UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

DE L'HÔPITAL Y LA TEORÍA DE LOS PEQUEÑOS INFINITÉSIMOS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

ERIC A. HIDALGO G.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1997

APROBADO POR:

Jorge Hernández

PROF. JORGE E. HERNANDEZ, Ph. D.
DIRECTOR DE LA TESIS

Germán S Beitia

PROF. GERMAN BEITIA, M. en C.
MIEMBRO

Josué Ortiz Gutiérrez

PROF. JOSUE ORTIZ G., M. en C.
MIEMBRO

FECHA: 2/5/97.

AGRADECIMIENTO

Mi especial y sincero agradecimiento al Profesor **Jorge E. Hernández** por su decidida y valiosa orientación académica, la que ha hecho posible la culminación de esta investigación y de mis estudios de maestría.

A los profesores **Josúe Ortíz y Germán Beitía** por haber contribuido a mi formación académica.

A los profesores **Pedro Marrone , Egberto Agard y Jaime Gutiérrez** por el apoyo bibliográfico permanente que me ofrecieron, el cual me permitió caminar por el sendero correcto.

A la profesora **Guadalupe Castillo** por su colaboración y solidaridad de investigadora.

A todos los demás profesores, amigos y compañeros de estudios que me expresaron su voz de aliento para continuar, mi agradecimiento eterno.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO II

FORMAS INDETERMINADAS.

CAPÍTULO III

LA REGLA DE L'HOPITAL

RESUMEN

Nuestra investigación consistió en hacer un análisis descriptivo de la labor matemática del Marqués Guillaume Francois Antoine De L'Hôpital, autor del primer texto en la historia del Cálculo Diferencial, el cual consta de diez secciones, tres de las cuales fueron objeto de nuestro estudio. La primera sección se relaciona con la diferenciación de las operaciones de funciones algebraicas; la segunda, con el trazado de tangentes a curvas en un punto dado y la novena sección se refiere a las formas indeterminadas. Estos temas fueron abordados en el primero y segundo capítulo. Mientras que en el tercero se analiza la demostración de la regla de L'Hôpital, y se presenta una cadena de teoremas del Cálculo Diferencial y sus implicaciones en dicha demostración para luego realizar la misma demostración aplicando argumentos del Cálculo Integral.

SUMMARY

Our research consisted of analizing the mathematical work of Guillaume Francois Antoine De L'Hôpital, Marquis de Sainte Mesme, who wrote the first texbook about differential calculus. L'Hôpital's text was made up of ten chapters. We have dealt with three of those chapters only, nevertheless. The first chapter of L'Hôpital's text deals with the derivative of algebraic functions. In the second chapter L'Hôpital studied the problems of the tangent line to a curve at a given point of it. Lastly, we analized L'Hôpital's text nineth chapter on the indeterminate forms.The above topics were all included in the first and second chapter of our report. The third chapter of our work is an analysis of the proof of L'Hôpital Rule and a sequence of theorems of differential calculus related to it and its implications on L'Hôpital's proof. Finally we provide another proof of L'Hôpital's Rule by means of integral calculus techniques.

INTRODUCCIÓN

El progreso que ha tenido la ciencia en los últimos tiempos en gran parte se debe al desarrollo de la matemática, que desde tiempos antiguos ha sufrido grandes transformaciones con el propósito de mejorar los aportes y legados que dejaron los antecesores.

Así vemos que el cálculo integral se remonta a más de 2000 años cuando los griegos intentaron resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron ***"Método de Exhausción"***. Este método, que fue creado por Eudoxo de Cnido (400- 347 A. C.) y perfeccionado y utilizado en forma satisfactoria por Arquímedes de Alejandría (287-212 A.C.), fue modificado primero gradualmente y después radicalmente por la invención del cálculo.

Un desarrollo similar ha tenido el cálculo diferencial, considerado el segundo problema fundamental del cálculo, el cual se ocupa del problema de las tangentes. Fueron muchos los matemáticos que se interesaron por este problema que era un problema de geometría pura y de gran importancia para las aplicaciones científicas. La óptica constituía una de estas aplicaciones y uno de los principales objetivos científicos del siglo XVII.

Se propusieron varios métodos para obtener la tangente a una curva. Así, René Descartes (1596-1650) abordó el problema de las tangentes en 1637 intentando determinar la normal a la curva en un punto dado, Pierre de Fermat (1601-1665) en su Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam (1629) presenta el primer método general para determinar máximos y mínimos que es en esencia el método actual. En su Methodus Fermat determinó la tangente a la parábola y la presentó como una aplicación de su método de máximos y mínimos.

Estas contribuciones y muchas otras recibieron un mayor impulso y desarrollo en el siglo XVII debido a los esfuerzos y labor de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). A partir de estos dos matemáticos muchos otros defendieron y aportaron al cálculo de ambos. En este sentido Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748) y

Guillaume Francois Antoine L'Hôpital (1661-1704), seguidores de la tradición leibniziana lograron desarrollar el cálculo de diferencias.

Tanto en el nivel secundario como el universitario la enseñanza del cálculo es fundamental. Muchos temas del cálculo forman parte del contenido programático de muchas carreras, sin embargo las reglas y conceptos matemáticos son utilizados para efectuar cálculos sin conocer la génesis y la evolución histórica, así como las figuras intelectuales que contribuyeron a dicha evolución. Uno de éstos temas es el límite de funciones.

Con frecuencia nos encontramos con ciertas limitaciones cuando se trata de calcular el límite de funciones racionales, cuyo numerador y denominador tienden a cero, siendo la regla de L'Hôpital una alternativa de solución para tales casos.

Debido a la importancia de esta regla en la determinación de límites de funciones, nos propusimos en este trabajo realizar un estudio del Cálculo Diferencial durante la segunda mitad del siglo XVII y la influencia de

L'Hôpital en el desarrollo posterior de esta disciplina. Este trabajo lo hemos dividido en tres capítulos.

El primero de ellos trata sobre el verdadero origen de la Regla de L'Hôpital, las primeras definiciones y postulados que permitieron a L'Hôpital obtener las reglas de diferenciación de las operaciones (suma, producto, cociente y potencia) de funciones algebraicas y la aplicación de estos resultados en el trazado de rectas tangentes.

En el segundo capítulo realizamos un análisis de la forma inderterminada 0/0 y sus diversas extensiones, en el que presentamos los primeros ejemplos de formas indeterminadas incluídos por L'Hôpital en su obra ***"Analyse des infiniment petits pour L'intenlligence des lignes courves"***. Además extendemos la regla de L'Hôpital para el caso de funciones de variables discretas.

Finalmente, en el tercero nos dedicamos a demostrar la Regla de L'Hôpital y enfatizamos en la necesidad de la comprensión de conceptos elementales que conducen a la adquisición de conceptos de niveles más complejos. De igual forma, presentamos una cadena de Teoremas del Cálculo diferencial y su conexión con la demostración de la regla de L'Hôpital. Por último, establecemos una demostración muy elegante de la regla de L'Hôpital aplicando propiedades de orden de la integral definida.

Consideramos que este trabajo investigativo no es un tema acabado y definitivo toda vez que no se estudiaron las otras seciones del texto de De L'Hôpital. Sólo confiamos en que el mismo pueda servir de consulta a futuras investigaciones matemáticas.

PRIMER CAPÍTULO

ORIGEN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

En este capítulo presentamos la controversia entre L'Hôpital y Bernoulli concerniente al contenido del texto Analyse des infiniment, así como la aplicación de las primeras definiciones y postulados en el cálculo de diferencias de expresiones algebraicas y en el trazado de tangentes a curvas en un punto dado.

1.1 LA MOTIVACIÓN DE UN AFICIONADO A LA MATEMÁTICA

El marqués L'Hôpital, militar de carrera, demostró desde muy temprana edad interés por la geometría. Después de su retiro del ejército por motivos de salud, dedica su tiempo a la matemática, convirtiéndose en un aficionado muy respetable, estableciendo contactos con grandes matemáticos como Huygens, Leibniz, James , Johann Bernoulli y otros científicos.

Después de la invención de manera independiente del cálculo infinitesimal por Newton (1664-1666) y Leibniz (1675) muchos matemáticos contribuyeron al cálculo de ambos. La escuela Newtoniana al inicio del siglo XVIII, que era muy próspera, se vió muy afectada para mediados del siglo por las controversias entre Newton y Leibniz. En sentido opuesto Jakob, Johann Bernoulli y L'Hôpital, seguidores de la tradición Leibniziana, logran desarrollar el cálculo de diferencias.

Tanto Newton como Leibniz no se sentían satisfechos con su explicación de los conceptos fundamentales del cálculo. Después de ser definidas las reglas de operación del análisis, los sucesores de Newton y Leibniz confían en el simbolismo utilizado y se proponen la fundamentación formal del cálculo. Sin embargo, estos matemáticos sienten la necesidad de las demostraciones y del rigor en sus procedimientos.

Como todas las tentativas por aclarar el cálculo fracasaron, los matemáticos desviaron su interés por asegurar las bases lógicas del análisis hacia las aplicaciones: prefieren construir, elaborar e inventar.

Los artículos publicados en el Acta de 1684 y 1686 por parte de Leibniz no tuvieron la acogida en los círculos matemáticos, pues eran breves, oscuros y deslucidos por sus errores. Los hermanos Jakob y Johann Bernulli se encargaron de dar a conocer en el continente europeo el cálculo de Leibniz a través de sus numerosas publicaciones en las Actas. El resultado de la colaboración de los hermanos Bernoulli con Leibniz, la cual comenzó a partir de 1685 cuando éste publica su primer artículo sobre cálculo en 1684, fue la creación del cálculo de final del siglo XVII.

Entre 1691 y 1692 Johann Bernoulli escribió dos pequeños libros de textos sobre el cálculo diferencial e integral los que no fueron publicados hasta 1922. Bernoulli en su interés de dar a conocer el nuevo cálculo logra impresionar al Marqués De L'Hôpital con su método para determinar la curvatura de curvas arbitrarias por medio de diferenciales, quien lo contrata para que lo instruya en la nueva disciplina leibniziana a cambio del pago de ciertos emolumentos por sus servicios profesionales, poniendo todo su ingenio a disposición de L'Hôpital. Bernoulli acepta en 1695 un puesto en la Universidad de Groninga y aún después, mantiene correspondencia con el marqués.

1.2 L'HÔPITAL Y SU TEXTO DE CÁLCULO "ANALYSE DES INFINIMENT PETITS POUR L'INTENLLIGENCE DES LIGNES COURVES".

A pesar que la publicación de artículos fue constante a partir de 1690 lo que se necesitaba era un libro de texto de cálculo. Es así como en 1696 L'Hôpital publicó el primer texto de cálculo diferencial con el título ***"Analyse des infiniment petits pour L'intenlligence des lignes courves"*** (Análisis de los pequeños infinitésimos para el entendimiento de las líneas curvas) donde la mayor parte de su contenido fue tomada de las clases de

Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital reconoce esta situación y lo hace público en la introducción del texto, como sigue:

"Reconozco deber mucho a las luces de los señores Bernoulli y sobre todo a las del joven en la actualidad profesor en Grotinga" agrega además, ***"haberse servido libremente de sus descubrimientos y los del señor Leibniz".*** Acepta y está dispuesto a la devolución de resultados incluidos en el Analyse a sus dueños si estos fuesen reclamados en los siguientes términos: ***"confío reivindiquen todo lo que quieran, contentándome con lo que me dejen".*** [Guillaume Francois Antoine De L'Hôpital, (1715)]

Bernoulli en cartas privadas escritas a L'Hôpital le reclama que mucho del contenido era de su propiedad, y en particular lo relacionado a la primera proposición de la novena sección, la cual contiene la regla para la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Estas reclamaciones las hace pública en 1698 en una carta dirigida a Leibniz en la que acusa a L'Hôpital de plagio y después de la muerte del marqués (1704) en una nota similar dirigida a Brooke Taylor.

La controversia concerniente al contenido del Analyse quedó aclarada en 1922, cuando aparecieron los manuscritos del cálculo diferencial de Bernoulli de 1694, ***Differentialrechnung***. La comparación de estos manuscritos con el Analyse de L'Hôpital revelaron que las reclamaciones de Bernoulli eran justificadas puesto que había mucha coincidencia. Schafheitein, traductor de estos manuscritros de Bernoulli, señala que en la primera sección tanto Bernoulli como L'Hôpital presentan las reglas para determinar la diferencial de sumas, diferencias, productos y cocientes; y en cada libro encontramos el mismo ejemplo:

$$\sqrt{(ax+x^2)}\Big/\sqrt{x^2+y^2}$$

En la segunda sección de cada libro se determina la subtangentes a curvas y cada uno comienza con $ax = y^2$.

A pesar de esta coincidencia, la verdadera situación salió a luz pública en 1955 cuando se publicó la correspondencia anticipada entre estos dos matemáticos.

En una carta del 17 de marzo de 1694 el Marqués L'Hôpital le ofreció a Bernoulli 300 liras por año si este cumplía las siguientes condiciones: Trabajar en todos los problemas matemáticos enviados por el marqués, hacer de su conocimiento todos sus descubrimientos y abstenerse de pasar a otros las notas enviadas a él. Proposición que fue aceptada por Bernoulli, pues en esos momentos su situación económica no era ventajosa.

A continuación presentamos algunas líneas de esta carta: ***"Le daré a usted con placer una pensión de 300 liras la cual comenzará el primero de enero del presente año, y enviaré 200 liras por la primera mitad del año por los trabajos que usted envie y esto será 150 liras por la otra mitad del año y así en el futuro... pediré que me de algunas horas de su tiempo para trabajar en lo que pediré y también comunicarme sus descubrimientos con la solicitud de no comunicárselos a otros. Le pido a usted no enviar a M. Varignon ni a otros copias de las notas que usted me deje tener, no me agradaría si ellas fueran publicadas...".*** [De L'Hôpital, (1694) En: Struik, (1989)] A partir de este acuerdo la correspondencia entre L'Hôpital y Bernoulli fue constante. Así el 22 de julio de 1693 Bernoulli le envía a su patrón una carta que contenía la regla para la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuya formulación está basada en consideraciones geométricas.

Bernoulli pudo demostrar que la regla para la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ fue producto de su ingenio matemático. Si embargo, la regla aún se conoce como regla de L'Hôpital, pues pagó por ella y además, muchos de los resultados matemáticos están asociados a nombres de personas que se ocuparon de dar a conocerlos y que por su enfoque didáctico son entendibles, como es el caso del Analyse, según Cantor, el más entendible y por mucho tiempo el único libro de texto de Cálculo Diferencial más fácil de leer.

Struik (1989) nos dice que en la actualidad podemos encontrar gran cantidad de casos donde el reconocimiento no se ha hecho a los inventores sino otras personas, como: El Teorema de Pitágora que fue conocido por los Babilonios más de un milenio antes que naciera Pitágora de Samos, el triángulo de Pascal fue conocido por Yang Hui (siglo XIII), las ecuaciones

Cauchy-Riemann fueron conocidas por D'Alambert y Euler y así muchos otros.

El Analyse, que consta de diez secciones, comienza dando las definiciones de variables y de sus diferenciales, así como los postulados sobre estas diferenciales. Estas definiciones y postulados son los siguientes:

Definición 1: ***"Se llama cantidades variables a aquellas que aumentan o disminuyen continuamente y por el contrario, cantidades constantes a las que continuan siendo las mismas mientras las otras cambian."*** [De L'Hôpital, (op. cit. 1715)]

Es evidente que la diferencial de una cantidad constante es cero o nula; es decir, las cantidades constantes no poseen diferencia.

Definición 2: ***" La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida continuamente, se llama diferencial de esta cantidad."*** [De L'Hôpital, (sup. cit.)]

Como podemos ver en esta segunda definición L'Hôpital no consideraba las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos como lo hacía Leibniz, así las diferencias son las partes infinitamente pequeñas que aumentan o disminuyen.

Para ilustrar ésta segunda definición, L'Hôpital consideró una curva cualquiera AMB [Fig. 1] que tiene por diámetro la recta AC y la línea PM una de sus ordenadas.

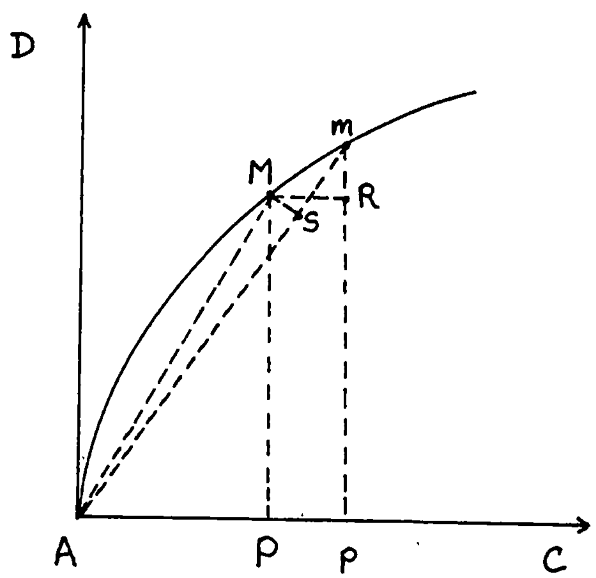


Fig. 1

donde se indentifican las siguientes variables con respecto a la curva AMB.

La abscisa AP = x,

La ordenada PM = y,

La cuerda AM = z,

El arco del círculo MS = s con centro en A y radio AM .

Trazó otra ordenada pm infinitamente próxima a la ordenada PM, una línea recta MR paralela a AC y las cuerdas Am y AM.

Mediante esta construcción L'Hôpital identifica las diferenciales de las distintas variables:

dx = Pp es la diferencia de AP = x

dy = mR es la diferencia de MP = y

dz = Sm es la diferencia de la cuerda AM = z

ds = Mm es la diferencial de arco AM = s

El área de la región Apm es la diferencia del área de la región APM

Para L'Hopital la "***d*** " es un símbolo que se utiliza para representar la diferencial de la variable escrita a continuación y los segmentos Pp , mR, Sm y Mm se consideran infinitamente pequeños, aunque no se habla de la existencia de estas cantidades, sí se explica como se comportan en los siguientes postulados.

Postulado 1: ***"Se requiere que se pueda tomar indiferentemente una por otra a dos cantidades que no difieren entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña: o (lo que es lo mismo) que una cantidad que no aumenta ni disminuye en otra cantidad infinitamente menor que la primera, puede considerarse que continúa siendo la misma."*** [De L'Hôpital, (op. cit. 1715)]

Postulado 2: ***"Se requiere que una una línea curva pueda ser considerada como el ensamble de una infinidad de líneas rectas cada una de estas infinitamente pequeña: o (lo que es lo mismo) como una poligonal de un número infinitos de lados, cada uno infinitamente pequeño, las cuales determinan por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la línea curva."*** [De L'Hôpital, (sup. cit.)]. [Fig.2]

Estos dos postulados de L'Hôpital tienen el mismo significado que los presentados por Bernoulli en su manuscrito, aunque más reducidos que los primeros. Vemos:

Postulado 3: ***" Si una magnitud es aumentada o disminuida en una magnitud infinitamente pequeña no se va a aumentar o a disminuir ."*** [Jullian Lowell Coolidge, (1990)]

Postulado 4: ***" Cada línea curva se constituye de infinitas rectas que a su vez son infintamente pequeñas."*** [Lowell, (sup. cit.)]

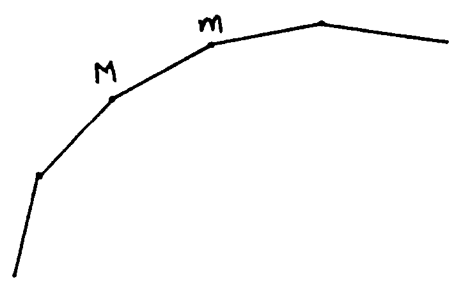


Fig. 2

Según el Postulado 1, una cantidad podría incrementarse en un diferencial sin incrementarse nada. Esta fue *“ **La edad dorada del cero pequeño, edad de la inocencia.** ”* [Bell, (1949)]

L'Hôpital concibe que existen en la naturaleza magnitudes de diferentes tamaños que se pueden observar como infinitamente pequeñas comparadas con otras. Estas cantidades infinitamente pequeñas deben ser descartadas cuando se comparan con las cantidades de mayor tamaño.

En esencia este postulado nos indica que se puede considerar:

AP = Ap o $x = x + dx$

MP = mp o $y = y + dy$

El espacio Apm igual al espacio APM

El espacio MPpm igual al rectángulo MPpR

El sector AMm igual al triángulo AMS

El ángulo pAm igual al ángulo PAM.

1.3 APLICACIONES DEL CÁLCULO DE DIFERENCIAS DE L'HÔPITAL.

Las igualdades señaladas en la sección 1.2, permitió a L'Hôpital presentar las reglas de la diferenciación para funciones algebraicas (suma, producto, cociente, potencia y raíz) . Para tal efecto presenta las siguientes proposiciones cuyos resultados son generalizados mediante un enunciado al que le llamó regla.

1.3.1 Diferencial de la suma.

Proposición 1: Encontrar las diferenciales de cantidades simples conectadas con los signos $+$ y $-$.

Se requiere determinar la diferencial de la función $a+x+y-z$.

$$d(a+x+y-z) = a+x+dx+y+dy-z-dz-a-x-y+z$$

$$= dx+dy-dz$$

Regla: La diferencia de la suma de dos cantidades finitas es la suma de sus diferencias. De esta forma L'Hôpital obtuvo su primera ecuación.

1.3.2 Diferencial de un producto.

Proposición 2: Encontrar la diferencial de un producto formado por varias cantidades multiplicadas entre sí.

Determinar la diferencial de la función xy

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$$

$$= xy + xdx + ydy + dxdy - xy$$

$$= xdy + ydx + dxdy$$

como $dxdy$ es una cantidad infinitamente pequeña comparada con los otros términos ydx y xdy, se omite [Postulado 1]. Así se tendrá:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

La diferencia del producto de dos cantidades es igual al producto de la diferencia de la primera de estas cantidades por la segunda, más el producto de la diferencia de la segunda por la primera.

L'Hôpital generalizó esta regla para determinar la diferencia del producto de las cantidades xyz.

Para determinar la diferencia de xyz, consideró el producto de la diferencia de xy por z más el producto de la diferencia de z por xy, obtiene :

$$
\begin{aligned}
d(xyz) &= d(xy).z + xydz \\
&= (xdy + ydx)z + xydz \\
&= xzdy + yzdx + xydz
\end{aligned}
$$

De manera similar obtiene la diferencia del producto de las cantidades $xyzu$.

Regla: La diferencia del producto de varias cantidades multiplicadas unas con otras, es igual a la suma del producto de la diferencia de cada una de ellas por el producto de las otras cantidades.

1.3.3 Diferencial de un cociente.

Proposición 3: Encontrar la diferencia de una fracción cualquiera.

Para determinar la diferencial de la función $\frac{x}{y}$, L'Hopital comienza suponiendo que $z = \frac{x}{y}$ donde tiene que $x = zy$. Como la variables x y yz son iguales, el cambio que se de en una de ellas se dará en la otra.

Aplicando la regla del producto se tendrá:

$$dx = ydz + zdy$$

$$dz = \frac{dx - zdy}{y}$$

sustituyendo z por $\frac{x}{y}$ se tendrá:

$$dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$$

L'Hopital utiliza yy en lugar de y^2.

Regla: La diferencia de una fracción cualquiera es igual al producto de la diferencia del numerador por el denominador, menos el producto de la diferencia del denominador por el numerador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Una definición incompleta fue utitlizada por L'Hôpital para calcular la diferencial de orden superior. Esta definición es la siguiente: ***"La porción infinitamente pequeña en que la diferencia de una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente se llama diferencia de la diferencia de esa cantidad, o bien su diferencia segunda...denotada ddx, la tercera dddx ó d^3x...".*** [Jeam Paul Collette, (1986)]

A pesar de este inconveniente los resultados obtenidos son exactos, puesto que L'Hôpital utiliza una regla práctica que se enuncia como sigue: "***Se considera constante una diferencia elegida y se tratan las otras como cantidades variables.***" [Collette (sup. cit.)]

De esta forma calcula la diferencial de la función xy considerando dx constante y dy variable de la siguiente manera:

La primera diferencial de la función xy es

$$d(xy) = xdy + ydx$$

La segunda diferencial será:

$$dd(xy) = d(xdy + ydx)$$

$$= (x + dx)(dy + ddy) + (y + dy)dx - xdy - ydx$$

$$= xdy + xddy + dxdy + dxddy + ydx + dxdy - xdy - ydx$$

aplicando el Postulado 1:

$$dd(xy) = xddy + 2dxdy$$

En forma análoga se considera dy constante y dx variable:

$$dd(xy) = d(xdy + ydx)$$

$$= (x + dx)dy + (y + dy)(dx + ddx) - xdy - ydx$$

$$= xdy + dxdy + ydx + yddx + dxdy + ddxdy - xdy - ydx$$

$$= yddx + 2dxdy + dyddx$$

$$= yddx + 2dxdy$$

En cuanto al concepto de diferencial, L'Hôpital no consideraba las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos como lo hacía Leibniz, sino como creciendo o decreciendo de manera continua, así las diferencias son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen.

1.3.4 Diferencial de una potencia.

Proposición 4: Encontrar la diferencial de una potencia cualquiera, perfecta o imperfecta de una cantidad variable.

Con el propósito de obtener una regla para determinar la diferencial de potencias, L'Hôpital hace una distinción entre potencias perfectas e imperfectas, las cuales no son definidas en el Analyse. Sin embargo, encontramos la siguiente definición citada en Cambray y Cantoral (1990): ***"Se llama potencia perfecta a la que tiene exponente entero y potencia imperfecta a la que tiene exponente*** $\frac{m}{n} \notin \mathbf{Z}$, $m,n \in \mathbf{Z}$ **y** $n \neq 0$.***"***

A partir de las propiedades de las progresiones se deducen algunas leyes de la potenciación algebraicas conocidas actualmente como el producto y cociente de potencias de bases iguales, y potencia de potencia. Para ello L'Hopital considera una progresión geométrica en la que el primer término es 1, el segundo es x y el exponente de cada uno de los términos siguientes aumentan en una unidad con relación al anterior. Además, consideró la progresión aritmética cuyos términos son los exponentes de los términos de la progresión geométrica. A partir de esta progresión obtiene las potencias perfectas e imperfectas.

Estas progresiones son las siguientes:

Progresión Geométrica $\quad 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots \quad$ (1)

Progresión Aritmética $\quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \quad$ (2)

Extiende la progresión geométrica anterior e incluye términos inferiores a 1 con su correspondiente progresión aritmética:

Progresión Geométrica $\quad x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3} \frac{1}{x^4}, \ldots \quad$ (3)

Progresión Aritmética $\quad 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots \quad$ (4)

Para obtener potencias imperfectas introduce nuevos términos en la progresión aritmética, lo que permite conocer el exponente del respectivo término de la progresión geométrica.

En primer lugar, para obtener exponentes fraccionarios positivos introduce términos en la progresión (2). Por ejemplo, al introducir $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ entre los términos 0 y 1 se obtiene los términos $\sqrt[3]{x}$ y $\sqrt[3]{x^2}$ entre los términos 1 y x de la progresión (1) y así sucesivamente obteniendo las siguientes progresiones:

Progresión Geométrica

$$1, \sqrt{x}, x, 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x, 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, 1, \cdots$$

Progresión Aritmética

$$0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1 \ldots$$

Progresión Geométrica

$$\frac{1}{x}, \sqrt{\frac{1}{x^3}}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x}, \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \sqrt{\frac{1}{x^7}} \sqrt{\frac{1}{x^8}} \cdots$$

Progresión Aritmética

$$-1, -\frac{3}{2}, -2, -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2, -3, -\frac{7}{2}, -4 \cdots$$

Mediante el análisis de la naturaleza de estas progresiones L'Hopital llega a los siguientes resultados, los cuales ilustra con algunos ejemplos:

La suma de los exponentes de dos términos cualesquiera de la progresión geométrica será el exponente del término que resulta del producto de ellos.

Ejemplos:

1 $x^{3+4} = x^7$ es el producto de $x^3 . x^4$

2. $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = x^{-\frac{2}{15}}$ es el producto de $x^{-\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{5}}$

3. $x^{2+2} = x^4$ es el producto de $x^2 . x^2 = (x^2)^2$

y así sucesivamente obtiene el cubo, la cuarta potencia, etc. del exponente de un término cualquiera de la progresión geométrica y además, la mitad, la tercera, la cuarta parte, etc. del exponente de un término cualquiera de la progresión geométrica será el exponente de la raíz cuadrada, cúbica, etc. de ese término.

La diferencia de los exponentes de dos términos cualesquiera de la progresión geométrica será el exponente del cociente de la división de éstos términos.

Ejemplos:

1. $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ es el cociente de la división de $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

2. $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ es el cociente de la división de $\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Aplicando los resultados obtenidos hasta el momento lo lleva a determinar la diferencia de potencias perfectas e imperfectas.

A partir de la diferencia del producto de funciones, obtiene la diferencia de potencias perfectas como sigue:

La diferencia de la función xx es

$$d(xx) = xdx + xdx = 2xdx.$$

En forma análoga la diferencia de la función x^3 es

$$d(x^3) = d(xxx) = xxdx + xxdx + xxdx = 3xxdx = 3x^2dx$$

y así sucesivamente, se tendrá que en forma general la diferencia de la función x^n será:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Aplicando la diferencial del cociente y el resultado anterior podemos encontrar la diferencial de la función x^{-n}.

$$\begin{aligned} d(x^{-n}) &= d\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= -\frac{d(x^n)}{(x^n)^2} \\ &= -\frac{nx^{n-1}dx}{x^{2n}} \\ &= -n\,x^{n-1-2n}dx \\ &= -n\,x^{-n-1}dx \end{aligned}$$

De forma similar que en el caso de las potencias perfectas determina la diferencia de potencias imperfectas; es decir, funciones cuyo exponente es una fracción.

Supongamos que $z = x^{\frac{m}{n}}$. Elevando ambos miembros a la n resulta $z^n = x^m$ y luego derivando se obtiene:

$$d(z^n) = d(x^m)$$

$$nz^{n-1}dz = mx^{m-1}dx$$

$$dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$$

$$= \frac{mx^{m-1}dx}{n(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}}$$

$$= \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{m}{n}x^{m-1-m+\frac{m}{n}}dx$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$$

En el caso de que el exponente sea negativo L'Hôpital procede de la siguiente manera:

$$d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = d\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right) = \frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}}{(x^{\frac{m}{n}})^2}dx$$

$$= -\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{2m}{n}-1}dx$$

$$= -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$$

Regla: La diferencia de una potencia cualquiera perfecta e imperfecta de una cantidad variable, es igual al producto del exponente de esta potencia, por esa misma cantidad elevada a una potencia menor en una unidad, y multiplicada por su diferencia.

L'Hopital dedicó las secciones siguientes del Analyse al tratamiento y trazado de tangentes a curvas; máximos y mínimos; punto de inflexión y radios de curvatura en la que aplicó el cálculo de las diferencias, no obstante, el tema sobre el trazado de tangentes será enfatizado en las siguientes líneas.

1.3.5 Trazado de Tangentes a una curva.

En la segunda sección L'Hopital aplica el cálculo de diferencias en el trazado de tangentes a todo tipo de líneas: parábolas, hipérbolas, espiral, cuadratríz, cicloide, curva logarítmica, etc.

Define la tangente de una curva haciendo uso del Postulado 2, es decir, considerando la curva como una poligonal formada por una infinidad de segmentos y todos infinitamente pequeños [Fig. 3].

Definición 3: ***"Si se prolonga uno de los pequeños lados MN*** **[Fig. 4]** ***de la poligonal que compone la curva será llamada la tangente de la curva en el punto M o N."*** [L'Hôpital, (op. cit. 1715)]

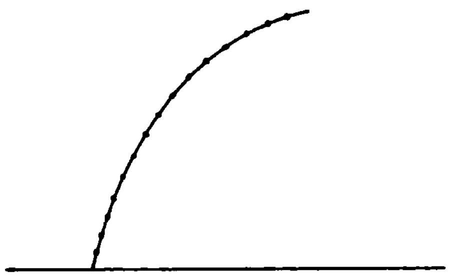


Fig. 3

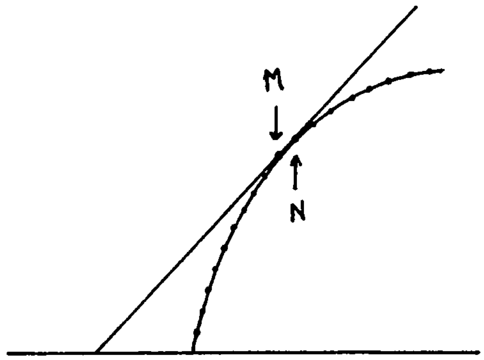


Fig. 4

Como los segmentos de la poligonal son infintamente pequeños, se observará la tangente de la curva en el punto M o N como se exhibe en la Fig. 5.

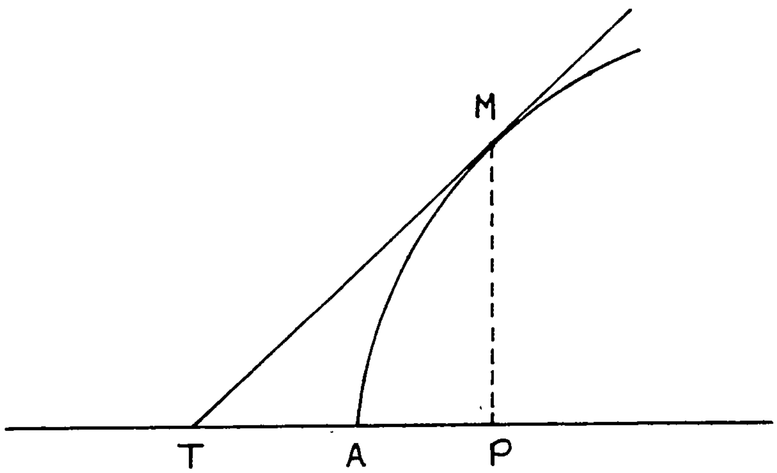


Fig. 5

donde los puntos M y N son tan próximos como se quiera hasta que llegan a confundirse.

A continuación presentamos la siguiente proposición de la sección II del Analyse en la que L'Hôpital formaliza la interpretación geométrica sobre el trazado de tangentes.

Proposición 5: Sea AM una línea curva tal que la relación de la abscisa AP a la ordenada PM esté expresada por una ecuación cualquiera y que se requiera trazar la tangente MT por el punto M dado sobre la curva. [Fig. 6]

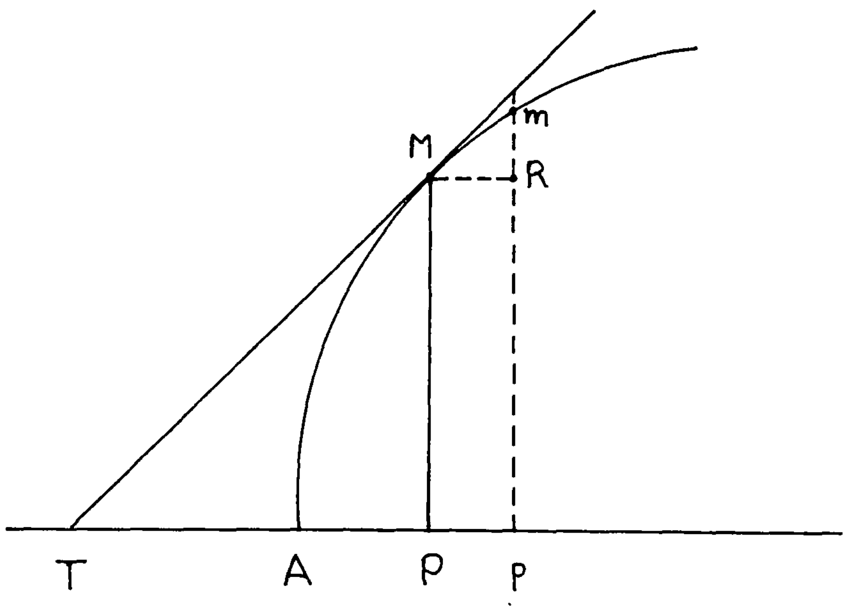


Fig. 6

Al trazar la ordenada MP se considera otra ordenada mp infinitamente cercana a la primera y el segmento MR paralelo a Pp. Por la propiedad de los triángulos semejantes mRM y MPT se tiene :

$$mR{:}RM = MP{:}PT$$

$$dy{:}dx = y.PT$$

$$PT = y\frac{dx}{dy}$$

Resolviendo las operaciones indicadas en el segundo miembro de esta ecuación nos dará el valor de la subtangente PT en términos conocidos y libres de diferencias lo cual nos permitirá trazar la tangente MT.

Al trazar la tangente MT puede suceder que el punto T cae del mismo lado de A (origen) o del lado opuesto. Cuando el punto T cae del mismo lado de A [Fig. 6] es evidente que mientras x crece , y también crece y cuando cae del lado opuesto [Fig. 7] mientras x crece, y decrece o disminuye por lo tanto será necesario considerar a la diferencia de y (dy) negativa en relación con dx

y por consiguiente PT será negativa. Si PT es positiva el punto T cae del mismo lado del origen A y si es negativa, cae del lado opuesto.

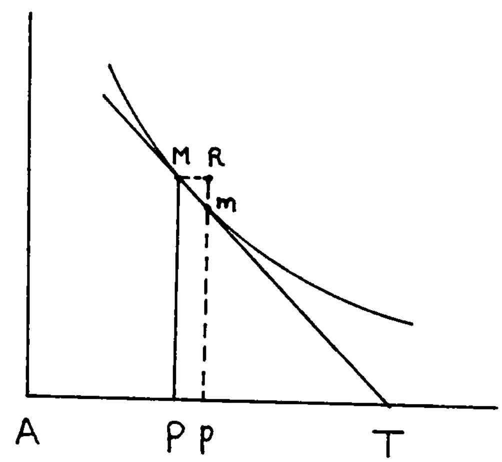


Fig. 7

Para ilustrar la idea de L'Hôpital expuesta en esta proposición determinaremos la tangente de las siguientes curvas seguida de su construcción geométrica.

Ejemplo: $ax = yy$ (5)

Diferenciando la ecuación (5), se tiene:

$$adx = 2y\,dy$$

$$dx = \frac{2y\,dy}{a} \tag{6}$$

luego,

$$PT = y\frac{dx}{dy} = \frac{2yy}{a} \tag{7}$$

Despejando a en (5) y sutituyendo en (7) se tiene:

$$PT = 2x$$

$a = 1$

$x = 4$

$PT = 8$

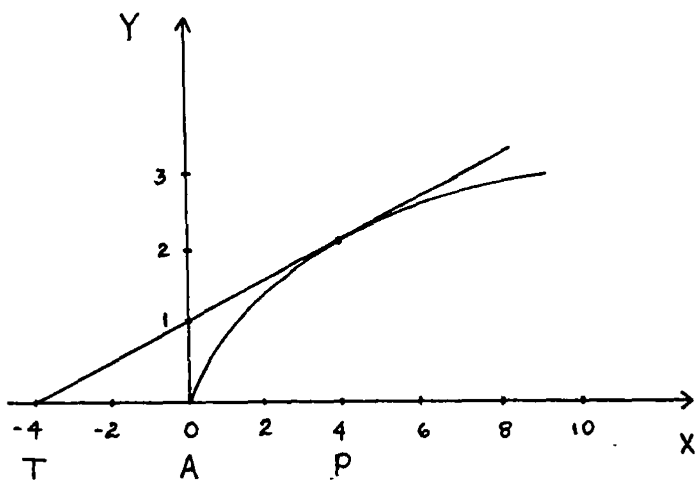


Fig. 8

Ejemplo. $y^3 = axx$. (8)

Diferenciando ambos miembros de la ecuación se tiene

$$3y^2 dy = 2axdx$$

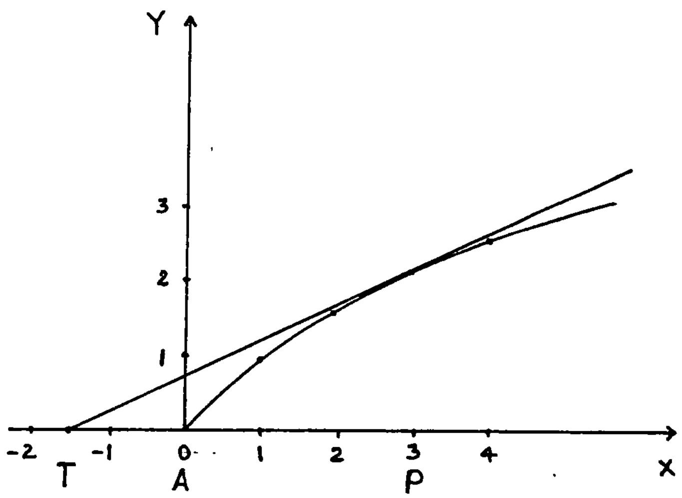
$$dx = \frac{3y^2}{2ax} dy$$

luego,

$$PT = y\frac{3y^2}{2axdy}dy = \frac{3y^3}{2ax} \qquad (9)$$

Sustitutyendo (8) en (9), se tiene:

$$PT = \frac{3axx}{2ax} = \frac{3}{2}x$$



$a = 1$

$x = 3$

$PT = 4.5$

Fig. 9

Ejemplo : $a^3 = xyy$.

Diferenciando ambos miembros se tiene

$$0 = 2xydy + yydx$$

$$dx = \frac{-2x}{y}dy$$

luego,

$$PT = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{dy}\left(\frac{-2xdy}{y}\right) = -2x$$

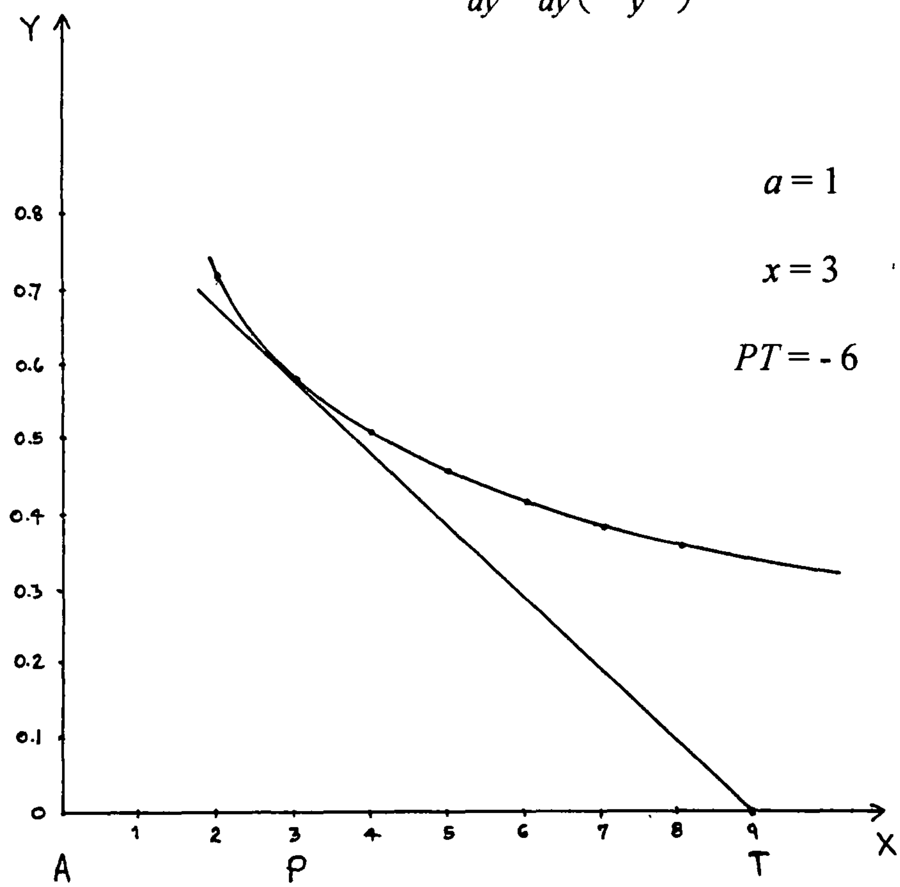


Fig. 10

SEGUNDO CAPÍTULO

FORMAS INDETERMINADAS

Este capítulo lo dedicamos al estudio de las formas indeterminadas en el que presentamos los primeros problemas que resolvieron tanto Bernoulli como L'Hôpital. Además, enfatizaremos en algunos aspectos para la correcta aplicación de dicha regla. También extenderemos la regla al caso discreto.

2.1 FORMA INDETERMINADA $\frac{0}{0}$.

En el cálculo de límites de funciones definidas por combinación de funciones derivables se obtienen en muchos casos expresiones sin sentido conocidas como formas indeterminadas.

Los primeros cálculos relacionados con formas indeterminadas fueron realizados por Johann Bernoulli quien comunica a L'Hôpital su descubrimiento en una carta fechada el 22 de julio de 1693, cumpliendo el acuerdo intelectual entre ambos [ver cap. 1, pág 12].

En la siguiente proposición de la IX sección del Analyse, L'Hôpital presenta lo relacionado a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En esta sección incluye tanto los problemas resueltos por su maestro Bernoulli como los propios, en los que aplicó los resultados de las secciones precedentes.

Proposición 6: Sea AMD una curva (AP = x , PM = y, AB = a) de tal manera que el valor de la ordenada y es expresada por una fracción, en el cual el numerador y el denominador se convierten en cero para $x = a$, cuando el punto P coincide con el punto B dado. Se desea determinar el valor de la ordenada BD. [Fig.11]

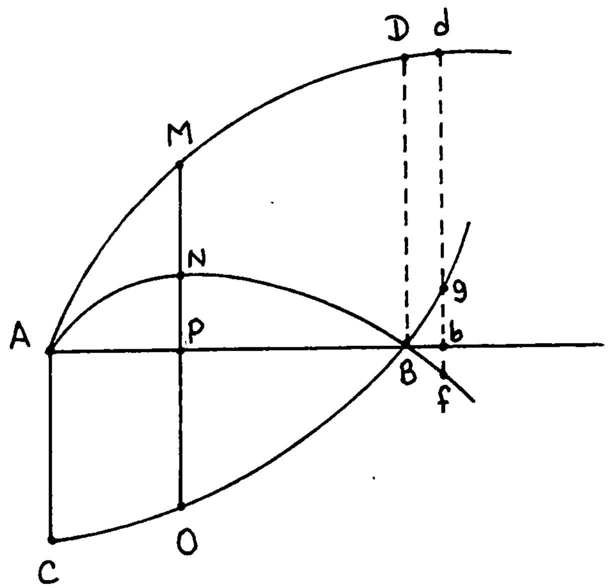


Fig. 11

L'Hôpital realiza una descripción del comportamiento de las curvas en las proximidades del punto $x = a$ de la siguiente manera:

Sean ANB y COB dos curvas (Teniendo la recta AB como eje común) de tal manera que la ordenada PN representa el numerador y la ordenada PO el denominador de la fracción general representando cualquiera ordenada PM, tal que

$$PM = \frac{AB \, . \, PN}{PO}.$$

Es evidente, que estas dos curvas se intersectarán en el punto B; puesto que, por la suposición PN y PO se convierte en cero cuando P coincide con B. Si imaginamos la existencia de una ordenada infinitamente próxima a DB, cortando las curvas ANB y COB en los puntos *f*, *g*; entonces

$$bd = \frac{AB \, . \, bf}{bg}$$

el cual será igual a BD. Ahora, nuestro problema se reduce a encontrar la relación de bg a *bf*. Lo que se hace evidente cuando la abscisa AP se convierte en AB, las ordenadas PN y PO se hacen cero y cuando AP se convierte en Ab, las ordenadas PN y PO se convierten en *bf* y *bg*. Luego, se deduce que dichas ordenadas son las diferenciales de las ordenadas en B y *b* respecto a las curvas ANB y COB; y consecuentemente si la diferencial del numerador es encontrada y dividida por la diferencial del denominador, después de convertir $x = a =$ Ab o AB, obtemos el valor deseado de la ordenada *db* o BD.

El ejemplo que presentamos a continuación es el primer problema clásico de forma indeterminada, el cual fue comunicado a L'Hôpital por Bernoulli en la carta del 22 de julio de 1694. Este ejemplo es el siguiente:

Ejemplo: $$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

para $x = a$.

Derivando tanto numerador como denominador se obtiene:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\left(2a^3x - x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2a^3 - 4x^3\right) - \frac{1}{3}a\left(a^2x\right)^{-\frac{2}{3}}a^2}{}$$

$$= \frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}} - \dfrac{a}{3}\sqrt[3]{\dfrac{(a^2)^3}{(a^2x)^2}}}{-\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{(ax^2)^4}{(ax^3)^3}}}$$

$$= \frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}} - \dfrac{a}{3}\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{x^2}}}{-\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{a}{x}}}$$

haciendo $x = a$ se obtiene que $y = \frac{16}{9}a$.

Esta solución hizo dudar a L'Hôpital y en julio 1693, en una carta dirigida a Bernoulli sugiere que sustituyendo directamente en la ecuación original se obtiene :

$$\frac{a^2-a^2}{a-a} = 2a$$

y en septiembre del mismo año él escribe: ***"Le confieso que me esforcé mucho en resolver la ecuación:***

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x = a, porque no tenía nada claro para llegar a ello, dado que todas las soluciones que se presentan no son exactas." [Lowell, (1990)] Ejemplo: $$y = \frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$$

para $x = a$.

Diferenciando tanto el numerador como el denominador

$$y = \frac{\dfrac{a^2}{2\sqrt{ax}} - 2x}{-\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}}$$

luego, sustituyendo a por x se obtiene que $y = 3a$.

Este último ejemplo de Bernoulli fue cambiado por L'Hôpital por

$$y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$$

cuyo límite es $2a$ cuando $x = a$. El mismo, fue resuelto por L'Hôpital sin necesidad de el cálculo de diferencias. Mediante procedimientos algebraicos se suprimen los inconmensurables reduciéndose la ecuación anterior a:

$$aaxx - 2a^3x + a^4 + 2aaxy - 2a^3y + axyy + aayy = 0$$

que es divisible por $x - a$.

Por lo tanto,

$$(aax - a^3 + 2aay - ayy) = 0 \tag{10}$$

Luego, sustituyendo a por x en (10), se tiene:

$$y = 2a.$$

Los ejemplos resueltos por ambos matemáticos y las respuestas de Bernoulli a las interrogantes de L'Hôpital sugiere que L'Hôpital aprendió la solución correcta de Bernoulli quien no recibió ningún crédito puesto que el método actualmente, es conocido como la regla de L'Hôpital.

En la siguiente sección presentamos la regla de L'Hôpital en notación moderna sin detenernos en detalles de su demostración, pues ésta será objeto de estudio en el próximo capítulo.

2.2 REGLA DE L'HÔPITAL.

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ con derivadas continuas en (a,b) y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Además, esta regla se puede aplicar si el numerador y el denominador tiende a infinito cuando x→∞ (forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$). Esta es una de las varias extensiones de la regla que ayuda a determinar el comportamiento del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$.

La regla de L'Hôpital es una arma poderosa para determinar los valores de formas indeterminadas. El uso de esta regla con frecuencia puede llevarnos a resultados errados, por tal motivo debemos ser cuidadosos en su aplicación. En algunas aplicaciones encontramos situaciones donde las funciones son discretas, o no tienen derivada o $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe, mientras que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe. En este último caso, a pesar que el límite es de forma indeterminada, la regla de L'Hopital no es aplicable. Para determinar este límite es necesario realizar transformaciones algebraicas en la función racional $\frac{f(x)}{g(x)}$.

La idea fundamental de la regla de L'Hôpital es el estudio del cociente de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, deduciendo de este información sobre el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ lo que nos lleva a concluir que ambos cocientes tienen el mismo límite; es decir, la existencia de $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es condición suficiente para la existencia de $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Sin embargo, si el primer límite no existe, no podemos obtener conclusiones sobre el segundo, pues no es condición necesaria para la existencia del límite del cociente de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. En este sentido se pueden presentar algunas variantes. Analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo : Si $f(x)=x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$

entonces,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

como podemos ver $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no posee límite cuando $x\to 0$, puesto que $\cos\frac{1}{x}$ no tiende a un límite cuando $x\to 0$.

Sin embargo, como

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} = 0$$

se tiene que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right) \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right)$$

$$= 0 \ . \ 1$$

$$= 0$$

Así pues, $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe mientras que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe.

Ejemplo : Si $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

luego cuando x→0, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no posee límite.

Más aún, el $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Otro aspecto importante para la correcta aplicación de la regla de L'Hôpital es el cumplimiento de la condición $g'(x) \neq 0$. Si g'(x) tiene ceros en cada vecindad de a, entonces $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no está definida en (a,b) y por lo tanto, el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe.

Es posible que $f'(x)$ y $g'(x)$ tengan un factor común:

$$f'(x) = s(x)\omega(x) \quad \text{y} \quad g'(x) = s(x)\varphi(x)$$

donde $s(x)$ no se aproxima a un límite y $\lim_{x \to a} \frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$ exista, mientras que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no exista. Por lo tanto, no es recomendable cancelar el factor común.

Presentamos a continuación el siguiente ejemplo para ilustrar esta situación:

Ejemplo : Si $f(x) = 2x + sen\ 2x$ y $g(x) = x\ sen\ x + cos\ x$

entonces,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{4\cos^2 x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4\cos x}{x}$$

$$= 0.$$

mientras que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} x + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x + \frac{1}{x} \cos x}$$

no existe.

2.3 EL LÍMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL.

Consideremos el límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, conocido como límite fundamental trigonométrico, que aplicando directamente el límite del cociente nos lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Este límite es de gran utilidad por su aplicación en la determinación de otros límites.

Analizaremos este límite desde un punto de vista geométrico, apoyándonos en el Postulado 2. Para ello tracemos la gráfica de $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x$. [Fig. 12]

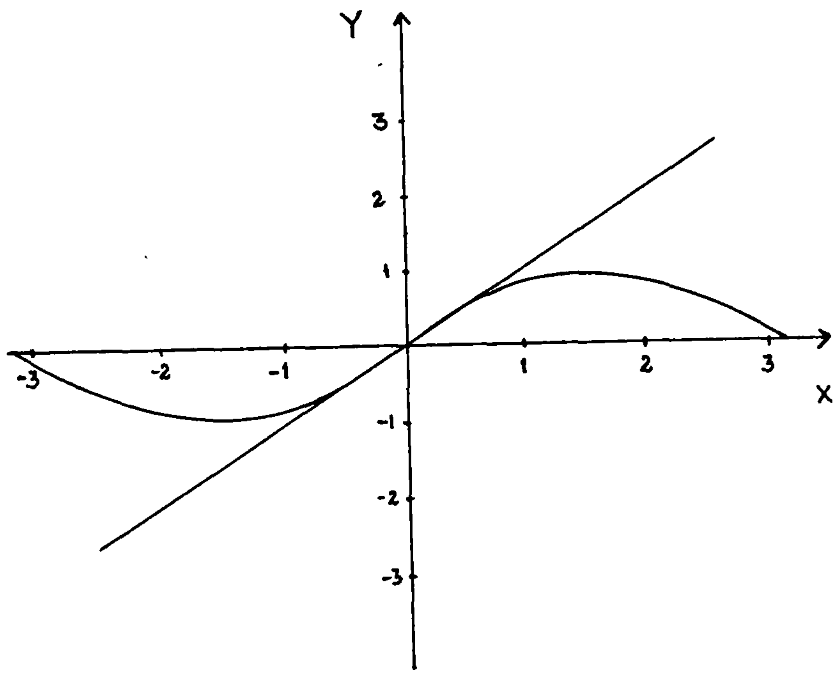


Fig. 12

Tanto la gráfica de $f(x)$ como la de $g(x)$ coinciden en $x = 0$, punto en el que ambas se anulan.

Por el Postulado 2, la cuerda y el arco infinitésimal no se distinguen el uno del otro y de la misma manera se confunde una curva con su tangente en las proximidades de un punto, puesto que la tangente es considerada como la prolongación de uno de los segmentos de la poligonal (curva).

La ecuación de la tangente a la gráfica de la función y = f(x) en un punto $x = \boldsymbol{a}$ está dada por la expresión $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Así la tangente a la gráfica de la función f(x) = sen x en $\boldsymbol{a} = 0$ es y = x y la tangente a la gráfica de la función g(x) = x en $\boldsymbol{a} = 0$ es y = x.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{tangente\ de\ \operatorname{sen} x\ en\ x=0}{tangente\ de\ x\ en\ x=0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$$

$$= 1$$

Este resultado lo podemos obtener de manera más sencilla y directa aplicando la regla de L'Hôpital, es decir, determinando la derivada de la función f(x) y g(x). Estas derivadas son $f'(x) = \cos x$ y $g'(x) = 1$.

En conclusión,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

$$= 1$$

2.4 FORMAS INDETERMINADAS REDUCIBLES A LAS FORMAS INDETERMINADA $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Muchos límites de funciones no cumplen las condiciones de la Regla de L'Hôpital, ya que no son el cociente de funciones, y por lo tanto esta regla no es aplicable. Sin embargo, mediante procedimientos algebraicos estos límites pueden ser transformadas a las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

2.4.1 Formas indeterminadas de tipo exponencial.

Las formas indeterminadas de tipo exponencial se pueden prestar para una mala interpretación por muchos estudiantes, que aplicando las reglas de la potenciación podrían concluir que las formas indeterminadas 0^0, ∞^0 *y* 1^∞ es igual a 1.

Cuando el límite de $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ produce una indeterminación de tipo exponencial se procede considerando

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

por lo que es suficiente determinar

$$\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

y luego aplicar la regla de L'Hôpital para lo cual se requiere que f y g sean diferenciable.

Primeramente, analizaremos la forma indeterminada $0^0, \infty^0, 1^\infty$. Para tal efecto, presentamos el siguiente teorema.

Teorema 1. Si $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, si existe un número real α tal que

$$b(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

es positiva, acotada y *inf* $b(x) > 0$ cuando $x \to 0^+$; y si

$$\gamma = \alpha \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x$$

existe o es $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$$

donde

$$e^\infty = \infty \quad \text{y} \quad e^{-\infty} = 0.$$

Demostración: Por hipótesis,

$$\begin{aligned} g(x)\ln f(x) &= g(x)\ln\left[b(x)x^\alpha\right] \\ &= g(x)\left[\ln b(x) + \ln x^\alpha\right] \\ &= g(x)\left[\ln b(x) + \alpha\ln x\right] \\ &= g(x)\ln b(x) + \alpha\, g(x)\ln x \end{aligned}$$

Considerando el límite de ambos miembros de la expresión anterior:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln b(x) + \lim_{x\to 0^-} \alpha\, g(x)\ln x$$

como

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

$b(x)$ es acotada y inf b(x) > 0 cuando $x \to 0^+$, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \ln b(x) = 0$$

por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \ln f(x) = \lim_{x \to 0^+} \alpha\, g(x) \ln x = \gamma$$

por consiguiente,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^{\gamma}.$$

En el teorema anterior se obtienen las formas indeterminadas 0^0 ó ∞^0 dependiendo del valor de α. Veamos:

1. Si $\alpha > 0$, la forma indeterminada es 0^0.

   Consideremos la función exponencial $f(x)^{g(x)}$. Como

$$f(x) = x^{\alpha} b(x)$$

entonces

$$f(x)^{g(x)} = \left[x^{\alpha} b(x)\right]^{g(x)} = x^{\alpha g(x)} b(x)^{g(x)} \tag{11}$$

Tomando el límite de la expresión (11) y las hipótesis del Teorema 1 se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha}b(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha g(x)}b(x)^{g(x)}\right)$$

$$= \quad 0^0$$

2. Si $\alpha < 0$, la forma indeterminada es ∞^0.

Como $\alpha < 0$,

$$f(x) = \frac{b(x)}{x^{-\alpha}}$$

luego,

$$f(x)^{g(x)} = \left(\frac{b(x)}{x^{-\alpha}}\right)^{g(x)}$$

Aplicando la hipótesis del Teorema 1, se tiene que:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{b(x)}{x^{-\alpha}}\right)^{g(x)} = \infty^0$$

3. Si el orden de magnitud de f(x) es el mismo de x^{α} entonces, de acuerdo al Teorema 1,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1$$

siempre que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x = 0.$$

En efecto:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} g(x)\ln\left[x^{\alpha} b(x)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x^{\alpha} + \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln b(x)$$

$$= \alpha \lim_{x\to 0^+} g(x)\ln x + \lim_{x\to 0^+} \ln b(x)^{g(x)}$$

$$= \alpha .0 + \lim_{x\to 0^+} \ln b(x)^{g(x)}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to o^+} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} b(x)^{g(x)}$$

Por hipótesis $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} b(x) = 1$, ya que $f(x)$ y x^{α} tiene el mismo orden de magnitud. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1$$

Corolario 1: Si $f(x)$ es como en el Teorema 1, y si $g(x) = x^{\beta}c(x)$ donde $c(x)$ es acotada y $\beta > 0$, entonces

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1.$$

Demostración: Es claro que

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

además, como

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha \lim_{x \to 0^+} g(x) \ln x \\
&= \alpha \lim_{x \to 0^+} x^{\beta} c(x) \ln x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^{\gamma} = e^{0} = 1.$$

Corolario 2: Si $f(0) = g(0) = 0$, si f es analítica en 0 (o sea, desarrollable en serie de potencia) y positiva cuando $x \to 0^+$, y si g es diferenciable en 0 entonces,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1.$$

Demostración: Como

$$g'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

se tiene que $g(x) = x\,c(x)$, donde $c(x)$ es acotada cuando $x \to 0^+$. Además, como $f(x)$ es analítica en 0 y $f(0) = 0$, existe un entero positivo α tal que

$$f(x) = x^{\alpha} b(x)$$

donde $b(x)$ es analítica en 0 y $b(0) \neq 0$. Así, $b(x)$ es acotada y $\inf b(x) > 0$ cuando $x \to 0^+$.

Luego por el Corolario 1,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1.$$

2.4.2 Forma indeterminada $\infty - \infty$.

Existen expresiones como $n - n = 0$, $n - n^2 = n(1-n)$ y $n^2 - n = n(n-1)$ las cuales se convierten en la forma indeterminada ∞ - ∞ cuando n tiende a ∞.

Mediante procedimientos algebraicos y un poco de ingenio es posible transformar una expresión F(x) - G(x) que toma la forma indeterminada ∞ - ∞ cuando x tiende a en otra expresión $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, cuya forma indeterminada es $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo: Si $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$,

entonces

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \infty - \infty$$

pero,

$$f(x)' = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

así,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hopital dos veces, se tiene

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x - \operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

Ejemplo: Si $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}$

enonces,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right]$$

$$= \infty - \infty$$

pero,

$$f(x) = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

así,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \right]$$

$$= \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital dos veces, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - e^x}{xe^x + e^x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{-e^x}{xe^x + 2e^x} \right]$$

$$= -\frac{1}{\;}$$

2.5 LA REGLA DE L'HÔPITAL PARA EL CASO DISCRETO.

Con frecuencia nos encontramos con situaciones donde la regla de L'Hôpital no es aplicable, pues las funciones son de variables discretas. En esta sección introducimos una versión de la regla de L'Hôpital para el caso de funciones de variables discretas. Probaremos que bajo ciertas condiciones,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\Delta\, f(x)}{\Delta\, g(x)},$$

donde,

$$\frac{\Delta\, f(x)}{\Delta\, g(x)} = \frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}$$

para alguna h.

Teorema 2: Sean $\varphi(x)$ y $\phi(x)$ funciones definidas en $[a,\infty)$ y sea $h > 0$. Supongamos además, que

i) $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$

ii) $\Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x)$ no cambia de signo para $x \geq x_0 > a$

iii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\phi(x)} = L$ (finito o infinito) entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = L.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\Delta\phi(x) > 0$ para $x > x_0 > a$. Primero consideremos el caso cuando L es finito.

Por *iii)* se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \geq x_0$ tal que para $x \geq N$:

$$\left|\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\phi(x)} - L\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$L - \tfrac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\phi(x+h) - \phi(x)} < L + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto, para todo k (k = 1,2,3...):

$$L - \tfrac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(x+kh) - \varphi(x+(k-1)h)}{\phi(x+kh) - \phi(x+(k-1)h)} < L + \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

Consideremos primeramente la desigualdad de la derecha.

Como $\Delta\phi(x) > 0$, multiplicando (12) por $\phi(x+kh) - \phi(x+(k-1)h)$ obtenemos:

$$\varphi(x+kh) - \varphi(x+(k-1)h) \;<\; (L + \tfrac{\varepsilon}{2})\left[\phi(x+hk) - \phi(x+(k-1)h\right]$$

Escribiendo esta desigualdad para $k = 1,2,3,\ldots,n$ se tiene:

$$k=1: \quad \varphi(x+h)-\varphi(x)<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+k)-\phi(x)]$$

$$k=2: \quad \varphi(x+2h)-\varphi(x+h)<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+2h)-\phi(x+h)]$$

$$k=3: \quad \varphi(x+3h)-\varphi(x+2h)<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+3h)-\phi(x+2h)]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$k=n: \quad \varphi(x+nh)-\varphi(x+(n-1)h<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+nh)-\phi(x+(n-1)h)]$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades se obtiene que

$$\varphi(x+nh)-\varphi(x)<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+nh)-\phi(x)] \tag{13}$$

Procediendo de manera análoga en la desigualdad de la izquierda se tiene

$$(L-\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+nh)-\phi(x)]<[\varphi(x+nh)-\varphi(x)] \tag{14}$$

De (13) y (14) se concluye que:

$$(L-\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+nh)-\phi(x)]<\varphi(x+nh)-\varphi(x)<(L+\tfrac{\varepsilon}{2})[\phi(x+nh)-\phi(x)]$$

Dividiendo por $\phi(x+nh)-\phi(x)$:

$$L-\tfrac{\varepsilon}{2}<\frac{\varphi(x+nh)-\varphi(x)}{\phi(x+nh)-\phi(x)}<L+\tfrac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

para n = 1,2,3.... .

Como $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 0$, aplicando *ii)* en (15) cuando $n \to \infty$, obtenemos:

$$L - \tfrac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} < L + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto,

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así pues,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = L$$

Supongamos ahora que $L = \infty$. Entonces para cada $M > 0$, existe un entero $N \geq x_0$ tal que para todo $x \geq N$:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\phi(x+h) - \phi(x)} > M$$

o sea,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) > M\left[\phi(x+h) - \phi(x)\right]$$

y

$$\Delta\varphi(x) > M\Delta\phi(x) > 0$$

para $x \geq N > a$.

Luego,

$$\Delta\varphi(x) > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta\,\varphi(x)} = 0^+.$$

Usando el resultado del caso L finito se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta\varphi(x)} = 0^+$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Delta\phi(x)}{\Delta\varphi(x)}} = \infty.$$

El caso $L = -\infty$ se deduce del caso $L = \infty$ tomando $\varphi^{\bullet}(x) = -\varphi(x)$ y considerando $\varphi^{\bullet}(x)$ y $\phi(x)$. Esto termina la demostracióm de nuestro teorema.

Las sucesiones son funciones discretas, por lo tanto podemos aplicar el Teorema 2 a $\varphi(n) = a_n$ y $\phi(n) = b_n$.

A continuación presentamos el siguiente corolario que es una consecuencia del teorema anterior para el caso de sucesiones cuya demostración es totalmente análoga al Teorema 2.

Corolario 3: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones que convergen a cero, y asumamos que para algún número entero positivo h la diferencia $\Delta b_n = b_{n+h} - b_h$ no cambia de signo para $n > n_0$.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+h} - a_n}{b_{n+h} - b_n} = L$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

(L finito o infinito).

Teorema 3: Sean $\varphi(x)$ y $\phi(x)$ funciones definidas en $[a,\infty)$ y acotada en cada subintervalo finito de $[a,\infty)$. Si

$i)$ $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$

$ii)$ Existe un $h>0$ tal que $\Delta\phi(x) = \phi(x+h) - \phi(x)$ no cambia de signo para $x \geq x_0 > a$.

$iii)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\phi(x)} = L$ (finito o infinito)

entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = L.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad supondremos que $\Delta\phi(x) > 0$ para $x > x_0 > a$. Supongamos que L es finito.

Como en el Teorema 2 para ε > 0, existe un $N \geq x_0$ tal que $x \geq N$:

$$\left|\frac{\varphi(x+nh)-\varphi(x)}{\phi(x+nh)-\phi(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

para cada $n = 1,2,3,\ldots$.

La expresión (16) se cumple para $x \in [N, N+h)$. Además, notemos que cada $x \geq N$ se puede escribir como $x = r + jh$ para algún $r \in [N, N+h)$ y un número natural j.

Por lo tanto, para $x \geq N$, tenemos

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)} - L\right| = \left|\frac{\varphi(x+jh)-\varphi(r)}{\phi(x+jh)-\phi(r)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

Mediante procedimientos algebraicos el cociente $\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}$ lo podemos escribir en la siguiente forma:

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(r)+\varphi(r)}{\phi(x)}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(r)+\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}}{\dfrac{\phi(x)}{\phi(x)-\phi(r)}}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}+\dfrac{\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}}{\dfrac{\phi(x)}{\phi(x)-\phi(r)}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}-L=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}+\dfrac{\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}}{\dfrac{\phi(x)}{\phi(x)-\phi(r)}}-L$$

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}-L=\frac{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}+\dfrac{\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}-L\left(1+\dfrac{\phi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}\right)}{\dfrac{\phi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}-L=\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}-L+\left(\frac{\varphi(x)-L\phi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}\right)\right]\left[\frac{\phi(x)-\phi(r)}{\phi(x)}\right]$$

luego se tiene que

$$\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} - L = \left[\frac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)} - L\right]\left[1-\frac{\phi(r)}{\phi(x)}\right] + \left[\frac{\varphi(r)-L\phi(r)}{\phi(x)}\right]$$

por consiguiente

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} - L\right| \le \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)} - L\right| + \left|\frac{\varphi(r)-L\phi(r)}{\phi(x)}\right| \qquad (18)$$

Como $\varphi(x)$ y $\phi(x)$ son acotada para $x \in [N, N+h)$ y $\phi(x)$ tiende a infinito cuando $x \to \infty$, podemos escoger un $N^{*} > N$ tal que:

$$\left|\frac{\varphi(x)-L\phi(r)}{\phi(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (19)$$

$x > N^{*}$

Las expresiones (17) y (19) reducen (18) a:

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por consiguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = L$$

Ahora consideramos el caso cuando L es infinito. Si podemos probar que $\varphi(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$ y $\Delta\varphi(x)>0$ para $x\geq x_0>a$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Delta\phi(x)}{\Delta\varphi(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\phi(x)}}=0^{+}$$

luego, por el Teorema 2 (aplicado a $\varphi(x)$ y $\phi(x)$), obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\Delta\phi(x)}{\Delta\varphi(x)}}=\infty$$

Ahora, dado $M>0$, existe $N>x_0$ tal que para $x\geq N$:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\phi(x+h)-\phi(x)}>M$$

o sea,

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)>M(\phi(x+h)-\phi(x))$$

por consiguiente

$$\Delta\varphi(x)>M\Delta\phi(x)>0$$

Además, para todo n y para todo $x>N$ se tiene

$$\frac{\varphi(x+nh)-\varphi(x)}{\phi(x+nh)-\phi(x)}>M$$

como $x=r+jh$ para algún $r\in[N,N+h)$,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(r)}{\phi(x)-\phi(r)}=\frac{\varphi(r+jh)-\varphi(r)}{\phi(r+jh)-\phi(r)}>M$$

luego,

$$\varphi(x)>M\big(\phi(x)-\phi(r)\big)+\varphi(r)$$

y así $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ puesto que $M\big(\phi(x)-\phi(r)\big)\to\infty$ cuando $x\to\infty$.

Finalmente, reemplazando $\varphi(x)$ por $-\varphi(x)$ se deduce el caso L = $-\infty$.

Una consecuencia inmediata del Teorema anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones, donde $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

Supongamos que existe un número entero h > 0 tal que

$i)$ $\Delta b_n=b_{n+h}-b_n$ no cambia de signo para $n>n_0$

$ii)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+h}-a_n}{b_{n+h}-b_n}=L$ (finito o infinito)

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L\,.$$

Para finalizar este capítulo presentaremos algunos ejemplos en los cuales no se puede aplicar la regla de L'Hôpital, pero se pueden resolver utilizando nuestra regla de L'Hôpital para el caso discreto.

Ejemplo: Sea f una función definida en el intervalo (a,∞) y acotada en en cada subintervalo finito (a,b). de (a,∞) .Entonces,

$i)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$

$ii)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $\qquad (f(x)\geq c>0)$,

si los límites de la derecha existen (ya sean finitos o infinitos).

En efecto, sean

$$\varphi(x)=f(x) \qquad \text{y} \qquad \phi(x)=x$$

entonces,

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=\infty$

b) Para $h=1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta\,\phi(x)&=\phi(x+h)-\phi(x)\\&=\phi(x+1)-\phi(x)\\&=x+1-x=1>0\end{aligned}$$

para $x\geq x_0>a$,

y

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Delta\,\varphi(x)}{\Delta\,\phi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x+1) - f(x) \right] = L$

luego, por el Teorema 3 se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = L$$

o sea,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[f(x+1) - f(x) \right] = L\,.$$

Para obtener el resultado *ii*) tomemos

$$\varphi(x) = \ln f(x) \qquad \text{y} \qquad \phi(x) = x$$

entonces

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$,

b) Para $h = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta\,\phi(x) &= \phi(x+1) - \phi(x) \\ &= x + 1 - x \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

y

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta\phi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\ln f(x+1) - \ln f(x)\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = L$

luego, por el Teorema 3 se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = L$$

o sea,

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}} = L$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

Así pues,

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

con $f(x) \geq c > 0$.

Observación: Si en *ii*) del ejemplo anterior se toma como dominio de $f(x)$ el conjunto de los núeros naturales, se obtiene el siguiente resultado para sucesiones:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

si el límite de la derecha existe (ya sea finito o infinito).

Ejemplo: Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = k \qquad \text{(finito o infinito),}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = k$$

En efecto, sean

$$a_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

y

$$b_n = n$$

luego, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Además,

a) Para $h = 1$ se tiene que

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$$

$$= n + 1 - n$$

$$= 1 > 0$$

para $n \geq 1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = k$.

Por lo tanto, por el Corolario 4 se tiene que

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$

o sea,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = k.$$

Ejemplo: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones que convergen a cero y supongamos que $\{b_n\}$ es monotona. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

si el límite de la derecha existe.

En efecto, tomemos $h = 1$. Como $\{b_n\}$ es monotona,

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$$

no cambia de signo para $n \geq 1$, luego como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

existe.

Por consiguiente, por el Corolario 3 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}.$$

TERCER CAPÍTULO

LA REGLA DE L'HÔPITAL

En este capítulo presentamos una secuencia de teoremas importantes del cálculo diferencial, analizando sus demostraciones y la conexión que existe entre esta secuencia y la regla de L'Hôpital. Además, haremos énfasis en los conocimientos previos que se debe poseer para demostrar cada uno de estos teoremas.

3.1 COMPRENSIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LA DEMOSTRACIÓN.

Uno de los objetivos de nuestro sistema educativo consiste en desarrollar las habilidades y capacidades indispensables para que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos. La aplicación de los conocimientos es tan importante como su adquisición, pues si no se logra que los estudiantes aprendan a aplicar sus conocimientos, estos "***serán conocimientos muertos y el tiempo utilizados para explicarlos y adquirirlos será tiempo perdido.***" [Ronh, (1984)] La aplicación de los conocimientos adquiridos se hace evidente en el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo, en el cual es necesario la comprensión de conceptos elementales para luego comprender los más complejos. Para Dreyfus, ***"cada concepto avanzado se basa en otros conceptos elementales y no puede ser atendido sin un sólido y a veces muy específico entendimiento de éstos."*** [Dreyfus, (1990)]

El concepto de función es un buen ejemplo de esta interrelación entre conceptos, pues hemos tenido la oportunidad de conocer su génesis y su desarrollo histórico hasta alcanzar el grado de complejidad que hoy tiene, el cual es operado bajo otros procesos como la diferenciación y la integración.

En el marco del cálculo diferencial, la comprensión de algunos teoremas y de sus demostraciones es de gran importancia para la comprensión de las demostraciones de otros teoremas.

La regla de L'Hôpital es un caso particular de esta cadena de teoremas, su demostración requiere la aplicación de la fórmula Cauchy que a su vez, se demuestra basándose en un caso especial del teorema de Rolle que es una consecuencia del teorema de Weierstrass y así sucesivamente.

Las demostraciones de esta cadena de teoremas del cálculo diferencial constituye uno de los contenidos programáticos correspondiente al primer año de la licenciatura en Matemática, específicamente durante el primer semestre, cuando los estudiantes se encuentran en un período de adaptación e iniciándose en las demostraciones matemáticas.

Como todos conocemos, esta realidad es totalmente diferente al tipo de instrucción matemática que han recibido los estudiantes hasta ese momento, lo que constituye un obstáculo para la comprensión del funcionamiento de dichas demostraciones. En este sentido, Radford sostiene que "***comprender el funcionamiento de la demostración constituye una etapa profundamente difícil para el estudiante, en particular porque éste debe romper con esquemas de pensamiento que están muy arraigados en él.***" [Radford, (1993)] Si el estudiante no logra comprender el funcionamiento de la demostración menos logrará comprender la interrelación entre los teoremas, lo cual se logrará con el transcurso del tiempo y una buena disposición por parte de él.

Demostrar la regla de L'Hôpital aplicando la fórmula de Cauchy es la única alternativa hasta el momento, pues ésta es la herramienta con la que contamos.

En la siguiente sección presentamos las herramientas del cálculo diferencial para la demostración de la regla de L'Hôpital.

3.2 HERRAMIENTAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL PARA LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL.

Los teoremas que a continuación presentamos forman parte de la secuencia de teoremas del cual se hace referencia en la sección anterior y constituyen los requisitos para la demostración de la regla de L'Hôpital.

3.2.1 Teorema de Weierstrass: Si una función $f:[a,b]\to$ **R** es continua en $[a,b]$, entonces $f(x)$ es acotada en $[a,b]$; o sea, existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$-k \leq f(x) \leq k$$

para todo $x\in [a,b]$.

La demostración de este teorema es una consecuencia del axioma de completitud de los números reales en la versión de intervalos encajados de Cantor. Este axioma se enuncia como sigue:

Axioma de Completitud: Todo conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiormente tiene un supremo en **R**.

Una versión equivalente de este axioma fue presentado por Cantor, la cual dice lo siguiente:

El Principio de Intervalos Encajados de Cantor: Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados no vacíos y encajados,tales que

$$\lim_{n\to\infty} diam(I_n) = 0 .$$

entonces, existe un único número real tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$$

Ahora veamos los aspectos de la demostración del teorema de Weierstrass.

La idea de la demostración del teorema de Weierstrass consiste en suponer que la función no es acotada en $[a,b]$.

Si $f\ (x)$ no es acotada $[a,b]$ entonces no es acotada en uno de los subintervalos:

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

Denotemos por $I_1 = [a_1, b_1]$ el subintervalo donde $f(x)$ no es acotada. Si $f(x)$ no es acotada en ambos subintervalos, elegimos el de la derecha. Tenemos que

$$diam(I_1) = \frac{b-a}{2}$$

De igual manera, $f(x)$ no es acotada en uno de los subintervalos

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right].$$

Denotemos por $I_2 = [a_2, b_2]$ el subintervalo donde $f(x)$ no es acotada. Tenemos que:

$$diam(I_2) = \frac{b-a}{2^2}$$

Procediendo inductivamente, obtenemos una sucesión de intervalos encajados

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$$

tal que $f(x)$ no es acotada en cada uno de ellos y

$$\lim_{n\to\infty} diam\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0.$$

luego, por el axioma de completitud de Cantor

Como $f(x)$ es continua en c, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| \leq 1$$

luego,

$$|f(x)| \leq 1 + |f(c)|$$

para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Como $\lim_{n \to \infty} diam(I_n) = 0$, existe un n_0 tal que

$$\left[a_{n_0}, b_{n_0}\right] \subset (c - \delta, c + \delta)$$

Así,

$$|f(x)| \leq 1 + |f(c)|$$

para todo $x \in \left[a_{n_0}, b_{n_0}\right]$.

Luego $f(x)$ es acotada en $\left[a_{n_0}, b_{n_0}\right]$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x)$ es acotada en $[a,b]$.

Una consecuencia inmediata del teorema de Weierstrass es el siguiente resultado.

3.2.2 Teorema (Weierstrass): Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua, entonces existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$.

3.2.3 Teorema de Rolle: Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, por el teorema de Weierstrass existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$.

Se presentan dos posibilidades con respecto a los puntos x_1 y x_2.

a. Ninguno de los puntos pertenecen al intervalo abierto (a,b).

b. Al menos uno de los puntos pertenecen al intervalo abierto (a,b).

En el primer caso x_1, x_2 son extremos del intervalo, por lo tanto

$$f(x_1) = f(x_2) = \alpha$$

luego, para cualquier $x \in [a,b]$ se tiene

$$f(x) = \alpha$$

o sea, $f(x)$ es una función constante en el intervalo $[a,b]$.

Por lo tanto,

$$f'(c) = 0$$

para todo $c \in [a,b]$.

En el segundo caso, supondremos que $x_2 \in (a,b)$. Como $f(x)$ es diferenciable en $x_2 \in (a,b)$, existe para todo $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} - f'(x_2)\right| < \varepsilon$$

siempre que $|x - x_2| < \delta$.

Luego,

$$f'(x_2) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} < f'(x_2) + \varepsilon \tag{20}$$

siempre que $-\delta < x - x_2 < \delta$.

Supongamos que $0 < x - x_2 < \delta$. Como $f(x) \leq f(x_2)$, se tiene que

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \leq 0 \tag{21}$$

y si $-\delta < x - x_2 < 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq 0 \tag{22}$$

De (21) y (22) se concluye que

$$f'(x_2) - \varepsilon < 0 < f'(x_2) + \varepsilon$$

así pues,

$$-\varepsilon < -f'(x_2) < \varepsilon$$

por consiguiente,

$$|f'(x_2)| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Por lo tanto,

$$f'(x_2) = 0.$$

3.2.4 Teorema del Valor Medio de Cauchy:

Si una función f: $[a,b] \to \mathbf{R}$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe un número c en $(a;b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

Demostración: La demostración de este teorema consiste en la construcción de una función $F(x)$, distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$. [Fig. 13]

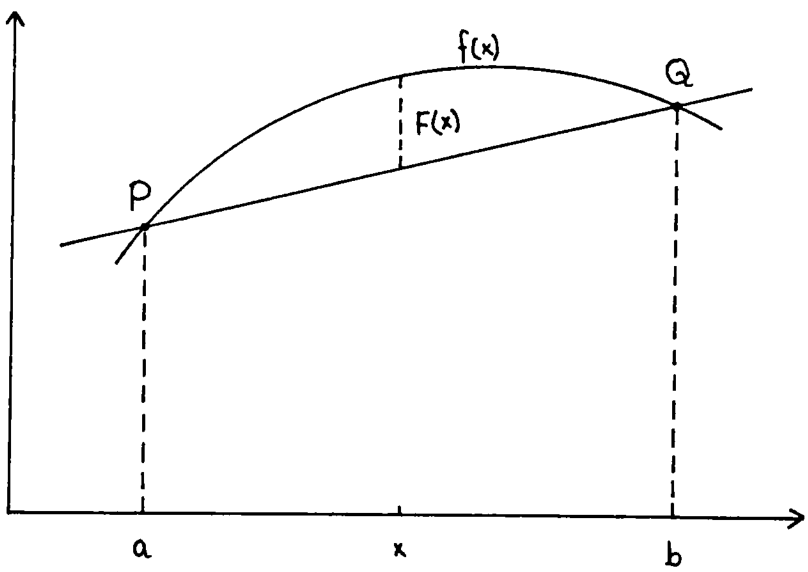


Fig. 13

Considerando el punto P y la pendiente de la recta secante, obtenemos la ecuación de dicha recta:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$g(x) = y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La longitud del segmento contenido entre la curva de la función $f(x)$ y la recta secante está definida por la función F: $[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

luego,

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Evaluando la función $F(x)$ en los extremos del intervalo $[a,b]$ se obtiene que $F(a) = \mathrm{F}(b) = 0$.

Como se puede observar, la función F satisface las hipótesis del teorema de Rolle, por lo que se asegura la existencia de un número $c \in (a,b)$ tal que

$$F'(c) = 0$$

lo que implica que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

luego,

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

3.2.5 La Fórmula de Cauchy: Si f y g son continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b) y si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces existe un número w en (a,b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$

Demostración: Notemos primero que $g(b) - g(a) \neq 0$, puesto que de otra manera $g(b) = g(a)$ y, por el teorema de Rolle, existe un número c en (a,b) tal que $g'(c) = 0$, lo que contradice nuestra hipótesis acerca de g'.

Definamos una nueva función h:$[a,b] \to \mathbf{R}$ como sigue:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

Es claro que h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y tal que $h(a) = h(b)$. Luego, por el teorema de Rolle, existe un número w en (a,b) tal que $h'(w) = 0$; es decir,

$$[f(b) - f(a)]g'(w) - [g(b) - g(a)]f'(w) = 0$$

por consiguiente,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(w)}{g'(w)} \; .$$

Observemos que la fórmula de Cauchy es una generalización del Teorema del Valor medio de Cauchy, puesto que si tomamos $g(x) = x$, obtenemos que

$$f(b) - f(a) = f'(w)(b - a).$$

Finalmente, se demuestra La regla de L'Hopital haciendo uso de la fórmula de Cauchy. Veamos esta demostración.

3.3 LA REGLA DE L'HÔPITAL: Caso $\frac{0}{0}$, a y L son finitos.

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ con derivadas continuas en (a,b) y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b)$.

Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

con $a < c < b$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Como las funciones f y g son continuas en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x) \neq 0$, para $x \in (a,b)$, entonces por la fórmula de Cauchy existe un número w entre x y c tal que:

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$

por el hecho que $f(c) = g(c) = 0$, obtenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(w)}{g'(w)}$$

como w está siempre entre x y c, se sigue que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = \lim_{w\to c} \frac{f'(w)}{g'(w)} = L.$$

Observación: Un argumento similar al presentado en el teorema anterior se puede usar si $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Resumiendo lo anteriormente expuesto, obtenemos la siguiente cadena de teoremas:

Teorema de Weierstrass $\Rightarrow$ Teorema de Rolle $\Rightarrow$Teorema de Cauchy

$\Rightarrow$ Fórmula de Cauchy $\Rightarrow$ Regla de L'Hôpital.

3.4 PROPUESTA METODOLÓGICA.

Nuestro objetivo no es romper con este orden lógico de demostraciones y menos que se omita en el curso de cálculo diferencial. Lo que sugerimos es que los educadores consideren la importancia de la comunicación efectiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La cual es ***"entendida, según Imaz, como la emisión y recepción de mensajes que deben producir cambios conductuales observables en los receptores y que, en caso de que estos***

cambios no se produzcan o no sucedan en la forma deseada, deben producir cambios en la conducta de los emisores, continuando el proceso hasta que se consigan los objetivos deseados originalmente u otros alternos." [Imaz, (1987)]

Siendo la regla de L'Hôpital una herramienta fundamental en el Cálculo de límites de funciones racionales donde tanto el numerador como el denominador se convierten en cero cuando la variable toma el valor prohibido, no podemos permitir que su enseñanza se limite al aspecto algorítmico.

Actualmente la demostración de la regla de L'Hôpital es presentada en los textos como una consecuencia de la fórmula de Cauchy. Se presenta en forma sencilla y su brevedad puede conducir a los estudiantes a la memorización. En realidad, no es tan sencillo como parece, pues se requiere la comprensión de la demostración de la cadena de teoremas que tratamos en la sección 3.2.

Para propiciar los cambios conductuales de los receptores y para asegurarnos que los estudiantes logren comprender el funcionamiento de la demostración de la regla de L'Hôpital, proponemos en la siguiente sección una alternativa para la demostración de dicha regla, en el marco del cálculo integral.

Esta nueva alternativa no requiere de una cadena de teoremas para su demostración como normalmente se demuestra. En su lugar, necesitamos que las funciones tengan derivadas continuas, la aplicación de la definición de límite y ciertas propiedades de orden de la integral definida.

Además, para esta época los estudiantes cuentan con una madurez intelectual mayor que al inicio de sus estudios matemáticos a nivel superior y por lo tanto, han adoptado otra actitud hacia la demostración matemática.

3.5 LA REGLA DE L'HÔPITAL: APLICANDO PROPIEDADES DE ORDEN DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Presentamos en esta sección la demostración de la regla de L'Hôpital para las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando propiedades de orden de la integral definida.

3.5.1 REGLA DE L'HÔPITAL: Caso 0/0, *a* es infinito y L finito.

Sean f y g funciones continuas en **R** con derivadas continuas en **R** y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbf{R}$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$ y si $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Como $g'(x)$ es continua y $g'(x) \neq 0$, por el teorema del valor intermedio se tiene que $g'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ ó $g'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Luego, g es creciente o g es decreciente en $\mathbf{R}$. Por otro lado, debido a que $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ se tiene una y sólo una de las siguientes condiciones:

i) g es creciente $(g'(x) > 0)$ y $g(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$

ii) g es decreciente $(g'(x) < 0)$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $g'(x) > 0$ y $g(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos $M > 0$ tal que:

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

para $t > M$.

Como $g'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene;

$$|f'(t) - Lg'(t)| < \varepsilon\, g'(t)$$

luego,

$$-\varepsilon\, g'(t) < f'(t) - Lg'(t) < \varepsilon\, g'(t)$$

para $t > M$.

Escojiendo x, y suficientemente grandes ($x > M$, $y > M$), con $x > y$

se tiene:

$$\int_y^x -\varepsilon\, g'(t)dt < \int_y^x [f'(t) - Lg'(t)]dt < \int_y^x \varepsilon\, g'(t)dt$$

luego,

$$-\varepsilon\, [g(x) - g(y)] < f(x) - f(y) - L\,[g(x) - g(y)] < \varepsilon[g(x) - g(y)]$$

Fijando y y haciendo $x \to \infty$ ($f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$) se tiene que

$$-\varepsilon\,[-g(y)] < -f(y) - L\,[-g(y)] < \varepsilon\,[-g(y)]$$

Dividiendo por $-g(y) > 0$ obtenemos;

$$-\varepsilon < -\frac{f(y)}{g(y)} + L < \varepsilon$$

luego,

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{y \to \infty} \frac{f(y)}{g(y)} = L$$

3.5.2 REGLA DE L'HÔPITAL: Caso $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to \infty$, L es finito.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones cuyas primeras derivadas son continuas.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración: Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, podemos asumir que $g(x)$ es una función positiva. Más aún, como $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, $g'(x)$ debe ser una función positiva.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $M > 0$ tal que:

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

para todo $t > M$.

Como $g'(t) > 0$ se tiene

$$|f'(t) - Lg'(t)| < \varepsilon\, g'(t)$$

luego,

$$-\varepsilon g'(t) < f'(t) - L\, g'(t) < \varepsilon g'(t)$$

para todo $t > M$.

Integrando la desigualdad de la derecha en el intervalo (y,x), x e y suficientemente grande, se obtiene:

$$\left|\int_y^x [f'(t) - Lg'(t)]dt\right| \leq \int_y^x |f'(t) - Lg'(t)|dt \leq \int_y^x |\varepsilon\, g'(t)|dt$$

luego,

$$|\, f(x) - f(y) - L[g(x) - g(y)]\,| < \varepsilon\,[g(x) - g(y)]$$

Dividiendo por $g(x)$ se obtiene:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} - L\left[\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}\right]\right| < \varepsilon\left[\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}\right] < \varepsilon$$

por lo tanto

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon + \frac{|f(y)|}{g(x)} + |L|\frac{g(y)}{g(x)}$$

Como $g(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $\dfrac{|f(y)|}{g(x)}$ y $\dfrac{|L|g(y)}{g(x)}$ eventualmente serán menores de ε. Aplicando este resultado se deduce que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

luego,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \, .$$

CONCLUSIONES

Después de haber culminado este trabajo investigativo hemos llegado a las siguientes conclusiones:

L'Hôpital, en la introducción de su obra Analyse, reconoce haber incluido las lecciones que recibió de Bernoulli cuando lo contrató para que lo instruyera en la nueva disciplina; sin embargo, fue acusado por éste de plagio. Después de muchos años, se pudo demostrar que las reclamaciones de Bernoulli eran fundadas, por la coincidencia que se verificaron entre sus manuscritos y la obra de L'Hôpital.

La carta enviada por L'Hôpital a Bernoulli en julio de 1693 concerniente a la solución del primer problema de forma indeterminada 0/0 es una evidencia adicional que demuestra que L'Hôpital aprendió la solución correcta de Bernoulli.

Si bien es cierto que la relación intelectual entre estos dos matemáticos, L'Hôpital y Bernoulli fue poco común, no podemos negar a L'Hôpital el mérito de ser el autor del primer texto en la historia del

Cálculo Diferencial. Aunque su contenido no contaba con la originalidad de su autor, este se utilizó como libro de texto por más de medio siglo y es considerado una buena introducción al cálculo.

La regla de L'Hôpital es un arma poderosa para determinar los valores de forma indeterminada. El mal uso de esta regla con frecuencia puede llevarnos a resultados errados, por tal motivo debemos ser cuidadosos en su aplicación.

Los argumentos del cálculo diferencial utilizados para demostrar la regla de L'Hôpital son más rigurosos que los utilizados en el marco del cálculo integral, los cuales son considerados, desde nuestro punto de vista más sencillos. Esto permitirá a los estudiantes una mayor comprensión de la demostración de la regla de L'Hôpital. De esta manera, proponemos este último enfoque como una alternativa metodológica para la enseñanza de la regla de L'Hopital.

BIBLIOGRAFÍA

1. AGARD, E. 1992. Sobre la Demostración Matemática en la Historia. Memoria del Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa. Panamá, septiembre 23-25 pp. 7-11

2. AGARD, E. 1993. Influencias de las Reuniones Centroamericanas y del Caribe en el Desarrollo de la Matemática Educativa. Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores. Panamá, Agosto 3-6- pp 377-390

3. APOSTOL, T. M. 1965. Matemática Básica para Ingenieros. Introducción con vectores y Geometría Analítica. Vol. I. Editorial Reverté S.A. México.

4. BAXLEY, J. y HAYASHI, E. 1992. Indeterminate Forms of Exponential Type. A Century of Calculus II, *The Mathematical Asociation of America,* pp. 190-191.

5. BOYER, C. 1994. Historia de la Matemática. Versión española de Mariano Martínez Peréz. Alianza Universitaria Texto.

6. BELL, E.T. 1949. Historia de la Matemática. Traducción de R. Ortíz. Fondo de Cultura Económica. México.

7. BOAS, R. P. 1986. Counterexamples to the L'Hopital's Rule, *American Mathematics Monthley,* vol. 93, number 8, pp. 644-645.

8. BOAS, R. P. 1989. Indeterminate Forms Revisited. A Century of Calculus II, *The Mathematical Asociation of America,* pp. 196-201.

9. BOAS, R. P. 1992. L'Hospital's Rule without Mean Value Theorems. A Century of Calculus, *The Mathematical Asociation of America,* pp. 187-189.

10. BUMCROT, R. J. 1984. Some Subtieties in L'Hopital's Rule, *Colley Mathamatic J.*, vol. 15, number 1, january , pp. 51-52.

11. CAMBRAY, R. y CANTORAL R. 1990. Lecciones de Cálculo Antiguo. Volumen I. Primera Edición. México

12. CANTORAL, R. 1996. Cálculo. Un Acercamiento Didáctico y Epistemológico. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

13. CANTORAL, R. 1993. Hacia una Didáctica del Cálculo basada en la Cognición. Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Panamá, agosto 3-6, pp 397-410.

14. CHENG H, X. 1988. A Discrete L'Hopital's Rule. *Colley Mathematic J.*, vol. 19, number 4, september, pp. 321-329.

15. COLLETTE, J. P. 1986. Historia de la Matemática. Versión de Mariano Martínez Peréz. Alianza Universitaria Texto.

16. DE L'HÔPITAL, G. F. A. 1715. Analyse des Infiniment petist pour L'intelligence des lignes courbes. Segunda Edición. París, Francia.

17. DREYFUS, T. 1990. Avenced Matematical Thinking. *Mathematics and Cognition,* pág 113-134.

18. EDWARDS Jr, C. H. 1979. The Historical Development of the Calculus. Springer-verlag. New York Heidelberg Berlin. Estados Unidos.

19. FARFÁN, R. M. 1990. Elementos Metodológicos para la Reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior. Memorias del Primer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Publicado en cuadernos de Investigación del PNFAPM. N° 13.

20. FLORES, A. 1989. L'Hôpital y lo Rescatable de su Obra para la Enseñanza del Cálculo. Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

21. GRATTAN, G. 1990. Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Versión española de Mariano Martínez Peréz. Alianza Editorial.

22. HARTIG, D. 1991. L'Hôpital's Rule Via Integration, *American Mathematics Monthley*, vol. 98, number 2, february, pp. 156-157.

23. HERNÁNDEZ, E. 1993. El Axioma de Completitud. Monografía. Universidad de Panamá.

24. HERNÁNDEZ, J. 1992. El Teorema de Weierstrass y sus Implicaciones en la Enseñanza del Cálculo. Memorias del Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa. Panamá, sep. 23-25, pp. 78-82.

25. IMAZ, C. 1987. ¿Qué es Matemática Educativa?. Memorias de la primera Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. México, abril 9-11, pp. 267-272.

26. KING, J. P. L'Hôpital's Rule the Continuity of the Derivative. A Century of Calculus II, *The Mathematical Association of America*, pp. 202.

27. KLINE, Morris. 1972. El Pensamiento Matemático de la Antiguedad a nuestros días I. Editorial Alianza, S.A. Madrid, España.

28. LOWELL C, J. 1990. Guillaume L'Hôpital, Marquis de Sair Mesme, *The Mathematics of Great Amateurs*, second edition, Oxf University Press, pp.147-170

29. OSBORN, R. 1952. A Note on Indeterminate Forms, *Am Mathematics Monthley*, vol. 59, pp. 549-550.

30. PAIGE, L. J. 1954. A Note on Indeterminate Formas, *American Mathematics Monthey*, vol. 61, pp. 189-190.

31. RADFORD, L. 1993. Reflexiones sobre la Enseñanza de la Demostración: Del Objeto Matemático al Objeto Didáctico. Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Panamá, agosto 3-6. pp.426-432.

32. RONH, K. 1984. Consideraciones acerca de la Enseñanza de la Matemática. Problemática de la Enseñanza de la Matemática. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática. N°2. La Habana, Cuba.

33. SHERMAN K. S y ANTHONY B. 1995. Cálculo y Geometría Analítica I, Quinta Edición. McGraw- Hill. Colombia

34. STRUIK, D. J. 1986. L'Hôpital. The Analysis of the Infinitesimally Small. *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800, pp. 312-316.

35. STRUIK, D. J. 1989. The origen of L'Hôpital's Rule, *National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 435-439.

36. THOMÁS, G. 1976. Cálculo Infinitésimal y geometría Analítica. Sexta Edición. Aguilar S.A.de Ediciones, España.