UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POST-GRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

SOBRE EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS MATEMÁTICOS EN AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN

JOSÉ FÉLIX SOLANILLA

TESIS PRESENTADA COMO UNA DE LAS DISPOSICIONES QUE SE REQUIEREN PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Panamá, República de Panamá
1995

UNIVERSIDAD DE PANAMA
CULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ograma Centroamericano de Maestría en Matemática

Aprobado por:

EDUARDO STEELE M.Sc.
Director de Tesis

DIEGO SANTIMATEO M.Sc.
Miembro del Jurado

ANALIDA ARDILA M.Sc.
Miembro del Jurado

Fecha: 14 de diciembre, 1995

AGRADECIMIENTO

A MI MAESTRO EDUARDO STEELE QUIEN SACRIFICO ESFUERZO FÍSICO POR OFRECER SU ENORME EXPERIENCIA, SABIDURÍA Y VOLUNTAD, AL ORIENTARNOS ATINADAMENTE EN NUESTRO TRABAJO

A LOS PROFESORES DEL PROGRAMA DE MAESTRÍA, POR SUS ENSEÑANZAS, EN ESPECIAL A LOS PROFESORES ANALIDA ARDILA Y DIEGO SANTIMATEO, POR SUS APRECIADAS SUGERENCIAS EN LA REALIZACIÓN DEL MISMO.

A MIS QUERIDOS COMPAÑEROS , QUIENES CON SU UNIDAD, VIRTUD Y CORAJE ME PERMITIERON LA CONQUISTA DE ESTA META.

DEDICATORIA

A DIOS TODO PODEROSO, SER SUPREMO QUE GUÍA VIGILANTE LOS PASOS HACIA MIS MÁS ANHELADAS METAS DE SUPERACIÓN.

A MI QUERIDA FAMILIA MI ESPOSA, MARÍA, EXCELENTE AMIGA Y COMPAÑERA DE ESTUDIOS, MIS HIJOS, JESSICA Y JOSÉ, FUENTE DE ESTÍMULO Y AMOR PERMANENTE EN MI VIDA

A MIS QUERIDOS VIEJOS EDDIE Y JOSE FÉLIX, QUIENES ME BRINDARON SU INALIENABLE EXPERIENCIA, SU EJEMPLO DE DEDICACIÓN PROFESIONAL , Y APOYO PARA CULMINAR ESTE HUMILDE TRABAJO.

CONTENIDO

CAPÍTULO II

APRENDIZAJE DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS MATEMÁTICOS 29

CAPÍTULO III.

CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS MATEMÁTICOS EN AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN

RESUMEN

Estamos seguros que el aprendizaje de conceptos y principios matemáticos a niveles altos es la llave para lograr cambios en la formación matemática del alumno. En este sentido proponemos este aprendizaje convencidos en que la creencia y el método elegido por el docente representa la definición del esquema o patrón que son determinantes en el aprendizaje de la matemática. Iniciamos haciendo un estudio sobre las cuestiones epistemológicas y las bases filosóficas propias para conocer el significado que la matemática tiene. Presentamos consideraciones teóricas sobre el aprendizaje de conceptos y principios matemáticos, posteriormente, para someter a la consideración del l lector la alternativa que sugiere la utilización e implementación del laboratorio asociado al ambiente de programación de la tecnología de la computadora, utilizando el lenguaje TRUEBASIC para el aprendizaje de estos conceptos y principios matemáticos. La propuesta consiste en estos laboratorios, en particular del cálculo diferencial, porque provee un aprendizaje más dinámico, significativo y determinante en el alumno. Esperamos , sea una forma de resolver parcialmente, nuestra crisis en la enseñanza de la Matemática.

SUMMARY

We are certain about the fact that the learning of Mathematical Principles and Concepts at higher level is the key to achieve real changes on critical students reasoning. In this direction and convinced that the belief and method selected by the teachers represents the definition of the scheme a patterns are esential in the learning of Mathematics. We first, conducted a study about epistemological matters and the proper philosophical basis in order to know the meaning of Mathematics. Later, We present some theoretical considerations and introduce the reader to the teaching of Mathematical Principles and Concepts in a Programming Enviroment using the TRUEBASIC leanguage system. Our propose consists in Research Projects in Calculus because it provides a dynamic and significant crucial learning to the student . We hope, it will be a way to solve partially our crisis in Mathematical teaching.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es un esfuerzo por contribuir al mejoramiento de la enseñanza de los conceptos y principios matematicos con los recursos de la tecnologïa de computadoras en un ambiente de programación. De esto ya se ha escrito respecto de Logo[1] pero a nosotros nos ha parecido bien hacer un estudio similar con la ayuda de un lenguaje más abarcador, estructurado, y fácil como es el lenguaje TRUEBASIC de Kemmeny y Kurtz, utilizado en más de 8,000 colegios en los Estados Unidos

La misma naturaleza de la matemática y corrientes psicológicas modernas de corte constructivistas nos exigen que utilicemos métodos mas dinámicos que permitan una mayor participación del alumno en el proceso de aprendizaje, e incorporen el poder de visualizacion y de cálculo de las poderosas computadoras modernas que ahora son muy accesibles.

Por muchos años en nuestro sistema educativo se ha recurrido al computador a través de novedosas propuestas para enseñar diversos tópicos de la matemática.

Algunos contemplan la incorporación del aprendizaje programado por medio de tutores, otros utilizando los softwares educativo como laboratorios en ejecución del desarrollo teórico y práctico de los conceptos a aprender.

También, en algunas carreras se dictan cursos de programación utilizando lenguajes que dotan al estudiantes de los esenciales suficientes para programar o saber utilizar

---

[1] Logo es un lenguaje de programación creado por el matemático Seymour Paper en el marco de una psicología constructivista de corte Piagetiano

los sistemas computacionales en general. Pero es interesante también como el estudiante puede aprovechar esta capacidad que recurre al razonamiento crítico y analítico de la lógica de programación para construir, de modo sistemático y preciso los conceptos matemáticos que resulta en muchas ocasiones difícil tarea para los que participan en el dual enseñanza- aprendizaje.

El aprendizaje de conceptos y la resolución de problemas en matemática por el enfoque tradicional crea en el estudiante una disposición a la memoria en lugar de utilizar el razonamiento y la intuición. En este sentido E. Castelnuovo nos asegura:

> **"Los jóvenes que actualmente salen de nuestras escuelas secundarias tiene la idea de que las matemáticas consisten, por una parte, en un puro mecanismo, y por la otra parte que se trata de una construcción perfecta y completamente terminada, ignorando si se puede hacer o no algún descubrimiento con esta disciplina" [Castelnuovo (1975)].**

Nuestra preocupación radica en que el estudiante que aprende matemática no responde en gran porcentaje a la idea de poseer un **Conocimiento matemático,** asociada a las construcciones mentales identificadas con la naturaleza de la matemática misma. Al respecto, Ed Dubinsky nos señala:

> **"El conocimiento matemático de una persona es la tendencia de él o ella a responder a ciertas clases de situaciones de problemas percibidos al construir reconstruir procesos y objetos mentales al utilizarlos en el tratamiento de situaciones" [Dubinsky (1994)].**

Cuando un estudiante busca patrones o usa el razonamiento lógico está empleando habilidades de razonamiento de gran complejidad útiles en cualquier área de estudio. Las matemáticas demandan una variedad de estrategias de razonamiento que van desde la simple memorización de hechos, reglas o procedimientos hasta razonamientos de alto nivel empleados en la solución de problemas complejos o la formulación de generalizaciones.

Es por esta razón que nuestra propuesta considera la adquisición de razonamientos plausibles, de discusiones de pruebas de contraejemplos, de la construcción natural de algunos conceptos matemáticos. Alan Schoenfeld menciona justamente esta idea como principio importante en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo más importante de todo es que no existe duda que el estudiante aprende matemática, haciendo matemática, incorporando a sus actividades cotidianas, rutinas que involucren el pensamiento matemático, ejemplo desarrollando tareas y explorando continuamente en la computadora, ya que de lo contrario se convertirían en "perfectos seguidores de un recetario de cocina", al resolver problemas ,razón quizás de la acentuada desidia y poco agrado hacia las matemáticas.

Así lo expresa Weatley quien apunta que :

> **" La matemática es una actividad de construcción de modelos y relaciones, no una colección de procedimientos para ser memorizados y practicados, razón por la que <u>los estudiantes aprenden mejor haciendo matemática que aplicando fórmulas"</u>**

Las consideraciones anteriormente expuestas nos sirven de marco referencial para describir de modo muy general nuestro trabajo.

El presente trabajo se desarrolla del modo siguiente:

En un primer capítulo titulado **Fundamentos Filosóficos y Psicológicos** nos referimos a los aspectos o fundamentos filosóficos y teóricos así como también la teoría de aprendizaje que sustenta la base de nuestros propósitos . Se presentan ideas acerca de Que es la matemática, su naturaleza intrínseca, Se presenta los aportes de

Lakatos al aprendizaje significativo del conocimiento matemático. Por que el constructivismo y que plantea la teoría constructivista del aprendizaje de la matemática.

En el segundo capítulo enfocaremos nuestra atención **al aprendizaje de conceptos y principios matemáticos** así como las contribuciones así como las contribuciones de G. Polya,, Schoenfeld, Lakatos , Santos trigo, entre otros , quienes señalan la importancia de la resolución de problemas, como una actividad propia del aprendizaje de las matemática. Luego enfocamos nuestra atención a como la resolución de problemas y el Programing language, pueden hacer del aprendizaje de principios,conceptos y generalizaciones en matemática la llave para un virtual aprendizaje de la matemática misma.

En el Tercer capítulo **"Construcción de conceptos matemáticos en ambiente de programación"** abordaremos algunos ejemplos de cómo pueden realizarse construcciones de conceptos matemáticos utilizando el lenguaje TrueBasic que representa en la actividad del aprendizaje de la matemática una alternativa en donde la construcción de algoritmos de computadora le permite al estudiante razonar sobre el proceso involucrado y para el cual desea obtener el conocimiento. Presentaremos laboratorios con sus hojas de trabajo así como un apéndice que comprende la diversidad de ejemplos mencionados y que se pueden establecer a través de secuencias didácticas para la implementación de nuestra propuesta metodológica en el currículo.Defenderemos la idea de Dubinsky y otros en el sentido que debe ser hecho en un lenguaje que aliente el aprendizaje a niveles altos. Además como ventajas notaremos que TrueBasic es fácil, barato y una poderosa y estructurada arma de aprendizaje.

Luego de los comentarios finales esperamos se ponga en práctica este sistema como parte del currículo no sólo en la carrera de matemática que ha sido reestructurada hace poco, sino en todas las carreras de la universidad de Panamá donde se encuentren dificultades para el aprendizaje de los conceptos ilustrados en nuestro trabajo y otros que se pueden tratar en investigaciones de corte experimental

CAPITULO I

BASES FILOSÓFICAS Y PSICOLÓGICAS EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

La pregunta "Cómo enseñar matemática" aparentemente es una que nunca será contestada satisfactoriamente para todos. A continuación examinamos dos tópicos que nos darán el fundamento para nuestra investigación acerca del aprendizaje de conceptos y principios matemáticos, con apoyo de la tecnología de computadoras en ambiente de programación; Estos tópicos son:

-Fundamentos Filosóficos

-Fundamentos Psicológicos

1.1 FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS

1.1.1 La Naturaleza de la Matemática

Como profesores de matemática hemos tomado cursos para prepararnos para la enseñanza de la matemática. Es común haber tomado estos cursos y nunca haber sido introducido a la naturaleza de la matemática y lo que significa verdaderamente saber matemática. Saber algo acerca de la naturaleza de la matemática y lo que significa es algo que es considerado como fundamental para el Consejo Nacional de Investigación norteamericano . Ellos han señalado que

> **" para tener una nueva visión de la Matemática que se enseña en las escuelas requerirá la aceptación pública de una filosofía realista de la matemática que refleje la práctica matemática y la experiencia pedagógica." [NRC (1989)].**

La noción de una nueva visión de la matemática se refiere a una nueva forma de pensar acerca de cómo se aprende matemática y cómo la asignatura debe ser enseñada con efectividad.Como educadores debemos desarrollar nuestra propia visión del futuro de la educación y no estar reaccionando impulsivamente a cada nuevo desarrollo. Las computadoras ciertamente guiarán a cambios mayores en la educación, ya sean que estos cambios sean o no deseables, todo dependerá de la visión que cada uno pueda desarrollar y de nuestro trabajo hacia el logro de esa visión. Consideramos que existen dos aspectos, que a nuestro juicio, servirán como base filosófica para las matemáticas del futuro. Estos son:

1. Qué es la Matemática

2. Qué significa saber matemática

1.1.2 ¿Qué es la Matemática y qué Significa Saber Matemática?

En efecto, aprovecharemos las fuertes divergencias que se dieron en torno a la naturaleza de la matemáticas, por los más destacados matemáticos de la primera mitad de este siglo. Primeramente necesitamos saber qué es la matemática, de qué trata. Los lógicos platónicos, mejor conocidos como "logicistas" (encabezados por Frege y Beltran Russell) dirán que la matemática trata de entidades ideales que existen objetivamente, las cuales poseen una cierta facultad que permite percibirlos o intuirlos directamente. Los "formalistas" (encabezados por el líder de los matemáticos de los comienzos de este siglo, David Hilbert) dirán que la matemática simplemente **es**, trata sobre nada; una fórmula matemática es simplemente un formula, las matemáticas son un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas. Aquí existen reglas que se usan para derivar y demostrar teoremas, proposiciones y fórmulas [S.Trigos (1993)]. Ellos construyen sistemas formales con símbolos deprovistos de significados, y reglas formación de fórmulas,etc. Mucho se ha filosofado sobre esto; y es una posibilidad abstracta que nadie querría desarrollar a cabalidad. Aún cuando formalistas y platónicos tienen puntos de vistas opuestos acerca de la existencia y realidad de las entidades matemáticas, estas coinciden en cuanto a los principios de razonamiento que son permisibles en la práctica de las matemáticas

Como programa filosófico, como intento de establecer un fundamento firme para el conocimiento matemático ambos siguieron su curso y desaparecieron.

Mientras algunos profesionales de la matemática, como los señalados anteriormente, sólo aceptan aquellas cosas que pueden ser deducidas lógicamente, paso a paso, de axiomas cuidadosamente especificados; otros demandarán un marco de referencia global en la cual puedan ver la red de interrelaciones entre los conceptos. El punto de vista primero es prerequisito necesario para la **formalización** de los conceptos matemáticos. El segundo es valioso para su **desarrollo**, en la investigación matemática y también en educación matemática. A pesar de la necesidad de los dos modelos de pensamiento, la enseñanza tradicional de las matemáticas (especialmente en los niveles superiores) se preocupa más por los procesos deductivos y secuenciales en lugar del global, predictivo, heurístico del segundo modelo. Ha habido una clara predilección por los modos de comunicación simbólicos y secuenciales. Sin embargo, el advenimiento de la tecnología de computadoras y calculadoras está brindando la oportunidad de ajustar el balance entre las dos formas de comunicación como veremos más adelante.

Como un ataque a los formalistas y sus sistemas deductivos surge la obra doctoral de Imre Lakatos (1992-1993): La Lógica del descubrimiento matemático- Pruebas y refutaciones, publicada en 1976. Lakatos era seguidor del famoso filósofo de la ciencia Karl Popper, quien en 1934 creó una revolución cuando propuso que no era posible ni necesario justificar las leyes de la ciencia justificando el razonamiento inductivo. Popper afirmaba que las teorías científicas no se derivan inductivamente de los hechos, sino que son inventadas como hipótesis, especulaciones, quasi adivinanzas, y son sujeto de pruebas experimentales en donde los críticos intentan refutarlas.

La obra de Lakatos es muy importante, se enmarca dentro de la filosofía constructivista de la enseñanza de la matemática. En sus inicios Lakatos recibió la enorme influencia positiva de George Polya[2] autor de tres obras sobresalientes sobre técnicas heurísticas para la resolución de problemas: Cómo resolver problemas, Inducción y Analogía en Matemática y Patrones del Razonamiento Plausible. Lakatos tradujo una de las obras de Polya al húngaro, y además éste le sugirió usar la conjetura de Descartes-Euler sobre poliedros como punto de partida de su investigación.

[2] George Polya es muy conocido por sus trabajos sobre resolución de problemas que han tenido una gran influencia en la educación

La Dialéctica de Pruebas y Refutaciones

La Lógica del Descubrimiento matemático: Pruebas y Refutaciones de Lakatos, en lugar de los símbolos y reglas de formación de los formalistas, presenta seres humanos, un maestro y sus estudiantes. En lugar de presentar un sistema fundamentado en principios, él presenta un choque de ideas, argumentos y contraargumentos. En lugar de la matemática equeletizada y fosilizada él presenta una matemática que se desarrolla de un problema y una conjetura, con una teoría tomando forma delante de nuestros ojos, en medio de debates y desacuerdos, la duda cediendo a la certitud, y luego a una duda renovada. Este modelo de desarrollo es consistente con la teoría de equilibración de Piaget[6] , pues describe la construcción del conocimiento matemático a través de una dialéctica de **pruebas y refutaciones.**

Por lo tanto, Lakatos aplica su análisis epistemológico no a la matemática formal, sino a la informal, matemática en proceso de crecimiento y descubrimiento, que es la matemática conocida por los matematicos y los estudiantes - la matemática de Cauchy, Gauss, Euler, Cantor y otros tantos. Es decir la matemática informal **es** la matemática. Es una ciencia en el sentido de Popper, que crece por un proceso de críticas sucesivas y refinamiento de la teoria (no por patrones deductivos de la matemática formalizada). Como diría Lakatos " ***La matemática informal, quasi empírica no crece a través del crecimiento monótono del número de teoremas establecidos indubitablemente, sino a través de el mejoramiento de especulaciones y críticas, por la lógica de pruebas y refutaciones".***

Este modelo de desarrollo del conocimiento matemático a través de la dialéctica de pruebas y refutaciones, según Lakatos, es consitente con la epistemología constructivista de Jean Piaget (llamado también: constructivismo radical) N. Balacheff le agrega el contexto social al reflexionar sobre la contradicción y el contraejemplo . Lo encontramos también en George Polya. Nuestro trabajo utilizará este enfoque para explicar algunas teorías modernas del aprendizaje de conceptos matemáticos.

Con base a esta filosofía acerca de la naturaleza de las matemáticas, El Consejo Nacional de Investigaciones norteamericano dio la siguiente definición práctica de la matemática en su publicación: "Todos Contamos":

> **"Desde un punto de vista práctico, la matemática es una ciencia de patrones y orden. Su dominio no son las moléculas o células, son números , azar, formas, algoritmos y cambios. Como una ciencia de objetos abstractos, la matemática se apoya en la lógica en lugar de la observación como norma de verdad; sin embargo, emplea la observación, simulación, y aún la experimentación como medio de descubrir la verdad." [N.C.R (1989)]**

George Polya llama a estos medios de descubrir verdades matemáticas "Razonamientos Plausibles" del inglés "Plausible Reasoning", que contrasta con los "Razonamientos Demostrativos" que validan el conocimiento matemático; pero son, sin embargo, incapaces de producir nuevos conocimientos.

Que significa saber matemática

La pregunta emerge Qué significa saber matemática ? emerge de la misma naturaleza de la matemática. En base a nuestra definición que hemos adoptado podemos decir que saber matemática significa saber acerca de patrones y las relaciones entre los patrones. El estudiante debe ser capaz de discemir patrones en contextos complejos y oscuros; entender y transformar las relaciones entre patrones; clasificar, codificar y descubrir patrones; escribir y leer el lenguaje de patrones; y emplear conocimiento de patrones para varios propósitos prácticos.

Los estudiantes deben tener la oportunidad de estudiar, descubrir, e inventar patrones de diferentes tipos en el proceso de aprendizaje, y eventualmente conocer matemática. Esto sugiere que el proceso de conocer matemática involucra una actividad mental, una acción que es el resultado de muchos tipos de experiencias; experiencias de tipo heurístico, del desarrollo evolutivo de su génesis, como las implicaciones de la ciencia en nuestro mundo.

Examinemos dos ejemplos donde se ilustran los distintos tipos de patrones que llevan a la formación de una conjetura. Luego, el descubrimiento de la misma, a través del discernimiento de patrones ,nos sugiere probarla o verificarla. Si es plausible, es necesario entonces la demostración rigurosa en la cual nos aseguramos formalmente de la validez del principio matemático encontrado.

Ejemplo 1. Consideremos la siguiente función $f(x) = e^x x^n$.

Si n = 1 , entonces $f_1(x) = e^x x$,

n = 2 , entonces $f_2(x) = e^x x^2$,

n = 3, entonces $f_3(x) = e^x x^3$

para n finalmente tenemos $f_n(x) = e^x x^n$.

Queremos encontrar una fórmula para la $\int f_n(x)dx$. Veamos lo que sucede para n= 1, 2, 3,4, analíticamente.

Integrando por partes se obtiene:

$\int e^x x.dx$. *Hacemos* **u = x, du = dx , dv =** e^x, **v =** e^x *y utilizando la fórmula de integración por partes obtenemos :* $e^x(x-1)$. *Sea* $\int e^x x^2.dx$ *al Integrar, nuevamente por partes se obtiene:* $e^x(x^2-2x+2)$ *Consideremos ahora,* $\int e^x x^3.dx$ *que al simplificarlo se tiene:* $e^x(x^3-3x^2+6x-6)$. *Sea* $\int e^x x^4.dx$. *Utilizando un C.A.S nos resulta* $e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$ *y finalmente para* $\int e^x x^5.dx$ *y* $\int e^x x^6.dx$ *obtenemos, respectivamente:*

$$e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120),\ldots$$

$$.e^x(x^6-6x^5+30x^4-120x^3+360x^2-720x+720)$$

Observamos un cierto patrón entre los coeficientes y conjeturamos:

En general para n , la fórmula deseada puede estar dada por la siguiente conjetura:

$\int f_n(x)dx = e^x\left(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} - \ldots (-1)^n n!\right)$ si n es un entero positivo

Si verificamos en esta fórmula, para n = 1, 2 , 3 , 4 ,5 y 6 obtendremos los mismos resultados encontrados. Por lo tanto es bastante probable que sea verdadera, la cual podemos demostrar por Inducción matemática este resultado de ser así esto.

De este ejemplo se puede inferir que un aspecto fundamental en el descubrimiento y discernimiento de patrones hacia la construcción de conceptos y principios matemáticos es el razonamiento heurístico.

1.1.3 Implicaciones de estas Consideraciones Filosóficas.

Al desarrollar la base filosófica para la educación matemática esperamos ilustrar como una nueva visión de la matemática que se enseña en colegios secundarios y la universidad influirá en la enseñanza. Clasificar la matemática como una ciencia sugiere que las matemáticas deben ser exploradas a través de la experimentación, el descubrimiento, manipulación y discusión; y que las computadoras y calculadoras pueden ser usadas como herramientas para ayudar en la construcción o fijación de los conceptos. Este punto de vista contrasta con el punto de vista de que la matemática es una actividad de lápiz y papel, y que se vale de reglas, fórmulas y la memoria.

Pensar en matemática como una búsqueda de patrones sugiere que el contenido de un programa de matemática debe contener patrones de todo los tipos, incluyendo aquellos descubiertos en el estudio de los números, geometría, álgebra etc. Situaciones de problemas, resolución de problemas se proveen como medios de buscar patrones. Esto contrasta con el punto de vista de que los programas de matemática deben enfocar solamente las reglas y algoritmos.

El concepto filosófico que tengamos nos servirá como guía al involucramos en proceso de enseñanza. La manera como enseñamos está determinada por lo que creemos o mejor dicho por nuestra filosofía acerca de la naturaleza de la matemática, y de cómo aprenden las personas.

1.2 FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS.

Como señalamos en el párrafo anterior, lo que creemos acerca de cómo aprenden las personas determina nuestra forma de enseñanza. En este sentido en nuestro trabajo nos apoyaremos en el constructivismo epištemológico o Psicología de desarrollo cognitivo, de Jean Piaget que tiene una variante en Imre Lakatos otra en George Polya y otra en N. Balachef y Vygotsky ("zona de desarrollo próxima) esta última variante conocida como "constructivismo social". El punto de mayor interés para la psicología educativa es que dentro del constructivismo el conocimiento no se adquiere espontáneamente, ni se recibe; sino que es una construcción del sujeto. Esto tiene varias implicaciones de las cuales las más importantes son las siguientes:

1.2.1. Las Hipótesis Constructivistas del Aprendizaje.

En esta parte nos ocupa referirnos a los enfoques teóricos que sustentan las bases psicológicas así como también hablar un poco de esta teoría y sus implicaciones tanto en nuestro trabajo como en otras ciencias. Se trata pues de profundizar más sobre lo que a grosso modo conocemos como la teoría constructivista del aprendizaje.

No podemos hablar del Constructivismo sin hablar de Piaget. En efecto las raíces del modelo constructivista del aprendizaje se lo debemos , en su sentido más radical, a un eminente psicólogo suizo[3], investigador en el campo de la psicogenética: Jean Piaget.

---

[3] Jean Piaget(n En 1896), profesor de psicología de la Universidad de Ginebra y director del Instituto Roussseau de la misma ciudad, ha estudiado en profundidad el proceso de pensamiento en los niños - y en menor medida en adolescentes - durante más de 50 años.

Pero al hablar del constructivismo, no sólo debemos pensar en Piaget. Existen numerosas interpretaciones del modelo constructivista. Muchas de estas iniciadas por algunos seguidores de Piaget, otras basadas en la filosofía de Kant, Vico, Von Glaserfeld,etc , entre otras, figuras principales del constructivismo radical.

Además de las interpretaciones las modalidades del constructivismo están sujeta al aporte de la filosofía en la que se circunscribe este modelo; es decir es suficiente ubicarlo en los niveles **epistemológicos, Psicológico y didáctico**(con sus respectivas denominaciones)[4]. Para nuestros fines nos ocupará indudablemente el modelo didáctico, no con esto desconociendo los otros aportes significativos e ilustrativos de los cuales nos ocuparemos más adelante.

1.2.2 *¿ Qué es el Constructivismo?*

Básicamente, la teoría constructivista del aprendizaje se basa en que el conocimiento no se adquiere simplemente, ni se recibe, ni es una copia de la realidad, sino que es una construcción hecha por el sujeto.

Este modelo se populariza más cuando en la década de los 80 se precisa en la investigación de la psicología educativa en que consisten los llamados procesos cognitivos (psicología del conocimiento). Es cuando se define lo que significan las construcciones mentales[5]

El constructivismo debe verse como una teoría en la que se han realizado investigaciones sobre la psicología cognitiva y que tiene implicaciones a la psicología educativa y en los planteamientos modernos de la didáctica. Además su origen como

---

[4]Félix Bustos Cobos en Educación y Cultura hace referencia sobre los niveles del Constructivismo

[5] Esto se refiere a la denominada segunda revolución cognitiva, hacia la década de los 80, es decir el nacimiento del constructivismo.

teoría no es más que la unión de la teoría de los sistemas y de los modelos(nos referimos a un modelado de la realidad y no a la realidad misma),con algunas investigaciones neurofisiológicas(los sentidos construyen, no reflejan una imagen del objeto) , con las corrientes del pensamiento psicológico.

Pero si nos referimos a la posición más radical del constructivismo se supone entonces una epistemología determinada, que postula que no podemos referirnos a la realidad en sí misma, sino a la construcción que a partir de nuestra interacción con el mundo, hemos realizado de ella.

Por ello la teoría Piagetiana indudablemente posee los argumentos más explícitos y profundos acerca del constructivismo en el sentido de que las estructuras mentales se integran paulatinamente en estructuras más complejas gracias a la actividad cognitiva del sujeto.

En este trabajo es de vital importancia que se conozcan los aportes de Piaget a la Pedagogía operatoria. La misma nos servirá de marco de referencia para omitir opiniones respecto a las principales derivaciones del modelo constructivista, incluyendo el nuestro.

Según Piaget, la evolución de la inteligencia en el hombre transcurre globalmente en seis fases enmarcadas en las edades cronológicas , a saber:

- Hasta los dos años. **Etapa de pensamiento sensoriomotriz**
- De dos a cinco años. **Etapa del pensamiento simbólico.**
- De cuatro a ocho años comienzo de la **Etapa del pensamiento operacional**
- De siete a once años. **Aparición de las operaciones concretas.**
- De nueve a doce años.**Etapa de las operaciones lógicas formales.**
- De once a quince años. **Desarrollo de las operaciones formales**.

Uno de los mayores aportes de esta pedagogía operatoria es que trata de dejar que el niño llegue a la maduración del proceso lógico poniéndole en situaciones en las que necesite ese proceso.

El niño va incorporando a sus estructuras lógicas mentales los resultados de las experiencias que continuamente va adquiriendo al manipular los objetos de sus alrededor.

Al respecto , Piaget nos dice.

> **" Conocer un objeto es operar sobre él y transformarlo para captar los mecanismos de esta transformación en relación con las acciones transformadoras".[Piaget (1979)]**

Es bastante tentadora la oferta que nos propone la pedagogía operatoria, en cuanto a modelo único de aprendizaje. Pero en el caso nuestro se deben tomar muchos factores en consideración para una implementación análoga a la misma. Debemos recordar que es importante que el aprendizaje en el alumno mejore, pero no es tan aconsejable un cambio tan brusco al sistema tradicional. Es por lo tanto un compromiso hacer el estudio necesario para la incorporación de parte de los métodos tradicionales con tendencias al modelo constructivista.

En este sentido Papert ilustra la importancia del modelo constructivista apuntando:

> **" El niño es el sujeto que, lejos de adquirir pasivamente los conocimientos, participa activamente en su propio proceso de aprendizaje y se constituye en el conductor de su propio razonamiento. Esta adquisición constante, activa y progresiva se va ampliando a medida que se le proporcionan estímulos" [Papert (1976)].**

El que el conocimiento se construya puede implicar variantes en el proceso de aprendizaje. Llamémos a estas variantes Hipótesis Principales[6] .

- EL conocimiento se construye a partir de la acción. No se refiere a la acción como recurso didáctico, es decir mantener al niño activo para que no se distraiga, sino de la acción que le permite al sujeto establecer los nexos entre los objetos del mundo, entre sí mismo y esos objetos, y que al interiorizarse, al reflexionarse y abstraerse, configura el conocimiento del sujeto. Pero es siempre la reconstrucción de las interacciones entre las cosas y los sujetos lo que permite construir el mundo que llamamos "Objetivo", ineractuar con él y pensar sobre él; o sea lo que permite construir el conocimiento.
- Construcción también implica que cada nuevo conocimiento construido, se integra al bagaje previo de lo ya conocido; el nuevo conocimiento es condicionado por el saber ya existente. Esto es algo semejante a lo que Piaget llamo los procesos de asimilación(del objeto por el sujeto) y acomodación(del sujeto al objeto). Así pues la construcción de nuevos conceptos dependen del saber previo pero al mismo tiempo fomenta la restructuración-reconfiguración de ese saber previo.

El conocimiento adquirido constituye el repertorio con el cual el sujeto maneja e interpreta el mundo. Los elementos de este repertorio pueden en un momento dado ser recuperados, reactivados en situaciones nuevas(Transferencia o recontextualización del conocimiento).[7] Se infiere, entonces que los elementos del saber no se

[6] Ricardo Lucio en Educación y cultura, infiere las implicaciones que desprenden básicamente de la esencia constructivista del aprendizaje
[7] También es una línea de investigación del constructivismo.

almacenan en forma aislada entre sí, sino que la red conceptual o mapa cognitivo se va ligando y complejificando y simplificando permanentemente.

Todas estas consideraciones se pueden ampliar más hacia una análisis del marco didáctico. Veamos:

En primer lugar , el enfoque constructivista sostiene que el proceso de construcción del conocimiento es algo que se da permanentemente en el sujeto, independientemente de cualquier intervención pedagógica explícita; es la forma natural como los sujetos actúan cognitivamente.

En segundo lugar el ejercicio del docente debe ser inverso al del alumno. Para construir determinado concepto el maestro se debe preguntar ¿Cúales son las relaciones básicas que lo constituyen? y además en qué procesos y en que actividad puede el alumno descubrir o establecer dichas relaciones; el alumno como, parte de la acción descubre en ella las relaciones fundamentales y, finalmente, construye el concepto.

Mencionaremos, para finalizar esta etapa de reconocimiento al fundamento teórico de nuestro trabajo, algunas líneas de investigación del modelo constructivista del aprendizaje.

Uno se refiere al refinamiento del modelo básico del procesamiento de la información. Por ejemplo donde el computador es una herramienta de aprendizaje en el que se realizan ejercicios de construcciones internas y externas simultáneamente.

Otro se refiere a las estrategias de aprendizaje (cognitivas y metacognitivas), en particular la más interesante a nuestro juicio es la que se basa en la combinación de la estrategia deductiva e inductiva de aprendizaje. Aunque el constructivismo se identifica más con la estrategia inductiva de aprendizaje, muchos pensamos que la adecuación al sistema educativo y al medio social operante del aprendizaje inductivo es más importante que la posición radical frente a una crisis en evolución.

Otro de los temas a investigarse que creemos es el más importante y con el cual nos identificaremos plenamente a lo largo de nuestro trabajo es el de la resolución de problemas-(Problem-solving): sus estrategias, sus mecanismos, sus posibilidades, sus resultados.

También, la metacognición es el tema más trabajado y que se entiende como saber acerca del saber, o como monitoreo del proceso de conocimiento(empleo de estrategias meta-cognitivas) y que influyen grandemente en los procesos de construcción del conocimiento. La primera obedece a la cuestión epistemológica de la vida cotidiana, es decir la idea que tiene la gente de cómo se aprende o se produce el conocimiento[8] y la segunda con la capacidad de desarrollar el aprendizaje autónomo.

Y por último citamos el punto de investigación más teórica: El modelo Piagetiano basado en las etapas piagetianas del desarrollo mental y la pedagogización de la investigación cognitiva emprendida por Piaget, es decir el trasladarla del laboratorio al aula.

En fín, el modelo constructivista plantea que el rol del maestro no es el de trasmitir el conocimiento, sino el propiciar los instrumentos para que el alumno lo construya a partir de su saber previo.

Sin embargo, debemos tener cuidado cuando nos referimos al constructivismo, como modelo de aprendizaje. Como dijimos anteriormente, es necesario, al referirse al mismo, la ubicación de los niveles: epistemológico, psicológico y didáctico del modelo, para

[8] Véase también capítulo II, sobre aprendizaje de conceptos

los cuales existen ciertos peligros al tomar a la ligera cualquier propuesta que se parezca al constructivismo o suene a elaboración constructivista propia.

A continuación, citaremos algunas ideas expresadas por Félix Bustos Cobos[9] en los marcos anteriormente citados y que contribuyen en gran parte a la profundización del modelo constructivista del aprendizaje.

En el marco epistemológico hay que entender que el constructivismo no debe ser tomado

como una propuesta ontológica, gnoseológica o teológica. Parte de la reflexión Kantiana sobre la imposibilidad de la ciencia de conocer la verdad y su visión interaccionista en la construcción del conocimiento de los fenómenos. Es pues, entonces una propuesta sobre el análisis del conocimiento científico bastante compatible con las reflexiones de los cambios en el arte, la economía y el derrumbe de las grandes ideologías. El constructivismo aparece al final de la época moderna con el desarrollo de las epistemologías genéticas , pero previo a las reflexiones filosóficas Kantianas, en el sentido de ver la relatividad en toda clase de conocimiento, aparecen las contribuciones de los sofistas y posterior a ello y anterior a Piaget un filósofo italiano preocupado por la construcción del conocimiento científico y la imposibilidad del conocimiento ontológico, se trata de Giambatista Vico(1688-1774).

En el marco Psicológico, se debe tener en cuenta que no toda propuesta cognitiva es constructivista. Por ejemplo tenemos el modelo de aprendizaje de David Ausubel [10]que ha dado origen a las técnicas de los mapas conceptuales una opción cognitiva que no es constructivista.

[9]Investigador de Curriculo del Ministerio de Educación Nacional de Colombia Revista Educacion y cultura N°34,1994
[10] Este investigador propone el aprendizaje significativo que es una mezcla de cognitivismo y conductismo

Desde el punto de vista psicológico la Teoría constructivista surge del modelo piagetiano

donde encontramos una serie de postulados sobre el desarrollo biológico y de la mente (postulados constructivistas),[11] que además ha recibido diversas críticas por los construcitivistas sociales[12] como Vygotsky y Bruner que defienden la tesis del problema de la significación y las construcciones colectivas en las que hay una defensa al papel del lenguaje para amplificar el pensamiento.

En particular nos interesa la limitación superada del estructuralismo genético de Piaget(Estructuras lógico matemática similar a las estructuras en teoría de grupos a los grupos abelianos y no abelianos),hacia el dominio de la simulación de procesos mentales con la utilización del computador, y la de las etapas y periodos del desarrollo intelectual pensados iguales para todos los educandos.

En el nivel Didáctico debemos tener cuidado de caer en consideraciones simplemente teóricas así como también llegar demasiado pronto a proponer pasos exactos y secuencias precisas que matarían el espíritu de la enseñanza constructivista. Es por eso que debemos tomar en cuenta algunas reflexiones que nos guíen hacia el objetivo del proceso enseñanza aprendizaje.

En primer lugar la **acción- reflexión** es importante ya que tanto los que aprenden , como los que enseñan pueden reflexionar sobre su propio entorno y buscan crear modelos funcionales y pedagógicos que ayuden a construir colectivamente explicaciones que tengan para ellas significado.

Segundo, el **enfrentamiento con hechos donde las explicaciones no funcionan** , es decir el convencimiento mediante la argumentación no da opción en el

---

[11] Vease Peligros del constructivismo, Revista N°34,1994, Educación y cultura página 24

[12] Véase el construcivismo de Vygotsky en Radical Contructivism By Nicolas Balacheff.

estudiante de encontrar su propia explicación ni la posibilidad de la falsación sobre sus propios argumentos.

Tercero, **las estructuras de asimilación previas,** se presenta como básico el hecho de que el alumno debe atreverse a conjeturar, modelar, sobre la posible red mental de los conceptos que le funcionen para explicar los fenómenos. Esas redes o esquemas de asimilación conceptual son las que le permiten al sujeto darle significación a los fenómenos de su entorno.

En síntesis lo que hay que hacer es aplicar el método de la entrevista con actividades concretas y materiales concretas(experimentos, ensayos) y con este cambio se muestra que los alumnos construyen explicaciones a medida que se les entrevista sobre fenómenos físicos sociales, biológicos o psicológicos. Esto es, de este modo se utiliza la entrevista y no para averiguar en que estructura operatoria se encuentra el sujeto.

Al entrevistar estamos construyendo y ayudando a construir nuevas estructuras de asimilación. Es decir no hay entonces observación objetiva sino participación en la naturaleza del objeto de estudio.

Debemos considerar en gran parte que el promover en los alumnos la realización, en su entorno, de proyectos vitales de índole colectiva tiene un significado para la práctica educativa, mucho más si se aprovechan las opciones que nos brindan las nuevas tecnologías.

Por otro lado la revisión y análisis crítico-epistémico de la historia del tema para ver su construcción colectiva en diferentes situaciones de su desarrollo es de gran importancia como fin didáctico.

Todo lo anterior se traduce en que:

"Un maestro constructivista tiene una cierta actitud ante la ciencia y ante las construcciones espontáneas de sus alumnos; tiene que dominar muy bien los contenidos y estar actulizándose permanentemente para poder proporcionar opciones más avanzadas a sus alumnos"[Bustos (1994)].

1.2.3 ¿Por qué el Constructivismo en el Aprendizaje de la Matemática.

El enfoque tradicional de aprendizaje es el resultado de la influencia que existe entre los métodos de estructuras con los métodos de enseñanza. En estos momentos, donde la interacción tecnología - educación nos proporciona, la oportunidad de explotar los recursos didácticos para la enseñanza de la matemática, y donde la teoría constructivista del aprendizaje, que se elabora básicamente sobre los esquemas de pensamientos, quasi abstractos, propios de la matemática (la intuición, la deducción , el análisis ,la síntesis, la validación ,la resolución de problemas), nos resulta imponente romper la filosofía del aprendizaje tradicional.

Dubinsky asegura que:

" Al tratar de relatar varias teorías del aprendizaje para reflexionar sobre mis propias experiencias como un matemático he sido impresionado por la teoría constructivista de Jean Piaget: el conocimiento matemático no es mucho de lo que tienes, sino algo de los que haces. Las observaciones y experimentos que he dirigido me han guiado a creer que lo que hacemos para construir cosas, lo construimos en nuestra mente". [Dubinsky (1994)].

En una sección posterior mostraremos que estas hipótesis anteriormente expuestas nos sirven de sólidas bases referenciales al atacar el aprendizaje , donde el estudiante participa activamente construyendo sus conceptos, mediante una poderosa arma didáctica-tegnológica, el computador a través del ambiente de programación.

CAPITULO II

APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Muchas son las definiciones que se conocen hoy sobre aprendizaje; Tales como: "cambio de conductas observables ante una situación", "desarrollo de actitudes",etc. Los científicos que utilizan matemática para sus experimentos no pueden considerar falsas concepciones acerca del verdadero significado de las matemáticas, es decir los conceptos matemáticos son dominados en toda su amplitud.

La adquisición de estos conceptos matemáticos se debían en gran parte a los genios de los tiempos como Arquímedes, Gauss, Abel, Cauchy, Riemann, etc., quienes a su vez aprendían los conceptos estudiando las literaturas ya existentes y resolviendo un problema determinado y planteado por algunos de sus precedentes, tomando en cuenta ,Cuánto había evolucionado tal concepto. De allí la necesidad natural de formalizar algunas estructuras propias de las matemáticas tales como sus conceptos que implicaría también la necesidad de profundizar aún más en las abstracciones, objeto de estudio de estos conceptos.

Los conceptos matemáticos se encuentran en un nivel de abstracción muy alto. Se trata de algo muy abstracto y se requiere de un alto grado de conceptualización. El referente no es un mero objeto sino que el concepto se construye a partir de fórmulas, hipótesis y otros conceptos.

Dichos conceptos son aprendidos antes que los principios o generalizaciones. Esto se logra a través de un proceso de diversificación y generalización; Mas tarde nos referiremos a esto.

Pero estos conceptos matemáticos a menudo no son aprendidos como realmente su esencia los define: Se trata entonces de aprendizaje de objetos y algorítmos y no de procesos y abstracciones que generen cambios que produzcan una estructura cognitiva y una actitud que apunte a la formación de un verdadero pensamiento matemático.

Esta distorsión en el aprendizaje de conceptos matemáticos crea una crisis al considerar las abstracciones como una identificación más pragmática de la realidad y de lo concreto y es claro que el aprendizaje conforme a los fines y parámetros de las abstracciones no como una realidad sino como parte de una ciencia como las matemáticas nos muestran la necesidad real de plantear una orientación curricular más hacia el pensamiento abstracto y al aprendizaje de principios o generalizaciones vía construcción del conocimiento.

Se ha evidenciado ya , que el dinamismo matemático tiene consecuencias importantes en su aprendizaje. Por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas incluye el aceptar que los estudiantes aprenden matemática sólo cuando ellos construyen activamente sus conceptos.

Esto se consigue si realizamos cambios de estructuras metodológicas y curriculares utilizando laboratorios para realmente concebir las abstracciones como parte de las matemáticas y no identificaciones concretas sin fundamento ilustrativo que producen distorsión.

Existen niveles en los cuales estudios psicológicos, muestran lo imposible en desprender el mundo real para ilustrar algunos conceptos. Lo malo es proseguir con esa nefasta identificación hasta niveles de tan considerable significación para su aprendizaje.

Tampoco el exhaustivo estancamiento en el nivel taxonómico de memorización produce un real aprendizaje de conceptos matemáticos.

La verdadera conceptualización matemática empieza cuando se alcanza ese nivel de abstracción que permita la comprensión real de los conceptos.

Seguramente nos hemos preguntado algunas veces ¿Cúal es la razón por la cual hay tanto problema en el aprendizaje en Matemática? y ¿Qué podemos hacer para encontrar solución a esta crisis en el aprendizaje.?

Mas adelante abordaremos más a fondo sobre estos cuestionamientos. Pero parte de la respuesta también está en la convicción propia de cómo ellos aprenden, ya que regularmente nos ocupamos en mejorar la estrategias de enseñanza y esto ocasiona que determinemos una selección particular de enseñar o bien lo hacemos recordando las estrategias utilizadas por los que nos enseñaron a nosotros.

Ahora bien, empezaremos por dar respuesta a ¿Qué son los conceptos?¿Cómo se aprenden los conceptos matemáticos? , el valor de la enseñanza de los conceptos., y el peligro de la enseñanza de los conceptos.

Para responder a estas pregunta citaremos algunas consideraciones del artículo de Ed Dubinsky. en cuanto al aprendizaje de conceptos en Cálculo".

Primeramente, tenemos que diferenciar entre conceptos y datos. Muchas veces se tienden a confundir por razones de índole tradicional. Pero hoy sabemos que los datos se consideran un medio para comprender conceptos, principios , leyes, generalizaciones, etc;

2.1. ¿ QUÉ SON LOS CONCEPTOS Y CÓMO SE APRENDEN?

2.1.1 Abstracción de los Conceptos en la Matemática Griega[13].

Los griegos transformaron la matemática de una colección de conclusiones inductivas basadas en hechos empíricos a un cuerpo unificado de conocimientos disponible a todos para estudiar o para usarse como una herramienta para descubrir los secretos del universo.

Los griegos introdujeron las siguientes innovaciones a la matemática:

1. Pensaban en forma abstracta acerca de las formas geométricas, números y relaciones entre ellos.
2. Activamente buscaban relaciones internas entre números y formas geométricas por sólo diversión
3. Establecieron la idea de verificar la consistencia interna a través del razonamiento inductivo.
4. Se atrevieron a pensar que los conceptos matemáticos abstractos podían ser usados para describir fenómenos naturales.

Los matemáticos en Babilonia y Egipto limitaban sus pensamientos a características de objetos físicos, solo resolvían problemas que se presentaban y requerían solución y estaban satisfechos con conclusiones de tipo inductivo.

---

[13] Notas tomadas del curso seminario de tesis, a cargo del profesor asesor

Conceptos concretos y abstractos.

_ Cuando los conceptos están estrechamente ligados a objetos físicos se dice que son concretos.

Ejemplo. A los niños, los conceptos geométricos se introducen a través de juguetes. El concepto resultante es concreto porque está ligado al objeto físico. Específicamente, un triángulo es un objeto triangular, un cuadrado es un objeto cuadrado, un círculo es un objeto redondo.

_ Cuando la mente separa el concepto del objeto físico y considera la idea en sí misma como si fuese un objeto real, el objeto se convierte en una abstracción.

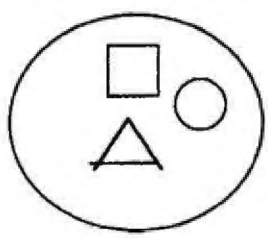
Cualquier concepto puede convertirse en una abstracción pero adquiere ese estado, cuando empieza a tener significación por su relación con otros conceptos en lugar de una relación con objetos tangibles o reales.

_ Cuando los objetos ocurren por primera vez en la mente ellos vienen asociados a objetos tangibles. Mas tarde estos conceptos llegan a ser abstractos al estudiarse su relación con otras ideas. Los conceptos se desarrollan de una percepción concreta a una abstracta. En el proceso estos conceptos pasan a través de una etapa intermedia de figura en donde el pensamiento depende de figuras.

Ejemplo. La percepción de 3 de un niño de tres años es concreta. El dice cuantos años tiene enseñando <u>tres dedos.</u>

Luego en la escuela su percepción del tres es visual. Tres puede ser | | |

Después aprende que 3 es la característica común de los conjuntos equivalentes a



La matemática pre-griega era inseparable del objeto físico. Para el egipcio, un triángulo era el borde de un campo triangular, una recta era una soga extendida, etc.

Se dice que Thales[14] sorprendió a los egipcios cuando midió la altura de la gran pirámide.

Los pitagóricos fueron los primeros en considerar conceptos geométricos abstractos. Consideraban los números como los componentes últimos de objetos reales, es decir, consideraban a los números como pequeñas partículas de materia. El concepto Pitagórico de número es concreto y no abstracto, pero se desarrolla abstracto durante la época griega.

En matemática, un concepto concreto se convierte en abstracto cuando se le aleja del objeto físico y se estudia. El resultado es que el concepto empieza a derivar su significado de su relación a otras ideas en lugar de su relación con el objeto físico que lo sugirió.

2.1.2 LA MATEMÁTICA ABSTRACTA. (ENFOQUE HISTÓRICO Y ASPECTOS FORMALES)

La abstracción tiene dos características.

1. Derivar su significado de su relación con otras ideas y acorde su relación con objetos reales.
2. Las abstracciones son objetos de estudio.

---

[14] La mente de Thales era asombrosamente abstractiva, se cuenta como anécdota en la historia de la Matemática que la mente de Thales percibía lo que se veía de noche

En la época pre-griega los conceptos no tenían esas propiedades. No se relacionaban las ideas. Los conceptos no estaban separados de los objetos que los exhibieron.

Esto empezó a evolucionar durante la era Pitagórica:

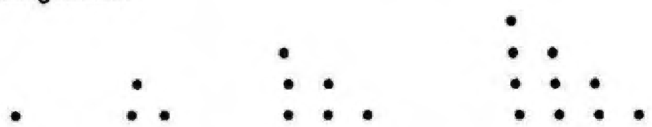
- Las matemáticas empezaron a extraer conceptos numéricos y geométricos de los objetos.

- Activamente buscaban relaciones entre sus números. Estas relaciones dieron nuevo significado a sus ideas. Subsecuentemente la matemática se hizo abstracta.

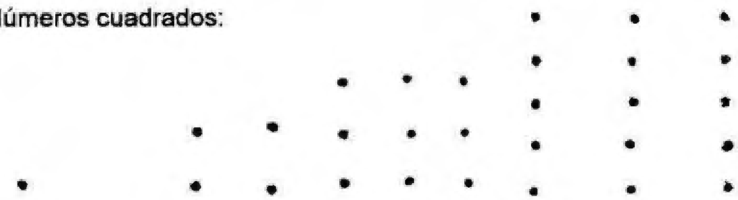
Veamos como fue la evolución con los Pitagóricos:

Detectaron ciertos diseños geométricos que usaban para marcar los números. Empezaron a categorizar los números de acuerdo a patrones en la arena. Ejemplo:

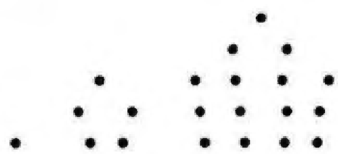
Números triangulares:



Números cuadrados:



Números pentagonales:



Esto es concreto , no abstracto. Ellos fueron más allá de estos patrones. Empezaron a categorizar los números de acuerdo a propiedades de los mismos números y no de su representación.

Identificaron los números pares : los divisibles entre dos

Identificaron los números impares: los que no eran divisibles entre dos.

Esta categoría depende de los atributos del número no de su representación.

Los Pitagóricos alcanzaron mayor grado de abstracción y consideraban la naturaleza abstracta del número por pura satisfacción intelectual.

Consideraron los números primos y los números compuestos.

Esta caracterización sugiere que los números obtuviesen completa independencia de los objetos físicos.

Otros ejemplos posteriores para satisfacción intelectual.

Los números perfectos : 28 y 496

Los números amigos. 220 y 284

En la geometría.

La geometría también se hizo abstracta al separar los conceptos geométricos de los objetos físicos que los sugerían y considerar las relaciones entre estos conceptos.

La característica principal del punto es su posición, del segmento su longitud, del círculo su redondez, del triángulo los tres lados, en donde cada lado es una longitud.

Hay confusión entre el concepto abstracto y su representación visual. Las figuras tienen algunas propiedades que no son propiedades del concepto en sí mismo.

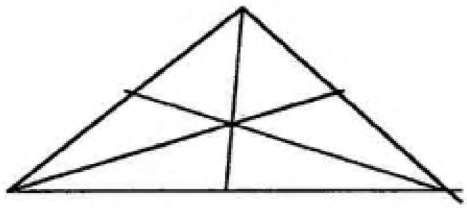
Ejemplo

- Un punto es una posición solamente. No tiene tamaño, pero toda representación del punto tiene suficiente tamaño, ocupa varias posiciones.

- Toda figura de segmento tiene longitud y anchura, pero el concepto segmento no tiene anchura.

Cuando los conceptos se hacen abstractos, es la idea y no la representación lo que importa. Las figuras son de ayuda,, ya que sugieren propiedades y relaciones entre ellos.

Ejemplo.



Medianas de un triángulo

Que todo triángulo tenga tres medianas es una consecuencia fácil de la representación pictórica. La figura aún sugiere una relación menos obvia: las tres medianas se cortan en un mismo punto.

Hay otra más interesante: el punto en donde se intersectan las medianas en dos segmentos es tal que la longitud del más largo es dos veces la menor.

Aunque estas relaciones las sugiere las figuras, son relaciones entre los conceptos y no parte de la figura.

A veces los conceptos son representados en la mente sin ayuda del papel y lápiz. Pero sigue siendo una representación ,una figura.

El concepto puede ser separado de la imagen mental.

Se tiene entonces que los conceptos se inician como propiedades comunes de los objetos físicos y se desarrolla a través de una etapa de figura o representación pictórica y luego a una abstracción completa.

- La abstracción puede ocurrir independientemente del objeto físico.

Por ejemplo. Los 5 poliedros regulares.

Los griegos estaban familiarizados en el tetraedro, cubo y octaedro. Mientras estudiaba la característica de los poliedros anteriores , una mente inquisitiva griega descubrió el dodecaedro y búsquedas subsecuentes dieron con el icosaedro; y que estos son los únicos[15].

A veces estas abstracciones no tienen contrapartidas reales. Los 5 Poliedros sí lo tienen.

Muchos conceptos numéricos son aprendidos como pura abstracción. Por ejemplo el concepto de 319 no tiene relación con un objeto tangible.

Sugerimos, como motivación de lo expresado anteriormente los siguientes ejercicios.

1. De un ejemplo de un concepto abstracto que no es una abstracción de un objeto observable o relación.

2. Escoja un concepto matemático y sugiera las distintas etapas de su evolución de lo concreto a lo abstracto.

---

[15] ver los Elementos de Euclides de Heat

2.1.3 RELACIONES INTERNAS.

Los matemáticos griegos cambiaron la matemática de una colección de conclusiones inductivas y no relaciones, basados en la experiencia, hacia un cuerpo integrado de conocimientos.

Pero fue también consecuencia de ir más allá de consideraciones de relaciones descubiertas accidentalmente a través de la observación y activamente buscando relaciones entre conceptos.

Una vez descubiertos, estas relaciones llegaron a ser candidatos para la abstracción y generalización

Los Pitagóricos detectaron relaciones entre tipos de números. Observaron por ejemplo, que el segundo número triangular es la suma de 1 y 2, el tercero la suma de 1, 2 y 3, etc.

Para representar el número 1 triangular utilizamos 1_Δ, 2 triangular 2_Δ, etc.

Aritméticamente se puede expresar:

$$
\begin{aligned}
&1_\Delta = 1\\
&2_\Delta = 1+2=3\\
&3_\Delta = 1+2+3=6\\
&4_\Delta = 1+2+3+4=10\\
&5_\Delta = 1+2+3+4+5=15
\end{aligned}
$$

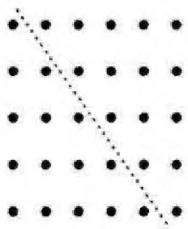
El razonamiento inductivo nos da la siguiente generalización: para cada n el n-ésimo triangular es:

$$n_\Delta$$

la suma de los primeros números contables.

Los pitagóricos también descubrieron que los arreglos se pueden juntar para formar otros arreglos.

Por ejemplo , al unir dos de los números triangulares 5_Δ se obtiene de un arreglo rectangular.



Se obtiene así una forma fácil de calcular 5_Δ, porque los arreglos rectangulares son fáciles de calcular:

$$5_\Delta = \text{mitad del rectángulo} = \frac{5(5+1)}{2}$$

Podemos generalizar la relación anterior:

El enésimo triángulo esta dado por:

$$n_\Delta = \frac{n(n+1)}{2}$$

Luego combinaron los conceptos relacionados a estas dos generalizaciones para obtener una relación entre la suma

1+2+3+ ... + n y el producto , $\frac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad *$$

Esta relación es general, para n=100 se tendría por ejemplo

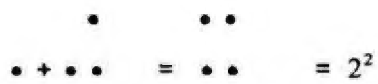
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100(100+1)}{2}$$

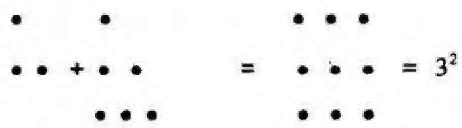
$$= 5050.,$$ un ejemplo particular.

Para los griegos el valor intrínseco de la relación (*) era que representaba un conocimiento. Ellos lograron relacionar las dos ideas con la ayuda de un simbolismo.

__Otras relaciones descubiertas. Por los griegos fueron los números triangulares. En efecto, ellos detectaron una relación entre números triangulares y los números cuadrados. Notaron que los cuadrados son la suma de los triangulares consecutivos.

Observaron lo siguiente:





$$1_\Delta + 2_\Delta = 4 = 1_\square = 2^2$$

$$2_\Delta + 3_\Delta = 9 = 2_\square = 3^2$$

Donde $1_\square$ es el primer número cuadrado, $2_\square$ es el número cuadrado, etc.

Se puede generalizar:

$$(n-1)_{\Delta} + n_{\Delta} = n^2$$
$$generalizacion - abstracta{:}{*}\,Luego, \qquad (^{**})$$
$$n^2 = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}, \ldots\ldots \forall n, .. n \in \mathrm{N}$$

Esta abstracción no se debe al simbolismo sino a la relación de ideas.

Observaciones

1: El simbolismo moderno hace la expresión de esta relación fácil pero le quita al estudiante una excelente oportunidad para el pensamiento abstracto. Una oportunidad para el pensamiento abstracto es pedir al estudiante que use su conocimiento de álgebra para verificar la relación (**).

2: Es importante reconocer que el acto de abstraer una relación es distinto del acto de generalizar la misma relación. Una relación llega a ser una generalización al aumentar el alcance de la relación. Una relación llega a ser una abstracción al cambiar el foco del examen del objeto que existe en la relación a la relación misma.

Ejemplo. La relación pitagórica afirma que dado cualquier triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c, se tiene

$$a^2 + b^2 = c^2$$

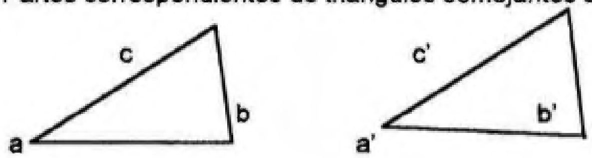
Esta es una generalización pues es válida para todo triángulo rectángulo.

Por otro lado esta relación pitagórica se convierte en una abstracción al recibir mayor atención y obtener significado por su asociación con otras ideas en lugar de su asociación con objetos y figuras. Específicamente, la verificación de esta relación es una consecuencia lógica de otras relaciones que requiere suficiente razonamiento para que califique como una abstracción.

Antes de la era pitagórica Thales de Mileto, tenía conocimiento de varias relaciones entre conceptos geométricos:

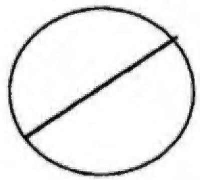
Cinco relaciones conocidas por Thales:

1. Partes correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales:

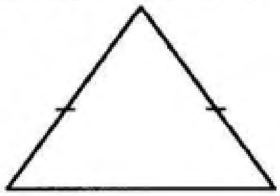


Es decir, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

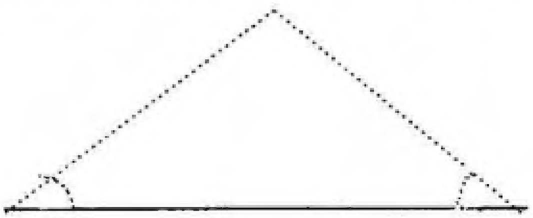
2. El diámetro de un círculo lo divide en dos áreas iguales.



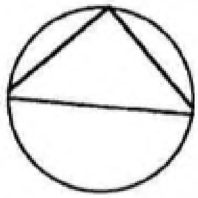
3. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales:



4. Dos ángulos y el lado comprendido determina un triángulo.



5. Todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto:



Después de esta intervención histórica , nos podemos preguntar ¿Qué son los conceptos?.

Según Cole Susana,

> **" El concepto es una abstracción que el sujeto realiza sobre la base de sus experiencias con cosas y acontecimientos particulares. Los conceptos surgen al agrupar los distintos objetos, fenómenos, acontecimientos, procesos, etc, teniendo en cuenta sus características comunes".** [Cole (1976)]

El concepto en sí es algo que se construye y se obtiene mediante la generalización de fenómenos con características comunes. Es por eso que es muy general en su aplicación. .

Existen muchos tipos de conceptos, los cuales podemos clasificar según el nivel en que se encuentran.

Por ejemplo, los conceptos apegados a la experiencia directa, (concepto de alto, cielo, casa, amarillo, etc); otros mas alejado de la experiencia inmediata (maestros todos los que se dedican a enseñar, americanos todos los que nacieron en América,etc) ; otro nivel lo constituyen los que están más alejados todavía del nivel concreto(maldad, fidelidad, comunismo, elocuencia, inteligencia, etc.); y aquellos que se denominan de elaboración teórica utilizados por científicos y que son el resultado de investigaciones. Por ejemplo: Agujeros negros(black Holes),en Física, recubrimiento,funciones, grupos ,en Matemática, cardiopatías,en medicina(cardiología Vasculorrenal),etc.

Muchas veces es necesario tener cuidado con la enseñanza de los conceptos ya que son ideas expresables mediante un vocabulario que no es tan propicio para el que recibe el mismo. Es decir, el verbalismo es un factor de vital importancia , ya que muchas veces se recurre a la memorización de estas palabras que constituyen el concepto y no se construye utilizando recursos como por ejemplo nemotécnicos.[16]

[16] Véase también Castillo, Abad, Avila, Elementos perturbadores en el proceso de enseñanza- aprendizaje del concepto de límite (Vicerrectoría de Inv y Post grado)

2..2. COMO SE CONSTRUYEN LOS CONCEPTOS.

En esta sección nos ocuparemos sobre la construcción de conceptos matemáticos y la importancia del papel que, los sistemas computacionales, en particular el ambiente de programación, juegan en esta construcción. Mas adelante abordaremos sobre el aprendizaje de conceptos y estos sistemas.

2.2.1 CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Como es de nuestro conocimiento una de las principales causa del fracaso en la matemática es debido a que la participación del alumno en el proceso didáctico no es dinámica, es pasiva, por lo que muchas veces el verdadero aprendizaje se ve influenciado en las posibles construcciones que algunos estudiantes logren hacer en el aula, con la ayuda del maestro y los recursos que estén disponibles en ese momento.

Es por esta razón que compartimos la idea de que el estudiante aprende mucho mejor la matemática cuando puede construir activamente los conceptos matemáticos (Constructivismo) y no cuando se les presenta como el material acabado que sólo tiene que asimilar.

2.2.2. MODELO DE APRENDIZAJE SEGÚN ED DUBINSKY

Veamos a continuación algunas consideraciones de Dubinsky en su artículo. A Learning Theory approach to calculus. Pg 43 , donde señala algunas consideraciones de cómo se aprende.

Dubinsky inicia su artículo haciendo una interrogante de mucha importancia , ¿Qué podemos hacer para ayudar a que los estudiantes aprendan cálculo? y ¿Cómo pensamos que ellos aprenden matemática y cómo vemos el contenido del campo llamado Cálculo?.

Otra de las preguntas que plantea es en torno al currículo: Qué tópicos deben ser omitidos y cúales deben ser añadidos debido a la existencia de computadoras y varios tipos de softwares matemáticos?.

Las consideraciones de tipo contenido asegura Dubinsky son comúnmente propias de los matemáticos, maestros y no de los estudiantes. Mientras que las creencias acerca de ¿Cómo aprenden los estudiantes?, sí nos atañen, es decir de cómo sucede o no el aprendizaje, y de que realmente es aprendido un concepto.

Este artículo señala también la importancia que tienen las creencias que tienen los profesores de como la gente aprende y que su consideración podría guiar a la selección de la enseñanza particular que cada uno utilice. Veamos a continuación las cuatro posibles creencias que se pueden tener de cómo la gente aprende y que la selección y convicción propia de cada una puede ser entonces la respuesta a la pregunta¿Cómo podemos hacer para que los estudiantes aprendan Cálculo?.

1 **.Espontáneamente**: Básicamente el estudiante aprende matemática individualmente; viendo diagramas, escuchando exposiciones, es decir el material se presenta en forma verbal, escrita o ilustrada y se espera entonces que ellos mismos aprendan espontáneamente.

2. **Inductivamente**: Se cree que el estudiante aprende inductivamente al trabajar con muchos ejemplos, extrayendo características comunes e ideas importantes de estas experiencias organizando esta información en su mente. Es decir el estudiante empleará la mayor parte de su tiempo aprendiendo con ejemplos.

3. **Constructivamente**: Se piensa que los estudiantes aprenden haciendo construcciones mentales al tratar con los fenómenos matemáticos . Esto es, si se desea saber cómo aprenden constructivamente, se debe estudiar como se hacen estas construcciones mentales y que se puede hacer para inducir al estudiante a que las haga.

4. **Pragmáticamente**: Se basa en la convicción de que los estudiantes aprenden matemática como respuestas a problemas de otros campos. Es decir el aprendizaje de la matemática se presenta involucrando al estudiante en muchas aplicaciones.

Observemos, según Dubinsky como se da la construcción de conceptos matemáticos.

Para comprender mejor su modelo será necesario estudiar las siguientes definiciones.

A. La **Interiorización** de un concepto matemático o un principio consiste de la transformación de actividades materiales dentro de procesos internos y operaciones.

B. La **Coordinación** de un proceso es la combinación de dos o más procesos en un nuevo proceso.

C. El **Encapsulamiento** de un proceso en un objeto son las acciones u operaciones que vienen a ser esquematizadas por objetos del pensamiento o asimilación.

D. La **Generalización** de el esquema o aplicación de un esquema existente a una amplia variedad de colección de fenómenos.

E. La **reversibilidad** del proceso es la construcción de un nuevo proceso a través de la reversión del proceso original.

Veamos un ejemplo de esto. Empezemos por diferenciar los objetos y procesos. Los procesos son construídos de acciones sobre objetos y finalmente transformados en nuevos objetos que son utilizados para nuevos procesos y es de esa manera como el conocimiento matemático de una persona se da en espiral hasta altos y más altos niveles de complejidad.

Por ejemplo los números son objetos. Las acciones pueden ser ejecutadas sobre estos objetos, tal es el caso cuando se hacen cálculos aritméticos. Cuando una acción tal como añadirle tres a un número es repetida con diferentes números, existe una tendencia a encapsularla en un proceso, x +3. Esto conduce al álgebra. Los procesos pueden ser construídos componiéndose dos procesos, es decir añadiendo tres y buscando el cuadrado, lo cual no da $(x+3)^2$. Aquí, un simple proceso como el de añadir 3 ha sido encapsulado para llegar a ser un objeto, en este caso la expresión x +3. Después hemos actuado sobre ese objeto mediante el proceso de elevar al cuadrado. Luego hemos cambiado un proceso, y se tiene un objeto encapsulado como $(x+3)^2$.

Ahora las manipulaciones algebráicas corrientes con expresiones pueden haberse visto como acciones sobre esos nuevos objetos. El esquema de la figura ofrece una ilustración de estos diferentes tipos de construcciones y se conoce como el esquema de la Abstracción-Reflexiva de Dubinsky.

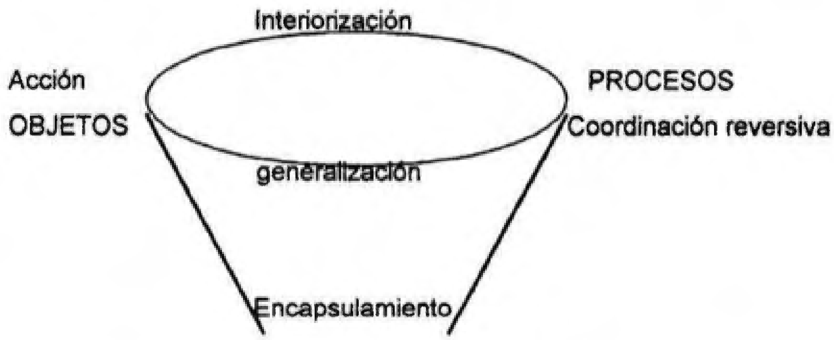


Figura 1.
Construcción de Objetos y Procesos

Este análisis arroja una observación interesante. La notación matemática $(x+3)^2$ puede representar dos clases de construcciones mentales. Una es el proceso obtenido al componer el proceso "añade 3" con el proceso "cuadrado". La otra es el objeto obtenido al encontrar el cuadrado del objeto x + 3.

También hay otras situaciones matemáticamente más sofisticadas. En cálculo la mayoría de los ejemplos en los cuales los conceptos matemáticos son interpretados en términos de procesos y objetos tienen que ver con funciones.

Algunas veces es necesario conceptualizar una función simultáneamente como proceso y como objeto. Por ejemplo, dada la función f y su derivada f', para entender la notación f '(3) requiere la idea de transformación de una función a su derivada (objeto) y evaluar en 3 (proceso).

Dubinsky señala que como ingredientes fundamentales de las construcciones en su teoría de aprendizaje (lo que muestra el esquema de la figura), también ésta puede ser usada para describir un elevado número de conceptos matemáticos de gran complejidad.

2.3 ¿CÓMO SE APRENDEN LOS CONCEPTOS?

Básicamente Cole, señala que los conceptos se aprenden mediante dos procesos a saber:

2.3.1. PROCESO DE DIVERSIFICACIÓN Y GENERALIZACIÓN.

Diversificación: Como su nombre lo indica consiste en identificar y diferenciar al objeto o fenómeno al cual el concepto se refiere de otros objetos o fenómenos. Fijar la atención en las características esenciales que definen al concepto.

Generalización: Se extraen las características comunes de los diversos objetos y se elabora una categorización o clasificación que puede aplicarse a diversos tipos de objetos.

2.4 EL VALOR Y LOS PELIGROS DE LOS CONCEPTOS.

Los conceptos que se obtienen pueden extenderse para la creación de conceptos más complicados, esto permite al alumno seguir enriqueciendo sus conocimientos mediante la enseñanza verbal.

Al referirse a conocimientos seleccionados y organizados proporcionan un sistema de conocimientos que fácilmente es recordado.

Como mencionamos anteriormente, es muy peligroso caer en el denominado verbalismo.

En lugar de aprender conceptos se aprenden palabras vacías y huecas; el estudiante se convierte en agente repetitivo de las palabras pero no vive la experiencia de un cambio en la aplicación del mismo,ni en nuevas situaciones en las que dependan de la interpretación del citado concepto.

En el tipo de enseñanza vía estrategia deductiva , en la que predomina la enseñanza verbal, es muy necesario que la definición se discuta, se cuestione se conjeture, se presenten situaciones contrarias y donde de inmediato se haga necesario la aplicación del mismo tanto como la interpretación ante una nueva situación que lo utilice. Que se proporcionen ejemplos que tiendan a hacer más claro el significado para que lleguen a generalizaciones y relacionen su experiencia inmediata con el concepto aprendido.

2.5 APRENDIZAJE DE PRINCIPIOS O GENERALIZACIONES

2.5.1. ¿ Qué son los principios?

Según Cole Susana los principios son cadenas de conceptos que forman lo que llamamos conocimientos y establecen entre ellos distintos tipos de relaciones desde simples afirmaciones empíricas hasta relaciones teóricas, como por ejemplo: Área de un cuadrilátero : base por altura, o bien, Fuerza es igual a masa por aceleración.

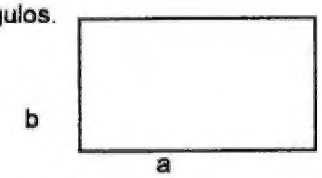
Los principios o generalizaciones se elaboran sobre la base de los conceptos; ejemplos en matemáticas tenemos los teoremas y las proposiciones muy generales como por ejemplo: Todo espacio vectorial posee una base. Toda función diferenciable es contínua. La suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°, en la geometría hiperbólica, Todo grupo cíclico es abeliano, etc. Esto significa que los conceptos empleados en un principio debe poseer la característica de generalidad, es decir, aplicable a todos los casos.

La generalización

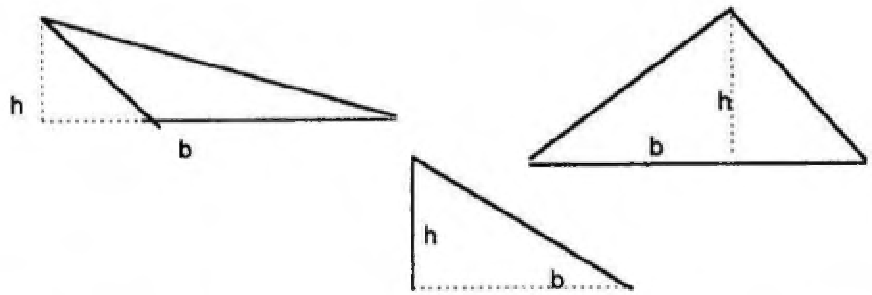
Cuando se estudian relaciones, una meta importante es la formulación correcta. Otra meta importante es la expresión correcta. Una tercera meta importante es una generalización que extiende o limita el alcance de la generalización a todos los elementos de un conjunto.

Ejemplo. Considérese un rectángulo de lado a y ancho b

La fórmula : Área = a x b expresa la relación entre el área, el largo y el ancho de ese rectángulo. Esta relación es aplicable a todos los rectángulos. Ahora un rectángulo es un paralelogramo; pero esta relación no es aplicable a todos los paralelogramos, sino a aquellos que son rectángulos.



Ejemplo. La fórmula A = b.h / 2 , expresa la relación entre el área, base y altura de un triángulo. Es aplicable a todos los triángulos. Los triángulos tienen una de las tres formas:



Esta relación es una generalización porque es aplicable a todos los triángulos.

Ejemplo 3. La razón de un círculo de circunferencia C a su diámetro d , es

$$\frac{C}{d} = \pi$$

<u>Generalizar es extender observaciones específicas para incluir todas aquellas instancias, algunas de las cuales no han sido observadas</u>

FORMULACIÓN DE RELACIONES

Ejemplo. Relación entre los lados y diagonales de un polígono.

La formulación actual de una relación es una actividad mental. Algunas veces es fácil, otras veces la relación detectada es difícil de formular.

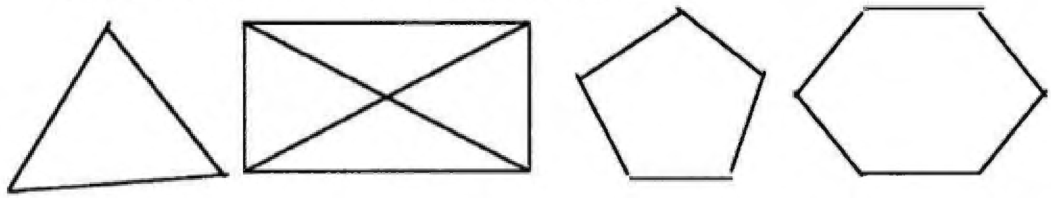


Figura 2

Polígonos

Polígono	Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono
Lado	3	4	5	6	7	8
Diagonal	0	2	5	9	14	20

Esto no es una formulación, aunque se observa que al aumentar el número de lados aumenta el número de diagonales. Una formulación aquí es difícil.

Veamos a continuación otra tabla donde se puede detectar el aumento de diagonales:

Lados	3	4	5	6	7	8
Diagonal	0	2	5	9	14	20
incremento		2	3	4	5	6

De estos incrementos se puede proyectar el número de diagonales.

9 lados $\longrightarrow$? diagonales

Como el incremento siguiente debe ser (7), el número de diagonales es 27 = (20+7).

La primera tabla puede ser extendida:

Lado	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Diag.	**0**	**2**	**5**	**9**	**14**	**20**	**27**	**35**	**44**	**54**

En lugar de extender infinitamente la tabla para saber cuantas diagonales tiene un polígono arbitrario, es mejor desarrollar una fórmula que exprese esta relación. Formularemos las relaciones que resultan en la tabla anterior.

Lados	Diagonales
3	0
4	0 + 2
5	0 + 2 + 3
6	0 + 2 + 3 + 4
7	0 + 2 + 3 + 4 + 5
8	0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Es fácil detectar, formular y expresar la relación entre el números de lados y el último sumando.

Último sumando = Número de lados - 2.

Por ejemplo cuando el polígono tiene 20 lados, el último sumando es 18.

La suma de los sumandos es

2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 170 diagonales.

Luego se requirió:

1. Hallar el último sumando y después sumarlos para usar bien la fórmula.

En general si N es el número de lados, entonces el último sumando es

N - 2

El número de diagonales es la suma:

0 + 2 + 3 + . . . + n-2

De donde 0 + 2 + . . . + n-2 es el número de diagonales de un polígono de n lados.

Como vimos en la página 25,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizando este resultado para encontrar 0 + 2 + 3 + . . . + n-2 , tenemos :

$$\begin{aligned} 0 + 2 + 3 + \ldots + n - 2 &= [1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2] - 1 \\ &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 \\ &= \frac{(n-2)(n-1) - 2}{2} \\ &= \frac{n^3 - 3n + 2 - 2}{2} \\ &= \frac{n(n-3)}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el número de diagonales de un polígono es:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Existe una relación entre los lados y diagonales de un polígono que da la misma fórmula, pero es un poco más difícil de formular:

Ejemplo. Considérese un octágono . Como tiene 8 lados, debe tener 8 vértices.

Estos 8 vértices determinan 8 segmentos más 20 diagonales, como aparece en la tabla de la página 36. En total tenemos 28 segmentos. Como una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono tendríamos que eliminar al número de segmentos , 8 de ellos, para obtener el número de diagonales.

Esto sugiere la relación:

Números de segmentos - Números de lados = Números de diagonales

Probemos con algunos lados:

$$\frac{3(3-1)}{2}-3=0$$
$$\frac{4(4-1)}{2}-4=2$$
$$\frac{5(5-1)}{2}-5=5$$
$$\frac{6(6-1)}{2}-6=9$$
$$\frac{7(7-1)}{2}-7=14$$

¿Será cierto para polígonos de 9 y 10 lados?

Estas observaciones sugieren una generalización:

Número de diagonales es :
$$\frac{n(n-1)}{2}-n.$$
$$=\frac{n(n-3)}{2}$$

Por ejemplo si tenemos un polígono de 20 lados será: $\frac{20(20-3)}{2}=170$

diagonales que se pueden trazar.

Otra manera de llegar a esta misma formulación de relaciones o fórmula para encontrar el número de diagonales de un polígono es la siguiente:

Supóngase que tenemos un polígono de n lados, por lo tanto tiene n vértices.

Desde cada vértice podemos trazar n-1 segmentos a los otros vértices del polígono. Como diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono tendríamos que restar 2 al número de segmentos trazados desde un vértice, luego: el número de diagonales trazadas desde un vértice es:

$$n - 1 - 2 = n - 3$$

Como tenemos un total de n vértices, este número de diagonales tendríamos que multiplicarlo por n y como se repiten dos veces una misma diagonal tenemos que:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Luego de encontrar en una generalización una fórmula matemática se procede a una prueba rigurosa.

Ejemplo.

Consideremos $\varphi(n) = n^3 + 2n,..claramente,..\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 12, \varphi(3) = 33.$

observamos que cada uno es divisible por tres. Podemos conjeturar : $\varphi(n),..$ es divisible por tres, para todo $n \in \mathrm{N}$. Esta es una generalización que quisiéramos hacer pero requiere de una demostración matemática. Utilizando inducción matemática tenemos:En efecto, $\varphi(1) = 3$, supongamos ahora que : $\varphi(n),..$ es divisible por tres. Probaremos que $\varphi(n+1), es,.divisible,..por, 3$.

Como, $\varphi(n) = n^3 + 2n,, \varphi(n+1) = (n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$. De donde para todo $n \in \mathrm{N}$, la fórmula es verdadera.

2.5.1.1 COMO SE APRENDEN LOS PRINCIPIOS

Los principios no se adquieren en forma dispersa , se aprenden normalmente en conjuntos relacionados que pertenecen a un tema más amplio, se aprenden principios organizados que guardan entre sí relaciones lógicas y psicológicas.

2.6 LA ESTRATEGIA INDUCTIVA Y DEDUCTIVA DE APRENDIZAJE.

Al referirnos a aprendizajes de conceptos , principios y generalizaciones no podemos olvidarnos de que los mismos obedecen a estrategias de aprendizajes. En particular nos ocupa analizar la estrategia inductiva y deductiva del aprendizaje.

2.6.1 ESTRATEGIA O RAZONAMIENTO INDUCTIVO.

Normalmente aparecen como sinónimos los términos aprendizaje por descubrimiento y aprendizaje vía método inductivo. Ambas suponen que el aprendizaje debe establecerse mediante la experiencia activa del alumno que descubre por sí sólo el principio general y los casos en que se aplica dicho principio.

También este método se identifica mucho con la estrategia heurística de aprendizaje, ya que básicamente el estudiante participa también activamente en el descubrimiento de nuevos conceptos que a su vez le permiten formular principios o generalizaciones.

Razonamiento Inductivo.

Antes del siglo VI a.C. la mayoría de los conceptos matemáticos eran consecuencia de métodos empíricos, de ensayo y error. Los antiguos matemáticos identificaban características comunes de colecciones, desarrollaron principio de conteo, detectaban y formulaban relaciones a través de la experiencia y la observación. Pero su modo de operar restringía lo que pensaban a lo que veían, limitaban la naturaleza de sus pensamientos a características físicas de objetos tangibles, y limitaban su modo de pensar a razonamientos inductivos.

El razonamiento inductivo es una forma de razonar o pensar que procede de observaciones específicas a proposiciones sobre más o todos los miembros de una colección.

Fue la llave para formular una relación entre los lados de un polígono y sus diagonales:

Lados	Diagonales
3	0
4	0 + 2
5	0 + 2 + 3
6	0 + 2 + 3 + 4
7	0 + 2 + 3 + 4 + 5
8	0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Es decir, las observaciones se sintetizaron en una relación con los incrementos, que ayuda a formular la relación entre el número de lados y sus diagonales.

Se utilizó también el razonamiento inductivo para extender esta relación entre instancias observadas y la generalización.

Números de diagonales = 2 +3 + 4 + . . . + (n-2)

También era una manera efectiva de adquirir conocimientos matemáticos.

Por ejemplo:

Consideremos las ternas pitagóricas

3 ,	4 ,	5
5,	12,	13
7,	24,	25
9,	40 ,	41
l1,	60,	61

Pareciera que la próxima terna empieza con 13. Esta conclusión de que 13 es un número plausible como primer elemento de la siguiente terna es el resultado de un razonamiento inductivo. ¿Por qué?. Veamos. Cuando se considera los segundos elementos de las ternas se ve otro esquema o patrón.

II término	4		12		24		40		60	?
Diferencias		8		12		16		20		

Parece difícil la urgencia a generalizar. Parece aparente que el patrón continúa y da 24 la próxima diferencia. Luego 84 es el próximo segundo término; esta conclusión también es de carácter inductivo.

El razonamiento inductivo también se usa para extender la relación entre el segundo y tercer término de cada terna.

Es aparente de las observación que el tercer término es uno más que el segundo. El razonamiento inductivo nos causa que esperemos que 85 sea el siguiente tercer término.

Estas tres conclusiones anteriores se combinan para proyectar que 13, 84, 85 son las siguientes ternas pitagóricas en la lista.

Pero las conclusiones inductivas son tentativas: Es posible que dos conclusiones inductivas sean inconsistentes. Necesita verficarse antes de ser aceptadas. Como $13^2 + 84^2 = 85^2$ la conclusión inductiva es válida.

GENERALIZACIÓN

Las relaciones detectadas anteriormente en los ejemplos pueden ser generalizadas.

La generalización del primer esquema o patrón en las primeras ternas es:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots 2n+1,$$

la generalización de las segundos términos de las ternas es:

4, 12, 24, 40, 60, . . ., 2n(n+1) , n natural arbitrario,

y la generalización de los terceros términos es:

5, 13, 25, 41, 61, . . ., $n^2+(n+1)^2$ estas generalizaciones son conclusiones inductivas. Para cada n tenemos una tripleta de números.

Si n=7, $2n + 1 = 15$

$2n(n+1) = 112$

$n^2+(n+1)^2 = 113$,

la terna 15, 112, 113 es la séptima terna pitagórica. Así tenemos las siguientes conclusiones inductivas:

- el tercer término es 1 más que el segundo, lo cual es 2n(n+1) y el tercer término es $n^2+(n+1)^2$.

Usando el álgebra es posible verificar para todos los casos a la vez. Por lo que si queremos encontrar la e-nésima terna tenemos que esta será: 2n+1, 2n(n+1) y $n^2+(n+1)^2$. O sea se verifica el teorema de Pitágoras[17]

$(2n+1)^2+(2n(n+1)^2=\left[n^2+(n+1)^2\right]^2$. Es por ello que el álgebra es valiosa. Es una aritmética generalizada.

---

[17] A Pitágoras de Samos le debemos su demostración, pero se sabe que los matemáticos pre-hlénicos ya conocían y utilizaban este resultado Véase Boyer Carl A History of Mathematics

El razonamiento inductivo requiere verificación . Ningún número de instancias específicas son suficientes para establecer una conclusión.

Pero , **Una instancia es suficiente para destruir una generalización.**

Esa instancia recibe el nombre de **Contraejemplo**.

Por ejemplo, una posible conclusión inductiva de nuestra lista es que todas las ternas empiezan con un impar de la forma 2n+1. Esta conclusión es falsa, ya que: *6, 8 y 10 es una terna pitagórica.*

Otra posible conclusión inductiva es: cada número es el primer término una sola vez de una terna pitagórica. Esto es cierto para 3, 5 y 7, en donde el 3 aparece una sola vez como terna. Pero el contraejemplo : 9, 12, 15 es otra terna pitagórica, luego la conclusión no es cierta para 9. Luego la generalización propuesta es falsa.

Así, concluímos que una generalización correcta siempre es cierta, no tiene excepciones. Luego una generalización se rechaza dando un contraejemplo.

Las conclusiones inductivas pueden ser inconsistentes o contradictorias. Cuando las conclusiones son inconsistentes éstas se deben cambiar para acomodar todas la observaciones. Por ejemplo, en el caso anterior de las ternas pitagóricas que tiene primer término 9, nuestra conclusión inconsistente o contradictoria puede ser cambiada de la siguiente forma para acomodar todas las observaciones:

" Para cada número impar, sólo existe una terna pitagórica en donde los últimos dos términos son números enteros consecutivos".

Un ejemplo, más moderno de esta estrategia, y que lo vimos anteriormente en el primer capítulo lo podemos tener en el Método de Pruebas y Refutaciones, que ha tenido un gran impacto desde que Lakatos Imre, publica su obra : "Pruebas y Refutaciones : La lógica del descubrimiento matemático". En esta obra se sitúa el método de descubrimiento como ente dinámico en la construcción de conceptos y se basa en la elaboración de contraejemplos, conjeturas y pruebas de las mismas. En particular se establece el análisis de la conjetura Descartes -Euler: $V - A + C = 2$ donde V es el número de vértices, A el número de aristas y C el de caras de un poliedro, en particular de uno regular. El desarrollo del análisis de esta relación se sitúa en un aula de clases , donde el maestro se propone probar la anterior relación y los alumnos emiten opiniones como por ejemplo: puede ser aplicable a cualquier poliedro, Otros estudiantes intentan falsar esta conjetura y tratan de contrastarla de muchos modos diferentes, pero en virtud de la corroboración de la misma, se sugiere que se puede probar.

Muchos otros especialistas en didáctica como Nicolas Balacheff, Popper incursionan también en este método. Mas adelante veremos sus aportes .

Así vemos que el método inductivo es ampliamente utilizado en la ciencias (inductivismo) y básicamente tiene la idea de partir de observaciones y /o ,ejemplos muy particulares y de sus combinaciones para conducirnos al descubrimiento de leyes muy generales o principios.

Observación.

Cabe señalar que la Inducción y la inducción matemática son cosas diferentes.

Al hablar de Inducción Matemática nos referimos a un **método de demostración matemática** que aunque sus premisas tengan características inductivas (suponemos que n=k y debemos probar que n=k+1),basadas por la conformación axiomática de N, el método en sí es **<u>deductivo</u>**, ya que obedece al previo planteamiento de axiomas y algunas definiciones que es el modelo básico de un sistema deductivo. Por ejemplo, podemos expresarlo de la siguiente manera: " Si una expresión es verdadera para $n = n_0$, y si siendo verdadera para n=k(llamado hipótesis inductiva) implica que la expresión es verdadera para n=k+1; luego, la expresión es verdadera para todo $n \geq n_0$. Es por ello que La inducción matemática es propio sólo de la Matemática, mientras que la inducción es aplicable a otras ciencias.

Por otro lado, si nos referimos al método inductivo o a la Inducción, estamos invocando un **modo de razonamiento** que parte de una verdad particular o específica y a través de una serie de observaciones científicas se llega a una generalización o principio.

Este señalamiento es oportuno ya que se tiende a confundir sin razón estas expresiones.

Polya G., nos asegura que:

> **" Es bastante molesto que las dos expresiones estén ligadas, ya que entre los dos procedimientos no existe más que un lazo lógico, extremadamente sutil. Existe , sin embargo, un cierto lazo práctico, puesto que a menudo se emplean los dos métodos al mismo tiempo." [Polya (1965)].**

Cabe agregar al planteamiento de Polya que la inducción matemática no es un proceso constructivo, sino que se usa para verificar la validez de una expresión matemática. El razonamiento inductivo en cambio es un proceso constructivo que nos lleva a descubrir una posible generalización matemática que sin embargo deberá validarse por inducción matemática algunas veces.

Ejemplo:

Si observamos que :

$$1+8+27+64 = 100$$

vemos que los elementos sumandos son cubos y la suma es un cuadrado, podemos presentar esta observación del modo siguiente:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

Podemos preguntarnos si acaso siempre la suma de los cubos de números sucesivos es un cuadrado. Es decir si siempre sucede que

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3$$

es siempre un cuadrado. Haciéndonos esta pregunta estamos generalizando.

En la presentación siguiente vemos que para n= 1,2,3,4,5

la suma sigue siendo cuadrados

$$\begin{array}{lcccc}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1+8 & = & 9 & = & 3^2 \\
1+8+27 & = & 36 & = & 6^2 \\
1+8+27+64 & = & 100 & = & 10^2 \\
1+8+27+64+125 & = & 225 & = & 15^2
\end{array}$$

El hecho de que varias sumas de cubos consecutivos sean cuadrados difícilmente se le puede atribuir al azar. La inducción nos sugiere a pensar en el siguiente teorema:

" La suma de los n primeros cubos es un cuadrado"

Si bien es cierto que para n=1,2,3,4,5 las sumas resultan ser cuadrados, sus raíces tienen una notable y regular diferencia al hacer la resta entre dos términos sucesivos de esta serie,

$$3 - 1 = 2,\quad 6 - 3 = 3,\quad 10 - 6 = 4,\quad 15 - 10 = 5$$

Constatamos, así una analogía sorprendente entre las raíces (cuadradas) de esos cuadrados y una regularidad notable entre los números que la expresan:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\ 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

De este modo podemos reformular el principio obtenido anteriormente por:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2$$

a la cual le asiste una posible simplificación a saber que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Podemos, entonces expresar el resultado obtenido por inducción y expresarlo como:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad (1)$$

Si suponemos que se cumple para n es necesario probar que se cumple para n+1, esto es,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \quad (2)$$

No es difícil verificar la exactitud de esta afirmación, en efecto, restando (2) de (1) obtenemos:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

que tampoco es difícil de verificar, ya que, el miembro derecho se puede escribir como:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left[(n+2)^2 - n^2\right] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\left[n^2 + 4n + 4 - n^2\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}(4n+4) = (n+1)^2(n+1) = (n+1)^3$$

de donde si se supone cierto que se cumple para

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

es también cierto para n+1 :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$ con lo que concluye la prueba. ■

NUEVO ÍMPETU CON LAS COMPUTADORAS.

El desarrollo de las computadoras digitales le ha dado un nuevo impulso a la inducción matemática, por cuanto que la naturaleza del uso eficiente de las computadoras frecuentemente requiere el desarrollo de funciones recursivas en sus algoritmos; los algoritmos a su vez son un proceso constructivo, que deberán ser verificados por inducción matemática. Este proceso constructivo es más comprensible al estudiante y éstos se sienten bastante confortables de poder ver algunos resultados del algoritmo aunque pueda verificar el n-ésimo término como lo hace la inducción matemática, la cual tiene cierta aureola de magia al lograr mucho con tan poco esfuerzo, aunado a la poca aplicación práctica que se le encuentra.

La inducción como hemos visto es de vital importancia en el aprendizaje ya que utiliza la particularización,generalización, la analogía entre casos particulares. Trata de descubrir mediante la observación, la regularidad y la coherencia, patrones y algoritmos claves para la construcción de conceptos. Veamos para finalizar esta sección un ejemplo de generalización:

Determinar el volúmen de una pirámide truncada de base cuadrada, sabiendo que el lado de la base inferior es de 10 cm, el de la base superior de 5 cm y la altura del tronco de la pirámide, de 6 cm. Si sustituimos los números 10 5 y 6 por letras tales como a ,b y c podemos enunciar un problema más general que el primero. De este modo la generalidad es útil debido a que el estudiante adquiere más fácilmente algunas nociones como la de variable así como también el paso de lo numérico a lo literal lo prepara a ganar acceso en nuevos procedimientos, variando los datos varias veces.

2.6.2 LA ESTRATEGIA DEDUCTIVA Y LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS.

En esta estrategia se parte de una generalización y por medio de la deducción se llega a otra generalización. Por ejemplo tomando como base el principio "Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí" se deduce que "Ángulos centrales iguales subtienden arcos de circunferencia iguales".

En matemática se utiliza con mucha frecuencia este estilo de presentación que además es isomorfo con la estrategia tradicional de enseñanza de las mismas.

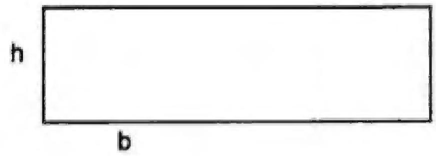
Este método tiene sus raíces en el método axiomático Euclidiano el cual partiendo de lista de axiomas, definiciones se obtienen los teoremas seguidos de su demostración.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO :

Como se observó anteriormente, ni los egipcios ni los babilonios se percataron de las contradicciones internas en la formulación de sus relaciones empíricas. La consistencia no era un problema dado que cada problema se resolvía individualmente sin consideración a otras soluciones.

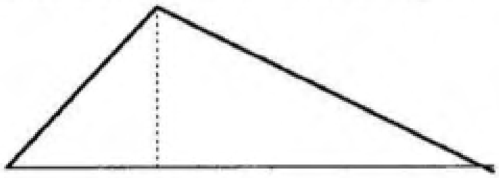
El conocimiento matemático no estaba integrado; en su lugar lo que había era una colección aislada de hechos empíricos.

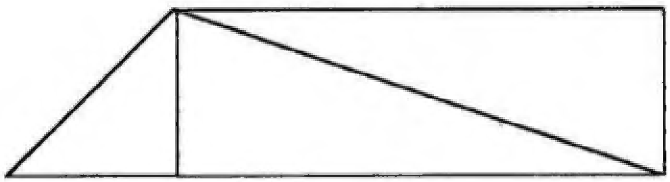
La matemática griega sin embargo, se percataba que las relaciones formuladas correctamente deben ser consistente o no contradictorias. Cuando eran contradictorias se concluía que una de ellas fue formulada incorrectamente. Por lo tanto empezaron a insistir que toda nueva formulación de relaciones debería ser verificada su consistencia con las relaciones previamente aceptadas.



A = b.h

En base a esta formulación se formula la del área del triángulo:

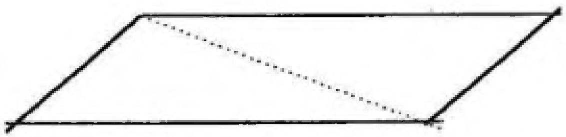




A = (b x h)/2

Estas dos son consistentes porque está basada en la del rectángulo.

Área de un paralelogramo:

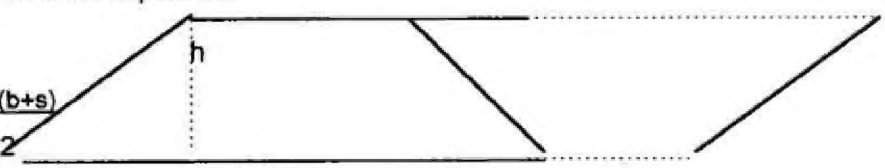


$$A = 2\left(\frac{b.h}{2}\right) = b.h\,,$$

formulada en términos del área del triángulo.

Área del trapezoide:

$$A = \frac{h(b+s)}{2}$$



basada en la del paralelogramo

Los griegos fueron mucho más allá de la comparación de relaciones; ellos insistían en que las relaciones nuevas formuladas se verificara con otras relaciones utilizando **razonamiento deductivo**.

El razonamiento deductivo es un proceso de razonamiento que pasa de una o más generalizaciones a instancias específicas o a una nueva generalización. A manera de contraste, el razonamiento inductivo pasa de instancias específicas a generalizaciones.

Ejemplo de razonamiento deductivo (Paso de instancias específicas).

Se sabe que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ luego si n=60

$1+2+3+4+\ldots+60 = \dfrac{60(60+1)}{2}$ = 1830.

Ejemplo(Combinar dos generalizaciones para obtener otras).

1.Para todo triángulo el área es la mitad del rectángulo correspondiente.

2.Para todo rectángulo el área es el producto de la base por la altura, luego se sigue, usando razonamiento deductivo, que para todo triángulo el área es la mitad del producto de la base y la altura correspondiente.

Relación entre el Razonamiento Inductivo y el Deductivo.

En matemática el razonamiento inductivo obran juntos . El razonamiento inductivo se usa para detectar y formular relaciones; y el razonamiento deductivo se usa para verificar que la nueva relación es consistente con el conocimiento existente.

Ejemplo:

7 x 8 = 56

5 x 6 = 30

$3 \times 12 = 36.$

Es fácil concluir que, usando razonamiento inductivo que el producto de un impar y un par es siempre par.

Usemos razonamiento deductivo para verificar esto. Si p es impar , se puede escribir $p = 2n-1$ y si q es par, $q= 2m$.

Así $p \times q = (2n-1)(2m) = 2\,(2n-1)m$ par.

El razonamiento inductivo se usó para formular y generalizar la relación. El deductivo para verificar que la relación es consistente con relaciones previamente aceptadas.

El razonamiento inductivo y dductivo trabajan juntos al realizar tareas diferentes. El razonamiento inductivo explora y el deductivo verifica. Ambos son necesarios. Sin razonamiento deductivo pueden ocurrir inconsistencias o contradicciones; sin el inductivo no se descubre nada. Cuando las conclusiones inductivas se verifican deductivamente, entonces son confiables.

En Hilbert , posteriormente, se perfecciona el método axiomático deductivo ;se habla de sistemas formales o de metamatemática para referirse a lo formal y riguroso del método axiomático deductivo propio de las matemáticas y gracias a su influencia, el gran legado con que los especialistas a través de los textos (con el mismo enfoque) imparten la función didáctica en nuestros sufridos estudiantes de este sistema educativo cada vez más en detrimento.

2.7 ANÁLISIS ENTRE EL BALANCE INDUCTIVO-DEDUCTIVO EN EL APRENDIZAJE

Empezaremos por plantear una cuestión filosófica ampliamente debatida Hay quienes piensan que la lógica del descubrimiento científico es la inducción otros pretenden que sea la deducción.

Ambas posiciones radicales en el momento en que se ponen en prácticas son nefastas para la evolución de la crisis educativa en matemáticas. Según Cole Susana :

> **"Por ello una combinación de ambas estrategias resultará conveniente, seleccionando una y otra en función de las características de los alumnos, de la materia y del principio que se debe aprender" [Cole (1976)].**

En nuestro medio existen numerosas razones para reflexionar a través de la posibilidad de un equilibrio entre ambas:

- El surgimiento de la tecnología trae consigo la modernización en el proceso enseñanza- aprendizaje de la matemática.
- El fracaso escolar cada vez es mayor en matemática y consigo el nivel de conocimientos con que el estudiante pisa las aula del nivel superior.
- El nivel de desconocimiento de las cuestiones propias de la didáctica moderna por parte de los profesores de la enseñanza elemental, media y superior .

El equilibrio es fundamental porque es el paso más eficaz hacia un cambio en los métodos de aprendizajes. Es decir, como no existen todas las condiciones (sociales, psicológicas y económicas) para efectuar un cambio en la estrategia de aprendizaje , se hace necesario un planeamiento serio que contraste y valide ambas:

- Si los alumnos aprenden inductivamente, el maestro deberá plantear situaciones ejemplos y orientar el razonamiento del alumno para que descubra el principio.

Si los alumnos aprenden deductivamente el docente indicará cual es el objetivo que los alumnos deberán aprender, hará recordar los conceptos que lo integran, enunciará el principio y pedirá a los alumnos que demuestren, presenten ejemplos y enuncien el principio aprendido.

Pero si los alumnos aprenden tanto deductiva como inductivamente se tendrá dos estrategias a favor del estudiante utilizando todas las ventajas que una y otra proporcionen, así también la incorporación más natural del metodo pasivo al activo del aprendizaje en donde para ese momento tanto el estudiante como el sistema educativo posean las condiciones para ese cambio.

2.8- LA APLICACIÓN DE PRINCIPIOS O RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (del Ingles PROBLEM SOLVING)

En esta sección nos encontramos con uno de los tópicos más importantes de nuestro trabajo:La resolución de Problemas. Surge pues de modo natural preguntas como : ¿Que es un problema? ¿Cual es la diferencia entre un problema en matemática y un problema en educación matemática?¿Es la resolución de problemas el mejor camino para el éxito en el dual enseñanza aprendizaje de la matemática? .¿Qué son resolventes y resolvedores de problemas? Trataremos, en cuanto, nos sea posible analizar y dar respuestas a cada una de estas interrogantes; También reflexionar sobre las implicaciones de la misma en nuestro currículo.

Qué es un problema.

Un problema podría definirse como una situación de crisis a la que se enfrenta un individuo al tratar de aplicar todos los recursos que posea para dilucidar dicha situación. Si logra vencer los obstáculos que se le presentan al resolverla se dice entonces que el individuo ha aprendido.

Se puede decir entonces que un problema es una característica o tipo de aprendizaje que se presenta cuando el funcionamiento de los esquemas o estructuras mentales se tornan más complejos de lo acostumbrado para alcanzar un objetivo específico.

En cuanto a niveles taxonómicos se refiere un problema se sitúa en el IV, V, VI (aplicación, análisis y generalización) que son los niveles mas altos y ricos en profundidad y complejidad a los que se debe procurar el aprendizaje. De allí el aprendizaje debe procurarse hacia estos niveles.

FRIDMAN[18] señala que la resolución de problemas es de vital importancia en la formación matemática; de hecho podría decirse que es como el entorno nuclear y substancial de esta ciencia, ya que se evidencia en total modo si el aprendizaje de los conceptos fue significativo.

De esta importancia Fridman apunta :

> **" Esto se explica tanto por el hecho de que los objetivos finales de la enseñanza de la matemática se reducen a la asimilación por parte de los estudiantes de los métodos de solución de un determinado sistema de problemas matemáticos. De este modo, en la enseñanza de las matemáticas la solución de problemas interviene como objetivo y como medio de enseñanza" [Fridman (1985)].**

El significado de problema también tiene sus implicaciones en cuanto aprendizaje se refiere.

Polya(1962) establece que tener un problema significa " buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"

En general , un problema matemático se identifica como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlos y para el cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución .

---

[18] Lev Moisiéievich Fridman Doctor en matemática y psicología. Actualmente trabaja como investigador en el instituto de psicología general y pedagógica adjunto a la Academia de Ciencias Pedagógicas, URSS.

2.8.1 EL APORTE DE POLYA, SCHOENFELD, FRIDMAN

Hablar de resolución de problemas sin hablar de los aportes de George Polya [19] en matemáticas, será estéril y reprochable en gran medida.

Para ello nos disponemos a analizar una de las principales líneas de investigación en matemática educativa que él mismo describe en su libro How to solve it. Se trata de la heurística.

La heurística o heurética nace por la necesidad de una ciencia que explicara el estudio de las reglas y métodos del descubrimiento y de la invención.

Se pueden encontrar aportes a este estudio entre los comendadores de Euclides, Pappus (siglo III, A.C.)en el libro VII de su collectiones trata de un tema que llama Analgomenos, tesoros del análisis y comenta:

> **" La heurística es un resumen, una doctrina especial para uso de aquellos que tras haber estudiado los elementos ordinarios desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos; no sirve más que para esto. Es la obra de tres grandes hombres:**
> **Apolonio, Euclides y Aristoeus" [Polya (1965)].**

Los ensayos más conocidos sobre la construcción de un sistema heurístico son debido a Descartes y a Leibnitz. Igualmente debemos a B. Bolzano una notable y detallada exposición sobre el tema.

Leibnitz nos expone sus ideas ya que considera que:

> **"No hay nada más importante que el considerar las fuentes de la invención que son a mi modo criterios más interesantes que las invenciones mismas"**

---

[19] George Polya es un eminente matemático ,cuya línea de investigación es el conocimiento de las verdades matemáticas en forma activa, heurística Otras obras de este genio de la didáctica <u>Mathematics and Plausible Reasoning Induction and Analogy in mathematics and Patterns of plausible inference</u>

Descartes en su obra inconclusa Reglas para la conducción del espíritu nos asegura:

> **"Cuando en mi juventud oí hablar de invenciones ingeniosas trataba de saber si no podía inventarlas yo mismo sin incluso leer el autor. Así advertí paulatinamente que me conformaba con ciertas reglas".**

- Bolzano dedicó gran parte de su obra de lógica **"Wissenshaftslebre"** al tema :

  > **Voy a esmerarme en asentar en términos claros las reglas y los caminos de la investigación seguida por todo hombre capaz, aunque en la mayoría de los casos los sigue sin tener plena conciencia de ellos".**

  De esta forma, se entiende que la heurística era la llave maestra con que los genios de las diferentes épocas abrían nuevos caminos hacia la matemática y la ciencia.

Hoy se entiende este proceso como lo señala Polya:

> **La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular, las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. [Polya (1965)].**

En particular, el enfoque heurístico permite la encarnación de la matemática con el proceso de aprendizaje ya que el método de trabajo de la matemática es parecido al método heurístico.

2.8.2 EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Emerge la pregunta ¿Cómo se resuelven los problemas?

Susana cole señala :

> **El proceso de resolución de problemas requiere la capacidad de tranferir experiencias pasadas a situaciones nuevas, determinar relaciones, analizar la nueva situación, seleccionar de los principios conocidos los que se adecuan para resolverla y aplicar convenientemente dichos principios.[Cole (1976)].**

En nuestro caso, la noción o idea que tiene el estudiante sobre los problemas matemáticos, es de carácter difuso; esto se debe, en parte a que ellos ignoran sobre las cuestiones teóricas acerca de los problemas ; las cuestiones en torno a la génesis, estructura lógica, tipos de problemas, y esencia de la solución,.

En particular,¿Qué significa resolver un problema en matemática.?. Fridman, establece que:

> **" Resolver un problema matemático significa encontrar una sucesión tal de principios generales de la matemática(definiciones, axiomas, teoremas, reglas fórmulas, etc), que al aplicarlos a las condiciones del problema o a las condiciones derivadas de estas(los resultados intermedios del proceso de solución) nos conducen a obtener lo que se exige en el problema, es decir la respuesta." [Fridman (1985)].**

Tipos de problemas que se resuelven en Matemática:

Polya, diferencia entre dos tipos de problemas: problemas por resolver y problemas por demostrar.[20] Fridman lo hace entre puramente matemáticos y problemas prácticos o aplicados .

---

[20] Véase Polya, George Cómo plantear y resolver problemas Pág 161

En efecto , las matemáticas ofrecen una diversidad de tipos de problemas, dependiendo de el requerimiento: de construcción, de transformación, demostración, de aplicación, de verificación, de encontrar un dato desconocido o una incógnita, etc.

Lo que bien es cierto es que la actividad de resolver cada tipo de problema debe generar autonomía matemática, así como incitar a diseñar nuevos problemas, ya que esta actividad provee de habilidades para resolver cualquier problema.

En la resolución de problemas podemos caracterizar dos actividades fundamentalmente: la identificación del problema y la de buscar métodos de solución.

Polya (1945), plantea básicamente 4 pasos fundamentales en el proceso de la resolución de un problema:

1. Entendimiento del problema. Se trata de entender la información del enunciado y sus relaciones. Esta dividido en dos partes: Familiarizarse y trabajar para una mejor comprensión. Aquí es de enorme importancia la relación verbal en la que se traduce el primer obstáculo para que el estudiante pueda entenderlo.

2. Concepción de un plan. Es cuando se presentan la mayor cantidad de obstáculos ya que, fluyen ideas aisladas de las cuales , solo una es la responsable de actuar como esquema o patrón definitivo, para la elaboración del plan.

3. Ejecución : Es decir, después de entender el problema , se lleva acabo este plan. Es la oportunidad para reoerdenar alguna idea oscura que haya quedado; se necesitan los detalles más sutiles, las experiencias previas y el cuidado en cada paso de este proceso.

4. Visión retrospectiva. Aquí no sólo importan las soluciones y cálculos encontrados la evaluación del sentido de dicha solución . Además , el análisis de las posibles extensiones o conexiones del problema.

ALAN SCHOENFELD, encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

1. **Dominio del conocimiento** o recursos, incluye a las definiciones, los hechos, y a los procedimientos usados en el dominio matemático . Por ejemplo, si el problema involucra ecuaciones diferenciales parciales, entonces los recursos serían el conocimiento de lo es una ecuación diferencial parcial, los métodos de resolverla, y algunos otros conceptos previos para los cuales ella dependa.

2. **Estrategias cognoscitivas**, incluyen métodos heurísticos[21], tales como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, el uso de tablas, y dibujar diagramas.

3. **Estrategias metacognitivas** , es decir la estrategia de solución adecuada y seleccionada, o el cambio de dirección ante una nueva estrategia. Se puede decir que se relaciona con el monitoreo en la solución del problema.

4. **Sistemas de creencia**. Esto atiende las ideas que puedan tener acerca de la matemática, como se aprende y como se resuelven los problemas. Lo que el

[21] veáse un tratamiento más detallado en el breve diccionario de heurística de Polya Cómo plantear y resolver problemas 1986

estudiante piense acerca de las matematica juega un rol importante en la forma como el puede resolver los problemas matemáticos. De aquí se desprende que la afectividad o motivación son dos ingredientes de vital importancia en el proceso.

FRIDMAN, propone un esquema general de solución de los problemas matemáticos. Esto es, etapas fundamentales para el cual esta constituido el proceso de la solución de un problema:

1. **El análisis de un problema**
2. **La escritura esquemática del problema**(construcción de un modelo auxiliar del problema).
3. **La búsqueda del método de solución del problema**.
4. **La implementación del método de solución del problema**;
5. **La prueba de la solución obtenida**;
6. **El análisis de la solución obtenida**
7. **La formulación de la respuesta**;
8. **El análisis docente cognoscitivo** del proceso realizado y del método de solución.

En consideración a lo real existen algunas etapas que indudablemente se omiten; las etapas 1, 4 y 7 muchas veces son las obligatorias, de hecho siempre dependerá del tipo de problema y el esquema general que el estudiante tenga acerca del mismo.

Si resaltamos la importancia de la resolución de problemas en el contexto teórico, sin proponer concretamente actividades compatibles con ella, corremos el peligro de pasar desapercibido nuestro aporte.

Santos Trigo[22] señala que entre las actividades asociadas al aprendizaje de la matemática, vía resolución de problemas están:

- El resolver periódicamente(uno cada semana) problemas nuevos para el maestro en el salón de clases. Es decir , es importante que los alumnos observen las diversas estrategias que se utilizan cuando uno se enfrenta a problemas no estudiados o resueltos antes de la clase.
- Mostrar a la clase videos o trabajos de otros estudiantes resolviendo problemas. Esto es con la finalidad de discutir las destrezas y debilidades mostradas por esos estudiantes en el proceso de resolver problemas.
- Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas, es decir aún cuando los estudiantes son motivados a que seleccionen y traten ideas que consideren plausibles, el maestro(como moderador) puede sugerir orientaciones de valor en la discusión.

En general los esquemas asociados anteriormente, involucra la idea de aprendizaje cooperativo, o en comunidad como señala Vigotsky.

Schoenfeld señala que la relación de actividades propia de los matemáticos y expertos en el área cuando desarrollan matemáticas proporciona en el estudiante motivación suficiente para que continúen estudiando matemáticas fuera del aula(citado en Trigos, 1995).

Veamos ahora algunos ejemplos de problemas, que ilustren la importancia de todo lo expuesto anteriormente, es decir, la descomposición del problema,en subproblemas, la

---

[22] Luz Santos Trigo, investigador en la resolución de problemas asociados al aprendizaje de la matemática

elaboración de una tabla, de una gráfica, la elección del método , como la verificación y evaluación de la solución.

Ejemplo 1. ¿Para que valores de y la suma de las fracciones $\frac{y}{y-5},\cdot\varphi,\cdot\cdot\frac{6}{y+5}$ es igual al producto de estas.?

Descomponemos el problema en tres subproblemas, a saber:

Utilizamos la estrategia utilizada por Fridman.

Solución: Se dan las fracciones $\frac{y}{y-5},\cdot\varphi,\cdot\cdot\frac{6}{y+5}$

- ¿A cuánto es igual la suma de estas fracciones?
- ¿A qué es igual el producto de estas fracciones?
- ¿Para qué valores de y la suma de las fracciones es igual al producto de dichas fracciones?

Como observamos el último subproblema coincide con la pregunta base del problema, que a su vez puede desglosarse en tres problemas,

a.¿ Para qué valores de " y" son iguales los valores de los numeradores de las fracciones de los dos primeros subproblemas?

b. ¿Para qué valores de "y" el común denominador de dichas fracciones es igual a cero?

C. Comparar los valores de y obtenidos en el problema a. Con los valores obtenidos en el problema b. y excluir de los primeros valores los que coinciden con los segundos.

Por el método de Polya.

1. La incógnita es el valor de y que hace posible que la suma de las fracciones sea igual al producto.

2. El plan puede consistir: a. resolver la expresión que concuerda con el planteamiento 1

$$\frac{y}{y-5}+\frac{6}{y+5}=\frac{y}{y-5}\times\frac{6}{y+5}.$$

que puede verificarse con la ayuda de las preguntas anteriormente expuestas o

b. Intentar resolver algebraicamente esta igualdad.

3. Si se selecciona el primer plan (a) llegaremos a varias posibilidades que llevan a la solución. De seleccionarse el plan (b), se analizará las raíces del polinomio que resulta al operar la igualdad.

4. Ambos métodos llevan a la solución esperada, y verifican las condiciones originales del problema.

Ejemplo 2. Una revista se abre al azar. El producto de los números de las páginas observadas es 3192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?

Santos trigo(1993) presenta estas soluciones diviendolas en casos.

Solución:

- Por aproximaciones sucesivas. Estableceremos el rango que contenga a la solución. Si observamos 50x50 = 2500 y 60x60 es 3600 luego la respuesta a considerarse debe estar ubicada entre los 50. Descartamos las posibilidades siguientes: 54x55 , 55x56 (ya que ambos productos tienen ceros). 56x57 da el dígito 2 en la unidad, luego realizando la multiplicación obtenemos el resultado requerido.

-Podemos también intentarlo factorizando 3192 como 2x2x2x7x57. Se observa que el producto 56 y 57 nuevamente satisface la condición del problema.

- Si utilizamos la calculadora vemos que la raíz cuadrada de 3192 es aproximadamente igual a 56.4977, como queremos dos números consecutivos 56 y 57 deben ser los números pedidos.

- Otra forma de resolver este problema es pensar en resolver la ecuación algebráica $x(x+1) = 3192$. Podemos aplicar el ejemplo anterior y preguntarnos el valor que debe tomar x para satisfacer la igualdad. Después de resolver esta ecuación obtenemos que $x = 56$, siendo 56 y 57 los números que verifican las condiciones iniciales del problema.

Ejemplo 3. Dos postes de teléfono (10m y 25 m de altura respectivamente) se colocarán a una distancia de 40 m. Los postes deben ser sujetados a un punto de apoyo situado entre los dos postes. ¿Cúal debe ser el lugar para situar el punto de apoyo si se desea que la suma de las longitudes del cable de cada poste al punto de apoyo sea mínima?

Se enfocará este ejemplo al método que comúnmente utilizamos. (Método libre)

Solución:

Se sugiere el siguiente diagrama:

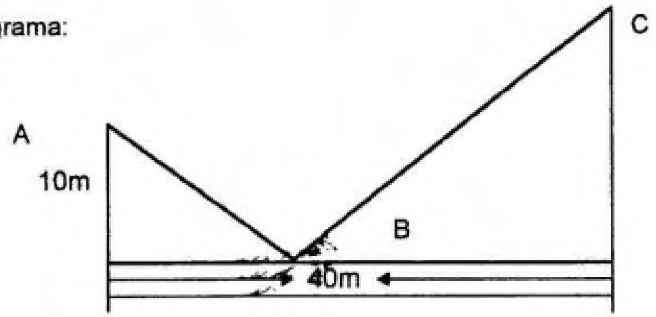


Figura 3

1. Primeramente , se quiere que AB + BC sea mínima.

2. Calcular la distancia que se desea minimizar: utilizaremos teorema de Pitágoras, el concepto de derivada , número crítico y de mínimo absoluto.

3. Al encontrar el valor de x que satisface la ecuación que representa la derivada f' =0, siendo,

f'$=100(40-x)^2-625x^2=0$

que resulta de la función $f(x)=\sqrt{100+x^2}+\sqrt{625+(40-x)^2}$ donde el primer sumando representa la longitud AB y el segundo sumando la longitud BC. De esa forma obtenemos el valor mínimo deseado.

X = 11.42

4. Utilizamos diferentes valores, mayores o menores, para verificar la solución.

En el siguiente capítulo mostraremos más ejemplos de resolución de problemas con ayuda de nuestro enfoque de la propuesta, es decir , utilizar el ambiente de programación para el aprendizaje de conceptos, principios y resolución de problemas.

CAPITULO III

CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS MATEMÁTICOS EN AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN.

En capítulos anteriores se establecieron las bases teóricas que apoyan nuestra propuesta metodológica de aprendizaje de conceptos y principios matemáticos en ambiente de programación. En este capítulo nos proponemos describir las sugerencias metodológicas a seguir para la implementación de la misma.

3.1 CLASIFICACIÓN DADA POR R.SHERWOOD SOBRE EL USO DE LA MICROCOMPUTADORA EN LA ENSEÑANZA.

Robert Sherwood[23] ha dado una clasificación sobre el uso de la microcomputadora en la enseñanza, en tres categorías a saber:

1. Aprenderse la computadora.
2. Aprender a través de la computadora
3. Aprender con la computadora.

El primero es un modelo que se basa en el conocimiento y manejo del Hardware.

---

[23] Investigador en Ciencia de la Educación en la Universidad de Nueva York. Véase también El Ordenador en el Aula de Egidio Penturaro

En este modelo se contemplan todas las operaciones y algoritmos que la computadora acepta a través de instrucciones (programas). Se establecen pasos y secuencias para alcanzar la solución de un problema. El desarrollo lógico del programa permite un aprendizaje a altos niveles, ya que se reflexionan sobre las formas de pensar. Los programas son pues algoritmos en determinados lenguajes. Es decir, fundamentalmente el conocimiento de HARDWARE Y SOFTWARE. Ejemplo:, BASIC,.PILOT,Medios de almacenamientos, Unidades de entrada/salida, accesorios, etc.

La segunda categoría permite el establecimiento de los Softwares tutoriales, en donde el estudiante es un receptor pasivo del aprendizaje, debido a que en ocasiones , el computador se puede convertir en sustituto del profesor. La instrucción es individualizada,es programada[24], ya que el estudiante avanza a su propio ritmo, pero si abusa del software se puede adquirir dominio sobre lo que muestra el tutor y no sobre lo que hace el tutor, en beneficio del proceso didáctico.

La tercera modalidad, por la que en particular nos inclinamos en este trabajo, permite una manera más formal y poderosa de utilizar las computadoras en la educación. En este sentido Ardila A.(1993),[25] nos plantea que:

> **" La misma es un instrumento para auxiliarlos en un proceso de construcción del conocimientos. Los estudiantes son protagonistas y parte activa en la dirección de una secuencia didáctica en la que se pretende fomentar la búsqueda y construcción del conocimiento por medio de una actividad colectiva "[Ardila (1993)]**

---

[24] Su fundamentacion psicológica está basada en el conductismo.

[25] Analida I Ardila A Profesora investigadora del programa Centro Americano de Maestría en Matemática Opción Matemática Educativa Curso Microcomputadora en la enseñanza de la Matemática

Por otro lado, la enseñanza de la matemática a través de la computadora, puede apoyar la idea curricular del aprendizaje mediante la resolución de problemas [26], ya que ayudan a cambiar el énfasis de los tradicionales problemas del planteo a situaciones de problemas.

Nuestra propuesta descansa en el interés por sugerir el ambiente de programación, en particular el TRUEBASIC,, de Kemeny and Kurtz, creadores del BASIC , que es un lenguaje estructurado, poderoso y útil, y que nos brinda la ventaja de que el estudiante no tiene que aprender excesivos conocimientos del lenguaje, ya que su estructura lógica-verbal es compatible con la de la matemática.

Este se incorporará como complemento de las clases magistrales. Luego la ayuda de un graficador puede dar evidencias de un estudio mas crítico de los conceptos y principios y sirve de apoyo del profesor para mostrar rápida y precisamente las gráficas de funciones.

Patrick Scott, establece la importancia de los graficadores:

> **"Son muy pocos los profesores que pueden trazar bien las gráficas, y mostrar rápidamente lo que pasa al cambiar los coeficientes y constantes de una función. Generalmente resulta una confusión si el profesor de nada más que pizarrón, gis o tiza. Si la computadora está presentando las gráficas, el profesor y los alumnos pueden fijarse en el comportamiento de las mismas en vez de en calcular y situar puntos". [Scott (1990)].**

Así, pues, este es el punto central de nuestro enfoque investigativo. Aprovechar el ambiente de programación para contribuir con el pensamiento crítico en el aprendizaje de la matemática.

---

[26] Propuesta curricular de enormes proyecciones en el aprendizaje matemático Atualmente en países como Estados Unidos, Francia, Gran Bretaña y otros

Nuestra metodología a seguir consistirá en proponer la presentación de los programas en TRUEBASIC; luego la ilustración del graficador para el análisis de propiedades y comportamiento de las funciones que se evidencian a través del mismo, y mediante el diseño de actividades de aprendizaje que contemplen enumerables interrogantes que surgen a través de la observación de fenómenos cognitivos asociados al descubrimientos de patrones, conceptos y principios o mediante la resolución de situaciones problémicas.

Consideramos que los usos de las computadoras en la enseñanza, podrían ser ventajosos en nuestro sistema, a pesar de los costos, traen beneficios; la influencia de la tecnología en la educación es cada vez más acentuada, y se traduce en gestor de un proceso educativo mas adecuado.

Scott , señala que la representación visual de conceptos matemáticos abstractos se visualiza con los programas para gráficas. La manipulación visual de los mismos con programas de cómputo simbólico y la resolución de problemas podría recibir más atención si una máquina realiza cálculos engorrosos.

Pero el ambiente de programación , fija, de antemano, razones para destacar la importancia del pensamiento matemático como actividad que refuerza propiamente el aprendizaje de alto nivel en la matemática.

3.2 APRENDIZAJE DE CONCEPTOS, Y EL AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN.

Como señalamos anteriormente , existen algunos recursos que pueden ser utilizados para el aprendizaje de conceptos matemáticos de modo más efectivo. Uno de estos recursos ,es, como ya sabemos ,el computador.

Pues bien, pero abordaremos la utilización de este recurso con sumo cuidado ya que diversas opiniones existen en cuanto a su deliberada forma de utilizarlos.

Primero, debemos apuntar el cuestionamiento de que **si la computadora es una herramienta de aprendizaje, en la utilización de tutores y paquetes de softwares educativos o mediante la programación exclusiva en la que participa el alumno de manera mucho más dinámica y activa construyendo directamente el conocimiento.**

Nuestro aporte pretende mostrar, entre otras cosas, la necesidad de un equilibrio en la utilización del computador en el aprendizaje de principios o generalizaciones, debido a que gran parte de las arriba citadas utilizaciones se presentan a los estudiantes de nuestro País sin tomar en cuenta los peligros que pueden ocasionar, principalmente la desorientación y muchas veces el mal uso de paquetes de softwares.

En los Estados Unidos como parte del currículo los C.A.S[27] juegan un papel muy importante en la aprendizaje por descubrimiento de conceptos matemáticos. Los C.A.S(Computer Álgebra Systems) son instrumentos utilizados en el computador (Softwares educativos en matemáticas), asignados mediante clases de laboratorio, en

[27] C AS (computer algebra System) se refiere a la computación simbólica o utlización de paquetes de softwares apropiados para el aprendizaje instrucional o tutorial

los cuales los estudiantes elaboran numerosas tareas para explorar y descubrir conceptos matemáticos. (Si se utiliza apropiadamente)

Nuestro enfoque pretende mostrar que, el ambiente de programación puede dotar al estudiante del pensamiento crítico necesario para enfrentar el descubrimiento en matemática.

Ed Dubinsky señala en su artículo que "

> **" Aunque los C.A.S son importantes y útiles pienso que hay alternativas, igualmente poderosas en las maneras de explotar la tecnología de computadoras, más bien preferiría un balance de lo que hoy existe. Pienso, definitivamente que programar, opuesto a utilizar paquetes o sistemas debería jugar un papel preponderante en lo que los estudiantes hacen de modo que aprendan matemática". [Dubinsky (1994)].**

El mismo autor y otros , aseguran que los C.A.S y los laboraratorios matemática son el ambiente para hacer el énfasis en el entendimiento conceptual, no mecánico, desarrollar habilidades significativas en la solución de problemas, explorar patrones , en general enfocar la matemática como una materia exploratotria,viva y no sólo como una descripción del trabajo pasado.

3.2.1 SIGNIFICADO DE AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN Y DE MICROMUNDO.

Anteriormente hemos mencionado la importancia del ambiente de programación y su implementación así como la utilización de laboratorios en el aula como secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos. Es necesario describir, por tanto, lo que entendemos por ambiente de programación y su implementación a través de los laboratorios, para comprender mejor las bases que sustentan nuestro aporte en esta investigación.

Iniciaremos con el establecimiento de ciertos principios que debe contener un ambiente de programación que como su nombre lo indica se refiere a la utilización de la programación estructurada como elemento en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos y no como el aprendizaje exclusivo de la misma como tal. Así pues es esencial que este tipo de aprendizaje deberá estar basado en el conocimiento de la lógica de programación. Sabemos que el aprendizaje de la programación mejora las capacidades cognoscitivas, ya que el pensamiento lógico y la solución sistemática de problemas son elementos esenciales en un aprendizaje a niveles altos. En este sentido, no es razonable pensar en una separación de las matemáticas y las computadoras, como en efecto hoy se percibe. La programación utiliza tanto como la matemática principios generales y permisibles de la lógica compatible con el razonamiento y necesario para el conocimiento matemático.

3.2.2 ACERCA DEL MICROMUNDO A MODELAR

En nuestro trabajo es de vital importancia describir el micromundo donde se circunscribe el ambiente de programación , anteriormente , y a grandes rasgos, ya descrito. Esta descripción nos permitirá parametrizar los fines u objetivos que se desean lograr.

Para ello consideremos la descripción hecha por Hoyle and Noss acerca de las componentes esenciales de un micromundo.

Es bien conocido que existen diversas ideas o definiciones de lo que es un micromundo. El término describe comúnmente el ambiente en el cual interesan los aspectos que suceden en el mismo y existen diversas ideas a ser aprendidas y depende de la forma en que el estudiante interactúa con el lenguaje (TRUEBASIC) y que se ve influenciado por la situación didáctica en la que la interacción toma lugar.

Veamos a continuación cuales son las componentes fundamentales de un micromundo.

A. El Componente Técnico.

El componente técnico está compuesto sobre todo por el lenguaje de programación, en nuestro caso, TRUEBASIC. Esto es, el lenguaje que provee de las herramientas para el cuerpo conceptual modelado en el micromundo. Lo define y restringe el alcance de ideas que pueden ser convenientemente modelada y permiten por su estructura la exploración y uso flexible de conceptos matemáticos accesibles, vía el micromundo.

El componente técnico ofrece un editor, es decir, una ventana donde se pueden escribir programas nuevos que incluyen uno o más conceptos matemáticos a tratarse. La ventaja es que los proyectos de los alumnos a desarrollar garantizan el logro de un objetivo particularmente planteado.

El empleo de los comandos permite, por su analogía semántica con la matemática investigar aspectos de los conceptos por sí mismos, los estudiantes pueden observar la construcción del programa, descubrir los efectos de las partes que lo constituyen e ir variando o remodelando su construcción tanto como se desee, para afianzar o profundizar el conocimiento matemático.

Ejemplo . Consideremos la función:

$$F(x)=\begin{cases} sin(x),.si,..-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq \pi \\ x-\pi,....si,..\pi\leq x\leq 6 \end{cases}$$

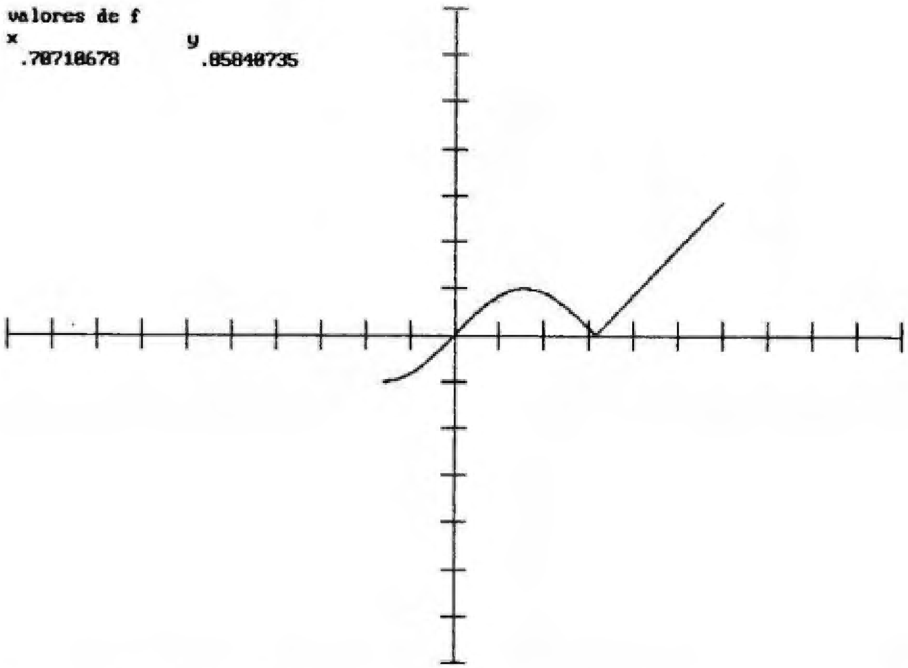
El programa que representa esta función es el siguiente:

PROGRAM_FUNCION_A TROZOS_

```
DEF F(X)
IF  X<= PI AND X >=-PI/2 THEN
LET  F = SIN(X)
END IF
IF X >= PI AND X <= 6 THEN
```

```
LET F = X - PI
END IF
END DEF
FOR X = -PI/2 TO 6 STEP 0.02
PLOT X, F(X)
NEXT X
PRINT "VALORES DE F"_ PRINT "X","Y"
PRINT F(PI/4), F(4)
END
```

La gráfica de la función al correr el programa:



Este programa permite explorar la representación simbólica de una función definida a trozos. La exploración del concepto de función a trozos mediante el programa le permite hacer modificaciones para otras funciones i,e (algebráicas, logarítmica, exponenciales, etc.)

Puede , además, generalizar a través de este otros casos de funciones el concepto de funciones definidas a trozos.

Analicemos otro componente del micromundo.

Su función es estructurar la investigación y exploración de los conceptos incluidos en el componente técnico, enfocar la reflexión sobre aspectos particulares que sugieren órdenes de operaciones productivas que indican la utilidad de los puntos de partida y proveen relación con otras actividades (Hoyles 1985). El aspecto primordial de esta componente es el maestro(que puede ser más joven que el alumno) , libro posters, etc. De gran importancia es la importancia es la forma en que el componente pedagógico interactúa con el alumno. Estas interacciones deben tomar en cuenta las perspectivas del alumno sobre la situación del aprendizaje y la disposición a negociar con el mismo de forma significativa. Esto significa que los proyectos entregados por los estudiantes deben discutirse ante el razonamiento de conceptos previamente vistos en clases, esto es, deben retroalimentarse.

Otro aspecto fundamental es la forma como el maestro observa la actividad de las matemáticas dentro de la programación. Así el maestro debe enfocar su atención sobre los puntos de actividad que son críticos haciendo explícitos para los alumnos la naturaleza de las herramientas que ellos utilizan en la programación.

El maestro tiene también la responsabilidad sobre la autoregulación del alumno de sus propios procesos metacognitivos, esto es, alentar hacia actividades de predicción, reflexión y evaluación. Es conocido que un alumno desarrolla conceptos matemáticos de una variedad de actividades tanto desde dentro como fuera de la escuela. Por lo tanto, uno de los papeles del componente pedagógico es facilitar la integración de percepciones posiblemente contradictorias dentro de la mente del alumno y llevando desde la ejecución de operaciones en contextos específicos, "casos especiales" hacia generalizaciones y abtracciones.

Es así como el ambiente donde se desarrolla el proceso de aprendizaje es crucial. El ambiente de un laboratorio de computadora como parte del aula donde se desarrollan las secuencias didácticas rompe la separación de la actividad de programación de la otra , "matemática", y permite al maestro la oportunidad de proveer ventajas entre los dos modos de trabajo.

Puede ser muy útil al integrarlo, por ejemplo a un curso de cálculo en períodos de laboratorio. En efecto los dos primeros laboratorios pueden ser para aprender la mecánica de TRUEBASIC. Se le proporcionan al estudiante programas ya hechos para experimentar y modificar. Esto le permite al estudiante discutir el algoritmo matemático en detalle y desarrollar en forma independiente conocimientos de programación de modo gradual. Se podrá continuar con tabulación de funciones para el estudio de límites. Esto le permitirá desarrollar una idea intuitiva de la esencia del proceso de límite. Luego se podrá estudiar la aproximación de raíces de una ecuación(aplicando el teorema del valor medio para funciones contínuas). Luego se continúa con laboratorio sobre diferenciación numérica de funciones .

C. El componente contextual.

Se refiere al ambiente social donde la actividad de programación toma lugar. Ha sido demostrado dentro de las matemáticas que la ejecución de un alumno sobre un problema puede estar dramáticamente afectado por el contexto en el cual el problema es encajado. Las estrategias adoptadas dentro del componente técnico de un micromundo dependerán del significado inmerso dentro del contexto situacional y las emociones evidenciadas por la situación.

La forma en que el individuo conceptualiza está determinada por toda una historia de influencias situacionales, culturales, sociales y afectivas y por lo tanto modelada por la interacción social.(Noss and Hoyle 1985). Existen numerosos evidencias de que la estrecha relación entre la percepción de un problema y la forma en que es representado está regulado por la influencia social y cultural; también es crucial el punto de vista del alumno y su papel dentro del contexto existente en la actividad matemática que se desarrolla en el aula. De hecho estudios sobre el aprendizaje cooperativo (zonas de desarrollo próximas), Vigotsky y Balacheff(La interacción social) demuestran el papel de este componente dentro del micromundo.

Y por último el componente hacia donde se dirige el aprendizaje:

D. El componente alumno.

En este componente se circunscribe tanto los aspectos cognitivos como afectivos. EL componente alumno es así caracterizado por los entendimientos existentes, basados en la experiencia pasada del alumno, para obtener sus respuestas relativas a abstracciones consistentes y racionales[28], también con concepciones parciales que los alumnos traen a su situación de aprendizaje y en el cual ellos tratan de trabajar dentro del componente técnico.

A través del diagrama siguiente se muestra la construcción en la cual el componente técnico permanece como centro del círculo complejo de influencias que interactúan y cada una de las cuales contribuyen hacia la potencial idea de micromundo

[28] vease capitulo I de este trabajo donde se mencionan las contribuciones sobre construcciones del conocimiento a partir de la acción por Félix Bustos

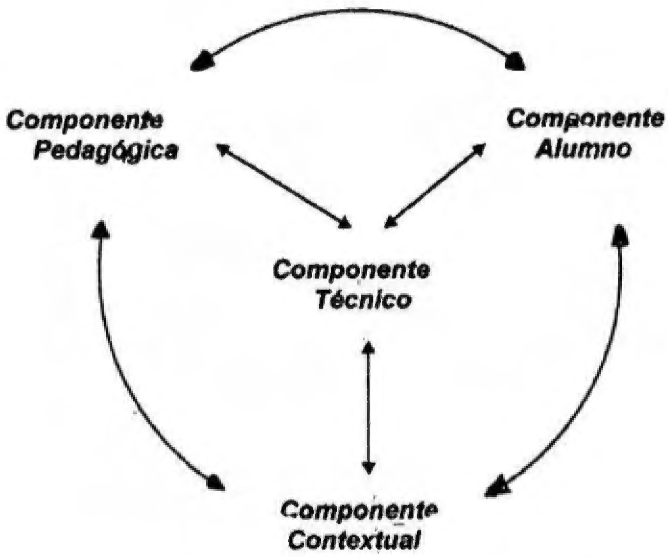


Figura 4
Las componentes del Micromundo

Es de esta forma como se concibe el micromundo.

3.2.3 HIPÓTESIS QUE SUSTENTAN EL AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Es así como nos proponemos , en este capítulo, mostrar la necesidad de incorporar la nueva tecnología de la computadora, en ambiente de programación al proceso enseñanza aprendizaje de la matemática.

Al respecto Dubinsky apunta:

> **"Utilizando una aplicación de software que conduce a algunas operaciones matemáticas es otra forma de mostrar la matemática al usuario. Escribiendo en código de computador que implemente un proceso matemático o represente un objeto matemático es una construcción por el programador" [Dubinsky (1994)]**

Mas aún señala el autor:

> **" Mi experiencia me ha convencido que algunas veces que Ud. Construye algo en la computadora, entonces lo construye en su mente. Así de acuerdo a mi teoría aprender matemática consiste en la construcción de ciertos procesos y objetos, lo que implica que el uso de la computadora debería entapizar la programación y las tareas de programación para que en los estudiantes se designen para influenciarlos a hacer construcciones que contribuirán a la formación de su conocimiento matemático" [Dubinsky (1994)]**

El enfoque de la computadora a través de los años en la enseñanza, ha sido objeto de varias controversias. Algunos opinan que deber ser enseñada la programación, ya que fue éste, el primer uso que se le dio. Otros formulan la idea de la implementación de los C.A.S, (computación simbólica) y el resto simplemente no la usa. Sería objeto de investigación esta ultima instancia.

Lo que bien es cierto que con el surgimiento de investigaciones profundas en el campo de la inteligencia artificial, la programación estructurada(actualmente está poniéndose en práctica) y el surgimiento de los computadores personales y los softwares educativos, crece el interés a investigar cada vez más sobre los usos de la computadora en la enseñanza - aprendizaje de la matemática, y para muchos matemáticos profesionales profesionales una herramienta útil en sus investigaciones.

Así por ejemplo Buttler apunta que .

> **"Las computadoras y el software ofrecen al profesor un método útil de considerar los variados estilos de aprendizaje y de exponer la materia individualmente en la etapa del aprendizaje de cada alumno" [Buttler (1987) en Scott (1990)].**

3.3 GENERALIDADES ACERCA DEL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN TRUEBASIC

A inicio de la década del 80, muchos colegios y universidades utilizaron en proyectos educacionales el lenguaje que venía con la mayoría de las computadoras:el IBM BASIC o GW-Basic. Las metas propuestas no fueron alcanzadas a causa de la falta de estructura de estas versiones primitivas del BASIC, los algoritmos de fondo estaban velados o escondidos y se pasaba más tiempo corrigiendo el código que comprendiendo lo que hacía realmente el algoritmo.

Ante esta situación los inventores del BASIC original, John Kemeny and T Kurtz, de la Universidad de Darmouth, prepararon el TRUEBASIC para microcomputadora. Esta versión de BASIC es moderna, completamente estructurada, retiene la facilidad del uso de BASIC y la sintaxis parecida al inglés común que permite percibir la naturaleza del algoritmo computacional. Esta versión salió al mercado en 1985 e inmediatamente fue adoptado por ciertos colegios y universidades de los Estados Unidos.

En conclusión ,TRUEBASIC, es un poderoso lenguaje de programación estructurado de los autores originales de Basic- Kemeny and T Kurtz, de la Universidad de Darmouth. Es una respuesta al clamor general de que el Basic original no era un lenguaje estructurado, y se requería modificarlo.[29]

La versión moderna estudiantil puede ser adquirida por sólo $20.00 y la versión completa profesional por unos $100.00. La versión estudiantil difiere de la profesional en dos aspectos solamente: sólo se puede salvar un máximo de 150 líneas de un programa y los utilitarios para crear programas independientes no vienen incluídos.

El lenguaje, como anteriormente lo hemos expuesto, tiene una una simplicidad poderosa ideal para estudiantes que se inician; y también contiene una amplia gama de estructuras modernas de programas sofisticados. Ambos tienen acceso a herramientas tales como sonido, gráficas, librerias externas, módulos y un álgebra matricial completa.

La sintaxis consiste de expresiones sencillas de control estandarizados junto con expresiones que corresponden muy de cerca al significado ingles y notación de los conceptos fundamentales de la matemática. El estudiante no experimentará para aprender el lenguaje. Su esfuerzo mayor puede dedicarlo a comprender las ideas que están a la base de varias construcciones en matemática con el fin de poder usarlo al escribir un programa en TRUEBASIC. Contiene las expresiones que son comunes a los lenguajes de programación. Los objetos de TRUEBASIC son los enteros, números o puntos flotantes, en valores booleanos, funciones o procedimientos.

---

[29] En efecto alrededor de 1985 surge una polémica de BASIC en contra de LOGO Bork(1985) ha dicho enfaticamente **"No enseñe ni aprenda BASIC"** la estructuracion dada por Kemeny and Kurtz fue en respuesta , entre otras cosas, a esta inquietud de Bork

Permite crear gráficas de funciones al instante y fácilmente con colores. Las cuales pueden ser multilíneas o de una sola línea.

Para mayores detalles veamos la siguiente descripción del Lenguaje TRUEBASIC

3.3.1 DESCRIPCIÓN DEL LENGUAJE TRUEBASIC

Para describir el lenguaje de Programación TRUEBASIC indicaremos las componentes que a continuación se detallan[30].

A. ESTRUCTURA DE UN PROGRAMA.

Es en general cuando nos referimos a la estructura como está conformado un programa, es decir cuales son las partes que lo integran. A saber:

A.1 Definición del programa principal

```
! Esto es un comentario
! Aquí inicia la lógica del programa principal
CALL  nombre (parámetros)
! La anterior es la invocación a un submódulo
end
```

A.2 Las declaraciones de funciones creadas por el usuario.

```
Def  nombre (parámetros)  , i.e Def seno(x)
 El cuerpo de la lógica de la función
```

---

[30] Para mas referencia veasse Guía de Referencia de laboratorio para asignatura de informática básica Ver bibliografía

end def

A.3 Las declaración de librerias

LIBRARY " nombre de la librería"

A.4 Declaraciones de funciones externas: DECLARE FUNCTION f

B. PRINCIPALES LIBRERIAS.

Una librería es un conjunto de programas que evita la reprogramación. La librería más utilizada en nuestro caso es GRAPHLIB.

LIBRARY " unidad : truebasi tblibs graphlib

C. OPERADORES

Un operador permite unir variables, constantes y elementos de arreglos para formar expresiones que reciben el nombre de acuerdo al tipo de operador (aritmético , lógico y de relación)

C.1 Operador aritmético

operador	**significado**
+	adición
-	sustracción
*	multiplicación
/	división
^	exponenciación

C.2 Operadores lógicos

Operador	significado
and	y
or	o
not	no

C.3 Operadores relacionados o de orden

Operador	significado
<	menor que
< =	menor o igual que
>	mayor que
> =	mayor o igual que
=	igual
< >	distinto de

D. INSTRUCCIONES FUNDAMENTALES

Son aquellas que permiten desarrollar la lógica de cualquier tipo de programa por muy complicada que esta sea. Los podemos clasificar como instrucciones de entradas/salidas, atribución y control de flujo.

D.1 Entrada INPUT variable.

D.2 PRINT "Esto es un mensaje

PRINT variable 1; variable 2

D.3 Atribución . Por medio de esta instrucción podemos asignar un valor a una variable. Variable = expresión, o , constante, o, variable.

D.4 Transferencia Condicional.

IF condición THEN

Proceso 1

ELSE

Proceso 2

END IF

D.5 Ciclos de control de flujos

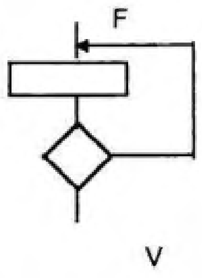
Son los que permiten la ejecución de un proceso repetidas veces hasta que se cumpla una condición lógica, puede o no conocerse el número de repeticiones del proceso. Veamos las principales que se utilizan:

D.5.1 Ciclo FOR.. NEXT

FOR variable de control = valor inicial TO valor final STEP incremento

Proceso

NEXT variable de control

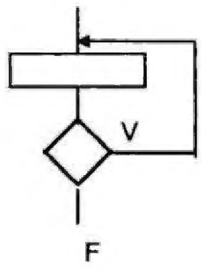


D.5.2 Ciclo DO ... UNTIL

DO

proceso

LOOP UNTIL condición Repite el proceso hasta que la condición se haga cierta.



D.5.3 Ciclo DO .. WHILE

DO

proceso

LOOP WHILE condición !Repite el proceso mientras la condición sea cierta.

A continuación presentamos la descripción detallada de nuestra propuesta metodológica a considerar . A renglon seguido los laboratorios, hojas de trabajo, y un apéndice para que los interesados en la misma puedan tener más ejemplos para elaborar sus laboratorios.

3.4 ESQUEMA GENERAL DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA BASADA EN EL AMBIENTE DE PROGRAMACIÓN.

1. PRINCIPIOS Y OBJETIVOS DE LA PROPUESTA.

Los principios de la propuesta que presentamos a continuación son tales que:

- El laboratorio debe ser un lugar en donde el estudiante se involucre en actividades de descubrimiento relativo al fenómeno matemático.
- Las actividades de laboratorio deben estimular al estudiante a realizar algunas construcciones mentales específicas de objetos y procesos.
- La atmósfera del laboratorio y la actividad en sí debe alentar al trabajo grupal.

- Los estudiantes deben ver en el laboratorio un lugar confortable para estar y trabajar en compañía de sus colegas y con el apoyo de los docentes y asistentes.
- Todo esfuerzo debe ser hecho para minimizar distracciones y frustraciones que pueda experimentar al tratar de hacer funcionar el Hardware y software.

Esperemos con estos principios que se pueda lograr entre otras cosas:

- Que el estudiante pueda familiarizarse con el lenguaje de programación TRUEBASIC para realizar proyectos de laboratorios que tiendan a mejorar su pensamiento crítico , exploración , construcción y modificación de resultados que se obtienen de los conceptos.
- Que el estudiante pueda verificar a través de la computadora, patrones y modelos que lo ayuden a construir o explorar un concepto matemático, visto anteriormente en clases magistrales.
- Que el estudiante logre a través de este tipo de metodología, aprendizajes a altos niveles matemáticos.
- Que se pueda poner en marcha la implementación a través del currículo, para observar los logros que se esperan obtener.

2. CONTENIDO.

Presentaremos algunos laboratorios con sus actividades donde se desarrollan temas del cálculo diferencial, tales como : Funciones, (escritura de programas, graficación y estudio) lineales, cuadráticas, estudio de aproximaciones de raíces de polinominos (

cálculo, estudio, escritura de programas, gratificación,) definida por los métodos de bisección y método de Newton, y la derivada aproximada de una función.

Los laboratorios que se presentan en nuestro trabajo, les llamaremos hojas de trabajos, en las cuales están descritos esenciales mínimos que el estudiante debe poseer para elaborar los proyectos, los programas (con ejemplos de modificaciones y comentarios), ayudas de graficadores y proyectos modelos para ser entregados después de las sesiones de los mismos.

3. **METODOLOGÍA.**

Diseño de la Instrucción.

Las tareas de laboratorio se entrega cada semana, las cuales deben preparar al estudiante para las lecciones. Este laboratorio se ofrece dos veces por semana, con la presencia de un asistente. Se le debe alentar al estudiante a completar el proyecto de laboratorio con anterioridad a la discusión del concepto en clase. La evaluación del proyecto no debe ser en base a respuestas correctas sino a los intentos significativos de razonar acerca del concepto

La forma básica de usar el lenguaje de programación es que el estudiante haga construcciones en TRUEBASIC que representen nociones matemáticas, utilizarlo en casos simples, luego apoyarse en las gráficas de TRUEBASIC o un graficador especial(en nuestro caso utilizaremos el M.P.P de la Academia Naval de los Estados Unidos), para conceptos y casos de principios de alta complejidad.

En cada Hoja de trabajo se describe la metodología, así como los objetivos que se persigue alcanzar con cada laboratorio en los estudiantes.

4 . ACTIVIDADES DE LABORATORIO.

Características.

El uso potencial de la computadora como tecnología cògnitiva esta en vías de desarrollo. Sugerimos que las actividades seleccionadas tendrán las siguientes características.

1. Aquellas que alientan la exploración de los conceptos, por ejemplo del Cálculo.
2. Aquellas que prueban el razonamiento inductivo y el reconocimiento de patrones.(Ver capítulo I)
3. Aquellas que investigan las interrelaciones entre varias formas de representación: algebráica, gráfica, numérico, etc.
4. Aquellas que involucren problemas que no se pueden resolver sin el recurso de la tecnología de la computadora.

5. POBLACIÓN OBJETO Y REQUISITOS BÁSICOS PARA ESTA PROPUESTA.

En este trabajo consideramos nuestra población objeto en primera instancia a los profesores decursos de matemáticas, a los estudiantes de matemática de primer ingreso y aquellos que lleven cursos de calculo afines en carrera como ingeniería, física, química , etc. Los requisitos básicos para esta población es un curso de pre-cálculo hacer estudiado anteriormente los temas arriba citados en el contenido.

3.5 MODULOS DE LABORATORIOS

LABORATORIO 1

EXPLORACIÓN: FUNCIONES GRÁFICAS Y TABLAS

Interiorización- Funciones

En este laboratorio mostramos como usar el software para ayudar al estudiante a construir el concepto matemático de función en su mente. Las funciones pueden venir de varias formas, por medio de expreśiones algebráicas, aquellas definidas por partes, aquellas creadas por medio de procedimientos y aquellas que son sucesiones. TRUEBASIC permite construir este tipo de funciones y considerarla como procesos de objetos.[31]

Para la interiorización hemos considerado utilizar el lenguaje para construir definidas por partes (por medio de FUNCTION o DEF) y otra vez FUNCTION para construir el proceso de la composición de dos funciones. Para el encapsulamiento implementamos una operación binaria entre dos funciones que produce una función que ayuda al estudiante a construir una concepción del concepto de función como objeto. En resumen, en lo relativo al concepto de función, queremos que el estudiante construya una acción y la interiorice como un proceso mental. La forma en que lograremos esto es pidiéndole que escriba un procedimiento que implemente la función y que realice varias operaciones en el laboratorio de Cálculo. En esta forma el estudiante construye el proceso en la mente al construir la FUNCTION en TRUEBASIC sobre la computadora.

[31] Veáse el diagrama de aprendizaje del modelo de Dubinsky (Capitulo II)

HOJA DE TRABAJO 1

Exploración

El concepto de Función

ACTIVIDADES:

- Que el estudiante explore el concepto de funciones basados en acciones de procesos sobre objetos.
- Que el estudiante modifique el programa para construir el concepto de funciones compuestas.

1) Considérese la función que da la compresión de una substancia en términos de su volumen(las diferentes partes corresponden a los estados de la substancia: sólido, líquido, gaseoso)

$$f(v) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(v-2)^3(v-6)}{54} si,...0 \le v \le 6 \\ \dfrac{v^3}{3x10^3} - 0.04v^2 + 1.73v - 7.7si,..6 \le v \le 90 \\ \dfrac{4v^3}{5\sqrt{v^3 - 8x10^5}} - \dfrac{1}{v-100} si,..90\angle v \end{cases}$$

a) Implemente esta función mediante un procedimiento en TRUBASIC.

El programa es el siguiente:

```
LIBRARY "graphlib"
SET MODE "graphics"
def f(v)
if v < o or v = 100 then
    print "Fuera del dominio"
```

```
exit def
end if
if v < = 6 then
let  f = 1 + ((v - 2)^3 * (v-6)) / 54
  elseif  v < = 90 then
      let f = (v^3 )/ ( 3 * 10^3  )) -  0.048 * (v^2  )  + 1.73 * v  -  7.7
 else
    let  f =  4 * v^ (3/2)/5 * sqr (v^ 3  - 8.0 *  exp5) - 1/ ( v - 100)
   end if
end def
set window  0.90, -20,20
call ticks (2,1)
for v = 0  to 90  step  0.1
     plot   v,  f(v)
 next  v
end
```

b). Calcule f(5), f(85), f(95)

___________ , ____________, _______________

c) Determine una región de la variable independiente en el cual trazar la gráfica para el estado sólido y líquido. Realice la gráfica en TRUEBASIC.

Gráfica:

d) Supongamos que el volumen varía con respecto al tiempo (manteniendo la temperatura constante) de acuerdo a la función

$$g(t) = \begin{cases} 26.7t^2 si,...0 \leq t \leq 50 \\ \frac{4}{3}\pi t^3 si,,,t > 50 \end{cases}$$

d.1) Implementar esta función en TRUEBASIC

El programa es el siguiente:

```
Def g(t)
if t < 0 then
  print " fuera del dominio"
exit def
end if
 if t < = 50  then
     let g = 26.7 * t ^ 2
     else
      let g =  (4/3) * (pi) * t^ 3
  end if
```

LABORATORIO 2

Reforzamiento

EL CONCEPTO DE RAÍZ DE UN POLINOMIO

Este laboratorio tiene como fin ser un vehículo para que el estudiante mejore su comprensión del concepto de raíz de un polinomio.

Se inicia con un dominio amplio y luego se especifican dominios más pequeños de manera que el estudiante pueda localizar aproximadamente los puntos en donde la curva cruza el eje X. Esto lo puede ir haciendo con la facilidad gráfica del TRUEBASIC y la flexibilidad para abrir ventanas e ir viendo la parte numérica y gráfica a la vez.

El estudiante puede además usar graficadores especiales tales como M.P.P de la Academia naval de los Estados unidos que tiene acceso a un ZOOm que le permite ir acercándose a la raíz mediante una rutina interna (que probablemente implementa el método de bisección) al colocar la rama de la curva que cruza el eje X en un recuadro pequeño y logra una escala menor.

Al combinar estos métodos gráficos y numéricos el estudiante desarrolla una mejor comprensión del concepto de raíz, y no lo ve como algo que resulta solamente de factorizar el polinomio.

HOJA DE TRABAJO 2

EL CONCEPTO DE RAIZ DE UN POLINOMIO

Actividades:

1. Escriba programas sencillos para generar la tabla para valores entre

   __-4____ y ___4____ (sugerencia: use un step de 0.1). del polinomio

   $P(x) = 10x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 20x - 78$

2. Modifiquelo para hallar una aproximación de dos cifras

3 Modifíquelo para hallar una aproximación de tres cifras.

4. Considere una modificación de su tabla Léala y procure comprender las subrutinas.

5. Copie el programa, córralo y conteste lás preguntas siguientes:

   a) Corra el programa con los valores A= ___ , B= ____

      ¿Entre qué valores se encuentra la raiz ?(observese la gráfica)

   b) Corra nuevamente el programa pero utilizando los valores encontrados en a). Observe la gráfica y diga ¿Entre qué valores se encuentra la raíz?

      Una aproximación de la raíz a dos decimales será ____

   c) Repita el paso anterior y determine una raíz con tres decimales de exactitud, observando la gráfica.

6. Use el graficador M.P.P y genere aproximaciones de raices (como en a, b, y c) e imprima sus resultados.

7. Entre un informe escrito de su investigación.

A continuación un modelo que describe el proceso que debe esperarse en el desarrollo de las actividades presentadas en la hoja de trabajo anteriormente expuesta.

Comentario

ESTIMACIÓN DE RAICES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Objetivos.

1. Estimar raíces de funciones polinomiales.

2. Leer o generar salidas por computadoras para graficar o determinar propiedades de polinomios.

APROXIMACIÓN DE RAICES DE POLINOMIOS:

Consideremos la función polinomial $P(x) = 10x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 20x - 78$ en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$

El programa que mostramos a continuación muestra el procedimiento para estimar las aproximaciones del polinomio y nos proporciona una tabla de valores de P(x) de x=A a x=B con incremento C. Además, nos proporciona la gráfica de la función.

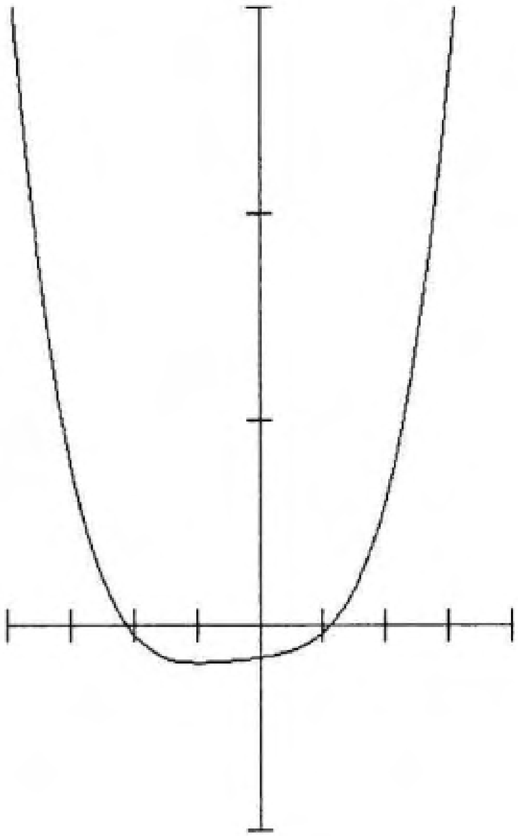
Nota.

En este caso el programa que determina la gráfica es sencillo y el estudiante lo puede hacer, cuando no lo pueda hacer utilizaremos un graficador para ilustrar el comportamiento de la función. Por otro lado, algunos graficadores están hechos en lenguajes conocidos como pascal, Lenguaje C, etc.; los estudiantes que hayan tomado un curso de programación avanzada, pueden elaborar este tipo de programas (PLOTTERS).

```
DECLARE FUNCTION F

INPUT PROMPT  "EXTREMOS A Y B DEL DOMINIO  ".A,B

INPUT PROMPT " EL INCREMENTO ES  ":C

CALL GRAFICA(A,B,C)

PRINT "F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78"

PRINT

PRINT "X", "F(X)"

PRINT

!GENERACION DE LA TABLA

FOR X=A TO B STEP C

PRINT X,F(X)

NEXT X

END

!definicion de la funcion externa

function f(x)

   let f= 10*x^4+15*x^3+14*x^2+20*x-78

end function

sub grafica(a,b,c)

  declare function f

  open #1: screen  5,1,0,1

  set window a,b,-500,1500

  call ticks (c,500)

  set color "black/white"

     for x = -4 to 4 step 0.1

  plot x,f(x),

  next x

 end sub.
```

Primeramente, como el dominio de la función polinomial, está restringido de -4 a 4. Evaluamos A=-4 y B = 4 y C=0.1 y obtenemos, a través del programa anterior la siguiente tabla y su gráfica, en forma simultánea.

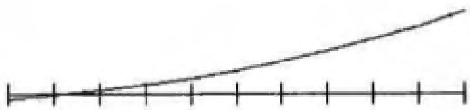
```
F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78

X              F(X)

-4              1666
-3              393
-2             -22
-1             -89
 0             -78
 1             -19
 2              298
 3              1323
 4              3746
```



Observamos en la tabla anterior que hay un cambio de signo entre 1 y 2. Corremos nuevamente el programa para estos valores con un incremento de C = 0.1 y vemos el resultado en la página siguiente en forma simultánea.

F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78

X	F(X)
1	-19
1.1	-4.454
1.2	12.816
1.3	33.176
1.4	57.816
1.5	84.75
1.6	116.816
1.7	153.676
1.8	195.816
1.9	243.746
2	298



Observamos que la primera aproximación a la raíz del polinomio se encuentra entre 1.10 y 1.20. Otra vez corremos el programa con A= 1.10 , B=1.20 y C = 0.01

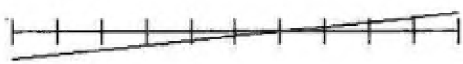
F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78

X	F(X)
1.1	-4.454
1.11	-2.8554389
1.12	-1.2292864
1.13	.4247911
1.14	2.1071616
1.15	3.8181875
1.16	5.5582336
1.17	7.3276671
1.18	9.1268576
1.19	10.956177
1.2	12.816

y vemos claramente que en la tabla se tiene una raíz entre 1.12 y 1.13. ¿Está más cerca de 1.13? Parece que así es. Para tener mayor exactitud de la conjetura entramos para A=1.12, B = 1.13 y C = 0.01 :

F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-70

X	F(X)
1.12	-1.2292864
1.121	-1.0651416
1.122	-.90071703
1.123	-.73601245
1.124	-.57102747
1.125	-.40576172
1.126	-.24021485
1.127	-7.4386489e-2
1.128	9.1723715e-2
1.129	.25811612
1.13	.4247911



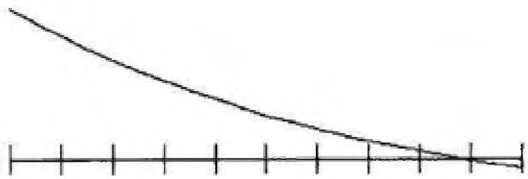
Esto muestra que hay una raíz entre 1.127 y 1.128. Luego a la centena más cercana x=1.13 es un raíz del polinomio.

Esta técnica se puede utilizar con cualquier función polinomial y se puede mostrar que puede ser usada con cualquier función que es contínua en el intervalo A≤ x ≤ B. Observese que a medida que nos acercamos a la raíz del polinomio la gráfica de la función se asemeja cada vez más a una recta. Esto se debe a la característica de diferenciabilidad de la función.

Con la ayuda del primer programa podemos observar tanto la tabla de valores como la gráfica de la función P(x). En el mismo también podemos observar que la gráfica de la función corta al eje entre -3 y -2. Además, en la tabla se muestra el cambio de signo entre estos dos valores.

Realizando la misma operación para con la primera raíz corremos el programa entre estos valores:

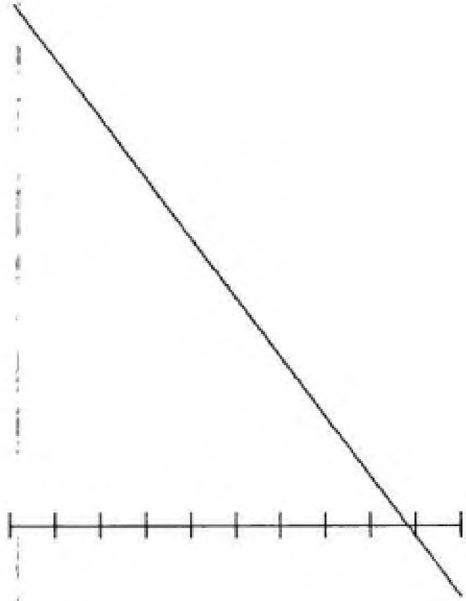
```
F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78

X                F(X)

-3                393
-2.9              323.186
-2.8              261.136
-2.7              206.256
-2.6              157.976
-2.5              115.75
-2.4              79.056
-2.3              47.396
-2.2              20.296
-2.1             -2.694
-2               -22
```



El estudiante debe observar que hay un cambio de signo entre -2.2 y -2.1 . Luego con incremento de C=0.001 entramos los valores: (página siguiente)

F(X)=10*X^4+15*X^3+14*X^2+20*X-78

X	F(X)
-2.2	20.296
-2.19	17.819267
-2.18	15.383178
-2.17	12.987297
-2.16	10.631194
-2.15	8.3144375
-2.14	6.0366016
-2.13	3.7972611
-2.12	1.5959936
-2.11	-.5676209
-2.1	-2.694



Esto muestra que existe otra raíz de F entre -2.12 y -2.11. Luego a la centena más cercana -2.11 es la otra ráiz de F.

USANDO EL GRAFICADOR M.P.P (Mathematic Plotting Program)

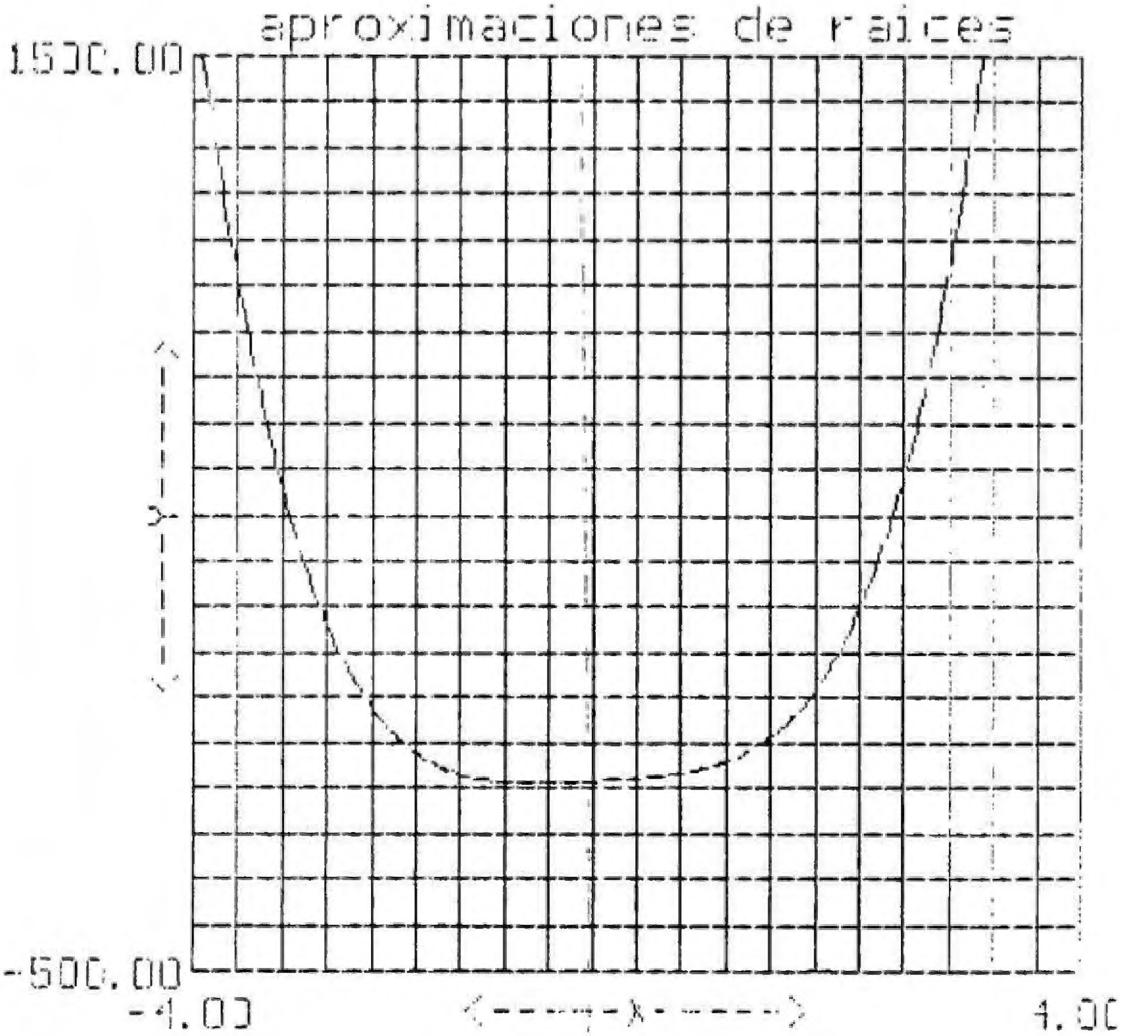
Con la ayuda de un graficador podemos fácilmente observar el comportamiento de la función polinomial. Consideremos, nuevamente la función: $P(x) = 10x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 20x - 78$

Utilizaremos el Graficador creado en la Academia Naval de los Estados Unidos[32] que se adquiere practicamente gratis al escribir al autor.

[32] Mathematics plotting programs version 3 80 creado por Howard Lewis Penn, Jim Buchanan y Frank Pitelli

De él se puede observar que tiene una raíz entre -3 y -2 y otra raíz entre 1 y 2.

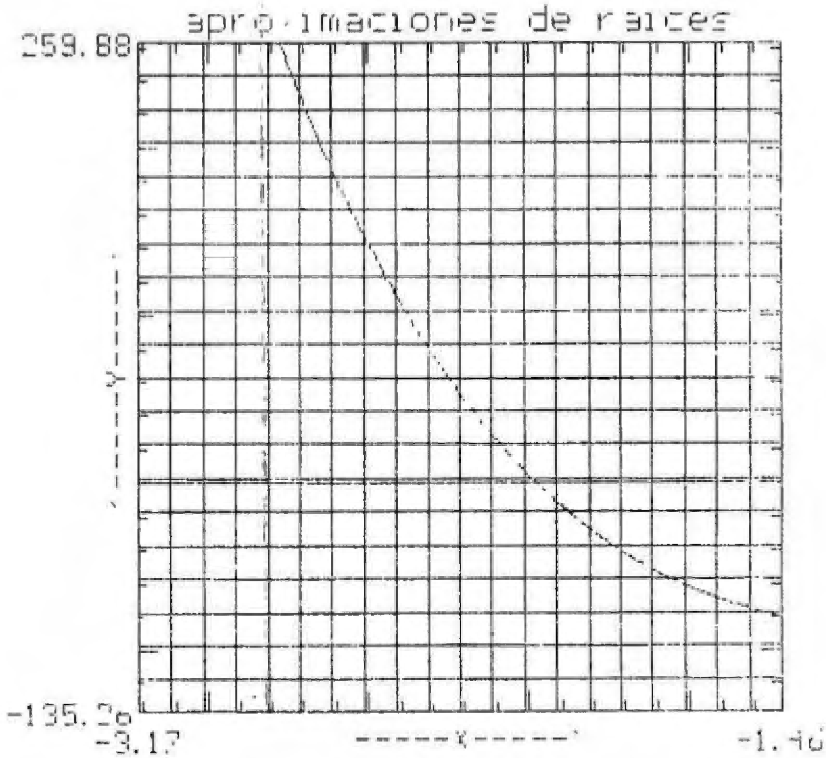
Gráfica 1



Usando la función del graficador podemos aproximar la raíz a la centena más cercana a la intersección con el eje X entre -3.17 y -1.46.

Gráfica 2:

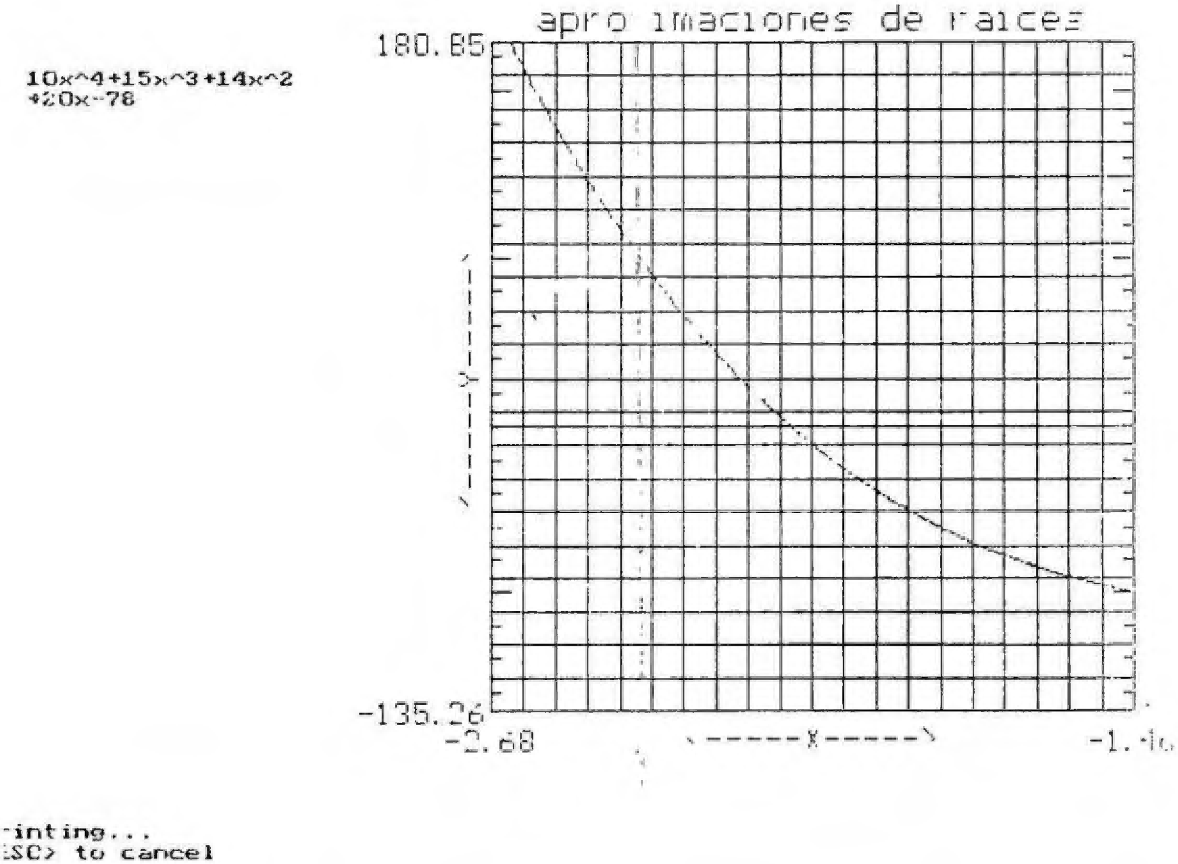
1. 10x^4+15x^3+14x^2
+20x-78



Printing...
<ESC> to cancel

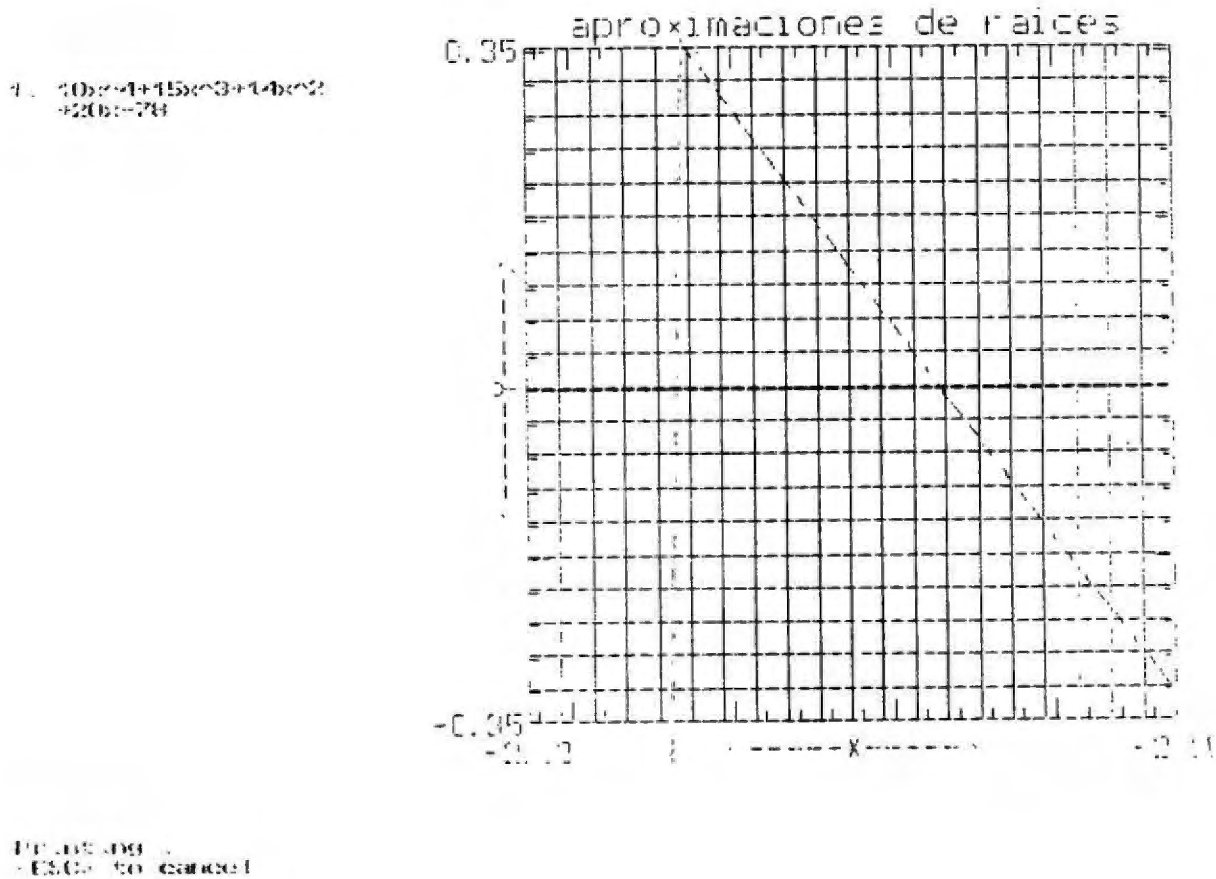
Utilizando el Zoom o reescala del graficador se examina la gráfica de un dominio más pequeño: entre -2.68 y -1.46

Gráfica 3:



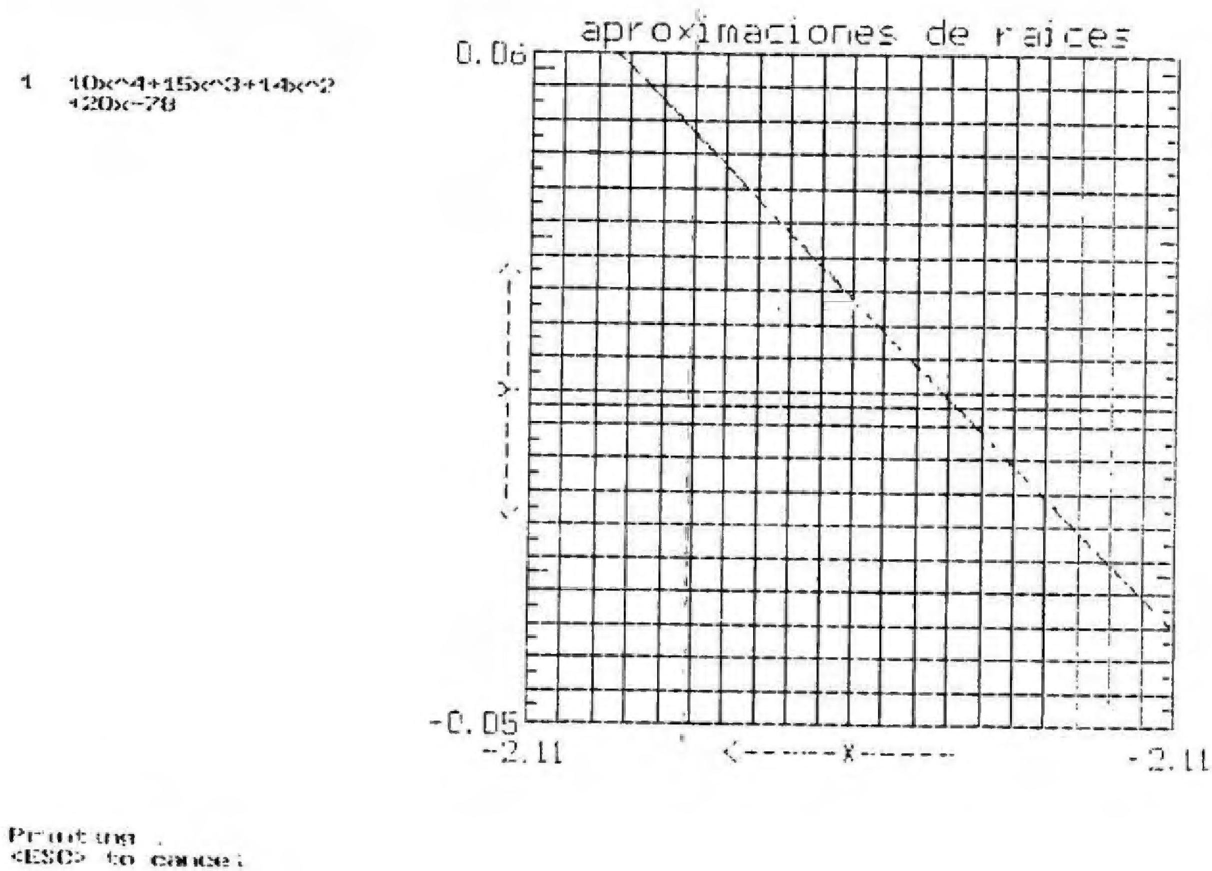
Parece que hay una raíz entre -2.12 y -2.11 (en el graficador podemos ver que la intersección es más cerca de -2.11 que de -2.12).

Gráfica 4:



Aplicamos el "Zoom in" nuevamente entre estos dos valores. Si es posible podemos ajustar la ventana de y . tenemos ahora:

Gráfica 5



De esta gráfica se puede ver que la intersección con el eje X ocurre cuando X esta entre -2.11 y -2.12

Luego la centena más cercana -2.11 es una raiz de P(x)

***Actividad Adicional:**

1-Que el estudiante utilice un programa en TRUEBASIC para hacer la verificación:

P(-2.11) = 0.57

P(-2.12) = 1.60

P(-2.11) está cerca de cero.

LABORATORIO 3

DERIVADA APROXIMADA DE UNA FUNCIÓN

En este laboratorio enfocaremos nuestra atención al reforzamiento del concepto de función y de derivada aproximada de una función.

Se requiere como prerequisito el concepto formal de derivada aproximada de una función que se debe tratar en clase.

Ejemplo:

La derivada aproximada de una función f en un punto a, es la función f' tal que:

$$f'(a) = \frac{f(a+0.001) - f(a)}{0.001}$$

Primeramente se le presentará una función definida a trozos, (ya se vio un ejemplo en el laboratorio 1) . Se le presentará el programa en TRUEBASIC para que conteste ciertas preguntas que resultan al ejecutar dicho programa. Se le enfatizará sobre las características de continuidad en intervalos que se desprende de la nueva función que se encapsula, a través de este proceso. Se le pedirá que utilize el graficador M.P.P para que verifique sus conclusiones y por último que entre el informe o resultado.

HOJA DE TRABAJO 3

LA DERIVADA APROXIMADA DE UNA FUNCIÓN

Actividades:

1. Que el estudiante construya la derivada aproximada de la siguiente función evaluada en el punto a:

$$1.1)\ldots f(x)=\sqrt{x},\ldots\ldots\ldots en, el, punto, a=2$$

$$1.2)\ldots f(x)=\begin{cases} x^3+3,\ldots.si,..x<-2 \\ -3x^2+7,\ldots..si,\ldots -2\le x\le 0,\ldots\ldots\ldots\ldots en, el, punto, a=-2 \\ -1,\ldots\ldots\ldots\ldots si,..x>0 \end{cases}$$

El programa que implementa la función 1.2 en TRUEBASIC es:

```
set window -5,5,-20,20
function F(x)
if x<= -2 then
let F = x^3 + 3
else
if x<=0  then
let F = 3*(x^2)+7
else
if x>0 then
let F =-1
end if
end if
end if
end function
print F(5)
end
```

a) ¿ Qué observa en la gráfica de esta función?.

____

____

b) ¿Es contínua donde está definida?

____

C) ¿En qué intervalo no lo es si se define en otro(s) puntos?________________

____

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Después de realizado este trabajo nos sentimos en el deber de elaborar las siguientes conclusiones:

1. El conocimiento de las cuestiones epistemológicas de las matemáticas es, de hecho, fundamental en la formación integral del conocimiento y pensamiento matemático.
2. El dual Técnología- Educación reclama en su filosofía propia, la integración de recursos como el computador en el aprendizaje.
3. El ambiente de programación provee de esenciales hacia los esquemas o estructuras mentales típicamente útiles para el manejo de cualquier información, no sólo matemática, sino científica; y para el aprendizaje a altos niveles, ya que el estudiante aprende básicamente a través de patrones heurísticos(Problem-solving).

RECOMENDACIONES:

1. Recomendar políticas de divulgación a la misma para actualizar a estudiantes y docentes, mediante seminarios taller, cursos de actualización en el manejo de esta filosofía de aprendizaje; su implementación a través de TRUEBASIC u otros lenguajes.

2. Implementar la propuesta a nivel experimental, en el aula, no sólo a niveles de pre-calculo y universitario, sino también elemental, ya sea utilizando por ejemplo otro lenguaje para ese nivel. (LOGO o PASCAL,etc).

3. Involucrar docentes en el área de matemática, psicología y educación para formar grupos de investigación que lleven al aula estas y otras propuestas más, a fin de obtener resultados productivos y de hecho exigir su implementación a nuestro sistema escolar.

BIBLIOGRAFÍA

(1) ARDILA, Analida (1993) Apuntes del curso Microcompuradora en la enseñanza de la Matemática. Programa de Maestría Centroamericano en Matemática. Universidad de Panamá.

(2) BALACHEFF, Nicolas (1991) Radical Constructivism in Mathematics Education.Kluwer Plublisher. Mathematcis and Education Library, Vol 7 , London, England.

(3) BALACHEF, Nicolas (1987) Proccesus de Preuve et Situation de Validation.Reidel Plubishing company, Educational Studies in Mathematics Nº18,France

(4) BALACHEF, Nicolas (1988) Treatment of Refutations.Aspects of the complexity of a constructivist approach to Mathematical learning Educational Studies in Mathematics vol nº17, France.

(5) BALACHEF, Nicolás (1990) Benefits and limits of Social Interaction Educational Studies in Math vol nº 6 , London England

(6) CASTELNUOVO, Ema(1975) Didáctica de la Matemática. Editorial Trillas, Argentina.

(7) BUSBY AND KOLMAN BERNARD (1986) Estructuras matemáticas discretas para la computación. Prentice Hall, México ,

(8) BUSTOS, Félix (1994) Peligros en el Constructivismo. Revista Educación y Cultura 34 , Colombia .

(9) COLE, Susana(1976) Planeamiento del Proceso Enseñanza -Aprendizaje. Ediciones Mangima, S.A, Buenos Aires.

(10) COHEN et al(1991) Student Research Projects in Calculus. The Mathematical Association of America. Estados Unidos.

(11) DUBINSKY, Ed (1994) A Learning Theory Approach to Calculus. The Laboratory Apporach to Calculus. M.M.A. Notes E.U.A.

(12) FRIDMAN, Lev M (1985) Metodología de Enseñanza para la Resolución de Problemas de matemática. Revista Educación Matemática Vol 1 Nº 3, México.

(13) GORMAN, Richard (1986) Introducción a Piaget . Una Guía para Maestros,Paidós Educador, Barcelona.

(14) HOYLES and Noss (1987) Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a logo-based school mathematics curriculum University of London, Institute of Education Vol 18 Nº 4, England.

(15) LAKATOS, Imre, (1982.) Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Alianza Editorial. Madrid,

(16) PIAGET, Jean (1979) Epistemología de la Matemática. Ediciones Paidós, Buenos Aires

(17) PIAGET, Jean (1975) Introducción a la Epistemología genética. I. El Pensamiento Matemático, Paidós , Buenos Aires.

(18) LUCIO, Ricardo.(1994) Enfoque Constructivista de la Educación. Revista Educación y Cultura. Colombia ,

(19) NATIONAL RESEARCH COUNCIL(1989) Everybody Counts: A report on the future of Mathematics Education .Washington: National Academy Press.

(20) PAPERT, Seymour (1976) Desafío de la Mente. Ediciones Galápagos, Buenos Aires.

(21) POLYA, George (1965) Como plantear y Resolver Problemas. Editorial Trillas, México.

(22) POLYA, George(1954) Plausible Reasoning , Induction and Analogy. Pricenton University, U.S.A.

(23) PENTIRARO, Egidio (1985) El ordenador en el Aula. Ediciones Anaya Multimedia, Madrid.

(24) SANTOS TRIGO, Luz Manuel (1994) La Resolución de Problemas: Elementos para una Propuesta de aprendizaje de la Matemática. Cuadernos de Investigación Mexico .

(25) SANTOS TRIGO, Luz Manuel (1993) Learning Mathematics: A perspective based on Problem- Solving.Doctoral Dissertation .Departamento de Matemática Educativa, I.P.N. México.

(26) SCHOENFELD, Alan (1985) Mathematical Problem Solving. New York. Academic Press. Estados Unidos

(27) SCOTT, Patrick (1990) La computadora y la Enseñanza de la Matemática. Revista Educación Matemática. Grupo Edit. Iberoamérica, México,

(28) SELDEN JOHN AND ANNIE(1994) Perspective Vygotskian. U. M. E. Trends Vol 5 Estados Unidos.

(29) SISKO , Repo (1990) Understanding and Reflextive Abstraction: Learning the concept of derivative in the Computer Enviroments. University of Joensue . M.A.A . Estados Unidos.

(30) SOLANILLA, José(1995) Problem- Solving Consideraciones teóricas para una propuesta de aprendizaje de la matemática. IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación y actualización de Profesores e Investigación en matemática Educativa. Ponencia Aceptada para la disertación. Cuba

(31) STEELE, Eduardo, (1992) Apuntes del curso Seminario de tesis. Programa de Maestría Centroamericano en Matemática.Universidad de Panamá.

(32) TORANZOS, Fausto, (1976) Didáctica de la Matemática. Editorial Trillas, Mexico.

(33) TRUEBASIC, Manual para el Usuario, Versión estudiantil.

(34) Guía de Laboratorio para asignaturas de informática básica.