



**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA**

GRAFOS Y GRUPOS

María Isabel Ashaw Muñoz

Tesis presentada como uno
de los requisitos para optar
al grado de Maestro en
Ciencias con especialización
en Investigación de
Operaciones.

**Panamá, República de Panamá
1996**

T.1



UNIVERSIDAD DE PANAMA

ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

17 OCT 1996

Aprobado por:

ans. del auto

Rogelio Rosas

DR. ROGELIO ROSAS
Director de Tesis

Jaime Gutiérrez

DR. JAIME GUTIERREZ
Miembro del Jurado

Pedro Marrone

M.Sc. PEDRO MARRONE
Miembro del Jurado

Fecha:

27 de Septiembre, 1996

88678

DEDICATORIA

A ti Señor Todopoderoso que nunca te has apartado de mí.

A mi madre Amelia, quién siempre espera confiada el logro de mis metas.

A mis hijos Ariel Alberto y Jorge Isaac, quienes llenan mi vida de alegría y son mi inspiración.

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor Rogelio Rosas, quien en un instante crítico en el desarrollo de este trabajo me brindó el apoyo humano y la colaboración académica que hicieron posible su culminación.

Al Profesor Pedro Marrone, quien desinteresadamente me proporcionó los medios para la consecución del material bibliográfico básico para la investigación, además de haber hecho contacto con investigadores de otras universidades y localizado artículos que enriquecieron la misma.

Al Profesor Jaime Gutiérrez por haber revisado mi proyecto inicial de tesis y haber hecho valiosas sugerencias.

A la Licenciada Greta Salazar por su atinada colaboración en lo que se refiere al trabajo mecanográfico.

INDICE

CONTENIDO	Página
RESUMEN	1
INTRODUCCION.	2
CAPITULO 1. NOCIONES BASICAS SOBRE LA TEORIA DE GRAFOS.	6
1.1. Definición de Grafo.	7
1.2. Grafos Especiales.	10
1.3. Operaciones Sobre Grafos.	17
CAPITULO 2. EL GRUPO ASOCIADO A UN GRAFO.	23
2.1. Definiciones.	24
2.2. Operaciones Sobre Grupos de Permutaciones.	28
2.3. Grupos de Automorfismos para Grafos Especiales.	31
2.4. Otros Grupos Asociados a un Grafo.	37
CAPITULO 3. EL GRAFO ASOCIADO A UN GRUPO.	45
3.1. Grafo de Color de Cayley.	46
3.2. Automorfismos.	51
3.3. Propiedades.	55
3.4. Productos.	64
3.5. Grafos Cayley.	67
CONCLUSIONES	69
RECOMENDACIONES	71
BIBLIOGRAFIA	72

RESUMEN

En el presente trabajo hemos estudiado los resultados de Konig Y Frucht quienes respondieron constructivamente a la pregunta: ¿Cuándo un grupo abstracto dado es isomorfo al grupo de automorfismos de un grafo?. La prueba de Frucht está basada en el teorema de Cayley sobre el grafo de color de un grupo.

En nuestra investigación hemos encontrado una interesante relación entre la teoría de grupos, la teoría de grafos y la topología, tal como se describe a continuación: a cada grafo se hace corresponder el grupo de automorfismos del grafo que preservan adyacencia, y reciprocamente dada una presentación de un grupo es posible construir un grafo que lo represente: El grafo de color de Cayley. Por otra parte, dada una superficie es posible construir el grupo fundamental correspondiente y el grafo de número cromático máximo asociado a la superficie. Sin embargo, en nuestro trabajo nos hemos ocupado en analizar y proveer las demostraciones a los teoremas y proposiciones encontrados en la literatura correspondiente a grafos y grupos, los cuales en la mayoría de los casos aparecen sin demostración.

Summary

Konig asked: When is a given abstract group isomorphic with the group of some graph?. Frucht answered this question constructively based on Cayley's theorem about the color graph of a group.

We have studied these results in details providing all the proofs which are left to the readers in the papers and monographs consulted. In our research we have found that there exists a beautiful relationship between group theory and graph theory as described in Konig's and Frucht's works. Also we found out about the fundamental group and the graph of maximum chromatic number associated with a given surface. Nevertheless, we have paid special attention only to the earlier problem posed by Konig about groups and graphs.

INTRODUCCION

Al estudiar los tópicos fundamentales de la teoría de grafos nos preguntábamos si es posible definir una estructura de grupo sobre la colección de todos los grafos finitos de cierto orden. A pesar de no haber encontrado una respuesta afirmativa a la interrogante anterior, nos planteamos el siguiente problema el cual nos dispusimos a estudiar: Determinar o construir el grupo que represente a un grafo dado y en el otro sentido, dado el grupo y su conjunto de generadores buscar el grafo asociado, el cual desde cierto punto de vista es una gráfica del grupo.

Este trabajo ha tenido como fuentes bibliográficas principales los libros: Grafos, Grupos y Superficies de Arthur White y Teoría de Grafos de F. Harary, los cuales tienen el defecto de que la mayoría de los teoremas y proposiciones aparecen sin demostración. Así, este reporte contribuye a enriquecer la bibliografía existente al

presentar de manera completa y autocontenida la interacción entre grafos y grupos. Por lo tanto, este trabajo sirve como material de apoyo a estudiantes de la Licenciatura en Matemática, profesores e investigadores interesados en los fundamentos matemáticos de la teoría de grafos.

El informe de la investigación está organizado en tres capítulos. Cada capítulo es antecedido por una breve introducción, e ilustrado completamente (a colores) para esclarecer las definiciones y teoremas, y eventualmente se realizan algunas observaciones y comentarios referentes a las proposiciones pertinentes al capítulo.

El primer capítulo presenta un compendio de definiciones, conceptos y teoremas básicos de la teoría de grafos tales como: grafo, grafos especiales, isomorfismo entre grafos, operaciones entre grafos, etc., todos importantes para relacionar las propiedades de los grafos

con las propiedades de sus grupos asociados y viceversa.

En el capítulo dos se determina la interacción entre las teorías de grafos y grupos. Aquí, primeramente presentamos algunos conceptos básicos sobre grupos de permutaciones, y definimos tres operaciones binarias entre ellos. Los resultados de Teoría de Grupos que se utilizan en este trabajo son clásicos y los mismos pueden encontrarse en cualquiera de las obras de "Algebra Moderna" citadas en la Bibliografía, como por ejemplo en las de Kurosh y L. Radice, por esto en el texto omitimos referencias directas. Continuamos con la demostración de teoremas que indican algunas conexiones entre las operaciones con grafos y las operaciones entre grupos de permutaciones. Posteriormente, determinamos el grupo asociado a un grafo dado, el grupo de automorfismos del grafo, el cual induce a su vez el grupo de automorfismos inducidos del grafo, el cual forma parte del

grupo de automorfismos por aristas del mismo grafo.

La interacción entre la teoría de grafos y la teoría de grupos vía grupo-grafo se presenta en el tercer capítulo, en el cual se define para cada presentación de un grupo el grafo de color de Cayley, que no es más que la gráfica del grupo dado. Además, estudiamos el carácter reflexivo de los grupos. Esto es; dada una presentación de un grupo Γ , el grupo de automorfismos del grafo de color de Cayley asociado es isomorfo a Γ .

La correspondencia presentada en la figura 0.1 ilustra la conjunción entre la teoría de grafos y la teoría de grupos descrita en esta introducción, es precisamente esta conjunción la que desarrollamos en este trabajo.

CAPITULO 1

NOCIONES BASICAS SOBRE LA TEORIA DE GRAFOS

En este capítulo presentamos la terminología básica de la teoría de grafos necesaria para el desarrollo de nuestro estudio. Además, definimos algunas operaciones entre grafos, las cuales nos sirven para construir grafos más complejos. Cada una de las definiciones, conceptos y operaciones son ilustrados a través de ejemplos sencillos, los cuales son utilizados frecuentemente en nuestro estudio.

1.1. DEFINICION DE GRAFO.

Definición 1.1: Un Pseudografo es una terna $(G, V(G), E(G))$, en la cual G es un conjunto no vacío, $V(G)$ es un subconjunto no vacío de G cuyos elementos llamamos vértices, y $E(G)$ es una familia de pares no ordenados de vértices de $V(G)$. A los miembros de $E(G)$ los denominamos aristas. Si a y b son los vértices de la arista, esta se denota por $[a, b]$.

Definición 1.2: Un lazo es una arista de la forma $[v, v]$, con v en $V(G)$.

Definición 1.3: Una arista es múltiple si aparece más de una vez en $E(G)$.

Definición 1.4: Un grafo es un pseudografo $(G, V(G), E(G))$ que no contiene lazos ni aristas múltiples.

Por simplicidad de escritura, en lo que sigue nos referiremos solamente al grafo G .

Definición 1.5: Sea G un grafo. Dos vértices $u, v \in V(G)$ son adyacentes si $x = [u, v] \in E(G)$. En este caso, los vértices u y v son incidentes a la arista x . Las aristas $[u, v]$ y $[u, w]$ son adyacentes si $u, v, w \in V(G)$ y $[u, w], [u, v] \in E(G)$, $v \neq w$. Por simplicidad, en lo que sigue escribiremos simplemente uv para referirnos a la arista $[u, v]$.

Definición 1.6: Sea G un grafo y $v \in V(G)$. El grado del vértice v , $d(v)$, es el cardinal del conjunto de vértices que son adyacentes con v , y lo denotaremos de la manera siguiente:
$$d(v) = |\{u \in V(G) / uv \in E(G)\}|.$$

Definición 1.7: Un grafo etiquetado es un grafo G en el que cada uno de sus vértices tiene un "nombre".

Definición 1.8: El orden p y el tamaño q de un grafo G son los cardinales de $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente.

Ejemplo 1.9: Definamos a G por:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$$

Entonces el grafo G se puede representar por la figura 1.1.a ó 1.1.b.

En este caso $d(v_i) = 3$ para todo v_i en $V(G)$ y $p = 4$, $q = 6$. El grafo G es un grafo etiquetado.

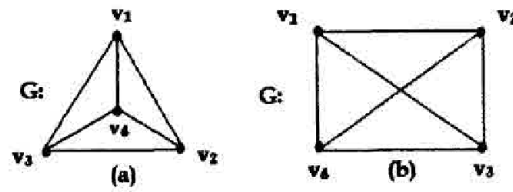


figura 1.1

Teorema 1.10: En todo grafo G , $\sum_{i=1}^p d(v_i) = 2q$.

Demostración: Sea G un grafo. Al sumar los grados cada arista es contada dos veces, por lo tanto la suma de todos los grados es igual a $2q$. ■

Corolario 1.11: En todo grafo G , el número de vértices de grado impar es par.

Demostración: Sea G un grafo y $V_1(G) := \{v \text{ en } V(G) / d(v) \text{ es impar}\}$, y análogamente

$V_2(G) = \{v \in V(G) / d(v) \text{ es par}\}$. Claramente, $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$. Por el teorema 1.10, resulta que

$$2q = \sum_{i=1}^p d(v) = \sum_{v \in V_1(G)} d(v) + \sum_{v \in V_2(G)} d(v)$$

de donde $\sum_{v \in V_1(G)} d(v) = 2q - \sum_{v \in V_2(G)} d(v)$.

Ahora bien, el primer miembro de esta igualdad es una suma de números impares, y a la vez es un número par por ser diferencia de dos números pares. Esto sólo puede suceder si el número de sumandos es par. Por lo tanto, $|V_1(G)|$ es par. ■

1.2. GRAFOS ESPECIALES.

Definición 1.12: Un multigrafo es un pseudografo que no contiene lazos.

Definición 1.13: Un grafo dirigido o digrafo es una terna $(G, V(G), E(G))$ en la cual $V(G)$ es un subconjunto no vacío de G , y $E(G)$ es un conjunto de pares ordenados de vértices distintos de $V(G)$. El par ordenado (a, b) recibe el nombre de aristas dirigidas. El grafo base

de un grafo dirigido G es aquel que se obtiene eliminando la dirección de las aristas.

Nota 1.14: Si el conjunto de vértices del grafo es infinito el grafo es infinito.

Ejemplo 1.15: En la figura 1.2 se ilustran las definiciones anteriores.

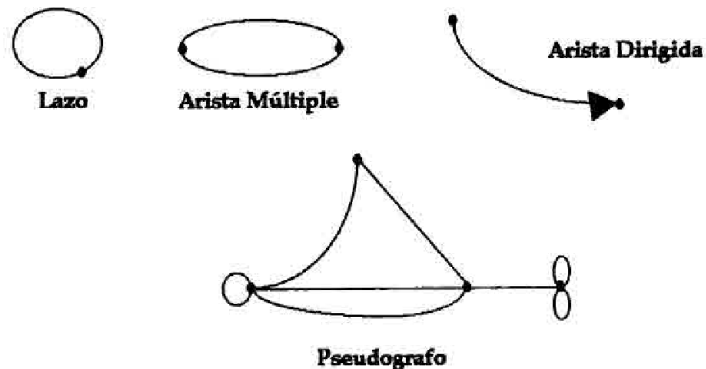


figura 1.2

Definición 1.16: Un subgrafo H de un grafo G es un grafo en la cual $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(H) = V(G)$, el subgrafo H es un subgrafo cobertor de G .

Definición 1.17: Sea G un grafo y $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$. El subgrafo generado $\langle S \rangle$ es el subgrafo maximal de G con el conjunto de vértices igual a S (es decir, $E(\langle S \rangle) = \{uv \in E(G) / u, v \in S\}$). El grafo $G - v$, $v \in V(G)$, es el subgrafo $\langle V(G) - v \rangle$, es decir, el grafo original omitiendo el vértice v y todas las aristas adyacentes a él. El grafo $G - x$, $x \in E(G)$ es el grafo original omitiendo la arista x .

Ejemplo 1.18: El grafo de la figura 1.3.b es el subgrafo generado por $S = \{v_1, v_3, v_4\}$ ó $\langle G - v_2 \rangle$ y el subgrafo de la figura 1.3.c $G - x$ es un subgrafo cobertor de G (figura 1.3.a).

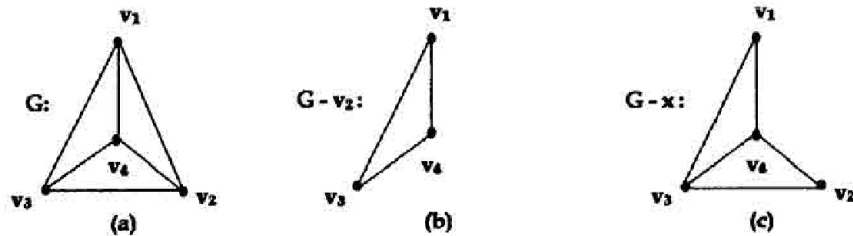


figura 1.3

Definición 1.19: Una trayectoria de un grafo G es una secuencia alternada de vértices y aristas $v_1, x_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x_{n-1}, v_n$, que comienza y

términa con vértices. Cada arista incide en el vértice precedente y en el siguiente; la longitud de la trayectoria es n . Si $v_0 = v_n$, la trayectoria es cerrada; en caso contrario, es abierta.

Si consideramos la trayectoria $v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$ del grafo G es claro que si $V(H) = \{v_0, \dots, v_n\}$ y $E(H) = \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces H es un subgrafo de G , esto nos permite identificar la trayectoria anterior como un subgrafo de G .

Definición 1.20: Una trayectoria de un grafo es simple si todas las aristas son distintas. Si además, todos los vértices son distintos es un camino.

Definición 1.21: Un ciclo es una trayectoria cerrada de un grafo G con un mínimo de 3 vértices todos ellos distintos.

Definición 1.22: Un grafo Euleriano es aquel que puede ser expresado como una trayectoria simple cerrada.

Definición 1.23: Un grafo Hamiltoniano es un grafo G que tiene un ciclo cobertor.

Definición 1.24: Un grafo es conexo si para cada par de vértices existe un camino que los une. Una componente conexa de G es un subgrafo maximal conexo de G .

Nota 1.25: El grafo G de la figura 1.3 es conexo.

Definición 1.26: Sea G un grafo. La distancia entre dos vértices cualesquiera de G se puede definir en términos de la siguiente función $d:V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, en donde $d(u,v)$ es la longitud del camino más corto que une a u con v si tal camino existe, en caso contrario $d(u,v) = \infty$.

Definición 1.27: Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos, $G_1 \cong G_2$, si existe una función biyectiva θ de $V(G_1)$ sobre $V(G_2)$ que preserva la adyacencia; esto es, $uv \in E(G_1)$ si y sólo si $\theta(u)\theta(v)$ pertenece a $E(G_2)$.

Definición 1.28: Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G consigo mismo.

Definición 1.29: Un grafo regular de grado r es un grafo G cuyos vértices tienen todos grado r .

Teorema 1.30: Sea $e: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ un isomorfismo entre G_1 y G_2 ; entonces $d(e(v)) = d(v)$, para todo v en $V(G_1)$.

Demostración: Como G_1 es isomorfo a G_2 por e , se tiene que e es un isomorfismo que preserva la adyacencia por lo tanto, $d(v) = d(e(v))$ para todo $v \in V(G_1)$. ■

Corolario 1.31: Si G_1 es regular de grado r y $G_1 \cong G_2$, entonces G_2 es regular de grado r .

Demostración: Sean G_1 y G_2 dos grafos isomorfos, entonces existe $e: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ y por el teorema 1.30 $d(e(v)) = d(v)$, $\forall v \in V(G_1)$. Sea $v \in V(G_2)$ entonces existe un único $u \in V(G_1)$ tal que $e(u) = v$, como $d(u) = r = d(e(u)) = d(v)$ el teorema queda demostrado. ■

Corolario 1.32: Si los vértices de un grafo G_1 tienen grado $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, y los vértices de un grafo G_2 tienen grado $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. Si $d_i \neq c_i$, para algún $1 \leq i \leq n$, entonces G_1 y G_2 no son isomorfos.

Demostración: Sean G_1 y G_2 grafos cuyos vértices tienen grado $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ y $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$, respectivamente. Sea

$\theta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $\theta(u_i) = v_i$, $i = 1, n$
y además, $d(u_i) = d_i$, y $d(v_i) = c_i$.

Supongamos que G_1 y G_2 son isomorfos por θ y que $d_i \neq c_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.
Entonces por el teorema 1.30 $d(\theta(u_i)) = d(v_i)$ para todo u_i en $V(G_1)$, esto es $d_i = c_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual es una contradicción. ■

Definición 1.33: El grafo complemento del grafo G , denotado por \bar{G} , es un grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y su conjunto de aristas $E(\bar{G})$ contiene todas las aristas que le hacen falta a $E(G)$ para que G sea regular de grado $p-1$.

Definición 1.34: Un grafo bipartito es un grafo G cuyo conjunto de vértices $V(G)$ puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos no vacíos $V'(G)$ y $V''(G)$ de manera tal que, cada arista de G tenga un vértice en $V'(G)$ y el otro en $V''(G)$.

Teorema 1.35: Un grafo no trivial G es bipartito si y sólo si todos sus ciclos son pares.

Demostración:

Sea $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ un ciclo en un grafo bipartito G , y asumamos que, $v_1 \in V_1(G)$; $v_n \in V_2(G)$, y n deberá ser par.

Supongamos que G es conexo, con ciclos pares solamente. Consideremos a $v_0 \in V(G)$ fijo. Sea $V_i = \{u \in V(G) / d(u, v_0) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Entonces n es finito y G es conexo, y V_0, V_1, \dots, V_n particiona el conjunto $V(G)$. Ahora, ningún par de vértices en V_1 son adyacentes, puesto que G no contiene ciclos de orden 3. También, ningún par de vértices en V_2 son adyacentes, o G deberá contener un ciclo de longitud 3 o un ciclo de longitud 5. En efecto, cada arista en G es de la forma (u, v) , donde $u \in V_i$, $v \in V_{i+1}$, para algún $i = 0, 1, \dots, n-1$. V_1 será la unión de los V_i para i impar, y V_2 será la unión para i par, así G es bipartito. ■

1.3. OPERACIONES SOBRE GRAFOS.

Definición 1.36: Consideremos los grafos G_1 y G_2 en donde $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Definimos las siguientes operaciones entre G_1 y G_2 :

- a. Sea $G = G_1 \cup G_2$ con
 $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y
 $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$
 Así por ejemplo,
 $2G = G \cup G$
 $nG = (n-1)G \cup G, n \geq 3.$
- b. $G = G_1 + G_2$ es la suma de dos grafos
 donde $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y
 $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup$
 $\{(u_i v_j / u_i \in V(G_1) \text{ y } v_j \in V(G_2))\}.$
- c. $G = G_1 \times G_2$ es el producto cartesiano
 de dos grafos para el cual:
 $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$
 $E(G) = \{[(u_i, v_j), (u_i, v_j)] / u_i = u_i,$
 $\text{y } v_j v_{j'} \in E(G_2), \text{ si } v_j = v_{j'}$
 $\text{y } u_i u_{i'} \in E(G_1)\}.$
- d. Si $G = G_1[G_2]$ es la composición de dos
 grafos entonces:
 $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ y
 $E(G) = \{[(u_i, v_j), (u_i, v_{j'})] /$
 $u_i u_{i'} \in E(G_1) \text{ ó}$
 $u_i = u_{i'} \text{ y } v_j v_{j'} \in E(G_2)\}.$

Ejemplo 1.37: Las operaciones descritas en la definición anterior aparecen ilustradas en la figura 1.4 y 1.5.

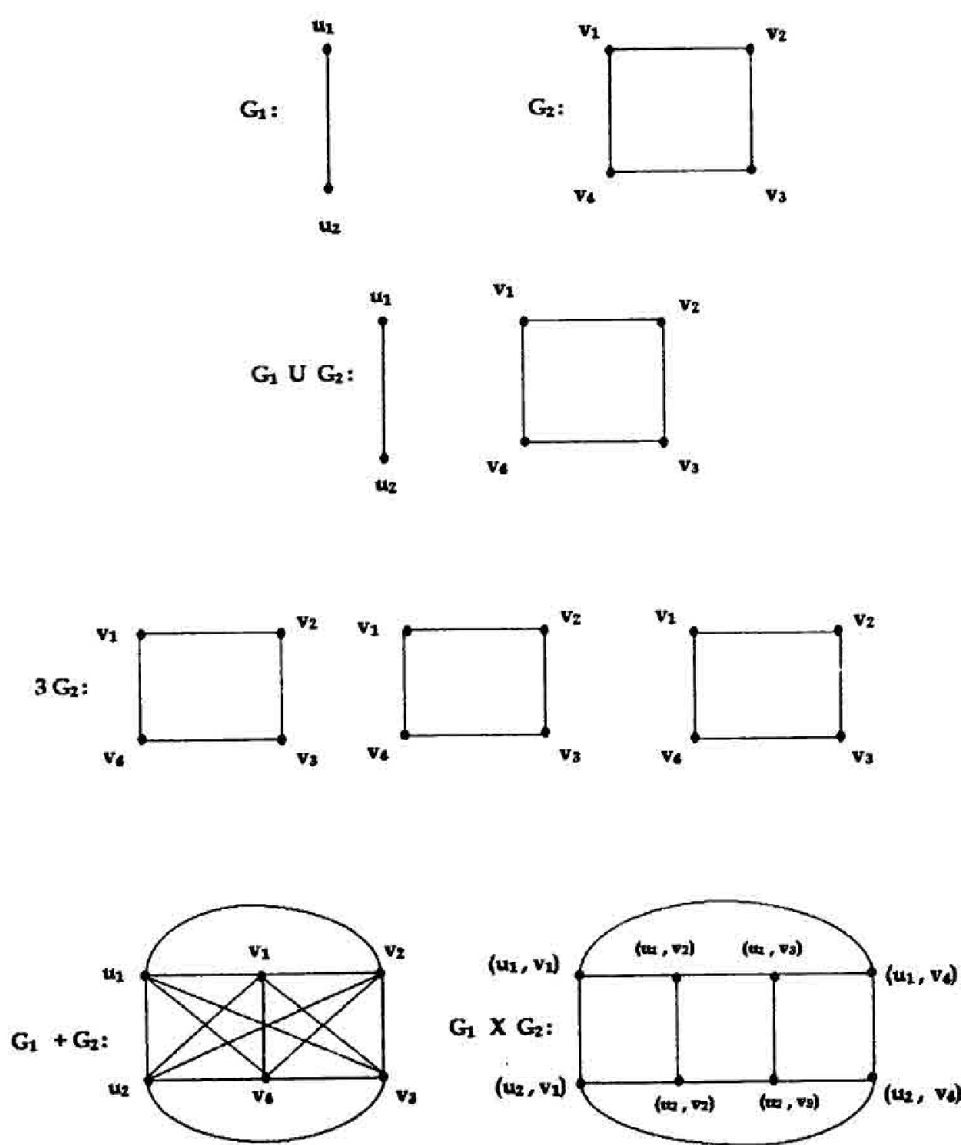


figure 1.4

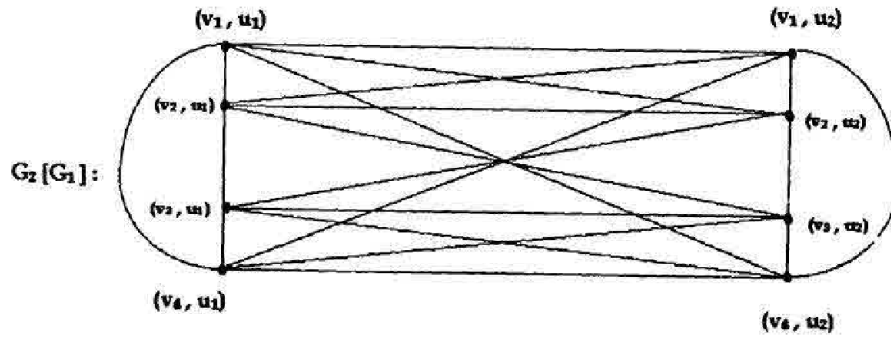
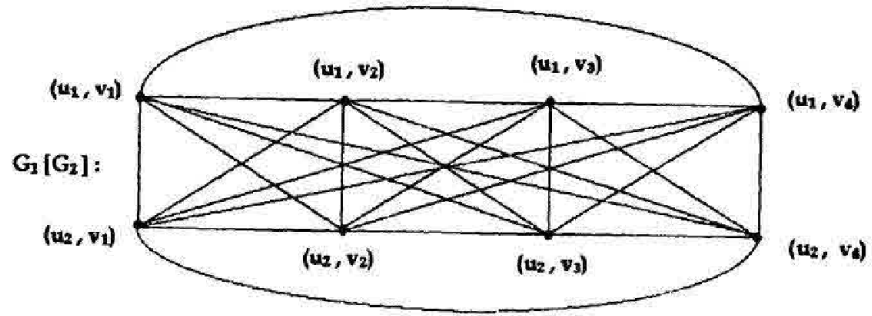


figura 1.5

Nótese que en general $G_1[G_2] \neq G_2[G_1]$ (ver figura 1.5).
Observe además que mientras podemos hacer nG , no es posible hacer $G + G + \dots + G$ n veces.

- Definición 1.38:**
- a. P_n denota el camino de longitud $n-1$.
 - b. C_n denota el ciclo de longitud n .
 - c. K_n denota el grafo completo sobre n vértices; este grafo tiene $\binom{n}{2}$ aristas.
 - d. \bar{K}_n denota el grafo totalmente desconexo sobre n vértices, esto es $E(\bar{K}) = \emptyset$.
 - e. $K_{m,n}$ denota el grafo bipartito completo,
 $K_{m,n} = \bar{K}_m + \bar{K}_n$.
Equivalentemente, $K_{m,n}$ está definido por $\bar{K}_{m,n} = K_m \cup K_n$.
 - f. K_{p_1, p_2, \dots, p_n} denota un grafo n -partito completo.
 $K_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \bar{K}_{p_1} + \bar{K}_{p_2} + \dots + \bar{K}_{p_n}$,
una suma iterada. En el caso especial de que $p_1 = p_2 = \dots = p_n = m$, nosotros diremos que el grafo es n -partito completo regular.
 $K_{m, m, \dots, m} = K_n [K_m]$.
 - g. Q_n denota el grafo n -cubo definido recursivamente por
 $Q_1 = K_2$
 $Q_n = Q_{n-1} \times K_2, \quad n \geq 2.$

En la figura 1.6 se ilustra de manera sencilla algunos grafos descritos en la definición 1.38.

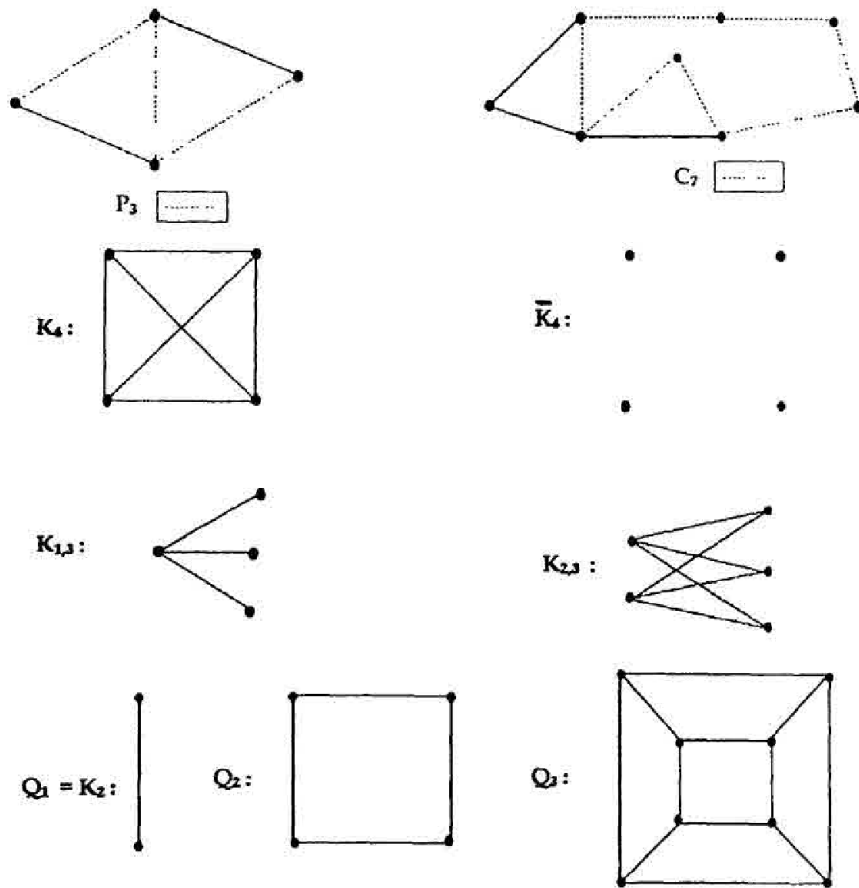


figura 1.6

CAPITULO 2
EL GRUPO ASOCIADO A UN GRAFO

En este capítulo se muestra que existe una estrecha relación entre la teoría de grafos y la teoría de grupos. Aquí se presenta el grupo asociado a un grafo arbitrario, esto es, el grupo de automorfismos del grafo. Se introducen además, algunas operaciones que se pueden realizar con los grupos de automorfismos y que son pertinentes a este trabajo.

2.1. DEFINICIONES.

Definición 2.1: Una Permutación de un conjunto finito no vacío X es una biyección de X en sí mismo.

El conjunto de todas las permutaciones de X forma un grupo respecto a la composición de funciones. Cualquier grupo cuyos elementos son permutaciones sobre un mismo conjunto objeto se llama grupo de permutaciones.

Definición 2.2: El orden de un grupo de permutaciones Γ está dado por el cardinal de Γ y el grado del grupo por el cardinal de X .

Definición 2.3: Sea Γ un grupo de permutaciones de un conjunto X y $x \in X$.
El conjunto $\Gamma x = \{\gamma(x) / \gamma \in \Gamma\}$ se llama órbita de x bajo la acción del grupo Γ .

Definición 2.4: Un grupo de permutaciones Γ es transitivo si existe una única órbita en la acción de Γ sobre X . Un grupo de permutaciones Γ es regular si es transitivo y si $|\Gamma| = |X|$.

Definición 2.5: Dos grupos Γ y Γ' son isomorfos, $\Gamma \cong \Gamma'$, si existe una biyección $e: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tal que $e(\alpha\beta) = e(\alpha)e(\beta)$, para cualesquiera α y β en Γ . La biyección e se llama isomorfismo.

Definición 2.6: Dos grupos de permutaciones Γ y Γ' (actuando sobre los conjuntos X y Y respectivamente) son equivalentes si:

- i) $\Gamma \cong \Gamma'$.
- ii) Existe una biyección f de X sobre Y tal que $f(\alpha x) = e(\alpha)f(x)$, para cualesquiera $x \in X$ y $\alpha \in \Gamma$; con e un isomorfismo entre Γ y Γ' .

Si Γ y Γ' son equivalentes escribimos $\Gamma \equiv \Gamma'$.

Teorema 2.7: El conjunto de todos los automorfismos del grafo G con la composición usual de funciones forma un grupo de permutaciones llamado el grupo de automorfismos del grafo G , el cual es denotado por $A(G)$.

Demostración: Sea G un grafo.

$A(G) \neq \emptyset$ pues $\text{id}_G(v) = v, \forall v \in V(G)$ es evidentemente un automorfismo.

Sean α, β automorfismos de $A(G)$ y v_1 y v_2 vértices adyacentes en G . Entonces $(\alpha \circ \beta)(v_1)$ es adyacente con $(\alpha \circ \beta)(v_2)$.

En efecto:

$\beta(v_1)$ es adyacente con $\beta(v_2)$ pues β es un automorfismo de $A(G)$. Finalmente, $\alpha(\beta(v_1))$ es adyacente con $\alpha(\beta(v_2))$ pues α también es un automorfismo de $A(G)$, lo cual muestra que $A(G)$ es estable para la composición.

La asociatividad en $(A(G), \circ)$ es obvia.

$\text{id}_G(v) = v$, para todo $v \in V(G)$ define un automorfismo el cual evidentemente es la identidad de $A(G)$.

Sea $\alpha \in A(G)$, entonces $\alpha^{-1}: V(G) \rightarrow V(G)$ es una biyección que preserva la adyacencia.

En efecto: si $v_1, v_2 \in V(G)$ son adyacentes entonces $v_1 = \alpha(w_1), v_2 = \alpha(w_2)$. Luego, $\alpha^{-1}(v_1) = w_1$ y $\alpha^{-1}(v_2) = w_2$ son adyacentes pues α es un automorfismo de $A(G)$, y así $\alpha^{-1} \in A(G)$. Por lo tanto, $(A(G), \circ)$ es un grupo. ■

Nota 2.8: Todo automorfismo de G induce también una

permutación en $E(G)$.

Ejemplo 2.9: Definamos a G por: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
 y $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ cuya
 representación gráfica aparece en la figura
 2.1.

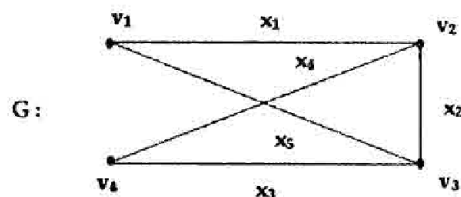


figura 2.1

Los elementos del grupo $A(G)$ son las siguientes 4 permutaciones que preservan la adyacencia:

$$\begin{aligned} & (v_1)(v_2)(v_3)(v_4) \quad , \quad (v_1)(v_2v_3)(v_4) , \\ & (v_1v_4)(v_2)(v_3) \quad \text{y} \quad (v_1v_4)(v_2v_3) . \end{aligned}$$

Teorema 2.10: $A(G) \cong A(\bar{G})$

Demostración: Sean $\theta: A(G) \rightarrow A(\bar{G})$ y $f: V(G) \rightarrow V(\bar{G})$ ambas funciones idénticas, y observemos que la adyacencia es preservada

en el grafo si y sólo si la no adyacencia es preservada. ■

Teorema 2.11: (Teorema de Cayley). Todo grupo finito es isomorfo a un grupo de permutaciones.

Si el grupo Γ tiene orden n , entonces Γ es isomorfo a un subgrupo de S_n .

Las operaciones pueden definirse sobre grupos en general, pero para nuestro estudio las definiciones las daremos en términos de la acción de un grupo sobre un conjunto objeto específico.

2.2. OPERACIONES SOBRE GRUPOS DE PERMUTACIONES.

Sean Γ y Γ' grupos de permutaciones que actúan sobre los conjuntos objetos X y Y respectivamente. Consideremos las operaciones binarias definidas de la siguiente manera:

Definición 2.12: a). La suma, $\Gamma + \Gamma'$, (o producto directo) actúa sobre la unión disjunta $X \cup Y$;

$$\Gamma + \Gamma' = \{ \alpha + \alpha' / \alpha \in \Gamma, \alpha' \in \Gamma' \} \text{ y}$$

$$(\alpha + \alpha')(z) = \begin{cases} \alpha(z), & \text{si } z \in X \\ \alpha'(z), & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

b) El producto, $\Gamma \times \Gamma'$, (o producto cartesiano) actúa sobre $X \times Y$;

$$\Gamma \times \Gamma' = \{(\alpha \times \alpha') / \alpha \in \Gamma, \alpha' \in \Gamma'\} \text{ y}$$
$$(\alpha \times \alpha')(x, y) = (\alpha x, \alpha' y).$$

- c) La composición, $\Gamma[\Gamma']$, actúa sobre $X \times Y$ como sigue: Para cada $\alpha \in \Gamma$ y cualquier secuencia $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_d$ (donde $d = |Y|$) en Γ' , existe una única permutación en $\Gamma[\Gamma']$, escrita como $(\alpha; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_d)$ tal que
- $$(\alpha; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_d)(x_i, y_i) = (\alpha x_i, \alpha'_i y_i).$$

Teorema 2.13: $\Gamma + \Gamma' \cong \Gamma \times \Gamma'$.

Demostración: Sean Γ y Γ' dos grupos de permutaciones que actúan sobre X y Y respectivamente.

Sea $\theta : \Gamma + \Gamma' \rightarrow \Gamma \times \Gamma'$ la función $\theta(\alpha + \alpha') = \alpha \times \alpha'$.

i) Probemos que θ es biyectiva.

Supongamos que $\theta(\alpha + \alpha') = \theta(\beta + \beta')$, así $\alpha \times \alpha' = \beta \times \beta'$

Luego para todo $(x, y) \in X \times Y$ se tiene que $(\alpha \times \alpha')(x, y) = (\beta \times \beta')(x, y)$.

Así $\begin{cases} \alpha x = \beta x, & \text{para todo } x \in X \\ \alpha' y = \beta' y, & \text{para todo } y \in Y \end{cases}$

y se tiene $\alpha = \beta$ y $\alpha' = \beta'$.

Entonces $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ y θ es inyectiva.

Por otro lado, ¿Será cierto que para todo

$\beta x \beta' \in \Gamma x \Gamma'$, existe $\alpha + \alpha' \in \Gamma + \Gamma'$ tal que $\theta(\alpha + \alpha') = \beta x \beta'$?

Sea $\beta x \beta' \in \Gamma x \Gamma'$, podemos elegir $\alpha = \beta$ y $\alpha' = \beta'$ para obtener $\theta(\alpha + \beta) = \alpha' x \beta'$. Luego, θ es suryectiva.

ii) Verifiquemos que θ es un homomorfismo.

Sean $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$ elementos arbitrarios de $\Gamma + \Gamma'$.

¿ $\theta[(\alpha + \alpha') \circ (\beta + \beta')] = \theta(\alpha + \alpha') \circ \theta(\beta + \beta')$?

En efecto,

$$\begin{aligned} & ((\alpha + \alpha') \circ (\beta + \beta'))(z) \\ &= (\alpha + \alpha')((\beta + \beta')(z)), \\ & \text{para todo } z \in X \cup Y \\ &= \begin{cases} (\alpha + \alpha')(\beta(z)) & \text{si } z \in X \\ (\alpha + \alpha')(\beta'(z)) & \text{si } z \in Y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha\beta(z) & \text{si } z \in X \\ \alpha'\beta'(z) & \text{si } z \in Y \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\alpha + \alpha') \circ (\beta + \beta') = \alpha\beta + \alpha'\beta'$$

$$\begin{aligned} \text{Así pues, } \theta[(\alpha + \alpha') \circ (\beta + \beta')] &= \theta(\alpha\beta + \alpha'\beta') \\ &= \alpha\beta x \alpha'\beta' \end{aligned}$$

Por otro lado, $(\theta(\alpha + \alpha') \circ \theta(\beta + \beta'))(x, y)$

$$= \theta(\alpha + \alpha')((\beta x \beta')(x, y))$$

$$= \theta(\alpha + \alpha')(\beta x, \beta' y)$$

$$= (\alpha x \alpha')(\beta(x), \beta'(y))$$

$$= (\alpha(\beta x), \alpha'(\beta' y))$$

Por lo tanto, $\theta(\alpha + \alpha') \circ \theta(\beta + \beta') = \alpha\beta x \alpha'\beta'$.

Luego θ es un homomorfismo biyectivo. ■

Los siguientes teoremas muestran algunas conexiones entre las operaciones gráficas definidas en el capítulo anterior y las operaciones de grupo de permutaciones definidas anteriormente. Los grupos S_n , A_n , Z_n , y D_n son respectivamente el grupo simétrico, los grupos alternantes de grado n , el grupo cíclico de orden n , y el grupo dihédrico de orden $2n$.

2.3. GRUPOS DE AUTOMORFISMOS PARA GRAFOS ESPECIALES.

Teorema 2.14: Si G es un grafo conexo, entonces $A(nG) \cong S_n[A(G)]$.

Demostración: Sea G un grafo conexo, $A(G)$ su grupo de automorfismos asociado y S_n el grupo de permutaciones sobre n elementos. El grafo nG está constituido por n componentes conexas iguales a G . Indiquemos por (k, v_j) el vértice de v_j de la k -ésima componente de nG . Un automorfismo $\bar{\alpha}$ en $A(nG)$ actúa sobre (k, v_j) de la siguiente forma:
$$\bar{\alpha}(k, v_j) = (\alpha(k), \alpha_k(v_j)) \text{ donde } \alpha \in S_n \text{ y } \alpha_k \in A(G).$$

Definamos $\theta: S_n[A(G)] \rightarrow A(nG)$ por la regla
$$\theta(\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bar{\alpha} \text{ donde } \bar{\alpha}: V(nG) \rightarrow V(nG) \text{ está definida por}$$

$$\bar{\alpha}(k, v_j) = (\alpha(k), \alpha_k(v_j)), \quad \alpha \in S_n \\ \alpha_k \in A(G)$$

Como $\bar{\alpha}$ es una biyección se tiene claramente que $\bar{\alpha}$ permuta los vértices de $V(nG)$, demostrando así que θ está bien definida.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} & (\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \circ (\beta; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)(i, v_j) \\ &= (\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(\beta(i), \beta(v_j)) \\ &= (\alpha(\beta(i)), \alpha_{\beta(i)}(\beta(v_j))) \\ &= ((\alpha \circ \beta)(i), (\alpha_{\beta(i)} \circ \beta_i)(v_j)) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \theta((\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \circ (\beta; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n))(k, v_j) \\ &= \theta(\alpha \circ \beta; \alpha_{\beta(i)}, \alpha_{\beta_2}, \dots, \alpha_{\beta(n)}, \alpha_{\beta_n})(k, v_j) \\ &= ((\alpha \circ \beta)(k), \alpha_{\beta(k)}, \alpha_{\beta_2}, \dots, \alpha_{\beta_n}(v_j)) \\ &= (\alpha(\beta(k)), \alpha_{\beta(k)}, \alpha_{\beta_2}, \dots, \alpha_{\beta_n}(v_j)) \\ &= \theta(\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(\beta(k), \beta_2, \dots, \beta_n(v_j)) \\ &= \theta(\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \circ \theta(\beta; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)(k, v_j) \end{aligned}$$

Entonces θ preserva los productos.

Sean $(\alpha; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $(\beta; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ automorfismos de $S_n[A(G)]$ tales que:

$$\theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \theta(\beta; \beta_1, \dots, \beta_n) \quad \text{para todo } (k, v_j) \text{ en } A(nG), \text{ es decir:}$$

$$\begin{aligned} \theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)(k, v_j) &= \theta(\beta; \beta_1, \dots, \beta_n)(k, v_j) \\ (\alpha(k), \alpha_k(v_j)) &= (\beta(k), \beta(v_j)). \end{aligned}$$

Lo anterior sucede si $\alpha(k) = \beta(k)$ y $\alpha_k(v_j) = \beta_k(v_j)$. O sea, si y sólo si $\alpha = \beta$ y

$\alpha_k = \beta_k$. Luego θ es inyectiva.

Sea $\bar{\alpha} \in A(nG)$ entonces para cualquier

(k, v_j) se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(k, v_j) &= (\alpha(k), \alpha_k(v_j)) \\ &= \theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)(k, v_j)\end{aligned}$$

Luego existe $(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_n[A(G)]$ tal

que $\theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{\alpha}$.

Por lo tanto, θ es suryectiva.

Sea $f: X \times V(G) \rightarrow V(nG)$ definida por la regla

$f(i, v_j) = (i, v_j)$ (el vértice v_j de la i -ésima componente).

Así, f evidentemente es biyectiva. Además,

$$\begin{aligned}f((\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)(i, v_j)) &= f(\alpha(i), \alpha_1(v_j)) \\ &= (\alpha(i), \alpha_1(v_j)) \\ &= \theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)(i, v_j) \\ &= \theta(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)(f(i, v_j)).\end{aligned}$$

Luego $A(nG) \cong S_n[A(G)]$ que era lo que se quería demostrar. ■

Teorema 2.15: Si ninguna componente de G_1 es isomorfa con una componente de G_2 , entonces $A(G_1 \cup G_2) \cong A(G_1) + A(G_2)$.

En este teorema la hipótesis de que ninguna componente de G_1 es isomorfa con una componente de G_2 pone en evidencia el hecho de que los vértices del grafo G_1 no pueden ser

permutados con los vértices del grafo G_2 . Esto es, cualquiera que sea el vértice v en $V(G_1 \cup G_2)$ una biyección $\bar{\alpha}$ en $A(G_1 \cup G_2)$ deberá permutar el vértice v_i con v_j si ambos pertenecen a G_1 o si ambos pertenecen a G_2 por medio de $\bar{\alpha}$ en $A(G_1)$ si $v_i, v_j \in V(G_1)$ y por β en $A(G_2)$ si $v_i, v_j \in V(G_2)$.

Entonces $\bar{\alpha}(v_j) = \begin{cases} \alpha(v), & \text{si } v \in V(G_1) \\ \beta(v), & \text{si } v \in V(G_2). \end{cases}$

Y esta lógicamente coincide con el producto directo de $A(G_1)$ con $A(G_2)$.

Por otra parte, resulta interesante conocer el grupo asociado a la unión de varios grafos en los cuales existe una cantidad finita de componentes isomorfas, por lo que presentamos el siguiente teorema.

Teorema 2.16: Sea G un grafo arbitrario, descompongamos a G por $G = n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_r G_r$, donde n_i es el número de componentes isomorfas a G_i .

Entonces

$$A(G) \equiv Sn_1[A(G_1)] + Sn_2[A(G_2)] + \dots + Sn_r[A(G_r)].$$

Demostración: Sea $G = n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_r G_r$ con n_i igual al número de componentes de G isomorfas a G_i .

Consideremos la afirmación

$A(G) \equiv \sum_{j=1}^n S_n[A(G_j)]$ y procedamos por inducción sobre r .

Para $r = 1$, $A(G) \equiv n_1 G_1$ entonces por el

teorema 2.14 $A(G) \equiv Sn_1[A(G_1)]$.

Verifiquemos la afirmación para $r = 2$.

$G = n_1 G_1 \cup n_2 G_2$ y por el teorema 2.15

$$\begin{aligned} A(n_1 G_1 \cup n_2 G_2) &\equiv A(n_1 G_1) + A(n_2 G_2) \\ &\equiv Sn_1[A(G_1)] + Sn_2[A(G_2)]. \end{aligned}$$

Supongamos que para $r = k$ se verifica:

$$\begin{aligned} A(n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_k G_k) &\equiv Sn_1[A(G_1)] + Sn_2[A(G_2)] + \\ &\dots + Sn_k[A(G_k)]. \end{aligned}$$

Ahora si $r = k + 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} &A(n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_k G_k \cup n_{k+1} G_{k+1}) \\ &\equiv A((n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_k G_k) \cup n_{k+1} G_{k+1}) \\ &\equiv A(n_1 G_1 \cup n_2 G_2 \cup \dots \cup n_k G_k) + A(n_{k+1} G_{k+1}) \quad (\text{Teo 2.15}) \\ &\equiv Sn_1[A(G_1)] + Sn_2[A(G_2)] + \dots + Sn_k[A(G_k)] \\ &\quad + Sn_{k+1}[A(G_{k+1})], \text{ aplicando la hipótesis} \\ &\quad \text{inductiva y el teorema 2.14 nuevamente.} \end{aligned}$$

Teorema 2.17: Si ninguna componente de \bar{G}_1 es isomorfa con una componente de \bar{G}_2 , entonces

$$A(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) \equiv A(\bar{G}_1) + A(\bar{G}_2).$$

Demostración: Sean \bar{G}_1 y \bar{G}_2 los grafos complementarios de G_1 y G_2 respectivamente.

Supongamos que ninguna componente de \bar{G}_1 es isomorfa a alguna componente de \bar{G}_2 .

Es evidente que $\overline{G_1 + G_2} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2$ luego

$$A(\overline{G_1 + G_2}) \equiv A(\bar{G}_1 \cup \bar{G}_2), \text{ además por el teorema}$$

2.11 se tiene que

$$\begin{aligned}
 A(\overline{G_1 + G_2}) &\equiv A(G_1 + G_2) \text{ así} \\
 A(\overline{G_1 + G_2}) &\equiv A(\overline{G_1} \cup \overline{G_2}) \\
 &\equiv A(\overline{G_1}) + A(\overline{G_2}) \text{ (teorema 2.15)} \\
 A(G_1 + G_2) &\equiv A(G_1) + A(G_2). \text{ (teorema 2.10).} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Con respecto a los grafos especiales K_n , C_n , $K_{m,n}$ y $K_n[K_m]$ vale el siguiente resultado.

- Teorema 2.18:**
- $A(K_n) \equiv S_n$
 - $A(C_n) \equiv D_n$
 - $A(K_{m,n}) \equiv \begin{cases} S_2[S_n], & m = n \\ S_m + S_n, & m \neq n \end{cases}$
 - $A(K_n[K_m]) \equiv S_n[S_m]$.

Observación:

En el grafo K_n cada vértice es adyacente con el resto de los vértices así las $n!$ permutaciones que se pueden realizar preservan la adyacencia. Entonces resulta evidente que $A(K_n) \equiv S_n$.

Realizando el producto cartesiano de $V(K_n) \times V(K_m)$ se observa que los vértices del grafo compuesto $K_n[K_m]$ son adyacentes todos entre sí. Por lo tanto, cualquier vértice de $V(K_n) \times V(K_m)$ puede ser permutado de $n!$ maneras con cualquier otro vértice de la misma columna ó permutado con cualquier otro vértice de otra columna con las $n!$ permutaciones. Este grupo coincide con $S_n[S_m]$.

Consideraciones parecidas se pueden hacer con respecto a las otras afirmaciones del teorema.

2.4. OTROS GRUPOS ASOCIADOS A UN GRAFO.

Definición 2.19: Dos grafos G y H (con conjuntos no vacíos de aristas) son isomorfos por aristas si existe una biyección $\theta: E(G) \rightarrow E(H)$ que preserva la adyacencia, esto es x y y tienen un vértice común en G si y sólo si $\theta(x)$, $\theta(y)$ tienen un vértice común en H . La función θ recibe el nombre de isomorfismo por arista.

Teorema 2.20: Si G y H son isomorfos (con conjuntos no vacíos de aristas), entonces ellos son isomorfos por aristas.

Demostración: Sean G y H dos grafos isomorfos. Entonces existe una biyección $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $\forall uv \in E(G)$ se tiene que $\theta(u)\theta(v)$ pertenece a $E(H)$. Supongamos que uv y vw , $u \neq w$ son dos aristas adyacentes en G . Como G y H son isomorfos se tiene que $\theta(u)\theta(v)$ y $\theta(v)\theta(w)$ son aristas en $E(H)$ y como $\theta(u) \neq \theta(w)$ las aristas son adyacentes, luego θ preserva la adyacencia de las aristas.

Por lo tanto, θ es un isomorfismo por

arista. ■

Definición 2.21: Un isomorfismo por arista inducido es un isomorfismo $e^*: E(G) \rightarrow E(H)$ definido por $e^*(uv) = e(u)e(v)$, donde $e: V(G) \rightarrow V(H)$ es un isomorfismo entre G y H .

Definición 2.22: Un automorfismo por arista de un grafo G no vacío es un isomorfismo por arista de G sobre sí mismo.

Teorema 2.23: El conjunto de todos los automorfismos por aristas del grafo G con la composición usual de funciones forma un grupo de permutaciones llamado el grupo de automorfismos por aristas del grafo, el cual es denotado por $A^*(G)$.

Demostración: Es inmediata. ■

Teorema 2.24: El conjunto de todos los automorfismos por aristas inducidos del grafo G con la composición usual de funciones forma un grupo de permutaciones llamado el grupo de automorfismos por aristas inducido, el cual es denotado por $A^*(G)$.

Demostración: Sea $A^*(G) = \{e^*: E(G) \rightarrow E(G) \mid e^* \text{ es un isomorfismo por arista inducido}\}$.

Definamos la operación $e_1^* \circ e_2^* = (e_1 \circ e_2)^*$.

Así $A^*(G) \neq \emptyset$, pues $id_G^*: E(G) \rightarrow E(G)$, es el automorfismo inducido por id_G de $V(G)$ sobre $V(G)$.

La asociatividad en $A^*(G)$ resulta del hecho siguiente:

$$\begin{aligned} (e_1^* \circ e_2^*) \circ e_3^* &= (e_1 \circ e_2)^* \circ e_3^* \\ &= (e_1 \circ e_2 \circ e_3)^* \\ &= (e_1^* \circ (e_2 \circ e_3))^* \\ &= e_1^* \circ (e_2^* \circ e_3^*). \end{aligned}$$

La identidad $id_G^*: E(G) \rightarrow E(G)$ es el elemento neutro pues:

$$id_G^* \circ \alpha^* = (id_G \circ \alpha)^* = \alpha^*.$$

Sea e^* un automorfismo por arista inducido, entonces $id_G^* = (e^{-1} \circ e)^* = (e^{-1})^* \circ e^*$.

Similarmente, $id_G^* = (e \circ e^{-1})^* = (e)^* \circ (e^{-1})^*$.

Luego $(e^*)^{-1} = (e^{-1})^*$.

En conclusión, $(A^*(G), \circ)$ es un grupo. ■

Ejemplo 2.25: Considérese el ejemplo de la figura 2.1.

El grupo $A(G)$ cuyos elementos son

$$\begin{aligned} (v_1)(v_2)(v_3)(v_4), (v_1)(v_2 v_3)(v_4), \\ (v_1 v_4)(v_2)(v_3) \text{ y } (v_1 v_4)(v_2 v_3) \end{aligned}$$

induce las siguientes permutaciones de las aristas: $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5)$,

$$(x_1 x_5)(x_3 x_4)(x_2), \quad (x_1 x_4)(x_3 x_5)(x_2), \quad \text{y}$$

$$(x_1 x_8)(x_4 x_5)(x_2).$$

Así, el grupo de automorfismos por aristas inducidos $A^*(G)$ está formado por las anteriores permutaciones.

Nota 2.26:

Es evidente que $A^*(G) \subset A'(G)$. Por ejemplo en la figura 2.1 la permutación de las aristas $(x_1 x_2)(x_8)(x_4)(x_5)$ pertenece a $A'(G)$ pero no a $A^*(G)$.

Teorema 2.27:

Sea G un grafo no trivial. $A(G) \cong A^*(G)$ si y sólo si G no contiene dos o más vértices aislados y no contiene a K_2 como componente conexa.

Demostración: Sea α^* la permutación en $A^*(G)$ la cual es inducida por la permutación α en $A(G)$. Por la definición de multiplicación en $A^*(G)$, tenemos que $\alpha^* \beta^* = (\alpha \beta)^*$, para cualesquiera α y β en $A(G)$. Así que la función $\theta: \alpha \rightarrow \alpha^*$ de $A(G)$ en $A^*(G)$ es un homomorfismo de grupos. En efecto:

$$\theta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^* = \theta(\alpha)\theta(\beta).$$

De aquí que $A(G) \cong A^*(G)$ si y sólo si el kernel de θ es trivial y θ es suryectiva.

Supongamos que $A(G) \cong A^*(G)$. Entonces

$\alpha \neq \text{id}$ (la permutación identidad) implica que $\alpha^* \neq \text{id}^*$.

Si G tiene vértices aislados v_1 y v_2 , podemos definir $\alpha \in A(G)$ por $\alpha(v_1) = v_2$, $\alpha(v_2) = v_1$, y $\alpha(v) = v$, para todo v que no pertenezca a $\{v_1, v_2\}$. Entonces $\alpha \neq \text{id}$ pero $\alpha^* = \text{id}^*$, lo que es una contradicción.

Si K_2 es una componente de G , tomamos la arista de K_2 como $x = v_1 v_2$ y definimos $\alpha \in A(G)$ exactamente como anteriormente para obtener $\alpha \neq \text{id}$ pero $\alpha^* = \text{id}^*$, lo que es una contradicción.

Así pues, si $A(G) \cong A^*(G)$, G no contiene dos o más vértices aislados ni a K_2 como componente conexa.

Supongamos que $A(G)$ no contiene dos o más vértices aislados y no contiene a K_2 como componente de G . Si $A(G)$ es trivial, entonces $A(G)$ fija cada arista y $A^*(G)$ es trivial, por lo que la afirmación es evidente.

Supongamos que existe $\alpha \in A(G)$ con $\alpha(u) = v \neq u$. Entonces el grado de u es igual al grado de v puesto que α es un automorfismo. Además, como u y v no son aislados este grado no es igual a cero.

Caso 1: u es adyacente a v . Sea $x = uv$. Puesto que K_2 no es una componente, el grado de u y v es mayor que uno.

De aquí que existe una arista $y \neq x$ la cual es incidente con u y $\alpha^*(y)$ es incidente con v . Por lo tanto, $\alpha^*(y) \neq y$ y así $\alpha^* \neq \text{id}$.

Caso 2: u no es adyacente a v . Sea x una arista incidente con u . Entonces $\alpha^*(x) \neq x$ y así $\alpha^* \neq \text{id}$.

En conclusión, si $\alpha \neq \text{id}$ y $\alpha^* \neq \text{id}^*$ entonces θ es inyectiva.

La suryectividad de θ es evidente. ■

Teorema 2.28: Sea $E(G) \neq \emptyset$; entonces $A'(G) \cong A^*(G)$ si y sólo si

1. C_a y $K_{1,a}$ no son simultáneamente componentes de G , y
2. Ninguno de $K_{1,a} + x$, $K_4 - x$, K_4 es una componente de G .

El teorema anterior resulta interesante pues pone en relieve la existencia de un isomorfismo entre el grupo de automorfismos inducidos por aristas y el grupo de automorfismos por aristas, salvo algunos casos especiales como lo son los siguientes:

1. Los grafos $K_{1,p}$ y C_p no deben ser componentes de G porque si lo fueran se podría considerar el automorfismo por arista de G que muta todas las aristas de $K_{1,p}$ con todas las aristas de C_p y recíprocamente, dejando fijas las restantes aristas de G . Obviamente este automorfismo pertenece a $A'(G)$ pero no a $A^*(G)$, pues ningún automorfismo de G puede permutar vértices con grados distintos, Así $A^*(G) \subseteq A'(G)$.
2. En el caso del grafo completo K_4 , este se puede considerar como un cuadrado con dos diagonales y obviamente un automorfismo por arista sería aquel que consiste en permutar las diagonales y dejar fijas las demás. Al quedar fijas el resto de las aristas los vértices quedan fijos y claramente este automorfismo es la identidad de $A(G)$ la cual induce la identidad en $A^*(G)$, por lo tanto el automorfismo descrito anteriormente no pertenece a $A^*(G)$ y no existe entonces isomorfismo.
3. Sobre el grafo $K_{1,p} + x$ podemos considerar el automorfismo por arista que se ilustra en la figura 2.2, el cual pertenece a $A'(G)$ pero no a $A^*(G)$ pues el automorfismo no preserva los grados de adyacencia de los vértices.

Teorema 2.20: Sea G un grafo conexo de orden $p \geq 3$; entonces $A(G) \cong A'(G) \cong A^*(G)$ si y sólo si $G \neq K_{1,p} + x, K_4 - x, K_4$.

El teorema precedente es consecuencia directa de los teore-

mas 2.27 y 2.28 y nos facilita trabajar únicamente con el grupo de automorfismos $A(G)$.



figura 2.2

CAPITULO 3
EL GRAFO ASOCIADO A UN GRUPO

En el capítulo anterior se estudio el grupo asociado a un grafo arbitrario. En el presente capítulo mostraremos en forma reciproca que a cada grupo se le puede asociar un grafo, más precisamente el grafo de Color de Cayley.

3.1. GRAFO DE COLOR DE CAYLEY.

Definición 3.1: Sean Γ un grupo y $A = \{g_1, g_2, \dots\}$ un subconjunto de Γ . Denotamos por $A' = \{g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots\}$. A es un conjunto de generadores de Γ si cada elemento de Γ se escribe como producto finito de elementos de $A \cup A'$. A la igualdad entre dos productos finitos de elementos de $A \cup A'$ se llama relación.

Teorema 3.2: Dado un conjunto arbitrario de símbolos A y un conjunto de relaciones entre estos, existe (salvo isomorfismos) un único grupo Γ con conjunto generador A y cuya estructura algebraica depende de las relaciones dadas.

Definición 3.3: Si el grupo Γ es generado por $A = \{g_1, g_2, \dots\}$ y si cada relación en Γ puede ser deducida de las relaciones $P = P', Q = Q', R = R', \dots$, entonces escribimos $\Gamma = \langle g_1, g_2, \dots / P = P', Q = Q', R = R', \dots \rangle$ y diremos que $\langle g_1, g_2, \dots / P = P', Q = Q', R = R', \dots \rangle$

es una presentación de Γ . Diremos además que la presentación es finitamente generada si A es finito.

Teorema 3.4: Todo grupo finito tiene una presentación finita.

Demostración: Sea Γ un grupo finito. Tomemos a Γ como su propio conjunto de generadores, con todas las relaciones de la forma $g_i g_j = g_k$, determinado por la operación del grupo. ■

Definición 3.5: Sea Γ un grupo y P una presentación de Γ . El grafo de color de Cayley, $C_P(\Gamma)$, tiene como conjunto de vértices todos los elementos del grupo Γ y como conjunto de aristas las siguientes:

(g_1, g_2) es una arista dirigida de $C_P(\Gamma)$ si y sólo si existe un generador h (a los cuales se les a asignado colores distintos) en la presentación P de Γ tal que $g_1 h = g_2$. Ver figura 3.1.



figura 3.1

A continuación ilustramos la definición 3.5 describiendo el grafo de color de Cayley asociado al grupo S_3 de las permutaciones de tres objetos distintos.

Ejemplo 3.6: El grafo $C_P(S_3)$. Sean r y s las permutaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} r: X_1 \rightarrow X_1 & s: X_1 \rightarrow X_2 \\ X_2 \rightarrow X_3 & X_2 \rightarrow X_3 \\ X_3 \rightarrow X_2 & X_3 \rightarrow X_1 \end{array}$$

Es fácil verificar que $r \circ s^{-1} = s \circ r$ ó equivalentemente que $s^{-1} \circ r = r \circ s$. Por lo tanto, una presentación P de S_3 está definida por $P(S_3) = \langle r, s / r \circ s^{-1} = s \circ r \rangle$. Recordemos que de la tabla de composición de S_3 se deduce que:

$$S_3 = \{id, r, s, s^2, r \circ s, s \circ r\}.$$

Además cada elemento de S_3 se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} id &= r \circ r, id = s^2 \circ s, r = id \circ r, \\ r &= s \circ r \circ s, s = id \circ s, s = s \circ r \circ r, \\ s^2 &= s \circ s, s^2 = r \circ s \circ r, r \circ s = r \circ s, \\ r \circ s &= s^2 \circ r, s \circ r = s \circ r, \\ s \circ r &= r \circ s \circ s. \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior el grafo $C_P(S_3)$ consta de seis vértices y doce aristas

dirigidas tal como se muestra en la figura 3.2.

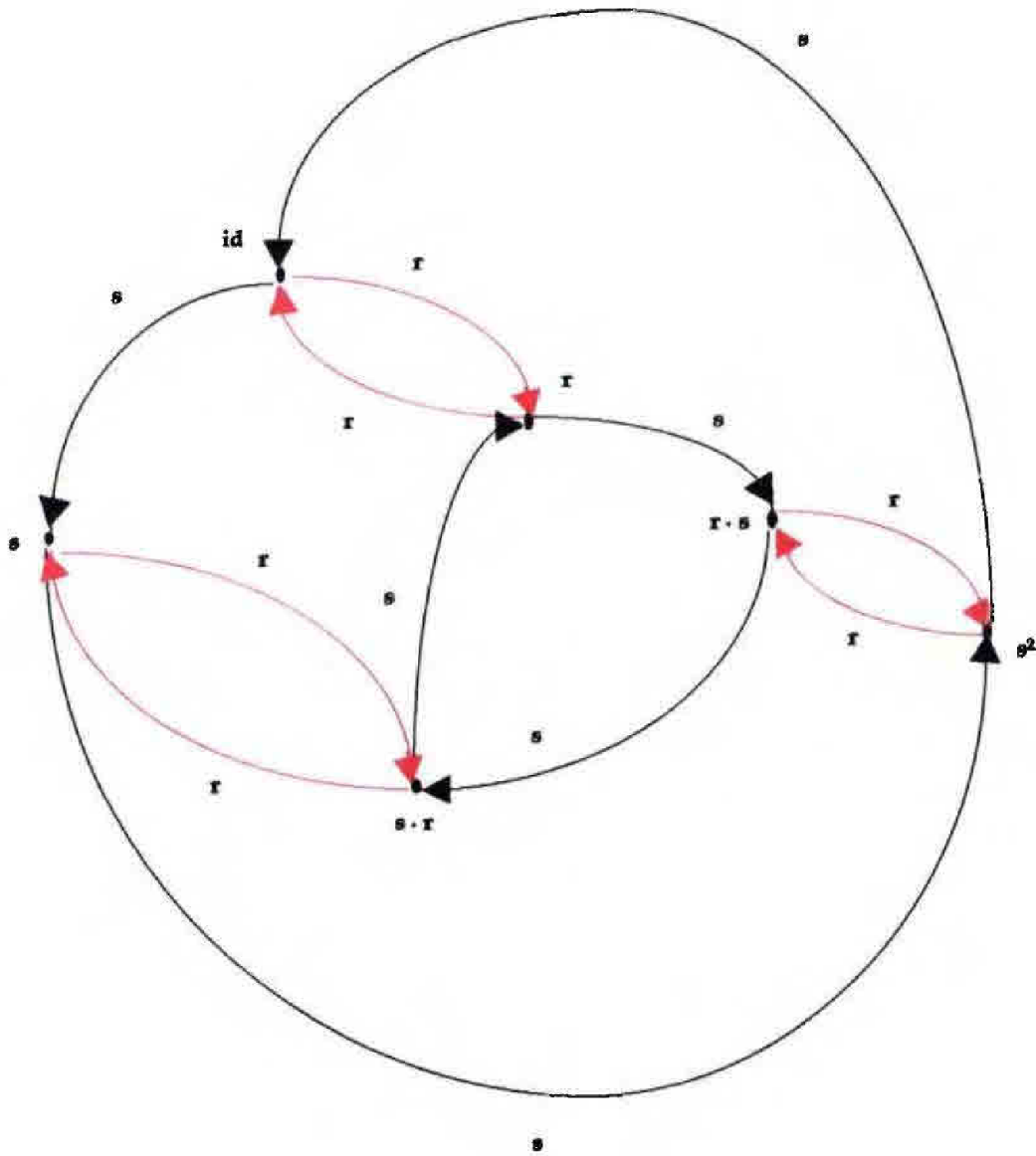


figura 3.2

OBSERVACIONES:

1. Cuando sea conveniente se denotará el grafo de color de Cayley asociado a la presentación P del grupo Γ con el símbolo $C_{\Delta}(\Gamma)$, donde Δ es un conjunto de generadores de Γ .
2. Como un grupo Γ puede tener más de un conjunto de generadores, el grafo $C_{\Delta}(\Gamma)$ depende tanto de Γ como del conjunto generador Δ que se escoja.
3. Entre los elementos y propiedades de Γ podemos establecer la siguiente correspondencia con su respectiva contraparte en $C_{\Delta}(\Gamma)$.

Grupo Γ	_____	Grafo de color de Cayley $C_{\Delta}(\Gamma)$
Elemento	_____	Vértice
Generador	_____	Conjunto de aristas dirigidas del mismo color
Inverso de un generador	_____	El mismo conjunto de aristas asociado a h , pero con dirección contraria
Producto finito de elementos de $\Delta \cup \Delta'$	_____	Trayectoria
Producto finito de elementos del grupo Γ	_____	Sucesión de trayectorias
Producto finito de elementos de $\Delta \cup \Delta'$ que se reduce a la identidad	_____	Trayectoria cerrada
Solubilidad en Δ de la ecuación $rx = s$	_____	El grafo $C_{\Delta}(\Gamma)$ es un digrafo débilmente conexo

3.2. AUTOMORFISMOS.

Anteriormente, definimos el automorfismo de un grafo G como una permutación de $V(G)$ que preserva la adyacencia. Un automorfismo de un grafo dirigido deberá preservar la adyacencia dirigida; y un automorfismo de un grafo de color de Cayley también deberá preservar el color correspondiente a cada adyacencia. Veamos la siguiente definición.

Definición 3.7: Un automorfismo de un grafo de color de Cayley $C_{\Delta}(\Gamma)$ es una permutación θ de $V(C_{\Delta}(\Gamma))$ sobre $V(C_{\Delta}(\Gamma))$ tal que, para todo g_1, g_2 en Γ y h en Δ : $g_1 h = g_2$ si y sólo si $\theta(g_1)h = \theta(g_2) = \theta(g_1 h)$.

Proposición 3.8: θ es un automorfismo de $C_{\Delta}(\Gamma)$ si y sólo si: para cada $g \in \Gamma$ y h en Δ , $\theta(gh) = \theta(g)h$.

Demostración: Sea θ un automorfismo de $C_{\Delta}(\Gamma)$ y sean g en Γ y h en Δ . Entonces $\theta(g.h) = \theta(g)\theta(h)$, pero como θ es un automorfismo de $C_{\Delta}(\Gamma)$, $\theta(h) = h$, luego $\theta(g.h) = \theta(g)\theta(h) = \theta(g)h$.

Sea $\theta: V(C_{\Delta}(\Gamma)) \rightarrow V(C_{\Delta}(\Gamma))$ una permutación tal que $\theta(g)h = \theta(gh)$ para cada $g \in \Gamma$ y $h \in \Delta$. Sean $g_1, g_2 \in \Gamma$ y $h \in \Delta$ tales que $g_2 = g_1 h$. Entonces $\theta(g_2) = \theta(g_1 h) = \theta(g_1)h$.

Similarmente, si $\theta(g_2) = \theta(g_1)h$ por la

propiedad de θ , tendremos que $\theta(g_1)h = \theta(g_1 h)$, luego $\theta(g_2) = \theta(g_1 h)$.
Así por la inyectividad de θ , $g_2 = g_1 h$. ■

La proposición anterior implica que el diagrama de la figura 3.3 es conmutativo, es decir: los automorfismos T_h y θ conmutan

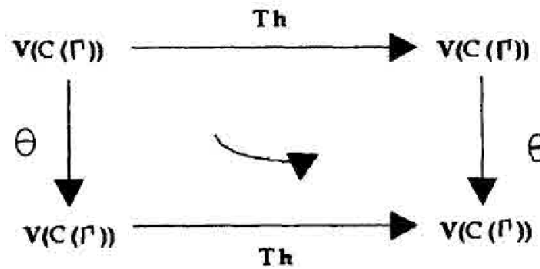


figura 3.3

Como es de esperarse, la colección de todos los automorfismos de $C_\Delta(\Gamma)$ es un grupo, llamado el grupo de automorfismos de $C_\Delta(\Gamma)$, el cual es denotado por $A(C_\Delta(\Gamma))$.

El teorema siguiente nos revela que los grupos Γ y $A(C_\Delta(\Gamma))$ tienen una relación muy especial, la cual no depende de la presentación de Γ escogida y por ende tampoco depende de Δ .

Teorema 3.9: Sea $C_\Delta(\Gamma)$ cualquier grafo de color de Cayley para el grupo finito Γ ; entonces $A(C_\Delta(\Gamma)) \cong \Gamma$ (independientemente de la presentación seleccionada para Γ).

Demostración: Definamos $\alpha : \Gamma \rightarrow A(C_{\Delta}(\Gamma))$ por la regla $\alpha(g) = \theta g$ donde $\theta : V(C_{\Delta}(\Gamma)) \rightarrow V(C_{\Delta}(\Gamma))$ esta definida por $\theta g(g_i) = gg_i$. Verificaremos primero que $\theta g \in A(C_{\Delta}(\Gamma))$. Como θg es una biyección de Γ sobre Γ , es claro que θg permuta los elementos de $V(C_{\Delta}(\Gamma))$. Además, se tiene que $\theta g(g_i h) = g(g_i h) = (gg_i)h = \theta_g(g_i)h$ con lo cual se muestra que θg es un automorfismo del grafo de color $C_{\Delta}(\Gamma)$ y se prueba así que α está bien definida.

Veamos ahora que α preserva los productos.

$\alpha(gg^*) = \theta gg^*$, en donde θgg^* es definida

$$\begin{aligned}\theta gg^*(g_i) &= gg^*(g_i) \\ &= \theta g(g^*g_i) \\ &= \theta g(\theta_g^*(g_i)) \\ &= (\theta_g \circ \theta_g^*)(g_i)\end{aligned}$$

Así pues $\alpha(gg^*) = \alpha(g) \circ \alpha(g^*)$.

Sea $g \in \ker \alpha$, entonces $\theta g = \text{id}$ es decir, para todo $g_i \in \Gamma$ se tiene que $gg_i = g_i$, de donde $g = e \in \Gamma$. Concluimos que $\text{Ker } \alpha = \{e\}$ de donde α es inyectiva.

Solo resta probar que α es suryectiva. Sea $\theta \in A(C_{\Delta}(\Gamma))$. Sea $\theta(e) = g$, donde e es la identidad de Γ . Como cualquier elemento g^* de Γ se representa como un producto finito

$$\begin{aligned}
 g^* &= h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m} \text{ donde los } h_i \text{ son gene-} \\
 &\text{radores de } \Gamma \text{ y los } \alpha_j = \pm 1 \text{ se tendrá que:} \\
 \theta(g^*) &= \theta(eg^*) = \theta(e)h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m} \\
 &= \theta(e) g^* \\
 &= gg^* \\
 &= eg(g^*)
 \end{aligned}$$

Luego $\theta = eg = \alpha(g)$

Lo cual prueba que α es suryectiva y se completa así la demostración del teorema. ■

Sea Γ un grupo y $C_\Delta(\Gamma)$ su grafo de color de Cayley asociado, donde $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Considérese el grafo G construido a partir del grafo de Cayley $C_\Delta(\Gamma)$ de la siguiente manera:

Reemplazamos cada arista (g_i, g_j) , donde $g_j = g_i \delta_k$ por un camino: $v_i, u_{ij}, u_{ij}', v_j$. En el vértice $u_{ij}(u_{ij}')$ agregamos un nuevo camino $p_{ij}(p_{ij}')$ de longitud $2k-1(2k)$ $1 \leq k \leq n$ (ver figura 3.4 para el caso $k = 2$).

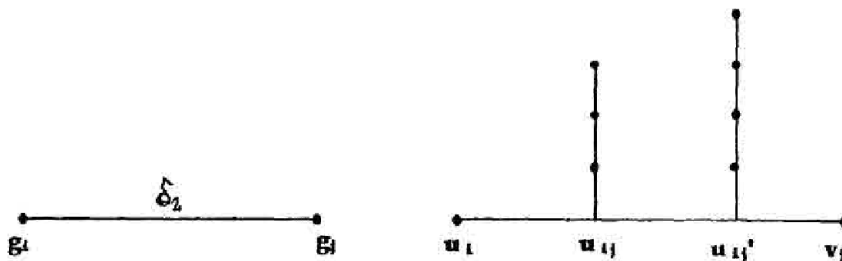
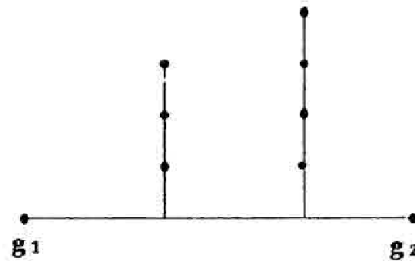


figura 3.4

Observación:

Si en G se tiene una secuencia de vértices del tipo



donde las longitudes de los caminos "verticales" son del tipo $2k - 1$ y $2k$ entonces $g_2 = g_1 \delta_k$ y g_1 y $g_2 \in \Gamma$.

Teorema 3.10: Todo grupo finito es el grupo de automorfismos de algún grafo.

Demostración: Considérese el grafo G definido anteriormente y sea $A(G)$ su grupo de automorfismos. Es claro que $A(G) \cong A(C_{\Delta}(\Gamma)) \cong \Gamma$. ■

3.3. PROPIEDADES.

Es claro que todo grafo de color de Cayley es regular y conexo; el recíproco no siempre es verdadero. Basados en el ejemplo 3.6, en el cual se exhibe el grafo de color de Cayley asociado al grupo S_3 , describiremos el grafo G cuyo conjunto de automorfismos es isomorfo a S_3 (figura 3.5), ilustrando así el teorema 3.10.

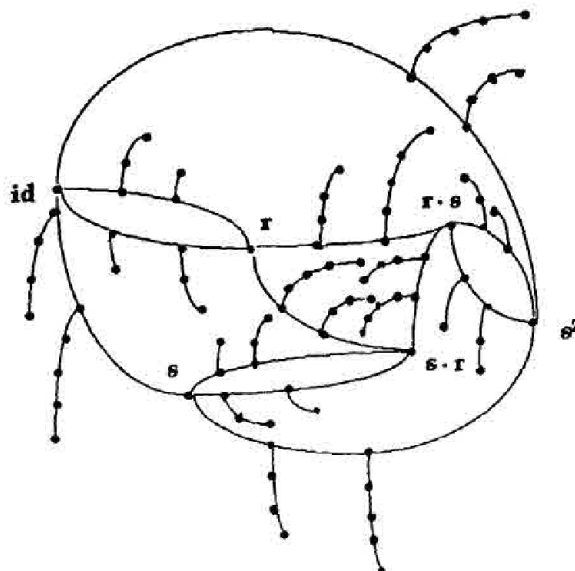


figura 3.5

El grafo anterior contiene $n(m+1)(2m+1)$ vértices; donde m es el número de generadores y n el número de elementos del grupo. Este método es ineficiente para un gran número de elementos y generadores del grafo.

Veamos ahora, algunas propiedades de los grafos de color Cayley.

Teorema 3.11: Γ es conmutativo si y sólo si para cada par de generadores h_1 y h_2 , la trayectoria $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ es cerrada.

Demostración: Sea Γ un grupo conmutativo; es decir, para cualesquiera $g_1, g_2 \in \Gamma$: $g_1 g_2 = g_2 g_1$, en particular para todo $h_1, h_2 \in \Delta$, generadores se tiene que $h_1 h_2 =$

$$h_2 h_1.$$

De la tabla de composición tenemos que

$$\text{id} \circ h_1 = h_1 \quad h_1 \circ h_2 = h_1 \circ h_2$$

$$\text{id} \circ h_2 = h_2 \quad h_2 \circ h_1 = h_2 \circ h_1$$

Además por hipótesis $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$, como consecuencia el siguiente subgrafo (figura 3.6) forma parte del grafo asociado a Γ .

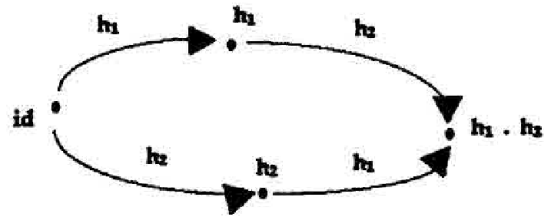


figura 3.6

Ahora, veamos el producto $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$:

$$\text{id} \circ h_1 = h_1 \quad (\text{Arista dirigida de id a } h_1 \text{ de color } h_1)$$

$$h_1 \circ h_2 = h_1 \circ h_2 \quad (\text{Arista dirigida de } h_1 \text{ a } h_1 \circ h_2 \text{ de color } h_2)$$

$$\begin{aligned} (h_1 \circ h_2) \circ h_1^{-1} &= h_1 \circ (h_2 \circ h_1^{-1}) \\ &= h_1 \circ (h_1^{-1} \circ h_2) = (h_1 \circ h_1^{-1}) \circ h_2 \\ &= h_2 \quad (\text{Arista dirigida inversa de } h_1 \circ h_2 \text{ a } h_2 \text{ de color } h_1). \end{aligned}$$

$$h_2 \circ h_2^{-1} = \text{id} \quad (\text{Arista dirigida inversa de } h_2 \text{ a id de color } h_2).$$

Por lo tanto, la trayectoria $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ es

cerrada.

Recíprocamente, supongamos que para cada par de generadores h_1 y h_2 la trayectoria $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ es cerrada.

De la tabla de composición tenemos que

$$\begin{aligned} \text{id} \circ h_1 &= h_1 & h_1 \circ h_2 &= h_1 \circ h_2 \\ \text{id} \circ h_2 &= h_2 & h_2 \circ h_1 &= h_2 \circ h_1 \end{aligned}$$

Veamos el siguiente subgrafo (figura 3.7) de $C_{\Delta}(\Gamma)$.

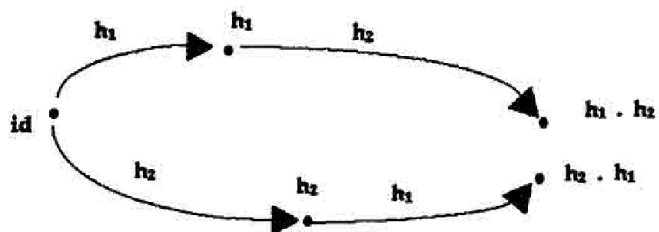


figura 3.7

Como la trayectoria $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ es cerrada $h_1 h_2$ y $h_2 h_1$ son el mismo vértice y esto es válido para cualesquiera $h_1, h_2 \in \Delta$ y así Γ es conmutativo. ■

Definición 3.12: Un elemento de un conjunto generador Δ para un grupo Γ es redundante si éste puede escribirse como producto de los restantes generadores. Un conjunto generador es minimal si éste no contiene generadores

redundantes.

Teorema 3.13: Sea Γ un grupo finito (infinito). Un generador h es redundante si y sólo si al eliminar todas las aristas de color h en $C_{\Delta}(\Gamma)$ resulta un grafo dirigido fuertemente (débilmente) conexo.

Demostración: Sea Γ un grupo finito (infinito). Si $C_{\Delta}(\Gamma)$ es fuertemente conexo despues de haber eliminados todas las aristas de color h es porque existe un camino desde id a h de la forma $h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m}$ con h_i generadores de Δ y $\alpha_i = \pm 1$, esto es h es redundante.

Sea $C_{\Delta}(\Gamma)$ el grafo de color de Cayley de Γ y h un generador redundante en Δ .

Sean g_i, g_j vértices de $C_{\Delta}(\Gamma)$, un camino p que va de g_i a g_j , es del tipo

$p = h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_m^{\alpha_m}$ donde los α_i son enteros positivos y los h_i son generadores de Δ .

Si h aparece en p , como es redundante se puede sustituir por un producto finito de potencias (positivas) de generadores de Δ distintos de h . Por lo tanto, h no aparece en el camino y el grafo $C_{\Delta}(\Gamma)$ sin las aristas de color h es fuertemente conexo. ■

Teorema 3.14: Si h no es redundante, al eliminar todas las aristas de color h resulta una colección de subgrafos isomorfos disjuntos, cada uno representando el subgrupo de Γ generado por el conjunto generador de Γ menos h .

Demostración: Sea Γ un grupo y $C_{\Delta}(\Gamma)$ su grafo de color de Cayley asociado. Sea h un generador no redundante en Δ . Al eliminar todas las aristas de color h , el grafo se convierte en un grafo desconexo porque las componentes que contienen a la identidad y al generador h son disjuntas. Veamos que cualquier componente C_v es isomorfa a C_{id} por lo tanto todas son isomorfas.

La biyección $\theta: C_{id} \rightarrow C_v$ definida por $\theta(g_i) = hg_i$ es un homomorfismo. En efecto:

Si $g_i, g_j \in C_{id}$ con $g_j = g_i \delta$, $\delta \in \Delta \setminus h$

$$\begin{aligned}\theta(g_j) &= \theta(g_i \delta) \\ &= hg_i \delta \\ &= (hg_i) \delta \\ &= \theta(g_i) \delta\end{aligned}$$

Luego θ preserva el color (adyacencia). Por lo tanto, las componentes son isomorfas y cada una representa el subgrupo de Γ generado por $\Delta \setminus h$. ■

Teorema 3.15: Sea Γ un grafo finito con un conjunto generador minimal (h_1, h_2, \dots, h_r) , y Ω un (propiedad necesaria) un subgrupo cuyo conjunto generador es (h_2, h_3, \dots, h_r) . Sea c_1, c_2, \dots, c_k las componentes del grafo dirigido $C_{h_1}(\Gamma)$, obtenido de $C_\Delta(\Gamma)$ por la eliminación de las aristas de color h_1 . Entonces Ω es normal en Γ si y sólo si las aristas dirigidas eliminadas de cualquier componente c_i estaban dirigidas a una misma componente c_j .

Demostración:

i) Asumamos las condiciones dadas. Sea $C_1 = \Omega$ la componente que contiene a e , sea $g \in C_1$ y $r \in \Gamma$. Mostraremos que $rg r^{-1} \in C_1$. Escribiremos a $r = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_m^{b_m}$, donde a_i es un generador de Γ y $b_i = \pm 1$. Si h_1 ocurre en r exactamente w veces con $b_i = +1$ y v veces con $b_i = -1$, entonces la trayectoria que corresponde sale de e (en C_1) a través de $w-v$ componentes, finalizando en C_{1+w-v} . La trayectoria correspondiente a g en C_{1+w-v} nos lleva a otro vértice en C_{1+w-v} y la trayectoria $a_m^{-b_m} \dots a_2^{-b_2} a_1^{-b_1}$ que corresponde a r^{-1} retorna a C_1 .

ii) Supongamos que las aristas de color h_1

van de C_i a C_1 y a C_j , $1 \neq j$. (Nuevamente asumimos que $e \in C_1$). Entonces existe $g \in C_1$ tal que $h_1^{-1}gh_1 \in C_j$, así que Ω no es normal en Γ . ■

Se deduce entonces que para Ω normal en Γ (como anteriormente), los elementos del grupo cociente Γ/Ω son las componentes de $C_h(\Gamma)$. Reduciendo cada una de estas componentes a un sólo vértice y restaurando las aristas de color h_1 , se obtiene un grafo de color de Cayley de Γ/Ω .

En general, cuando tenemos un grafo de color de Cayley $C_\Delta(\Gamma)$, con un subgrupo Ω normal o no, podemos obtener un grafo lateral derecho (de Schreier) como sigue: los vértices son las clases laterales a derecha de Ω en Γ , y existe una arista dirigida de Ωg a $\Omega g'$, etiquetada con $\delta \in \Delta$, si y sólo si $\Omega g\delta = \Omega g'$ (es decir, si y sólo si $\delta \in \Omega g^{-1}\Omega g'$). Así que $\Omega g\delta$ es una clase lateral derecho pues las clases laterales a derecha están en Γ y particionan a Γ . Note que un grafo lateral derecho puede ser un pseudografo, con lazos y/o múltiples aristas. Para el caso especial $\Omega = \{e\}$ el grafo lateral derecho es justamente el grafo de color de Cayley $C_\Delta(\Gamma)$.

En la figura 3.8 se ilustra algunas ideas dadas anteriormente. Note que $\Omega = Z_9$ es normal en S_9 , pero no en A_4 .

Resulta interesante, comparar los grupos $Z_2 \times Z_4$ y D_4 , como en la figura 3.9. Observe que los subgrupos de orden 2 generado por r es normal en $Z_2 \times Z_4$, pero no en D_4 . De manera

obvia, se extiende el comentario anterior a los grupos de la forma $Z_2 \times Z_n$ y D_n , para $n \geq 3$. Por ejemplo, ver $S_3 = D_3$ (en la figura 3.8); el subgrupo generado por r no es normal. Para un generador δ de orden 2, adoptaremos la convención estándar de representar las dos aristas dirigidas $(g, g\delta)$ y $(g\delta, g)$ en $C_\Delta(\Gamma)$ por una simple arista $[g, g\delta]$.

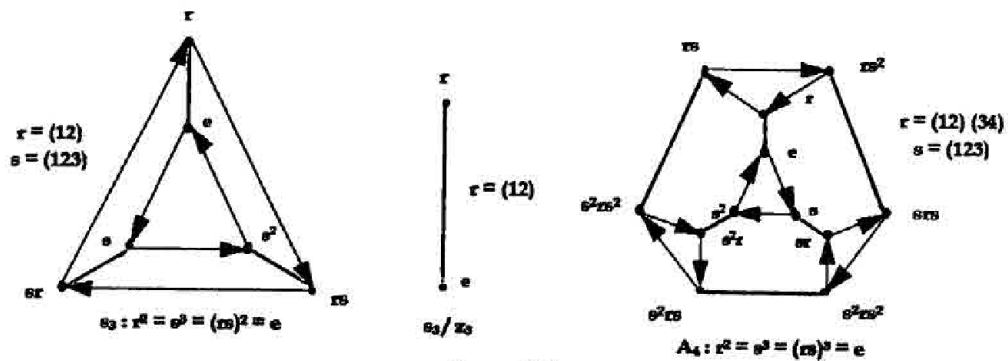


figura 3.8

En la figura 3.10 indicamos el grafo lateral derecha para $\Omega = \{e, r\}$, en $\Gamma = D_4$ (ver figura 3.9).

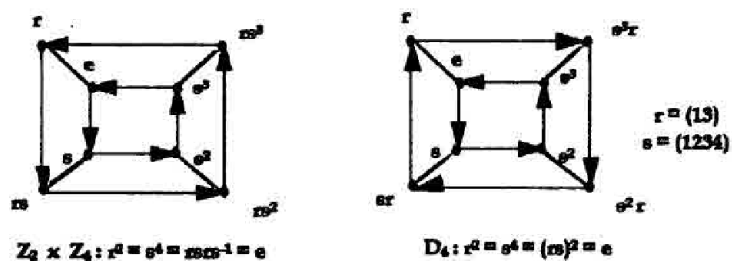


figura 3.9

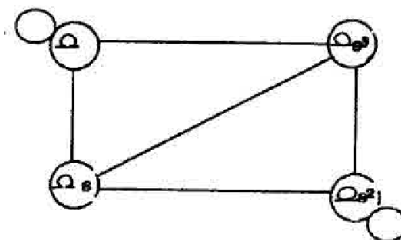


figura 3.10

Nota 3.16: Todo grafo conexo regular de grado par determina un grafo lateral de Schreier.

3.4. PRODUCTOS.

Veamos ahora la relación entre producto de grupos y producto cartesiano para grafos.

Definición 3.17: Sea Γ_1 y Γ_2 ambos subgrupos del mismo grupo Γ , con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{e\}$ y $gh = hg \ \forall g \in \Gamma_1, h \in \Gamma_2$. Entonces el producto directo de Γ_1 y Γ_2 , $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \{gh/g \in \Gamma_1, h \in \Gamma_2\}$ es también un subgrupo de Γ .

Si $\Gamma_1 = \langle K_1, \dots, K_m / W_1 = \dots = W_r = e \rangle$ y

$\Gamma_2 = \langle K_{m+1}, \dots, K_n / W_{r+1} = \dots = W_{r+s} = e \rangle$,

entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \times \Gamma_2 &= \langle k_1, \dots, k_n / W_1 = \dots = W_{r+s} \\ &= k_i k_j^{-1} k^{-1} = e, \ \forall 1 \leq i \leq m < j \leq n \rangle. \end{aligned}$$

es una presentación estándar para $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Esta operación binaria se puede extender a la clase de todos los grupos, considerando que $\Gamma_1 \cong \Gamma_1^1 = \{(g, e_2) / g \in \Gamma_1, e_2 \text{ es la identidad de } \Gamma_2\}$, $\Gamma_2 \cong \Gamma_2^1 = \{(e_1, h) / h \in \Gamma_2, e_1 \text{ es la identidad de } \Gamma_1\}$, y definiendo así $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \{(g, h) \text{ tal que } g \in \Gamma_1, h \in \Gamma_2\}$, con $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ dada por la operación del grupo.

Teorema 3.18: (El teorema fundamental para Grupos Abelianos).

Sea Γ un grupo finito abeliano de orden n ; entonces $\Gamma = Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots \times Z_{m_r}$, donde m_i divide a m_{i-1} , $i = 1 \dots r$ y $\prod_{i=1}^r m_i = n$; además, esta descomposición es única (Así mismo que $m_r > 1$, al menos que $n = 1$, en cuyo caso $m_r = r = 1$).

Definición 3.19: El rango del grupo abeliano Γ es el número r del teorema 3.18.

El teorema 3.18 especifica la estructura de los grupos finitos abelianos. El próximo teorema especifica, como un corolario, un grafo de color de Cayley para cada grupo finito abeliano.

Definición 3.20: El producto cartesiano, $C_{\Delta_1}(\Gamma_1) \times C_{\Delta_2}(\Gamma_2)$ de dos grafos de color de Cayley está dado por :

$$V(C_{\Delta_1}(\Gamma_1) \times C_{\Delta_2}(\Gamma_2)) = V(C_{\Delta_1}(\Gamma_1)) \times V(C_{\Delta_2}(\Gamma_2))$$

y (g_1, g_2) está unido a (g'_1, g'_2) por una arista de color h si y sólo si:

i) $g_1 = g_1'$ y $g_2 h = g_2'$, para h un generador de Δ_2 ó

ii) $g_2 = g_2'$ y $g_1 h' = g_1'$, para h un generador en Δ_1 .

La figura 3.11 muestra $C_{\Delta_1}(Z_1) \times C_{\Delta_2}(Z_2)$, donde $Z_1 = \langle x/x^2 = e \rangle$ y $Z_2 = \langle y/y^2 = e \rangle$.

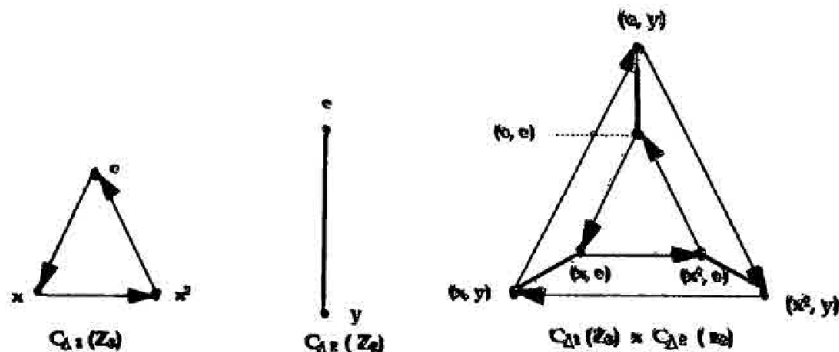


figura 3.11

Teorema 3.21: Sea $C_{P_i}(\Gamma_i)$ el grafo de color Cayley asociado a una presentación P_i para el grupo Γ_i , $i = 1, 2, \dots$. Sea P una presentación estandar para $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Entonces $C_P(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = C_{P_1}(\Gamma_1) \times C_{P_2}(\Gamma_2)$.

Demostración: Primero, note que

$$\begin{aligned} V(C_{P_1}(\Gamma_1) \times C_{P_2}(\Gamma_2)) &= V(C_{P_1}(\Gamma_1)) \times V(C_{P_2}(\Gamma_2)) \\ &= V(C_P(\Gamma_1 \times \Gamma_2)). \end{aligned}$$

Mostraremos que los conjuntos de aristas de los dos grafos de color Cayley coinciden (adyacencia dirigida de color).

i) Sea (g_1, g_2) una arista unida a (g'_1, g'_2) por la arista de color h en $C_P(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Entonces $h = k_i$, para algún $1 \leq i \leq n$. Si $1 \leq i \leq m$, entonces h es un generador de Γ_1 , y $(g'_1, g'_2) = (g_1, g_2)(h, e_2) = (g_1 h, g_2)$, así que $g'_1 = g_1 h$ y $g'_2 = g_2$; es decir, esta dirigida la arista de color en $C_P(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ es también en $C_{P_1}(\Gamma_1) \times C_{P_2}(\Gamma_2)$. Un argumento similar se aplica para $m < i \leq n$, así que

$$E(C_P(\Gamma_1 \times \Gamma_2)) \subseteq E(C_{P_1}(\Gamma_1) \times C_{P_2}(\Gamma_2)),$$

con lo cual se demuestra el teorema. ■

Puesto que el grupo cíclico Z_n con presentación $P: Z_n = \langle x/x^n = e \rangle$, tiene el grafo de color de Cayley $C_P(Z_n) = C'_n$ (donde C'_n denota el ciclo dirigido de longitud n), este se construye fácilmente usando el teorema 3.18 y la definición 3.19, un grafo de color de Cayley para cualquier grupo finito abeliano.

Teorema 3.22: Sea Γ un grupo finito abeliano; entonces

$C'_{m_1} \times C'_{m_2} \times \dots \times C'_{m_r}$ es un grafo de color de Cayley para el grupo Γ , donde $\Gamma = Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots \times Z_{m_r}$

3.5 GRAFOS CAYLEY.

Sea Δ un conjunto generador para el grupo Γ sujeto a

las siguientes condiciones:

- i) $e \in \Delta$.
- ii) Si $\delta \in \Delta$, $\delta^{-1} \in \Delta$ (a menos que $\delta^2 = e$).

También, adoptaremos la siguiente convención:

- i) Si $\delta \in \Delta$, $\delta^2 = e$ cada par $(g, g\delta)$ y $(g\delta, g)$ de aristas dirigidos son compactadas en una sola arista no dirigida $[g, g\delta]$.

Entonces el pseudografo obtenido del grafo de color de Cayley $C_{\Delta}(\Gamma)$ por la eliminación de las direcciones de todas las aristas y todas las etiquetas de las aristas (colores) no tiene lazos (por i) y no tiene múltiples aristas (por ii) y (iii); este es un grafo cociente.

Definición 3.23: Si Δ satisface (i), (ii), y (iii) como anteriormente, entonces el grafo base del grafo de color Cayley $C_{\Delta}(\Gamma)$ es llamado un **grafo Cayley** y es denotado por $G_{\Delta}(\Gamma)$.

Evidentemente que, al pasar de $C_{\Delta}(\Gamma)$ a $G_{\Delta}(\Gamma)$, se pierden algunas propiedades estructurales.

CONCLUSIONES

Basados en los resultados obtenidos en esta investigación podemos hacer las siguientes conclusiones:

1. La interacción entre grupos y grafos es un instrumento que permite utilizar de cara a cada problema metodologías más favorables: como ejemplo problemas de enumeración (Polya), problemas de grafos hamiltonianos.

2. En general, cualquiera que sea el grafo G siempre se le puede asociar un grupo de automorfismos previa descomposición. En consecuencia, por el isomorfismo establecido entre los grupos de automorfismos $\Lambda(G)$, $A^*(G)$ y $A'(G)$ (salvo algunos casos especiales), podemos ver que en última instancia la determinación del grupo de automorfismos del grafo se reduce al siguiente problema: construir el grupo de automorfismos de un grafo conexo.

3. Las conexiones entre las operaciones gráficas definidas

sobre los grafos y las operaciones entre grupos de permutaciones permiten de manera directa obtener el grupo de automorfismos de algunos grafos especiales via isomorfismo.

4. Mas interesante resulta ser el hecho de que podemos ver al grafo de color de Cayley, como una "gráfica" del grupo y que precisamente el grupo es el grupo de automorfismos del grafo de color de Cayley (via isomorfismo), independientemente del conjunto de generadores seleccionado para el grupo. En esta gráfica del grupo se pueden observar algunas propiedades del grupo como conmutatividad, normalidad de ciertos subgrupos, etc.. Aún más, este grupo resulta ser el grupo de automorfismos de un grafo construido a partir del grafo de color de Cayley.

RECOMENDACIONES

1. En los cursos de teoría de grupo se le debe dar el adecuado énfasis al estudio de los grupos finitos y de los grupos de permutaciones.
2. Los cursos de teoría de grafos deben profundizar mas los aspectos combinatorios pertinentes.
3. Vista la dificultad en la recopilación de la bibliografía específica de teoría de grafos se recomienda la adquisición de libros actualizados de este tema.

BIBLIOGRAFIA

1. Berge, Claude. **Graphs and Hypergraphs.** North Holland, Amsterdam, 1973.
2. Birkhoff, G. and MacLane, S. A. **A Survey of Modern Algebra.** Macmillan, N. Y., 1977.
3. Busacker, Robert G. and Saaty, Thomas L. **Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications.** McGraw Hill Book Company, N. Y., 1965.
4. Deo, Marsingh. **Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.** Prentice Hall, Inc., N. Y., 1974.
5. El-Hawary, M.E. and Christensen, G.S. **Optimal Economic Operation of Electric Power Systems.** Academic Press, N. Y., 1979.
6. Harary, Frank. **Graph Theory.** Addison Wesley. Reading, Mass, 1969.

7. Herstein, I. N. **Topics in Algebra**, 2nd ed.. Wiley, N.Y., 1975.
8. Jacobson, N. **Basic Algebra**, Vols II. Freeman, San Francisco, 1980.
9. Kurosh, A. G. **Lectures on General Algebra**. Chelsea, N.Y., 1965.
10. Lang, S. **Algebra**. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
11. Lidl, Rudolf and Pilz, Gunter. **Applied Abstract Algebra**. Springer-Verlag, N. Y. Inc., 1984.
12. Liu, C. L. **Introduction to Combinatorial Mathematics**. McGraw Hill Book Company, N. Y., 1968.
13. Lombardo Rádier, L. **Istituzioni di Algebra Astratta**. Ferthinelli, Milan, 1964.
14. Maxwell, Lee M. and Reed, Myril B. **The Theory of**

Graphs: A Basis for Network Theory. Pergamon Press, N. Y., 1971.

15. Roberts, Fred S. **Graph Theory and Its Applications to the Problems of Society.** Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1978.

16. White, Arthur T. **Graphs, Groups and Surfaces.** North-Holland Amsterdam, 1984.

17. Wilson, Robin. **Introduction to Graph Theory.** Second edition. Longman Group Limited London, 1979.

18. Wilson Robin and Watkins, John. **An Introduction Approach Graph.** John Wiley and Sons, Inc. 1990.

19. Yousef Alavi, Fan R. K. Chung and Ronald L. Graham. **Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, and Applications.** Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1991.

20. Zappa, G. and Permutti, Rodolfo. **Gruppi, Corpi, Equazioni.** Ferthinelli, Milan, 1965.