UNIVERSIDAD DE PANAMA
Vicerrectoría de Investigación y Post-Grado
Programa de Maestría en Matemática

Título:

Enfoque Histórico-Heurístico en la Enseñanza de la Estática para Ingenieros de la Universidad Tecnológica de Panamá

Por:
Ángela Argentina Alemán de Sánchez.

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar al grado de Maestro en Ciencias con especialización en Matemática Educativa.

UNIVERSIDAD DE PANAMA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

Aprobado por:

M. Sc. JUAN NOLE
Director de Tesis

M. Sc. LIDIA BURGOA
Miembro del Jurado

Ph. D. GILBERTO CHANG
Miembro del Jurado

Fecha: 2 de julio de 1996.

CIUDAD UNIVERSITARIA OCTAVIO MENDEZ PEREIRA
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA

A mi madre (q.e.p.d.)........quien con su ejemplo
de esfuerzo, tenacidad y sacrificio sembró en mí
el espíritu de lucha por la superación.

Gracias:

A Ramiro, Ramirín, Conchy y Kedin
por su amor, comprensión y apoyo.

Al Profesor Juan Manuel Nole, M. en C. por su interés, apoyo y acertada asesoría la cual fue decisiva en la elaboración de este trabajo.

Índice de Cuadros

Índice General

Resumen

Se aplica la Teoría de Ausubel sobre aprendizaje significativo en el Sistema Educativo Enseñanza de la Estática (*EE*) para estudiantes de Ingeniería de la Universidad Tecnológica de Panamá, con el fin de analizar las tres propiedades relevantes que deben darse en este Sistema Educativo para que los alumnos aprendan significativamente. Con este propósito se sugiere un nuevo enfoque (Histórico-Heurístico) sobre la enseñanza de la Estática para estudiantes de ingeniería que garantice el aprendizaje significativo. Este nuevo enfoque es el resultado de los siguientes estudios :

1.- Un análisis del desarrollo histórico de los Fundamentos de la Estática Ordinaria, que justifican que además de su contenido físico, ella tiene una forma matemática.

2.- Un análisis de la relación entre los cursos de matemática que se exigen como prerrequisitos del curso de Estática y los contenidos de ésta.

3.- Un análisis sobre el número de estudiantes matriculados en los cursos de Estática, los porcentajes de aprobados, reprobados y deserciones, desde 1985 hasta 1994 en la Universidad Tecnológica de Panamá.

El análisis 1 muestra que los fundamentos de la Estática son de naturaleza matemática. Del análisis 2, suponemos satisfechas las

condiciones de la estructura cognitiva. Con la elaboración de dos mapas conceptuales suponemos satisfechas las condiciones del material de aprendizaje. Del análisis 3, consideramos no satisfechas las condiciones de la estructura afectiva, ya que la falta de motivación en el aula de clase puede ser la causa por la que un porcentaje considerable de estudiantes no aprende significativamente la Estática.

Summary

The Ausubel's theory about the significant learning in the Educational System's Teaching of Statics is applied to students at the Technological University of Panama in order to analyze the three relevant properties that should be taught in this Educational System to make the student learn significantly. For this purpose a new approach (Historic-Heuristic) is suggested about teaching Statics for engineering students to provide them with meaningful learning. This new approach is the result of the following studies.

1. An analysis of the historic developoment of the foundations of Ordinary Statics justify that besides its physical contents, it has a mathematical form.

2. An analysis should be made about the relationship among the mathematics courses which are demanded as pre-requirement to take the Statics course in order to understand the content of it.

3. An analysis should be made of the numbers of students enrolled in Statics courses, percentage of passing students, failing students and those who withdrew from college, from 1985 to 1994, at Technological University of Panama.

Analysis 1 shows that the foundations of Statics are of mathematical nature. From analysis 2 we conclude that the affective structure conditions are carried over. Making conceptual diagrams, we conclude that the conditions about the learning material are accomplished. From analysis 3 we considerer that the afective structure

conditions are not satisfied, since the lack of motivation in the classroom might be the reason that many students do not learn Statics significantly.

Introducción

La Estática para ingenieros se dicta en el tercer semestre de la Licenciatura en todas las facultades de la Universidad Tecnológica de Panamá (U.T.P.). Siendo como es, un curso fundamental en la carrera de ingeniería, se espera que el estudiante logre aprenderla significativamente.

Nuestra investigación, de tipo bibliográfica, consiste, en parte, en aplicar la teoría de aprendizaje de Ausubel para probar si el estudiante de la U.T.P. que cursa Estática, cuenta con las condiciones que, según Ausubel, son necesarias para que se logre el aprendizaje significativo.

En la U.T.P., el enfoque aplicado en la enseñanza de la Estática es el heurístico, por lo que también buscamos, con esta investigación, probar que una combinación de los enfoques heurístico e histórico llevará al estudiante a una mejor y mayor comprensión de la Estática y, de esta manera, contribuir no sólo a la renovación sino también al mejoramiento de la enseñanza en la U.T.P. .

Para llevar a cabo esta investigación nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Aplicar la Teoría de Ausubel sobre aprendizaje significativo en el Sistema Educativo Enseñanza de la Estática (*EE*) para estudiantes de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Panamá (U.T.P.), analizando si se satisfacen en el Sistema Educativo Enseñanza de la Estática, las tres propiedades relevantes de la teoría de Ausubel.

2. Determinar los fundamentos matemáticos de la Estática.

3. Realizar una exposición histórica sobre el desarrollo evolutivo de la Estática desde Arquímedes hasta el siglo XIX.

4. Destacar la importancia del desarrollo histórico con relación a la necesidad de conocimientos matemáticos (geometría, euclidiana, trigonometría, vectores, etc.) previos al estudio de la Estática.

5. Evaluar los conocimientos matemáticos previos con que cuenta el estudiante para el aprendizaje de la Estática.

6. Presentar una propuesta metodológica que represente una alternativa en la enseñanza de la Estática.

Con este propósito desarrollamos tres capítulos que conllevan a presentar una propuesta metodológica que permita a más estudiantes aprender significativamente la Estática para ingenieros en la U.T.P. . En el primero, presentamos la Teoría de Aprendizaje de Ausubel (David Ausubel, 1976) para establecer y justificar las condiciones tanto del material de aprendizaje, como las de la estructura cognitiva y la estructura afectiva del estudiante para que se logre el aprendizaje significativo. Presentamos también el Sistema Educativo Enseñanza de la Estática, al cual se aplica la teoría de aprendizaje de Ausubel.

En el segundo capítulo y tomando en cuenta la función de la historia de la Estática con respecto a su enseñanza, en el sentido de que la historia sirva como vehículo renovador de la docencia (Luis Arboleda y Tomás Brinz, 1984), destacamos los trabajos de los primeros descubridores de los principios fundamentales de la Estática, desde su origen con Arquímedes hasta finales del siglo XIX, los cuales influyeron en el desarrollo de esta ciencia. Nos pareció importante hacer esta presentación de tipo histórico, para probar que los elementos matemáticos que influyeron en el desarrollo de la Estática ordinaria son relevantes en el aprendizaje de la misma.

Para abordar este problema tuvimos que dar respuesta a las siguientes interrogantes:

¿Será posible un enfoque Histórico-Heurístico, para que el alumno manifieste una actitud favorable hacia el aprendizaje de la Estática?

¿Será posible en el contexto del desarrollo histórico de la Estática destacar su relación con la Matemática de manera tal que se justifique que ella tiene, además de su contenido físico, una forma matemática?

En el tercer y último capítulo realizamos un análisis para comprobar si en el Sistema Educativo Enseñanza de la Estática se satisfacen o no las condiciones para que se dé el aprendizaje significativo, y presentamos el enfoque histórico como una alternativa en la enseñanza de cualquier ciencia.

Por último, presentamos nuestras conclusiones y recomendaciones, basadas en los resultados de nuestra investigación.

Capítulo 1.

El Sistema Educativo Enseñanza de la Estática para Estudiantes de la Universidad Tecnológica de Panamá en el Contexto de la Teoría de Ausubel.

1.1 Teoría de Ausubel.

1.1.1 Aprendizaje Significativo.

La psicología de la cognición (cognitivismo) procura describir, de manera general, lo que sucede cuando el ser humano organiza su mundo. Se preocupa del proceso de comprensión, transformación, almacenamiento y uso de la información envuelta en la cognición.

Los estudios de Ausubel responden muy bien a la pregunta de cómo aprenden y por qué no aprenden los estudiantes.

La Teoría de Ausubel, siendo como es una teoría cognitiva, busca explicar el proceso de aprendizaje según el punto de vista cognitivista.

El concepto fundamental de la teoría de Ausubel es el aprendizaje significativo, el que se define así: "*Aprendizaje significativo es el proceso mental por el que se relaciona nueva información con algún aspecto ya existente en la estructura cognitiva de un individuo y que sea relevante para el material que intenta aprender*". [p.e. Ausubel, Psicología Educativa (1976) y Novak,Teoría y Práctica de la Educación (1992)].

Podemos apreciar lo fundamental que considera Ausubel el aprendizaje significativo a través de su expresión: *"El aprendizaje significativo es muy importante en el proceso educativo porque es el* *mecanismo humano por excelencia para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representadas por cualquier campo del conocimiento..."* [op. cit. Ausubel].

En la teoría Ausubeliana, adquirir y retener un cuerpo de conocimientos implica la adquisición de un cuerpo de significados que son producto del aprendizaje significativo; es decir, la nueva información adquiere significado para el individuo a través de conocimientos ya existentes que ayudan a que la nueva información sea asimilada, diferenciada y estabilizada lo que se constituye en un aprendizaje significativo. *"El surgimiento de nuevos significados en el individuo refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo".* [sup. cit. Ausubel].

"La enorme eficacia del aprendizaje significativo como medio de procesamiento de información y almacenamiento de la misma puede atribuirse en gran parte a sus dos características distintivas: la intencionabilidad y la sustanciabilidad de la relacionabilidad de la tarea de aprendizaje con la estructura cognitiva" [sup. cit. Ausubel].

Esencialmente, el aprendizaje significativo consiste en relacionar los nuevos conocimientos con aquellos ya existentes en la estructura cognitiva del individuo. Pero esta relación debe efectuarse en forma **intencionada y sustancial,** por lo que se presupone en el individuo que aprende una disposición hacia este tipo de aprendizaje (aprendizaje significativo).

"La teoría de Ausubel se basa en la suposición de que las personas piensan con conceptos, lo que revela la importancia de los

conceptos para el aprendizaje. Según Ausubel, el término concepto representa todo aquello que comunique el significado de alguna cosa, una serie de características, propiedades, atributos, regularidades y/u observaciones de un objeto, fenómeno o evento." [p.e. Arosemena, Fundamentos y Elaboración de Mapas Conceptuales (1994)].

"Al relacionar intencionalmente el nuevo material con las ideas ya existentes en la estructura cognitiva, el individuo puede explorar eficazmente los conocimientos que posee a manera de matriz ideativa y organizadora para entender, incorporar y fijar las nuevas ideas. Es la misma intencionalidad de este proceso lo que lo capacita para usar su conocimiento previo como auténtica piedra de toque para internalizar y hacer utilizables los nuevos significados. En otras palabras: la única manera en que es posible emplear las ideas previamente aprendidas en el procesamiento (internalización) de las nuevas ideas consiste en relacionarlas intencionalmente." [op. cit. Ausubel].

Por otro lado, las nuevas ideas se relacionan substancialmente cuando uno o varios símbolos que representan un mismo concepto pueden relacionarse con la estructura cognitiva sin que haya ningún cambio en el significado del concepto. En otras palabras, el mismo concepto o proposición puede expresarse de manera sinónima y deberá seguir transmitiendo el mismo significado. Esto se debe a que se ha logrado internalizar la sustancia del concepto. Por ejemplo cuando:

$y = \text{sen } x/\cos x$; $y = \tan x$ transmiten exactamente el mismo mensaje, se ha logrado relacionar substancialmente el significado de la identidad trigonométrica.

Cuando el material de aprendizaje puede relacionarse de manera intencionada y sustantiva se dice que tiene significado lógico, es decir, debe ser no arbitrario, claro y verosímil. Si tiene significado lógico en la estructura cognitiva de un individuo en particular, se dice que es un material potencialmente significativo para ese individuo en particular. Cuando el individuo aprende conceptos lógicamente significativos, no aprende el sentido lógico per-se, sino el sentido que tiene para él.

El significado lógico se relaciona con las características que debe poseer el material de aprendizaje, pero cuando el material potencialmente significativo se ha incorporado al acervo de conocimientos del individuo, cuando se incorpora a su estructura cognitiva, surge el significado psicológico.

De esta manera, el material potencialmente significativo que posee a lo más significado lógico, al ser relacionado de manera intencionada, sustancial y no arbitraria (significativamente) con la estructura cognitiva ya existente, se convierte en un materal con significado psicológico.

Entre los nuevos conocimientos y los ya existentes en la estructura cognitiva del individuo existe interacción. Los nuevos conocimientos adquieren significado, a partir de los ya existentes en la estructura cognitiva, pero los ya existentes pueden ser modificados por este nuevo conocimiento ya que pueden adquirir nuevos significados, lo cual representa la esencia del aprendizaje significativo. De esta manera se desarrolla la estructura cognitiva.

La estructura cognitiva tiende a estar organizada jerárquicamente con respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad, es decir, la estructura cognitiva puede ser descrita como una organización jerárquica de conceptos.

"El surgimiento de nuevos significados reflejan más comúnmente una relación subordinada del nuevo material de aprendizaje con la estructura cognitiva. Esto implica la inclusión de conceptos potencialmente significativos bajo conceptos más amplios y generales de la estructura cognitiva existente. Ausubel llama subsumidores a estos conceptos más generales. El material de aprendizaje nuevo guarda una relación supraordinada con la estructura cognitiva cuando se aprende una nueva idea inclusiva que puede abarcar varias ideas ya establecidas. El aprendizaje significativo de ideas nuevas que no guarda relaciones ni subordinadas ni supraordinadas con ideas pertinentes particulares de la estructura cognitiva (que no pueden ser asimiladas por ideas particulares establecidas o que no pueden ellas mismas asimilar ideas establecidas), da lugar a los significados combinatorios. El aprendizaje de muchas proposiciones nuevas, así como de conceptos, produce esta categoría de significados las cuales son potencialmente significativas porque constan de combinaciones perceptibles de ideas anteriormente aprendidas que pueden relacionarse de manera intencional con antecedentes amplios de contenidos generales pertinentes de la estructura cognoscitiva, en virtud de su congruencia general con el contenido en conjunto." [op. cit. Ausubel].

Podemos considerar la estructura cognitiva como una estructura de subsumidores (significados ya existentes en la estructura cognitiva que nos permiten relacionar las nuevas ideas con las ya existentes). *"Según Ausubel y Novak, esta estructura es jerárquica, los subsumidores más generales, más inclusivos están en el tope y progresivamente incluyen las ideas de nivel intermedio hasta llegar a las ideas particulares que conforman la base de la estructura.*

Esta estructura cognitiva es dinámica pues se encuentra en constante reorganización durante el transcurso del aprendizaje significativo ya que los subsumidores que están en el tope pueden dar paso a otros más generales. Cuando esto sucede, es decir, cuando un subsimudor adquiere un nuevo significado, a la concurrencia de este proceso una o más veces en un conjunto de subsumidores se le denomina Diferenciación Progresiva (relacionada con aprendizaje subordinado)." [op. cit. Arosemena].

"A diferencia de procesar y almacenar significativamente, el individuo puede hacerlo de modo arbitrario y literal (al pie de la letra) este aprendizaje se denomina memorístico y se define así: Proceso mental por el que la información nueva se tiende a almacenar arbitrariamente en la estructura cognitiva de un individuo." [op. cit. Novak (1992)].

"Estos dos tipos de aprendizaje no representan una dicotomía sino, más bien, los puntos de un continuo ya que probablemente nunca se produce un aprendizaje significativo ni uno memorístico puro."[p.e.

Moreira, Aprendizaje Significativo, Conocimiento Científico y Cambio Conceptual (1992)].

1.1.2 Aprendizaje por Recepción y Aprendizaje por Descubrimiento.

Además de los aprendizajes significativo y memorístico, podemos diferenciar otras dos categorías de aprendizajes que vienen a proporcionar una clasificación que podríamos llamar básica en cuanto al aprendizaje en el aula. Estos son: el **aprendizaje por recepción** y el **aprendizaje por descubrimiento.**

Podemos describir el **aprendizaje por recepción** como aquel donde se le proporciona al alumno los conceptos o ideas en su forma final y únicamente se le pide que aprenda y recuerde lo que significa. Por otro lado, el **aprendizaje por descubrimiento** es aquel en donde se le proporciona al estudiante las herramientas necesarias para que, por sí solo, realice las relaciones correspondientes y pueda llegar a la forma final del concepto que debe aprender.

Tanto el aprendizaje receptivo como el aprendizaje por descubrimiento tienen sus defensores ya que para algunos como Ausubel, Novak y Moreira, el aprendizaje por recepción es el tipo de aprendizaje por excelencia de los seres humanos, tanto dentro como fuera del ámbito escolar, porque desde las primeras nociones que aprende el niño (no las aprende por sí sólo sino que le son dadas), hasta la mayor parte de su instruccıón escolar, está caracterizada por este tipo de aprendizaje. Este tipo de aprendizaje corresponde al más aplicado en las aulas debido, tal vez, a la principal función de la escuela, relacionada con la transmisión de conocimientos en razón a la cantidad de tiempo.

"Puede haber un grupo de estudiantes y un profesor aparentemente entregados a los más modernos procedimientos metodológicos sin que en los alumnos exista una pizca de actividad re-creadora del saber y darse, en cambio, una clase de fisonomía tradicional con 40 jóvenes alineados en sus bancas con sus mentes en ebullición, aunque silenciosos, siguiendo una auténtica labor de re-creación cultural, que les permitirá llegar a la conquista de la verdad." [p.e. G. R. Gómez,La Enseñanzaa de las Ciencias (1969)] .

Por otra parte, algunos autores como Bruner (y muchos círculos educacionales) defienden la creencia de que el único conocimiento que se posee y entiende realmente es el que se descubre por sí mismo.

Según Ausubel, *"es común encontrar cierta confusión al relacionar el aprendizaje por recepción con el aprendizaje mecánico o por repetición y, con mucha frecuencia, el aprendizaje escolar es denominado aprendizaje por repetición pues se le considera pasivo y carente de valor en comparación con el aprendizaje por descubrimiento.*

En el aprendizaje por recepción, el estudiante sólo necesita comprender y recordar el significado de las ideas presentadas, pero este proceso no necesariamente tiene que ser pasivo. El considerar que *el aprendizaje por recepción es invariablemente memorístico o mecánico es una idea tan equívoca como el supuesto de que todo aprendizaje por descubrimiento es significativo."* [op.cit. Ausubel] .

Podemos pues, relacionar los aprendizajes memorístico y significativo con los aprendizajes por recepción y por descubrimiento para diferenciar los cuatro tipos de aprendizajes que se pueden lograr en el aula. **Estos son: aprendizaje memorístico por recepción, aprendizaje significativo por recepción, aprendizaje memorístico por descubrimiento y aprendizaje significativo por descubrimiento**. De acuerdo con esta clasificación tanto por recepción como por descubrimiento, se puede lograr el aprendizaje significativo.

Para que el aprendizaje por recepción se torne significativo, es fundamental una buena clase expositiva que logre hacerle llegar al estudiante el material en forma lógica y coherente, transformándose el profesor en un facilitador del aprendizaje. Para Ausubel la adquisición de un conocimiento claro en el alumno que además sea estable y organizado, es el principal objetivo de la enseñanza en el aula y, una vez adquirido, ese conocimiento pasa a ser el factor principal que influye en la adquisición de nuevos conocimientos en la misma área. Con la recepción, el alumno recibe información para que sea relacionada intencionada y substancialmente en su estructura cognitiva, pero no para entender y recordar lo que significan como fin en sí mismas, si no para transformarlas en nuevas proposiciones que sean significativas para él.

"En la primera fase del aprendizaje por descubrimiento, el alumno debe arreglar de nuevo la información e integrarla en su

estructura cognitiva preexistente y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el producto final deseado. Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento, el contenido descubierto es relacionado intencionada y substancialmente en su estructura cognitiva para transformarla en información significativa para él. Es decir, el contenido descubierto se hace significativo, en gran parte, como el contenido presentado se hace significativo con el aprendizaje por recepción." [op.cit. Ausubel]. Si el producto final descubierto no es capaz de internalizarse para ser entendido y usado con sentido, el aprendizaje por descubrimiento se torna memorístico.

"En su mayoría, los grandes volúmenes de material de estudio se aprenden por recepción mientras que los problemas cotidianos se resuelven por descubrimiento. Esto no significa que los dos métodos sean incompatibles ya que el conocimiento que se adquiere por recepción se aplica también para resolver problemas de la vida diaria y el aprendizaje por descubrimiento se emplea en el aula para poner a prueba la comprensión del material." [op. cit. Ausubel]. En la enseñanza tradicional, difícilmente el método por descubrimiento constituirá un método eficaz para la enseñanza aprendizaje de los contenidos programáticos debido a las limitaciones de tiempo, y por la necesidad de satisfacer los objetivos de dichos contenidos.

Es necesario recordar que para que se dé aprendizaje significativo tanto por recepción como por descubrimiento es determinante conocer lo que el estudiante ya sabe, para saber qué

y cómo enseñar; y en el aprendizaje receptivo en particular, la enseñanza expositiva debe ser buena (no indiferente o mala). Si el material es inadecuadamente aprendido (pese a que se cumplen las condiciones anteriores), la razón sería que los alumnos no poseen la requerida base de conocimientos en la que puedan anclar las nuevas ideas o puede deberse a situaciones no cognitivas como no prestar atención durante la exposición (o al menos durante el momento crítico de la misma). También sería necesario que toda la clase contase con una base homogénea de conocimientos lo que no es fácil de conseguir en una situación escolar normal. Tales dificultades no invalidarían ninguna de las dos teorías, pero causarían serias dificultades al profesor.

De acuerdo con Bruner [Ver Orton, Didáctica de la Matemática (1990)], el descubrimiento estimula el aprendizaje pues resulta intrínsecamente gratificante para el que aprende, de modo que los profesores que aplican este método tienen muy poca necesidad de usar formas extrínsecas de premio. Reconoce las limitaciones prácticas pues no se puede esperar eternamente a que el estudiante descubra, por lo que el descubrimiento debe ser guiado o dirigido (el currículo no puede ser totalmente abierto).

Por su parte, tanto Ausubel como Gagné [Ver Orton, Didáctica de la Matemática (1990)] admiten que el descubrimiento tiene importancia en la formación de niños pequeños. **Ausubel señaló que el descubrimiento no es el único método mediante el cual un profesor podía generar en el estudiante motivación, seguridad en sí mismo y deseos de aprender. La enseñanza expositiva, bajo sus mejores**

formas, es igualmente capaz de interesar e inspirar a los alumnos. El descubrimiento puede desmotivar seriamente cuando no se descubre nada. Además, considera discutible la afirmación de que el aprendizaje por descubrimiento conlleva creatividad porque los alumnos rara vez podrían ser creativos mediante el descubrimiento guiado. Asegura Ausubel que no existen datos sobre investigaciones que demuestren de manera concluyente que el aprendizaje por descubrimiento resulte superior al aprendizaje expositivo en término de aprendizaje a largo plazo. Y que el descubrimiento guiado sólo parece mejor cuando se le compara con el aprendizaje memorístico.

1.1.3 Mapas Conceptuales.

De acuerdo con la teoría de Ausubel, el aprendizaje puede ocurrir de tres maneras: subordinado, supraordinado y combinatorio tal y como hemos señalado en la sección 1.1.1.

De los tres, el más común es el aprendizaje subordinado, es decir, la asimilación de conceptos potencialmente significativos bajo ideas más amplias de la estructura cognitiva ya existente. Esta estructura, por lo tanto, puede describirse como una estructura jerárquica de conceptos en la mente del individuo.

Ausubel describe el proceso de subsumir a través de lo que llama **Principio de Asimilación.** La Prof. Mercedes de Arosemena, lo representa simbólicamente de la siguiente manera:

Nueva información potencialmente significativa → Relacionada y asimilada por → Concepto subsumido existente en la estructura cognitiva → Producto interaccional (subsumidor modificado)

[op. cit. Arosemena].

A través del **proceso de asimilación**, el subsumidor puede adquirir un nuevo significado y, al repetirse este proceso con un conjunto de subsumidores y surge, como hemos mencionado, la **diferenciación progresiva.** Cuando se recombinan los elementos existentes en la estructura cognitiva se lleva a cabo lo que se reconoce como **reconciliación integradora.** Con ella el que aprende puede relacionar y diferenciar significados en conflicto (en lugar de aislarlos) como por ejemplo: el significado de vecindad aplicado fuera del ámbito de la clase de matemática y el que se aplica en el estudio del límite.

Para lograr una reconciliación integradora más eficazmente, de acuerdo a lo expuesto por Novak, se debe organizar la enseñanza recorriendo la pirámide cognitiva de arriba hacia abajo y viceversa a medida que la nueva información es presentada.

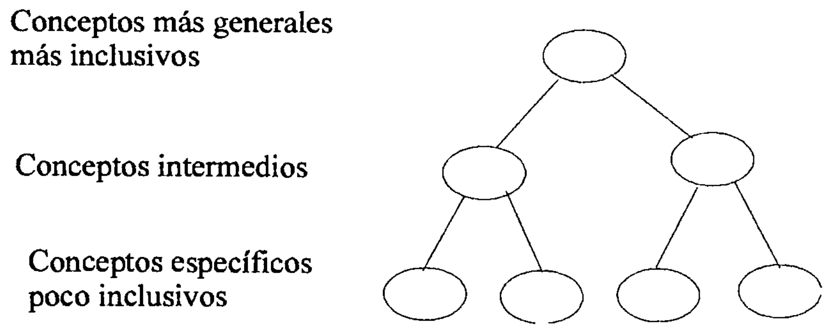


fig.1.1

Esto no es más que una representación esquemática del modelo Ausubeliano de diferenciación progresiva y de reconciliación integradora que recibe el nombre de **Mapeo Conceptual**. [op. cit. Arosemena].

El mapeo conceptual que puede ser usado para ilustrar la estructura conceptual de una fuente de conocimiento puede revelar las uniones o enlaces entre los conceptos que posee un estudiante, e inclusive el estudio de los mapas presentados por los estudiantes puede, algunas veces, resaltar las concepciones erróneas o el pensamiento creativo al encontrar ellos formas únicas de enlazar conceptos.

Para Gowin y Novak, *"un mapa conceptual es un medio esquemático de representar un conjunto de significados de conceptos situado dentro de un marco de proposiciones que operan para poner en claro tanto a alumnos como a profesores las ideas claves en las que deben centrarse en cualquier tarea específica de aprendizaje. Cuando se realiza el aprendizaje proporciona un resumen esquemático de lo que se ha aprendido"* [op.cit. Orton, (1990)]. En la figura 1.2

mostramos un mapa conceptual que de acuerdo con A. Norton, puede ayudar al profesor a enseñar y a los alumnos a aprender.

"Es importante hacer notar que un mapa conceptual es un mapa conceptual y no el mapa conceptual de un conjunto de conceptos ya que es posible concebir diferentes mapas conceptuales dentro de un mismo campo de conocimiento pues éstos atienden a las diferencias individuales de los autores, diferencias que involucran las relaciones incluidas, los criterios usados para organizarlas, su estructura cognitiva y otros. Cuando un individuo confecciona un mapa conceptual, pone de manifiesto la forma como su entendimiento concibe los conceptos y las relaciones que se dan entre ellos". [op. cit. Arosemena].

De acuerdo con la profesora Mercedes de Arosemena, los mapas conceptuales pueden tener una, dos o tres dimensiones.

Los mapas unidimensionales solamente son listas de conceptos organizados verticalmente.

Los bidimensionales se extienden horizontal y verticalmente y permiten una representación más completa de relaciones entre conceptos y son los más utilizados, ya que mapas con más de dos dimensiones son representaciones concretas de estructuras conceptuales con abstracciones matemáticas de limitada utilidad con fines educacionales.

Ejemplo de mapa conceptual extraído del libro Didactica de las Matemáticas. [Op. cit. A. Orton].

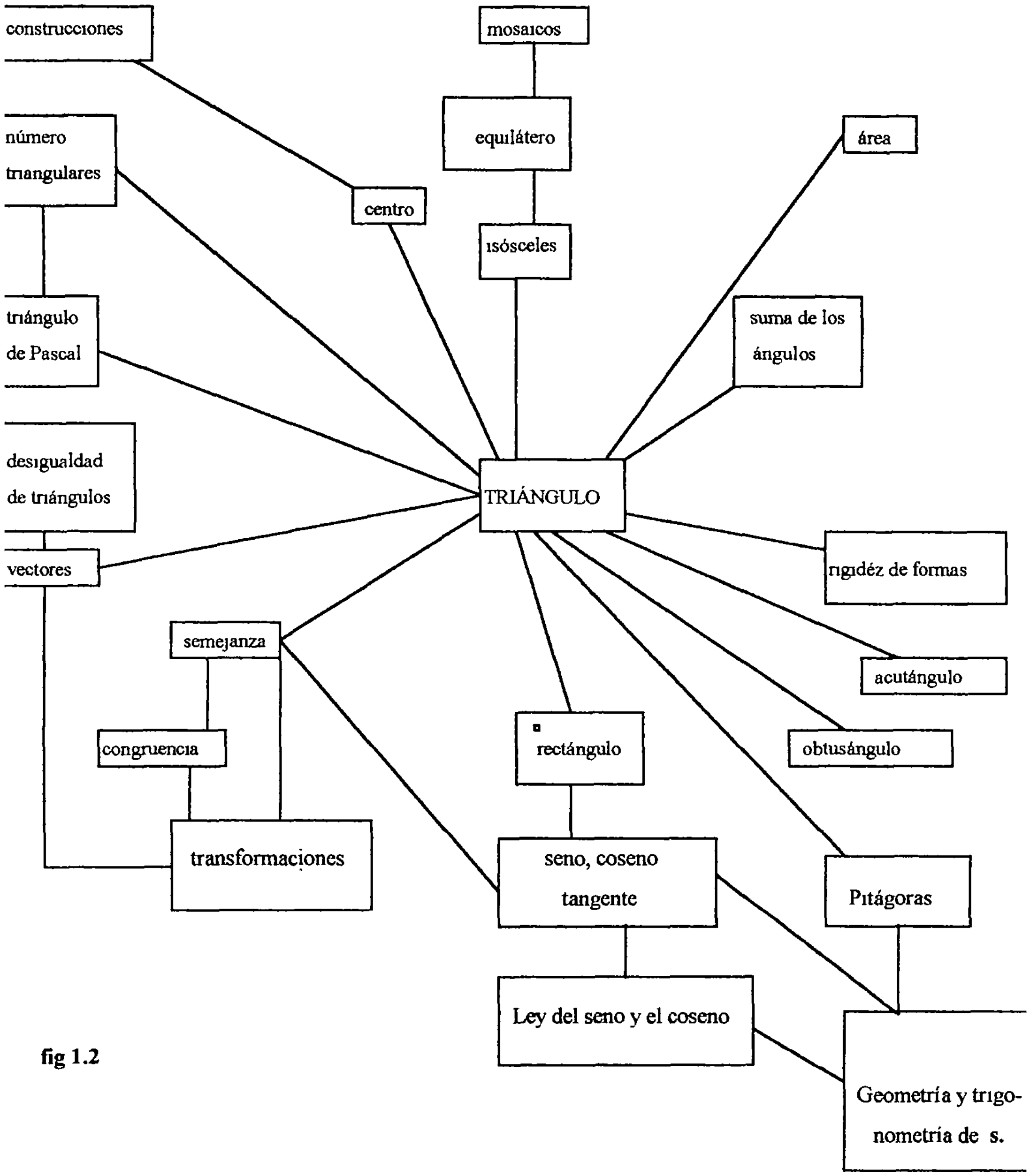


fig 1.2

1.1.3.1 Utilidad de los Mapas Conceptuales.

*"**Los mapas conceptuales se utilizan principalmente con fines educacionales**: La teoría de aprendizaje de Ausubel representa la base conceptual del mapeo de conceptos. Ausubel señaló: Si yo tuviese que reducir toda la sicología educacional en un solo principio diría esto: el más importante factor individual que influye en el aprendizaje es lo que el aprendiz sabe ya. Reconozca esto y enseñe tomándolo en cuenta."* [p.e. Ausubel (1968) en Moreira (1990)].

El cómo averiguar lo que el estudiante ya sabe, representó un reto para muchos investigadores durante muchos años. Entre ellos Novak, quien en el artículo presentado en la inauguración del III Congreso sobre Investigación y Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas en Santiago de Compostela el 20 de sept. de 1989, nos dice: *"Las pruebas de lápiz y papel tanto abiertas como objetivas se mostraron de escasa utilidad para determinar lo que una persona conoce en realidad y sabe utilizar. Las entrevistas clínicas articuladas según las directrices de Piaget, pero centradas en la comprensión de los conceptos y las relaciones entre los mismos en el dominio del conocimiento explícito, pueden resultar muy efectivas en este sentido. Sin embargo, su diseño y administración requieren de mucha destreza y consumen mucho tiempo tanto para su administración como para su interpretación. Se hacía necesario, por tanto, otra alternativa viable."*[p.e. Novak, Investigación y Experiencias Didácticas (1989)].

Novak centró entonces su atención en los tres factores claves de la teoría Ausubeliana: 1. Asimilación de nuevos conceptos por la estructura cognitiva ya existente que resulta a su vez modificada. 2. El conocimiento se organiza jerárquicamente en la estructura cognitiva y la mayor parte de lo que se aprende es por un proceso se subsumición. 3. El conocimiento adquirido por aprendizaje memorístico no se asimilará en la estructura cognitiva ni modificará la ya existente. Al reconsiderar el significado de estas ideas, el grupo de investigación propuso ensayar otras para representar las estructuras del conocimiento, lo que llevó al desarrollo de lo que hoy conocemos como mapas conceptuales.

En resumen, podemos entonces decir que una de las funciónes de los mapas conceptuales es la de revelar lo que el alumno ya sabe, pero se recomienda que se utilicen cuando el estudiante ya tiene alguna familiaridad con el asunto. Además, peden ser utilizados por los profesores en la planificación del curso o proporcionado a los alumnos como modelo para el repaso o utilizado por el que aprende de modo deliberado dentro del preceso de aprendizaje.

*"**Mapas Conceptuales como Recursos para el Análisis del Contenido:** Los mapas conceptuales pueden ser construidos para analizar la secuencia lógica en el contenido programático de un curso, así como los conceptos centrales para el entendimiento de la disciplina . También pueden ser útiles en la diferenciación entre los conceptos que se espera sean aprendidos por el estudiante y los que servirán de vehículo para el aprendizaje. Algunas veces es sorprendente que al*

construir el mapa conceptual del contenido de un curso completo o de un programa educacional entero, se llegue a la conclusión de que el programa está lleno de repeticiones inútiles y no focaliza adecuadamente los conceptos que son realmente centrales."[op. cit. Moreira].

Por todo lo anteriormente expuesto, podemos considerar que toda ciencia puede ser aprendida a través de los métodos escolares tradicionales y, aún así, lograr el aprendizaje significativo. Pero para lograrlo, indudablemente que debemos conocer las propiedades relevantes del sistema educativo de la enseñanza de la ciencia estudiada. En este sentido, la teoría de Ausubel nos orienta para determinar las propiedades que se deben dar en estos sistemas educativos para que los alumnos aprendan significativamente, éstas son: **1. Propiedades de la estructura cognitiva de los alumnos:** si poseen en su estructura cognitiva los conocimientos previos necesarios para comprender y asimilar el nuevo material. La importancia de los conocimientos previos se deriva de que, según Ausubel, las personas no son meros receptores de nuevos conocimientos que se agregan sino que al entrar en contacto con información nueva construyen un significado. Este significado es particular para cada aprendiz y depende de las relaciones que pueda establecer entre la nueva información y sus conocimientos previos.

2. Propiedades de la estructura afectiva de los alumnos: deben tener la intención de aprender significativamente el nuevo material, y para ello deben estar motivados sin que necesariamente esta motivación deba ser extrínseca.

3. Propiedades del material de aprendizaje: puede ser presentado en forma expositiva,pero de manera clara y sencilla. Con una secuencia lógica y coherente que facilite la relación con los subsumidores en la estructura cognitiva.

1.2 Sistema Educativo Enseñanza de la Estática para Estudiantes de Ingeniería de la Universidad Tecnológica de Panamá.

1.2.1 La Noción de Sistema Educativo.

Cuando un educador habla de Sistema Educativo no está claro a lo que se refiere, si a la escuela donde realiza su práctica o a las políticas educativas dadas por las instituciones estatales encargadas de la educación o a otra interpretación . [p.e. Mialaret, Ciencias de la Educación (1981); De Arruda, Didáctica y Práctica de la Enseñanza (1984); Arnaz, La Planeación Curricular (1981) en: Cajas, Matemáatica Educativa: Una Tecnología Emergente (1993)] .

Para tener una concepción más clara de lo que representa un sistema educativo, revisaremos algunos conceptos de la teoría de sistemas que presenta Fernando Cajas en su tesis de grado.

Definición 1 : Sistema Concreto **(S): S** es un sistema concreto si y sólo si:

1) C(S) , llamada la composición de S, es el conjunto de componentes
2) A(S), llamado ambiente de S, es el conjunto de las cosas que no son componentes del sistema S, pero que actúan sobre las componentes de S
3) E(S), llamada la estructura de S, es el conjunto de las relaciones y vínculos entre los miembros de S o entre el ambiente y los miembros de S y el ambiente de S.

Un sistema concreto se representa por medio de su composición C, su ambiente A y su estructura E, así: **S = < C,A,E >** [op. cit. Cajas].

Ontológicamente sólo existen sistemas concretos y sistemas conceptuales, y esto supone que un sistema es concreto o conceptual, pero no ambos a la vez. A los sistemas concretos suele llamárseles sistemas reales. Como ejemplos de sistemas concretos podemos dar: el sistema solar, una familia, el cuerpo humano, etc.. Los sistemas conceptuales están formados por conceptos, proposiciones , y teoremas relacionados entre sí como por ejemplo: la matemática, la lógica, etc.. [sup. cit. Cajas].

Definición 2: Sea **W** un sistema concreto, diremos que **W** es un subsistema de **S** (W < S) si y sólo si:

1) W es un sistema;

2) La composición de W está incluida en la de S;

3) El ambiente de S esta incluido en el de W;

4) La estructura de W está incluida en la de S. [sup. cit. Cajas].

Para poder definir el concepto de **Sistema Educativo** es necesario reconocer la sociedad humana como un sistema concreto conformado por varios subsistemas, en particular cuatro que se consideran básicos a saber:

el biológico ***E*b**, el económico ***E*e**, el político ***E*p** y el cultural ***E*c**. [p.e. Bunge, Epistemología (1980)] .

Definición 3: Sea ***E*** < ***E*c** (subsistema del sistema cultural de una sociedad) diremos que ***E*** es un sistema educativo si y sólo si:

1) La composición C(*E*) esta formada principalmente por educadores y aprendices;

2) El ambiente directo A(*E*) es el de la sociedad correspondiente, exepto la composición de *E*;

3) La estructura E(*E*) es el conjunto de relaciones sociales, principalmente la práctica educativa (PE)[1] . [op. cit.Cajas]

El introducir el concepto de sistema educativo en un contexto teórico, no se ha realizado simplemente con el ánimo de teorizar. Existe una verdadera necesidad de aclarar los conceptos fundamentales en educación, necesidad de disponer de bases teóricas que permitan optimar la actividad de educar. [sup.cit Cajas] .

Definición 4: Sea ***EC*** < ***E*** (subsistema del sistema educativo). Diremos que ***EC*** es el subsistema educativo enseñanza de las ciencias si y sólo si:

1) La composición C(*EC*) ésta formada principalmente de profesores y alumnos de ciencias;

[1] Práctica Educativa Práctica Social[Cajas,1993,p 8]cuyo objeto es la producción de aprendizaje en los componentes sociales

significativamente, éstas son: propiedades de la estructura cognitiva de los alumnos; propiedades de la estructura afectiva de los alumnos y propiedades del material de aprendizaje.

Para que los alumnos que van a ingresar a la carrera de ingeniería tengan en su estructura cognitiva los elementos (conceptos) necesarios para relacionar de manera intencional y no arbitraria la nueva información obtenida del curso de Estática, es indispensable que adquiera conocimientos previos los cuales son fundamentales para abordar el estudio de ésta. Estos conocimientos preliminares al estudio de la Estática corresponden básicamente a la geometría euclidiana, trigonometría, operaciones con vectores, etc. , o sea, **al enseñar la Estática para ingenieros hay que partir de lo que el estudiante ya sabe, y lo que el estudiante ya sabe son conocimientos matemáticos preliminares que hay que revisar y evaluar con el objeto de dar una opinión sobre la estructura cognitiva de los alumnos que ingresan al curso de Estática.**

Para justificar esa acción,en el capítulo 3, hacemos un estudio sobre los conocimientos matemáticos que se requieren para el aprendizaje de la Estática. Como esos conocimientos constituyen los fundamentos matemáticos de esta ciencia, en el capítulo 2, realizamos una exposición histórica sobre el desarrollo de la Estática desde sus orígenes con Arquímedes, hasta finales del siglo XIX con los aportes de Lagrange. *De esta forma será la historia la que nos señale que los principios y conceptos en los que se apoyó la Estática fueron principios y conceptos matemáticos.*

Capitulo 2.

Fundamento Histórico de la Estática Ordinaria

2.1 Desarrollo Histórico de la Estática desde sus Orígenes Hasta Finales Del Siglo XIX.

La mecánica es la ciencia que estudia la acción de fuerzas en cuerpos. Se divide en dos ramas: **Estática y Dinámica.**

La Estática estudia los cuerpos que están en reposo a consecuencia de que las fuerzas que actúan sobre él están en equilibrio. En contraste, la Dinámica estudia aquellos sometidos a fuerzas que no están en equilibrio.

La historia del desarrollo de la Estática nos muestra el camino recorrido por los descubridores de los principios fundamentales del equilibrio, principios que se refieren a las nociones de Momento Estático y Trabajo Virtual.

La Estática nace, en parte, en los geómetras griegos, y sobre todo, en Arquímedes. Se desarrolla en tiempos modernos por obra de Stevin, Galileo, Varignon, etc. siendo el primero considerado el verdadero fundador de esta ciencia.

2.1.1 Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.).

Reconocido como el más grande de los matemáticos griegos, **investigador entregado apasionadamente a los estudios teóricos,**

ingeniero desdeñoso de sus admirables invenciones, en resumen el más grande teórico y técnico de la antigüedad. [p.e. Papp. Historia de la Física, (1961)]. *"Se dedicó exclusivamente al estudio de la matemática y más especialmente a la geometría, pues desde su juventud lo había atraído. Adquirió mucha fama por haber desecado pantanos por medio de diques movibles, trabajo considerado hasta entonces irrealizable .*

Durante las guerras púnicas, puso todo su saber al servicio de su patria y a la defensa de su ciudad durante los tres años que duró el sitio.

Sus contemporáneos y comentaristas posteriores le atribuyen el invento de grandes máquinas y formidables grúas provistas de ganchos enormes que levantaban las galeras romanas y luego las dejaban caer y destrizarse en la superficie del mar, o espejos ardientes que concentraban sobre la flota enemiga los rayos solares hasta lograr incendiarla.

La posibilidad de incendiar buques por medio de espejos reflectores tiene muchos defensores y detractores, pero la duda de su realización seguirá existiendo debido a que Arquímedes no dejó ninguna información ni descripción de sus inventos a los que, sin duda, no atribuía la misma importancia que a sus trabajos teóricos.

Pero los inventos de Arquímedes no pudieron impedir el triunfo de las armas romanas quienes se apoderaron y saquearon la ciudad de Siracusa.

Arquímedes, ajeno a la entrada de los romanos, estudiaba tranquilamente en su casa cuando un soldado entró en ella y le ordenó seguirlo. El sabio le pidió que le permitiera terminar la resolución de un problema de geometría, pero el soldado, ebrio de sangre e impacientado *por la calma y dignidad del matemático, le atravesó el cuerpo con su ancha espada".* [pe. Shurmann. Historia de la Física, (1945)] .

Con sus trabajos geométricos se anticipó, casi dos mil años, a su época estableciendo principios fundamentales de cálculo infinitesimal. Sus aportes en la mecánica lo convierten en el fundador de una nueva ciencia pasando a ser el primer investigador en combinar con rigor metódico, deducciones matemáticas con resultados experimentales, con lo cual logró establecer las leyes fundamentales de la Estática.

Arquímedes se interesó en el diseño de maquinarias que dieran ventajas mecánicas al hombre, es decir, dispositivos para superar con una fuerza menor, una fuerza mayor. El más sencillo de esos dispositivos es la palanca, que consiste esencialmente en una barra rígida que puede girar en torno a un punto fijo (fulcro). De sus estudios sobre las palancas surgen otros sobre las poleas, las cuales se basan, en el mismo principio. La figura 2.1 muestra un sistema de poleas dibujado por Arquímedes. [p.e. Hull, Historia y Filosifia de la Ciencia (1981)].

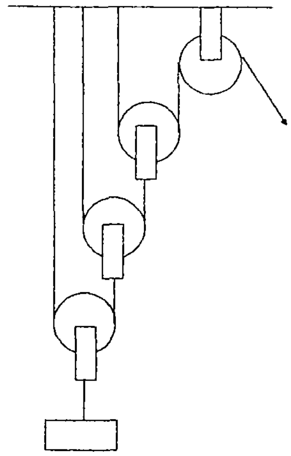


fig. 2.1

"En su monografía Sobre el Equilibrio de los Planos, Arquímedes formula principios de la Estática en términos matemáticos y enuncia el principio de la palanca. Sin duda, ya era conocido por Aristóteles y antes de él por Platón, que la fuerza que actúa a mayor distancia del punto de apoyo, (fulcro) mueve el sistema más fácilmente. Sin embargo, media un abismo entre esta regla tosca y la exposición formal, susceptible de análisis riguroso dada por Arquímedes a la Ley de la Palanca." [op. cit. Papp]. Con esta exposición formal logra Arquímedes establecer una estrecha relación entre la física y la matemática, pues los resultados obtenidos llegan a ser significativos tanto en la una como en la otra.

Ley de la Palanca: En su exposición formal sobre la Ley de la Palanca, Arquímedes, como buen matemático, partió con una explícita declaración de sus asunciones adicionales y no contextuales. Estas asunciones fueron presentadas a través de los siguientes siete postulados:

Postulado I: Pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, y que los pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso el cual está a una mayor distancia.

Postulado II: Si, cuando dos pesos a ciertas distancias están en equilibrio, algo es agregado a uno de los pesos, ellos no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso al cual algo fue agregado.

Postulado III: Similarmente, si alguna cosa es tomada fuera de los pesos, ellos no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso del cual nada ha sido tomado.

Postulado IV: Cuando iguales y similares figuras son hechas para coincidir, sus centros de gravedad igualmente coinciden.

Postulado V: En figuras desiguales, pero similares, los centros de gravedad deben estar situados similarmente.

Postulado VI: Si dos magnitudes a ciertas distancias están en equilibrio, otras magnitudes iguales a ellas estarán también en equilibrio a las mismas distancias.

Postulado VII: En alguna figura cuyo perímetro es cóncavo en la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

Además de los siete postulados, también presenta Arquímedes seis proposiciones que preceden al teorema que representa lo que hoy conocemos como Ley de la Palanca.

Proposición 1: Pesos, los cuales están en equilibrio a iguales distancias, son iguales.

Proposición 2: Pesos desiguales en iguales distancias no están en equilibrio sino que se inclinarán hacia el más grande peso.

Proposición 3: Si pesos desiguales están en equilibrio a distancias desiguales, el peso más grande se encuentra a la menor distancia.

Proposición 4: Si dos magnitudes iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de la magnitud compuesta por las dos magnitudes será el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las dos magnitudes.

Proposición 5: Si de tres magnitudes, los centros de gravedad están sobre una línea recta y las magnitudes tienen igual peso y también las líneas rectas que están entre los pesos son iguales, el centro de gravedad de la magnitud compuesta de todas las magnitudes será el punto el cual es también el punto de gravedad de la magnitud media.

La siguiente proposición, es la discutida Ley de la Palanca.

Proposición 6: Magnitudes conmensurables están en equilibrio en distancias recíprocamente proporcionales a los pesos.

Arquímedes demostró la proposición 6 utilizando la proposición 5 cuya demostración se basa en la proposición 4 y ésta a su vez se basa en el Postulado I. Entonces podemos afirmar que Arquímedes infiere la Ley de la Palanca del principio del centro de gravedad, base axiomática de su Estática.

Es por esto que se atribuye a Arquímedes el ser el primero en deducir la igualdad de los momentos estáticos, como condición de equilibrio de la palanca, a partir del postulado que se refiere a los casos elementales de simetría y diseminaría, es decir, equilibrio obtenido suspendiendo pesos iguales de brazos iguales y desequilibrio obtenido por pesos iguales suspendidos de brazos desiguales.

La Ley de la Palanca es enunciada en forma de un teorema geométrico, pero hay que señalar que Arquímedes, constructor de máquinas, verificó su certeza por medio de la experiencia. Este principio físico de equilibrio constituyó su método físico-geométrico para descubrir resultados matemáticos y en que se apoyan las proposiciones del Método. [p.e. Arquímedes, El Método (1986)].

El teorema que representa lo que hoy conocemos como Ley de la Palanca se enuncia de la siguiente manera: Si un sistema finito de puntos masas $m_1,m_2,\ldots,m_p$ a las distancias $d_1,d_2,\ldots,d_p$ respectivamente, desde el punto de equilibrio, en uno de los lados de la palanca es balanceado por otro sistema $m'_1,m'_2,\ldots,m'_q$ a las distancias respectivas $d'_1,d'_2,\ldots,d'_q$ respectivamente, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} m_i d_i = \sum_{j=1}^{q} m_j^1 d_j^1$$

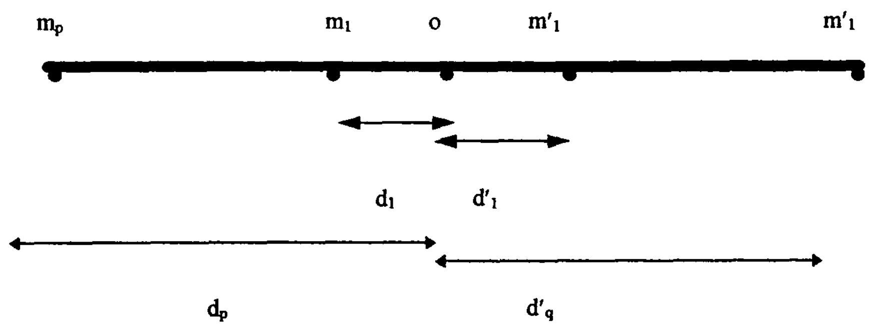


fig. 2.2

Notemos que tanto en los postulados como en las proposiciones, Arquímedes siempre se refiere al centro de gravedad sin definición previa, como si este fuera un término (concepto) perfectamente conocido. Referente a esto, Dijksterhuis presenta las siguientes consideraciones:

a) Es posible que Arquímedes cuando escribió el tratado sobre el equilibrio de los planos, se refiriera al centro de gravedad como algo ya conocido porque había sido desarrollado por él mismo en un tratado hasta ahora perdido.

b) Es posible que el tratado de equilibrio de planos sea un trabajo enteramente autónomo y que la definición del concepto de centro de gravedad esté concebida como ente implicado en los postulados sobre los cuales está construido.

Según el Dr. Ernest Mach [p.e. Mach. La Ciencia Mecánica, (1942) En: Sarton (1968)] la proposición 6 fue, probablemente, un resultado por consideraciones simétricas.

En relación a esto, Polya, hace referencia a lo que llama un supuesto implícito, que aplica Arquímedes en la demostración de la Ley de la Palanca. El supuesto es el siguiente: el equilibrio de una palanca con un peso W en cada uno de sus extremos no se alterará si reemplazamos ambos pesos por un peso único 2W colocado en el punto medio de la palanca y, recíprocamente, podemos reemplazar un peso único 2W colocado en el punto medio de la palanca por pesos iguales a W en los extremos sin perder el equilibrio (supuesto A).

A continuación presentamos un ejemplo de la aplicación de este supuesto, extraído de la obra de Polya, Mathematicals Methods in Science.

Por el supuesto A, el equilibrio del segmento FA' es inalterado cuando los pesos W en F y W en A' son reemplazados por un peso 2W en B', consecuentemente, el equilibrio de la palanca entera es inalterado. En pocas palabras concluimos que un peso 2W colocado a una distancia de 3/2 unidades del punto de apoyo F balanceará un peso de 3W suspendido a una unidad de distancia desde el otro lado.

Luego: $2W \cdot 3/2 = 3W \cdot 1$ (1)

peso x distancia = peso x distancia

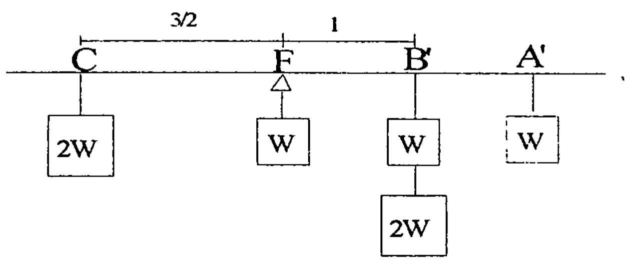


fig. 2.3

Desde los tiempos de Arquímedes, la mecánica no había progresado notoriamente, sin embargo Heron de Alejandría, que vivió en el siglo I de nuestra era, amplió los trabajos sobre mecánica y centro de gravedad de Arquímedes y realiza investigaciones sobre: la composición de fuerzas, de velocidades y de movimientos, el centro de gravedad y el plano inclinado. Enuncia el principio de los trabajos virtuales[1]. Además, empleó el concepto de brazo de palanca y en su estudio del equilibrio de la palanca utilizó el

[1] Los enunciados de Herón y Da Vinci para los trabajos virtuales peden encontrarse en Shurmann, pp 6

producto de la fuerza por el brazo de palanca, aplicando pues en forma precisa el concepto de momento estático creado por Arquímedes.

Más tarde, Leonardo Da Vinci (1452-1519), fue el primero en reconocer el concepto general de momentos estáticos como aplicación a problemas de equilibrio.

Da Vinci enunció con más precisión que Heron el principio de los trabajos virtuales[1] . Posteriormente, en la primera mitad del siglo XVI, puede decirse que se estableció una base firme con las investigaciones del flamenco Stevin de Brujas y el italiano Galileo Galilei quienes a pesar de ser casi contemporáneos, trabajaron independientemente, pero sus trabajos se complementaron formando una base sólida para el desarrollo de la mecánica. Stevin se interesó principalmente por el estudio de los cuerpos en reposo y Galileo por el de los cuerpos en movimiento.

2.1.2 Stevin de Brujas (1548 - 1620) .

Holandés, ingeniero de alta categoría en el ejército de su país. Matemático brillante, cuya fascinación por la matemática aplicada se deja ver en su frase: ***Las matemáticas para ser buenas, deben ser utilizadas en algo***. **A él debemos la derivación de la Ley del Plano Inclinado y la Ley del Paralelogramo de Fuerzas**. [p.e. Polya. Mathhwmatical Methods in Science, (1968)] .

" Stevin fue un genio enciclopédico y fue un gran vulgarizador en una época en que los sabios no acostumbraban propagar sus conocimientos.

Una de las causas por las que su obra no trascendió al vulgo como la de Galileo o Newton es que escribió en Neerlandés, su lengua materna, pues era muy nacionalista ". [op.cit. Shurmann].

"Stevin se dedicaba profesionalmente a la construcción de diques, de hecho, parte del alcantarillado que se usa actualmente en Holanda, fue construido por él, tarea para la cual eran indispensables máquinas que levantaran pesadas cargas.

Él, como antes Leonardo Da Vinci y muchos otros, intentó construir una máquina engendradora de movimiento eterno o continuo. Hasta su época, no existía ninguna ley de la física que imposibilitara este tipo de movimiento, por lo tanto, no resultaba utópico ni irracional intentar realizarlo. En el intento, se agotó la paciencia de Stevin pero no sin sacarle provecho a sus fallidas experiencias" [op. cit. Polya].

"Aceptó como principio, la imposibilidad del movimiento perpetuo. Construyó dos planos inclinados que reposan sobre una base horizontal y que unidos por una arista superior forman un prisma triangular ABC. Rodeó el sistema con una cadena cerrada compuesta de eslabones pesados que pueden deslizarse sin rozamiento a lo largo de los planos inclinados. La cadena quedó colgando y en reposo (como se muestra en la figura 2.4).

La fuerza que actúa hacia abajo de los planos es la producida por el peso de los eslabones. La fuerza que actúa en uno de los planos es el doble de la otra y por haber exceso de peso en un lado, la cadena debería estar en movimiento. Si esto ocurre habría logrado el móvil perpetuo, pues por mucho que dure el movimiento, siempre habrá el doble de eslabones sobre *uno de los planos. Como es imposible el movimiento continuo, la cadena queda en reposo.*

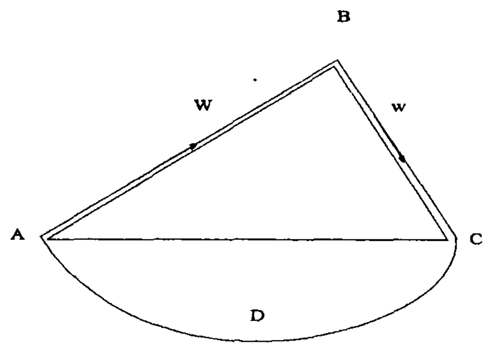


fig 2.4

Dedujo Stevin esta vez por intuición (y no por razonamiento ni experimentación) que la parte colgante de la cadena podría quitarse sin alterar el equilibrio del resto. Si esto se hiciera, los trozos AB y BC quedarían en equilibrio; n eslabones sobre un lado, equilibran 2n sobre el otro. Como los pesos de los trozos de cadena están en proporción de sus longitudes, Stevin dedujo que dos cuerpos cualesquiera que descansaran sobre las caras AB y BC unidos por una cuerda, quedarían en equilibrio siempre que sus pesos fueran proporcionales a las longitudes AB y BC, considerando que el peso de los eslabones obra menos cuanto menor es la inclinación del plano inclinado. (ver fig. 2.5). *Si uno de los planos es perpendicular a la base, entonces el trozo vertical de la cadena representa la fuerza que mantiene la carga sobre el plano oblicuo: La fuerza es pues a* *la carga, como la altura del plano inclinado a su longitud*[2] *"* [op. cit. Papp, 1961].

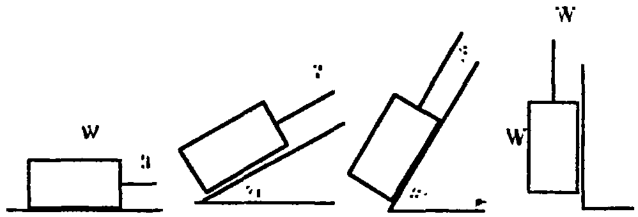


fig. 2.5

Variar el ángulo de inclinación, como se observa en la figura 2.5 es un dato importante. Llegamos a visualizar el hecho de que la fuerza necesaria para mantener un cuerpo en equilibrio en un plano inclinado, depende del declive del plano.

Otro de los notables éxitos de Stevin fue lo que hoy conocemos como la **Ley del Paralelogramo de Fuerzas**. Este ingenioso argumento se apoya en una mezcla de conocimiento experimental, de intuición y suposición, ya que a partir de sus trabajos con el plano inclinado inicia el estudio de los cuerpos sometidos a varias fuerzas.

De acuerdo con J. Jeans en su obra Historia de la Física, *"por simple razonamiento matemático Stevin deduce la regla para determinar el efecto de dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo objeto.*

*Supongamos que dos fuerzas actúan simultáneamente sobre un objeto en el punto **O**, si representamos estas fuerzas por segmentos de recta,*

[2] Polya en su obra Mathematicals Methods in Science, presenta una amplia explicación sobre la Ley del Plano Inclinado de Stevin.

las direcciones en que ellas actúan serán OA y OB como muestra la figura 2.6 (a).

En las líneas OA, OB cortamos longitudes OP, OQ proporcionales a las intensidades de las dos fuerzas y completamos el paralelogramo OPQR. Entonces la regla nos dice que las dos fuerzas producen el mismo efecto que una sóla fuerza de longitud proporcional a la longitud OR.

Si por ejemplo, en la figura 2.6 (b), *OP representa el peso de una hoja que cae, y OQ en la misma escala representa la fuerza del viento sobre la hoja, entonces esta caerá como si actuara sobre ella una sola fuerza proporcional a OR.*

Esta deducción tenía importancia en dos aspectos: aclaraba la idea de un cuerpo sometido a la acción de varias fuerzas y aportaba un resultado que fue indispensable para el progreso de la ciencia mecánica: la ley del paralelogramo de fuerzas". [p.e. J. Jeans. Historia de la Física (1982)].

Stevin enuncia el siguiente teorema: *"Tres fuerzas se equilibran cuando pueden ser representadas en magnitud y dirección por los tres lados de un triángulo, lo que es lo mismo que decir que la fuerza representada por el lado mayor es igual a la suma de las otras dos fuerzas o, igualmente, que la suma de las dos fuerzas representadas por los lados de un paralelogramo esta representada por la diagonal del mismo. Sin embargo, no utiliza la expresión paralelogramo de fuerza".* [op. cit. Schurmann].

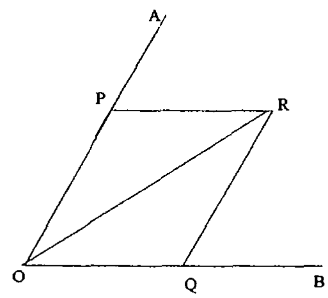


fig 2.6 (a)

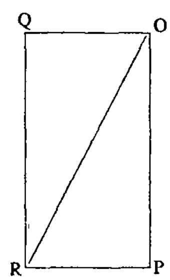


fig. 2.6 (b)

Polya ilustra, la aplicación de la Ley del Paralelogramo al estudio de una partícula en equilibrio bajo la acción de varias fierzas[3] . Consideremos la situación ilustrada en la figura 2.7

[3] Ejemplo extraído de mathematicals Methods in Science de Polya Ver bibliografía

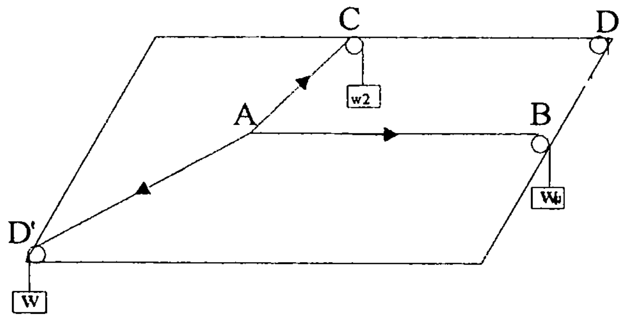


fig. 2.7

La partícula en A está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas (w_1, w_2 y w). Si A está en equilibrio bajo la acción de estas tres fuerzas, ella debe estar en equilibrio bajo la acción de una de ellas y la resultante de las otras dos. Pero es claro que A estará en equilibrio sólo si este resultado es igual en magnitud a la tercera fuerza y si actúa en dirección opuesta. Ver figura 2.8 .

Stevin reconoció que en un sistema de poleas en equilibrio, los productos de cada uno de los pesos por las magnitudes de sus respectivos desplazamientos son iguales. Implícitamente, este resultado es equivalente al principio de los trabajos virtuales, al cual nos referiremos más adelante. Por lo que podemos asegurar que Stevin había reconocido la validez de este principio en el estudio de los sistemas de poleas.

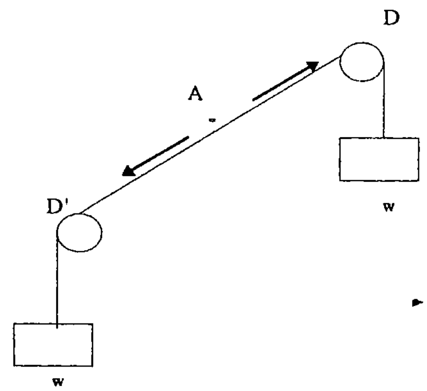


fig. 2.8

Además, en sus trabajos, Stevin especificó y amplió el estudio del momento estático, y el principio de los trabajos virtuales, el cual expresó de la siguiente manera: El espacio en que se ejerce la fuerza es al espacio que se mueve el objeto como la fuerza sufrida por el objeto es a la fuerza ejercida. [p.e. Sarton. Ensayo d la Historia de la Ciencia, (1968)] .

2.1.3 Composición de las Fuerzas. desde el Siglo XVI hasta el Siglo XVIII.

Una fuerza puede ser sustituida por una fuerza de tensión igual, ejercida por un peso y por medio de un hilo arrollado a una polea. Esta sustitución ofrece la ventaja de fijar las fuerzas en forma fácil y determinada y de presentar una imagen simple y concreta de los elementos referentes a una fuerza. En realidad las fuerzas generadas por medio de pesos son las primeras a que se refieren los fundadores de la Estática.

La imagen concreta de los elementos referentes a la fuerza se refieren a la adquisición de la medida de una fuerza y en consecuencia la determinación de su elemento intensivo. Los primeros principios de la Estática trataron sobre cierta simetría de las fuerzas en equilibrio que se encuentran adaptadas en forma implícita aún en el planteamiento de los primeros problemas de la Estática, como nociones ya conocidas. Estas son:

1) Si dos fuerzas son iguales y opuestas y actúan sobre un punto O , ambas están en equilibrio y viceversa.

2) Si un punto material A ejerce una fuerza sobre otro punto material B, y tiene como línea de acción la recta AB, entonces el punto B ejerce sobre el punto A una fuerza igual y contraria (principio de acción y reacción).

Es conveniente observar que estos principios obedecen a experiencia obvias y frecuentes.

Simón Stevin cuyas investigaciones ya hemos tratado, comprobó que tres fuerzas representadas en magnitud y dirección por los lados de un triángulo se equilibran. El enunciado moderno de este principio es el siguiente: Las fuerzas que actúan sobre un punto y que están representadas en magnitud y dirección por los lados de un paralelogramo pueden ser reemplazadas por una única fuerza dada por la diagonal del paralelogramo.

El sabio flamenco se limitó al aspecto estático de problemas sobre composición de los movimientos, los cuales son familiares a Galileo (1564-1642), quien reconoció la trascendencia del principio para la Dinámica. Es por esto que se le atribuye el descubrimiento de la Ley del Paralelogramo para el movimiento, la cual enuncia: *"La resultante dinámica de las fuerzas que actúan sobre cada punto equivale en cada instante a su resultante estática."* [p.e. Enríquez. Problemas de la Ciencia, (1947)]. A esta ley también se le conoce como Postulado de Galileo.

El descubrimiento del Principio de Composición de las Fuerzas ha sido alcanzado históricamente en forma inductiva por medio de casos particulares; Ya hemos visto que Stevin ha llegado a él, basándose justamente en la composición de las fuerzas perpendiculares, indirectamente conocida.

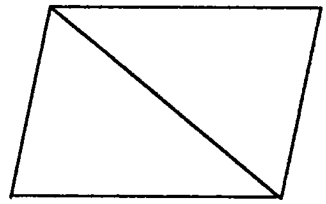
Galileo, con motivo de su estudio de la trayectoria de los proyectiles, planteó el principio de la composición de los movimientos. Imaginó la independencia de los movimientos e hizo un gran aporte al desarrollo de la Estática al establecer que:

-Si dos fuerzas en la misma dirección, sentido contrario y magnitud igual se aplican a un cuerpo, éste queda en reposo.

-Dos fuerzas en la misma dirección y el mismo sentido suman sus efectos.

También como Stevin dio su importancia al *Momento Estático.*

Posteriormente Newton (1642-1727) generalizó el principio de paralelogramo de fuerzas, cuyo enunciado es el siguiente: *"Un cuerpo que está impulsado por dos fuerzas simultáneamente recorrerá la diagonal de un paralelogramo en el mismo tiempo que hubiera tardado en recorrer los lados del mismo si dichas fuerzas hubieran actuado separadamente"*



Este principio se deduce de las Leyes I y II del movimiento de Newton. [Universidad de Puerto Rico, Depto. de Ciencias Físicas. 1973], o sea, las consideraciones dinámicas lo condujeron a formular claramente la Ley del Paralelogramo de Fuerzas.

Aunque el nombre de Newton está generalmente asociado a la dinámica, es interesante observar que la Ley de Acción y Reacción , la cual es muy útil en Estática, fue primero expresada por él (Ley III del movimiento de Newton[4]). Percibe en este principio una simple extensión del principio de simetría estática admitiendo explícitamente que la fuerza resultante, de las acciones de unos cuerpos sobre otros, actúan sobre los mismos cuerpos tanto en el movimiento como en el equilibrio. De esto se deduce, que el principio de acción y reacción, el cual describe la interacción de partículas sin estructura, es una consecuencia de la homogeneidad, isotropía y simetría especular del espacio[5] . Consideraba la Geométría de Euclídes como la única

---

[4] Ley I Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme y rectilineo, a menos que fuerzas aplicadas a él lo obliguen a cambiar de estado

Ley II · El cambio en la cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre en la dirección de la línea recta en que se aplica dicha fuerza

Ley III Para toda acción (fuerza impresa) siempre hay una reacción iguala ella; o sea, las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales y están dirigidas hacia partes contrarias

[5] La homogeneidad del espacio se refiere a la imposibilidad de diferenciar una región del espacio de otra, un punto de otro, etc.

La isotropía del espacio se refiere a que sus propiedades son iguales en todas direcciones, a la no posible y absoluta, con la cual quedaban agotadas las propiedades de todas las partículas del espacio.

Más tarde, después de las construcciones dinámicas de Galileo y Newton, Varignon (1654-1722) llegó a establecer más explícitamente la composición de las fuerzas deduciéndolas de las de los movimientos y tratando la Estática como un caso particular de la Dinámica. En su Proyecto de una Nueva Mecánica, que publicó en París en 1687 se encuentra un enunciado claro y en la forma usual de la composición de las fuerzas concurrentes por el paralelogramo de fuerzas imaginado por Stevín, un enunciado general del principio de las velocidades virtuales y el origen de la teoría de los momentos, con el famoso Teorema de Varignon: "*La suma algebraica de los momentos de dos fuerzas concurrentes, con relación a un punto tomado en su plano, es igual al momento de su resultante*". [op. cit. Surmann].

Podemos observar que cualquiera que fuese la vía elegida para descubrir el principio de composición de las fuerzas, el resultado fue adquirido en su forma concreta: Paralelogramo de Fuerzas.

La Mecánica adoptó durante el siglo XVIII su forma matemática. Las bases de esta matematización fueron puestas por Newton en su Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687).

Durante la primera mitad del siglo XVIII, y debido a los esfuerzos de hombres como Jakob, Johann y Daniel Bernoulli, D'Alambert, Clairant y Euler, se fue matematizando el estilo de las investigaciones en la Mecánica,

---

existencia de direcciones privilegiadas
La simetría especular del espacio es la simetría o reflexión con respecto a cualquier plano

es decir, los antiguos métodos se fueron transformando en métodos analíticos y se fueron unificando al presentar las leyes básicas expresándolas por medio de fórmulas matemáticas y en particular , en forma de ecuaciones diferenciales.

Los grandes textos de Mecánica Análitica tales como la Mechanica (1736) de Euler, los de D'Alambert (1743) y los de Lagrange (1788) nos van mostrando un proceso gradual de matematización de la Mecánica.

Prosiguiendo con el trabajo de Stevin, Euler (1707-1783) amplió el estudio de la composición de las fuerzas, velocidades y aceleraciones. Como no admitía ni el espacio absoluto ni el tiempo absoluto, negaba la existencia de un sistema relativo de referencia y la representación absoluta de un movimiento con ejes coordenados. En sus estudios de la representación del movimiento de un punto material aplicaba **la Ley del Paralelogramo** de Stevin a los vectores, aún cuando no llegó a usar el término vector.

Por otro lado, Fonceneux (1734-1799) intentó deducir la ley de composición del principio abstracto de la existencia de la resultante y de los principios de simetría.

Basada en un estudio de Fonceneux, se induce posteriormente una ley de composición de las fuerzas paralelas dirigidas en el mismo sentido, la que queda determinada por la admisión de las hipótesis anteriormente señaladas (existencia de una resultante única, principio de simetría) y la propiedad asociativa de la composición de las fuerzas.

En esta ley de composición de fuerzas **la resultante de dos fuerzas paralelas igualmente dirigidas es igual a la suma de las componentes**.

Se obtiene que la anterior ley ordinaria está comprendida en la Ley del Paralelogramo de Fuerzas que también se conoce como la Ley para la Composición de Fuerzas Concurrentes [op. cit. Enríquez].

2.1.4 Principio de Los Trabajos Virtuales.

El principio del equilibrio basado en la comparación de los momentos estáticos, constituyen el fundamento de la Estática de los sistemas en una fase de desarrollo anterior a los conocimientos dinámicos, donde las primeras experiencias elementales explícitas se refieren inmediatamente a la intuición del equilibrio mismo. Una fase posterior de desarrollo está marcada por el empleo de consideraciones dinámicas y en especial por la comparación de los trabajos virtuales, es decir, los trabajos ejecutados por el sistema a través de pequeños desplazamientos compatibles con los vínculos[6].

Como ya hemos señalado, los orígenes de este principio se encuentran en los trabajos de Stevin y Leonardo Da Vinci, Pero de acuerdo con algunos autores este principio también había sido indicado, pero en forma limitada por Heron, Descartes, Wallis y otros. También lo aplicó Galileo en la explicación de algunas máquinas simples (la palanca, el torno y el tornillo).

La primera observación de Stevin sobre el equilibrio de los sistemas de poleas y una observación más general de Galileo sobre el plano inclinado han

[6] Vínculo es toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo. Y se mantienen constantes, independientemente de las fuerzas aplicadas. Por ejemplo, las distancias mutuas de los puntos de un cuerpo sólido

conducido al principio del equilibrio reconocido en su más vasta significación por Juan Bernoulli (1667-1748). Pues en una comunicación hecha a Varignon en 1717 dio el primer enunciado amplio del principio de los trabajos virtuales aplicado al caso general de equilibrio de fuerzas en todas direcciones. Este enunciado es el siguiente: *"Cuando fuerzas cualesquiera se aplican de un modo cualquiera a un cuerpo y obran directamente e indirectamente, hay equilibrio cuando la suma de las energías positivas es igual a la suma de las energías negativas. Entendiéndose por energía (momento o trabajo virtual) el producto de la fuerza por la proyección del desplazamiento en la dirección de la fuerza y tomándose ésta positivamente o negativamente, según la proyección caiga sobre la prolongación o sobre la dirección de la fuerza".* [op. cit. Shurmann].

D'Alambert (1717-1783). *"El célebre principio que lleva su nombre establece que Están en equilibrio las fuerzas perdidas durante el movimiento de un sistema, y que el trabajo virtual de esas fuerzas perdidas es igual a cero.* [op. cit. Enríquez].

La demostración del principio general de D'Alambert se hace admitiendo que la resultante dinámica de las fuerzas que actúan sobre cada punto equivale en cada instante a su resultante estática (postulado de Galileo).

Es por eso que el principio general de D'Alambert es una consecuencia del postulado de Galileo.

Lagrange (1736-1813). Su Mecánica Analítica (París, 1788) es considerada por muchos el inicio de la completa sistematización de ambas, Estática y Dinámica.

En Estática, Lagrange comenzó con el principio de Trabajo Virtual. Llegó a darle una expresión completa y clásica. Dio la mayor generalización a ese principio elaborado a través de tantos siglos; le dio su más perfecta aplicación y el lugar de preferencia en la Mecánica, así como un enunciado amplio y preciso: **Cuando un sistema cualquiera de un número cualquiera de cuerpos o de puntos, de los cuales cada uno está sometido a una fuerza cualquiera, está en equilibrio, y cuando se da a este sistema un pequeño movimiento cualquiera, en virtud del cual cada punto recorre un camino infinitamente pequeño, la suma de todas las fuerzas, multiplicada cada una por el camino recorrido por el punto, sobre el cual actúa en dirección de la fuerza, es igual a cero.**

Lagrange dedujo de allí las ecuaciones necesarias al equilibrio. Por esta razón podemos afirmar que muchas de las conclusiones de la Estática se obtienen a partir de las ecuaciones de la Dinámica.

"El principio de los trabajos virtuales constituye la proposición o la afirmación más general de la Estática. A partir de él se pueden deducir las condiciones de cualquier otro sistema mecánico". [p.e. Cernuschi, Experimento,Razonamiento y Creación en Física. (1969)] .

2.1.5 El Postulado V de Euclides y la Estática Ordinaria.

La Mecánica y la Matemática desde sus primeros pasos están indisolublemente unidas. Por ejemplo, la Mecánica como ciencia no podía surgir sin la Geometría Euclidiana y sin el aparato del Cálculo Diferencial e Integral. En el caso particular de la Estática se observa que esta tiene una parte puramente geométrica, independiente del sentido físico de los vectores[7]. Consideremos por ejemplo, el Postulado V de Euclides sobre las paralelas; la Estática se funda sobre él.

Como evidencia de esto, presentamos ciertas argumentaciones de Lagrange sobre una hipótesis sobrentendida que aplica Arquímedes en la demostración de la proposición 6, y de la cual Roberto Bonola hace derivar una importantísima conexión entre la proposición en cuestión y el postulado de las paralelas de Euclides[8]. Podemos observar que esta hipótesis es el supuesto A. al cual Polya hace referencia más adelante.

Resulta interesante observar que dichas argumentaciones son realizadas dieciocho siglos después de Arquímedes y casi un siglo después de Stevin.

La hipótesis de Arquímedes es la siguiente: *Una palanca suspendida por su punto medio, está en equilibrio cuando en un extremo se aplica el peso 2P y al otro extremo se cuelga, por el punto medio, una nueva palanca, llevando en cada extremo un peso igual a P.*

---

[7] Entes geométricos los cuales se aplican en el estudio de la Estática, como veremos más adelante

[8] Desarrollamos y ampliamos las argumentaciones de Lagrange y Bonola justificando algunas de sus aseveraciones

Veamos las argumentaciones de Lagrange:

"Sea ABD un triángulo isósceles ($AD = BD$), cuyos vértices A y B soportan dos pesos iguales a P y el vértice D un peso igual a $2P$.

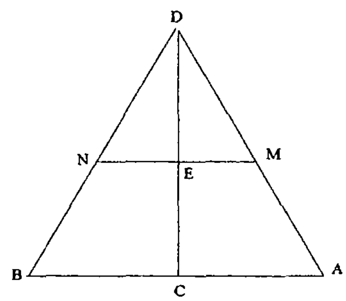


fig. 2.24

Este triángulo estará en equilibrio con respecto a la recta MN, que une los puntos medios de los lados iguales del triángulo, porque cada uno de estos lados puede consideraese como una palanca cuyos extremos soportan ***pesos iguales.****"*

Pero, asegura Bonola, que "*el equilibrio de la figura se puede obtener también apoyando el triángulo sobre una recta que pase por el vértice D y por el punto medio C del lado AB, por lo cual, llamando E al punto de encuentro de los ejes MN y CD, el triángulo ΔABD estará en equilibrio si se le suspende por el punto E.*

Como el eje MN pasa por los puntos medios de los lados BD y AD del triángulo ΔABD pasará también necesariamente por el punto medio del segmento CD. Entonces la palanca transversal CD tendrá el punto de apoyo E en el punto medio de CD y deberá por consecuencia ser cargada igualmente en sus extremos C y D. Así, la carga que soporta el punto de apoyo de la palanca que forma la base del triángulo ΔABD (el lado AB) y que está cargada en sus dos extremos A y B por pesos iguales a P, será igual a 2P y en consecuencia, igual a la suma de los dos pesos en los extremos A y B

El razonamiento de Lagrange utiliza, además de hipótesis de índole estática[9] *, una propiedad geométrica del triángulo euclídeo ABD.*" [p.e. Bonola. Geometrías no Euclidianas, (1945)].

Afirmamos que la propiedad a la cual se refiere Bonola es la siguiente:
En todo triángulo isósceles, la altura y el segmento que une los puntos medios de los lados congruentes se bisecan mutuamente.

En efecto, probaremos que E es el punto medio del segmento MN y del segmento CD. Trazamos las otras medianas BM y AN del triángulo ABD.

Como BD ≅ AD y C es el punto medio del segmento AB, además CD es común a los triángulos BCD y ACD, entonces por el criterio L.L.L. los triángulos ΔBCD y ΔACD son congruentes, por lo tanto, los ángulos ⟨BDC y ⟨ADC son congruentes. Luego, por el criterio L.A.L. los triángulos NDE y MDE son congruentes, ya que MD ≅ ND por ser

[9] Hipótesis del refuerzo de las ligaduras Un sistema permaneerá en equilibrio, si a las ligaduras ya existentes se le agregan otras nuevas

M y N los puntos medios de los lados BD y AD. El lado DE es común y los ángulos ⟨ NED y ⟨ MDE son congruentes como se acaba de demostrar. Por tanto, EN es congruente con EM. Luego E es el punto medio del segmento NM.

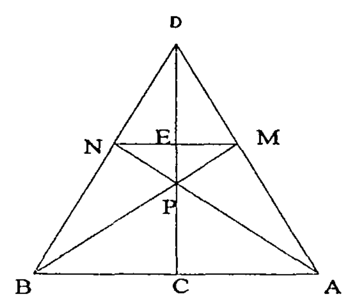


fig 2.25

Sabemos que MN es paralelo a AB, luego es claro que Δ EMP y ΔBCP son semejantes.

Sea P el baricentro del triángulo ABD. Sabemos que la distancia del baricentro P a cada vértice, es los 2/3 de la mediana correspondiente.

Por lo tanto: EP / PC = MP / BP

$$EP \,/\, 1/3\; PC = MP \,/\, BP$$

o sea: $$EP \,/\, 1/3\; CD = 1/3\; MB \,/\, 2/3\; MB$$

Luego, $$EP = 1/6\; CD$$

Como: $\quad CE = CP + PE$

$$CE = 1/3\ CD + 1/6\ CD$$
$$= 1/2\ CD$$

es decir, E es el punto medio del segmento CD.

Continúa Bonola "*si se quiere prescindir de la propiedad anterior, entonces las anteriores conclusiones* (en relación a que el triángulo estará en equilibrio si se le suspende por el punto E) *se modificarán.*

En efecto, subsistiendo como verdadero, el principio de que el triángulo ΔABD esté en equilibrio alrededor del punto E, en que se encuentran los dos ejes MN y CD, y si no se toma en cuenta la propiedad anterior, entonces *no se puede asegurar que E sea el punto medio de CD;* Por consiguiente, no se podrá asegurar que los dos pesos aplicados en A y B puedan sustituirse con el único peso 2P, aplicado en C, porque, si tal sustitución pudiese tener lugar, debería subsistir el equilibrio de una palanca con pesos iguales en los extremos, alrededor de un punto que puede no ser su punto medio, lo cual contradice el Postulado I de Arquímedes. *Asegurar que E sea el punto medio de CD, equivale a admitir el Postulado de las Paralelas.*"

Sustentamos lo anterior del modo siguiente: El V postulado de Euclides es equivalente a la proposición que afirma que en un cuadrilátero de Sacchieri[10] los ángulos superiores son iguales a 90°.

[10] Cuadrilátero de Sacchieri Cuadrilátero con dos lados paralelos iguales y dos ángulos rectos en la

Sea el triángulo isósceles ΔADB en donde $AD = BD$ y sea C el punto medio de AB.

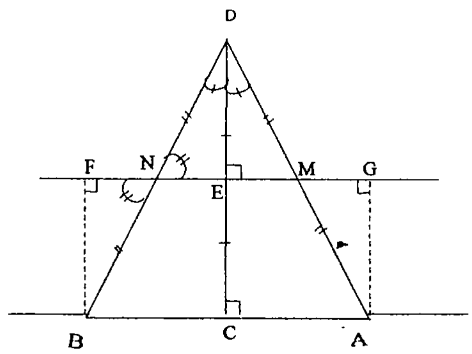


fig 2 26

Como ya demostramos $\langle ADC \cong \langle BCD$.

Como N y M son los puntos medios de BD y AD respectivamente, por el criterio L.A.L. los triángulos NED y MED son congruentes.

Prolongamos el segmento MN en ambos sentidos. Levantamos desde B una perpendicular a la prolongación de NM, siendo F su intersección. De manera análoga levantamos una perpendicular desde A hasta la prolongación de NM y sea G su punto de intersección.

Por el criterio A.A.L. los triángulos NED y NFB son congruentes y, por consiguiente, $ED \cong BF$.

Por hipótesis, E es el punto medio de DC, luego $BF \cong EC$ y, por lo tanto, el cuadrilátero BCEF es de Saccheri. Pero, como $\langle BCE = 90°$ y en un cuadrilátero de este tipo, los ángulos inferiores también son iguales, el ángulo $\langle FBC = 90°$.

---

base

De manera análoga, los triángulos MED y MGA son congruentes y por consiguiente $AG \cong ED$, por lo que el cuadrilátero CAGE también es de Saccheri y como el ángulo $\langle ECA$ es recto, entonces $\langle CAG$ también lo es.

A su vez, el cuadrilátero ABGF es de Saccheri donde $AF \cong BG$ y $\langle EFB = \langle EGA = 90^\circ$ y, además, $\langle F\hat{B}C = \langle CAG = 90^\circ$. **Es decir, ABFG es un cuadrilátero euclídeo l.c.q.d.**

Recíprocamente, según Bonola, "*si se admite con Arquímedes que a dos pesos iguales puede sustituirlo un peso único aplicado al punto medio de la palanca, se deduce que E es el punto medio de CD y, sucesivamente, que ABD es un triángulo euclídeo*".

Probamos la anterior afirmación de la siguiente manera: Cuando los vértices A y B soportan dos pesos iguales a P y el vértice D un peso igual a 2P, entonces el triángulo está en equilibrio alrededor de la recta MN que une los puntos medios de los lados iguales del triángulo ABD.

Al sustituir los dos pesos iguales P aplicados en A y B por un peso único 2P en C, siendo C el punto medio de la palanca AB, el sistema se mantiene en equilibrio al rededor del punto medio de la palanca CD. Como este punto medio está en el segmento NM, puesto que son colineales, entonces el punto E de encuentro de los segmentos NM y CD, es el punto medio de CD.

Observación: Es claro que si E no es el punto medio de CD el triángulo ABD no es euclídeo.

En efecto, si E no es el punto medio de CD, supongamos que EC es menor que ED.

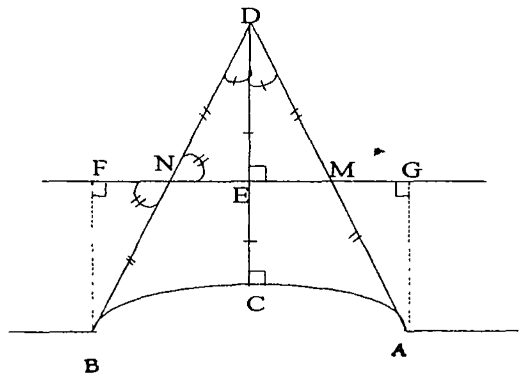


fig 2.27

Prolongamos NM, levantamos la perpendicular desde A hasta la prolongación de NM y la perpendicular desde B hasta la prolongación de NM. Sean G y F, respectivamente, los puntos de intersección .

Como $ND \cong MD$ y ED es común, los triángulos NED y MED son congruentes y por consiguiente, los ángulos $\langle NED = \langle MED = 90°$ por ser congruentes y suplementarios. Además, el $\Delta NED \cong \Delta NFB$ por el criterio A.A.L. y por lo tanto, $DE \cong FB$. De manera análoga, el triángulo $MED \cong MGB$ por lo que $ED \cong AG$.

El cuadrilátero $ABFG$ es de Saccheri y como $EC < BF$,

$$\langle NBC = \langle MAC < 90°$$

Entonces, el triángulo ABD no es euclídeo. Es claro que la suma de sus ángulos es menor que 180°.

Con esto queda establecida la equivalencia entre el V postulado de Euclídes y la susodicha hipótesis de Arquímedes.

Como los pesos se pueden sustituir por fuerzas, entonces la hipótesis anterior puede adoptar la siguiente forma dos fuerzas de igual intensidad situadas en un mismo plano, aplicadas perpendicularmente a los extremos de un segmento, y hacia un mismo lado de él, se componen de una fuerza única de intensidad igual a la suma de las intensidades de las fuerzas dadas y aplicadas al punto medio del segmento.

Pero, hemos señalado anteriormente que esta ley ordinaria de composición de fuerzas está comprendida en la Ley del Paralelogramo de fuerzas. Por consiguiente la aplicación de ambas leyes de composición exige que en el espacio se verifique la Teoría Euclidiana de las paralelas[11] .

En la actualidad, el Álgebra Vectorial representa una herramienta fundamental en el estudio y el aprendizaje de la Estática, razón por la cual, presentamos, brevemente, como surgió el concepto de vector y principalmente como llegó a relacionarse este concepto con el estudio de la Estática.

[11] Geometría Neutra más el V postulado

2.1.6 Álgebra de Vectores. Instrumento Fundamental en Estática.

Desde el punto de vista matemático, el Álgebra Vectorial es un estudio de entidades geométricas y formas algebraicas. En particular se puede considerar como el estudio matemático de la interacción de los conceptos: número real positivo y dirección.

Puesto que esta consideración es una justificación para abordar el estudio de las magnitudes con sentido, la búsqueda de perspectiva histórica nos conduce a sus orígenes[12] .

El concepto vector se introduce explícitamente por Gaspar Wessel (1745-1818) en su obra *On Directionens Analytiske Betregning* (Sobre la Representación Analítica de los Vectores), en el año 1797 y en 1799, publicó la primera explicación satisfactoria de la representación geométrica de los números complejos. Posteriormente, en 1806, J. R. Argand (1768-1822) en su obra *Essai Sur une Manière de Representer les Quantités Imaginaires dons les Constructions Geómetriques*, también los relaciona con la representación de los números complejos. Además de ellos, son muchos los

---

[12] Se dió un paso hacia adelante en la Geometría cuando el sistema numérico se extendió hasta considerar los números tanto positivos como negativos La idea de direcciones opuestas, jugó un papel importante en la exposición y el desarrollo del concepto número negativo Aunque Albert Girard, René Descartes y otros introdujeron en la Geometría segmentos negativos durante el siglo XVII [p.e Howard. Estudio de la Geometría, (1969)], la idea de magnitudes con sentido y en particular, la noción de ángulo orientado con sus diversas variantes (ángulo de rectas, ángulo de semi rectas) fue desarrollada por Euler, Camnot y möbius [p e Bourbaki Elementos de Historia de las Matemáticass]

Euler en su obra Opera Omnia introduce las coordenadas polares en forma sistemática en Geometría Analítica y también la concepción moderna de ángulo (medido en radianes) tomando valores positivos y negativos [op. cit Collete]. En su Introductio in Analysin Infinitorum de 1748 Euler estudia las funciones trigonométricas desde un punto de vista estrictamente analítico, de modo que por ejemplo, el seno podía convertirse en una razón la ordenada de un punto sobre la circunferencia unidad [sup cit Collette]

Mobius en su obraa Gesammelte Werke introduce el concepto de ángulo orientado en los razonamientos de la geometría sistemática [sup cit Bourbaki].

investigadores que se preocupan de la representación de los números complejos, como por ejemplo: Gauss, Euler, Cauchy, Servois, Segre, Staudt, entre otros. Pero los aportes más significativos partieron de los trabajos de Hamilton y Grassmann.

Los números complejos son importantes en el desarrollo histórico de los vectores. La Ley del Paralelogramo sirvió como un estímulo para el desarrollo de la adición de vectores, y los números complejos, proveen una analogía matemática a esto.

Las obras de Sir Harris Hamilton (1805-1865) y H. G. Grassmann (1809-1877), fundamentales en la historia de la Matemática, son del mayor interés en cuanto a nuestro particular estudio se refiere, ya que introdujeron los conceptos básicos del Álgebra Vectorial.

El nombre vector del latín *vehere* que significa *transportar* fue propuesto por Hamilton [p.e. Goreth. Fundadors de las Matemáticas Modernas, (1992)] , quien emplea las notaciones PQ y Q-P para denotar los vectores. Notaciones que abandona posteriormente y emplea una sóla letra para denotarlos. Extendió la representación del número complejo al espacio de tres dimensiones. Creía que la representación geométrica era útil para la intuición, pero no satisfactoria para la representación lógica de los números complejos. Esto lo llevó a buscar otras formas de representarlos.

Introduce el par ordenado (a,b). Establece un conjunto de reglas para operar con estos pares ordenados de manera que obedecieran a las reglas usuales en las operaciones con números complejos pero que evitaran las dificultades que se presentaban con la unidad imaginaria. Esta álgebra tiene aplicaciones que van más allá de las números complejos y podemos encontrarla hoy en los libros de texto.

Hamilton era consiente de que la Geometría del plano podía ser tratada mediante pares algebraicos (que en la actualidad llamamos vectores filas en dos dimensiones) de la misma forma que se podía hacer con los números complejos.

Después de su teoría de los pares ordenados, se dedicó a extender la teoría de los números complejos al espacio de tres dimensiones de donde surge su teoría de los cuaterniones. En esta teoría, Hamilton desarrolla un álgebra basada en cuatro unidades fundamentales (1,i,j,k), introduciendo con ella una operación binaria no conmutativa la cual es conocida actualmente como **Producto Cruz o Producto Vectorial** con la cual muchos aspectos de la Mecánica pueden ser manejados. La introducción de esta operación no conmutativa es considerada como un notable logro de Hamilton.

"La teoría de los cuaterniones de Hamilton, donde:
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ *no fue completamente el producto de su propia imaginación. Augusto M. Möbius (1790-1868) un estudiante de Gauss, trabajó mucho a lo largo de esa línea en su Cálculo Baricéntrico, pero adaptándola a las necesidades de la Geometría Proyectiva"* [op. cit. Bourbaki].

Hamilton intuyó que los cuaterniones eran un nuevo método matemático para la Geometría y la Física. Su idea sobre los cuaterniones fue ponderada por sus seguidores, quienes abogaron por su utilización en la ciencia.

"Al término constante de los cuaterniones, Hamilton lo designó con la palabra escalar y a la parte con término en i, j, k como parte vectorial. En libro Lecture in Quaternions (Lecciones sobre los Cuaterniones), Hamilton da una definición semejante a otra que usamos en la actualidad: Un vector tiene cantidad, en el sentido que puede ser multiplicado por dos, tres, etc......también podemos consebirlo como si tuviera algún tipo de unidad análoga a la dirección."[op. cit.Gareth] .

Los trabajos de Hamilton, condujeron, indirectamente, hacia un álgebra y un análisis de los vectores que fue aceptada y aplicada de lleno por los físicos a fines del siglo XIX.

"En 1844, un año después del descubrimiento de los cuaterniones de Hamilton, Grassmann publica su obra Ausdehnungslehre, ein Neuer zweig der Mathematic...(La Teoría de la Extensión Lineal, una Nueva Rama de la Matemática) obra que contiene gran parte del análisis vectorial moderno presentado en el seno de un sistema geométrico más amplio que se refiere a la geometría de n dimensiones. En esta obra considera el vector como una forma geométrica particular de primera especie, que designa con el nombre de Strecke (segmento)." [p.e. Collette. Historia de las Matemáticas II (1985)] .

"En 1832, Grassmann considera las distancias AB Y BA y constata que son opuestas a causa de su dirección. Deduce de ello la necesidad de introducir el concepto de suma geométrica, que le permite generalizar la relación AB+BC=AC para A,B y C puntos cualesquiera del plano. En su Theorie der Ebbe und Flut (Teoría de las Mareas) presenta por primera vez un sistema de análisis espacial fundamentado en los vectores y otros

resultados importantes de su nuevo análisis. Partiendo de la Ley de Inercia, muestra que la velocidad S debida a fuerzas combinadas es una suma geométrica de las velocidades P y Q debida a fuerzas individuales, y que S=P+Q. Además se interesa particularmente por las Leyes de Adición y Sustracción Geométricas." [sup. cit. Colette].

Grassmann define el *producto geométrico* como el producto de dos lados adyacentes de un paralelogramo consideradas como magnitudes dirigidas. Afirma que el producto geométrico de dos vectores representa la superficie contenida en el paralelogramo determinado por esos vectores. Demuestra que el producto geométrico de tres vectores situados en planos paralelos es igual a cero y además, demuestra la Ley de Distributividad del producto geométrico y reemplaza la conmutatividad por la anticonmutatividad. Es importante señalar, que el producto geométrico de Grasmann es similar a nuestro producto vectorial moderno.

Grasmann define el *producto lineal* de la siguiente manera: *"por producto lineal de dos vectores entendemos el producto algebraico de un vector multiplicado por la proyección del segundo vector sobre el primero."* Se observa que este producto es igual al producto escalar moderno. Demuestra la conmutatividad de ese producto. [op. cit. Colette].

También, esboza a Grassmann el desarrollo del Cálculo Diferencial para los vectores y afirma lo siguiente: *"Todas las leyes de la diferenciación algebraica y consecuentemente también de la integración, son igualmente válidas en el análisis geométrico."* [sup. cit. Collette].

Las grandes contribuciones de Hamilton y Grassmann, ambas, Cuaterniones y La Teoría de la Extensión Lineal, contienen no solamente el *resultados importantes de su nuevo análisis. Partiendo de la Ley de Inercia, muestra que la velocidad S debida a fuerzas combinadas es una suma geométrica de las velocidades P y Q debida a fuerzas individuales, y que S=P+Q. Además se interesa particularmente por las Leyes de Adición y Sustracción Geométricas."* [sup. cit. Colette].

Grassmann define el *producto geométrico* como el producto de dos lados adyacentes de un paralelogramo consideradas como magnitudes dirigidas. Afirma que el producto geométrico de dos vectores representa la superficie contenida en el paralelogramo determinado por esos vectores. Demuestra que el producto geométrico de tres vectores situados en planos paralelos es igual a cero y además, demuestra la Ley de Distributividad del producto geométrico y reemplaza la conmutatividad por la anticonmutatividad. Es importante señalar, que el producto geométrico de Grasmann es similar a nuestro producto vectorial moderno.

Grasmann define el *producto lineal* de la siguiente manera: *"por producto lineal de dos vectores entendemos el producto algebraico de un vector multiplicado por la proyección del segundo vector sobre el primero."* Se observa que este producto es igual al producto escalar moderno. Demuestra la conmutatividad de ese producto. [op. cit. Colette].

También, esboza a Grassmann el desarrollo del Cálculo Diferencial para los vectores y afirma lo siguiente: *"Todas las leyes de la diferenciación algebraica y consecuentemente también de la integración, son igualmente válidas en el análisis geométrico."* [sup. cit. Collette].

Las grandes contribuciones de Hamilton y Grassmann, ambas, Cuaterniones y La Teoría de la Extensión Lineal, contienen no solamente el producto cruz y el producto escalar, sino que parte de sus trabajos se consideran en el Análisis Vectorial moderno.

Cabe señalar, que los vectores, que se introdujeron a raíz de los trabajos de Hamilton y Grassmann se utilizaron primeramente en física y sólo más tarde, (en el siglo XX) se convirtieron en el instrumento tradicional de la Geometría Analítica y Diferencial.

James C. Maxwell (1831-1879). Separa, en los cuaterniones de Hamilton, la parte escalar de la parte vectorial (imaginaria), y en su obra Treatise on Electricity and Magnetisin (Tratado sobre la Electricidad y el Magnetismo) publicado en 1873, enfatiza la importancia de los cuaterniones de Hamilton y presenta un estudio de la magnitudes separadas en escalares y vectoriales. Indica que existen magnitudes que no pueden ser representadas por vectores y da ejemplos de éstas.

El gran mérito de Maxwell fue revelar la importancia de la parte vectorial del cuaternión en el desarrollo de un instrumento apropiado para el tratamiento de los fenómenos físicos.

John Willard Gibbs (1839-1903). Uno de los más conocidos físicos matemáticos del siglo XIX, que influyó enormemente en el desarrollo del análisis vectorial. Independientemente, al igual que Oliver Heaviside (1850-1925) contribuyó a establecerla como disciplina autónoma e independiente de los cuaterniones de Hamilton y del análisis de Grassmann.

La efectividad de la Teoría de los Cuaterniones fue un hecho debido a la gran cantidad de aspectos vectoriales que se encontraban en ella. Puede decirse que el Análisis Vectorial se origina de la extracción que hizo Gibbs de estos aspectos vectoriales de la teoría de Hamilton y el análisis de

Grassmann. Desde luego, el Análisis Vectorial estaba profundamente sumergido en estos trabajos, pero adicionalmente Gibbs produjo resultados originales en el campo de las funciones vectoriales lineales.

Al final del siglo XIX, el análisis vectorial de Gibbs fue altamente reconocido y considerado como el instrumento ideal para la exposición de ciertas ramas de la Geometría y muchos aspectos de la Física -Matemática, particularmente en la Electricidad y Magnetismo; y posteriormente en la Mecánica.

Otras tempranas contribuciones al Análisis Vectorial fueron hechas por Maxwell, Heaviside y otros.

La obra del Ingeniero O. Heaviside titulada *Electromagnetic Theory* (Teoría Electromagnética 1893,1899,1912) contiene un capítulo sobre los métodos vectoriales.

William K. Clifford (1845-1879). Profesor de Matemática y de Mecánica en la University College de Londres. En su obra *Elements of Dynamics* (Elementos de Dinámica), introduce los vectores así como la adición y multiplicación de vectores y sus propiedades a la Mecánica. Parece haber sido el primero en dar la formulación moderna del producto escalar y el producto vectorial. A él se le atribuye el considerar el producto vectorial y el producto escalar como dos cantidades definidas por sí mismas en lugar de considerarlas como las partes del producto de dos cuaterniones (como lo hacían los discípulos de Hamilton).

La obra de Gibbs consagrada al Análisis Vectorial en tres dimensiones fue publicada bajo el título *Vector Analysis* (Análisis Vectorial) en 1901.

Al principio del siglo XX los ingenieros aceptaron de buena gana los trabajos de Gibbs y Heaviside y los incorporaron en numerosos tratados de Mecánica en todo el mundo.

Con la introducción de los vectores en Física y en los Textos de Ingeniería hubo un esfuerzo por unir, como fuera posible, la noción de vector (segmento dirigido) con los fenómenos de equilibrio y movimiento. Consideraciones de este género han intervenido históricamente en el trabajo que ha tenido por resultado sustituir la noción de fuerza por un vector que posea, el lo que concierne al equilibrio o movimiento, propiedades bien definidas[13].

Hemos señalado anteriormente, que la Mecánica Clásica, en particular la Estática desde sus primeros pasos está indisolublemente unida a la Geometría Euclidiana. La Ley del Paralelogramo, con la usual interpretación geométrica que la acompaña está en estrecha relación con la naturaleza euclídea del espacio. Roberto Bonola en su Geometría no Euclidiana, utilizando un método funcional para la composición de fuerzas atribuido a D. Fonceneaux prueba que dicho principio (la Ley del Paralelogramo de Fuerzas) es independiente de cualquier hipótesis sobre las paralelas, dando origen a la *Estática no Euclidiana*, la cual pone en evidencia al deducir la fórmula $R=2P\cos\alpha$. En donde R representa la resultante de dos fuerzas P iguales y concurrentes, siendo 2α el ángulo entre las dos fuerzas.

[13] A cada fuerza que actúa sobre un punto material se le hace corresponder un segmento orientado bien definido en magnitud y posición (vector)

Hemos visto a través del contenido de este capítulo que los conceptos y relaciones sobre los cuales se fundamenta la Estática, son conceptos y relaciones matemáticos. Que, además, la relación es tan estrecha, que algunas relaciones matemáticas, pueden obtenerse a partir de relaciones estáticas y, sobre todo, que podemos encontrar equivalencias de relaciones estáticas y relaciones matemáticas.

Significa entonces que la historia o desarrollo histórico de la Estática, fundamenta el hecho de que los estudiantes de la Universidad Tecnológica de Panamá necesitan una buena base en Álgebra de Vectores, Trigonometría, Geometría etc.(una buena base matemática) para hacerle frente, exitosamente, al curso de Estática.

En el siguiente capítulo, haremos un análisis detallado sobre los conocimientos matemáticos que se necesitan previos al estudio de la Estática y además, evaluaremos los contenidos de los cursos de preparatoria, Cálculo, y Álgebra de Vectores que se dictan en la Universidad Tecnológica de Panamá.

Capítulo 3.
Enfoque Histórico y
Aprendizaje Significativo de la Estática.

3.1 Aprendizaje Significativo de la Estática.

Para que se pueda aprender significativamente la Estática para Ingenieros, se deben satisfacer las tres condiciones presentadas por Ausubel en su teoría de aprendizaje. En este capítulo analizaremos si en los cursos de Estática en la Universidad Tecnológica de Panamá (U.T.P.) se satisfacen estas condiciones y, por ende, el estudiante puede lograr el aprendizaje significativo.

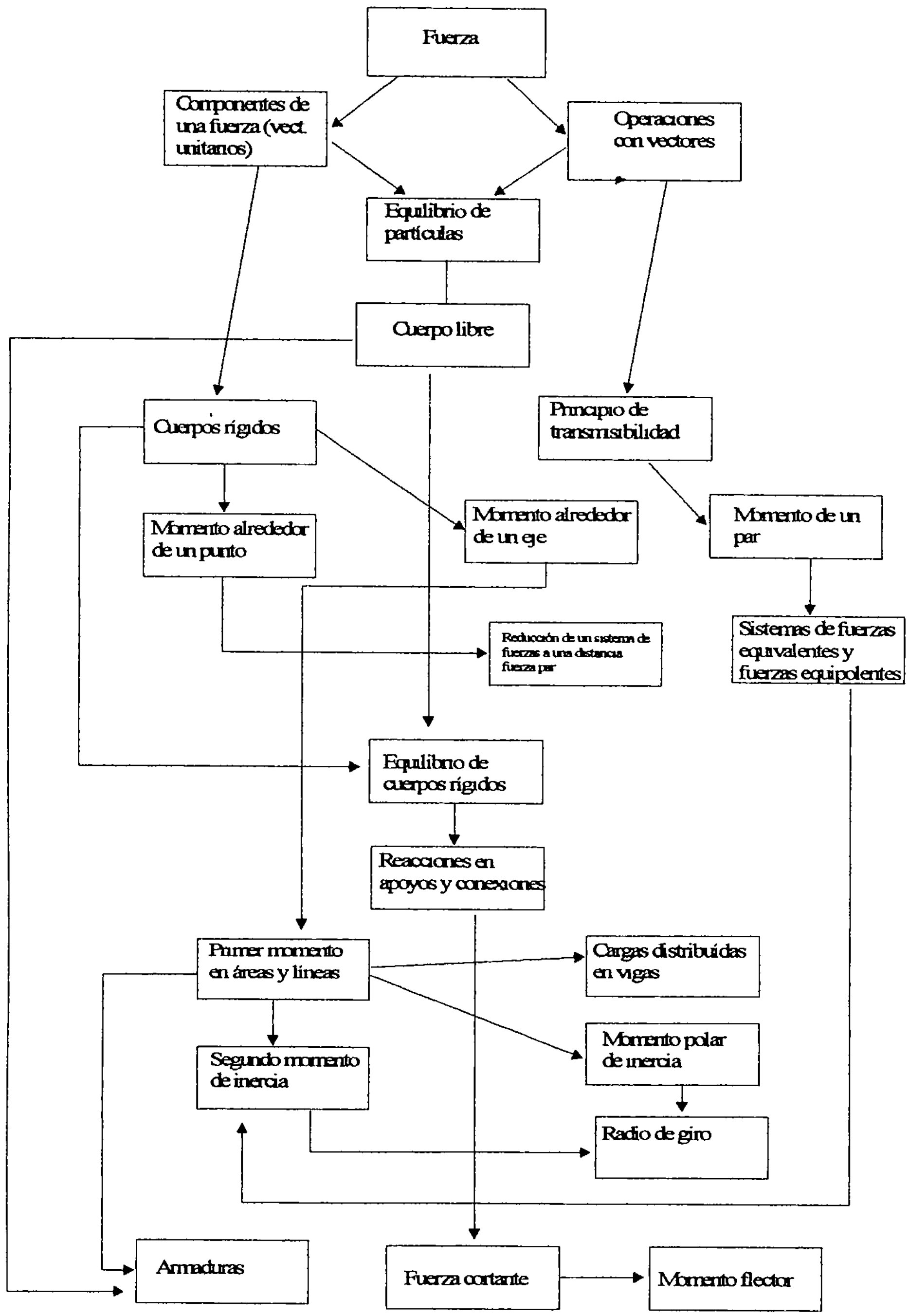
3.1.1 Condiciones del Material de Aprendizaje.

El método aplicado por los profesores de Estática en la U.T.P., para dictar sus clases, es el Método Expositivo con un enfoque heurístico. De acuerdo a lo presentado en el capítulo I, a través de este método, se puede lograr el aprendizaje significativo.

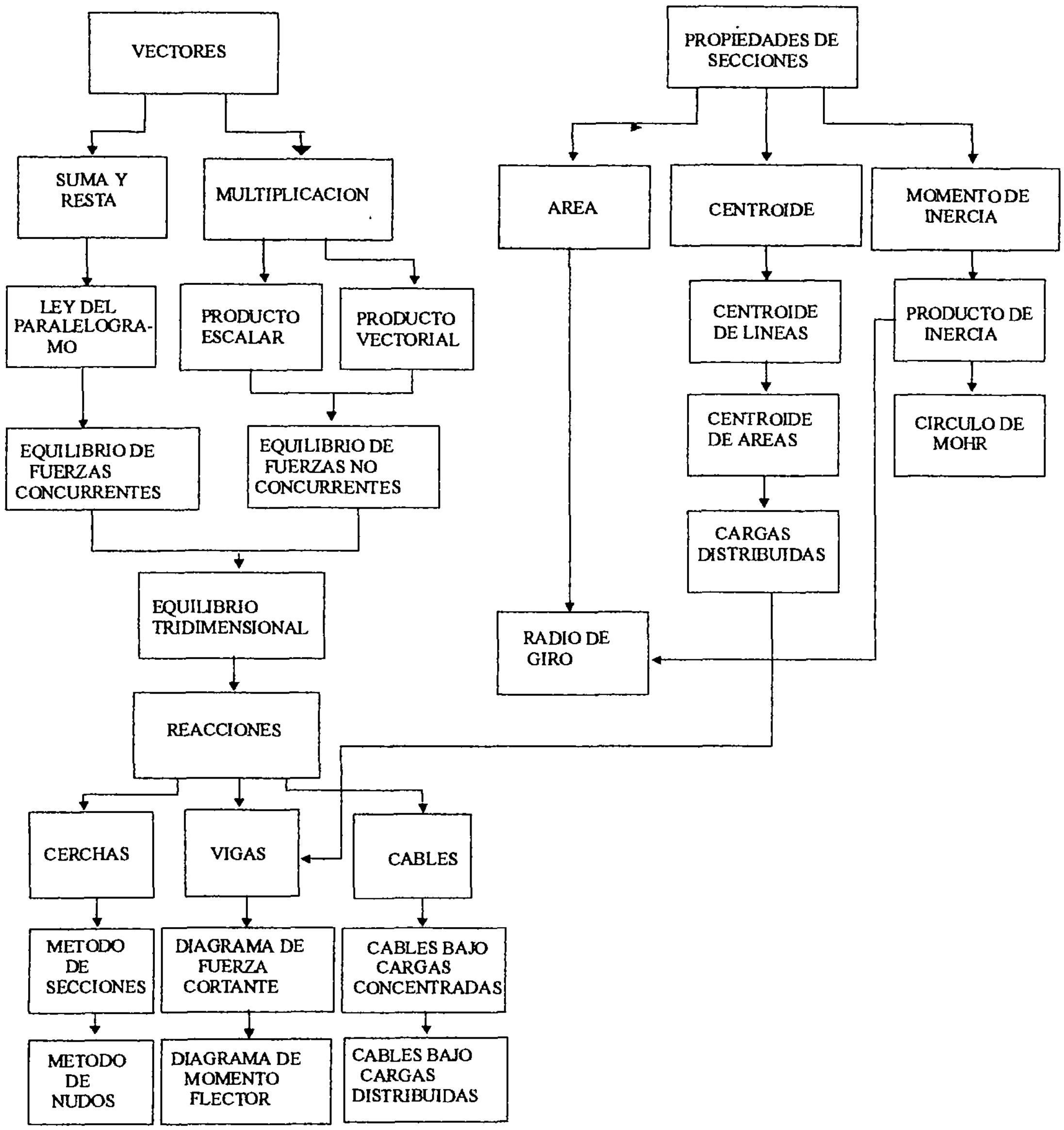
Con el propósito de verificar si el material de aprendizaje del curso de Estática satisface las condiciones presentadas por Ausubel, presentamos dos mapas conceptuales del contenido programático de este curso. Uno construido por un estudiante que cursó y aprobó Estática (mapa 1) y el otro construido por un profesor que enseña esta ciencia (mapa 2).

A partir de la construcción de estos mapas conceptuales podemos notar que la presentación de los contenidos del curso es lógica y coherente, pues se presentan primero los conceptos más generales y para cada nuevo concepto menos inclusivo, se han estudiado previamente aquellos necesarios (subsumidores) para su aprendizaje. Es decir, los conceptos son presentados de los más hacia los menos generales. Es importante hacer notar que en ambos mapas se deja sentado que el concepto más general para el estudio de la Estática, es un concepto matemático, **Vector.**

Mapa Conceptual #1



Mapa Conceptual #2



3.1.2 Condiciones de la Estructura Cognitiva.

La primera de las condiciones que presenta Ausubel para que se dé el aprendizaje significativo se refiere a las condiciones de la estructura cognitiva: el estudiante debe poseer en su estructura cognitiva todas las herramientas necesarias para hacerle frente, exitosamente, al aprendizaje del nuevo concepto. Es decir, debe poseer en su acervo de conocimientos una serie de conceptos previos que le permitan aprender el nuevo material estudiado. Hacemos un análisis de los contenidos de los cursos que se exigen como pre-requisitos del curso de Estática con el propósito de comprobar que la primera de las condiciones presentadas por Ausubel se satisface .

3.1.2.1 Pre-Requisitos del Curso de Estática.

El curso de Estática para Ingenieros de la U. T. P. se dicta en el primer semestre del segundo año de la Licenciatura en Ingeniería y tiene como pre-requisitos los cursos de Cálculo Diferencial e Integral I y II, además del curso Elementos de Mecánica que, a su vez, tiene como pre-requisito el curso de Álgebra de Vectores. Esto significa que coincidentemente con lo señalado por el desarrollo histórico de la Estática los conocimientos previos que permitirán al estudiante de ingeniería aprender Estática, son precisamente conocimientos matemáticos. Por esta razón, hacemos una presentación detallada de los conocimientos adquiridos por los estudiantes que ingresan al curso de Estática a través de los cursos propedéuticos y los cursos de matemática que reciben previo al estudio de la Estática.

En el período de Preparatoria (cursos propedéuticos) los estudiantes reciben cursos de álgebra, trigonometría, geometría y geometría analítica. Además, durante el primer año de estudios, en el primer semestre, reciben Cálculo Diferencial e Integral I y en el segundo semestre, Cálculo Diferencial e Integral II y Álgebra de Vectores.

3.1.2.2 Análisis de la Relación entre los Contenidos de los Pre-requisitos y los Contenidos del Curso de Estática.

El libro de texto que se utiliza en la U.T.P. para el curso de Estática es **Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática** de Ferdinan P. Beer y E. Russell Johnston Jr. el cual contiene en sus capítulos 2, 4, 5,6,7 y 9 todo el contenido programático del curso de Estática por lo que, a continuación, hacemos un análisis de los conceptos matemáticos necesarios para comprender los conceptos de Estática y resolver los problemas presentados en cada uno de los capítulos mencionados del libro de texto.

Capítulo 2: Estática de Partículas

a) Fuerzas en un plano

b)Fuerzas en el espacio

En este capítulo, como en los restantes, es fundamental el concepto de vector, su representación gráfica y su representación en término de los vectores unitarios canónicos. Al representar gráficamente un vector en el espacio, los cosenos directores cobran gran importancia. Las operaciones con vectores se aplican tanto en forma analítica como gráfica, de aquí que la ley del paralelogramo y la del polígono representan herramientas efectivas en la resolución de un gran número de problemas así como también el producto de un escalar por un vector.

Al representar vectores analíticamente, en término de sus componentes, aparecen las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas al determinar la dirección de la resultante.

La ley del seno y el coseno se aplica al determinar la resultante de fuerzas que con ella forman ángulos oblicuángulos y en algunos problemas es necesario conocer las relaciones entre los ángulos correspondientes, alternos internos, alternos externos, conjugados y opuestos por el vértice. Además, el Teorema de Pitágoras y el que nos dice que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° también se aplican con frecuencia en la resolución de los problemas de este capítulo.

Capítulo 4: Equilibrio de Cuerpos Rígidos

a) Equilibrio en dos dimensiones

b) Equilibrio en tres dimensiones

Como ya mencionamos, el concepto de vector y su representación gráfica y analítica en término de sus componentes no pierde importancia a través del curso de Estática, pero, en este capítulo, además de estos conceptos, se requiere del producto escalar y sus propiedades en la determinación de la proyección de un vector sobre un eje. El producto vectorial en término de sus componentes vectoriales se aplica en la definición del momento de una fuerza alrededor de un punto como el producto escalar y sus propiedades además del producto mixto entre vectores son necesarios en la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje .

Es importante hacer notar que en este capítulo la descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares cobra una gran importancia al estudiar el equilibrio de un cuerpo rígido en dos y tres dimensiones.

Capítulo 5: Fuerzas Distribuidas: Centroides y Centro de Gravedad.

a) Áreas y Líneas

b) Volúmenes

En esta parte del curso, los diferenciales de área, las integrales y las derivadas cobran una gran importancia al describirse las coordenadas X y Y del centro de gravedad de un área y de una línea. Desde luego, si se trabaja con áreas, las fórmulas para el cálculo de áreas de rectángulos, triángulo, círculos, semicírculos, 1/4 de círculo, elipses, semielipses, 1/4 de elipses, trapecios, sectores circulares, regiones parabólicas, semiparabólicas, etc., además el cálculo del área de regiones huecas, se tornan fundamentales.

Al estudiar el centroide de un volumen se requiere determinar el volumen de un sólido de revolución aplicando el método del disco y el método del anillo.

Capítulo 6: Análisis de Estructura

a) Armaduras

b) Bastidores y máquinas

Se estudia, en este capítulo, el equilibrio de varios cuerpos unidos y se aplica fundamentalmente la descomposición de las fuerzas en término de los vectores unitarios. También se aplica la suma de vectores, la definición de funciones trigonométricas, el Teorema de Pitágoras, razones, proporciones y el concepto de pendiente.

Capítulo 7: Fuerzas en Vigas y Cables

En esta parte del curso se analizan las fuerzas internas en los elementos de un cuerpo y sus efectos, además de las funciones trigonométricas y el concepto de proporción.

Al establecer las relaciones entre la carga y el cortante, se aplica la integral definida al igual que para establecer la relación entre fuerza cortante y momento flector. Las gráficas de las funciones polinomiales se aplican al representar los diagramas de fuerza cortante y momentos fleccionantes.

Capítulo 9: Fuerzas Distribuidas: Momentos de Inercia

a) Momento de inercia de Masas

Cuando se estudian los momentos de inercia se necesitan diferenciales de área, integral definida, fórmulas para el cálculo de áreas, identidades trigonométricas y los diferentes métodos para el cálculo del volumen de un sólido de revolución.

El análisis realizado nos revela que los estudiantes de la U.T.P. que cursan Estática cuentan con los conocimientos previos, necesarios y suficientes para aprender los nuevos conceptos.

Presentamos a continuación el cuadro 3.1 donde se muestra la relación entre cada uno de los temas del contenido programático de l curso de Estática y los contenidos de los cursos que representan los pre-requisitos de esta materia.

Cuadro I. Relación entre los contenidos del curso de Estática y los contenidos de los cursos que representan sus pre-requisitos.

A Algebra G A Geometría Analítica AV Algebra de Vectores T Trigonometría

CI Cálculo I G Geometría CII Cálculo II

Tema del Curso de Estática	A	T	G	GA	CI	CII	AV
Fuerzas en un plano		x					x
Definición de una fuerza por su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción.		x	x				x
Fuerzas en el espacio		x					x
Suma de fuerzas concurrentes en el espacio		x	x				x
Equilibrio de una partícula en el espacio		x	x				x
Cuerpos rígidos							
Fuerzas internas y externas							x
Principio de transmisibilidad							x
Momento con respecto a un punto	x						x
Momento con respecto a un eje	x						x
Momento de un par		x					x
Resolución de sistema de fuerzas en fuerza par							x
Sistemas equivalentes							x
Cuerpo libre							x
Reacciones							x
Sistemas coplanares		x	x				x
Equilibrio de cuerpos sometidos a dos fuerzas		x	x				x
Equilibrio en tres dimensiones		x	x				x

Centro de gravedad de cuerpos bidimensionales			x		x	x	x
Centro de áreas y líneas			x		x	x	x
Áreas compuestas			x		x	x	x
Cargas distribuidas en vigas			x		x	x	x
Fuerzas sobre superficies sumergidas			x		x	x	x
Momento de inercia de un área			x		x	x	x
Momento polar de inercia			x		x	x	x
Radio de giro			x		x	x	
Teorema de ejes paralelos			x		x	x	
Momentos de inercia de áreas compuestas			x		x	x	
Producto de inercia		x	x		x	x	
Ejes principales de inercia							
Círculo de Mohor							
Fuerzas internas							x
Cerchas		x	x		x		x
Métodos de nodos y secciones		x	x		x		x
Marcos y máquinas							
Ecuaciones de condición							
Vigas bajo diferentes condiciones de carga			x				x
Soportes							
Diagrama de fuerzas cortante y momento flector			x		x	x	x
Cables bajo cargas concentradas		x					x
Cables bajo cargas distribuidas		x					x
Cargas parabólicas		x					x

En el cuadro podemos observar que el concepto de vector y las operaciones con vectores al igual que la Geometría euclidiana, son elementos fundamentales en el estudio de la Estática.

Cuadro II. Comparación entre el número de matriculados, aprobados y reprobados en Estática desde 1989 a 1994.

En el cuadro II, presentamos la estadística de matriculados, aprobados, reprobados y deserciones en los cursos de Estática en las diferentes facultades de la U.T.P. durante los últimos 5 años.

Año	Facultad	Grupo	Estud. Matric	A	%	B	%	C	%	D	%	F	%	Aprob	%	Fracaso	%
89	Civil	TIC-321	30	2		6		12		4		6		20		10	
89	Civil	TIC-322	22	1		3		6		4		4		10		8	
89	Civil	AL-3421	6	0		0		4		1		0		4		1	
89	Eléctrica	TIE-121	33	2		5		5		7		13		12		20	
89	Mecánica	1IM-121	20	0		1		8		4		4		9		8	
89	Mecánica	TL7-221	10	0		0		0		2		1		0		3	
89	Industrial	TII-121	27	0		3		3		11		6		6		17	
89	Industrial	TIM-121	11	0		0		5		3		2		5		5	
89	Industrial	TII-122	23	0		1		2		4		7		3		11	
89	Sistemas	1-IS-121	45	9		10		11		7		3		30		10	
89	Sistemas	1-IS-122	19	1		2		3		1		6		6		7	
89	Sistemas	1-IS-321	46	8		12		13		5		2		33		7	
90	Eléctrica	TIE-121	29	6		5		6		6		1		17		7	
90	Eléctrica	TIE-121	17	0		2		6		2		3		8		5	
90	Civil	TIC-121	35	2		9		8		4		5		19		9	
90	Civil	TL-6211	30	4		12		6		0		0		22		0	
90	Civil	TIC-121	28	2		7		4		6		3		13		9	
90	Civil	1L-3421	9	0		1		2		0		0		3		0	
90	Mecanica	TL-7411	28	1		10		11		1		0		22		1	
90	Industrial	TII-121	18	0		0		2		5		1		2		6	
90	Industrial	TII-122	1	0		0		0		0		0		0		0	
90	Industrial	TMI-121	5	1		1		2		1		0		4		1	

90	Industrial	TII-121	28	3		5		7		4		0		15		4	
90	Sistemas	1IS-322	26	0		3		5		6		5		8		11	
90	Sistemas	TIS-121	42	2		5		12		9		8		19		17	
90	Sistemas	TIS-122	16	0		3		4		6		1		7		9	
91	Civil	1L-3211	11	2		2		1		2		0		5		2	
91	Civil	TIC-121	27	4		7		7		2		2		18		4	
91	Civil	TIC-122	27	2		4		10		5		4		16		9	
91	Civil	TL6-411	16	2		5		6		1		0		13		1	
91	Mecánica	TIM-121	8	0		0		0		2		4		0		6	
91	Mecánica	TIM-221	24	2		2		6		5		4		10		9	
91	Industrial	TIM-121	19	2		2		5		4		4		9		8	
91	Sistemas	TIS-121	28	6		5		9		4		0		20		4	
91	Sistemas	TIS-122	37	2		4		12		6		9		18		15	
91	Eléctrica	TIE-121	26	0		1		8		5		3		9		8	
92	Industrial	TII-121	35	3		22		7		1		0		32		1	
92	Industrial	TII-122	44	17		16		8		0		0		41		0	
92	Industrial	TII-123	33	5		5		12		5		4		22		9	
92	Industrial	TII-121	26	6		6		6		4		4		18		8	
92	Civil	TIC-121	42	0		8		20		8		1		28		9	
92	Civil	TIC-122	36	3		12		8		5		6		23		11	
92	Civil	TL-6211	6	0		3		2		0		1		5		1	
92	Mecánica	TIM-121	10	1		0		5		2		1		6		3	
92	Eléctrica	TIE-121	46	8		8		3		0		1		19		1	
92	Sistemas	TIS-121	41	6		19		14		1		0		39		1	
92	Sistemas	TIS-122	19	0		1		4		3		10		5		13	
92	Sistemas	TIS-123	34	1		9		12		8		3		22		11	
93	Eléctrica	TIE-121	28	1		10		3		7		4		14		11	
93	Eléctrica	TIE-122	26	3		6		9		5		2		18		7	
93	Civil	TL3-321	19	0		3		1		6		5		23		11	
93	Civil	TIC-121	45	0		9		14		14		8		23		22	
93	Civil	TIC-122	44	4		8		11		12		7		23		11	
93	Civil	TIE-412	20	0		5		6		2		4		11		6	
93	Industrial	TII-121	39	2		12		14		9		0		28		9	
93	Industrial	TII-122	34	9		10		12		3		0		21		3	
93	Industrial	TIM-121	35	23		10		1		1		0		34		1	
93	Mecánica	TIM-121	20	4		3		3		3		7		10		10	
93	Sistemas	TIS-121	33	1		2		6		12		10		9		22	
93	Sistemas	TIS-122	37	4		11		10		7		0		25		7	
93	Sistemas	TIS-123	26	0		1		4		3		4		5		17	
93	Sistemas	TIS-124	28	0		3		7		7		9		10		16	
94	Civil	TL3-211	9	0		0		3		1		3		3		4	
94	Civil	TIC-121	39	2		10		10		10		6		22		16	
94	Civil	TIC-122	39	0		7		10		10		7		17		17	

94	Civil	TL6-221	11	2		2		3		1		2		7		3	
94	Mecanica	TIM-121	42	6		15		13		3		5		34		8	
94	Electrica	TIE-121	20	0		4		6		5		3		10		8	
94	Electrica	TIE-122	43	4		3		8		4		20		15		24	
94	Industrial	TII-121	21	3		2		4		4		6		9		10	
94	Industrial	TII-122	29	5		12		8		1		1		25		2	
94	Industrial	TII-123	44	0		1		7		11		19		8		30	
94	Industrial	TMI-121	22	0		0		5		7		7		5		14	
94	Sistemas	TIS-321	11	0		0		0		4		4		0		8	
TOTALES			2011	189		489		493		340		304		1093	54 35	645	32 07

Desde marzo de 1989 hasta agosto de 1994, en los cursos de Estática dictados en la U.T.P. se han matriculado un total de 2011 estudiantes de los cuales el 54.35 % aprobó el curso, el 32.07% reprobó[1] y el 13.57% desertó.

Del porcentaje de aprobados, el 9.39 % obtuvo A, el 24.32 % B, el 24.51 % C y el 16.91 % D, lo que nos lleva a una nota media de 75 es decir, la nota promedio es C. Es notorio, pues, un considerable porcentaje de fracasos y un bajo promedio entre los aprobados. Si consideramos que las condiciones de la estructura cognitiva y las del material de aprendizaje son las adecuadas.

[1] Consideramos la calificación D como fracaso, ya que el estudiante debe volver a dar la materia.

3.1.3 Condiciones de la Estructura Afectiva.

Según Ausubel, para que se dé el aprendizaje significativo, el estudiante debe tener la intensión de aprender significativamente el nuevo material y, para ello, debe estar motivado.

La Estática para ingenieros es un curso fundamental en las diferentes licenciaturas de la U.T.P. .Es pre-requisito de cursos como Dinámica y Resistencia de Materiales, lo que significa que el estudiante que no aprueba Estática sólo podrá matricular tres materias el siguiente semestre, lo que trae como consecuencia que en el primer semestre de su tercer año, sólo pueda matricular una materia además de Estática (la cual reprobó).

Poder avanzar en su carrera y obtener buenas calificaciones parece no ser suficiente motivación para que algunos estudiantes logren aprender Estática significativamente. En el cuadro II, podemos observar que un 46% de los estudiantes matriculados durante los últimos 5 años no lograron aprenderla, ya sea porque reprobaron o porque desertaron. Lo cierto es que, ***suponiendo satisfechas las condiciones del material de aprendizaje y las de la estructura cognitiva***, debemos concluir que la falta de motivación es el elemento que impide a este 46% aprender Estática.

Por todo lo anteriormente expuesto proponemos el Enfoque Histórico como el complemento necesario en la enseñanza de la Estática.

3.2 Propuesta.

Proponemos la enseñanza de la Estática a través de una combinación de los enfoques heurístico e histórico con el propósito de que el curso conserve su orientación a las aplicaciones concretas (la cual es fundamental en la carrera de ingeniería) e incremente el interés del estudiante y pueda de esta manera lograrse el aprendizaje significativo.

3.3 Justificación de la Propuesta.

Consideramos, que de acuerdo con los objetivos del curso de Estática en la carrera de ingeniería, el enfoque heurístico es el apropiado en su enseñanza. Consideramos que el combinar el enfoque heurístico con el histórico incrementará la motivación del estudiante hacia su aprendizaje. Justificamos esta afirmación con los siguientes argumentos:

3.3.1 El Enfoque Histórico en la Enseñanza de la Ciencia.

Existen tres maneras típicas de enfocar la enseñanza de cualquier teoría científica :

La primera es la Heurística o Conceptual: la cual presenta simplemente las ideas fundamentales de una disciplina científica y aplica estos conceptos en la resolución de problemas. Por estar ligada a la discusión de aplicaciones concretas, resulta indispensable para introducir a los estudiantes en el tema.

La segunda es la Lógica o Axiomática: en donde se trata de empezar con aquellas nociones que desde un punto de vista de una estructura rigurosa , parecen fundamentales y de deducir todo lo demás en forma precisa y matemáticamente limpia. Comunica una comprensión completa de la estructura interna de una teoría.

Y la tercera forma de enseñar una ciencia es a través del **Enfoque Histórico:** consiste en mostrar cómo se han ido desarrollando los conceptos, de explicar cuales fueron las dificultades encontradas y cómo nuevas nociones intentaban resolverlas.

El enfoque histórico actúa como ente motivador en el alumno ya que a través de él descubrirá la génesis de los conceptos, nociones y métodos que aprenderá y aplicará con los otros métodos.

Debemos considerar, que ante la problemática de la transmisión dógmatica de los conocimientos científicos se estaría dando un gran avance al adoptarse un enfoque de enseñanza en el cual los conocimientos no sean presentados solamente como realidades abstractas que vienen a satisfacer necesidades del campo teórico, que en un momento dado pueden llegar a ser difíciles de aprender para los alumnos, sino que lleve al alumno a un estado de ánimo propicio a la producción de las condiciones indispensables para el aprendizaje de los conocimientos y que le permita descubrir que los nuevos conocimientos vienen a responder a preguntas que él se formula.

En este tipo de enseñanza, la historia de la ciencia ofrece fuentes de inspiración pedagógica y recursos didácticos que habría que explorar en cada caso particular.

3.3.1.1 Un Lugar para la Historia de la Ciencia en la Enseñanza de la Ciencia.

De acuerdo con Germán Rafael Gómez, en su obra La Enseñanza de las Ciencias, *"la esencia del acto docente consiste en provocar una disposición mental en el alumno que lo estimule a continuar con una actividad mental guiada inteligentemente por el profesor. Esta disposición mental no es más que el acto vivo de inteligencia según Vidari; la carga emotiva que hace funcionar la inteligencia, según Piaget; las condiciones favorables de la estructura afectiva, según Ausubel, pero que en común consideran indispensable para que se dé el aprendizaje."* [p.e. Gómez , La Enseñanza de las Ciencias. Su Enfoque Histórico Evolutivo (1969)] .

¿Podría representar la historia científica la herramienta usada por el profesor para lograr las condiciones favorables, y necesarias en la estructura afectiva de sus alumnos para lograr el aprendizaje significativo de la ciencia?

Enrique Loedel es quien nos provee los mejores argumentos; Aún, cuando en su obra *Enseñanza de la Física* éstos se limitan al campo de la Física, su validez es enteramente general por lo que, en esta tesis, las generalizaremos a la enseñanza aprendizaje de cualquier ciencia.

La idea central de Loedel es despertar el interés del alumno hacia el aprendizaje de la ciencia, puesto que no son pocos los que permanecen absolutamente indiferentes. Si logramos establecer un lazo entre nuestros alumnos y la época o el momento en que surge una determinada idea, si los alumnos conocieran la evolución de los conceptos aprendidos en clases, si conocieran las motivaciones y las dudas que experimentaron los sabios en ese entonces, se encontraran pues en condiciones de comprender mejor el nuevo conocimiento y sentirlo, un poco, como propio.

Relacionar una fecha y un nombre con la ley o principio que vamos a estudiar no es suficiente. No basta con leer o contar una biografía, hay que profundizar un poco, conocer al personaje en cuestión. Conocerlo muy especialmente, ponerse a su lado para seguirlo paso a paso en sus descubrimientos científicos.

Desde luego, es difícil seguir el pensamiento científico de todo hombre de ciencia, ya que no todos han sabido comunicar minuciosamente la marcha de sus ideas, de su éxitos y fracasos. Por lo tanto, el docente debe convertirse en un investigador de la historia de la ciencia que imparte, para lograr, aún a partir de unos cuantos personajes, reconstruir parte del proceso cognocitivo que hizo posible la ciencia. Si se prescinde del estudio de su génesis, la ciencia no podrá ser entendida por completo.

Las referencias históricas pueden considerarse como un auxiliar más en la enseñanza de la ciencia. No debe sobre pasar la enseñanza a través de los enfoques corrientes o tradicionales, pero al igual que Leodel, consideramos que la historia de la ciencia pertenece, con pleno derecho, a la enseñanza corriente de la ciencia.

Si consideramos la historia como algo más que un depósito de anécdotas o cronología, puede producirse un cambio decisivo de la imagen que se tiene actualmente de la ciencia. Principalmente, en aquellos que no son especialistas y que desconocen como la ciencia se desarrolla en la mente y en las manos de sus creadores, ya que la historia implica explicación y el estudio de la interconexión entre acontecimientos.

Veamos esto de una manera más precisa:

En el marco de la perspectiva histórica que presentamos en el capítulo 2, con relación a la génesis y evolución de las ideas y métodos en torno a los objetivos de estudio de la Estática, es importante señalar que el surgimiento y evolución del Álgebra de Vectores contribuyó a la inmediata y fácil represenatación de los resultados de la Estática, y además, debido a la simplificación y sencillez que el Cálculo Vectorial introduce en el cálculo matemático de los fenómenos de equilibrio, se logra su expresión en un lenguaje vectorial.

Lo anteriormente señalado nos aproxima a lo que constituye la actividad principal en historia de las ciencias: aprender la evolución de las ideas científicas y poder aclarar el origen y concatenación de las ideas de un cuerpo teórico.

Como el desarrollo histórico del Álgbra Vectorial forma parte de la história de la Matemática, entonces en el contexto histórico de la Estática hay una interacción con la historia de la Matemática que venía dándose en el marco de la Mecánica clásica desde el siglo XVII.

3.3.2 ¿ Qué es el Enfoque Histórico?

1. Es una propuesta metodológica que tiene como objetivo principal motivar y despertar el interés de los estudiantes hacia el estudio de la ciencia.
2. No pretende ser el único posible. Puede tomar el carácter de complemento de los enfoques corrientes, pero, en una forma u otra, debe estar presente en cualquier planteamiento metodológico.
3. Conduce al rastreo minucioso en la historia de las ideas científicas para descubrir el modo en que se originaron.
4. El supuesto fundamental del enfoque histórico es el convencimiento de que el conocer la evolución de la ciencia actuará como factor motivador en el interés del alumno por el estudio de ella.
5. No se trata de una investigación histórica solamente, sino la reconstrucción del proceso evolutivo de los conceptos, hipótesis, leyes, teorías, etc., según lo permitan las circunstancias.
6. Permite conocer que los descubridores e inventores alcanzaron sus conclusiones algunas veces partiendo de un desconocimiento total de los asuntos que investigan, otras veces luchando contra los errores y

prejuicios antiguos y otras veces bordeando peligrosamente el camino que separa la verdad del error.

7. Una actitud histórica ante el problema de la enseñanza de la ciencia permite ver con nuevos ojos su estructura actual y su relación con los objetos de su campo de acción. La reconstrucción histórica puede ser, con frecuencia, la única vía posible para captar la exacta naturaleza de una teoría, de una ley o un hecho científico.

8. El enfoque histórico es válido en forma general y puede complementar la tarea escolar en todos sus niveles.

"La presentación más adecuada de cualquier ciencia es una combinación de los enfoques de enseñanza: heurístico, axiomático e histórico. Donde este último puede efectivamente establecer el enlace entre los otros dos. Su significado es central. Pero es necesario mantener un sentido de proporción, es decir, por importante que sea el entendimiento de la historia de un complejo conceptual en una ciencia, no se puede prescindir de los otros enfoques. Por ejemplo, si al combinar el método Heurístico con el histórico las ideas fundamentales no han quedado claras, y por lo tanto, el alumno aún no las ha incorporado a su acervo de herramientas intelectuales, conocer su evolución no lo ayudará a comprender; si por otro lado, no ha aprendido a analizar la estructura lógica de las ideas que resultan, es demasiado fácil que caiga en el vicio de aceptarlas en forma automática y sin críticas". [p.e. Arboleda y Brody, Historia y Enseñanza de las Matemáticas (1984)].

Para ilustrar lo anterior, ya que no es posible establecer principios generales, presentamos un ejemplo de cómo podemos complementar el enfoque heurístico (que es aplicado en la enseñanza de la Estática en la U.T.P.) con el histórico a fin de despertar el interés del estudiante .

En el estudio del equilibrio de los cuerpos rígidos, las fuerzas externas actuando sobre el cuerpo pueden reducirse a un sistema de fuerza par en un punto arbitrario. Cuando la fuerza y el par son todos iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente nulo y se dice que el cuerpo rígido está en equilibrio. Al construir un diagrama de cuerpo libre, el peso del cuerpo debe incluirse también entre las fuerzas externas que influyen en el cuerpo, porque representa la atracción de la tierra sobre las distintas partículas que lo forman. Este peso (W), debe aplicarse en el centro de gravedad (G) del cuerpo.

En muchos casos, los cuerpos tanto bidimensionales como tridimensionales pueden dividirse en cuerpos de formas más comunes tal y como se muestra en la figura.

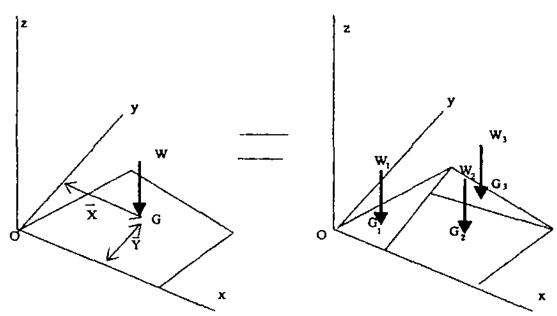


fig. 2.34

La abcisa X de su centro de gravedad G puede determinarse de la suma de las abcisas $X_1+X_2+X_3+....$ y algo similar sucede con el valor de la ordenada Y. Es decir, el centro de gravedad del cuerpo se obtiene de la suma de las coordenadas de los centros de gravedad de las diferentes partes que lo componen.

Si previo a este estudio se presenta a Arquímedes y su proposición 6, en cuya demostración se deja plasmado que la influencia ejercida en el equilibrio de un cuerpo es juzgado exclusivamente por el peso del cuerpo y su centro de gravedad, y que la forma del cuerpo no ejerce ninguna influencia, se despertará el interés del alumno por conocer cómo esta proposición se aplica en el equilibrio de los cuerpos rígidos. Quizá, hasta el conocer que el surgimiento de un concepto tan importante, más bien fundamental, en el estudio de la Estática como lo es el centro de gravedad, se encuentra perdido en los anales de la historia, despertará un poco más su curiosidad e interés por el estudio del mismo, puesto que algunos autores consideran que la definición de centro de gravedad está concebida como un ente implicado en los postulados de Arquímedes, mientras que otros consideran posible que se encuentre definido en algunos de sus tratados perdidos y por esta razón la utiliza en la demostración de la proposición 6.

De esta manera, dejamos latente nuestra preocupación por la calidad del aprendizaje de nuestros estudiantes, no sólo en las materias de nuestra especialidad, La Matemática, sino también en aquellas que guardan una íntima relación con ella.

Conclusiones

1. De acuerdo con el desarrollo histórico de la Estática Ordinaria podemos asegurar que aún cuando esta ciencia no pertenece a la Matemática sino a la Física, los cimientos de su desarrollo son, precisamente, conceptos matemáticos. Este hecho nos permite asegurar que entre los conocimientos previos con los que, según la teoría de aprendizaje de Ausubel, debe contar el estudiante para cursar exitósamente la Estática, son precisamente conocimientos matemáticos.

2. Tradicionalmente en la U.T.P. se enseña la Estática aplicando el método heurístico, es decir, presentando los conceptos fundamentales de esta disciplina científica y aplicando estos conceptos a la resolución de problemas. De acuerdo con las necesidades de los estudiantes de la U.T.P., este enfoque es el más adecuado por encontrarse ligado a aplicaciones concretas de las distintas ramas de la ingeniería. Sin embargo, el enfoque histórico juega un importante papel como agente motivador, ya que conocer cómo surgieron algunos de los conceptos que se estudian en el curso de Estática y conocer a los personajes que intervinieron en el desarrollo de esta ciencia puede despertar su interés por la misma.

3. De 1985 a 1994, se ha dado un 32.07% de fracasos y un 13.57% de deserciones en los cursos de Estática, dictados en las diferentes facultades de la U.T.P., porcentaje que podría obedecer a la falta de motivación intrínseca por parte del estudiante. El enfoque histórico del desarrollo del curso de Estática puede representar el recurso con que el docente resuelva el problema de esta falta de motivación y, por ende, disminuya el porcentaje de fracasos en esta materia.

4. En el sistema Educativo Enseñanza de la Estática para estudiantes de la U.T.P. se satisfacen dos de las tres condiciones relevantes de la Teoría de Ausubel:

__ Los estudiantes cuentan en su estructura cognitiva con todos los elementos necesarios para hacerle frente al estudio-aprendizaje de la Estática. Este hecho se probó a través del análisis de los contenidos de los cursos de Estática y sus pre-requisitos, por lo que concluimos que no es en este aspecto que radica el porcentaje de fracasos que se da en este curso. No es por falta de conocimientos fundamentales, previos, que el estudiante no logra aprender significativamente la Estática .

__ El material de aprendizaje del curso de Estática se presenta en forma expositiva, con clases magistrales, agregando sesiones de práctica. A través de la construcción de dos mapas conceptuales donde se relacionan los conceptos fundamentales del curso, probamos que el contenido del mismo se presenta en forma lógica y coherente , ya que los conceptos más inclusivos se estudian previo a los conceptos menos inclusivos. Es decir, en el curso de Estática todo concepto estudiado ha sido precedido por aquellos necesarios para que pueda ser asimilado y aprendido significativamente.

__ En lo referente a las condiciones de la estructura afectiva sólo se satisface parcialmente. El estudiante de Estática debe tener disposición para aprender significativamente. Según Ausubel, sólo aprende significativamente aquel que quiere hacerlo e, indudablemente, el estado de motivación juega un papel importantísimo en este querer aprender .

Consideramos que, precisamente, ésta es la causa de que un considerable número de estudiantes no logre aprender Estática aún cuando cuentan con las condiciones apropiadas de la estructura cognitiva y el material de aprendizaje es presentado en forma adecuada. Quizás el deseo de obtener una buena calificación en el curso no sea suficientemente motivador para todos los estudiantes y sea necesario estimular más su interés haciendo uso del enfoque histórico

5. El docente de Estática debe convertirse en investigador de la historia de esta ciencia. Debe procurar conocer cómo surgieron los diferentes conceptos que se presentan en este curso, con el propósito de hacer una reconstrucción histórica que, al ser presentada a sus estudiantes, al momento de estudiar cada uno de estos conceptos incremente su interés y deseo de aprender estableciendo, de esta manera, las condiciones necesarias para que se dé el aprendizaje significativo.

Recomendaciones

1. La historia de la Estática pertenece con pleno derecho al estudio de la misma por lo que presentamos el enfoque histórico como la alternativa que complementa al enfoque heurístico y que permite esclarecer los conceptos de Estática a la vez que nos muestra la génesis de la ciencia. Es por esta razón que sugerimos que se incorpore la historia de la Estática a la enseñanza de la misma en la U.T.P.

2. Presentamos el enfoque histórico-heurístico en la enseñanza de la Estática como una propuesta metodológica por lo que sugerimos establecer un plan piloto en donde se enseñe la Estática a través de este enfoque y, de esta manera, lograr comprobar la efectividad del método.

Bibliografía

1. Arboleda, Luis. 1984. **Historia y Enseñanza de las Matemáticas. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología** . Vol. 1, num.2. Méjico, mayo-agosto.

2. Acosta, Amado Paulo. 1988. **Fundamentos de la Mecánica Clásica.** Editorial Pueblo y Educación. Cuba.

3. Arquímedes, 1986. **El Método.** Alianza Editorial S.A., Madrid.

4. Arnaz, J. 1987. **La Planeación Curricular**. Trillas, Mexico.

5. Arosemena, Mercedes de. 1994. **Fundamentos y Elaboración de Mapas Conceptuales**. Primer encuentro Latinoamericano de Investigación en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. 16 al 19 de agosto; pp. 5, 6, 7, 8, 9.

6. Ashurs,Goreth F. 1992. **Fundamentos de las Matemáticas Modernas**. Alianza Editorial; p. 45.

7. Ausubel, David. 1976. **Psicología Educativa Un Punto de Vista Cognoscitivo**. Trllas, Méjico; pp. 38, 39, 55, 56, 73, 78, 79.

8. Bear Ruth. 1964. **Pedagogía y Didáctica de la Enseñanza Universitaria**. Oikos Tau, S.A. Ediciones.

9. Beer, Ferdinan P.; Johnsston, E. Russell Jr. 1992. **Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática**. Mc Graw-Hill, Mexico.

10. Brody, Tomás. 1984. **La Historia de la Ciencia en la Enseñanza**. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología. Vol. 1, num.2. Méjico, mayo-agosto 1984.

11. Bumge, Mario. 1978. **Filosofía de la Física**. Ariel, Barcelona.

12. Bunge, Mario Bunge. 1980. **Epistemilogía**. Ariel, Barcelona.

13. Bonola, Roberto. 1945. **Geometrías No Euclidianas**. Esposa-Calpe S.A.Argentina,Buenos Aires; pp.180-183.

14. Bourbaki, Nicolas. 1972. **Elementos de Historia de las Matemáticas**. Alianza Editorial, España; p. 91, 174,175.

15. Cajas, Fernando.1993. **Matemática Educativa: Una Tecnología Emergente**. Tesis de Grado; pp 8, 17, 18, 21, 24.

16. Cernuchi, Félix. 1969. **Experimento, Razonamiento y Creación en Física**. Uiversiad de la República de Uruguay; p. 41.

17. Collette, Jean Paul. 1985. **Historia de las Matemáticaas II**. Siglo Veintiuno Editores S.A. de CV. España; pp. 14, 206,266, 267,409, 408.

18. De Arruda, J. 1984. **Didáctica y Práctica de la Enseñanza** .Mc Graw Hill, Bogotá.

19. Departamento de Ciencias Físicas. 1973. **Ciencias Físicas**. Editorial Universitaria, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piredras; p. 205.

20. Dijksterhuis E. J. 1987. **Archimedes by E.J. Dyksterhuis**. Traslated By C.Diksboorn. Princeton University Press, New York.

21. Graig, Homer Vincent. 1943. **Vector and Tensor Analysis**. Mc Graw-Hill, New York and London.

22. Enriquez, Federico. 1947. **Problemas de la Ciencia**. Espasa-Calpe,S.A.,Buenos Aires; pp. 159, 164.

23. Eves, Howward. 1963. **Estudio de las Geometrías.** Tomo 1. Editorial Hispanoamericana; p. 64.

24. Gómez, Germán Rafael. 1969. **La Enseñanza de las Ciencias. Su Enfoque Histórico Evolutivo.** Angel Estrada y Cía. S.A.,Biblioteca de las Ciencias de la Educación., Argentina; Introducción.

25. Hull, L.W.H. 1981. **História y Filosifía de la Ciencia**. Ariel, Barcelona; p. 111.

26. Jeans, Sir J. 1982. **Historia de la Física** . Hasta Mediados del Siglo XX. Fondo de Cultura Económica, Méjico; p. 126.

27. Kuhn, Thomas S. 1992. **La Estructura de las Revoluciones Científicas**. Fondo Cultural Económico S.A., Méjico.

28. Mialaret, G. 1981. **Ciencias de la Educación**. Oikos-Tais, Barcelona.

29. Moreira, Marco A. 1990. **Mapas Conceptuales**. Universidad Federal do Rio Grande do Sul; p. 22.

30. Moreira, Marco Antonio. 1992. **Aprendizaje Significativo, Conocimiento Científico y Cambio Conceptual**. Documento de trabajo del "Semineer on College Teaching" for Latin Faculty Cornell University. N.Y.; p. 5,19.

31. Nara, Harry R. 1962. **Vector Mechanics for Engineers**. John Wiley & sons, Inc, New York. London 1962.

32. Novak, J.D. 1989. **Investigación y Experiencias Didácticas**. Departamento de Educación. Universidad de Cornell. N. York 1.

33. Novak, J.D. 1992. **Teoría y Práctica de la Educación**. Alianza Universidad, Madrid; pp. 71 y 74.

34. Orton, A. 1990. **Didáctica de la Matemática**. Ministerio de Educación y Ciencias. Ediciones Morata S.A., Madrid; pp. 111, 132,193.

35. Papp, Desiderio. 1961. **Historia de la Física. Desde la Antigüedad hasta los Umbrales del siglo XX.** España-Calpe S.A., Madrid; pp. 31, 32, 57, 58.

36. Polya, George. 1968. **Mathematical Methods in Science**. The Mathematical Asociation of America; pp. 46 y 47.

37. Santaló, Luis A. 1964. **Vectores y Tensores**. Editorial Universitaria de Buennos Aires.

38. Schurmann, Paul. 1945. **Historia de la Física**. Tomo 1. Editorial Nova, Buenos Aires; pp. 47, 48, 128, 268, 273.

39. Sarton, Gorge. 1968. **Ensyo de la Historia de la Ciencia**. Unión Tipográfica. Editorial Hispanoamericana, Mexico; p. 79.

40. Trejo, A. 1965. **Análisis Vectorial con Teoría del Potencial y Aplicaciones**. Editorial Kapelusz, Buenos Aires.