UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRIA EN MATEMATICA

ENFOQUE DIDACTICO DE LAS SUMAS INFINITAS DESDE EL PUNTO DE VISTA HISTORICO Y EPISTEMOLOGICO

ANA MARTINA SAAVEDRA B.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA EDUCATIVA

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA

1996

Aprobado por:

PROF. JOSE DE LA MONTAÑA LOPEZ
Director de Tesis

PROF. EGBERTO AGARD
Miembro del Jurado

PROF. ROGELIO ROSAS
Miembro del Jurado

Fecha: 23 de diciembre de 1996.

DEDICATORIA

A nuestro señor Jesucristo, que con tanto amor y por medio del Espíritu Santo me ha colmado con sus Bendiciones para superar mis necesidades espirituales y materiales guiándome en la realización de este trabajo.

A mis queridos padres Chito y Paula y a mis hermanos quienes siempre me han animado a seguir adelante.

Ana Martina.

AGRADECIMIENTO

Expreso mi agradecimiento más sincero al Profesor José de la Montaña López, quién mostró cooperación e interés para la realización de nuestro trabajo de graduación. De igual manera, queremos agradecer a la Dra. Veira Ibeth Díaz de Martínez por su colaboración al traducir varios escritos de inglés a español.

También, a todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma en la culminación de este trabajo.

Muchas Gracias.

PRELIMINARES

"Enfoque histórico: Consiste en mostrar cómo se han ido desarrollando los conceptos, de explicar cuales fueron las dificultades encontradas y cómo nuevas nociones intentaban resolverlas.

El enfoque histórico actúa como ente motivador en el alumno ya que a través de él descubrirá la genésis de los conceptos, nociones y métodos que aprenderá y aplicará.

Debemos considerar, que ante la problemática de la transmisión dogmática de los conocimientos cietíficos se estaría dando un gran avance al adoptarse un enfoque de enseñanza en el cual los conocimientos no sean presentados solamente como realidades del campo teórico, que en un momento dado pueden llegar a ser difíciles de aprender para los alumnos, sino que lleve al alumno a un estado de ánimo propicio a la producción de las condiciones indispensables para el aprendizaje". [Sánchez Angela de, (1996:98), Enfoque histórico-heurístico en la enseñanza de estática en la Univesidad Tecnológica de Panamá.Tesis de Grado].

INDICE GENERAL

RESUMEN

Este trabajo de tipo bibliográfico, presenta un estudio sobre las contribuciones al análisis infinitesimal durante el periodo que va desde el siglo XVII hasta el siglo XVIII, con el fin de exponer, sobre todo, los resultados de los matemáticos como Kepler, Cavalieri, Pascal, Newton, Leibniz y Eüler, entre otros; sobre las nociones comúnmente aceptadas por los historiadores, para así, facilitar la comprensión de carácter epistemológico de su contenido.

Muestra con mayor énfasis, las contribuciones de Newton, Leibniz y Eüler a las sumas infinitas. Cómo obtuvieron los resultados de problemas planteados durante el siglo XVII y qué conocimientos previos utilizaron para resolverlos.

Muestra, además, cómo Newton encuentra la diferenciación implícita de una expresión algebraica y Leibniz, la integración por partes y presenta cómo, durante el siglo XVIII, Eüler obtuvo resultados semejantes a los de Newton y Leibniz sobre las sumas infinitas.

SUMMARY

This bibliographic research presents a study of the contributions to the infinitesimal analysis during the seventeenth and eigteenth centuries with the purpose of expounding the results of mathematicians such as Kepler, Cavalieri, Pascal, Newton, Leibniz, and Eüler, among others, about commonly accepted notions by historians, in order to facilitate the epistemologic character of its contents.

It emphatically shows the contributions of Newton, Leibniz and Eüler to the sums of infinity. How did they obtain the results of the raised problems during the seventeen century and what previous knowledge did they apply in order to solve them.

It also shows how Newton find the implicit differentiation of an algebraic expression, and Leibniz, the integration by parts. Also how Eüler obtanied, during the eighteenth century, results similar to Newton's and Leibniz's about the infinity sums.

INTRODUCCION

La Matemática Educativa surge en el momento, en que hacemos cierto tipo de abstracciones, y abordamos a la matemática como un problema de comunicación, entendida ésta última en el sentido moderno, es decir, como emisión y recepción de mensajes que deben presentar cambios conductuales observables en los receptores y que, en caso de que estos cambios no sucedan en la forma deseada, deben producir cambios en la conducta de los emisores, continuando el proceso hasta que se consiguen los objetivos deseados originalmente u otros objetivos alternos. [Imaz, (1987)], y ésto se logra elaborando material didáctico o presentando el material en una forma mucho más didáctica.

A pesar de que los libros de historia de la matemática presentan el desarrollo histórico de las sumas infinitas, la reconstrucción del proceso evolutivo de los conceptos y teorías no es completa y los ejemplos utilizados en muchas ocaciones no permiten la mejor comprensión de los mismos.

A nivel nacional, no existen investigaciones relacionadas al desarrollo histórico de las sumas infinitas desde el punto de vista epistemológico. A nivel internacional mencionaremos algunos artículos disponibles.

Uno de ellos es el de Carlos Sánchez Fernández, de la Universidad de La Habana, Cuba (1984) en el que explica la aparición del análisis infinitesimal fue el producto de un largo proceso. La esencia de este proceso consistió en la acumulación y elaboración teórica de los diferentes métodos en los cuales residían las ideas sobre los infinitesimales que desarrollaron los griegos, ya en el siglo XVII estaban conformadas las condiciones tanto de carácter externo como interno, suficientes para culminar dicho proceso.

Otro es el de Charles V. Jones, ponencia presentada durante el Primer Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas, en la Universidad Nacional Autónoma de México, en diciembre de 1985, el cual plantea las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas en donde explica que las dos primeras paradojas suponen que el continuo puede ser dividido infinitamente.

La inquietud de conocer cómo se originó y cómo se obtuvieron los primeros conocimientos del análisis infinitesimal y cómo presentar el estudio de manera que haya una correlación de la didáctica con el tema, logrando una mejor comprensión, ha motivado la realización de este trabajo.

Pretendemos brindar un estudio sobre las series desde el punto de vista histórico y epistemológico, desde su inicio hasta la época de Eüler, es decir, presentar quiénes son los personajes que hay detrás de las fórmulas que hoy día utilizamos, por qué y cómo las inventaron, en qué momento de la historia aparecieron.

Para llevar a cabo este trabajo nos planteamos los objetivos siguientes:

1. Proporcionar una visión del concepto de infinitesimal y su desarrollo histórico desde el periodo helénistico hasta origenes del análisis infinitesimal.

2. Analizar los contenidos matemáticos que proporcionaron los elemento básicos que condujeron al estudio de las sumas infinitas.

3. Destacar el desarrollo histórico como ente motivador, hacia el interés del aprendizaje de las sumas infinitas.

Los hombres que se dedicaron al estudio de las sumas infinitas, lo hicieron para resolver problemas reales de la manera más eficiente posible.

En este sentido, el desarrollo de nuestro trabajo consta de tres capítulos, a saber:

En el capítulo I presentamos el aporte, en orden cronológico, de algunos personajes que han contribuido al desarrollo de las sumas infinitas antes de Newton y Leibniz.

El capítulo II, proporciona las contribuciones de Newton y Leibniz sobre sumas infinitas, y presenta algunos problemas de interés histórico.

El tercer y último capítulo presenta la vida de Eüler, los problemas centrales que lo ocuparon, y la manera cómo planteó y solucionó estos problemas.

CAPITULO 1

PROCESO DE FORMACION DE LOS METODOS INFINITESIMALES

1.1. FORMACION DE LAS PRIMERAS TEORIAS MATEMATICAS EN LA GRECIA ANTIGUA.

Los griegos no dudaron, en ningún caso en adoptar elementos de otras culturas extrañas, de lo contrario, no habrían podido aprender tan rápidamente cómo avanzar más lejos que sus predecesores, pero lo cierto es que todo aquello en lo que trabajaron lo mejoraron. En Egipto aprendieron geometría y en Babilonia tomaron contacto con las tablas y otros instrumentos astronómicos.

No se sabe si los resultados que conocían, tanto los egipcios como los babilonios, fueron descubiertos independientemente; pero los babilonios fueron más amplios, que los egipcios, tanto en geometría como en álgebra; aunque los egipcios eran concientes en algún sentido de las reglas y métodos generales que están por encima y, a la vez, más allá del caso concreto que se tiene a mano, y esto representa ciertamente un paso importante en el desarrollo de la matemática.

Tanto los egipcios como los babilonios, sabían determinar áreas y volúmenes sencillos (áreas de triángulo y trapezoides; volúmenes de cilíndros, de pirámides y prismas). El área de un cuadrilátero se calculaba, haciendo el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos sin advertir que era sólo una aproximación. Es posible que pudieran calcular el área de la superficie de una esfera y que tuvieran conocimiento del Teorema de Pitágoras, especialmente los babilonios.

No hay casi referencia a reglas generales o métodos de procedimientos en la solución de problemas numéricos prácticos, es decir, la geometría no era para ellos (babilonios) una teoría matemática (en el sentido en que lo es para nosotros) sino un cierto tipo de aritmética o álgebra aplicada, en la cual las figuras venían representadas por medio de números.

La parte teórica de la matemática tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia antigua, ya que se debe a los griegos la demostración rigurosa, el desarrollo del tema mediante una ordenada secuencia de teoremas y el esfuerzo constante para la generalización y abstracción. Además, de "cómo" los griegos se preguntaron "por qué".

Durante los períodos Heleno y Helenístico existieron alrededor de 10 escuelas griegas. Las escuelas fundadas por los griegos mencionaremos algunas de ellas: 1. La Escuela de Alejandría, fundada en el año 323 a.c., 2. La Escuela Perípateutica, fundada entre 384 y 322 a.c., 3. La Academia de Platon, fundada antes de 388 a.c., 4. La Escuela de Atenas, (408-355 a.c.), Fundada por Eudoxio de Cnido, 5. Los Atomistas, escuela fundada por Demócrito de Abdera, 6. Los Sofistas siglo V a.c., 7. La Escuela Eleática, siglo V a.c., 8. La Escuela Jónica, fundada en la primera mitad del siglo VI a.c., representada por Tales de Mileto, 9. La Escuela Pitagórica, creada en la segunda mitad del siglo VI a.c., fundada por Pitágoras de Samos.

Es en la escuela Pitagórica, donde se obtiene una recopilación de hechos matemáticos abstractos; y surgen las primeras teorías matemáticas y, esencialmente, destacamos tres (3) de ellas:

1.1.1. La aparición de la teoría de los números naturales.

"Los pitagóricos separaron de la aritmética una rama aparte de la teoría de números entendida como conjunto de conocimiento matemáticos relacionadas con las propiedades generales de las operaciones con números naturales.

La aritmética, al igual que la geometría, mostraba un gran desarrollo en la antigua Babilonia y en Egipto; pero no constituían una teoría matemática, son los griegos quienes asimilando estos conocimientos anteriores, los encontramos, ya en el siglo III a.c. reconociendo dos importantes ideas:

- que la sucesión de números podía ser prolongadas indefinidamente, y

- que no sólo era posible operar con números cualesquiera sino también referirse a los números en general y probar teoremas sobre ellos, es decir, se pasó de

la consideración de números concretos a números en general, a cualquiera posible.

Se había dado un paso a un nivel más alto de abstracción, a partir del proceso de contar objetos uno a uno, pasamos al proceso ilimitado de formación de números añadiendo una unidad al número anterior; la sucesión de números aparece como indefinidamente prolongable y con ello aparece en matemática la noción de infinito. Es así como la matemática empieza a transformarse en teoría. En ésta época ya resultaban conocidos los métodos de sumación de progresiones aritméticas simples y resultados de tipo

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2" .$$

[Sánchez F. Carlos. Apuntes de Análisis Matemático, Conferencia #1]

1.1.2. Fracciones y Proporciones.

"Paralelamente al desarrollo del concepto de número natural, se desarrolló el concepto de número fraccionario. El estudio de las fracciones se remonta al 2000 a.c. en el antiguo Egipto y Babilonia. Quienes comenzaron utilizándo fracciones del tipo 1/n y otros pocos números como 2/3,3/4,.

Al analizar el manejo de los números en la escuela pitagórica, observamos que hacen del número el principio de todas las cosas; pero, número, para ellos significaba un entero positivo. En la matemática teórica griega una *fracción no era un sólo número que escribimos a/b sino una razón a:b entre los números a y b, (a/b era un par ordenado no un número racional) y las razones surgen al dividir y comparar magnitudes, ya que en un proceso de medir una magnitud (aplicar una unidad y calcular cuántas veces es posible repetir esta operación) ocurre que la unidad de medida no siempre está contenida un número entero de veces en la magnitud a medir, por lo que el simple cálculo de número de unidades no es suficiente. Surge la necesidad de fraccionar la unidad de medida para poder expresar la magnitud con mayor exactitud.*

De la comparación de las fracciones o razones surgen las proporciones. Dos razones a:b y c:d se decían proporcionales, se escribe a:b=c:d, si a es igual partes o múltiplo de b como lo es c de d.

Ejemplo. 5:15 = 2:6 (5 es una de las tres partes de 15 como es 2 una parte, de las tres partes de 6).

Formalmente, se define a:b=c:d si y sólo sí existen enteros m,n,p,q tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq y sobre ésta definición los pitagóricos desarrollaron una teoría de proporcionalidad". [op. cit. Sánchez F. Carlos Conf. # 1]

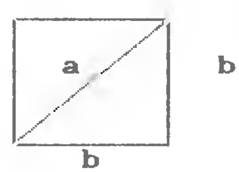
1.1.3. Descubrimiento de los números irracionales.

"La aparición de las fracciones y proporciones fué la primera etapa de la interacción entre aritmética y

geometría, la siguiente fue el descubrimiento de los intervalos inconmensurables. Dos intervalos se llaman inconmensurables, si no existe ningún intervalo que esté contenido en ellos un número exacto de veces ó que pueda aplicarse a cada uno de ellos, un número entero de veces". [Op. cit. Sánchez F. Carlos. Conferencia # 1].

El hallazgo más importante atribuído a los pitagóricos fue el descubrimiento de " el irracional " por medio de segmentos de líneas inconmensurables. Este descubrimiento pudo haber sido el resultado de su interés en la media geométrica a:b=b:c. Esto condujo al estudio de la razón del lado y la diagonal del cuadrado y se encontró que esta razón no podía ser expresada por "número" sino que apartir del Teorema de Pitágoras observaron que no existe ninguna fracción cuyo cuadrado sea igual a 2.

Esto es



$$b^2 + b^2 = a^2$$

$$2\,b^2 = a^2 \qquad (1)$$

$$2 = (a/b)^2$$

En efecto $a^2 = 2\,b^2$ en la que **a** y **b** no tienen factores comunes entonces a^2 es divisible por 2 y a^2 es par, por ende **a** es par. Como **a** es par, luego $a = 2\,b_1$ sustituyendo en (1) tenemos $2b^2 = 4\,b_1^2$ ó $b^2 = 2\,b_1^2$ lo cual nos indica que **b** es divisible también por 2 y esto contradice que **a** y **b** no tienen factores comunes y se demuestra que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable.

1.2. Surgimiento de la primeras ideas sobre infinitesimales en los griegos.

La construcción de las teorías matemáticas o sea de las tres que destacamos anteriormente cobró significado matemático cuando los procesos infinitos tuvieron que estudiarse en cuestiones tales como la determinación del volumen de una pirámide y también las paradojas de Zenón de Elea; las cuales entraron en conflicto con algunas concepciones antiguas concerniente a lo infinitamente pequeño y a lo infinitamente grande. Daremos una breve reseña de estas cuestiones.

1.2.1. Demócrito y el volumen de una pirámide.

Demócrito de Abdera desarrolló el atomismo, según el cual el ser eterno e inmutable es la materia, formada por corpúsculos indivisibles llamados átomos, que se mueven, chocan unos con otros, se agrupan y engarzan, según diversos tamaños infinitamente pequeños e infinitamente variados para formar las cosas. Concibió así mismo la hipótesis de que hay diferentes mundos, unos en formación y otros en estado de desintegración. Demócrito se interesó en problemas matemáticos de índole infinitesimal. Concebía un sólido como una suma de un número infinito de capas planas paralelas unas a otras, infinitamente delgadas e infinitamente próximas.

Según Arquímedes, Demócrito fué el primero en descubrir la relación que hay entre una pirámide y un prisma cuyas bases y alturas son respectivamente iguales, el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma.

Demócrito tuvo la oportunidad de considerar un cono hecho de infinitas secciones paralelas a la base. El concepto de un sólido como compuesto de planos resultaban un dilema; si dos secciones adyacentes son del mismo tamaño, el sólido será un cilíndro no un cono. De otra forma, si dos secciones vecinas son de diferentes áreas, la superficie de la figura será dividida en una serie de pasos, lo cuál Demócrito realizó pero no probó.

1.2.2. Las Paradojas de Zenón.

Hace aproximadamente dos mil quinientos años, Zenón de Elea construyó cuatro argumentos, con los cuales intentaba probar el movimiento, estos cuatro argumentos de Zenón comenzaron a inquietar a los matemáticos mucho después que lo irracional habia sido descubierto. Parece ser que los argumentos de Zenón son lógicamente coherentes, es decir, racionalmente válidos.

Como adversario de los pitagóricos y de las ideas atomistas, Zenón construyó estos argumentos que llamó paradojas, y que se explicaron mediante sumas infinitas. Estas fueron preservadas por Aristóteles y son conocidas como Aquiles, la Dicotomía, la Flecha y el Estadio. Fueron formuladas para subrayar las contradicciones en la concepción del movimiento y del tiempo. Describiremos los argumentos de tres de ellas.

El razonamiento que plantea en Aquiles y la Dicotomía donde supone que el espacio puede ser dividido infinitamente a medida que transcurre el tiempo, se presenta como sigue:

1. Aquiles: Aquiles "el de los pies ligeros", compitiendo en una carrera con una tortuga, a la que se ha dado una ventaja inicial, aunque corra a mucha velocidad, no podrá alcanzar ni podrá, por supuesto, adelantar nunca a la tortuga, por muy lento que ésta se mueva, pues para cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña y, cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos, y así, el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.

Con el propósito de hacer más entendible esta paradoja, ilustraremos el problema suponiendo que Aquiles corra diez veces más rápido que la tortuga, sean V_A y V_T, respectivamente, dichas velocidades, entonces $V_A = 10\ V_T$.

Aquiles le da una ventaja inicial a la tortuga de diez metros ($S_o = 10m$) y se mueve con una velocidad constante de $V_A = 10$ m/s. La figura # 1 es un esquema del movimiento, siendo n la enésina prueba que hace Aquiles de alcanzar a la tortuga, t el tiempo en segundos. La línea continua representa la distancia que le falta a Aquiles por recorrer y la línea discontinua lo que ha recorrido, de acuerdo al razonamiento de Zenón. Nótese que cuando Aquiles recorre 10m., la tortuga recorre 1m., luego Aquiles recorre ese metro y la tortuga 1/10 de metro, luego Aquiles recorre ese 1/10 de metro y la tortuga 1/100, es decir, $1/10^2$ de metro lo separa de la tortuga, así al infinito.

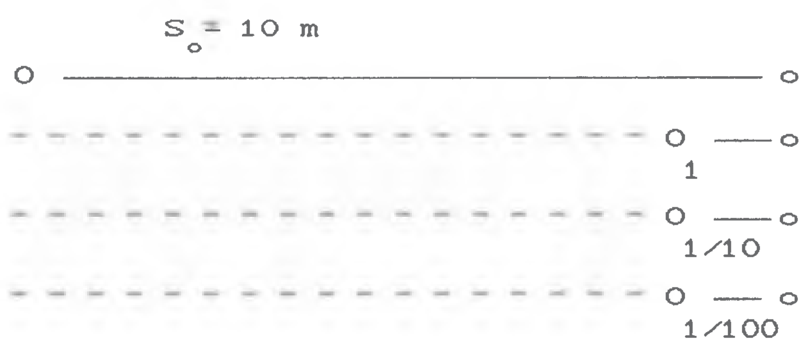


figura # 1

La distancia que Aquiles recorre (D_A) se obtiene al sumar cada uno de los segundos continuos de la figura 1, esto es:

$$D_A = 10 + 1 + 1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \ldots$$

Zenón creía que esta suma era infinita, porque siempre se iban adicionando términos positivos.

$$D_A = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} 1/10^n$$

Luego lo que recorre Aquiles, hasta alcanzar a la tortuga, es una distancia D_A, tal que
$D_A = (10 + 10/9)m = 100/9$ m.

2. La Dicotomía: Afirma que antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer, en primer lugar, la mitad de ésta distancia; pero antes de recorrer ésta, deberá recorrer el primer cuarto de la distancia inicial y, antes aún el primer octavo y, así, indefinidamente, a través de una cantidad infinita de subdivisiones.
El corredor, cuya velocidad es constante, que quiere iniciar su carrera debe realizar un número infinito de etapas sin ninguna primera en un tiempo finito; pero es obviamente imposible agotar una colección

infinita, es decir, tal que el movimiento nunca puede siquiera comenzar.

Con el fin de ilustrar esta paradoja, presentaremos el siguiente ejemplo:

Un corredor se mueve del punto A al punto B como se observa en la figura 2 con una velocidad constante. Sea T el tiempo necesario para llegar a A_1, el punto medio de AB; entonces como su velocidad es constante, necesitará un tiempo T/2 para llegar a A_2, el punto medio de A_1B y un tiempo T/4 para llegar a A_3, punto medio de A_2B, etc.

figura 2

Luego el tiempo total (T_T) para ir de A a B será la suma de todos los tiempos parciales tal que

$$T_T = T + T/2 + T/4 + T/8 + \ldots$$

y $$T_T = \sum_{n=0}^{\infty} T/2^n$$

$$T_T = T \sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$$

luego $$T_T = 2\ T$$

esta respuesta resuelve la paradoja.

Estas dos paradojas suponen que el continuo puede ser dividido infinitamente. Las otras dos paradojas suponen lo contrario o sea que el movimiento es igualmente imposible, es decir, que la subdivisibilidad del espacio y del tiempo termina en indivisibles y presentamos una de ellas como sigue:

3. La Flecha: Sostiene que un objeto moviéndose en el aire siempre ocupa un espacio igual a sí mismo, y que lo que siempre ocupa un lugar igual a sí mismo no puede estar en movimiento; por lo tanto, la flecha está en reposo en todos los instantes durante su vuelo, luego su movimiento no es más que una ilusión.

1.2.3. El principio de Eudoxio y las proporciones geométricas.

Eudoxio de Cnido (408-355 a.c.) se considera el más grande matemático del periódo helénico (VII al IV) y su interés se centró en el estudio de la sección aurea, la teoría general de las proporciones y el método de exhausión. Comentaremos un poco sobre la teoría general de las proporciones geométricas.

El principio básico de la teoría de las proporciones se puede enunciar con la siguiente definición de proporción:

Definición: "*Se dice que las magnitudes están en la misma razón siempre que los equimúltiplos de la primera y de la tercera sean al mismo tiempo mayores, e iguales o menores que los equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, de acuerdo con cualquier multiplicación*". [Wilbur R. Knorr. (1992:2) De exhausión a cortaduras: Primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. En Mathesis volumen VIII].

Es decir, para todos los enteros positivos m,n y para determinadas magnitudes a,b,c,d, entonces a:b = c:d (la proporción) se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:

1. $na > mb$ y $nc > md$

2. $na = mb$ y $nc = md$

3. $na < mb$ y $nc < md$

La teoría de las proporciones de Eudoxio se presenta en el libro V de los Elementos de Euclides.

Para entender el concepto de Eudoxio, debemos conocer una propiedad de mucha importancia, conocida como la propiedad arquimediana la cual dice: "*Dos magnitudes estan en razón, si es posible, al mutiplicar una de ellas de modo que supere a la otra, es decir, dos magnitudes a y b,* *del mismo tipo distintas de cero, estan en razón si existe un número natural n tal que na > b*". [Edwards, Charles H. (1979:14). The Historical Development of the Calculus].

Principio de Eudoxio: "*Sean M_0 y $\in$ dos magnitudes dadas, y M_1, M_2, M_3,..., una sucesión tal que $M_1 < 1/2\ M_0$, $M_2 < 1/2\ M_1$, $M_3 < 1/2\ M_2$, etc. Entonces $M_n < \in$ para algún n.*

Para ver esto, tomamos un entero positivo N tal que $(N+1) \in > M_0$. (propiedad arquimediana) luego $\in$ es mayor que $(N+1)\in/2$, por lo cual se tiene que $N \in \geq 1/2\ M_0 > M_1$. Similarmente, $\in > N \in/2$, así $(N-1) \in \geq 1/2\ M_1 > M_2$.

Procediendo de esta forma, a cada paso sustrayendo $\in$ del miembro izquierdo y partiendo a la mitad el miembro derecho, en n pasos llegamos a la desigualdad buscada $M_n < \in$". [Sup. cit. Edwards (1979:17)]

Dicho principio de Eudoxio es conocido hoy día como el método de Exhausión el cual establece en palabras que: "Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad y así continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminamos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dado previamente".

El método de exhausión permitió demostrar teoremas sobre áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Tal método permitió determinar que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base y la misma altura y que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilíndro de la misma altura.

1.2.4. Arquímedes y la cuadratura de la parábola.

1.2.4.1. Arquímedes de Siracusa.

A este sabio se la podría llamar muy bien "el Padre de la física matemática"; no se sabe a ciencia cierta la fecha de su nacimiento; sin embargo, el hecho indudable de haber muerto en el saqueo que siguió a la caída de Siracusa en manos de Marcelo en el año 212 a.n.e. y el testimonio del gramático bizantino Tzetzes siglo XII, según el cual Arquímedes habia vivido setenta y cinco años, fijan la fecha de su nacimiento en el año 287 a.c.

Nació en Siracusa (ciudad griega en lo que ahora es Sicilia). Allí hizo sus más importantes trabajos, a pesar de que muchos de sus estudios los realizó en Alejandría. Arquímedes contribuyó grandemente al desarrollo de la matemática, algunos fenómenos los descubrió primero por vía mecánica, luego los demostró geométricamente. La forma heurística (arte de inventar) del proceder de Arquímedes, lo ubica como uno de los matemáticos más prolíferos en la historia de la humanidad.

Las obras de Arquímedes fueron escritas en forma de cartas dedicadas enteramente a investigaciones matemáticas. Finalmente su contribución al cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos sólidos descubría resultados con su método físico-geométrico y, posteriormente, le daba valídez como lo marcaban los cánones del rigor griego.

En tiempos antiguos, la reputación de Arquímedes descanzaba en sus inventos mecánicos que sin duda eran más entendibles para las personas que la matemática pura.

En matemática pura, Arquímedes no hizo ningún avance conceptual, excepto quizás en sus métodos donde usaba su idea de la estática como medio para descubrir resultados de áreas y volúmenes. Los conceptos que Arquímedes necesitó para pruebas en geometría (la teoría de la proporción y el método de exhausión) habían sido proporcionados por Eudoxio.

"Las obras existentes de Arquímedes que tienen que ver con cálculos de áreas de figuras planas y volûmenes de cuerpos sólidos son en el siguiente orden:

1. La medición de la circunferencia,

2. La Cuadratura de la parábola,

3. *Sobre la esfera y el cilindro*

4. *Sobre los espirales,*

5. *Sobre conoides y esferoides*

6. *El método.*

Los primeros cinco de estas obras desarrollan el método de exhausión en una técnica de notable *poder la cual Arquímedes aplica a un amplio rango de problemas que hoy son típicas aplicaciones del cálculo integral y provee el punto inicial del desarrollo del cálculo moderno. La obra número 6 (el método), fue desconocido hasta su redescubrimiento en 1906, describe el método infinitesimal heurístico por el cuál Arquímedes descubrió muchos de sus resultados*". [Op. cit. Edwards (1979:30].

El libro sobre las espirales fue muy admirado pero poco leído, ya que se le consideró generalmente como la más difícil de todas las obras de Arqímedes. De los tratados que se refieren principalmente al Método de exhausión el más popular fue la cuadratura de la parábola, de la cual hablaremos más adelante.

Para los tiempos de Arquímedes, eran conocidos los siguientes hechos concernientes a segmentos parabólicos arbitrarios APBQC, donde el triángulo ABC es el de mayor área inscrito en dicho segmento.

a. La línea tangente en B es paralela a la base AC.

b. La línea recta a través de B paralela al eje, intersecta la base AC en su punto medio Y.

c. Cada cuerda QP paralela a la base AC es bisecada por la cuerda BY.(ver figura # 3)

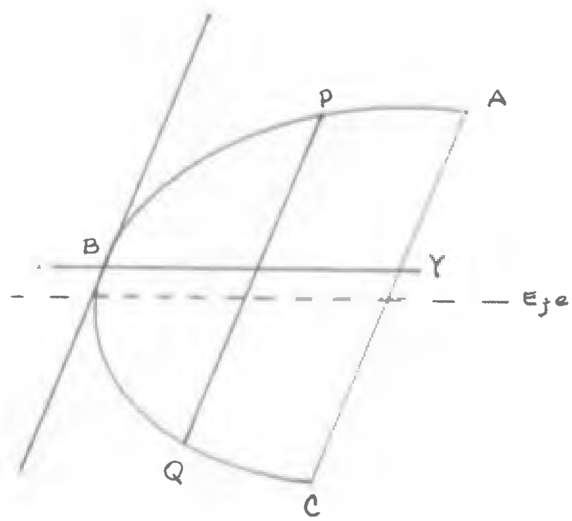


fig # 3

1.2.4.2. La Cuadratura de la Parábola.

"Arquímedes resalta que matemáticos anteriores han intentado exitosamente encontrar el área de un segmento de un círculo o hipérbola, pero aparentemente nadie habia previamente intentado la cuadratura de un segmento de parábola. La parábola fue originalmente definida por los griegos como una sección cónica". [Op. cit.Edwards 1979:35)].

La demostración por el método de exhausión es larga y complicada, pero el hecho es que Arquímedes demuestra rigurosamente que el área K de un segmento parabólico APBQC es igual a cuatro tercios (4/3) del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura. Demuestra en primer lugar que el área del triángulo inscrito ABC, con base AC, es igual a cuatro veces la suma de los correspondientes triángulos inscritos con bases cada uno de los segmento AB y BC. ver figura # 4.

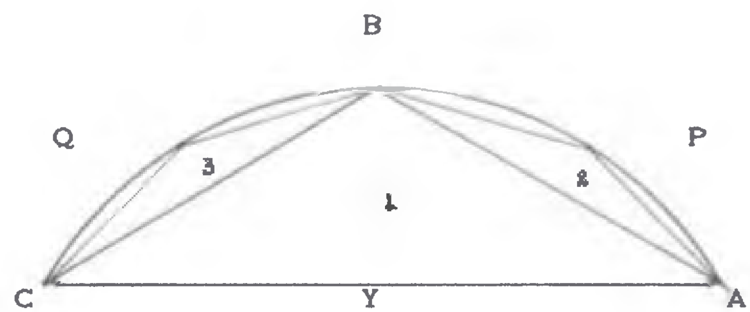


fig # 4

Para simplificar la construcción supongamos que el segmento parabólico está cortado por una cuerda perpendicular BY al eje de simetría AC de la parábola. Arquímedes divide el segmento parabólico en triágulos inscritos $\Delta_1, \Delta_2. \Delta_3, \ldots \Delta_n$ como se muestra en la figuras 5 y 6 (indicados por sus subindices).

El vértice de cada triángulo descansa sobre la parábola,estos triángulos se utilizan para calcular el área del segmento parabólico. Veremos su demostración mediante el estudio del triángulo Δ_3

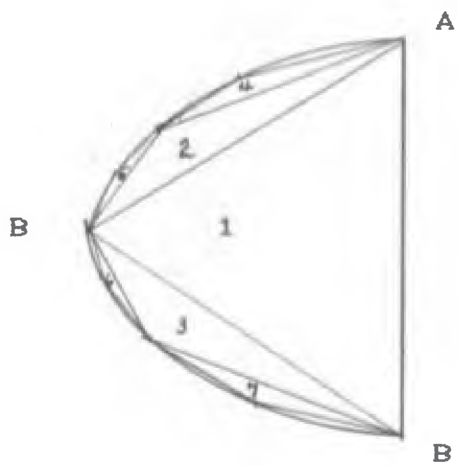


fig # 5

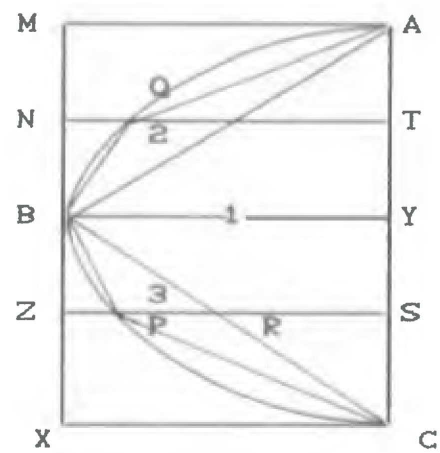


fig # 6

Puesto que el área del triángulo inscrito ABC es la mitad del paralelogramo circunscrito, entoces el área de este triángulo es mayor que la mitad del área del segmento parabólico APBQC.

La primera figura de la sucesión de polígonos inscritos es Δ_1 el triángulo ABC, la segunda figura se obtiene añadiendo al triángulo ABC dos triángulos: Δ AQB y Δ BPC. Para la construcción de los últimos, se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan paralelas ZS || BY || NT al eje de simetría de la parábola ver fig # 6. Se sigue por las propiedades de la parábola que Δ ABC = 4 (Δ AQB + Δ BPC). Tomemos a BY y XM respectivamente como ejes x e y . Así SR = 1/2 BY, entonces RP = 1/4 BY y SR = 2RP comparando las áreas de los triángulos tenemos: Δ SRC = 2 Δ RPC = Δ BRP ; Δ BCY =

4 ΔSRC = 4 ΔBRP , esto conduce a la relación $\Delta ABY = 4\Delta\ AQB$ por simetría del segmento parabólico así $\Delta_2 = \Delta_3$; $\Delta_2+\Delta_3=$ $1/4\ \Delta_1$ similarmente $\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 = 1/16\ \Delta_1$ y así sucesivamente, cada nueva sucesión de triángulos es 1/4 del área de la sucesión anterior. Puesto que el área total de éstos triángulos inscritos es mayor que la mitad de los segmentos, se sigue del principio de Eudoxio que dado $\in >0$ obtenemos después de un número finito de pasos un polígono inscrito cuya área K difiere de los del segmento APBQC en menos de $\in$, esto es, $K - \Delta_n < \in$ donde $n = n(\in)$.

Como AM, XC son paralelas a BY, lados del paralelogramo AMXC, $\Delta_1 = 1/2\ K_{AMXC}$, pero $K < K_{AMXC}$; luego $\Delta_1 > 1/2\ K$ y $K - \Delta_1 < 1/2\ K$. La figura Δ_1 agotó más de la mitad de los correspondientes restos del área K. Se satisface el lema fundamental del Método de Exhausión: si de una magnitud dada se quita una parte mayor de su mitad, luego se vuelve a sustraer una otra vez, entonces el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera.

En concecuencia $\Delta_n = \Delta + \Delta/4 + \Delta/4^2 + \ldots + \Delta/4^n$ donde Δ_n es el área del segmento parabólico, si n es suficintemente grande y $K - \Delta_n < \in$, para $\in > 0$.

"Arquímedes deduce la siguiente identidad:

$$1 + 1/4 + 1/4^2 + \ldots + 1/4^n + 1/3\ .\ 1/4^n = 4/3$$

la cual se obtiene observando que

$$1/4^\alpha + 1/3\ \ 1/4^\alpha = 4/(3\ 4^\alpha) = 1/3\ 1/4^{\alpha-1}$$

y de ahí que:

$$1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + (1/4^n + 1/3\ 1/4^n) =$$

$$1 + 1/4 + 1/4^2 + \dots + (1/4^{n-1} + 1/3\ 1/4^{n-1}) =$$

$$1 + (1/4 + 1/3\ 1/4) = 4/3$$

Entoces, se concluye que, buscando el límite de la sucesión de figuras inscritas, el área K será:

$$K = \lim_{n \to \infty} \Delta_n = \lim_{n \to \infty} \Delta_1 (1 + 1/4 + \dots + 1/4^n + 1/3\ 1/4^n)$$
$$= \Delta_1 \lim_{n \to \infty} (1 + 1/4 + \dots + 1/4^n + 1/3\ 1/4^n)$$
$$= 4/3\ \Delta_1"$$

[Op. cit. Edwards (1979:39)]

Los procesos infinitos no se aceptaban en la época de Arquímedes.

1.3. Sumación de series antes de Newton y Leibniz.

Antes del siglo XVII, los matemáticos mostraron gran imginación y claridad de pensamientos de manera que contribuyeron al análisis infinitesimal. En el tratamiento de sumas infinitas por medio de técnicas y métodos infinitesimales, una de las primeras contribuciones fue la serie geométrica $1 + 1/4 + \dots + 1/4^n + \dots = 4/3$ en la cuadratura de la parábola de Arquímedes.

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y de la teoría de series, los conceptos intuitivos relacionados con el infinito, produjeron métodos infinitesimales para la solución de problemas de áreas y volúmenes antes de época de Newton y Leibniz.

En esta etapa tomaron parte muchos científicos, entre los cuales destacamos a Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Gregorio de San Vicente (1584-1647), René Descartes (1571-1650), Buenaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre de Fermat (1601-1665), Gilles P de Roberval (1602-1675), Evangelista Torricelli (1608-1647), John Wallis (1616-1703), Blaise Pascal (1623-1662), Christiam Huygens (1629-1695), Isacc Barrow (1630-1677).

A continuación, presentaremos algunas de las contribuciones que estos científicos aportaron al análisis infinitesimal.

1. Galileo Galilei (1564-1642). Físico, astrónomo y matemático italiano, nació en Pisa el 15 de febrero de 1564 y murió en Arcetri el 8 de enero de 1642. Era hijo de Vicente Galilei.

Galileo es una de las más grandes figuras de la humanidad. Está considerado como el padre de la física moderna, y fundador del método experimental que hizo posible el progreso científico y las investigaciones que culminaron posteriormente en grandes descubrimientos.

Su interés en el cálculo lo llevó a construir y comercializar un aparato que denominó su compás geométrico y militar. El compás de Galileo consistía en dos brazos articulados por sus extremos, tal como el actual, que llevaban grabadas escalas de diversos tipos.

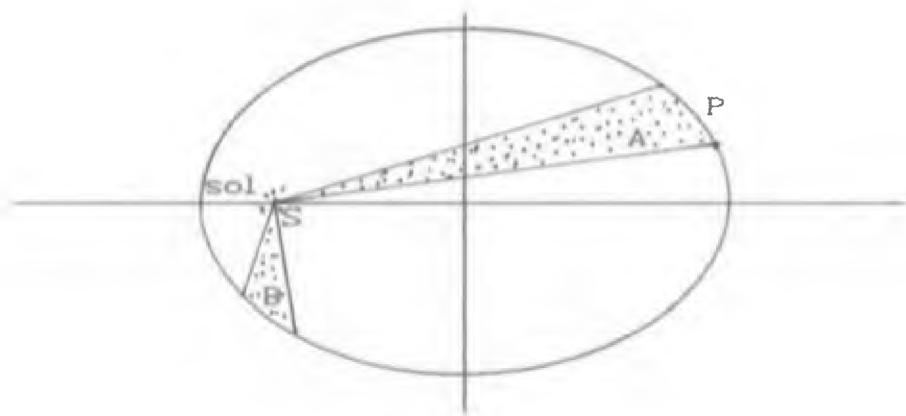
2. Kepler, Johannes (1571-1630). Matemático alemán. Hizo progresar el cálculo integral, caractizó las curvas a partir de una propiedad de sus tangentes. Enunció las tres celebres leyes del movimiento planetario, hizo contribuciones originales en distintos campos de las matemáticas.

"Por lo que respecta a las secciones cónicas, resolvió el problema de determinar el tipo de cónica, conocido un vértice, el eje que pasa por el vértice y una tangente cualquiera y su punto de contacto.

En su Astronomía Nova, aparecida en 1609, Kepler enuncia sus dos primeras leyes del movimiento planetario:

1. Cada planeta describe una elipse, en la que uno de los focos está ocupado por el sol.

2. La recta que une el planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.



Un planeta P describe una elipse y la recta PS recorre áreas A y B iguales en tiempos iguales.

Kepler afirmaba que el área recorrida por el radio vector está constituido por triángulos infinitamente pequeños, con un vértice en el sol y los otros dos sobre la órbita a una distancia infinitamente pequeña". [Collette, Jean Paul (1991:310). Historia de las matemáticas tomo 1.]

3. Gregorio de San Vicente (1584-1647)

Gracias a él hubo en Bélgica una verdadera escuela de investigadores que se preocupaban especialmente de los problemas infinitesimales. Su "*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*" (obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas) contiene la noción de lugar geométrico, la teoría de las cónicas, el estudio de una nueva clase de curvas de cuarto orden llamadas parábolas virtuales y muchas ideas originales, entre ellas la de que la cuadratura de la hipérbola depende de los logarítmos. En este tratado demostraba Gregory que si tomamos a lo largo del eje ox puntos a partir del $x = a$

tales que los intervalos que determinan, van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos puntos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola xy=1 fig # 7, entonces las áreas bajo la curva entre cada dos ordenadas sucesivas son iguales. Es decir, en otros palabras, según crece la abscisa geometricamente el área bajo la curva crece aritméticamente.

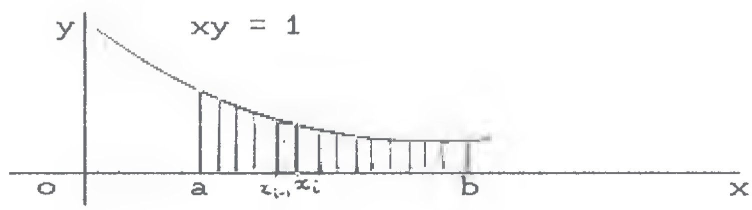


fig # 7

Denotemos el área bajo la curva xy = 1 por $A_{a,b}$ Lo que Gregory descubrió puede establecerse como sigue:

si t>0 entonces $A_{ta,tb} = A_{a,b}$.

Hagamos una partición de [a,b]:

donde $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n=b$

de tal forma que entre x_{i-1} y x_i haya la misma distancia para todo entero i y sobre estos subintervalos inscribimos y circunscribimos rectángulos como en la figura # 8, los rectángulos inscritos y circuscritos sobre el i-ésimo subintervalo de [a,b] tienen base (b-a)/n y la altura es el inverso de x_i, x_{i-1}, es decir $1/x_i$, $1/x_{i-1}$, respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(b-a)/nx_i \leq A_{a,b} \leq \sum_{i=1}^{n} (b-a)/ n\ x_{i-1} \qquad (1)$$

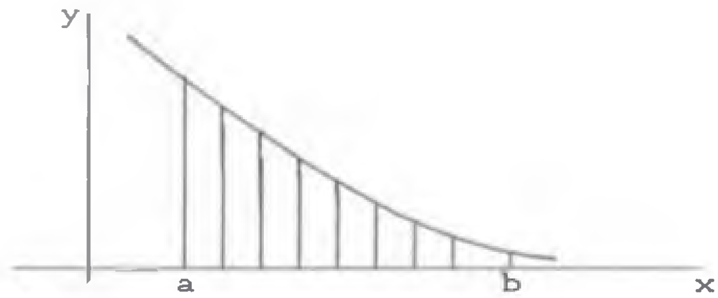


figura 8

Ahora, tomamos los puntos ta y tb múltiplos de a y b, similarmente, subdividimos el intervalo [ta,tb] en n subintervalos iguales. Los rectángulos inscritos y circunscritos sobre el i-ésimo subintervalo $[tx_{i-1}, tx_i]$ de [ta,tb] tienen base (tb-ta)/n y altura $1/tx_i$ y $1/tx_{i-1}$ respectivamente. Vemos entonces que estas áreas son iguales a aquellas de los rectángulos inscritos y circunscritos sobre $[x_{i-1}, x_i]$. Por lo cual

$$\sum_{i=1}^{n}(b-a)/nx_i \leq A_{ta,tb} \leq \sum_{i=1}^{n}(b-a)/nx_{i-1} \qquad (2)$$

por lo tanto de (1) y (2) podemos concluir que $A_{ta,tb}= A_{a,b}$.

La obra de *Opus Geometrics* de Gregory, fue leída por A. de Sarasa, discípulo y amigo de Gregory, y asegura que estas áreas pueden tener la característica de los logarítmos, es decir $\int_a^b x^{-1}\, dx = \text{Ln } b - \text{Ln } a$.

4. Descartes, René (1596-1650). Filósofo y matemático francés, nació el 31 de marzo de 1596 en La Haya, Francia y murió en Estocolmo, profesando el Catolicismo, el 1 de febrero de 1950.

Descartes es el matemático más conocido de la época, latinizado como Renato Cartesius, de ahí el nombre de "Cartesiana" dado a su doctrina. Pertenecía a una familia acomodada, y a los 8 años ingresó en el colegio de los jesuítas de La Flêche. Allí adquirió una amplia formación filosófica y matemática.

Descartes llegó a convertirse en el "padre de la filosofía moderna", presentó una nueva concepción científica del mundo y creó una nueva rama de la matemática. En 1637 apareció el más famoso de todos sus tratados, *el "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences "* (*Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias*) con tres apendices científicos *Dioptrique (Dióptica)*, *Méteores (Meteoros)* y *Geometie (Geometría)*.

Una de las contribuciones más importantes de Descartes a la matemática, fue la creación de la geometría cartesiana (conocida hoy como geometría analítica), hoy día a Descartes se le reconoce como el fundador de la Geometría Analítica.

5. Cavalieri Buenaventura (1598-1647). Nacido en Milán, relogioso jesuíta, fue uno de los mejores alumnos de

Galileo. Enseñó matemática en Bolonia desde 1629 hasta su muerte. Su fama se debe a un tratado, cuya primera versión se publicó en 1635, consagrado al método de los indivisibles.

El tratado de los indivisibles de Cavalieri es verbal y no muy claro. El autor no dice en ninguna parte de su obra qué entiende exactamente por el término "indivisible", que caracteriza a los elementos infinitesimales utilizados en su método. Podemos ilustrar el método de los indivisibles con la siguiente proposición, conocida en estereometría con el nombre de "*Teorema de Cavalieri*"

> "*Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que se obtienen por planos paralelos a las bases y a igual distancia de éstas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están también en la misma razón*". [Collette. (1991:314)].

Veamos algunos ejemplos de este principio. Uno de ellos es la fórmula de el volumen de un cono circular C con radio de la base r y de altura h, lo comparamos con una pirámide P de altura h y base un cuadrado unitario. Si C_x y P_x son las correspondientes secciones indivisibles, entonces por semejanza se tiene que sus áreas, denotadas $a(C_x)$ y $a(p_x)$ respectivamente, son:

$$a(C_x) = \pi r^2x^2/ h^2 \quad y \quad a(p_x) = x^2/ h^2$$

así $a(C_x) = \pi r^2 a(P_x)$, el teorema de Cavalieri implica que sus volúmenes, denotados V(C) y V(P), son:

$$V(C) = \pi r^2 V(P) = \pi r^2 h / 3 \text{ , puesto que } V(P) = h/3$$

Otro ejemplo de Cavalieri es la comparación de potencias de segmentos o potencias de los indivisibles que son paralelos a las bases de un paralelogramo con las potencias de líneas de uno de los triángulos formados por la diagonal del paralelogramo.

Sea ABCD el paralelogramo dividido en dos triángulos por la diagonal AC y sea EF un indivisible (segmento rectilíneo), del triángulo ADC, que es paralelo a la base CD. Entonces tomando AE = CH y trazando GH paralelo a CD , es fácil ver que el indivisible GH en el triángulo ABC será igual al EF en el triángulo ACD. Por lo tanto, podemos poner en correspondencia biunívoca los indivisibles del triángulo ABC con indivisibles iguales dos a dos del triángulo ADC y en consecuencia, los triángulos son iguales. Y como el paralelogramo es la suma de los indivisibles en los dos triángulos resulta que la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo.

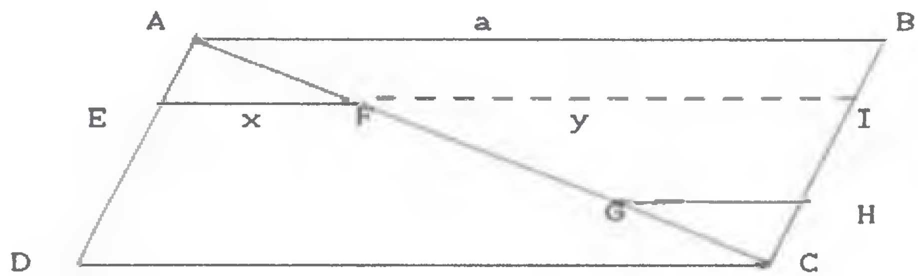


fig # 9

Así, llamaremos x la longitud del segmento EF, y a la del segmento FI y a la del segmento AB llamémosle a. Esto es: FI=y , EF=x , AB=a así que x+y=a figura # 9. Como el paralelogramo es la suma de los indivisibles, o sea sumando todas las líneas paralelas (esto lo escribimos como $\sum$), se tiene

$$\sum x + \sum y = \sum a$$

y puesto que EF = GH, entonces $\sum x = \sum y$ al sustituir en la relación anterior tenemos $2 \sum x = \sum a$ y finalmente se tiene $\sum x = 1/2 \sum a$.

$\sum x$ es el área del triángulo ACD y $\sum a$ es el área del paralelogramo, introducimos el factor Δx (léase incremento de x) entonces $\sum x \, \Delta x = 1/2 \sum a \, \Delta x$

$$\sum x \, \Delta x = 1/2 \; a \sum \Delta x$$

$$\sum x \, \Delta x = 1/2 \; a \, . \, a$$

$$\sum x \, \Delta x = 1/2 \; a^2$$

dicho en otras palabras tenemos que $\int_0^a x\,dx = a^2/2$ utilizando un razonamiento análogo, consigue Cavalieri demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos en el triángulo es igual a un tercio (1/3) de la suma de los cuadrados de los segmentos en el paralelogramo. Para los cubos de los mismos segmentos halló que la razón es 1/4 y más tarde lo extendió a potencias más altas, y destacó un teorema de la naturaleza geométrica equivalente a

$$\int_0^a x^n\,dx = a^{n+1}/(n+1)$$

El método de sumas de potencias de segmentos lo llevó a calcular en forma correcta $\sum_B^A x^n = a^{n+1}/(n+1)$.

6. Fermat, Pierre de (1601-1665). Matemático francés, a veces llamado fundador de la teoría moderna de los números. Era abogado de profesión; se dedicaba a la matemática en sus ratos de ocio. Fermat ejerció una gran influencia en todos los matemáticos modernos; muchos de sus descubrimientos quedaron como notas marginales en los libros de su biblioteca o fueron comunicados por cartas (generalmente sin prueba) a otros matemáticos.

Fermat dió muchos aportes a la matemática, así como en geometría analítica, incluso antes de Renato Descartes; también al cálculo con métodos ingeniosos y útiles para encontrar máximos y mínimos, en el trazado de tangentes y algunos procesos de integración como la generalización del resultado de Cavalieri, que con la notación actual es $\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$ con n entero positivo al caso en que n es fraccionario o negativo.

Veremos como Fermat da su método para encontrar máximos y mínimos.

Máximos y Mínimos.

En enero de 1638, Fermat envió a Mersenne un escrito sobre un método para la evaluación de máximos y mínimos ; Este escrito comienza así: La entera teoría de máximos y mínimos presupone dos cantidades incógnitas y la siguiente regla. Sea a cualquier cantidad incógnita del problema (que está en una, dos o tres dimensiones). Indiquemos el máximo o mínimo por medio de a en términos que puedan ser de cualquier grado. Reemplacemos ahora la incógnita original a por a+e y expresaremos así, la cantidad máxima o mínima en términos de a y e de cualquier grado. Igualaremos las dos expresiones de máximo o mínimo y cancelaremos los términos comunes. Resultará que ambos miembros tienen términos en e o sus potencias, dividiremos ambos miembros por e o algunas de sus potencias de manera que en al menos uno de los miembros, e será removido completamente.

Eliminaremos los términos en que aparece e o algunas de sus potencias e igualaremos ambos miembros. La solución de esta última ecuación dará el valor de **a** para el cual se **toma el** máximo o mínimo.

Fermat plantea el siguiente ejemplo:

"Dividir el segmento AC en E de manera que AE X EC sea Máximo". ver figura # 10.

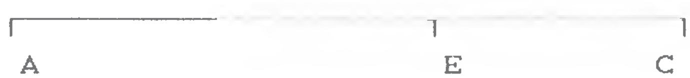


fig # 10

escríbase AC = **b**, AE = **a** y EC = **b-a**, y el producto, del cual se desea hallar el máximo entonces: AE x EC = $\mathbf{ba - a^2}$.

Sea **a+e** el primer segmento de **b**; el segundo es **b-a-e** y el producto $\mathbf{ba - a^2 + be - 2ae - e^2}$

con el anterior $\mathbf{ba - a^2}$.

Entonces tenemos $\mathbf{ba - a^2 + be - 2ae - e^2 = ba - a^2}$

eliminando los términos en común obtenemos $\mathbf{be = 2ae + e^2}$

suprimiendo **e** obtenemos que **b = 2a** es decir **a = b/2.**

Analizando lo que hizo Fermat se tiene: si E es un punto máximo (o bien mínimo) entonces, cuando **e** se hace infinitamente pequeño, los valores de la función en **a** y en **a+e** van a ser muy cercanos; esto tomando a f como la función tenemos: en su versión moderna si **e** $\cong 0$ entonces

$f(a+e) \cong f(x)$ y de ahí $f(a+e) - f(a) \cong 0$ al dividir por e obtenemos $[f(a+e) - f(a)] / e \cong 0$ y se concluye que la igualdad se tendrá cuando e=0. Así que Fermat dice que si E es un punto máximo (o mínimo), entonces $[\ f(a+e) - f(a)\ ] / e$ es cero cuando e es igual a cero, es decir f'(a) = 0 en notación moderna.

Método para trazar Tangentes.

Fermat señala que el método anterior también se puede usar para hallar la tangente en un punto a una curva y lo muestra con una parábola.

Sea la curva BDN con vértice en D (ver figura # 11), y diámetro DC. La recta EB es tangente a la curva en el punto B. El punto E es la intersección de la recta tangente con el diámetro DC. Escogemos en el segmento BE un punto O en el cual trazaremos la ordenada OI; construimos también la ordenada BC en el punto B.

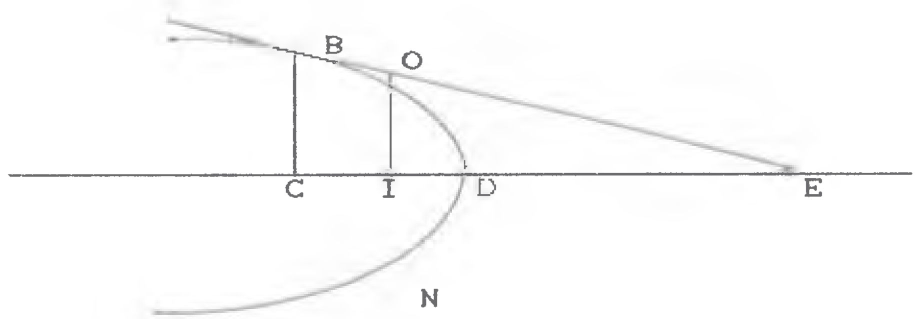


fig # 11

En esta parábola, si un punto de la Tangente resulta

$$CD/DI > BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$$

si CD = **d** , CE = **a** , CI = **e** entonces

$$d/(d-e) > a^2/(a^2+e^2-2ae)$$

así: $$d(a^2+e^2-2ae) > a^2(d-e)$$

$$d\,a^2+d\,e^2-2\,a\,d\,e > a^2d - a^2e$$

suprimiendo términos en común tenemos

$$de^2-2\,d\,a\,e > -a^2e$$

o el cual es lo mismo

$$d\,e^2+a^2e > 2\,d\,a\,e$$

dividiendo todos los términos por e obtenemos

$$d\,e + a^2 > 2d\,a$$

sin tomar $d\,e$ se tiene $a^2 \cong 2\,d\,a$ ya que e es pequeño.

por consiguiente $a \cong 2\,d$ lo cual prueba que CE es el doble de CD.

Integración de Fermat.

Alrededor de 1640, Fermat y Torricelli generalizaron el resultado de Cavalieri, que con la notación actual es $\int_0^a x^n\,dx = a^{n+1}/(n+1)$ con n entero positivo al caso en que n es fraccionario o negativo. Se trataba de un problema de "cuadratura" o sea de hallar el área entre un arco de hipérbola, una ordenada y una asíntota.

El método de Fermat se basa en el siguiente teorema:

Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos de ésta progresión es al más pequeño de ellos como el mayor es a la suma de todos los términos siguientes.

Así en la progresión

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots , ar^n \quad \text{con} \quad 0<r<1$$

$a-ar = a(1-r)$ es una diferencia de términos sucesivos y

$$a(1-r)/ar = a / (ar+ar^2+\ldots + ar^n+\ldots)$$

luego de invertir estas razones se concluye que:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n+\ldots= a/(1-r)$$

Estableciendo esto, veremos la cuadratura de la hipérbola. Fermat define las hipérbolas como curvas que tienden al infinito, como la curva DSEF (ver figura # 12) con la siguiente propiedad: AC y AR son asíntotas que pueden extenderse indefinidamente.

Tracemos paralelas a las asintotas AC como las rectas EG, HI, ON,MP,RS,...Tendremos siempre la misma razón entre una potencia de AH y la misma potencia de AG por un lado y una potencia EG (la misma o diferente a la anterior) y la misma potencia de HI del otro.

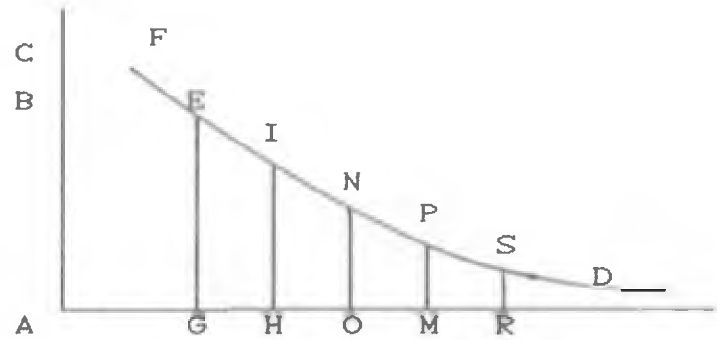


fig # 12

si AH=x , HI=y y las potencias son m,n enteros positivos. AG=a , EG=b resulta $x^m/a^m = b^n/y^n \rightarrow x^m y^n = k$ $(k=a^m b^n)$ Todas estas hipérbolas excepto la de Apolonio $xy = a^2$ pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica de acuerdo a un procedimiento general y uniforme.

Consideremos, por ejemplo, las hipérbolas cuyas propiedades se definen por las relaciones $AH^2/AG^2 = EG/HI$ Y $AO^2/AH^2 = HI/NO$

Fermat considera que el área indefinida que tiene como base EG está acotada por un lado por la curva ES y por el otro lado, por la asíntota infinita GOR es igual a una cierta área rectilínea.

Consideremos los términos de una progresión geométrica decreciendo indefinidamente en un intervalo [0,a], y una curva $y = x^p$ (ver figura # 13)

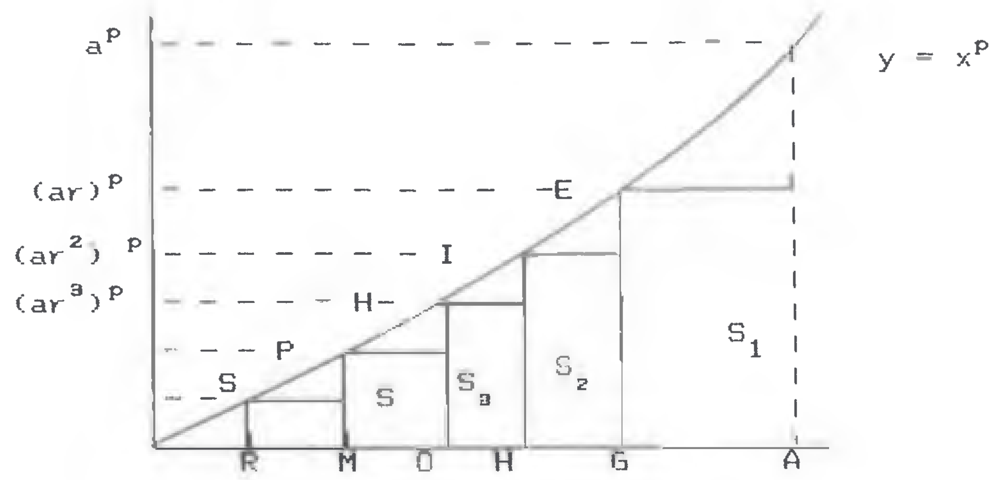


fig # 13

de manera que, el intervalo $[0,a]$ se divide en puntos $a=A$, $ar=G$, $ar^2=H$, $ar^3=O$, $ar^4=M$ etc, con $0<r<1$.

Supongamos que los primeros intervalos, (que son los subintervalos de $[0,a]$, GH, HO, OM, MR, ETC.) de los términos consecutivos son suficientemente iguales, entonces podemos emplear los polígonos inscritos y circunscritos, los rectángulos cuyas áreas podemos sumar.

Puesto que $y = x^p$, entonces las alturas sobre la curva de de los puntos, $a, ar, ar^2, \ldots$ etc son respectivamente $y_1 = a^p$, $y_2 = (ar)^p$, $y_3 = (ar^2)^p$, etc. "*las áreas de los rectángulos son:*

$S_1 = (a-ar)(ar)^p = a^{p+1}(1-r)\ r^p$

$S_2 = (ar-ar^2)(ar^2)^p = a^{p+1}\ r\ (1-r)\ r^{2p}$

$S_3 = (ar^2 - ar^3)(ar^3)^p = a^{p+1} r^2 (1-r) r^{3p} + \ldots$

.

.

.

Así que la suma S es :

$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$

$= a^{p+1} (1-r) r^p + a^{p+1} (1-r) r r^{2p} + a^{p+1} (1-r) r^2 r^{3p} + \ldots$

$= a^{p+1} (1-r) r^p [1 + r^{p+1} + (r^{p+1})^2 + (r^{p+1})^3 + \ldots]$

$= a^{p+1} (1-r) r^p . \dfrac{1}{1 - r^{p+1}}$

pero como $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^p = (1 - r^{p+1}) / (1-r)$, *entonces*

$S = a^{p+1} \dfrac{r^p}{1 + r + r^2 + \ldots + r^p}$ " [Cantoral, Ricardo (1993:72). Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual].

Consideremos el último rectángulo, donde se considera el máximo error del área bajo la curva $y = x^p$ como el área S. que queda comprendida entre la curva $y = x^p$, la recta $y = (ar)^p$ y las dos rectas A = a y G = ar Como se muestra en la figura # 14.

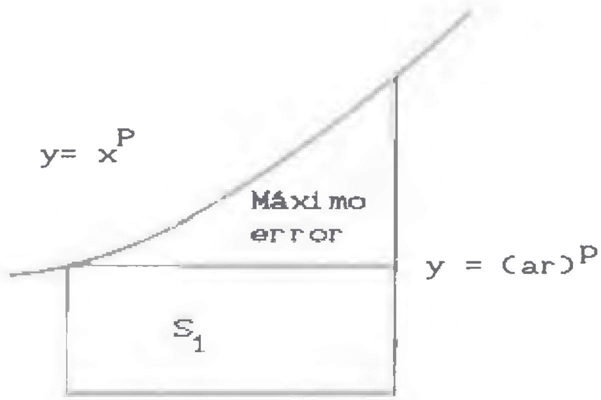


fig # 14

Así que, cuando $r \longrightarrow 1$ el máximo error tiende a cero. Luego entonces, el área bajo la curva, es:

$$\int_0^a x^p\,dx = \lim_{r\to 1} S = \lim_{r\to 1} a^{p+1} \frac{r^p}{1 + r + r^2 + \ldots + r^p}$$

por lo que si $p \neq -1$ concluimos que $\int_0^a x^p dx = a^{p+1}/(p+1)$.

No es difícil extender la idea a todas las hipérbolas definidas arriba excepto una, la de Apolonio $xy = a^2$, como ya ha sido indicado.

7. Roberval, Gilles Personne de (1602-1675). Nació el 10 de agosto de 1602 en un pueblo cerca de Beauvais, en Francia, de padres agricultores. Al parecer fue el único de sus hermanos que recibió una educación elevada.

Roberval ocupó durante más de cuarenta años la cátedra de Ramus en el college Royal, debido probablemente a que había desarrollado un método propio de indivisibles muy parecido al de Cavalieri, y con el hábil truco de no revelar su método a otros consiguió con éxito su objetivo de mantenerse ocupando la cátedra hasta su muerte en 1675.

En 1634 Roberval logró demostrar que el área encerrada bajo un arco de una cicloide es exactamente igual a tres veces el área del círculo que la engendra. Hacia el año 1638, Roberval descubrió un método para trazar la tangente a la cicloide (ver figura #15) en cualquiera de sus puntos, problema que resolvieron simultaneamente Fermat y Descartes; calculó el volumen del sólido engendrado al hacer girar el área bajo un arco alrededor de la recta base de la cicloide. También calculó los volúmenes engendrados al hacer girar dicho área alrededor de su eje de simetría, y alrededor de la tangente en el vértice de la cicloide.

Roberval había utilizado, para el problema del área, el método de los indivisibles. Los métodos de los indivisibles traducían concepciones procedentes de consideraciones sobre la constitución de la materia y sobre la cuestión del continuo. Unos sostenían que la materia podía dividirse infinitamente en partículas cada vez más pequeñas, sin poder asignar un fin a esta descomposición.

Además, cada partícula infinitamente pequeña conserva las propiedades de la materia sin ninguna alteración.

Roberval señala que su propio método no compara los heterogeneos, porque considera estos indivisibles como elementos infinitamente pequeños comparables entre sí, ya que un segmento, por ejemplo, está compuesto de segmentos indefinidos en números, y lo mismo una superficie, un sólido etc.

Método de Trazar la Tangente a la Cicloide.

Roberval consideraba un punto P de la cicloide como sometido a dos movimientos simultáneos, uno de traslación con el círculo y el otro de rotación, ambos con velocidades iguales. Según va rodando sobre la recta base AB, el círculo generador (ver figura # 15), el punto P es arrastrado horizontalmente, mientras que, al mismo tiempo, gira alrededor de O, el centro del círculo. Podemos, pues, trazar por P un segmento horizontal PS para representar el movimiento de traslación, y otro segmento igual PR tangente en P al círculo generador, para representar el movimiento de rotación (al ser iguales sus velocidades) la bisectríz PT del ángulo RPS nos dará la dirección del movimiento real del punto P en ese instante, luego PT es la tangente de la cicloide buscada.

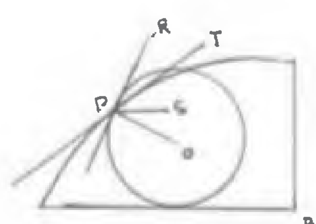


fig # 15

8. Torricelli, Evangelista (1608-1647). Físico y matemático italiano, nació el 15 de octubre de 1608. Inicio sus estudios en el colegio de los jesuítas de su ciudad natal. Después (a la edad de veinte años) fue enviado a Roma, donde recibió una formación matemática. Torricelli mantuvo una correspondencia importante con los matemáticos de su época, en particular, con Roberval y Mersenne. Conocía bien los trabajos de Arquímedes, de Galileo y el método de los indivisibles de Cavalieri.

Torricelli mostró sumo interés en la cicloide y se ocupó, además, de los infinitesimales sobre las tangentes, áreas y volumenes, calculando el área del arco de cicloide, el volumen del cuerpo engendrado, girando alrededor de su asíntota, del área comprendida entre una hipérbola y su asíntota y una ordenada; así como las cuadraturas de diversas parábolas. Los problemas que se podían atacar, utilizando métodos infinitesimales eran, en esa época, los más populares, y Torricelli en particular disfrutaba con ellos evidentemente. En su obra *De dimensione parabolae*, por ejemplo, Torricelli presenta de manera increíble veintiuna demostraciones diferentes de la cuadratura de la parábola, a partir de planteamientos que se dividen más o menos equivalentemente entre el uso de indivisibles y el método de exhausión, diez de ellas elaboradas por el método de los antiguos, y otras once, utilizando el método de los indivisibles. Torricelli se mantuvo dentro de la influencia geométrica de Cavalieri.

Un resultado nuevo, de 1641, que agradó extraordinariamente a Torricelli fue su demostración de que, al girar en torno al eje ox un área infinita, tal como la limitada por la hipérbola $xy=a^2$, una ordenada $x=b$ y el eje de las abscisas, por ejemplo, el volumen del sólido engendrado puede ser finito. Torricelli creía haber sido el primero en descubrir que una figura de dimensiones infinitas podía tener una extensión finita, pero en este sentido, Fermat se le adelantó en sus trabajos sobre las áres bajo las hipérbolas de orden superior.

La breve asociación de Torricelli con Galileo había despertado también en el joven estudiante el interés por las ciencias físicas, por lo que se le conoce más como el inventor del barómetro que como matemático.

Torricelli fue uno de los matemáticos más prometedores del siglo XVII, al que se suele considerar como el siglo de los genios.

Torricelli se ocupaba de múltiples problemas pero antes de su prematura muerte, en 1647, logró representar la curva cuya ecuación, se escribe $x = \log y$, en lo que es quizás la primera representación gráfica de una función logarítmica. Calculó el área límitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar este área alrededor del eje ox.

9. Wallis, John (1616-1703). Nació en Ashford, Inglaterra el 23 de noviembre de 1616. Hizo sus estudios en Cambridge fue profesor de la Universidad de Oxford y uno de los fundadores de la Royal Society de Londres. Su obra más famosa es la "*Arithmetica infinitorum*", (1655), en la que perfeccionó el método de los indivisibles, calculando la cuadratura de las parábolas $y = x^m$ para cualquier valor real positivo de m, desarrolló π en forma de producto infinito, rectificó algunas curvas y cuadró otras; introdujo el símbolo de infinito y fue el primero que estudió sistemáticamente las series después de Cavalieri.

Uno de los libros más importantes escritos en este período es el de Wallis (*Arithmetica infinitorum*). Ya el título de su libro muestra que Wallis intentaba ir más allá que Cavalieri con su "*Goemetria indivisibilibus*"; era la nueva aritmética lo que Wallis quería aplicar, no la antigua geometría. En este proceso, Wallis extendió el álgebra hacia un análisis verdadero el primer matemático en hacerlo. Sus métodos de tratar con procesos infinitos eran imperfectos a menudo, pero él obtuvo nuevos resultados; introdujo series infinitas y productos infinitos y usó con gran audacia, exponentes fraccionarios, negativos e imaginarios, escribió ∞ para $1/0$ y sostenía que $-1 > \infty$.

Wallis fue solamente un eslabón de la cadena de hombres brillantes de este período quienes enriquecieron la matemática con descubrimentos tras descubrimientos.

Wallis en su segunda obra aritmetizaba la geometría *indivisibilibus* de Cavalieri, quien había llegado al resultado $\int_0^a x^m\, dx = a^{m+1}/(m+1)$ por medio de una laboriosa correspondencia biunívova entre los indivisibles geométricos en un paralelogramo con uno de los triángulos en que lo divide en una diagonal, Wallis abandonó el marco geométrico **después** de haber asociado valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras. Si se quieren comparar, por ejemplo, los cuadrados de los indivisibles en el triángulo con los cuadrados de los indivisibles en el paralelogramo, podemos tomar la longitud del primer indivisible en el triángulo como cero, la del segundo como uno, la del tercero como dos, y así sucesivamente hasta el último, de longitud n-1, si hay en total n indivisibles, la razón de la suma de los cuadrados sería entonces:

para dos indivisibles

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

para tres indivisibles

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

para cuatro indivisibles

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

En general, para el caso en que hubiera $n+1$ indivisibles, la razón sería:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \ldots + n^2 + n^2 + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

y para n infinito, la razón sería obviamente igual a 1/3 y el término complementario 1/6n se convierte en $1/\infty$ o cero. El resultado es equivalente a decir que $\int_0^1 x^2\, dx = 1/3$, Wallis extendió este mismo método a potencias enteras y positivas de x más altas, concluyendo por inducción incompleta que $\int_0^1 x^m\, dx = 1/(m+1)$ para todo m natural.

10. Pascal, Blaise (1623-1662). Nació en Clermont-Ferrand, Francia. Segundo hijo de Etienne Pascal, Presidente del Tribunal de Impuestos y Matemático aficionado que, manteniéndose al corriente de las pricipales actividades matemáticas de su tiempo, fue capaz de realizar con éxito algunos estudios matemáticos, como por ejemplo, el caracol de Pascal y proposiciones que al parecer demostró sobre los triángulos.

Pascal, Blaise fue un niño prodigio, con él se inicia el cálculo de probalidades y el cálculo mecánico, pues sólo contaba con 18 años de edad cuando inventó la primera máquina de sumar que se conoce. A la edad de 12 años, se inicia en las matemáticas contra la voluntad de su padre y emprende un día la tarea de demostrar la trigésima segunda proposición de Euclides, y su padre lo sorprendió en este trabajo. Asombrado por la precosidad de su hijo, Etienne suspende la prohibición sobre el estudio de la matemática y le facilita los elementos necesarios para darle libertad a su inteligencia. A los 14 años es admitido, junto con su padre, en la Academia de Mersenne, que agrupa a los hombres como Mersenne, Desargues, Roberval y otros. A los 16 años, expone allí teorías importantes como una propiedad fundamental de las cónicas llamadas desde entonces "Hexágono de Pascal".

Los estudios de Pascal en análisis basa r on, en sumaciones, las integraciones necesarias para calcular arcos, superficies, volúmenes y para determinar centros de gravedad. Pascal no se ocupó en el problema de las tangentes.

Al introducir en su tratado de los senos del cuadrante de circunferencia la notación de triángulo característico, Pascal estuvo notablemenete cerca del descubrimiento del cálculo diferencial.

11. Huygens, Christiaan:(1629-1695). Astrónomo holandés, cultivó la matemática pura. Perfeccionó los métodos hasta entonces conocidos para calcular el número π, se ocupó de las curvas planas, la tractiz y la catenaria, hizo notables investigaciones en geometría diferencial con

su teoría de la curvatura de las curvas planas, y a él se debe el primer tratado de cálculo de probabilidades. Halló los puntos máximos y minímos y el punto de inflexión, con lo que consiguió dibujar la curva correctamente tanto para coordenadas positivas como negativas. El cálculo de puntos de inflexión no era nuevo con Huygens, ya que muchos otros matemáticos anteriormente lo habían resuelto, entre ellos (Fermat y Roberval).

Huygens fue un científico de fama internacional a quién se le recuerda, principalmente por el principio que lleva su nombre en la teoría de la luz, por la observación de los anillos de saturno y por la invención del reloj de péndulo, en 1658.

Estudió la curvatura de muchas curvas y sus investigaciones lo llevaron a un descubrimiento de importancia matemática: "La involuta (envolvente) de una cicloide es otra cicloide igual, o inversamente, la evoluta de una cicloide es otra cicloide igual a ella". Huygens hizo su demostración tomando puntos próximos y observando el resultado que se produce cuando el intervalo que los separa se anula. Él aplicaba este procedimiento para hallar lo que hoy día se conoce como el radio de curvatura de una curva plana.

Se hallan las rectas normales a una curva en dos puntos próximos P y Q y la intersección de estas dos rectas normales, el punto I, (ver figura # 16)

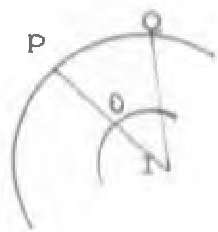


fig # 16

entonces, a medida que Q se acerca a P a lo largo de la curva, el punto I de intersección va tendiendo a un punto fijo O que se llama centro de la curvatura de la curva en el punto P, y a la distancia OP se le conoce como el radio de curvatura de la curva en el punto P. (ver figura # 17)

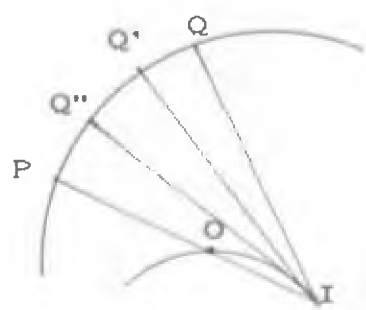


fig # 17

Huygens mantuvo un profundo interés por el estudio de las curvas planas de orden superior. En esta línea, rectificó la cisoide, estudió las propiedades de la tractiz, y demostró que la catenaria es una curva no algebraíca, mientras que Galileo había creído que era simplemente una parábola. En 1656 aplicó Huygens el análisis infinitesimal a las cónicas, reduciendo la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola es decir, al cálculo de un logarítmo. Al año siguiente, Huygens se convirtió en el primero que logró calcular el área de un segmento de paraboloide de revolución (el "conoide" de Arquímedes) demostrando que la determinación de este área puede conseguirse por métodos elementales.

12. Barrow Isaac (1630-1677). Nació y murió en Londres, inició su carrera estudiando filosofía, matemática y teología; Pretendió una cátedra de griego, pero no se la concedieron por sus ideas políticas, adictas a Carlos II; viajó por Francia, Italia, y Turquía; regresó a Inglaterra en el año 1660 y entonces le dieron la cátedra que antes le habían negado. Dos años después fue maestro de Newton en la universidad de Cambrige, a quien cedió su puesto, en 1669, para dedicarse a la teología.

Fue uno de los precursores del cálculo infinitesimal, inventó un método para la determinación de las tangentes a las curvas planas por medio del llamado triángulo cartesiano o triángulo diferencial, que es el formado por las diferenciales dx y dy y el arco elemental ds, con lo que, en realidad, la matemática le debe el concepto de derivada.

Método para deterninar tangentes a una curva

Para determinar las tangentes a las curvas planas

Barrow explica su regla de la siguiente manera: Si M es un punto de una curva dada por una ecuación polinómica $f(x,y)=0$

es decir,

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{12}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \ldots$$
$$+ a_{n0}x^n + \ldots + a_{0n}y^n = 0,$$

y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje x, entonces Barrow considera " un arco infinitamente pequeño MN de la curva", las ordenadas correspondientes a los puntos M y N, y el segmento MR paralelo al eje x (figura # 18)

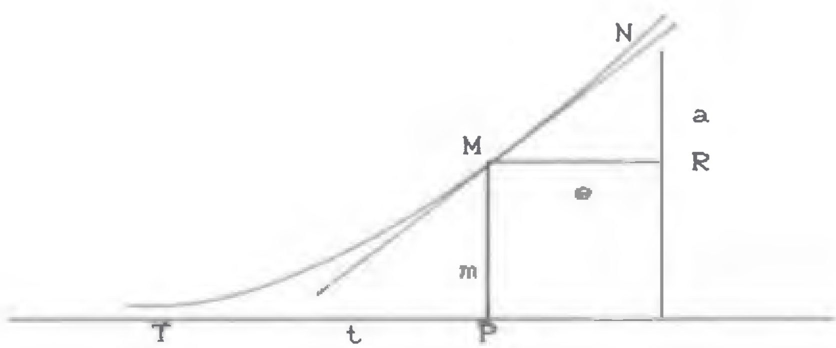


fig # 18

Llamamos m la ordenada de M y t a la subtangente buscada PT y a, e los catetos vertical y horizontal respectivamente del triángulo rectángulo MRN, Barrow hace notar que la razón de $a/e=m/t$. Hoy día, para nosotros la razón a/e para dos puntos próximos es la pendiente de la curva. Para hallar esta razón Barrow procede de una manera muy parecida a como había hecho Fermat; sustituye x e y en la ecuación $f(x,y)=0$ por $x+e$ e $y+a$ respectivamente, y en la ecuación resultante suprime todos los términos que no contengan a y e (por la ecuación dada, la suma de todos ellos es cero) así como todos los términos de grado mayor que uno en a y en e y por último reemplaza a por m y e por t. A partir de este resultado, puede calcularse la subtangente (proyecciones sobre el eje x) t en términos de x y de m y si x y m son conocidas, la subtangente t queda determinada, y con ella la tangente TM.

Presentamos un ejemplo a continuación, aplicando la regla de Barrow para la determinación de las tangentes.

Ejemplo :Supongamos que la ecuación $f(x,y)=0$ sea $y^2-xy=0$, entonces las sustituciones mencionadas proporcionan:

$$(y+a)^2-(x+e)(y+a) = 0$$

$$y^2+2ay+a^2-(xy+ax+ey+ae) = 0$$

$$y^2-xy+a^2+2ay-ax-ey-ae = 0$$

sustrayendo $y^2-xy = 0$

nos queda $a^2+2ay-ax-ey-ae = 0$

Despreciando las potencias de a y e mayores que 1, se tiene

$$2ay - ax - ey - ae = 0$$

$$2ay - ax - e (y+a) = 0$$

$$a (2y - x) = e (y + a)$$

$$\frac{a}{e} = \frac{y + a}{2y - x}$$

A continuación se reemplaza "a" por "m" y "e" por "t". La subtangente t se expresa entonces en términos de x y m, y queda determinada así:

$$\frac{m}{t} = \frac{y + m}{2y - x} \quad ;$$

$$t = \frac{(2y-x)m}{y + m}$$

Barrow no conocía directamente la obra de Fermat, ya que no menciona su nombre en ninguna parte. Sin embargo, menciona como inspiradores de sus ideas a Cavalieri, Huygens, Gregorio de San Vicente, James Gregory y a Wallis.

De todos los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral, ninguno se aproximó tanto como Barrow al nuevo cálculo que se avecinaba.

CAPITULO 2

APORTES DE NEWTON Y LEIBNIZ

2. APORTES DE NEWTON Y LEIBNIZ.

En este capítulo presentamos algunos datos biográficos de los creadores del cálculo infinitesimal, Newton y Leibniz; también comentaremos sus principales aportes a esta disciplina.

En cuanto a la creación del análisis infinitesimal hubo una gran polémica, que surgió durante el siglo XVIII entre los matemáticos ingleses y los del continente europeo, los ingleses acusaban a Leibniz de haber traducido la obra de Newton, los europeos acusaban a Newton de ser el plagiador, Newton lo creó en el periodo de 1665-1666 y Leibniz entre 1673 y 1676 pero Leibniz publicó primero su invención de 1684 a 1686 y Newton después entre 1704 y 1736. La escuela de Leibniz fue mucho más brillante que la de Newton, las notaciones de las derivadas sucesivas de Leibniz se usan más, ya que él indica la variable independiente, sin embargo, Newton no. Lo cierto es que los dos lo trabajaron independientemente.

A continuación, daremos una reseña biográfica de estos dos entes pensantes y sus contribuciones al cálculo infinitesimal.

2.1. Isaac Newton y sus Aportes.

Newton, Isaac (1642-1727). Matemático, Físico y Astrónomo inglés, nació en Woolsthorpe, Lincolnshire, el 25 de diciembre de 1642 y murió en Kensigton (Londres) el 20 de mayo de 1727. Hijo de un labrador acomodado que murió antes de su nacimiento; su madre, Ana Ayscough, se casó poco después con Bernabé Smyth, Rector de Nortwithan, y confió al pequeño Isaac, a los cuidados de su abuela, quien le envió a la escuela rural. A los 12 años fue enviado a estudiar a la Escuela de Grantham hospedándose en la casa del Doctor Clark, un farmacéutico de la población.

En la década de 1650-1660 lo sacaron del colegio para que ayudara en la finca de su madre, ésta había enviudado por segunda vez, pero un día un tío de Isaac le sorprendió resolviendo un problema de geometría, y adivinando las verdaderas aptitudes y aficiones del jóven Isaac, convenció a su madre de que su lugar estaba en el aula y no en la granja, y fue enviado de nuevo a la Escuela de Grantham, donde permaneció 2 años.

En 1661, fue admitido en Trinity College de Cambridge, y obtuvo su doctorado en 1665. Tuvo la suerte de contar entre sus maestros, con Barrow, uno de los matemáticos de la época. En 1669, Barrow dimitió de su puesto a favor de Newton, quien a la edad de 27 años se convirtió así en catedrático de matemática de la Universidad de Cambrige. Fue elegido miembro de la Royal Society en 1672, la institución científica más destacada de inglaterra y director de la Casa de la Moneda en 1696. Fue presidente de dicha sociedad, desde 1703 hasta su muerte.

En 1701 se estableció en la villa de Kensinton, en el sector metropolitano de Londres, dedicandose por completo al estudio y a la investigación. Muy pronto se reveló Newton como un matemático y astrónomo genial, al descubrir la ley de la gravitación, que es el fundamento de gran parte de la ciencia moderna, e inventar el sistema de matemática superior conocidas como cálculo diferencial e integral.

Su gran talento matemático fue reconocido desde 1665, durante ese tiempo realizó grandes descubrimientos científicos. -El primero fue el binomio que lleva su nombre y luego los elementos del cálculo diferencial, que llamaba fluxiones. -Poco después dijo que "había encontrado el método inverso de las fluxiones", es decir, el cálculo integral y -el método para calcular superficies encerradas en curvas como hipérbola, y los volúmenes de los sólidos.

Newton empezó a escribir un libro que contenía todo esto y lo llamó *"Philosophiae Naturalis Principia Matemática"*, *"Principios matemáticos de la filosofía"*, universalmente conocido por Pincipia Matemática.

Newton fue respetado durante su vida como no había sido respetado ningún científico antes de él. Al morir fue enterrado en Westminster Abbey, junto a los héroes de Inglaterra.

2.1.1. La serie del binimio de Newton.

El más famoso de los desarrollos en series es el binomio de Newton, descubierto entre 1664 y 1665, válido no solo para potencias de exponente natural n, sino también para n racional. A las conclusiones de Newton en este binomio le fueron de gran ayuda las contribuciones de la aritmética de Wallis y la teoría de las probabilidades de Pascal.

Cabe destacar dos hechos históricos para poder apreciar el aporte de Newton al formular la serie del binomio:

1. El uso de los exponentes no enteros era desconocido, Newton utiliza los exponentes no enteros y negativos por primera vez.
2. Antes de Newton la fórmula del binomio se conocía sólo a través del triángulo aritmético.

Veremos la presentación del binomio de Newton en su forma para exponentes enteros positivos

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n\, a^{n-1}b + C_2^n\, a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n\, a\, b^{n-1} + b^n$$

donde el coeficiente binomial C_i^n es el número de combinaciones de n elementos tomados i a i, el cuál se obtiene en la n-ésima fila del triángulo aritmético, mejor conocido actualmente como el triágulo de Pascal cuya representación es la siguiente:

Triágulo Aritmético

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	. .
1	3	6	10	15	.	.
1	4	10	20	.	.	.
1	5	15	.	.	.	.
1	6	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.	.

Triágulo de Pascal en forma actual

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

Éstos coeficientes binomiales eran manejados en la antigua India antes de nuestra era y fueron manipulados por los matemáticos orientales.

Ejemplo: observemos el desarrollo de $(x + a)^4$ pero antes veremos el desarrollo de las dos prmeras potencias 2 y 3, para luego explicar los coeficientes binomiales de $(x+a)^4$, tales son:

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a)= x^2+ax+ax+a^2=x^2+2ax+a^2$$

$$(x+a)^3 = (x+a((x+a)(x+a)=$$
$$(x^2+2ax+a^2)(x+a)$$
$$= x^3+3ax^2+3a^2x+ a^3$$

Ahora $(x+a)^4 = (x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$
$$= (x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)(x+a)$$
$$= x^4+ 4ax^3+ 6a^2x^2+ 4 a^3x + a^4$$

ahora bien, sustituyendo el 4, el 6 y el 4 por su fórmula correspondiente, tendremos

$$(x+a)^4 = x^4 + C^4_1\ x^3a + C^4_2\ x^2a^2 + C^4_3\ x\ a^3 + a^4$$

Newton concedía una gran importancia a los desarrollos en series de potencias debido a que suministraban un método para reducir las fórmulas analíticas de expresar las curvas a una forma canónica en la que todos los términos consistían en un coeficiente constante por una potencia de la variable.

Examinando los coeficientes binomiales C^n_i de la forma generalizada del binomio de Newton se pueden escribir en notación moderna de la forma siguiente:

$$C^n_i = \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-i+1)}{i!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-i+1)(n-i)!}{i!(n-1)!}$$

luego $C^n_i = n!/\ i!(n-i)!$ con $i \leq n$.

es por eso que el coeficiente 6 del tercer término del ejemplo anterior es:

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!\ (4-2)!} = \frac{4x3x2}{2!\ 2!}$$

$$= \frac{4x3}{2x1}$$

$$= 6$$

"Newton vió que esto tenía dos grandes ventajas: en

primer lugar, el desarrollo en serie permitía realizar un estudio mucho más amplio de curvas, reglas y algorítmos que estaban definidas para ecuaciones sencillas; por ejemplo la relación $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, *conocida durante los años de 1660 en diversas formas equivalentes. En segundo lugar, los desarrollos en series suministraban un método fácil y uniforme para aproximar o simplificar fórmulas despreciando los términos de orden superior, procedimiento que Newton utilizó en las aplicaciones de sus métodos matemáticos al tratamiento de problemas físicos*". [Grattan-Guiness (1984:76) Del cálculo a la teoría de conjuntos].

Habiendo utilizado el binomio de Newton para exponentes enteros n, y en su forma actual es:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

se puede generalizar para exponentes racional $\alpha = p/q$, en cuyo caso el miembro de la derecha del desarrollo

$$(a+b)^\alpha = a^\alpha + \frac{\alpha}{1} a^{\alpha-1}b + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \times 2} a^{\alpha-2} b^2 + \ldots$$

es una serie infinita.

Veremos un ejemplo en el cual el exponente es racional aplicando la forma anterior en el siguiente binomio:

$$(1 + x^2)^{3/2} = 1 + \frac{3/2}{1} x^2 + \frac{3/4}{1 \times 2} x^4 + \frac{(-3/8)}{1 \times 2 \times 3} x^6 + \frac{(9/16)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x^8$$

$$= 1 + 3/2\, x^2 + 3/8\, x^4 - 3/48\, x^6 + 9/384\, x^8 + \ldots$$

Newton observó que esto lo podía llevar a cuadraturas de algunas curvas , el cual permitió ver la cuadratura de la hiperbola $y = \frac{1}{1+x}$ -en el que el binomio de la derecha tiene exponente negativo donde n=-1 y procedió a buscar el área bajo la hipérbola el cual dió origen a la serie que hoy día se conoce como Ln(1+x), aunque Newton no se refiere a esto como logarítmo más sin embargo reconoce la similitud con los logarítmos y procede a buscar el área bajo la hipérbola con $x > -1$ y sobre $[0,x]$ (ver figura # 19)

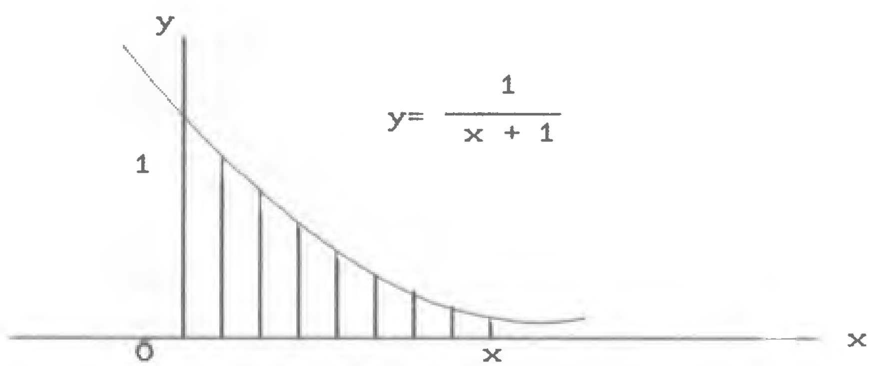


fig # 19

Newton divide mecánicamente $1/(x+1)$ y obtiene la serie

$$1/(x+1) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ \ldots$$

y luego integra término a término para obtener el área el cual es otra serie de la siguiente manera:

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$$

ya hemos dicho que él no se refiere a esto como un logarítmo pero reconoce su carácter logarítmico pues

$$\mathrm{Ln}\ [(1+x)\ (1+y)] = \mathrm{Ln}(1+x) + \mathrm{Ln}(1+y)$$

$$\mathrm{Ln}\ [(1+x)/(1+y)] = \mathrm{Ln}\ (1+x) - \mathrm{Ln}\ (1+y)$$

2.1.2. Método de inversión de series.

Para el método de inversión de series, Newton aplica el método de aproximaciones sucesivas, el cual consiste en buscar la inversa de una función. Veremos el ejemplo de la hipérbola para ilustrar este método. Tomaremos la serie obtenida de la integración de los términos de la serie de la división.

Dada la serie $Z = x - 1/2\ x^2 + 1/3\ x^3 - 1/4\ x^4 + 1/5\ x^5 - \ldots$ donde Z es el área de la hipérbola $y = 1/(x+1)$, queremos resolver para x en términos de Z.

Newton decide resolverlo sólo para los primeros cinco términos en la serie para x , y desprecia todos los términos de grado mayor que cinco, y obtiene:

$$1/5\ x^5 - 1/4\ x^4 + 1/3\ x^3 - 1/2\ x^2 + x - Z = 0 \qquad (1)$$

la primera aproximación es $x \cong Z$

sustituimos $x = Z+p$ en la ecuación (1) y nos resulta

$$1/5(Z+p)^5 - 1/4(Z+p)^4 + 1/3(Z+p)^3 - 1/2(Z+p)^2 + (Z+p) - Z = 0$$

haciendo uso del triángulo de pascal y resolviendo tenemos

$$1/5(Z^5+5Z^4p+10Z^3p^2+10Z^2p^3+5Zp^4+p^5) - 1/4\ (Z^4+4Z^3p+6Z^2p^2+4Zp^3+p^4)$$
$$+1/3(Z^3+3Z^2p+3Zp^2+p^3) - 1/2\ (Z^2+2Zp+p^2) + (Z+p) - Z = 0$$

$$1/5Z^5 - 1/4\ Z^4 + 1/3Z^3 - 1/2\ Z^2 + (Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1)p + (2Z^3 - 3/2\ Z^2 + Z - 1/2)p^2$$
$$+ (2Z^2 + Z + 1/3)\ p^3 + (Z - 1/4)\ p^4 + 1/5\ p^5 = 0 \qquad (2)$$

despresiando los términos no lineales de p obtenemos

$$p \cong \frac{1/2\ Z^2 - 1/3\ Z^3 + 1/4\ Z^4 - 1/5\ Z}{1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4} = 1/2\ Z^2 + \ldots, \qquad (3)$$

como la primera aproximación fue $x \cong Z$ y se sustituyó $x = Z + p$ según (3) $p \cong 1/2\ Z^2$ se tiene que la segunda aproximación es $x \cong Z + 1/2\ Z^2$

En la ecuación (2) sustituimos ahora $p = 1/2\ Z^2 + q$

$$(1/2\ Z^2 + 1/3\ Z^3 - 1/4\ Z^4 + 1/5\ Z^5) + (1/2\ Z^2 + q)(1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4)$$
$$+ (1/2\ Z^2 + q)^2(-1/2 + Z - 3/2\ Z^2 + 2\ Z^3) + \ldots = 0$$

resolviendo esta igualdad obtenemos

$$(-1/6\ Z^3 + 1/8\ Z^4 - 1/2_3 Z^5) + q_4(1 - Z_5 + 1/2\ Z^2) + \ldots = 0$$

de donde $q = \dfrac{-1/6\ Z + 1/8\ Z - 1/2\ Z}{1 - Z + 1/2\ Z^2} = 1/6\ Z^3 + \ldots$

así la tercera aproximación de x es:

$x \cong Z + 1/2\ Z^2 + q$ o sea $x \cong Z + 1/2\ Z^2 + 1/6\ Z^3.$

Continuando en esta forma Newton deduce que

$$x = Z + 1/2\ Z^2 + 1/6\ Z^3 + 1/234\ Z^4 + 1/120\ Z^5 + \ldots$$

como $Z = Ln\ (1+x)$ esto equivale a $e^Z - 1 = x$, Newton encuentra por primera vez la serie exponencial $e^Z = 1 + x$ es decir

$$e^Z = 1 + Z + 1/2\ Z^2 + 1/6\ Z^3 + \ldots$$

Ejemplo #2.

Calculando la longitud de la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas, Newton obtuvo el elemento de arco que en nuestro simbolismo es:

$$z = \text{ArcSen}\ x$$

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

utilizando el teorema del binomio se tiene que

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + 1/2\ x^2 + 3/8\ x^4 + 5/16\ x^6 + \ldots$$

luego $dz = (\ 1 + 1/2\ x^2 + 3/8\ x^4 + 5/16\ x^6 + \ldots)dx$

donde $z = x + 1/6\ x^3 + 3/40\ x^5 + 5/112\ x^7 + \ldots$

resolviendo solo para los cuatro primeros términos se tiene:

$$5/112\ x^7 + 3/40\ x^5 + 1/6\ x^3 + x - z = 0 \qquad (1)$$

la primera aproximación es $x \cong z$

sustituimos $x = z + p$ en la ecuación (1)! y resulta

$$5/112(z^7+\ldots) + 3/40(\ z^5+\ \ldots) + 1/6(z^3+\ 3z^2p+\ldots) +p=\ 0\ (2)$$

despresiando los términos no lineales de p se obtiene

$$p \cong -\ \frac{1/6\ z^3+ 3/40\ z^5+ 5/112\ z^7}{1\ +\ 1/2\ z^2+ 3/8\ z^4\ +\ 5/16\ z^6} = -1/6\ z^3$$

la segunda aproximación es $x = z + 1/6\ z^3$

En la ecuación (2) sustituimos ahora $p = -1/6\ z^3 + q$

$$q + 1/6\ (\ -\ 1/2\ z^5\ +\ \ldots\ ) + 3/40\ (\ z^5+\ \ldots) + \ldots\ = 0$$

resolviendo se tiene que $q = (1/12\ -\ 3/40\ )\ z^5$

$$q = 1/120\ z^5$$

es decir, que la tercera aproximación es :

$$x = z\ -\ 1/6\ z^3+ 1/120\ z^5$$

haciendo cambio de variables se obtiene asi que

$\text{Sen } x = x - 1/6\ x^3 + 1/120\ x^5 - \ldots$

Ahora se observará como Newton obtuvo la serie del coseno a partir de la serie del seno.

Ejemplo #3. $\text{Cos } x = (1 - \text{Sen}^2 x)^{1/2}$

desarrollando la serie del binomio

$$\text{Cos } x = 1 - 1/2 \text{ Sen}^2 x - 1/8 \text{ Sen}^4 x - 3/48 \text{ Sen}^6 x + \ldots$$

reemplazando el Sen x por su serie tenemos

$$= 1 - 1/2 (x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 + \ldots)^2 - 1/8 (x - 1/6x$$
$$+ 1/120 x^5 - \ldots)^4 - 3/48 (x - 1/6 x^3 + 1/120 x^5 - \ldots)^6 + \ldots$$

$$= 1 - 1/2 (x^2 + 1/36 x^6 + (1/120)^2 x^{10} - 1/3 x^4 - 1/360 x^8$$
$$+ 1/60 x^6 + \ldots) - 1/8 (x^4 + 1/1296 x^{12} + 1/120^4 x^{10} - 2/3 x^6$$
$$-(1/30)(1/216) x^{14} + 1/30 x^8 + \ldots) - 3/48(x^6 - (1/6)^6 x^{18}$$
$$+ 1/20 x^{10} - x^8 - (1/6)^5 (1/120) x^{20} + \ldots)$$

$$= 1 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 + ..$$

En resumen el método de inversión de series consiste en obtener una serie $x = b_1 Z + b_2 Z^2 + \ldots$, en donde debemos encontrar los $b_1, b_2, \ldots, b_n$, de una serie $Z = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$
Suponemos que $b_1 = 1/a_1, \ldots$
hacemos la siguiente aproximación $x = b_1 Z + b_2 Z^2 + \ldots + r$ y la reemplazamos en la serie original

$$a_1(b_1Z + b_2Z^2+\ldots+r) + a_2(b_1Z + b_2Z^2+ \ldots +r)^2+ \ldots -Z = 0$$

resolviendo y agrupando las variables y los términos de r obtenemos $(AZ^n+ BZ^{n+1}+\ldots) + r (A'+B'Z+\ldots) + \ldots = 0$

donde $A,B,\ldots,A',B',\ldots$ son a_ib_j con $i,j \geq 1$

despejando

$$r \cong - \frac{AZ^n + BZ^{n+1} + \ldots}{A' + B'Z + \ldots} = - \frac{A}{A'} Z^n+ \ldots$$

así para un y $b_n = - \frac{A}{A'}$, ...

Otro de los descubrimientos que realizó Newton fue La Teoría de las Fluxiones que explicaremos a continuación.

2.1.3. Teoría de fluxiones.

Newton descubre el Cálculo el cual llamó Teoría de Fluxiones " *durante los años 1665-1666 cuando él permaneció en su lugar de nacimiento en el campo, para escapar de la plaga que infestó a Cambridge*". [Struik Dirk Jan. (1986:155) Historia concisa de las matemáticas].

"*Newton afirmaba que su cálculo no dependía de la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas; su concepto fundamental era el de fluxión, la velocidad del cambio de una variable que puede ser considerado como aumentando o disminuyendo con el tiempo*". [op. cit. Grattan Guiness (1984:117)].

Hoy día lo que es para nosotros las derivadas (intensidad del cambio de velocidades con respecto al tiempo), Newton lo llamó fluxiones y lo que es para nosotros una variable, Newton lo llamó fluxión o fluente.

"El descubrimiento de las "fluxiones" por Newton estuvo íntimamente conectado con su estudio de las series infinitas através de la Arithmetica de Wallis. Esto lo condujo a extender el teorema del binomio a exponentes fraccionarios y negativos y así, al descubrimiento de las series binomiales. Esto, una vez más contribuyó grandemente en el establecimiento de su teoría de las fluxiones para "todas" las funciones, ya fueran algebraicas o trascendentes. Una "fluxión", expresada por un punto colocado sobre una letra, tenía su valor finito, una velocidad; las letras sin el punto representaban "fluentes". [Op. Cit Struik (1986:155)]

Las variables de fluentes se designan por v,x,y,z,... y las velocidades por las cuales cada fluente es incrementada por su movimiento generatriz (llamadas fluxiones), las representaban por las mismas letras con puntos, así $\dot{v},\dot{x},\dot{y},\dot{z}$,.... Los infinitesimales de Newton son llamados "momentos de fluxiones" los que son representados por $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, ... siendo "o" una cantidad infinitamente pequeña. Esto es el producto de la velocidad instantanea por el momento de tiempo. En esencia, el momento del fluente es su diferencial. Se ilustrará el método de fluxiones de

Newton con los siguientes ejemplos.

"*Ejemplo # 1. Consideremos la curva de la ecuación*

$$x^3 - a\,x^2 + axy - y^3 = 0$$

al sustituir $x + \dot{x}o$ *por* x , $y + \dot{y}o$ *por* y, *dará lugar a*

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\,\dot{x}o\,\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\,\dot{x}o - a\,\dot{x}o\,\dot{x}o + axy + ay\,\dot{x}o$$
$$+ a\,\dot{x}o\,\dot{y}o + ax\,\dot{y}o - y^3 - 3y^2\,\dot{y}o - 3y\,\dot{y}o\,\dot{y}o - \dot{y}^3\,o^3 = 0$$

y eleminando $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ *ya que es igual a cero, dividiendo después por* o *y despresiando finalmente los términos en que todavía figure el factor* o, *nos queda*

$$3x^2\,\dot{x} - 2\,ax\,\dot{x} + ay\,\dot{x} + ax\,\dot{y} - 3\,y^2\dot{y} = 0$$

Este ejemplo muestra que Newton pensó sobre sus derivadas como velocidades. De esto se puede calcular la razón de $\dot{y}$ *a* $\dot{x}$, $\quad \dot{y}/\dot{x} = (\,3x^2 - 2ax + ay) \,/\, (\,3y^2 - ax\,)$

Notese que el numerador y el denominador en el resultado final son (salvo su signo) las derivadas parciales f_x *y* f_y *de* $f(x,y) = x^3 - ax^2 + a\,xy - y^3$" [Op. Cit Grattan Guiness (1984:81)].

Ejemplo # 2. Consideremos la ecuación $3x^2y + 4\,x\,y^2 = 0$

$$3\,(\,x + \dot{x}o)^2(y + \dot{y}o) + 4\,(x + \dot{x}o)\,(\,y + \dot{y}o)^2 = 0$$

$3[(x^2+2x\dot{x}o+\dot{x}o^2)(y+\dot{y}o)] + 4[(x+\dot{x}o)(y^2+2y\dot{y}o+\dot{y}o^2)] = 0$

$3(x^2y+2xy\dot{x}o+\dot{x}o^2y+x^2\dot{y}o+2x\dot{x}o\dot{y}o + \dot{x}o^2\dot{y}o) + 4(xy^2+ 2xy\dot{y}o +x\dot{y}o^2+ \dot{x}o y^2+ 2y\dot{x}o\dot{y}o + \dot{x}o\dot{y}o^2) = 0$

dividiendo por o y despresiando los términos en que todavía figure o, se tiene: $3(x^2y+2xy\dot{x}+ x^2\dot{y}) + 4(xy^2+2xy\dot{y}+y^2\dot{x}) = 0$

$3x^2y + 4xy^2 + 3(2xy)\dot{x} + 3x^2\dot{y} + 4(2xy)\dot{y} + 4y^2\dot{x} = 0$

según la condición inicial los dos primeros términos son iguales a cero, del cual queda la siguiente expresión:

$$3(2xy)\dot{x} + 3x^2\dot{y} + 4(2xy)\dot{y} + 4y^2\dot{x} = 0$$

Como se observa, el objetivo principal del método de fluxiones es el de determinar la fluxión dado el fluente, el cual representa la diferenciación implícita a una función.

2.2. Goottfried Leibniz y sus aportes.

Sin lugar a dudas, muchos autores coinciden que el mejor matemático del siglo XVII fue Gottfried Wilhem Leibniz, principalmente por su destacada y marcada genealidad y productividad en la matemática. Cabe observar que durante este periodo sobresalieron matemáticos como Kepler, Galileo, Descartes, Pascal y Newton.

Leibniz nació en Leipzig, Sajonia, el 1 de julio de 1646 y murió en Hannover, el 14 de noviembre de 1716. Ingresó a la universidad a los 15 años (1661) y a los 17 años (1663) obtuvo su bachillerato en artes. Continuó sus estudios en lógica, filosofía y leyes y a la edad de 20 años (1666) presentó su tesis titulada "Enfoque histórico para la enseñanza de las leyes". Solicitó su ingreso a la Universidad de Leipzig para estudios doctorales en leyes pero fue rechazado alegándose razones de edad. Sin embargo, insistió en su empeño y posteriormente aplicó a la Universidad de Altdorf en Nuremberg, siendo acogida su solicitud que le permitió finalmente obtener el grado de doctor en leyes en 1667, es esto a los 21 años de edad.

Una vez concluído su trabajo académico, la Universidad de Altdorf le ofreció un puesto de profesor de derecho a lo que Leibniz rechazó para incursionar en el campo político y el servicio gubernamental. Afirman sus historiadores, que su estudio serio de la matemática, no lo inicia hasta después de 1672, a los 26 años, cuando tuvo que ser enviado en misión diplomática a París. Los siguientes cuatro años de permanencia en París son considerados como la "época prima inventiva" en matemática para Leibniz; análoga situación atribuíble a Newton (1664-1666). Durante ésta época, Leibniz concibió los principales rasgos de su versión del cálculo que posteriormente fue desarrollando en el transcurrir de su vida, enfoque este que dominó al de Newton durante el siglo XVIII.

De regreso a Alemania en 1676, permaneció sus restantes cuarenta años como bibliotecario y secretario del Electorado (región) de Hannover. Leibniz fue de los primeros después de Pascal en inventar una máquina calculadora durante su época en París, y a propósito de esto él señalaba: "Es desafortunado que un hombre excelente pierda horas en trabajo de cálculo cuales pueden seguramente ser realizados, si se usara la máquina".

Un aspecto importante que hay que señalar de la vida de Leibniz es lo referente a lo que se considera su "proyecto de vida", en otras palabras, la búsqueda de un lenguaje universal o lógica simbólica que pudiera estandarizar y mecanizar no sólo los cálculos numéricos, sino también todos los procesos del pensamiento humano y poder eliminar el trabajo de rutina mental y los pasos. Su meta era la creación de un sistema de notación y terminología que pudiera codificar y simplificar los elementos esenciales del razonamiento lógico como tal. Su investigación de una "Characteristica generalis" lo condujo a permutaciones, combinaciones y a la lógica simbólica, su investigación de la "*Lingua Universalis*", en la cual todos los errores del pensamiento aparecían como errores de cómputo, condujo no solamente a la lógica simbólica, sino también a muchas innovaciones en la notación matemática. Esta aparente formulación antecedió al serio interés por parte de Leibniz hacia la matemática. Como bien se ha afirmado en sus notas biográficas , "un hombre que genera tales pensamientos en su mente, tiene la matemática en la sangre, a pesar que ignora sus detalles". Se piensa que durante su periodo en París, Leibniz se encontró con Huygens, quién le aconsejó que leyera los tratados de Pascal de 1658-1659 si deseaba hacerse matemático. En esta misma etapa viaja a Londres donde presenta su máquina calculadora e ingresa a la Royal Society, alli logró adquirir un ejemplar de las lecciones geométricas de Barrow y logró entrevistarse con Oldenburg y Collins.

2.2.1. Método de sumación.

En su obra Historia y Origen de Cálculo Diferencial publicado dos años antes de su muerte, Leibniz indica que su fuente de investigación para el cálculo surge de sus trabajos de suceciones de sumas y diferencia de números. Sostiene además, que siendo muy joven se había interesado en las propiedades de los números, lo que le llevó a publicar, en 1666, un Ensayo titulado "Del Arte de las combinaciones" que trataba con las propiedades elementales de las combinaciones y permutaciones.

Recién llegado a París, Leibniz se interesó por el hecho sobre la suma de las diferencias de términos consecutivos de una sucesión finita de términos.
Veamos, sea la sucesión a_0 , a_1, a_2, ..., a_n
y la siguiente sucesión de diferencias

$$d_1 = a_1 - a_0,\quad d_2 = a_2 - a_1,\ \ldots,\ d_n = a_n - a_{n-1}$$

tal que $d_i = a_i - a_{i-1}$ para $i=1,2,\ldots,n$. Si sumamos todas estas diferencias, tenemos que:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0 \quad (1)$$

De esta menera, se observa que la suma de diferencias consecutivas es igual a la diferncia del primero y último término de la sucesión original.

Analizemos el ejemplo propuesto por Leibniz de la sucesión finita de cuadrados $(0,1,4,9,\ldots,n^2)$. Tenemos que sus diferencias estan dadas por:

$$d_1=1\ ,\ d_2=3,\ d_3=5\ ,\ldots,\ d_n = n^2-(n-1)^2 = 2n - 1$$

entonces de acuerdo a (1), $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ (2)
lo que se conoce hoy día, como la sumas de n enteros impares positivos y dá como resultado, la cantidad de éstos elevados al cuadrado.

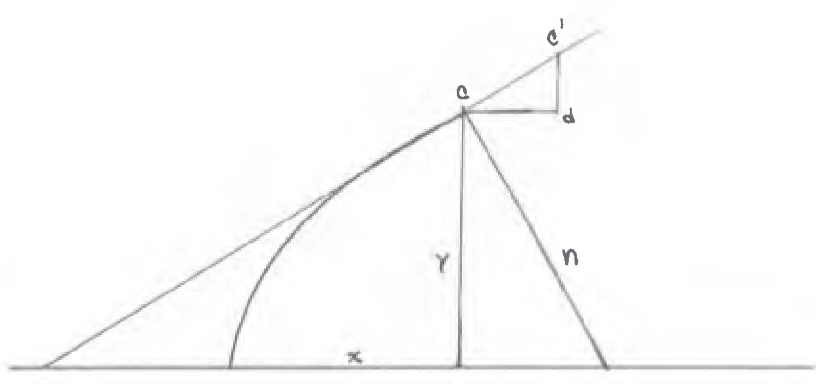
Siguiendo esta misma línea y el resultado (2), se prueba que $1+2+3+4+...+n = \frac{n}{2}(n+1)$.
Para ello agregamos el resultado (2) la cantidad $2+4+...+(2n)$ esto es, la suma de los pares a ambos lados, así:

$$1+2+3+...+(2n-1)+(2n) = \frac{2n+1}{2}(2n+2).$$

2.2.2. Fórmula de transmutación de Leibniz.

Leibniz al leer las obras de Pascal por recomendación de Huygens quién además le regaló un ejemplar del péndulo, se familiarizó con el triángulo característico de Pascal que éste utilizó (Leibniz) en la cuadratura del seno, el cuál también se utilizó para la resolución de problemas sobre el trazado de una tangente a la curva.

El triángulo cc'd de la siguiente figura situado a lo largo de la curva es el llamado triángulo característico de Pascal y era semejante a los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.



Con el uso del triángulo característico, Leibniz consigue obtener una transformación especial de cuadraturas a la que llamó "Transmutación".

Leibniz dividió en infinitos pequeños rectángulos el área debajo de la curva $y=f(x)$ con $x \in [a,b]$ para explicar la cuadratura y que los correspondientes indivisibles tengan la misma área.

Sean $P\ (x,y)$ y $Q\ (x+ dx,\ y + dy)$ puntos sobre la curva $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ figura #20 Leibniz considera el triángulo infinitesimal OPQ, donde O es el origen

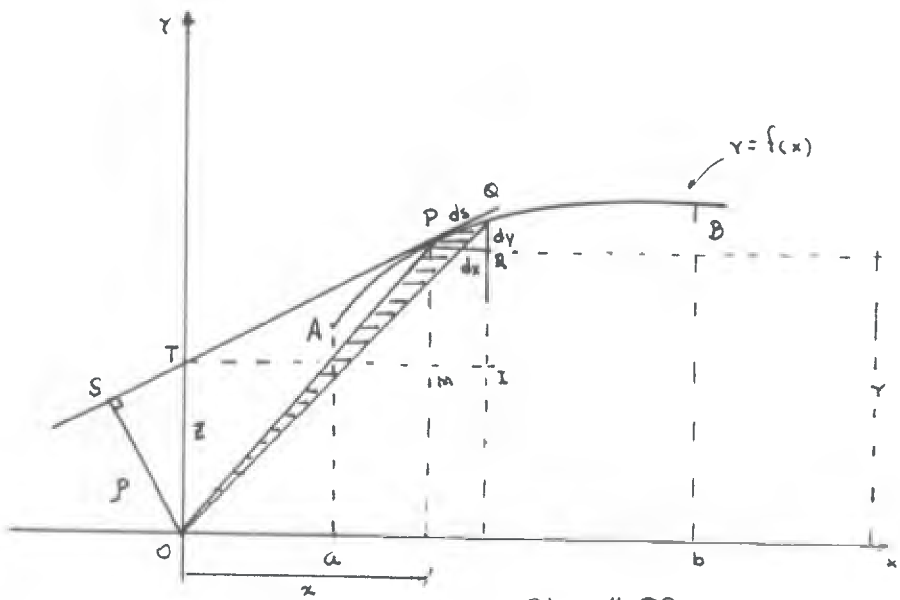


fig # 20

Sea la línea tangente determinada por el arco infinitesimal ds unido por P y Q e intersecta al eje y en el punto $T(0,z)$ donde $z = y - x\dfrac{dy}{dx}$

ya que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - z}{x}$ por semejanza de triágulos: ΔPQR y ΔTPM.

Si OS es el segmento de longitud ρ perpendicular a la línea tangente extendida, entonces el triángulo característico es PRQ, luego : $\frac{dx}{\rho} = \frac{ds}{z}$

o sea z dx = ρ ds. Donde el área del triángulo infinitesimal OPQ es a (OPQ) = $\frac{1}{2}\rho\, ds = \frac{1}{2} z\, dx$

si consideramos el sector OAB, mostrado por la curva AB de y=f(x) y el radio OA y OB, dividido en infinitos triángulos como OPQ como dijimos al inicio, entonces tenemos que el área de OAB es

$$a(OAB) = \frac{1}{2}\int_a^b z\, dx \qquad \text{donde } x = g(x)$$

definida anteriormente como $z = y - x\frac{dy}{dx}$ pero

$$\begin{aligned}\int_a^b y\, dx &= a\,(\Delta\ OBb) + a\,(\Delta\ OAB) - a\,(\Delta\ OAa)\\ &= \frac{1}{2}\, b\, f(b) + \frac{1}{2}\int_a^b z\, dx - \frac{1}{2}\, a\, f(a)\\ &= \frac{1}{2}\,[b\, f(b) - a\, f(a)] + \frac{1}{2}\int_a^b z\, dx\\ &= \frac{1}{2}\left([\ xy\ ]_a^b + \int_a^b z\, dx \right)\end{aligned}$$

que es la fórmula de transmutación de Leibniz. Note que la sustitución de $z = y - x\frac{dy}{dx}$ en la fórmula de la transmutación de Leibniz nos lleva a la integración por partes $\int_a^b y\, dx = [\ xy\ ]_a^b - \int_a^b x\, dy$.

Para Leibniz el problema era más complejo, la integral surgía inicialmente como definida, como suma de un número infinito de diferenciales infinitesimales. La integración se resumía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas.

Una de las interesantes aplicaciones de la regla de transmutación la hace Leibniz en la cuadratura aritmética del círculo.

Cuadratura arítmetica del círculo.

Consideremos la ecuación del círculo $y^2 + x^2 = 2x$ para $y \in (0,1)$

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

si $\quad z = y - x \dfrac{dy}{dx}$

reemplazando $\frac{dy}{dx}$ obtenemos:

$$z = y - x\left(\frac{1-x}{y}\right)$$

$$z = \frac{y^2 - x + x^2}{y}$$

$$z = \frac{y^2 + x^2 - x}{y}$$

$$z = \frac{2x - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$z^2 = \frac{x^2}{2x - x^2}$$

$$z^2 = \frac{x}{2 - x}$$

despejamos x

$$2z^2 - z^2 x = x$$

$$z^2 x + x = 2 z^2$$

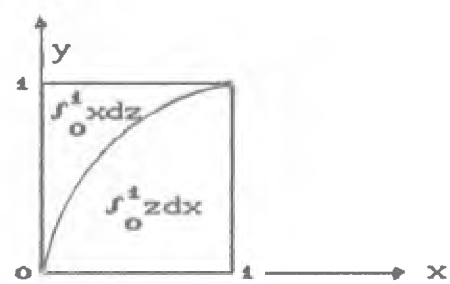
$$x (z^2 + 1) = 2 z^2$$

y obtenemos $x = \dfrac{2z^2}{z^2 + 1}$

Leibniz aplica la regla de transmutación para encontrar el cuarto de círculo de la siguiente forma:

$$\int_0^1 y \, dx = \frac{1}{2} \left(\left[x \sqrt{2x - x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 z \, dx \right)$$

según la figura



tenemos que

$$\int_0^1 z \, dx = 1 - \int_0^1 x \, dz$$

$$\text{luego } \int_0^1 y \, dx = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \int_0^1 x \, dz \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 - \int_0^1 x \, dz \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dz$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2z^2}{1+z^2}\,dz$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\,dz$$

efectuando la división de $\dfrac{1}{1+z^2}$ obtenemos:

$$= 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots)\,dz$$

$$= 1 - \int_0^1 (z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots)\,dz$$

integrando término a término tenemos:

$$= 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 + \ldots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots ,$$

Leibniz, ignoraba el problema de convergencia y culmina afirmando $\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$ conocida como serie de Leibniz.

La serie $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$ por el criterio de Leibniz para serie alternantes converge a $\pi/4$.

En conclusión, Leibniz descubrió la relación inversa entre los métodos de trazado de tangente y las cuadraturas.

Al parecer, Newton y Leibniz descubrieron sus formas de cálculo independientemente uno del otro. Ambos se apoyaron en la experiencia de los numerosos predecesores, en los cuales se acumuló una suficiente cantidad de premisas para sus descubrimientos.

El simbolísmo y los términos de Leibniz resultaron muy apropiados, no eran complejos y reflejaban la esencia del asunto, contribuían a la comprensión y permitían operar con ellos según reglas relativamente simples. El llega a la idea sobre el símbolo "d" para la designación de diferencias infinitasimales.

Las ideas de Leibniz provocaban una tendencia a aceptar mejor la idea de diferencial que la de fluxión.

Newton era ante todo físico, y como tal le interesaba el cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos, su concepto de derivada (fluxión)y de diferencial (momento de fluxión). En cambio Leibniz es filósofo, y se interesa ante todo por el rigor lógico y pureza de los conceptos, su definición de diferencial (1689) es perfecta y sus notaciones son las que han perdurado hasta nuestros días.

A modo de ilustración damos un cuadro de notaciones usada por ambos y la actual.

NOTACIONES		
Actuales	de Newton	de Leibniz
variable independiente x		
función y	fluente	
incremento dx	o	dx (antes x/d)
derivada $y'=\frac{dy}{dx}$	fluxión $\dot{y}$	dy/dx
diferencial dy	momento $o\dot{y}$	diferencial dy

CAPITULO 3

LA EPOCA DE EULER

3. APORTES DE EULER.

3.1. Leonard Eüler.

Eüler, Leonard (1707-1783). Matemático y físico alemán, de origen suizo, nació en Basilea el 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo el 18 de septiembre de 1783. Fue discípulo de Jean Bernoulli y tal vez, el matemático más prolífico de la historia. Se considera generalmente a Eüler como el fundador del análisis matemático puro. Durante su vida publicó más de seiscientos ensayos importantes sobre matamática, álgebra, astronomía, música y mecánica.

En 1727, marchó a Rusia; invitado por Catalina I; en 1733 sucedió a Daniel Bernoulli como miembro de la Academia de San Petersburgo y pudo dedicarse a la investigación; en 1741, pasó a Berlín llamado por Federico el Grande, y en 1766 volvió a Rusia donde murió.

Escribió más de un millar de memorias que ocuparán sesenta y nueve volúmenes, de los cuales sólo hay publicados veintiseis hasta ahora. Todas las ramas de la matemática le deben algo. La actual teoría analítica de los números primos se inicia con él; en álgebra dió nuevos métodos de eliminación y son notables sus aportaciones a la teoría de ecuaciones, pero es en análisis donde más se destacó, siendo el primero un tratado sistemático de cálculo infinitesimal *Introductio in analysis infinitorum* publicado en dos volúmenes para el año 1748, donde introduce el concepto de función y donde aparecen por primera vez los logarítmos como exponentes. Esta obra, catalogada como una de las más importantes en la historia del cálculo infinitesimal y la geometría analítica, recoge ciertos resultados que había escrito en sus memorias anteriores, presenta nuevos aportes y desarrolla algunos de los principales conceptos que sobre el tema habían obtenido sus predecesores (Newton, Leibniz y Bernoulli). Con el fin de formarnos una idea acerca de su contenido, presentamos algunos de los interesantes resultados que aparecen en ella.

En el capítulo IV: "Del desarrollo de las funciones en series", Eüler presenta el hoy conocido teorema del Binomio de Newton; teorema que usara en la obtención en series de las funciones logarítmo, exponencial, seno y coseno.

Según Eüler,"*la función irracional* $(P + Q)^{m/n}$ *se puede desarrollar como sigue*

$$(P+Q)^{m/n}= P^{m/n}+ \frac{m}{n} P^{m/n - 1}Q + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n} P^{(m-2n)/n} Q^2+ \ldots$$

y menciona que si m/n *es un entero positivo o cero, tal desarrollo en serie será finito, y si* m/n *no es un entero positivo o cero, tal desarrollo será infinito*". [Op. cit. Cantoral, (1993:121)].

En el capítulo VI introdujo el concepto de logarítmo, diciendo que si $a > 1$ el logaritmo de x en base a, es el exponente z tal que $a^z = x$, siendo esta la primera vez que se presenta el logaritmo interpretado como un exponente.

En el capítulo VII introduce el número e, el cual ejerció en Eüler una especial fascinación. Es así como dedicó buena parte de su tiempo al estudio de algunas propiedades. Lo calculó con 23 cifras significativas $e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 28\ldots$

Los capítulo IV, XIII y **XVII**, **están** destinados al estudio de algunas series, especialmente las series de potencias , y sus relaciones con los productos infinitos.

Al segundo tomo de *Intruductio in Analysi Infinitorum* lo dedica al estudio de la geometría analítica, perfeccionando los métodos cartesianos.

En 1755 se publicó en San Petersburgo su tratado *Intitutiones calculis differentialis*. Esta obra está dedicada al estudio del cálculo diferencial. Uno de los aspectos más importantes de esta obra es la desenvoltura con que maneja las series. El libro lo inicia con el estudio de la teoría de diferencias finitas, para llegar a continuación al cálculo diferencial, como la forma límite del cálculo de diferencias finitas, introduce el símbolo Δ.

Mediante el método de inversión de series que ya había sido introducido por Newton encuentra el desarrollo en serie de potencias de la secante, obteniendo la siguiente expresión $\operatorname{Sec} z = \sum_{n=0} (-1) \dfrac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$

en donde los coeficientes E_n se denominan números de Eüler.

En 1768 se publica el primer Tomo de otra de sus obras *Introductiones Calculi Integralis*, y el tercero se publicó en 1770.

Para Eüler la integración es el proceso inverso de la diferenciación, como lo es la resta de la suma; él no concibe la integral como el límite de una suma. Eüler dividió esta obra en dos partes:

i) Integración de expresiones diferenciales.

ii) Estudio de las ecuaciones diferenciales.

El cálculo integral cambió de aspecto a partir de Eüler, quién dice que tiene por objeto obtener de una relación entre elementos infinitesimales otra equivalente en términos finitos; y, estudia sucesivamente la integración de las funciones racionales e irracionales para abordar luego los casos en que intervienen las exponenciales, logarítmicas y circulares, siendo de destacar el hecho de haber encontrado todos los casos de integrabilidad de las diferencias binomiales haciendo nuevas e importantes aplicaciones a las series y para concluir esta primera parte, estudió las integrales definidas y el cálculo de productos infinitos, mediante procesos que requieren la utilización de integrales.

El segundo volumen lo destina a la resolución de ecuaciones diferenciales, en cuanto a su contenido y desarrollo.

Después de su muerte, se anexó en 1794 un suplemento integrado por memorias sobre los temas que aparecen en *Introducciones calculi integralis*, que se escribió antes de la publicación de esa obra.

Gracias a las obras: *Intoductio in Analisis Infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis*, e *Institutiones calculi integralis*, se ha dicho que todos los textos de cálculo elemental y avanzado, desde 1748, son esencialmente copias de las obras de Eüler, o bien copias de copias de Eüler.

3.2. Series infinitas.

Un ejemplo típico es el desarrollo en serie de la función exponencial a^x. Eüler introdujo un concepto de logarítmo, diciendo que si $a>1$ el lorarítmo de x en base a, es el exponente y tal que $a^y=x$, siendo ésta la primera vez que se presenta el logarítmo interpretado como un exponente.

Nótese que $a^o=1$, entonces, para un valor ε infinitamente pequeño escribe $a^{\varepsilon}= 1 + k\varepsilon$, con k constante (1).

Si x es un número positivo, x/ε es un número infinitamente grande. Por tal razón lo identifica como un número N de valor infinito, es decir $N=x/\varepsilon$.

Entonces $a^x= a^{N\varepsilon}= (1 + k\varepsilon)^N= (1 + kx/N)^N$ (2)

Aplicando la serie binomial obtiene

$$
\begin{aligned}
a^x &= (1 + kx/N)^N \\
&= 1 + N(kx/N) + N(N-1)/2!\,(kx/N)^2 + \ldots \\
&\quad + N(N-1)\ldots(N-n+1)/n!\,(kx/N)^N + \ldots \\
&= 1 + kx + (N-1)/N\, k^2/2!\, x^2 + \ldots \\
&\quad (N-1)/N\,(N-2)/N\,(N-n+1)/N\, k^n/n!\, x^{N^n} + \ldots
\end{aligned}
$$

como N es infinitamente grande, Eüler asume que

$$1 = (N-1)/N = (N-2)/N = \ldots = (N-m)/N = \ldots$$

por lo tanto

$$a^x = 1 + xk + x^2/2!\, k^2 + \ldots + x^n/n!\, k^n + \ldots$$

y sustituyendo x=1 obtiene que

$$a = 1 + k + 1/2!\, k^2 + \ldots + 1/n!\, k^n + \ldots$$

entonces Eüler define el número "e" como el valor de "a" para el cual $k = 1$, esto es

$$
\begin{aligned}
e &= 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n! + \ldots \\
e &= 2 + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n!
\end{aligned}
$$

y escribe la expresión hasta con 23 decimales

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 28$$

como $a^x = (1 + kx/N)^N$

reemplazando "a" por "e" y k = 1 se tiene

$$e^x = (1 + x/N)^N \quad (3)$$

en donde N es infinitamente grande. La ecuación (3) se escribe posteriormente como la fórmula $e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$ donde $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$

Eüler demuestra que $\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} n\,[(1+x)^{1/n} - 1]$

y además que $\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n/n$

veamos cómo lo hizo.

Tomándo $y = a^x - 1$ entonces

$$1+y = a^x = a^{N\varepsilon} = (1 + k\varepsilon)^N \quad (4)$$

luego $1 + k\varepsilon = (1 + y)^{1/N}$

y así $\varepsilon = \dfrac{(1+y)^{1/N} - 1}{k}$

Pero de (4) se obtiene que $\log_a(1 + y) = N\varepsilon$ de donde

$$\log_a(1+y) = N \frac{[(1 + y)^{1/N} - 1]}{k} \qquad (5)$$

en particular si $a = e$ y $k = 1$, entoces la expresión (5) se

transforma en $\quad \ln(1+y) = N\,[(1+y)^{1/N} - 1] \qquad (6)$

utilizando la serie binomial, resulta

$$(1+y)^{1/N} = 1 + 1/N\ y + \frac{1/N\ (1/N - 1)}{2!}\,y^2 + \frac{1/N(1/N-1)(1/N-2)}{3!}\,y^3 + \ldots$$

Pero como N es infinitamente grande, se toma $1/N - 1 = -1$,

luego $\quad N\,[(1+y)^{1/N} - 1] = 1 - 1/2!\ y^2 + 1/3!\ y^3 - \ldots + (-1)^{n+1} y^n + \ldots$

reemplazando en (6) se obtiene

$$\mathrm{Ln}(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ y^n/n$$ esta es la serie de

Mercator descubierta en 1668. Eüler no se preocupó para que valores son o no convergentes las series que obtuvo.

Otro de los aportes de Eüler es el de haber obtenido la serie del Seno y Coseno de una manera diferente a las de Newton la cual presentaremos a continuación.

En la obra *Introductio* de Eüler, introduce por primera vez un teorema trigonómetrico, el cual en su forma actual es $(\text{Cos}\emptyset \pm i \text{ Sen } \emptyset)^n = \text{Cos } n\emptyset \pm i \text{ Sen } n\emptyset$ cuyo inventor es el matemático francés del siglo XVIII Abraham De Moivre, dicho teorema lo usó Eüler para obtener la serie del Seno y Coseno veámoslo:

Sea ε un número infinitamente pequeño y N un número infinitamente grande (y entero positivo). Por la identidad de Moivre tenemos que

$$(\text{ Cos } \varepsilon + i \text{ Sen } \varepsilon)^N = \text{Cos } N\varepsilon + i \text{ Sen } N\varepsilon$$

$$(\text{ Cos } \varepsilon - i \text{ Sen } \varepsilon)^N = \text{Cos } N\varepsilon - i \text{ Sen } N\varepsilon$$

sumando y restando éstas fórmulas se obtiene

$$(\text{Cos } \varepsilon + i \text{ Sen } \varepsilon)^N + (\text{Cos } \varepsilon - i \text{ Sen } \varepsilon)^N = 2 \text{ Cos } N\varepsilon$$

$$(\text{Cos } \varepsilon + i \text{ Sen } \varepsilon)^N - (\text{Cos } \varepsilon - i \text{ Sen } \varepsilon)^N = 2i \text{ Sen } N\varepsilon$$

luego

$$\text{Cos } N\varepsilon = 1/2 \left[(\text{Cos } \varepsilon + i \text{ Sen } \varepsilon)^N + (\text{Cos } \varepsilon - i \text{ Sen } \varepsilon)^N\right] \quad (1)$$

$$\text{Sen } N\varepsilon = 1/2i \left[(\text{Cos } \varepsilon + i \text{ Sen}\varepsilon)^N - (\text{ Cos } \varepsilon - i \text{ Sen } \varepsilon)^N\right] \quad (2)$$

utiliza a continuación el desarrollo binomial, para así obtener

$$\text{Cos}N\varepsilon = \text{Cos}^N\varepsilon - N(N-1)/2! \text{ Cos}^{N-1}\varepsilon \text{ Sen}^2\varepsilon + N(N-1)(n-2)(N-4)/4! \text{ Cos}^{N-4}\varepsilon \text{ Sen}^4\varepsilon - \ldots$$

y

$$\text{Sen}N\varepsilon = N\ \text{Cos}^{N-1}\varepsilon\ \text{Sen}\varepsilon - N(N-1)(N-2)/3!\ \text{Cos}^{N-3}\varepsilon\ \text{Sen}^{3}\varepsilon + N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)/5!\ \text{Cos}^{N-5}\varepsilon\ \text{Sen}^{5}\varepsilon - \ldots$$

como ε es muy pequeño, identifica a $\text{Cos}\varepsilon$ con $\text{Cos}0=1$ y $\text{Sen}\varepsilon$ con ε;

$$\text{Cos}N\varepsilon = 1 - N(N-1)/2!\ \varepsilon^{2} + N(N-1)(N-2)(N-3)/4!\ \varepsilon^{4} - \ldots$$

y

$$\text{Sen}N\varepsilon = N\varepsilon - N(N-1)(N-2)/3!\,\varepsilon^{3} + N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)/5!\,\varepsilon^{5} - \ldots$$

puesto que N es muy grande supone que $N=N-1 = N-2 = \ldots$ además considera que $N\varepsilon = x$ y obtiene

$$\text{Cos}\ x = 1 - NN/2!\ x^{2}/N^{2} + N\ N\ N\ N/\ 4!\ x^{4}/N^{4} - \ldots$$

y $$\text{Sen}\ x = x - N\ N\ N/3!\ x^{3}/N^{3} + N\ N\ N\ N\ N/5!\ x^{5}/N^{5} - \ldots$$

Entonces $$\text{Cos}\ x = 1 - x^{2}/\ 2! + x^{4}/4! - \ldots$$

y $$\text{Sen}\ x = x - x^{3}/3! + x^{5}/5! - \ldots$$

CONCLUSIONES

La actividad principal de la historia de una ciencia consiste en estudiar su evolución, en aclarar el rigor y concatenación de las ideas de un cuerpo teórico. Con frecuencia, la reconstrucción histórica representa la vía más adecuada para captar la exacta naturaleza de una teoría o hecho científico.

El estudio de las sumas infinitas, a través del desarrollo histórico, juega un importante papel en su enseñanza-aprendizaje. Conocer como surgieron los conceptos y nociones que hoy se conocen como cálculo diferencial e integral, proporciona las mejores condiciones para la comprención y aprendizaje del análisis matemático.

Si se prescinde del estudio de su génesis, las sumas infinitas no pueden ser entendidas por completo.

Por otra parte, conocer los personajes que intervinieron en su desarrollo, conocer las motivaciones y dudas que experimentaron, actuará como agente motivador en el interés del estudiante hacia su aprendizaje.

Antes de Newton y Leibniz los conceptos intuitivos relacionados con el infinito, produjeron métodos infinitesimales para la obtención de áreas y volúmenes de figuras. Un método general de integración y diferenciación, que fuera conciente del hecho de que ambos métodos son recíprocos uno del otro, sólo pudo haber sido desarrollado por hombres que conocieron tanto los métodos geométricos de los griegos y Cavalieri, así como los métodos algebraicos de Descartes y Wallis. Dichos hombres sólo podrían surgir después del año 1660 y así fue en efecto; pues en los años de 1665 y 1676 Newton y Leibniz desarrollaron el cálculo integral y diferencial conteniendo métodos generales para diferenciar e integrar y haciendo uso de que ambos procesos son recíprocos.

Por muchos años permaneció la duda de quién había sido el verdadero creador del análisis infinitesimal; pero las investigaciones históricas han dejado claro que tanto Newton como Leibniz llegaron a las mismas conclusiones, aunque abordaron el problema desde perspectivas diferentes. Newton, basándose en un concepto fisíco "la intensidad de cambio de una variable con respecto al tiempo" y Leibniz basándose en un problema geométrico (concepto) "trazado de tangente a una curva". La historia muestra que Newton obtuvo su descubrimiento del cálculo antes que Leibniz, pero Leibniz lo publicó antes que Newton y observamos que la presentación de Leibniz es mucho más elegante que la de Newton.

Confirmamos de esta manera, que el conocimiento humano es producto de un proceso evolutivo, se construye de la interconexión de teorías, leyes, conceptos y nociones (las cuales representan su fundamento) y que en general, vienen a satisfacer necesidades que surgen en diferentes campos de la ciencia.

En la enseñanza de las sumas infinitas, desde el punto de vista de la didáctica, su desarrollo debe ser presentado cronológicamente, en forma completa, tratando de reconstruir el proceso evolutivo que hizo posible su aparición y aplicación en las ciencias. Ilustrando los métodos y procedimientos desarrollados por cada uno de los investigadores, con suficientes ejemplos presentados en forma detallada y sencilla.

En la elaboración de este trabajo, hemos aprendido a reconocer la importancia que tiene la historia de las sumas infinitas en la estructura de conocimientos que representa el análisis matemático. Existen en el cálculo muchos resultados importantes, que le han dado un gran desarrollo.

Esperamos poder despertar interés en estudiantes y profesores sobre el tema tratado en donde podrán explotar sus riquezas.

Consideramos que este trabajo puede ser de gran utilidad para enriquecer los conocimientos sobre los precursores del cálculo diferencial e integral.

BIBLIOGRAFIA

1. Asimov, Isaac. (1982). Enciclopedia Biográfica de Ciencia y Tecnología. Alianza Editorial, S.A. Madrid.
2. Babini José. (1966). El Método Introducción y notas de Arquímedes. Editorial Universitaria. Buenos Aires.
3. Boyer, Carl B. (1986). Historia de la Matemática Traducción. Alianza Editorial, S.A. Madrid.
4. Cantoral, Ricardo. (1993). Procesos del Cálculo y su Desarrollo Conceptual. CINVESTAV-IPN. México D.F.
5. Cardenas, Eduardo. (1963). 20 000 Biografías Breves. Libros de América, Inc. Hanover, Pensylvania.
6. Castro Chadid Iván. (1996) Didáctica "Leonard Eüler". Grupo Editorial Iberoaméricana. México D.F.
7. Collette, Jean Paul. (1991). Historias de las Matemáticas, tomos I y II Siglo XXI. España Editores S.A.
8. Cordero Francisco O. (1988). Diferentes concepciones de los infinitésimos a través de la historia. En la Revista del programa Nacional y actualización de profesores de matemática.
9. Corry Leo. (1994). La teoría de las propociones de Eudoxio interpretada por Dedekind. En Mathesis volumen X.
10. Couturat, L. (1973). De L'infini Mathematique Tecnique, Albert Blanchart, Paris, 1973.
11. Edwards, Charles H. (1979). The Historical Development

of the Calculus. Springer-Verlag. New york.

12. Grattan-Guinness I. (1984). Del Cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910, Una Introducción Histórica. Compilación Alianza Editorial, S.A. Madrid.

13. Greene, Jay E. (1970). 100 Grandes Cietíficos. Editorial Diana, S.A. México.

14. Heath, Thomas. (1956). Thirthteen Books of Euclid's Elements. Dover Publications Inc. New York.

15. Jones Charles V. (1987). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas. En Mathesis volumen III.

16. Kline, Morris. (1992). El Pensamiento Matemático de la Antiguedad a Nuestros Días. tomo I y II. Alianza Universidad, S.A. Madrid.

17. Knorr Wilbur R. (1992). De exhausión a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. En Mathesis volumen VIII.

18. Mahoney, M.S. (1973). Pierre de Fermat. Dictionary of Scientific, Biografic. Scribness, New York.

19. Marks, Robert W. (1968). Diccionario y Manual de las Nuevas Matemáticas. Editores Pretess Service, Inc. New York.

20. Matew, Sancho P. (1962). Diccionario de Astronomía y Astronaútica. Editores Destino. Barcelona.

21. Perero, Mariano. (1994). Historia e Historias de Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F.

22. Rey Pastor, Julio. (1963). Anális Matemático. volumen I. Editorial Kapelusz, S. A. Buenos Aires.

23. Piaget Jean. (1979). Tratado de Lógica y Conocimiento Científico. volumen III. Epistemología de la Matemática. Editorial Paidos, S.A. Buenos Aires.

24. Ribnikov, K. (1991). Historia de las Matemáticas. Traducción de Concepción Gómez Castro. Editorial Mir. Moscú.

25. Rivera, Antonio. (1993). Lecturas Sobre Sucesiones y Series Infinitas. CINVESTAV-IPN. México D.F.

26. Robert, Aline. (1982). L'Acquisition de la Notion de Convergence des Suites Numeriques das L'Enseingnement Superior. These de Doctorat D'Etat. Universite de París.

27. Rouse, Ball W. (1968). A Short Account of the History of Mathematics. Dover Publications, Inc. New York.

28. Sánchez F., Carlos. (1982). Análisis Matemático Tomo I. Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

29. Sánchez F., Carlos. (1988). Apuntes de Análisis Matemático. Conferencias #1, #5 y #6.

30. Sánchez F., Carlos. (1989). Del Cálculo Diferencial al Análisis no Estandard. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática # 3.

31. Smith, David Eugene. (1959). A Source Book In Mathematics. Dover Publications, Inc. New York.

32. Stillwell, John. (1989). Mathematics And Its History.

Springer- verlag. New York.

33. Struik, Dirk Jan. (1969). A Source Book in Mathematics. Princeton University. Press, Princeton. New Jersy.

34. Struik, Dirk Jan. (1986). Historia Concisa de las Matemáticas. Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

35. Van der Waerden, B.L.(1961). Science Awarkeining. Oxford University Press. New York.

36. Vera, Francisco. (1961). Breve Historia de la Matemática. Editorial Losada, S.A. Buenos Aires.

37. Vera, Francisco. (1960). Matemática. Editorial Kapeluz. Buenos Aires.

OTRAS FUENTES

38. Enciclopedia Barsa. (1957). Editores, Enciclopedia Británica, Inc. Tomo 9 (p.313) y Tomo 11 (p.96 y 97) Buenos Aires.

39. Enciclopedia Ilustrada Cumbre. (1995). Hachette Latinoamérica. Tomo 6 (p. 314) , Tomo 8 (p. 237) y Tomo 10 (p. 102) México D.F.

40. Enciclopedia Universal Ilustrada. (1973). Europeo-Americana. Espasa-Calpe S.A. Tomo 25 (p.499), Tomo 28 (p. 478) y Tomo 38 (p. 1492) Madrid.