solo un derecho potencial sobre los activos de la empresa Por otra parte, un accionista posee un título emitido por la compañía al haberla provisto de recursos financieros a cambio de unos ingresos futuros El poseedor de una opción no tiene relación alguna con la empresa sobre cuyos títulos posee un derecho de compra o venta Este tiene sencillamente un derecho de acuerdo con otra parte, el vendedor de la opción (writer o emisor) que concierne a la posible adquisición o venta en el futuro de los títulos a un precio predeterminado Ni el emisor de la opción, ni el posible comprador de la misma tiene efecto alguno sobre la compañía o sobre sus posibilidades de emitir acciones

a) **ACTIVO SUBYACENTE:** Es el bien sobre el que se efectúa el contrato de opción Pudiendo ser materias primas (petróleo, oro, café, etc), o bien instrumentos financieros (acciones, tipos de interés, divisas, etc) El activo subyacente se denotará en este trabajo con la letra ***S***

b) **FECHA DE EJERCICIO** Es la fecha en que vence el contrato, o simplemente,la madurez de la opción Existen dos tipos de opciones en función de su vencimiento

- **OPCIÓNES AMERICANAS** son las que se pueden ejercer en cualquier momento hasta la fecha de su vencimiento
- **OPCIONES EUROPEAS:** sólo se pueden ejercer en la fecha de su vencimiento Esta distinción, no corresponde a ninguna división geográfica pudiéndose negociar cualquiera de las dos en cualquier mercado

c) **PRECIO DE EJERCICIO:** el cual identificaremos con la letra ***E***, es el precio al que se podrá ejercer el contrato de opción, es decir, el precio al que puede comprar o vender, el activo subyacente

1.3. COMPONENTES DEL VALOR DE LA PRIMA.

El valor o la prima de una opción, se puede dividir en dos componentes

1.3.1 EL VALOR INTRÍNSECO.

El valor intrínseco (VI) se puede definir como el valor que tendría una opción en un momento determinado Denotaremos V_c y V_p como los valores intrínsecos de una opción de compra y una opción de venta, respectivamente Formalmente se calcula por las expresiones

$$\mathbf{V_c} = \mathbf{Max}\begin{cases} 0, & si \quad S \leq E \\ S - E, & si \quad S > E \end{cases} \quad \text{para una opción CALL}$$

$$\mathbf{V_p} = \mathbf{Max}\begin{cases} 0, & si \quad S \geq E \\ E - S, & si \quad S < E \end{cases} \quad \text{para una opción PUT}$$

Cuanto mayor sea su valor, mayor será el precio de compra suscrita sobre su título (considerando constantes el precio de ejercicio y la fecha de expiración del contrato)

En función del valor intrínseco, las opciones se pueden clasificar en tres categorías

- **Opciones dentro de dinero (In – the – money, ITM):** son aquellas cuyo precio de ejercicio es inferior al precio de mercado de la acción en el momento de emitirla, es decir, su valor intrínseco es positivo, luego

  S > E para las opciones **CALL,** y **E > S** para las opciones PUT

- **Opciones en el dinero (At – the – money, ATM):** son aquellas cuyo precio de mercado de la acción es igual o muy cercano al de ejercicio de la opción, es decir, aquellas cuyos precios de ejercicio coinciden con el precio del subyacente, esto es

  S = E , para las CALL y las PUT

  Su valor intrínseco es nulo y su ejercicio no supone ni beneficio ni pérdida

- **Opciones fuera de dinero (Out - of – the – money, OTM):** son aquellas cuyo precio de ejercicio es superior al precio de mercado de la acción en el momento de emitirla, o sea, aquella cuyo ejercicio implica una pérdida En términos analíticos

  S < E para las opciones **CALL,** y **E < S** para las opciones PUT

Debido a que estas opciones no se ejercerán, ya que el ejercicio se traducirá en pérdidas, se asume que el comprador es racional, su valor intrínseco también es cero

Si se desea ejercer la opción, existen dos formas de hacerlo

a) **LIQUIDACIÓN EN EFECTIVO** Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta entrega en efectivo la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del subyacente

b) **LIQUIDACIÓN EN ESPECIE.** Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta recibe o entrega la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del mercado del bien subyacente, de acuerdo con lo establecido en el contrato de la opción

1.3.2. VALOR TIEMPO DE UNA OPCION.

El valor tiempo de una opción (VT) es simplemente la valoración que hace el mercado de las probabilidades de mayores beneficios con la opción si el movimiento del precio del activo subyacente es favorable, es decir, el valor tiempo tiene un componente probabilístico y por consiguiente en su determinación tendrá una importancia decisiva la distribución de probabilidad que se asume para las variables futuras del precio de activo subyacente Se observará que

- Las opciones OTM sólo tienen valor tiempo Es decir, en la determinación de la prima los agentes sólo consideran las posibilidades de una evolución favorable (o desfavorable para los vendedores) de los precios del subyacente
- Las opciones ITM son las que tienen el menor valor tiempo Además, conforme la opción está más dentro de dinero (mayor valor intrínseco), el valor tiempo es menor
- Las opciones en ATM son las que tienen el máximo valor tiempo, no hay valor intrínsico Aquí tenemos una idea importante

El valor tiempo de una opción se maximiza cuando S = E

La explicación de este comportamiento es sencilla Cuando valuamos las opciones, asumimos que el mercado es eficiente, es decir, los precios reflejan plenamente toda la información relevante para el correspondiente activo Bajo este supuesto, la mejor estimación del precio futuro sería el precio actual, y los precios tendrían una distribución normal, tal como se representa en la figura 1 En dicha figura el área sombreada representa la probabilidad de que S > E, es decir, de que la opción permita beneficios en su ejercicio Cuando la opción CALL es ATM el dinero, existe una probabilidad de aproximadamente un 50% de obtener beneficios en su ejercicio

Cuando tenemos una opción ITM (fig 2), existen probabilidades de ganar más valor intrínseco (área de rayas verticales), pero también existe la posibilidad de perder parte del valor intrínseco actual con una evolución desfavorable de los precios (áreas de rayas diagonales), por lo que siempre el valor tiempo de una opción ITM será inferior al valor tiempo de una opción ATM Por último, el caso de una opción OTM se representa en la Figura 3 En esta gráfica observamos como el área sombreada es inferior a la correspondiente de la Figura 1 Es decir, su valor tiempo es inferior al de una opción ATM

Distribución de Probabilidad de los Precios del Subyacente **Opción ATM**

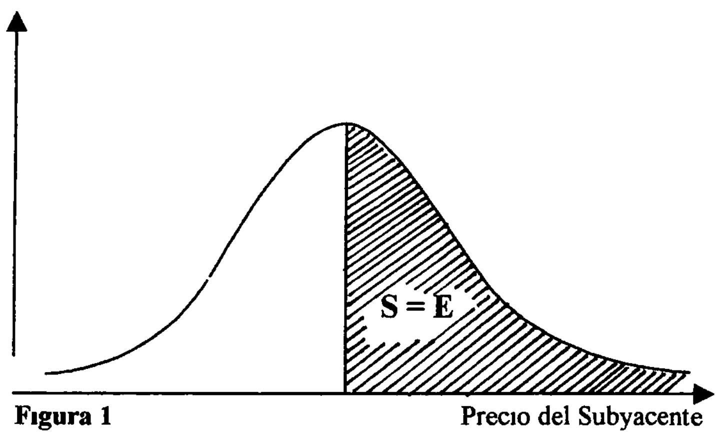


Figura 1

Distribución de Probabilidad de los Precios del Subyacente **Opción ITM**

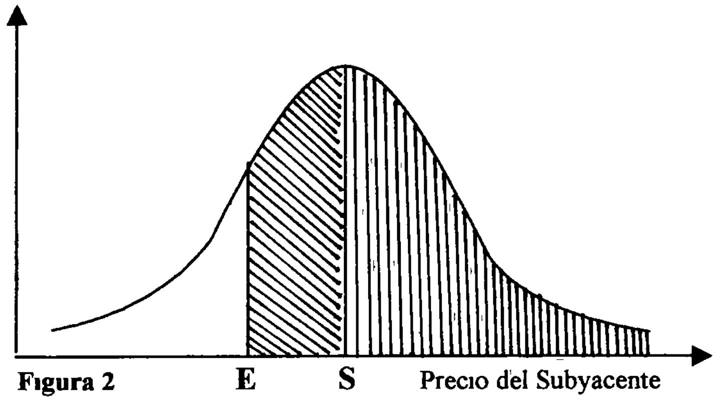


Figura 2

Distribución de Probabilidad de los Precios del Subyacente **Opción OTM**

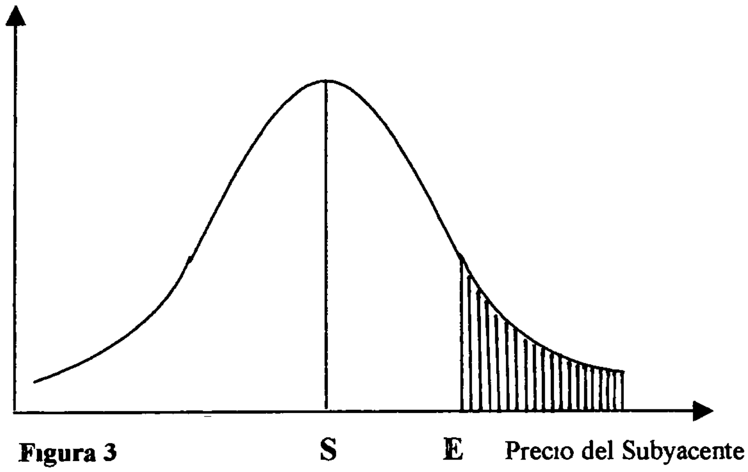


Figura 3

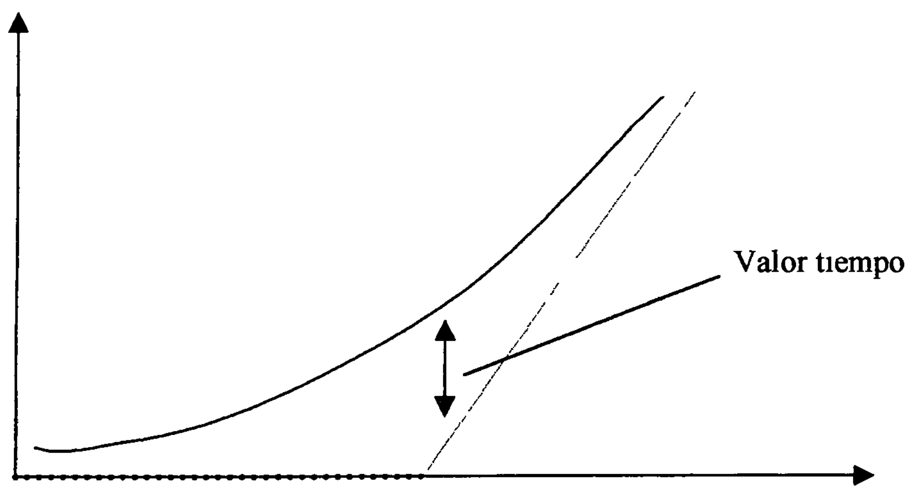


Figura 4

1.3.3. FACTORES QUE INCIDEN EN EL PRECIO DE UNA OPCION

El precio de una opción está determinado por la ley de la oferta y la demanda que se produce dentro del mercado de contratación De los seis factores que se describirán a continuación, los cuatro primeros vienen determinados por los mercados, es decir, son exógenos al contrato de opción, a los dos últimos, vencimiento y precio de ejercicio, debido a que cada contrato de opción tiene características específicas, se les denomina determinantes endógenos de la opción

- **PRECIO DEL SUBYACENTE.**

Los movimientos de los precios del activo subyacente tienen una influencia muy clara en el valor de una opción Cuanto más suba el precio del subyacente, provocará subidas en las primas de los CALL y descensos de las primas de los PUT y las bajadas de precios tienen el efecto contrario suben las primas de los PUT y bajan las primas de la CALL Cuanto más suba el precio del subyacente, el vendedor de un CALL, solicitará una mayor prima por vender dicha opción de compra, dado que la posibilidad de que pueda ejercerse la opción de compra es mayor Cuanto más baje la posibilidad de que pueda ejercer su opción de compra es menor, por lo que la prima a pagar por la compra de la CALL bajará En caso de que se desea adquirir un PUT, el criterio sería totalmente inverso La razón de esta relación es muy sencilla, si V_c y V_p son valores intrínsecos de una opción CALL y una opción PUT, respectivamente, con las bases a su definición tendremos

$$V_c = MAX\ [0, S - E]$$

$$V_p = MAX\ [0, E - S]$$

Si el precio del subyacente S sube, aumentará el valor intrínseco del CALL y reducirá el valor intrínseco del PUT, donde de lo contrario, si el precio del subyacente baja, disminuirá el valor intrínseco del CALL y aumentará el valor intrínseco del PUT Los cambios en el precio del subyacente inciden directamente en las expectativas del precio posible al vencimiento de la opción

- **LA VOLATILIDAD.**

La volatilidad se puede definir como una medida de dispersión del rendimiento del activo subyacente, en donde los rendimientos están representados como las variaciones del precio Su efecto sobre las CALL y las PUT es el mismo A una mayor volatilidad, una mayor probabilidad que se ejerza la opción, ya que los incrementos de volatilidad producen aumentos de las primas para ambas modalidades de opciones La explicación de este efecto es la siguiente

Cuanto mayor volatilidad tenga el subyacente, el rango de precios al vencimiento de la opción será mayor, lo que implica un riesgo superior para los vendedores de opciones y mayores probabilidades de beneficio para los compradores de opciones En consecuencia, el mercado de opciones traducirá los aumentos de precios y a la inversa

La volatilidad es el único factor desconocido al momento de estimar precios y realizar transacciones con opciones El factor volatilidad es de gran importancia en el mercado de opciones

La volatilidad la podemos asociar a la desviación estándar de las variaciones de los precios del subyacente Si se basa en la hipótesis del mercado eficiente, estas variaciones seguirán una distribución normal, lo cual supone que sus valores se distribuirán del siguiente modo

$\mu \pm 1\sigma$ 68 3% (2/3 del total de los casos)

$\mu \pm 2\sigma$ 95 4% (19/20 del total de los casos)

$\mu \pm 3\sigma$ 99 7% (368/369 del total de los casos)

donde μ es el valor esperado o la esperanza matemática de la variable aleatoria (S) y σ la desviación estándar asociada, es decir, la volatilidad

La desviación estándar, siguiendo con la hipótesis del mercado eficiente de las variaciones del precio es cero, esto se debe a que, la mejor estimación del precio futuro es el precio de hoy, ya que incorpora toda la información disponible hasta el momento En consecuencia, el mercado estimará que la variación más probable del precio es la no variación, es decir, volatilidad nula

a) **LA VOLATILIDAD HISTÓRICA.**

La volatilidad histórica es la desviación estándar de los precios reales de mercado medidos durante algún periodo preespecífico

Una forma de estimar la volatilidad del subyacente es analizando cual ha sido su volatilidad en el pasado

Este cálculo se puede realizar de dos maneras

1 Con base a los precios de “cierre" del subyacente Este enfoque es el más utilizado, con lo que el rendimiento en la fecha t del subyacente, que se denotará por $\mathbf{r_t}$, se puede calcular mediante la expresión

$$r_t = \ln (S_t / S_{t-1})$$

donde S_t y S_{t-1} son precios de cierre del subyacente a la fecha t y $t - 1$, respectivamente

A partir de la serie de r_t, para todo t, se calcula la media y la varianza de los rendimientos mediante la expresión

$$\mu_r = \sum_{t=1}^{n} \frac{r_t}{n} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \mu_r)^2$$

donde n es el número de datos utilizados para los cálculos Es importante señalar que μ_r y σ deben estar expresadas en las mismas unidades de tiempo, esto es si μ_r se calcula en base semanal, σ también debe calcularse semanal Para esta estimación se puede usar las siguientes fórmulas

- Si los rendimientos se obtienen con datos diarios

  $$\sigma_{anual} = \sqrt{252}\ \sigma_{diario}$$

  Por lo general, el número de días "hábiles" del mercado del subyacente es 252

- Si los rendimientos se obtienen con datos semanales

  $$\sigma_{anual} = \sqrt{52}\ \sigma_{semanal}$$

- Si los rendimientos se obtienen con datos mensuales

  $$\sigma_{anual} = \sqrt{12}\ \sigma_{mensual}$$

2 Con base a los precios "altos o máximos y bajos o mínimos" registrados en las diferentes sesiones de negociaciones del subyacente, estos se distribuyen

según una distribución lognormal Una utilización correcta de los máximos y/o mínimos diarios sobre últimos n días puede proporcionar un buen estimado de la volatilidad según los precios de cierre de los últimos días 5 días

La fórmula de cálculo es

$$\sigma = \frac{0\ 627}{n} \sum_{t=1}^{n} \log\left(\frac{P_{M_t}}{P_{m_t}}\right)$$

donde

P_{M_t} es el precio máximo del día t

P_{m_t} es precio mínimo del día t

La utilización de este enfoque tiene dos problemas

a) La descontinuidad de la negociación del subyacente en el día Esto supone que el máximo registrado puede ser menor al que se habría logrado con una negociación continua durante el día para el subyacente

b) La información del máximo o mínimo para muchos subyacentes pudiera ser inferior a los precios de cierre

b) VOLATILIDAD IMPLÍCITA.

Esta volatilidad se obtiene invirtiendo en los modelos de valoración, aquí σ es la incógnita y la prima de la opción será un valor dado Para el cálculo de la volatilidad implícita es necesario la elección del modelo de valoración utilizado por la mayoría de los mercados y que cada opción tendrá una volatilidad implícita determinada

La volatilidad implícita refleja la expectativa del mercado sobre la volatilidad del subyacente hasta el vencimiento de la correspondiente opción, de aquí que también se les conozca como volatilidad de mercado

Debido a las alteraciones de las primas, del precio del subyacente etc , la volatilidad cambia con mucha frecuencia, es realmente el auténtico "precio" de los mercados de opciones Dada la importancia de la volatilidad implícita, es conveniente obtener un dato de volatilidad para cada subyacente y vencimiento en períodos regulares de tiempo (día, apertura, cierra, etc), lo cual nos lleva a un problema que puede resolverse calculando la volatilidad implícita promedio, como la media ponderada de las volatilidades implícitas de los diferentes precios de ejercicio negociados, o sea,

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} \qquad i = 1,2,3, \quad ,t$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

donde

σ_i es la volatilidad implícita media para el vencimiento objeto del análisis

σ_{ij} es la volatilidad implícita para el vencimiento objeto del análisis, de la serie de precios de ejercicio j, en la misma fecha

w_j representa la porción con la que el activo j participa en el portafolio

En los mercados, una de las alternativas más sencillas utilizadas es la volatilidad implícita de las opciones ATM, las cuales presentan dos importantes características

- Presentar mayor liquidez

- Son más sensibles a las variaciones de la volatilidad

➢ **LOS DIVIDENDOS.**

Afecta el valor de las opciones en función del efecto que producen sobre las cotizaciones de las acciones El pago de dividendo supone un descenso en la cotización de las acciones por tanto, el comprador de una opción de compra sobre una acción que pague dividendo dentro del plazo de ejecución tendrá menos probabilidades de poder ejercerla por lo que el precio de la opción bajará En caso de la compra de un PUT, sería totalmente inverso El valor de una opción de venta será más alto cuanto más alto son los dividendos futuros esperado

➢ **EL TIPO DE INTERES.**

La variable tipo de interés influye en el precio de la opción en la medida que afecta a la disponibilidad de tesorería para los intervinientes de la operación Así el vendedor de una opción CALL, dispondrá del efectivo una vez ejecutada la misma, por lo que en caso de subir el tipo de interés, necesitará una mayor compensación por la imposibilidad de la no inversión inmediata, porque el precio de la prima subirá Por el contrario, un ofertante de un PUT, puede disponer de efectivo hasta que le ejerzan la opción, momento en que cambiaría la tesorería por el activo, si suben los tipos de interés puede beneficiarse de ello pudiendo ofrecer la opción a un precio más bajo

➢ **VENCIMIENTO.**

Un plazo corto en el vencimiento de la opción incidirá en una menor probabilidad de poder ejercer la opción, mientras que un plazo largo para poder ejercerla, aumentará dicha probabilidad Lo cual es válido, naturalmente tanto para un CALL, como para un

PUT Así, el precio de una opción será más caro, cuánto más largo sea su plazo de ejercicio y viceversa

- **PRECIO DE EJERCICIO**

Para la compra de un CALL, cuanto mayor sea el precio de la opción que se desea adquirir, en comparación con el precio actual del subyacente, menor será la prima que debemos pagar por la compra de nuestra opción dado que la probabilidad de que podamos ejercer nuestra opción será más baja Por el contrario la compra de un PUT, nos resulta más cara cuanto mayor sea el precio de ejercicio con relación a la cotización actual del subyacente, pues existe una mayor probabilidad de que ejerzamos nuestra opción de venta

1.4 UTILIZACIÓN DE LAS OPCIONES FINANCIERAS

Después de conocer lo que es una opción se hace necesario saber cuál es su utilización y que debemos hacer con ellas Estas pueden ser utilizadas para tres motivos, como cobertura de riesgo, con fines especulativos / inversión o como instrumento para efectuar arbitraje

1.4.1 LA OPCIÓN COMO INSTRUMENTO DE COBERTURA DE RIESGO.

La opción quizás sea el mejor instrumento para cubrir cualquier riesgo sobre el precio de los activos subyacente Con la opción estamos traspasando el riesgo de perdida a un tercero mientras conservamos en nuestro poder la posibilidad de seguir obteniendo beneficios, en caso de una evolución favorable de los precios Podemos imaginarla como una póliza de seguro, pagamos la prima a cambio de cubrir un riesgo, si el evento productor del riesgo no se materializa, continuamos disfrutando del bien asegurado, perdiendo solo la prima pagada

La cobertura con otros instrumentos, implica que estaríamos transfiriendo, tanto nuestro riesgo de pérdida, como la posibilidad de obtener beneficios que los mismos produjeran

Las estrategias de cobertura más simples son

1 La cobertura de un activo, con la compra de una opción de (PUT) sobre el mismo, llamada también CALL sintética Esta nos permite limitar las pérdidas, como máximo al importe de la prima pagada, en el caso que el activo que poseamos baje por debajo del precio de ejercicio, permitiendo ganancias ilimitadas, en caso de que nuestro activo suba por encima del precio de ejercicio Siendo esta ganancia algo inferior a la mera tendencia del activo, por la prima pagada al comprar la opción de venta

2 La cobertura de un activo mediante la venta de opción de compra (CALL) sobre el mismo, llamada también "call cubierta" Sin conseguir la protección total sobre el activo, la call cubierta, aminora los efectos producidos por una eventual caída de la cotización de los activos, retrasando la entrada en la pérdida de los mismos, quedando limitado en el caso de que los activos superen el precio de ejercicio, debido a que la opción de compra (CALL) que se ha vendido no sería ejercida

4 2 LA OPCIÓN COMO INSTRUMENTO DE INVERSIÓN / ESPECULACIÓN

Las opciones ofrecen al usuario de las mismas, un amplio abanico de posibilidades, si es capaz de anticipar correctamente, los potenciales movimientos de los precios o la volatilidad del activo subyacente

Las estrategias posibles son prácticamente ilimitadas, depende sólo de la mayor o menor aversión al riesgo del inversor/especulador y de su imaginación, dado que las posibles combinaciones son enormes

Estrategias simples, estas serían

a) Compra de un CALL, si piensa que el activo subyacente subirá

b) Compra un PUT, si se quiere anticipar a una bajada del mercado

c) Emisión de un CALL, si se cree que el precio del subyacente bajará

d) Emisión de un PUT, si se espera que el mercado está en una clara fase de alcista

Estas posiciones se pueden representar esquemáticamente de la siguiente manera

RENDIMIENTO DE LA COMPRA UN CALL Y UN PUT

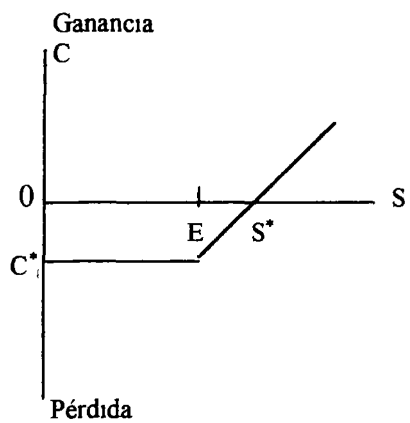


Figura 5

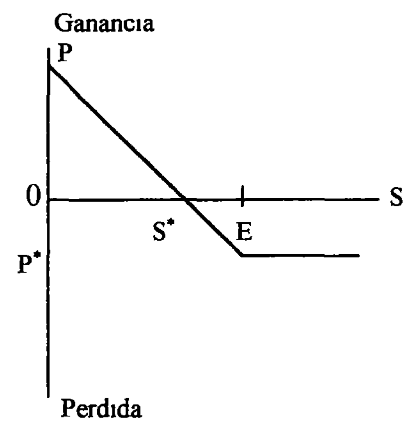


Figura 6

En la compra de una opción call, si el precio se eleva por encima de S^*, se tiene una ganancia Sin embargo, si el precio de la acción disminuye por debajo de E la pérdida se mitiga y ésta es sólo el precio de la opción Por su parte, una opción de venta mantiene la posibilidad de ganancia en caso de una reducción en el precio la opción, limita la pérdida al precio de la opción de venta cuando el precio de la acción incrementa

RENDIMIENTO DE LA VENTA UN CALL Y UN PUT

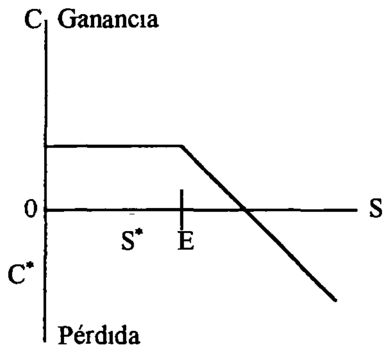


Figura 7

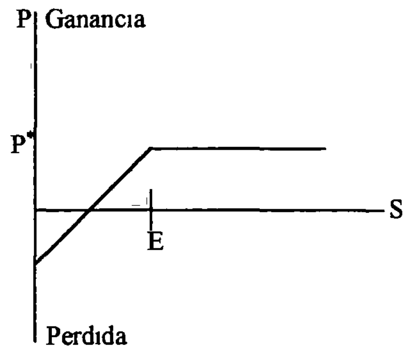


Figura 8

Como se aprecia la venta de la opciones tanto de compra como de venta también pueden ser usadas para mitigar pérdidas o, en otras palabras, como seguros a variaciones en los precios de las acciones

Es importante mencionar que la estrategia simple es excesivamente peligrosa ya que cualquier error de prevención puede producir elevadas pérdidas, de gran beligerancia, al tratar esta especulación

- Estrategias Complejas Las estrategias complejas reciben nombres curiosos en función de la figura que se dibuja en los gráficos de resultados / cotización Así nos encontramos con estrategias llamadas butterfly (mariposa), strangle (cuna), straddle (cono), son estrategias con datos extraídos de la realidad cotidiana

Por simplicidad sólo se mencionan estrategias que sean bidimensionales y hacemos la salvedad de que existen otras estrategias de carácter "multidimensional" en la especulación de opciones

- **LOS "SPREADS" O DIFERENCIALES**

  a) **"Spreads" alcistas o "bull spread"** Es una de las estrategias más conocidos y consiste en adquirir una opción de compra con un precio de ejercicio determinado y vender otra opción de compra con un precio de ejercicio superior Por lo general, ambas tienen la misma fecha de vencimiento Esta estrategia está indicada para quien piensa que la acción tiene una ligera tendencia al alza

  El diferencial alcista es una alternativa a la adquisición de una opción de compra cuando las expectativas de mercado son sólo ligeramente positivas y se desea limitar el riesgo de pérdidas

GRÁFICA DE UN SPREAD ALCISTA.

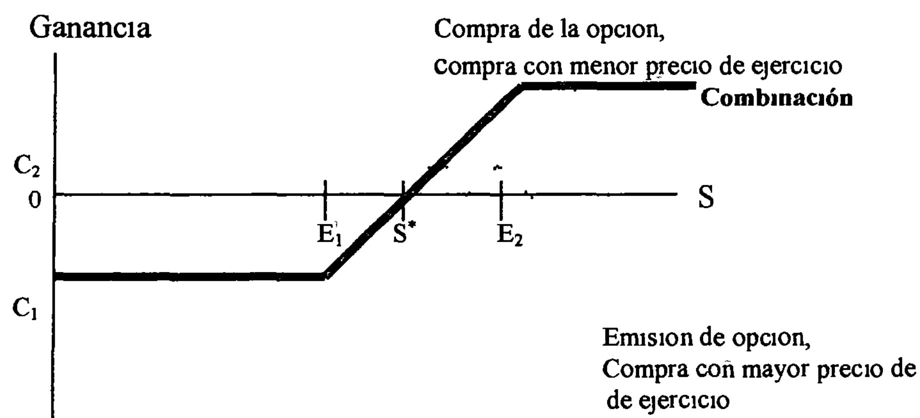


Figura 3

Note que cuando se eleva S^* la ganancia va aumentando hasta E_2, desde donde con mayores incremento, la ganancia permanece constante

b) **Spread bajista (bear spread)** Opuesta a la anterior consiste en la adquisición de una opción de compra con un determinado precio de ejercicio al mismo tiempo que se vende otra con un precio de ejercicio inferior Esta estrategia se puede emplear como alternativa a la compra de una opción de venta cuando un inversionista prevé una tendencia negativa del mercado Esta posición proporciona una ganancia en un mercado en declive y, comparada con la adquisición de una opción de venta, implica un menor riesgo de pérdidas, a cambio de limitar la ganancia potencial Por tanto, esta estrategia se recomienda para inversionistas que esperan una cierta caída en las cotizaciones

GRÁFICA DE UN SPREAD BAJISTA.

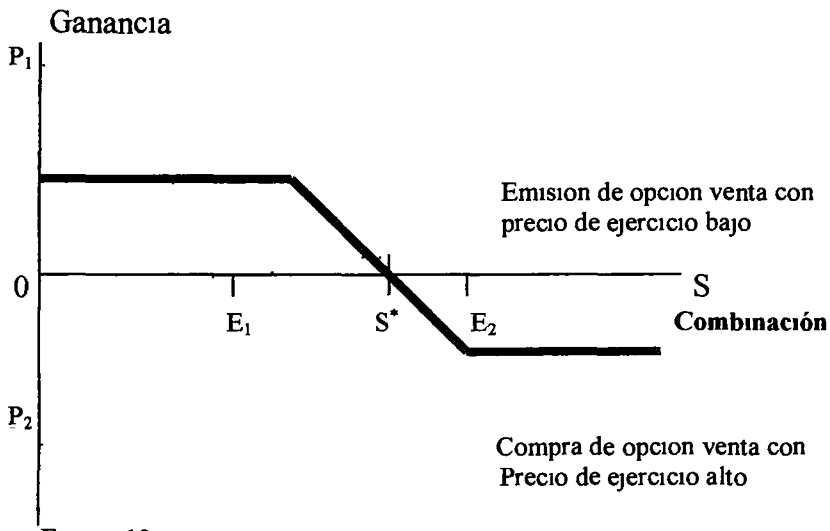


Figura 10

Observe que si el precio del subyacente disminuye a partir de S^* y hasta E_1, el valor del spread se incrementa Disminuciones adicionales a E_1 no afectan el valor

c) Spread Mariposa (butterfly spread) Tiene una posición neutral, combina una alcista con una bajista Suele ser utilizada por inversionistas que creen que el precio de la acción no se moverá mucho de su precio de ejercicio

ESQUEMA DE UN SPREAD MARIPOSA.

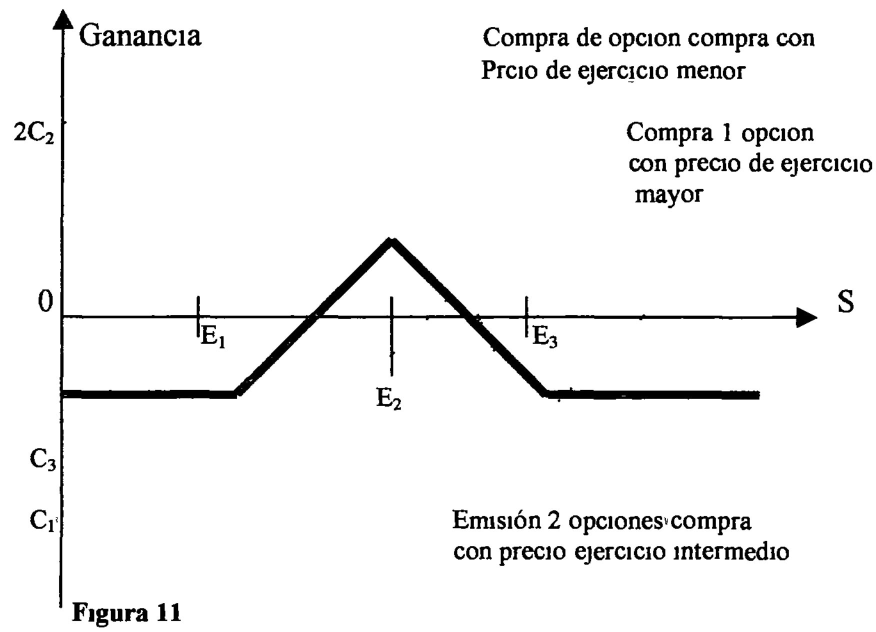


Figura 11

Observe que los precios de ejercicio tienen la siguiente característica $E_1<E_2<E_3$ donde C_2 es la opción intermedia La mariposa se puede obtener también de la suma vertical con respecto a eje horizontal de los integrantes del spread

Al comprar un diferencial mariposa, la pérdida máxima será el costo de la misma, esto ocurre cuando todas las opciones vencen OTM o ITM, o sea, cuando el precio del activo subyacente al vencimiento es inferior al precio de ejercicio de la opción más baja, o superior al de opción más alta Por otro lado, este diferencial alcanza su máximo beneficio cuando el precio del activo se mantiene cerca del precio de las opciones medias E_2 (como se puede observar en la gráfica 11) El riesgo de pérdida de un diferencial mariposa está limitado al importe de la prima pagada

c) **Spread Condor**, Un diferencial condor se parece al diferencial mariposa, pero difiere en el hecho de que se requieren cuatro precios de ejercicios diferentes en lugar de tres Tiene efecto similar al de aquella aunque se consiguen menos beneficios, a cambio de permitir mayor variación del precio del activo subyacente

- **COMBINACIONES.**

La combinación más popular y más simple es aquella que está formada por una opción de compra y una opción de venta sobre un mismo subyacente, con el mismo precio de subyacente y fecha de expiración A esta estrategia se le conoce como el ***straddle.***

La primera de estas estrategias es llamada ***straddle vertical pico***, mientras que la segunda es llamada ***straddle vertical fondo.*** *Pico* indica un monto máximo de ganancia y *fondo* un límite máximo de pérdida

STRADDLE VERTICAL PICO.

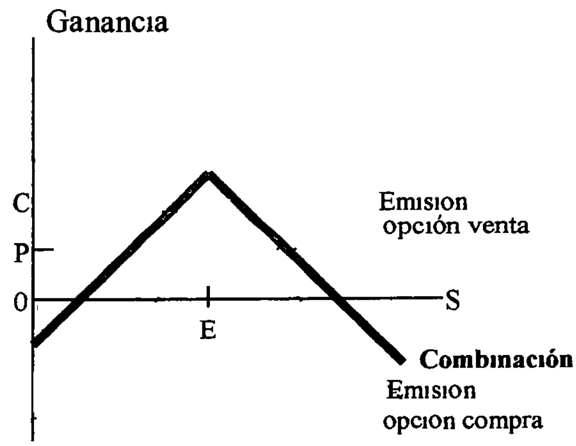


Figura 12

STRADDLE VERTICAL FONDO.

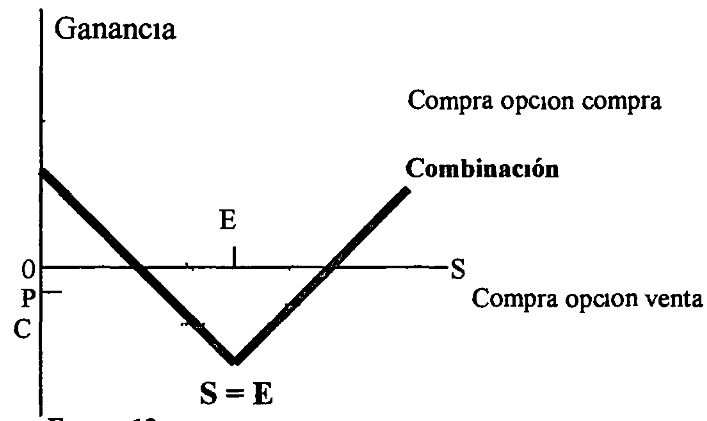


Fıgura 13

Exısten, otras varıedades de combınacıones tanto pıco como fondo, pero en lugar de formar un trıángulo, forman cuadrıláteros Este tıpo de combınacıones se forma ıgual que el straddle pıco, son los llamados ***strangle*** A dıferencıa del straddle, el precıo de las opcıones call es mayor al precıo de ejercıcıo de las opcıones put

STRANGLE VERTICAL PICO.

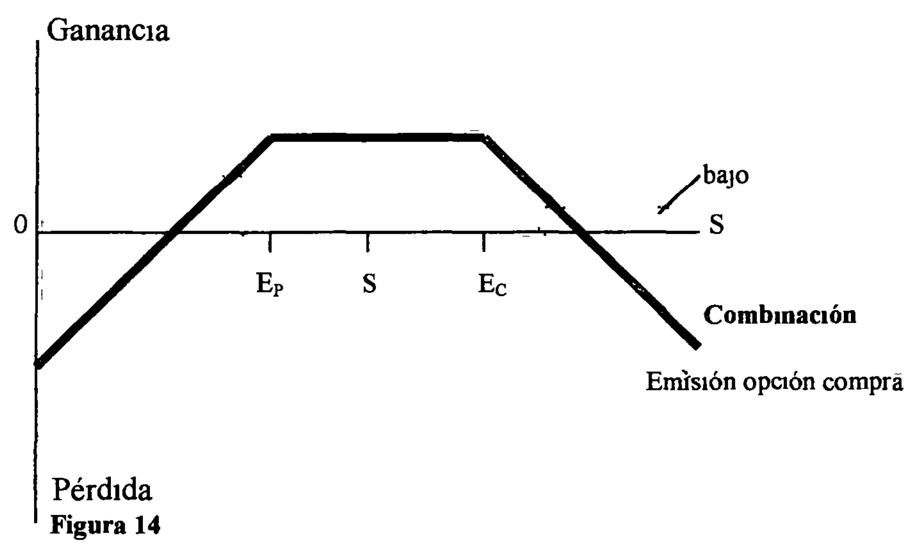


Figura 14

La gráfica de benefıcıos/ pérdıdas tıene forma de cuna con base hacıa abajo en caso de la compra de un strangle y hacıa arrıba cuando es una venta de strangle

En la compra de un strangle se necesitan movimientos más amplios del precio del subyacente para obtener ganancias, pero las primas desembolsadas son menores

- DIFERENCIAL TEMPORAL (time spread) Este temporal consiste en la venta de una opción y la adquisición simultánea de otra más lejana en el tiempo, ambas con el mismo precio de ejercicio Es pues, un diferencial horizontal Su uso se basa en que el del tiempo erosionará el valor de la opción más cercana a su vencimiento más lejos del mismo En efecto, en el supuesto de que el precio del valor subyacente no cambie, la diferencia de precios (spread) entre las dos opciones con diferentes fechas de vencimiento se incrementa con el tiempo Esto es debido a que el valor extrínseco (valor temporal) de una opción próxima a su vencimiento disminuye más rápidamente que el de otra más lejana en el tiempo, la diferencia de valor es aplicable a las opciones con un precio de ejercicio cercano al precio diario de cierre, es decir, a las opciones at-the-money

Existen tres métodos de crear este tipo de diferencial, que depende de las expectativas del mercado alcista o agresivo, neutro y bajista o defensivo La elección dependerá de si se eligen opciones at-the-money, out-the-money o in-the-money

➢ Diferencial Temporal Alcista o Agresivo En un diferencial alcista el inversionista vende la opción de compra con vencimiento más próximo y adquiere otra con vencimiento a más largo plazo Pero todo esto lo realiza cuando el valor de mercado del activo subyacente es algo inferior al precio de ejercicio de las opciones de compra (out-of-the-money) Esta estrategia tiene el atractivo de unos beneficios potenciales elevados a cambio de un pequeño desembolso, por supuesto, existe un riesgo implícito en la operación

- Diferencial Temporal Bajista o Defensivo. Cuando el inversionista confía en un descenso del precio de mercado del activo subyacente, realiza este tipo de diferencial bajista. El inversionista vende la opción de venta con vencimiento próximo y adquiere otro con vencimiento más lejano, pero realiza todo cuando el valor de mercado del activo subyacente es algo superior al precio de ejercicio de las opciones de venta. (in-the-money).
- Diferencial Temporal Neutro. Este diferencial se establece cuando el valor de mercado del activo subyacente se encuentra cerca del precio de ejercicio (at-the-money) de las opciones utilizadas. El estratega está interesado en vender tiempo y no predecir la dirección del precio del activo subyacente. Si este último no varía u oscila ligeramente, el diferencial neutro hasta la fecha de vencimiento más cercana obtendrá beneficio. En un diferencial neutro, se debería tener inicialmente la intención de cerrar el diferencial en el momento que venza la opción más cercana. Si el valor del activo cambiase, el resultado del diferencial neutro sería menor que si hubiese permanecido estable. Si el valor del activo varía suficientemente, se incurriría en una pérdida, cuando ésta será limitada.

1.4.3. LA OPCIÓN COMO INSTRUMENTO DE ARBITRAJE.

El arbitraje es una operación financiera que trata de sacar partido de las ineficiencias de los mercados, para conseguir una ganancia, sin soportar como contrapartida, riesgo alguno. Esta técnica requiere una presencia continua en el mercado y un enorme rapidez de información, lo que la relegaría casi al uso exclusivo de grandes profesionales.

1 5 LOS LÍMITES DEL VALOR DE UNA OPCIÓN.

1 5 1 LOS LIMITES DEL VALOR DE UNA CALL

Al igual que cualquier producto o mercancía, el valor de las opciones se encuentra entre determinados límites, uno superior y otro inferior Recordemos que si el día de la expiración, el precio de ejercicio (E) es mayor o igual que el precio de la acción, i e ,

Si $S \leq E$, entonces $C = 0$ Esto implica que $C = 0$, si $S - E \leq 0$

Por otro lado, si el precio de la acción es mayor al precio de ejercicio en el vencimiento o periodo 1 entonces el valor es igual a su diferencia

$$C = S - E > 0$$

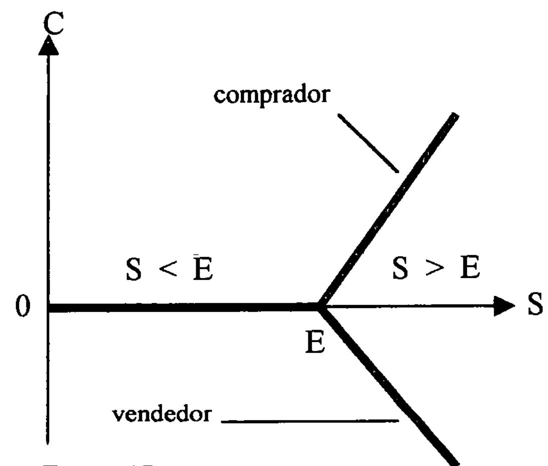


Figura 15

Observamos que, a la derecha de E la opción empieza a tener valor ya que los valores de S son mayores que E (S > E), por el contrario, a la izquierda de E, la opción carece de valor ya los valores de S son menores a E, (S < E)

- LÍMITE SUPERIOR Una opción de compra no puede valer más que el activo subyacente, es decir, una opción de compra nunca puede valer más de lo que cuesta una acción Por ello, una opción se venderá por debajo de la acción Consecuentemente, el límite superior es

$$S \geq C \geq \text{Max}\,[0, S - E\,(1 + i\,)^{-t} - D]$$

Donde i es el tipo de interés, t el plazo de vencimiento y D el valor actual de las rentas (dividendos) a pagar por el activo subyacente hasta el plazo de vencimiento de la opción

- LÍMITE INFERIOR

a) El primer aspecto a considerar es que el valor tiene que ser igual o mayor a cero

$$C(S,E,t) \geq 0, \text{ si } S - E < 0$$

Este límite es fácil de comprender ya que una opción sólo tiene derechos y no obligaciones Si el valor fuese negativo, la compra de una CALL supondría una ganancia para el comprador Además, se quedaría con un activo, la opción, que da mayores beneficios en el futuro

b) El valor de una opción de compra C es

$$C \geq S - E\,(i + 1)^{-t} - D, \text{ si } S - E \geq 0$$

Esto significa que el límite inferior sobre el valor compra es 0 o S – E

1 5 2 LOS LÍMITES DE VALOR DE UN PUT

a) Para el caso de las opciones de venta el límite superior es

$$P(S,E,t) \leq E\,(\,1 + i\,)^{-t} + D - S$$

Por tanto, los límites del valor de una PUT son

$$E\,(1 + i)^{-t} + D \geq P\,(S, D, T) \geq \text{Max}\,[0, E\,(1 + i)^{-t} D - S]$$

b) El límite inferior P≥ 0

1 5 3 LA PARIDAD PUT-CALL La paridad PUT-CALL se define como e equilibrio que existe entre los precios de las opciones de compra y venta Lo anterior se expresa de la siguiente manera

$$P(S,E,t) = C(S,E,t) - S + E(1 + i)^{-t} + D$$

Es decir, en el equilibrio la prima de una opción PUT debe ser igual a la de una opción CALL de características equivalentes, (S,E,t), menos el precio del activo subyacente más el valor actual de renta del activo subyacente hasta el vencimiento de la opción

El objetivo consiste en adquirir un número determinado de opciones de compra y vender otro número de opciones de venta, de tal manera, que lo es pagado por las primeras se financie por lo cobrado en las segundas

CAPÍTULO 2

MODELO DE BLACK-SCHOLES PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES

2.1 El MODELO.

El modelo económico financiero más conocido para la valoración de las opciones es el proporcionado por la llamada "Ecuación de Black-Scholes" Es un modelo de valoración desarrollado por los profesores del MIT (Massachusetts Institute of Technology) Fisher Black y Myron Scholes, quienes publicaron en 1973, el artículo "*Valoración de **Opciones y Pasivos de una Empresa***", en la revista científica Journal of Political Economy

Fisher Black, considerado " El Padre de Intelectual de los Mercados Modernos de Derivados", murió en Connecticut el 30 de agosto de 1995 a la edad de 57 años Preocupado por la teoría inaplicada, buscó siempre poner las ideas económicas en práctica

Se inició académicamente como físico, desarrollando su doctorado en 1946 en lógica, matemática e inteligencia artificial en la Universidad de Harvard Fue uno de los primeros en ser llamado"rocket scientist", científicos principales del campo de física y matemática, que fueron empleados en el sector financiero, a pesar de que no era académicamente formado en economía, tenía mucho dominio en esta área

La contribución intelectual de Black fue importante A fines de los años 70, conjuntamente con Myron Scholes participaron en el diseño de una fórmula matemática para valorar opciones financieras Esta fórmula proporciona herramientas para calcular el riesgo financiero con precisión sin tener que considerar la dirección de los mercados La idea fundamentalmente es determinar una fórmula que incluya todos los factores que afectan el precio de las opciones, y al mismo tiempo determinar cuántas opciones sufrían el mismo cambio de precio del subyacente

Black, Scholes y posteriormente Robert Merton (quien también realizó trabajos en opciones), se interesaron en mostrar las relaciones existentes entre las opciones y el subyacente Inicialmente, encontraron dificultades para mostrar claramente dicha relación, pero finalmente pudieron establecerla Todo concluyó en la elaboración de una ecuación diferencial que resultó ser la *Ecuación de Calor* o *Ecuación de Difusión*

Black y Scholes, enviaron por primera vez en 1970, la versión de su trabajo al "Journal of Political Ecomony" y al "Review of Economics and Statistics", los que rechazaron el artículo debido a que su contenido revolucionario y novedoso utilizaba los teoremas del cálculo integro-diferencial estocástico para valorar los derivativos

No fue sino en 1973, que se publicó el documento titulado "Journal Political Economy", bajo la presión ejercida por algunos miembros de la Universidad de Chicago a los editores de la revista

Luego de algunas correcciones, el modelo de Black-Scholes comenzó a utilizarse inmediatamente por los acreedores de la CBOE (Chicago Board Options Exchange) y por las sociedades inversoras de Nueva York

La fórmula descubierta por Scholes y Black, desarrollada por Merton, le permitió a Merton y a Scholes ganar el Premio Nobel de Economía en 1997 Los modelos matemáticos de opciones ideados por Merton, Black y Scholes, además del éxito académico, cosecharon un rápido éxito económico entre los operadores de mercados organizados de opciones recién abiertos en Estados Unidos

Es importante señalar que Black y Scholes emplearon una ecuación de fluctuaciones estocástica en tiempo discreto conocida como proceso de ***Wiener-Gauss*** como modelo matemático del riesgo de volatilidad de los valores de inversión en los mercados financieros Merton, por su parte, empleó una fórmula análoga a la de Black-Scholes con tiempo continuo, su modelo tenía como núcleo el teorema conocido como "lema de Ito" el cual permite diferenciar un proceso estocástico de tipo gaussiano

Fue de hecho este rápido éxito económico, y no la más tardía aceptación académica, lo que constituyó el germen principal del florecimiento, a principios de la década de los 80, que la primera promoción de economistas matemáticos comenzaron a considerarse a sí mismo como "ingenieros financieros", con la imprescindible asistencia de maquinaria de computación electrónica cada vez más potente y barata Los nuevos grupos de doctores en economía financiera salidos de las universidad de Chicago, Berkeley, Rochester y otras grandes universidades de Estados Unidos, se han lanzado a la búsqueda de nuevos tipos de modelos matemáticos aplicados a la gestión del riesgo Más allá de encapsular el riesgo de la variación de precios de un solo activo financiero como en el caso de las fórmulas de valoración de opciones primigenias, los flamantes ingenieros de principios de los 80 buscaban nuevos algoritmos de análisis, más o menos costosamente ejecutables, que les permitiera trabajar dentro de un esquema asegurador, factible y manejable, es decir, comercializables en el mercado, lo que hasta entonces había sido el espectro insondable de los llamados "riesgos no diversificables" riesgos de mercados o riesgos sistemáticos provocados por pequeñas fluctuaciones locales de los precios que se propagan por vecindad, amplificándose de manera no lineal hasta acabar sacudiendo de forma simultánea y abrupta todos los precios de los mercados

Desde entonces, el modelo se utiliza para valorar casi todo tipo de activos y es materia básica de los cursos de finanzas

2.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla en el tiempo mientras pasa por fluctuaciones al azar Se puede describir un sistema así, definiendo una familia de variables aleatorias, $\{X_t\}$, donde t es un punto en un espacio T, llamado ***espacio parametral***, y donde para cada $t \in T$, X_t es un punto en el espacio S, llamado ***espacio de estados*** Se puede imaginar la familia $\{X_t\}$ como la trayectoria de una partícula que se mueve "al azar" en el espacio S siendo X_t su posición en el instante t Un registro de estas trayectorias se conoce como *realización* del proceso Estos procesos pueden ser continuos o discretos

Uno de los procesos (discreto) estocásticos más usados en finanzas es el denominado Random Walk o caminata aleatoria Como los valores que las variables van a tomar en el período siguiente son inciertos, el cambio de una variable (de período a período) se le asigna una distribución de probabilidad Como se supone que estos cambios (variables aleatorias) son independientes, se puede modelar la dinámica con la siguiente ecuación

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ , con } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

2.2.1. Propiedades del Random Walk o Caminata Aleatoria.

Si se toma la esperanza condicional a tiempo $t-1$ se cumple que $E_{t-1}(X_t) = X_{t-1}$

Esto se define como **propiedad de Martingala,** ya que la mejor predicción que se puede hacer del valor futuro (a tiempo t - 1) es valor actual de la misma Por otro lado, como los cambios son independientes en el tiempo, la distribución de probabilidad de

X_t depende solamente de X_{t-1}, y no de información pasada, esto se conoce como la **propiedad de Markov** (sin memoria).

Es común pensar que los activos financieros (cuando los mercados son eficientes) siguen este proceso estocástico ya que toda la información esta contenida en el precio actual y su evolución no es predecible (de lo contrario los agentes harían ganancia infinitas)

2.2.2. Procesos de Wiener o Movimiento Browniano

Los procesos de Wiener originados a partir de la necesidad de explicar un fenómeno mecánico, constituyen hoy día una herramienta muy poderosa para explicar el comportamiento de fenómenos tan diferentes como los mercados financieros y la difusión de partículas en un medio

El 29 de marzo de 1900, Louis Bachelier defendió exitosamente su tesis en la Sorbona, titulada "Théorie de la Spéculation" como señalamos introduce el Movimiento Browniano como el límite de paseos al azar simples, y descubre la ley $(dZ)^2$ = dt que relaciona la evolución espacio-temporal para activos financieros en la bolsa parisina

Agregando el dato histórico, que en 1827, el botánico Robert Brown (1773-1858) descubrió, a través del microscopio que, pequeñísimas partículas, originadas a partir de granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento vigoroso, irregular e incesante, como si fueran pequeños seres vivientes, cuyas trayectorias eran similares a las observadas en los activos financieros, y de allí la denominación de Browniano para este tipo de proceso

El descubrimiento causó perplejidad a los científicos de su tiempo Fueron muchos los intentos por explicar este movimiento Aunque se creía firmemente en una relación entre el movimiento observado y el movimiento de las moléculas del agua, en aquella época la composición atómica de la materia no era conocida como una realidad

La primera explicación científica de este fenómeno la realizó Albert Einstein en 1905 Einstein ignoraba que el fenómeno había sido observado por Brown, mucho antes Con su trabajo, Einstein asentó las bases teóricas y experimentales de la teoría atómica de la materia, la cual influenció en el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos

Un proceso de Wiener o movimiento Browniano es un tipo de proceso aleatorio de variable continua que posee la propiedad de Markov Es decir, que el pasado de la variable no puede ser utilizado para predecir el futuro De hecho, la única variable relevante para obtener información sobre los elementos que afectan la variable es su valor actual

Frecuentemente, se supone que algunos procesos estocásticos de tiempo continuo como la temperatura siguen un proceso de Wiener Otros de naturaleza discreta, como el precio de las acciones, pueden ser representados mediante un proceso de Wiener, debido a que los cambios experimentados de un momento a otro son tan pequeños que no ameritan ser tratados en forma discreta

La utilización de un proceso Browniano, en el caso particular de la valuación de opciones, se basa en la estimación de distintas variables como los precios, precios de acciones, salarios, etc

Si la variable Z en un proceso de Wiener, sufre una modificación (dZ) en un intervalo de tiempo (dt), ésta debe tener dos propiedades

1. $dZ = \varepsilon\ (dt)^{1/2}$, donde ε es una variable aleatoria con distribución normal estándar (media cero y varianza uno)

2. Los valores dZ en dos períodos de tiempo dt son independientes

El proceso descrito por las propiedades anteriores puede ser representado como sigue

$$X_t = \mu\, t + \sigma Z, \text{ o en forma diferencial} \qquad (2\text{-}1)$$

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dZ \qquad (2\text{-}2)$$

La ecuación (2-1) muestra que la variable X_t tiene un componente tendencial representada en el coeficiente μ y un componente aleatorio representado por el segundo componente del lado derecho de la igualdad, donde Z sigue un proceso de Wiener y σ es la desviación estándar por unidad de tiempo

La media de X_t, no es más que el valor esperado, es decir

$$E(X_t) = E[\mu\, t \ + \sigma\, \varepsilon\, (t)^{1/2}]$$

$$= E(\mu\, t) \ + E\, [\sigma\, \varepsilon\, (t)^{1/2}]$$

$$= E(\mu\, t), \qquad \textit{puesto que } E(\varepsilon) = 0$$

$$= \mu\, t \qquad (2\text{-}3)$$

La varianza de x_t viene dada por la ecuación

$$Var(X_t) = E\left(X_t^2\right) - \left[E\left(X_t\right)\right]^2$$

$$= E[(\mu\, t \ + \sigma\, \varepsilon\, (t)^{1/2})^2] - (\mu\, t)^2$$

$$= E[(\mu\, t)^2 + 2\, \mu\, t\, \sigma\, \varepsilon\, (t)^{1/2} + \sigma^2 \varepsilon^2\, (t)] - (\mu\, t)^2$$

$$= \mu^2\, t^2 + E(\sigma^2 \varepsilon^2 t) - \mu^2\, t^2 \qquad (2\text{-}4)$$

Pero $E(\varepsilon^2) = 1$ ya que ε se mueve sobre una distribución normal estándar Luego la varianza queda expresada como

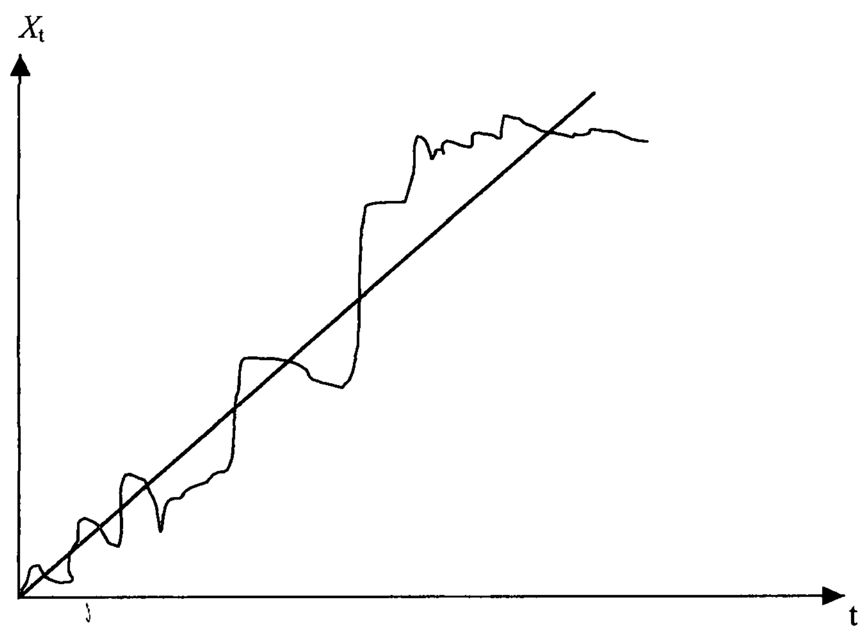
$Var\ (X_t) = \sigma^2 t$, y

la desviación estándar será , $des(X_t) = \sigma\,(t)^{1/2}$

Para la ecuación (2-2) los valores correspondientes de la media y la varianza serán

$dX_t = \mu\, d\, t$ y $Var_{dX_t} = \sigma^2 dt$

La representación gráfica de la variable X_t, puede representarse como



donde la recta que parte del origen representa el componente tendencial

Como se mencionó anteriormente dX_t representa un proceso de Wiener, que queda completamente caracterizado por $dX_t \sim N(0,dt)$

Una forma de expresar esto es

$$dX_t = \phi\sqrt{dt} \qquad (2\text{-}5)$$

donde ϕ es la variable aleatoria obtenida de la distribución o curva normal estandarizada

Por lo tanto, su función de densidad es

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \qquad (2\text{-}6)$$

Si se define el operador E por

$$E[F(\cdot)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi) e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi \qquad (2\text{-}7)$$

para algunas funciones F, se tienen las siguientes propiedades

$E(\phi) = 0$ y $E[\phi^2] = 1$

Considerando las propiedades de $\frac{dS}{S}$ y la propiedad markoviana, entonces $S + dS$ depende sólo del precio de hoy y

$$E[dS] = E[\sigma S dx + \mu S dt] = \mu S dt \qquad (2\text{-}8)$$

puesto que $E[dX_t] = 0$ Además,

$$var[dS] = E[dS^2] - E[dS]^2 = E[\sigma^2 S^2 dX_t^{\ 2}] = \sigma^2 S^2 dt \qquad (2\text{-}9)$$

A partir de la expresión anterior se genera el resultado más importante para manipulación de variables aleatorias

2.3. LEMA DE ITO.

Muchas veces se estará forzando a trabajar con funciones de procesos estocásticos y se va a necesitar tomar el diferencial de dicha función Un ejemplo de esto son los retornos de un activo que son una función del precio, es importante señalar que los precios siguen un proceso estocástico Naturalmente, la noción de derivada que se usa para el cálculo no sirve aquí, ya que la noción determinística de límite no se puede aplicar directamente a una variable aleatoria (en las que se debe considerar aspectos como el orden de convergencia de esas variables, etc) Para diferenciar un proceso estocástico se utiliza el "***Lema de Ito***", también conocido como el *Teorema Fundamental del Cálculo Estocástico*

La importancia del Lema de Ito recae en que permite analizar el impacto de cambios pequeños en una función de variables aleatorias

Considérese una variable aleatoria X_t que se sigue un proceso de Wiener con μ y σ funciones de x y t, es decir,

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma dZ$$

El lema de Ito afirma lo siguiente "Si $y = F(x,t)$ donde F es una función suave y x sigue un proceso de Ito, también y sigue un proceso de Ito, es decir,

$$dy = \mu_F dt + \sigma_F dZ \text{ "}$$

Previo a la obtención del diferencial de Ito, es necesario recordar que si una $F(x)$ es función suave, con n derivadas continuas, $F(x)$ puede ser desarrollada alrededor de un punto cualquiera x_0 a través de una serie de Taylor como sigue

$$F(x) = \frac{F(x_0)}{0!} + \frac{F'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \quad + \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2\text{-}10)$$

donde $|x_0 - \hat{x}_0| < |x - x_0|$

Restando $F(x_0)$ a ambos miembros de la ecuación y tomando $\Delta x = x - x_0$

$$F(x) - F(x_0) = \Delta F = F'\Delta X + \frac{1}{2}F''\Delta X^2 + \frac{1}{6}F'''\Delta X^3 + . \quad + \frac{1}{n!}F^{n+1}\Delta X^n \qquad (2\text{-}11)$$

Si la función F dependiese de dos variables, por ejemplo, X y t, $F = F(X,t)$ por el desarrollo Taylor se obtiene el siguiente resultado

$$dF = F_x\, dX_t + F_t\, dt + \frac{1}{2}F_{xx}(dX_t)^2 + \frac{1}{2}F_{tt}(dt)^2 + F_{xt}(dX_t dt) + \qquad (2\text{-}12)$$

2.3.1. Derivación del Diferencial de Ito

Se define un proceso de Ito como una forma generalizada del proceso de Wiener donde μ y σ son funciones de X y del tiempo, es decir

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dZ \tag{2-13}$$

Desarrollando por Taylor, al igual que se hizo en la expresión (2-13) y reemplazando dX_t en dicha ecuación se obtiene la siguiente expresión

$$dF = F_x\,(\mu\, dt + \sigma dZ) + F_t\, dt + \frac{1}{2}F_{xx}\,(\mu\, dt + \sigma dZ)^2 + \frac{1}{2}F_{tt}\,(dt)^2 +$$

$$+ F_{xt}\,((\mu\, dt + \sigma dZ)dt) + \tag{2-14}$$

Ahora se considera cuan pequeño (o cuan rápido converge a cero una variable) es un intervalo para que pueda considerarse que los términos que multiplican dicho intervalo puedan ignorarse en la expansión de Taylor Se tiene que los dt^m, con $m > 1$ se hacen cero muy rápido, y por lo tanto todos los términos de la expansión de Taylor que estén multiplicados por términos dt^m se consideran despreciables Por lo tanto, la expresión anterior se simplifica a

$$dF = F_x\,(\mu\, dt + \sigma dZ) + F_t\, dt + \frac{1}{2}F_{xx}(\sigma\sqrt{dt}\,)^2$$

$$= F_x\,(\mu\, dt + \sigma dZ) + F_t\, dt + \frac{1}{2}F_{xx}\,\sigma^2\,(dt)^2 \tag{2-15}$$

O equivalentemente,

$$dF = (F_x\,\mu + F_t + \frac{1}{2}F_{xx}\,\sigma^2)\,dt + F_x\,\sigma dZ \tag{2-16}$$

Si se reemplaza $\mu_F = (F_x\,\mu + F_t + \frac{1}{2}F_{xx}\,\sigma^2)$ y $\sigma_F = F_x\,\sigma dZ$, se obtiene

$$dF = \mu_F dt + \sigma_F dZ \tag{2-17}$$

Por lo que, si X_t sigue un movimiento browniano, entonces F también sigue un movimiento browniano

2.4 MODELO DE BLACK-SCHOLES.

El modelo de valuación de opciones Black-Scholes (B-S) es una de las fórmulas más usadas y mejor conocida en el mundo financiero Su propósito original fue el de calcular el precio de las opciones de compra europeas, de acciones que no pagan dividendos, pero el modelo puede modificarse para aplicarlo a opciones americanas, opciones de venta y opciones sobre acciones que pagan dividendos, así como para opciones sobre otros valores subyacentes

Este modelo se sirve de cuatro variables directamente observables (el precio mercado de las acciones, el precio de ejercicio de las opciones, el tiempo de expiración de las opciones y la tasa de interés libre de riesgo

El modelo de Black-Scholes para valuar opciones europeas se basa en las siguientes hipótesis

- El mercado funciona sin fricciones, es decir, no existen costos de transacciones, informaciones, ni impuestos, requerimientos de margen y los activos son perfectamente divisibles
- Las transacciones tienen lugar de forma continua y existe plena capacidad para realizar compras y ventas sin restricciones ni costos especiales
- Los agentes se pueden prestar y endeudarse a una misma tasa, que es la tasa de interés a corto plazo expresada en forma continua

- Las opciones son europeas y el subyacente no paga dividendos en el horizonte de planeación
- El cambio, constante en los precios en el mercado, afecta el comportamiento del activo por lo que es necesario un proceso estocástico de tipo markoviano para describir los movimientos de los productos financieros
- El cambio absoluto en el precio de la opción no es en sí mismo una cantidad útil

A cada cambio en el precio se le asocia una ganancia normalizada, definida como el cambio en el precio dividido por el valor original, $\frac{dS}{S}$

Se supone que al tiempo t el precio del activo es S Si se consideran pequeños intervalos de tiempo dt, en los cuales S cambia a $S + dS$, para obtener la ganancia del activo normalizado, el modelo descompone la ganancia en dos términos Uno es predecible y anticipa el retorno relacionado a la ganancia que se obtiene al invertir en el mercado libre de riesgo Es la contribución μdt a la ganancia $\frac{dS}{S}$, donde μ es la esperanza matemática del rendimiento instantáneo del subyacente, también conocida como drift Para este modelo μ se considera una constante El otro término $\frac{dS}{S}$ es el cambio aleatorio en el precio del activo subyacente como respuesta a los efectos externos, es de naturaleza aleatoria y se distribuye como una distribución normal, tiene la forma σdx, así

$$\frac{dS}{S} = \sigma dx + \mu dt \qquad (2\text{-}18)$$

En donde, σ es la volatilidad, la cual mide la desviación estándar del activo subyacente, y dx es una variable aleatoria con distribución normal (0,1) La variable dx representa el movimiento browniano La ecuación (2-18) es una ecuación diferencial estocástica

Considere el caso en el que $\sigma = 0$, es decir, el activo subyacente está libre de riesgo La ecuación (2-18) se reduce a

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt \quad o \quad \frac{dS}{dt} = \mu\, S \tag{2-19}$$

Si μ es constante, se obtiene una ecuación diferencial, la cual se puede resolver usando el método de variable separables

$$\int_{S_0}^{S} \frac{dS}{S} = \int_{t_0}^{t} \mu dt = \left[\ln|S|\right]_{S_0}^{S} = \mu[t]_{t_0}^{t} = \ln\left|\frac{S}{S_0}\right| = \mu(t-t_0) = \frac{S}{S_0} = e^{\mu(t-t_0)}$$

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)} \tag{2-20}$$

donde S_0 es el valor de S al tiempo $t = t_0$

La ecuación (2-20) es una de las fórmulas más utilizadas en matemáticas financieras para relacionar el valor presente y el valor futuro de un pago único con interés continuo

Entonces, si $\sigma = 0$, el precio del activo subyacente es totalmente determinístico y se puede predecir el precio futuro del subyacente con certeza

2.4.1. FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

A continuación se construirá la ecuación de Black-Scholes utilizando como base el Lema de Ito

Se señaló anteriormente que el valor de una opción depende de determinadas variables (del subyacente y del tiempo) Para esto supóngase que se tiene una opción con valuación $V(S,t)$, que depende de S y t V puede ser una opción Call o una opción Put

Para hacer la valuación se utiliza la propiedad de que el cambio en el valor de la opción está local y perfectamente correlacionado con el cambio en el valor del activo subyacente Esto es un punto importante en la valuación de opciones pues se puede construir un portafolio que consista de una cantidad de opciones y de una cantidad de activos de tal manera que se elimine totalmente la incertidumbre de ese portafolio Ese portafolio sin riesgo debe pagar la tasa libre de riesgo Se denotará como Δ la cantidad en el subyacente y π el valor del portafolio, entonces podemos escribir a π como

$$\pi = V - \Delta S \tag{2-21}$$

Si el activo subyacente sigue un movimiento browniano

$$\frac{dS}{S} = \mu_S\, dt + \sigma_S\, dZ,$$

por consiguiente, el incremento en la valuación de este portafolio en cada paso del tiempo

$$d\pi = dV - \Delta dS\ , \tag{2-22}$$

va a seguir también un movimiento browniano Aquí Δ se mantiene fijo en cada paso del tiempo

Usando el Lema de Ito (2-21), se sabe que si el subyacente sigue un movimiento browniano el derivado también lo sigue y por lo tanto el cambio en el valor de opción V se puede escribir como

$$dV = V_t dt + V_S\, dS + \frac{1}{2} V_{SS} (dS)^2$$

$$= V_t dt + V_S S\,(\mu_S dt + \sigma_S dz) + \frac{1}{2} V_{SS} S^2 \sigma^2{}_S dt$$

$$= (V_t + V_S S \mu_S + \frac{1}{2} V_{SS} S^2 \sigma^2{}_S) dt + V_S S\, \sigma_S dz$$

lo que implica que el cambio en el portafolio sigue el siguiente movimiento browniano

$$d\pi = V_t dt + V_s S(\mu_S dt + \sigma_S dz) + \frac{1}{2} \sigma^2{}_S S^2 V_{SS} dt - \Delta S(\mu_S dt + \sigma_S dz)$$

$$= (V_t + V_S S \mu_S + \frac{1}{2} \sigma^2{}_S S^2 V_{SS} - \Delta S \mu_S) dt + (V_S S \sigma_S - \Delta S \sigma_S) dz$$

Para obtener el de la opción se elige a Δ de tal manera que elimine el riesgo del portafolio, $(V_S S \sigma_S - \Delta S \sigma_S) dz$, por lo que

$$\Delta = V_S$$

Una vez eliminado el riesgo, el valor del portafolio en el tiempo debe ser igual, por el **principio de no arbitraje**, valor obtenido al colocar la misma cantidad de dinero en un instrumento con tasas libre de riesgo

$$\overbrace{V_t dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} dt}^{d\pi} = \overbrace{r(V - V_S S)}^{\pi} dt$$

Re escribiendo la ecuación anterior, se obtiene una ecuación diferencial parcial que una vez resuelta obtiene el valor del derivado a tiempo t,

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \qquad \text{(2-23)}$$

considerando que,

V es el precio del activo subyacente

S es el precio del activo subyacente

σ es la desviación estándar del precio del subyacente

r es el tasa libre de riesgo

V_S, y V_{SS} son la primera y la segunda derivada parcial del precio del activo subyacente con respecto al precio del activo subyacente

V_t es la derivada parcial del precio del activo subyacente con respecto al tiempo

La ecuación (2-23) puede escribirse de la forma

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \qquad \text{(2-23)'}$$

La ecuación (2-23) o su equivalente (2-23)', se conoce como **Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes (B-S).**

Es difícil integrar en un único sistema los todos elementos que determinan el valor de una opción Por eso se establecen controles a las respuestas individuales que el valor de una opción tiene ante cada uno de ellos Con este objetivo se definen las llamadas letras ***griegas*** de la opción[2]

1 **Delta** cambio en el valor de la opción ante distintos movimientos del subyacente

$$\Delta=\frac{\partial \, valor\ de\ la\ opción}{\partial S}$$

2 **Gamma** movimiento de la delta ante distintos movimientos del subyacente Interpretable como la aceleración del valor de la opción con respecto al valor del subyacente

3 **Theta** cambio en el valor de la opción ante movimientos en el tiempo hasta el vencimiento de la misma

[2] Las letras griegas no son mas que las derivadas parciales del valor de la opcion con respecto a diferentes paramétros de los cuales depende

$$\theta = \frac{\partial \, valor\ de\ opción}{\partial t}$$

4 **Vega** cambio en el valor de opción ante movimientos de en la volatilidad del activo subyacente

$$v = \frac{\partial \, Valor\ de\,la\ opción}{\partial \sigma}$$

5 **Rho** cambio en el valor de la opción ante movimientos en el tipo de interés libre de riesgo

$$\rho = \frac{\partial \, Valor\ de\,la\ opción}{\partial r}$$

Cuando se habla de valuación de usando la fórmula de Black-Scholes hay tener en cuenta dos cosas

(*i*) La ecuación diferencial

(ii) La fórmula de Black-Scholes

La ecuación diferencial la podemos usar con cualquier condición terminal para encontrar "numéricamente" el precio de cualquier derivado mientras que la fórmula es la solución dada unas condiciones terminales particulares

Se puede notar que en esta ecuación no aparece la tendencia del activo sino que aparece la tasa libre de riesgo (r) La razón es que una vez que hizo la reducción del riesgo del portafolio, dado que se pudo eliminar el riesgo perfectamente de la opción con el subyacente, no hay necesidad de tomar riesgo inherente así la tendencia desaparece con el término dS

El operador lineal diferencial, denotado por L_{BS}, dado por

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + r\frac{\partial}{\partial S} - r \qquad (2\text{-}24)$$

se interpreta en finanzas como una medida de diferencia entre la ganancia que obtiene al invertir en un portafolio de opciones con cobertura, las dos primeras y la dos últimas la ganancia que se obtiene al depositarlo en el banco

La ecuación diferencial de B-S es una ecuación de tipo parabólico (las ecuaciones diferenciales parciales más frecuentemente utilizadas en los problemas financieros son las de tipo parabólico)

2.5 SOLUCIÓN EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

La derivación de la ecuación (2-23) fue hecha en términos de una opción, dicho procedimiento es válido para cualquier opción call o put

La ecuación de B-S para un call europeo con valor *C(S,t)* es

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0 \quad \text{o,} \qquad (2\text{-}25)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0 \qquad (2\text{-}25)'$$

2.5.1 CONDICIONES DE FRONTERA Y FINAL PARA LAS OPCIONES EUROPEAS

Después de obtener la ecuación de B-S para la valuación de opciones es necesario considerar las condiciones de frontera y final, de lo contrario, no se podría encontrar una solución única para la ecuación diferencial

Las condiciones fronteras son las que permiten la obtención del valor del activo subyacente, éstas no son más que los precios del activo subyacente cuando las variables básicas (tales como el precio del subyacente y el tiempo, en nuestro caso) toman valores extremos

En el caso particular del Call las condiciones de frontera vienen dadas por,

(i) La condición final es $t = T$, la cual es $C(S,T) = max\,(S - E,\, 0)$.

(ii) Las condiciones de frontera son determinadas por el precio del activo cuando $S = 0$ y cuando S $\rightarrow \infty$, esto es

- Cuando la acción no tiene ningún valor el Call tampoco lo tendrá

  $C(0,t) = 0$, y

- Cuando el precio de la acción tiende a infinito el precio del Call deberá acercarse al precio de la acción

  $\lim_{S \to \infty} C(S,t) = S$

2.5.2 SOLUCIÓN PARTICULAR

Para integrar la ecuación (2-25)' es conveniente introducir algunos cambios de variables Considérese las variables x y t, como la función v de acuerdo a las siguientes igualdades

$$S = Ee^{x}, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \quad y \quad C = Ev(x,\tau) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = \frac{1}{E} C_t \left(\frac{-2}{\sigma^2}\right) = \frac{-2C_t}{E\sigma^2} \quad \blacklozenge \quad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{E}\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial C}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{1}{E} C_S \left(Ee^{x}\right) = \frac{C_S S}{E} \quad \blacklozenge \qquad \text{(b)}$$

---

[*] La variable original S es positiva, o sea, $0 \le S < +\infty$, en cambio $x = ln\,(S/E)$ admite todos los valores reales, $\infty < x < +\infty$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\left(S \cdot \frac{\partial C_S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} C_S\right) = \frac{1}{E}\left(S\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial C}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right) + SC_S\right)$$

$$= \frac{S}{E}\left(SC_{SS} + C_S\right) \qquad \text{(c)}$$

De las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtiene que

$$C_t = \frac{-E\sigma^2 v_\tau}{2}, C_S = \frac{E}{S}v_x \; y \; C_{SS} = (v_{xx} - v_x)$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2-25)' se obtiene

$$\frac{-E\sigma^2}{2}v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{E}{S^2}\left(v_{xx} - v_x\right)\right] + rS\left(\frac{E}{S}\right)v_x - rEv = 0$$

$$\frac{-E\sigma^2}{2}v_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 E(v_{xx} - v_x) + rEv_x - rEv = 0$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{-2}{E\sigma^2}$, se tiene

$$v_\tau - v_{xx} + v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \frac{2r}{\sigma^2}v = 0$$

$$v_\tau = v_{xx} - v_x + \frac{2r}{\sigma^2}v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v$$

$$v_\tau = v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v$$

Si $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, se tiene que

$$v_\tau = v_{xx} + (k-1)v_x - kv \qquad \text{(2-26)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - k \qquad \text{(2-26)'}$$

La condición frontera cambia a $C(S, T) = Ev(x, 0)$, para $\tau = 0$

Por otro lado, $C(S,T) = max(S - E, 0)$

$$C(S,T) = max(Ee^{x} - E, 0)$$

$$C(S,T) = Emax(e^{x} - 1, 0) = Ev(x, 0)$$

Así, $v(x, 0) = max(e^{x} - 1, 0)$

Se puede observar que al hacer el cambio de variable la ecuación contiene sólo al parámetro $\boldsymbol{k}$, mientras que el problema original contenía cuatro parámetros, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{T}$, σ y $\boldsymbol{r}$

La ecuación (2-26) se parece a la ecuación de calor, y se puede transformar a ésta mediante un cambio de variable. Este cambio se puede hacer si se toma a $v = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$ para las constantes α y β las cuales pueden ser determinadas

Derivando parcialmente a v con respecto a τ y α, respectivamente se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x + \beta\tau} u + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \qquad \text{(d)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta\tau} u + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(e)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha\left[\alpha e^{\alpha x + \beta\tau} u + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \alpha e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta\tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(f)}$$

De las ecuaciones (d) y (2-26) tenemos

$$\beta e^{\alpha x + \beta\tau} u + e^{\alpha x + \beta\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial u}{\partial x} + kv$$

Reemplazando las derivadas obtenidas en (d), (e) y (f) en el miembro izquierdo de (g), se tiene

$$\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial\tau} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ (k-1)\left[\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right] - k e^{\alpha x+\beta\tau}u$$

El término $e^{\alpha x+\beta\tau}$ se puede factorizar en ambos miembro, luego,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial\tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(k-1)u + (k-1)\frac{\partial u}{\partial x} - ku$$

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial\tau} = \left[\alpha^2 + \alpha(k-1) - k\right]u + \left[2\alpha + (k-1)\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La ecuación anterior coincide con la ecuación de calor si

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha(k-1) - k = \beta \\ 2\alpha + (k-1) \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $\alpha = \dfrac{1-k}{2} = -\dfrac{k-1}{2}$ y,

$$\beta = \left(\frac{1-k}{2}\right)^2 + \frac{(1-k)}{2}(k-1) - k$$

$$\beta = \frac{(1-k)^2}{4} + \frac{(1-k)^2}{2} - k = -\frac{1}{4}(1-k)^2 - k$$

$$\beta = -\frac{(1+k)^2}{4}$$

Entonces se tiene que

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau) \qquad \text{(h)}$$

luego,

$$\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\ \tau > 0,$$

por la ecuación (h),

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\, v(x,\tau)$$

Para $\tau = 0$,

$$u(x,0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\, v(x,0)$$

$$u(x,0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\, max\,(\,e^{x} - 1,\,0) = max\,(e^{x}\, e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)},0\,)$$

$$u\,(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0) \qquad \text{(2-27)}$$

La ecuación de B-S con las condiciones anexas (2-27) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty,\ \tau > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0)$$

La solución de este problema está dada por

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}\, dy \qquad \text{(ver apéndice)}$$

Haciendo un cambio de variable $x^{\circ} = \dfrac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$, resulta

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x^{\circ}\sqrt{2\tau} + x)\, e^{-\frac{1}{2}x^{\circ 2}}\, dx^{o}$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x^{o}\sqrt{2\tau})}\, e^{-\frac{1}{2}x^{\circ 2}}\, dx^{o}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x^{o}\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x^{o2}} dx^{o}$$

$$= I_1 - I_2$$

Resolviendo la integral I_1,

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x^{o}\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x^{o2}} dx^{0}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x^{o}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx^{o}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(\mathrm{d}_1),$$

donde

$$\mathrm{d}_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} ,$$

y

$$N(\mathrm{d}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

que es la distribución acumulativa de la distribución normal

El calculo de I_2 se hace el mismo procedimiento, excepto que (k + 1) es reemplazada por (k - 1)

Si se consideran los cambios de variables realizados,

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau)$$

y escribiendo a $x = \log\left(\frac{S}{E}\right)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ y $C = Ev(x,\tau)$, se obtiene la ecuación de Black-Scholes para la valoración de una opción call

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (2\text{-}28)$$

donde

$$d_1 = \frac{x + \frac{1}{2}(k+1)(2\tau)}{\sqrt{2\tau}}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left[\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}{\sqrt{2\left[\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]}}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Haciendo un procedimiento análogo para d_2

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

2.5.3. CÁLCULO DE LAS LETRAS GRIERAS

La prima de una opción es constantemente influenciada por diferentes factores, por lo que la teoría financiera ha desarrollado parámetros o coeficientes que permiten medir la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en alguno de sus componentes Estos parámetros se designan con letras griegas y son llamados *parámetros de sensibilidad.*

La fórmula de B-S, por su sencillez, permite obtener información de estos indicadores en términos fáciles de manejar

El primer parámetro que se calculará es ***la delta (Δ)***, dado que ésta se usa para calcular posiciones de cobertura Los modelos para calcular el precio de opciones, como el de B-S, se basan en una posición de cobertura neutral

1. Delta: $\Delta = \dfrac{\partial C}{\partial S}$, partiendo de,

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - E^{-r(T-\tau)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

pero, $N'(d) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}d^2}}{\sqrt{2\pi}}$ (tanto para d_1 como d_2)

y $\dfrac{\partial d}{\partial S} = \dfrac{1}{\sigma S\sqrt{T-\tau}}$ (tanto para d_1 como d_2)

De lo anterior

$$\Delta = N(d_1) + \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-\tau)}}\left[Se^{-\frac{d^2}{2}} - Ee^{-r(T-\tau)}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right]$$

$$= N(d_1) + \frac{e^{-\frac{1}{2}d_2^2}}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-\tau)}}\left[Se^{-\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)} - Ee^{-r(T-\tau)}\right]$$

Ahora bien

$$-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2) = -\frac{(d_1+d_2)(d_1-d_2)}{2} = -\frac{2\log\left(\dfrac{S}{E}\right) + 2r(T-\tau)}{2\sigma\sqrt{T-\tau}} \bullet \frac{\sigma^2(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}}$$

$$= -\log\left(\frac{S}{E}\right) - r(T-\tau) = \log\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-\tau)$$

así

$$\Delta = N(d_1) + \frac{e^{-\frac{1}{2}d_2^2}}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-\tau)}}\left[Se^{\log\left(\frac{E}{S}\right)}e^{-r(T-\tau)} - Ee^{-r(T-\tau)}\right]$$

$$\Delta = N(d_1) + \frac{e^{-\frac{1}{2}d_2^2}}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-\tau)}}\left[\cancelto{0}{S\left(\frac{E}{S}\right)e^{-r(T-\tau)} - Ee^{-r(T-\tau)}}\right]$$

$\boldsymbol{\Delta = N(d_1)}$

La delta de una opción, se define como la sensibilidad o elasticidad de la prima sobre cambios en el precio del subyacente

Su valor siempre estará comprendido entre 0 y 1 Cuando la opción es OTM, la delta está próxima a 0, ya que una variación pequeña del precio del subyacente no afecta esta posición Si la opción está ATM, la delta se aproxima a 0 5, es decir, cada 1% de variación de en el subyacente la prima aumenta en 0 5%, y cuando la opción está ITM, la delta se acerca a 1

La delta está afectada por la volatilidad, el precio del activo subyacente y el tiempo, que se miden con los parámetros vega, gamma y tetha, respectivamente

Los parámetros que se definirán a continuación pueden calcularse en forma análoga desarrollada para el delta

2. Gamma:

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sigma S\sqrt{2\pi T}}$$

Es la sensibilidad de la delta a los cambios en los precios subyacentes (delta de la delta) Su valor indica en cuento aumenta o disminuye la delta de la opción cuando varía el precio del subyacente

3. Theta:

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\sigma S e^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi T}} - \frac{rE}{e^{rT}} N(d_1 - \sigma\sqrt{T})$$

Es el parámetro que mide la sensibilidad de la prima al paso del tiempo

4. Vega:

$$\eta = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{S e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}$$

Mide la sensibilidad de la prima a las variaciones de la volatilidad implícita del mercado Los aumentos en la volatilidad aumentan la prima de cualquier opción, por lo tanto, todas las opciones tienen vega positivo

5. Rho:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = tEe^{rt} N(d_2)$$

La rho mide el cambio del precio de la opción ante un cambio en la tasa libre de riesgo

En general, esta sensibilidad no ha captado mayor atención entre los inversionistas debido a que estos cambios son generalmente muy pequeños

La fórmula de Black-Scholes desempeña en el mundo financiero un papel fundamental, comparable a algo tan simple y tan básico como la noción de interés simple continuo Lo espectacular, revolucionario en su tiempo, y contrario a la intuición de esta fórmula es que, a parte de los datos del contrato o de mercado, todo queda determinado por la volatilidad, por el nivel de riesgo, y no por la rentabilidad La fórmula de Black-Scholes es un diccionario que traduce los precios que se pagan por los derivados en la cantidad de riesgo que llevan implícitos, es decir, que permite comparar precios de activos derivados no homogéneos mediante la cantidad de riesgo que suponen

APÉNDICE

"SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES"

En este apéndice se resuelve detalladamente la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \qquad \text{(Ap I 1)}$$

en las condiciones

$$u(x,0) = u_0(x) = \max\left(e^{(k+1)x} - e^{(k-1)x}, 0\right)$$

Para resolver este problema se empleará la *transformada* de *Fourier* (T F), pero sólo de manera instrumental

A.1 Transformada de Fourier (en $\Re$)

Definición A1.1

Sea $f \in L(\Re)$, se llama transformada de Fourier de f, y se denota $\tilde{f}$, a la función $\tilde{f}$ $\Re \to \mathbf{C}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)dy \qquad x \in \Re$$

Obsérvese que para todo $x \in \Re$ $\left|e^{ixy} f(y)\right| = |f(y)|$, por esto $\tilde{f}$ está bien definida

Proposición A.1.1 (Propiedades de la T F)

Sean $f,g \in L(\Re)$, $\alpha \in \mathbf{C}$ entonces

- $\widetilde{(f + \alpha g)} = \tilde{f} + \alpha \tilde{g}$ (linealidad)
- $\left|\tilde{f}(x)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$ para todo $x \in \Re$

- $\lim_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = 0$ (Lema de Riemann)

Proposición A.1.2 (Derivada de la transformada de Fourier)

Sea f $\in L(\Re)$ tal que la función g(x) = *ixf(x) es L-integrable,* entonces

$$\tilde{f}'(x) = \tilde{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} iyf(y)dy$$

Proposición A.1.3 (Transformada de la derivada)

Sea $f \in L(\Re)$ tal que $f' \in L(\Re)$ entonces

$$\widetilde{f'(x)} = -ix\tilde{f}(x)$$

Como se apreciará en la segunda parte de este apéndice, la única transformada de Fourier que es necesaria para resolver la ecuación (Ap 1 1) es la de la función $\varphi(x) = e^{-x^2\tau}$, donde $\tau > 0$ y $x \in \Re$

Obsérvese que

$$\varphi'(x) = -2xe^{-x^2\tau} = -2x\tau\varphi(x) \qquad \text{(Ap 1 2)}$$

La función $\varphi'(x)$ es integrable absolutamente y por lo tanto, integrable según Leberque, si aplicamos las proposiciones **A.1.2** y **A.1.3** resulta

$$\tilde{\varphi}'(x) = -ix\tilde{\varphi}(x) \qquad \text{(A 1 3)}$$

$$-2\tau\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} y\varphi(y)dy = -\frac{2\tau}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} iy\varphi(y)dy = 2i\tau\tilde{\varphi}'(x) \qquad \text{(A 1 2)}$$

luego, $2i\tau\tilde{\varphi}'(x) = -ix\tilde{\varphi}(x)$ ó $\tilde{\varphi}' + \dfrac{x}{2\tau}\tilde{\varphi} = 0$

esta es una ecuación diferencial lineal (ordinaria) de primer grado y su solución es

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(0)\, e^{-\int_0^x \frac{s}{2\tau} ds} = \tilde{\varphi}(0)\, e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$$

$$\tilde{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2\tau} ds$$

si $u = \sqrt{\tau}\, s$,entonces $du = \sqrt{\tau}\, ds$, por lo que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 t} ds = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}, \text{ asi, } \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \qquad \text{(Ap 1 2)}$$

A.2 Solución de la ecuación de Calor de Black-Scholes.

La transformada de Fourier puede aplicarse formalmente a la ecuación (Ap 1 1), asumiendo que pueden utilizarse los resultados de las propiedades A1 2 y A 1 3

Si $u = u(x,\tau)$ es una solución y, $\tilde{u}(x,\tau)$ es para cada t > 0, la transformada de $x \to u(x,\tau)$ resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{\partial u}{\partial \tau} u(x,\tau) = \frac{d}{d\tau} \tilde{u}(x,\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{\partial^2 u(s,\tau)}{\partial s^2} ds = x^2\, \tilde{u}(x,\tau)$$

por esto la (Ap 1 1) se transforma en la ecuación ordinaria de primer grado

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{u}(x,\tau) + x^2 \tilde{u}(x,\tau) = 0$$

con la condición inicial

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x)$$

Pero este problema tiene como solución

$$\tilde{u}(s,\tau) = \tilde{u}(s,0) e^{-s^2\tau}$$

La solución de $\tilde{u}(x,\tau)$ se obtiene entonces calculando la transformada inversa

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixs}\tilde{u}(s,\tau)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixs-s^2\tau}\tilde{u}_0(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(x-y)s-s^2\tau}\,ds\right]u_0(y)\right]dy$$

por lo visto en A 1, la fórmula (Ap 1 2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-y)s}e^{-s^2\tau}ds=\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}$$

Así, $u(x,\tau)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}u_0(y)dy$

Al margen de la validez de los pasos intermedios seguidos, la función u(x,τ) es efectivamente la solución del problema planteado, pues la condición inicial

$$u(x,0)=u_0(x)=\max\left(e^{(k+1)x}-e^{(k-1)x},0\right)$$

tiene la propiedad que para todo $\tau>0$, $u_0(x)\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}}$ es integrable, lo mismo que sus derivadas con respecto a x y a τ. Además, $\lim\limits_{\tau\to 0^+}u(x,\tau)=u_0(x)$

Considérese el cambio de variables

$$p=\frac{y-x}{2\sqrt{\tau}},\ \text{o sea,}$$

$$y=x+2\sqrt{\tau}\,p \qquad -\infty<p<+\infty$$

como $dy=2\sqrt{\tau}\,dp$ resulta que

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}2\sqrt{\tau}\,e^{-p^2}u(x+2\sqrt{\tau}\,p)\,dp=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-p^2}u(x+2\sqrt{\tau}\,p)dp$$

Ahora bien, para todo p $\lim\limits_{T\to 0}e^{-p^2}u(x+2\sqrt{\tau}\,p=e^{-p^2}u(x)$, por otra parte si $|\tau|<\delta$,

$u(x+2\sqrt{\pi}p\le u(u+2\sqrt{\tau}\,p)$., por esto, puede aplicarse el teorema de convergencia dominada de Lebesque y,

$$\lim_{\tau \to 0^+} u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} u(x) dp = u(x)$$

CONCLUSIONES

- El surgimiento y uso de los derivados sirve como un indicador del grado de desarrollo y de innovación en un mercado de valores Estos instrumentos financieros han sido aplicados durante siglos en las transacciones de los comerciantes en el mundo, aunque de forma no organizada Un paso importante en el desarrollo del mercado de capitales lo constituye la creación de los mercados organizados, pues confieren un alto grado de transparencia a las operaciones lo que resulta atractivo para el ingreso de un número creciente de inversionistas y corporaciones que desean controlar el riesgo con los flujos futuros de capital
- La introducción de los derivados financieros tales como las opciones y futuros han conducido a una nueva cualidad de la seguridad de los riesgos financieros
- Hay que tener presente que el valor de una opción no depende solamente del precio del activo al momento de adquirir el contrato, sino que también del grado de volatilidad, los dividendos o tasas de interés (si los hay), del plazo al vencimiento y del precio de ejercicio
- La volatilidad es la variable más significativa al momento de valorar una opción, por eso su estudio es de gran importancia para el conjunto de participantes en los mercados financieros, ya que las expectativas que se tengan sobre la volatilidad influyen tanto en la valoración de activos con riesgo como en la elección de la composición de las carteras de inversión Por tanto, una compresión del comportamiento de las expectativas de la volatilidad es de gran utilidad para los inversores en el mercado

- Las opciones son los productos que mayor flexibilidad ofrecen, ya que permiten a su tenedor adquirir un derecho en lugar de una obligación Con las opciones se puede especular o cubrirse, pero es muy riesgoso apostar a una sola modalidad de opción Por lo que, se hace necesario que el inversionista conozca como se combinan las opciones de compra y venta, los plazos de vencimiento y los precios de ejercicio, que le permitan minimizar las pérdidas
- El trabajo de los académicos Black, Scholes y Merton, que les valió la obtención del Premio Nobel de Economía en 1997, dio paso a todo un campo de investigación en el área de finanzas La alta complejidad teórica matemática requerida para el desarrollo del modelo, ha hecho que la gran mayoría de los investigadores en esta área sean matemáticos, físicos y estadísticos Pese a esta complejidad su aplicación resulta sencilla, en especial si se cuenta con una calculadora o computadora programada
- La fórmula de Black-Scholes para la valuación de opciones se basa en formación de una cartera sin riesgo mediante la elección de acciones que se van ajustando a través del tiempo
- El Modelo de Black-Scholes es muy práctico, en primer lugar, excepto por la volatilidad, los elementos de la opción se especifican en el contrato, o son observables en los mercados de operaciones en la actualidad En segundo lugar, el modelo por lo general proporciona una muy buena aproximación del verdadero valor de la opción
- La reflexión dirigida a la racionalización del conocimiento y la profundización en el entendimiento de los sistemas económicos hacen un uso intenso la Matemáticas avanzadas y debido a esta relación han producido significativos avances, ambos disciplinas la Matemática y la Economía

- No siempre es posible obtener soluciones analíticas para la valoración de opciones Debido a estas dificultades se han desarrollado métodos numéricos para valorar diversos tipos de opciones Uno de los más simples y populares es el método del árbol binonomial, pero una buena aproximación del precio de la opción exige la construcción de un árbol con gran cantidad de nodos Ello puede ser, en ciertos casos, computacionalmente imposible o extremadamente lento Métodos alternativos son las simulaciones de Monte Carlo y los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, tales como el de diferencia finita y e de Crank-Nichoson [3]

---

[3] Willmon, P ,S Howison, y J Dewynne (1995) ***The Mathemathics of Financial Derivatives. A Student Introduction.*** Cambrige University Press Pags 155-160

RECOMENDACIONES

- Enfatizar el estudio de los conceptos de derivados y riesgos asociados a la compra y venta de opciones como soportes teóricos del modelo matemático de Black-Scholes
- Complementar el estudio de modelos de toma de decisión para contar con otros criterios, dadas las limitaciones del modelo de Black-Scholes Por ejemplo, el modelo de Black-Scholes modificado
- Extender el análisis del modelo de Black-Scholes a opciones de tipo PUT
- Evaluar la posibilidad de profundizar en los orígenes y desarrollo histórico del concepto de opciones en actividades académicas como trabajos de graduación, seminarios de tesis y grupos de investigación
- Fomentar la creación de grupos interdisciplinarios para brindar asesorías en el área de las finanzas y banca dadas las características de economía de servicio de nuestro país

BIBLIOGRAFÍA

ANSBACHER, M (1987) *The New Options Market* Walker and Company, N Y , 280 págs

ANTON, H (1986) *Cálculo y Geometría Analítica* Editorial Limusa, S A , México 784 págs

ARNOLD, L (1974) *Stochastic Differential Equations Theory and Applications* Editorial John Wiley and Sons, Inc ,N Y , 228 págs

BROSON, R (1976) *Ecuaciones Diferenciales Modernas* McGraw-Hill México, 310 págs

CHAO, LINCOLN (1975) *Estadística para las Ciencias Administrativas* McGraw-Hill, S A , México, 472 págs

COLEMAN R (1986) *Procesos Estocásticos* Editorial Limusa S A , México, 131págs

DUFF, G F, NAYLOR, D (1966) *Differencial Equations of Applied Mathematics* Editorial John Wiley and Sons, Inc ,N Y , 423 págs

EMERY, DOUGLAS (2000) *Administración Financiera Corporativa* Editorial Printice Hall, México, 1002 págs

GITMAN, LAUREN (1993) *Fundamentos de Inversión* Editorial Arla S A México 872 págs

GMURMAN, V (1975) *Problemas de Teoría de las Probabilidades y de Estadística Matemática* Editorial Mir URSS , 376 págs

HULL, JOHN (1989) *Introduction to Futures and Options Markets* Editorial Prentice Hall, 287 págs

LAMOTHE, PROSPER (1995) *Opciones Financieras* Editorial McGraw-Hill, S A , España, 322 págs

LARRY, RICHARDS (1980) *Estadística en los Negocios* Editorial McGraw-Hill, Colombia, 579 págs

LIPSCHUTZ, S (1988) *Probabilidad* Editorial McGraw-Hill México, 152 págs

MEYER, P (1973) *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* Fondo Educativo Internacional, S A , Washington, 372 págs

MILLS, RICHARD (1977) *Estadístıca para la Economía y Admınıstracıón* Edıtonal Carvajal S A , Colombıa, 597 págs

OBREGÓN, IVÁN (1977) *Teoría de Probabılıdad* Edıtonal Lımusa, Méxıco, 448 págs

PORCEL, J y BRAVO, B (1972) *Cálculo Infinıtesımal* Aguılar, S A , Madnd, 770 págs

STAMPFI, J y GOODMAN V (2002) *Matemátıcas para las Fınanzas* Edıtonal Thomson, Méxıco, 250 págs

SPIEGEL, M (1976) *Probabılıdad y Estadístıca* Edıtonal McGraw-Hıll, S A , Méxıco, 372 págs

TINOCO, JAIME (1998) *Futuros y Opcıones Fınancıeras* Edıtonal Lımusa, S A , Méxıco, 171 págs

WILMOTT, PAUL (1996) *The Mathematıcs of Fınancıal Derıvatıves* Cambndge Unıversıty Press, Estados Unıdos, 317 págs

WESTON, FRED (1994) ***Fundamentos de Administración Financiera.*** Edıtonal McGraw-Hıll, Méxıco, 898 págs

http //finance bı no/~bernt/gcc_prog/algorıtms/algorıtms/node8 html

http //web ıese edu/PabloFernandez/docs/7 exotıcos pdf

http //www bcv org ve/publıca/pdf/bandacam pdf

http //www cıberconta unızar es/LECCION/fin018/100 HTM

http //www derıvatıvesmodels com/FDX/Vanılla htm#

http //www ggw org/donorware/optıons/

http //www ıe edu/ȷfnavas/derıvados htm

http //www optıon123 com/

http //www physıcs ucı edu/~sılverma/bseqn/bs/node4 html

http //www stats ox ac uk/~sen/BlackScholes1 pdf

http //www uas mx//departamentos/publıcacıones/TEXTOS/black htm http //www uc3m es/uc3m/dpto/ECO/finanzas8/gut36 pdf

http //www ucm es/ınfo/ıcae/Baxter PDF

http //www utdt edu/~economıa/materıas/nf/lectures/opcıones1 pdf

http //wwwdecon faceauchılecl/~surzua/Topıcos%20en%20Macro/ınversıon/ınversıon

http //www ıe edu/jfnavas/derıvados htm