UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE LOS ESPACIOS LINEALES TOPOLOGICOS C-SECUENCIALES Y S-BORNOLOGICOS

POR:

JULIO ALBERTO VALLARINO RANGEL

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Aprobado por:

Director de Tesis: ______________________
Jorge Rojo M. Ph.D.

Miembro del Jurado: ______________________
Oscar Valdivia G., Ph.D.

Miembro del Jurado: ______________________
Augusto Arriagada, M.Sc.

Fecha: 27 de Septiembre de 1982

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA, R. DE P.

D E D I C A T O R I A

Quiero dedicar este humilde trabajo a quienes se constituyeron en el soporte de este logro y que sin ellos no hubiese sido posible
Es por esto que:

Quiero dedicarlo a mis amados padres YOLANDA y ALBERTO (q.e p.d.) y mi querida tía NIDIA por darme el ser y las enseñanzas que me han permitido caminar por este mundo

Quiero dedicarlo a mis adorados hijos ISIS, IRIS, ALBERTO ZOEMY y YARISEL, quienes sin siquiera suponerlo se constituyeron en la fuente de energia que impulsó mis esfuerzos,

Quiero dedicarlo a mi amantisima esposa XIOMARA que estoicamente supo soportar y comprender mi casi total ausencia de nuestro hogar,

Quiero dedicarlo a mis fieles compañeros de estudios ENRIQUE, JUAN MANUEL WENCESLAO ROBERTO, MARIA DIXIANA, JOSE RAFAEL y MANUELA porque nunca dejaron de confiar en mi,

Quiero dedicarlo a mi apreciado padre FERNANDO, por su apoyo y sus voces de aliento en los momentos más difíciles,

Quiero dedicarlo a todos aquellos que no he mencionado y que en algún momento de mi existencia contribuyeron desinteresadamente para que este momento fuese una realidad y,

Quiero dedicarlo a todo lo bello de este mundo y al SEÑOR TODOPODEROSO, por permitir que todo lo que ha acontecido, aconteciera.

HBallarino

A G R A D E C I M I E N T O

Quiero expresar en estas pequeñas lineas mi más profundo y sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la culminación de este paso de la realización académica de la Universidad de Panamá. Por esto·

Quiero expresar a mi Profesor JORGE ROJO, mi agradecimiento por sus sabias enseñanzas, atinados consejos e infinita paciencia,

Quiero expresar al Profesor OSCAR VALDIVIA, mi agradecimiento por sus enseñanzas y desvelos,

Quiero expresar al Coordinador del Programa de Maestría, EDUARDO STEELE, mi agradecimiento por soportar tantas cosas por nuestro bienestar,

Quiero expresar al Vice-Rector de Investigación y Post-Grado, ABDIEL ADAMES, mi agradecimiento por sus esfuerzos para hacer de este sueño una realidad,

Quiero expresar al Vice-Rector Académico ALFREDO SOLER B., mi agradecimiento por su apoyo al Departamento de Matemática en este periodo,

Quiero expresar al ex-Rector DIOGENES CEDEÑO CENCI, mi agradecimiento por permitir que el programa fuese puesto en marcha y,

Quiero expresar al Rector CEFERINO SANCHEZ, mi agradecimiento por su confianza en los estudiantes del programa.

INDICE

INTRODUCCION

El trabajo que estamos presentando como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática, posee las siguientes características que de inmediato señalaremos.

En primer lugar, se inspira en el problema de la generalización del resultado válido en general para espacios normados, que afirma:

> "Si $(E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)$ son espacios normados y $f:E\longrightarrow F$ lineal y localmente acotada, entonces $f:E\longrightarrow F$ continua"

El resultado anterior, deja de ser válido en general cuando en lugar de considerar espacios normados se consideran espacios lineales topológicos arbitrarios.

Con el objeto de caracterizar los espacios lineales topológicos que mantienen la mencionada propiedad, Mackey ([5]) y Bourbaki ([2]) introducen los espacios lineales topológicos localmente convexos bornológicos.

En el caso de los espacios lineales topológicos en general, el resultado que persiste es el siguiente:

> "Si $(E,\mathcal{T}),(F,\mathfrak{T})$ son espacios normados y $f:E\longrightarrow F$

lineal y secuencialmente continua, entonces $f:E \longrightarrow F$ localmente acotada".

De esta manera, para los espacios lineales topológicos localmente convexos bornológicos en general y los espacios normados en particular, se tienen los siguientes resultados:

"Sean (E,τ) un espacio lineal topológico localmente convexo bornológico, $(F,\mathcal{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo y $f:E \longrightarrow F$ lineal.

(a) Si $f:E \longrightarrow F$ secuencialmente continua entonces $f:E \longrightarrow F$ contínua.

(b) Si $f:E \longrightarrow F$ localmente acotada entonces $f:E \longrightarrow F$ secuencialmente continua".

Podemos observar que, para las propiedades dadas en (a) y (b), la hipótesis "(E,τ) espacio lineal topológico localmente convexo bornológico" es "excesiva" en el sentido de que las condiciones "continuidad secuencial" y "acotación local" implican ambas la continuidad de la aplicación lineal.

En esta dirección Wilansky ([10]) y Snipes ([9]) introducen la clase de los espacios lineales topológicos que, poseyendo la propiedad dada en (a), no poseen la propiedad dada en (b) y viceversa.

A estos espacios los denominan "Espacios Lineales topológicos C-secuenciales" y "espacios lineales topológicos S-bornológicos" según que posean la propiedad (a) o la propiedad (b) respectivamente y son estos espacios, el objeto de nuestro estudio.

En otra dirección, la presentación de nuestro trabajo no lleva el esquema usual, en el sentido de desarrollarse por capítulos y secciones además de una rigurosa numeración de las definiciones, proposiciones y teoremas.

Hemos querido ensayar un tipo de presentación en donde, el cuerpo del trabajo está dividido por "áreas" específicas con sus nombres precisos y en donde no se tiene ningún tipo de numeración para las definiciones, proposiciones y teoremas.

Para ello, hemos tenido que superar una serie de dificultades, escogiendo cuidadosamente el momento preciso de presentar las definiciones, de enunciar las proposiciones (que involucran propiedades) y los teoremas, para evitar que el lector tenga que mantener por mucho tiempo las mismas, antes de utilizarlas. Además, hemos insertado a lo largo del contexto, una serie de indicaciones al lector, con el objeto de señalarle el por qué del próximo paso, el objetivo inmediato que perseguimos y la vía que utilizaremos. Por último, en la redacción del mismo, hemos evitado al máximo el uso excesivo de la simbología, con el fin de que su lectura sea más ágil y que responda a nuestra concepción de la presentación.

Finalmente, el trabajo consta de cuatro áreas· en la primera, que hemos titulado "Espacios lineales topológicos C-secuenciales", hacemos el estudio de los mencionados espacios, además de examinar algunas de sus propiedades, lograr algunas caracterizaciones y construir la topología C-secuencial· en la segunda, que titulamos "Espacios lineales topológicos S-bornológicos", hacemos un trabajo similar al primero, para los espacios lineales topológicos S-bornológicos; en la tercera, que denominamos "Propiedades de Permanencia", estudiamos los límites inductivos, los límites inductivos estrictos, productos y subespacios densos de ambos tipos de espacios, y en la cuarta, que simplemente hemos llamado "Ejemplos y Contraejemplos", presentamos modelos específicos de estos espacios, que nos permiten afirmar que ninguna de las dos clases de espacios estudiados incluye estrictamente a la otra.

Para finalizar, queremos advertir que la lectura del trabajo exige el conocimiento general de los Principios del Análisis Funcional, que se podría obtener del estudio de Rojo ([8]) o de Horvath ([4]) por ejemplo· además de la consideración de que todos los espacios lineales topológicos estudiados en el mismo son espacios topológicos de Hausdorff (T_2).

ESPACIOS LINEALES TOPOLOGICOS

C-SECUENCIALES

Antes de formalizar, mediante una sola definición, los espacios lineales topológicos C-secuenciales, daremos algunas otras definiciones previas, que utilizaremos en la formalización de los mencionados espacios.

En este sentido, es necesario definir los subconjuntos secuencialmente cerrados y secuencialmente abiertos de un espacio topológico en general.

<u>Definición</u> (Subconjuntos secuencialmente cerrados)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es un subconjunto <u>secuencialmente cerrado</u> de E, si y solo si, para todo punto $x \in E$ si existe una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que la sucesión (x_n) converge a x según $\mathcal{T}$ entonces $x \in A$.

De otra manera:

$$A \subseteq E \text{ secuencialmente cerrado} \Longleftrightarrow \left[(\forall x \in E)(\exists (x_n) \subseteq A : x_n \longrightarrow x) \Longrightarrow x \in A\right]$$

<u>Definición</u> (Subconjuntos secuencialmente abiertos)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es un subconjunto <u>secuencialmente abierto</u> de E, si y solo si, el complemento de A en E, esto es A^C es secuencialmente cerrado.

De otra manera·

$A \subseteq E$ secuencialmente abierto $\Longleftrightarrow \left[(\forall x \in E)(\exists (x_n) \subseteq A^C,\right.$

$x_n \longrightarrow x) \Longrightarrow x \in A^c]$

Estamos en este momento, en condiciones de dar una definición de espacio lineal topológico C-secuencial.

Definición (Espacio lineal topológico C-secuencial)

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. (E, τ) se denomina Convexo-Secuencial o simplemente C-secuencial si y solamente si, todo subconjunto convexo secuencialmente abierto $A \subseteq E$, es abierto según τ ó τ-abierto.

Nuestro siguiente paso será el de caracterizar las vecindades secuenciales de un punto en un espacio topológico en general.

Definición (Vecindad secuencial)

Sean (E, τ) un espacio topológico, $V \subseteq E, x \in E$. Se dice que $V \subseteq E$ es una vecindad secuencial de $x \in E$, si y solamente si, toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ que converge según τ a x, está eventualmente en V. De otra manera:

$V \subseteq E$ vecindad secuencial de $x \in E \Longleftrightarrow [\forall (x_n) \subseteq E,\ x_n \xrightarrow{\tau} x \Longrightarrow (x_n)$ e.e. en $V] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow [\forall (x_n) \subseteq E,\ x_n \xrightarrow{\tau} x \Longrightarrow \exists N \geq 1$, tal que $\forall n \geq N$, $x_n \in V]$

Las proposiciones a continuación están dirigidas a reconocer algunas propiedades de los subconjuntos secuenciales abiertos y de las vecindades secuenciales disqueadas del origen, en el contexto de los espacios topológicos en general para el primer objeto y en el de los espacios lineales topológicos para el segundo.

Proposición

Sean (E,τ) un espacio topológico, $V\subseteq E$. Entonces: para que $V\subseteq E$ sea secuencialmente abierto es condición necesaria y suficiente que, para toda sucesión $(x_n)\subseteq E$ y todo punto $x\in V$, tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$ se tenga que la sucesión (x_n) esté eventualmente en V.

Demostración

Condición Necesaria

Supongamos que nuestra tesis es falsa; entonces existe una sucesión $(x_n)\subseteq E$ y existe $x\in V$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$ y (x_n) no e.e. en V.

Luego para todo $m\geqslant 1$, existe $x_{n_m}\in V^C$, pero $x_n \xrightarrow{\tau} x$, entonces $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$, donde $(x_{n_m})\subseteq V^C$.

Como V^C es secuencialmente cerrado, puesto que por hipótesis V es secuencialmente abierto, entonces $x\in V^C$, lo cual es una contradicción.

De esta manera hemos probado que necesariamente (x_n) está eventualmente en V.

Condición Suficiente

Supongamos nuevamente que nuestra tesis es falaz esto es que V no es secuencialmente abierto, luego V^C no es secuencialmente cerrado. Entonces, existe una sucesión $(x_n) \subseteq V^C$ y existe $x \in V$, tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$

Luego, existe $(x_n) \subseteq E$ y existe $x \in V$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$, pero (x_n) no está eventualmente en V, puesto que $(x_n) \subseteq V^C$, lo cual es contradictorio. Así probamos que V es secuencialmente abierto. ■

Proposición

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico, $V \subseteq E$ una vecindad secuencial disqueada del origen en E. Entonces: V es absorbente.

Demostración

Sea $V \subseteq E$ una vecindad secuencial disqueada del origen en E y supongamos que V no es absorbente Entonces, existe $x \in E$, tal que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x \notin nV$, luego, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{x}{n} \notin V$, lo que implica que $(\frac{x}{n}) \in V^C$.

Como $\{x\}$ es τ-acotado y $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, entonces $\frac{x}{n} \xrightarrow{\tau} 0$. Tenemos entonces que $(\frac{x}{n}) \notin E$, $\frac{x}{n} \xrightarrow{\tau} 0$ y $(\frac{x}{n})$ no e.e en V, luego V no es una vecindad secuencial del origen, lo cual es una contradicción

Así entonces, V es absorbente. ■

Proposición

Sean (E, τ) un espacio lineal topológico, $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una Semi-norma sobre E. Entonces: para que $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ sea secuencialmente continua es necesario y suficiente que $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ sea una vecindad disqueada y secuencialmente abierta del origen en E.

Demostración

Condición Necesaria

Supongamos que $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una semi-norma secuencialmente continua y consideremos el conjunto $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$.

Puesto que p es una semi-norma, entonces V_p es un disco absorbente.

Demostremos ahora que V_p es secuencialmente abierto. Para ello consideremos $V_p^C = \{x \in E : p(x) \geqslant 1\}$ y $(x_n) \subseteq V_p^C$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in V_p^C$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $p(x_n) \geqslant 1$ y puesto que p es secuencialmente continua y $x_n \xrightarrow{\tau} x$, tendremos $p(x_n) \longrightarrow p(x)$ de donde $\lim_{n \to \infty} p(x_n) = p(x) \geqslant 1$, por lo que $x \in V_p^C$, con lo que V_p^C es secuencialmente cerrado y por tanto V_p es secuencialmente abierto.

Condición Suficiente

Supongamos ahora que

$V_p = \{x \in E : p(x)<1\}$ es una vecindad disqueada secuencialmente abierta del origen en E.

Tendremos entonces que V_p es absorbente, de donde el funcional de Minkowski g_{V_p} de V_p, es una semi-norma.

Veamos que g_{V_p} es secuencialmente continua.

Supongamos que no lo fuera: entonces existe $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ y $g_{V_p}(x_n) \not\to 0$, esto es:

$\exists\, \varepsilon > 0$, tal que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_m \in \mathbb{N}$ tal que $g_{V_p}(x_{n_m}) \geqslant \varepsilon$, pero esto nos lleva a que $g_{V_p}(x_{n_m}/\varepsilon) \geqslant 1$, lo que nos dice que $x_{n_m}/\varepsilon \notin V_p$ o que $x_{n_m}/\varepsilon \in V_p^C$ y puesto que $x_{n_m} \longrightarrow 0$ y V_p^C es secuencialmente cerrado, tendríamos $0 \in V_p^C$, lo cual es una contradicción.

De esta manera hemos probado que g_{V_p} es secuencialmente continua. ■

<u>Proposición</u>

Sean (E,τ) y $(F,\Im)$ espacios topológicos, $V \subseteq E$ un abierto secuencial y $h: E \longrightarrow F$ un homeomorfismo de E en F. Entonces, $h(V)$ es un abierto secuencial.

<u>Demostración</u>

Sea $V \subseteq E$ un abierto secuencial. Consideremos $[h(V)]^C$ y $(x_n) \subseteq [h(V)]^C$ con $x_n \xrightarrow{\Im} x$.

Puesto que $[h(V)]^C = h(V^C)$, entonces $(h^{-1}(x_n)) \subseteq V^C$ con $h^{-1}(x_n) \xrightarrow{\tau} h^{-1}(x)$ dado que h es un homeomorfismo.

Como V^C es cerrado secuencial, puesto que por hipótesis V es abierto secuencial, entonces $h^{-1}(x) \in V^C$, luego $h(h^{-1}(x)) = x \in h(V^C) = [h(V)]^C$, por tanto $h(V)^C$ es cerrado secuencial, con lo que $h(V)$ es abierto secuencial de $(F, \mathfrak{J})$. ■

<u>Proposición</u>

Sean $(E, \mathfrak{T})$ y $(F, \mathfrak{J})$ espacios topológicos $h: E \longrightarrow F$ un homeomorfismo, $V \subseteq E$ una vecindad secuencial de $x \in E$. Entonces $h(V)$ es una vecindad secuencial de $h(x)$ en $(F, \mathfrak{J})$.

<u>Demostración</u>

En efecto, sea $(y_n) \subseteq F$ con $y_n \xrightarrow{\mathfrak{J}} h(x)$, como h es un homeomorfismo $h^{-1}(y_n) \xrightarrow{\mathfrak{T}} x$ y dado que V es vecindad secuencial de $x \in E$, $\exists\, N \geqslant 1$, tal que $\forall\, n \geqslant N$ se tiene $h^{-1}(y_n) \in V$. Luego $\exists\, N \geqslant 1$, tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, se tiene $y_n \in h(V)$ con lo que $h(V)$ es una vecindad secuencial de $h(x)$ en $(F, \mathfrak{J})$. ■

Una vez obtenidas las propiedades mostradas en las pro posiciones anteriores nuestro objetivo inmediato será el de enunciar el Teorema que nos brindará la primera caracterización de los espacios C-secuenciales en función de: los abiertos de la topología, los subconjuntos secuencialmente abiertos, las semi-normas secuencialmente continuas, las vecindades del origen para la topología y las vecindades secuenciales del origen.

Teorema

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $(E, \mathcal{T})$ es C-secuencial

(ii) Todo disco secuencialmente abierto de E es $\mathcal{T}$-abierto.

(iii) Toda semi-norma secuencialmente continua sobre E, es continua.

(iv) Toda vecindad secuencial disqueada del origen en E es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E.

(v) Toda vecindad secuencial convexa del origen en E es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii)

En efecto, si $(E, \mathcal{T})$ es C-secuencial, entonces todo convexo secuencialmente abierto de E es $\mathcal{T}$-abierto, luego, en particular todo convexo equilibrado (disco) secuencialmente abierto de E, será $\mathcal{T}$-abierto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Supongamos que todo disco secuencialmente abierto de E es $\mathcal{T}$-abierto, y consideremos $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una semi-norma secuencialmente continua sobre E. Probemos que p es continua mostrando que $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E.

En efecto, puesto que p es una semi-norma secuencialmente continua, entonces V_p es una vecindad disqueada secuencialmente abierta del origen en E, y por (ii) V_p será una vecindad disqueada τ-abierta del origen en E, esto es $V_p \in \tilde{\mathcal{V}}(0,\tau)$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Asumamos ahora que toda semi-norma secuencialmente continua sobre E es continua y consideremos $V \subseteq E$ una vecindad secuencial disqueada del origen en E. Probaremos que $V \in \tilde{\mathcal{V}}(0,\tau)$, mostrando que g_V, el funcional de Minkowki de V, es continuo.

Puesto que V es una vecindad secuencial disqueada del origen en E, entonces V es absorbente y de esta manera $g_V : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una semi-norma secuencialmente continua, de donde por (iii) g_V es continua.

(iv) $\Longrightarrow$ (v)

Presentaremos la demostración en dos fases atendiendo el hecho de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Para el primero de los casos ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), sea V una vecindad secuencial convexa del origen en E.

Probaremos que V es una τ-vecindad del origen en E, mostrando que contiene una de tales τ-vecindades.

Para tal efecto consideremos el subconjunto de E, $W = V \cap (-V)$

Tenemos que W es convexo por ser intersección de convexos y vecindad secuencial del origen en E, por ser intersección de vecindades secuenciales del origen.

Por otro lado, W es simétrico puesto que si $x \in V \cap (-V)$, entonces, también $-x \in V \cap (-V)$ y siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tendremos que W es equilibrado.

Así pues, W es una vecindad secuencial disqueada del origen en E y por (iv), W es una $\mathcal{T}$-vecindad.

Finalmente basta recordar que $W = V \cap (-V) \subseteq V$.

Para el segundo caso, esto es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sea $V \subseteq E$ una vecindad secuencial convexa del origen en E, utilizando el argumento al que recurrimos en el caso anterior para mostrar que V es una $\mathcal{T}$-vecindad. Consideremos en esta ocasión, U el núcleo equilibrado de V.

Puesto que $0 \in V$, entonces $U \neq \emptyset$, de donde $U = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda V$, y como por hipótesis V convexo, U también lo es.

Probaremos ahora que U es una vecindad secuencial del origen en E, mostrando que contiene una vecindad de ese tipo.

Con este fin, sea $W = \frac{1}{2}\left[V \cap (-V) \cap (iV) \cap (-iV)\right]$

Es inmediato que W es vecindad secuencial del origen en E, puesto que es intersección de vecindades secuenciales del origen en E.

Demostraremos ahora que $W \subseteq U$, con lo cual U será veciendad secuencial del origen en E.

Sean $x \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \geqslant 1$. Entonces $|\alpha^{-1}| \geqslant 1$

Sean además $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1} = \alpha_1 + i\alpha_2$ y $S = |\alpha_1| + |\alpha_2|$

Así tendremos que:

$$\alpha^{-1}x = \alpha_1 x + i\alpha_2 x = S\left[\frac{|\alpha_1|}{S}(\operatorname{sgn}\alpha_1)\, x + \frac{|\alpha_2|}{S}(i \operatorname{sgn}\alpha_2)x\right]$$

Haciendo $x_1 = (\operatorname{sgn}\alpha_1)x$ y $x_2 = (i \operatorname{sgn}\alpha_2)x$ tendremos:

$$\alpha^{-1}x = S\left[\frac{|\alpha_1|}{S}x_1 + \frac{|\alpha_2|}{S}x_2\right]$$

Dado que W es invariante bajo la multiplicación de $1, -1, i, -i$, tendremos que $x_1, x_2 \in W$ y puesto que W es convexo por ser intersección de convexos, entonces $\frac{|\alpha_1|}{S}x_1 + \frac{|\alpha_2|}{S}x_2 \in W$.

Como $|\alpha^{-1}| \leqslant 1$, entonces $S = |\alpha_1| + |\alpha_2| \leqslant |\alpha^{-1}| + |\alpha^{-1}| \leqslant 2$

Por otro lado, teniendo que $W \subseteq \frac{1}{2}V$ entonces:

$$2\left(\frac{|\alpha_1|}{S}x_1 + \frac{|\alpha_2|}{S}x_2\right) = \frac{2}{S}(|\alpha_1|\, x_1 + |\alpha_2|\, x_2) \in V$$

Utilizando el hecho de que V es convexo y el hecho de que $\frac{S}{2} \leqslant 1$, tendremos

$$\begin{aligned}(\tfrac{S}{2})(\tfrac{2}{S})(|\alpha_1|\, x_1 + |\alpha_2| x_2) + (1 - \tfrac{S}{2})(0) &= \alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2\\ &= |\alpha_1|(\operatorname{sgn}\alpha_1)x_1 + |\alpha_2|(i \operatorname{sgn}\alpha_2)x_2\\ &= \alpha_1\, x_1 + i\,\alpha_2 x_2\\ &= \alpha^{-1}x \in V\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\alpha^{-1}x \in V$, tendremos $x \in \alpha V, \forall |\alpha| \geqslant 1$, entonces $x \in U$, de donde $W \subseteq U$.

Así pués, U es una vecindad secuencial disqueada del origen en E, y por (iv) U es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E.

Finalmente bastará reconocer que $U \subseteq V$ para concluir que $V \in \tilde{\mathcal{V}}(0, \tau)$

$$(v) \Longrightarrow (i)$$

Supongamos finalmente que toda vecindad secuencial convexa del origen en E es una τ-vecindad del origen en E.

Por el hecho de que las traslaciones son homeomorfismos, la afirmación anterior es equivalente a la siguiente proposición:

"Toda vecindad secuencial convexa de un punto es una τ-vecindad de dicho punto".

Así pues, si A es un abierto secuencial convexo, entonces A es vecindad secuencial convexa de cada uno de sus puntos y (v) nos lleva a que A es una τ-vecindad de cada uno de sus puntos, de donde A es τ-abierto. ∎

La proposición que estudiaremos de inmediato nos permitirá caracterizar las aplicaciones lineales secuencialmente continuas entre espacios lineales topológicos, a partir de las vecindades secuenciales del origen del espacio dominio.

Proposición

Sean (E,τ), (F,Υ) espacios lineales topológicos y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal de E en F.

Una condición necesaria y suficiente para que f sea secuencialmente continua, es que la imagen inversa por f de toda $\mathfrak{T}$-vecindad del origen en F, sea una vecindad secuencial del origen en E.

Demostración

Condición Necesaria

En efecto, supongamos $V \subseteq F$ una $\mathfrak{T}$-vecindad del origen en F, con V $\mathfrak{T}$-abierta. Entonces V^c resultará $\mathfrak{T}$-cerrada y por tanto contendrá todos los puntos límites de sus sucesiones convergentes.

Consideremos ahora $(x_n) \subseteq [f^{-1}(V)]^c$ con $x_n \xrightarrow{\mathfrak{T}} x$.

Como $[f^{-1}(V)]^c = f^{-1}(V^c)$, entonces $f(x_n) \subseteq V^c$ y además, $f(x_n) \xrightarrow{\mathfrak{T}} f(x)$, puesto que por hipótesis, f secuencialmente continua.

Dado que V^c $\mathfrak{T}$-cerrado, entonces $f(x) \in V^c$, lo que nos lleva a que $x \in f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$

De esta manera hemos probado que $[f^{-1}(V)]^c$ es secuencialmente cerrado en E y por tanto $f^{-1}(V)$ es secuencialmente abierta, de donde $f^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en E.

Condición Suficiente

Puesto que por hipótesis $f:E \longrightarrow F$ es lineal, bastará que demostremos la continuidad secuencial de f en las sucesiones convergentes al origen en E.

Para tal efecto, sea $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \longrightarrow 0$ y sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathfrak{T})$

Como $V \in \mathcal{V}(0, \mathfrak{T})$, entonces por hipótesis $f^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en E y como $x_n \longrightarrow 0$, tendremos que $\exists\, N \geq 1$, tal que con $\forall\, n \geq N$ tendremos $x_n \in f^{-1}(V)$, con lo cual $\exists\, N \geq 1$, tal que con $\forall\, n \geq N$ se tiene $f(x_n) \in V$.

Puesto que la vecindad V del origen en F considerada es arbitraria, entonces $f(x_n) \xrightarrow{\mathfrak{T}} 0 = f(0)$.

Así pues, f es secuencialmente continua. ∎

Con la carecterización anterior de las aplicaciones lineales secuencialmente continuas entre espacios lineales topológicos, podemos lanzarnos a enunciar y demostrar el siguiente teorema, que nos dará una segunda caracterización de los espacios lineales topológicos C-secuenciales, en esta ocasión en función de las aplicaciones lineales secuencialmente continuas sobre espacios lineales topológicos localmente convexos.

<u>Teorema</u>

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Entonces:

(1) Si $(E, \mathcal{T})$ es C-secuencial; entonces dado $(F, \mathfrak{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$, una aplicación secuencialmente continua de E en F, se tiene que f es necesariamente continua.

(2) Si (E,τ) posee la propiedad a continuación:

"Dado $(F,\|\cdot\|)$, espacio lineal normado sobre $\mathbb{K}$ y $f:E \longrightarrow F$ aplicación lineal secuencialmente continua de E en F entonces, f continua", entonces (E,τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración

(1)

Supongamos que (E,τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial y sean, $(F,\mathfrak{J})$ un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y $f:E \longrightarrow F$, una aplicación lineal secuencialmente continua de E en F.

Probemos que f es continua.

Para ello, sea V una vecindad del origen en F, con V disqueada.

Puesto que f es lineal, entonces $f^{-1}(V)$ es disqueada y como f es secuencialmente continua, $f^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en E y, finalmente, como (E,τ) es C-secuencial, $f^{-1}(V)$ es una τ-vecindad del origen en E.

Así pues, f es continua.

(2)

Asumamos ahora, que (E,τ) tiene la propiedad enunciada en (2) y probemos que (E,τ) es C-secuencial.

Para ello consideremos a $V \subseteq E$, una vecindad secuencial disqueada del origen en E y probemos que V es τ-vecindad del

del origen en E.

Sea $g_V : E \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de V.

Puesto que V es disco, entonces g_V es una semi-norma y como V es una vecindad secuencial del origen en E, entonces g_V es secuencialmente continua y además, $V_{g_V} \subseteq V$.

Consideremos ahora $N = \{x \in E : g_V(x) = 0\}$

Es inmediato que N es un subespacio lineal de E, con lo cual podemos considerar el espacio lineal normado $(E/N, \|\cdot\|_V)$ donde:

E/N designa el espacio lineal cociente de E módulo N y·

$\|\cdot\|_V : E/N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\forall\, \bar{x} \in E/N, \quad \|\bar{x}\|_V = g_V(x)$

Sea ahora $\varphi : E \longrightarrow E/N$ la suryección canónica de E en E/N.

Sabemos que φ es lineal y veamos ahora que φ es secuencialmente continua. Para ello, sea $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ y probemos que $(\varphi(x_n))$ es τ-$\|\cdot\|_V$-convergente a N en E/N.

En efecto, puesto que g_V es secuencialmente continua y $x_n \longrightarrow 0$, entonces $(g_V(x_n)) \subseteq \mathbb{R}$ con $g_V(x_n) \longrightarrow 0$.

De esta manera, como $\|\varphi(x_n)\|_V = \|\bar{x}_n\|_V = g_V(x_n)$, entonces $\|\varphi(x_n)\|_V \longrightarrow 0$ de donde $(\varphi(x_n) \subseteq E/N$ es $\|\cdot\|_V$-convergente a $\varphi(0) = \bar{0} = N$.

Así pues $\varphi : E \longrightarrow E/N$ es secuencialmente continua, de donde, por hipótesis, φ será continua.

Finalmente, sea $B_{\|\cdot\|_V}$ la bola unitaria de $E/_N$.

Como φ es continua, entonces $\varphi^{-1}(B_{\|\cdot\|_V}) \in \mathcal{V}(0,\tau)$.

Pero: $$\begin{aligned}\varphi^{-1}(B_{\|\cdot\|_V}) &= \{x \in E/\ \varphi(x) \in B_{\|\cdot\|_V}\} \\ &= \{x \in E/\ \|\varphi(x)\|_V < 1\} \\ &= \{x \in E/\ g_V(x) < 1\} \\ &= V_{g_V}\end{aligned}$$

luego $V_{g_V} \in \mathcal{V}(0,\tau)$ y como $V_{g_V} \subseteq V$, se tendría que V es τ-vecindad del origen en E.

De esta manera (E,τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Corolario

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Para que (E,τ) sea C-secuencial es necesario y suficiente que posea la siguiente propiedad:

"Dado un espacio lineal topológico localmente convexo $(F,\mathcal{J})$ sobre $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal secuencialmente continua $f : E \longrightarrow F$ de E en F, entonces f es continua".

Demostración:

En efecto, la necesidad del corolario nos la brinda la condición (1) del teorema anterior y la suficiencia, la condición (2) del mismo, dado que en particular los espacios lineales normados constituyen espacios lineales topológicos localmente convexos. ■

Una vez caracterizados los espacios lineales topológicos C-secuenciales en las dos vías en que lo hemos logrado, nuestro interés se centrará en la construcción de topologías que constituyan, espacios lineales topológicos localmente convexos dados en espacios lineales topológicos C-secuenciales, así como también examinaremos algunas de sus propiedades y su relación con la topología original dada.

En este sentido enunciamos el siguiente:

Teorema

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$.

Sea $\mathcal{B}_{cs}$ la colección de todas las vecindades $\mathcal{T}$-secuenciales disqueadas del origen en E.

Entonces: $\mathcal{B}_{cs}$ es una base local de una única topología lineal que denotaremos por $\mathcal{T}_{cs}$, tal que $(E, \mathcal{T}_{cs})$ es un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$.

Además, los espacios lineales topológicos localmente convexos $(E, \mathcal{T})$ y $(E, \mathcal{T}_{cs})$ tienen las siguientes propiedades:

(j) $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_{cs}$

(jj) $(E, \mathcal{T})$ es C-secuencial si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{cs}$

(jjj) $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_{cs}$ poseen las mismas sucesiones convergentes

(jv) $\mathcal{T}_{cs}$ es la más fina de todas las topologías lineales localmente convexas sobre E, para las cuales las sucesiones convergentes son las mismas que para τ.

(v) (E, τ_{cs}) es C-secuencial

Demostración

Sea:

$\mathcal{B}_{cs} = \{V \subseteq E$: V vecindad τ-secuencial disqueada del origen en E $\}$

Mostremos que $\mathcal{B}_{cs}$ posee las propiedades exigidas en el Teorema 1 de [4]

En efecto, $\mathcal{B}_{cs}$ es una colección no vacía, puesto que toda τ-vecindad disqueada del origen en E es también una vecindad τ-secuencial disqueada del origen en E.

Por otro lado, dado $V \in \mathcal{B}_{cs}$, tenemos que $V \neq 0$, puesto que $0 \in V$.

De otra parte, dadas $V, V' \in \mathcal{B}_{cs}$, tendremos que $V \cap V' \in \mathcal{B}_{cs}$ dado que, si $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, entonces existen $N \geqslant 1$, $N' \geqslant 1$, tales que $\forall\, n \geqslant N$ y $\forall_m \geqslant N'$ se tiene $x_n \in V$ y $x_m \in V'$. Por tanto, tomando $M = \max\{N, N'\}$ obtenemos que $\forall\, n \geqslant M$, $x_n \in V \cap V'$.

Además siendo cada $V \in \mathcal{B}_{cs}$ disqueada y vecindad τ-secuencial del origen en E, se tiene que en particular cada $V \in \mathcal{B}_{cs}$ es equilibrada convexa y absorbente.

Por último, dada $V \in \mathcal{B}_{cs}$, tendremos que $U = \frac{1}{2}V \subseteq V$ es equilibrada (pues V lo es) y siendo las homotecias de razón no nulas homeomorfismos, entonces U es convexa y vecindad τ-secuencial del origen en E, por tanto $U \in \mathcal{B}_{cs}$. Finalmente, siendo V convexa, se tendrá $U + U = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subseteq V$

En consecuencia, existe una única topología que denotaremos τ_{cs} sobre E, tal que (E, τ_{cs}) es un espacio lineal topológico localmente convexo, para la cual $\mathcal{B}_{cs}$ es una base del filtro de vecindades del origen en E.

Además·

(j)

En efecto dada V, τ-vecindad disqueada del origen en E, existe Θ, τ-abierto, tal que $0 \in \Theta$ y $\Theta \subseteq V$ Como Θ es τ-abierto, entonces Θ^c es τ-cerrado, de donde Θ^c es secuencialmente cerrado, por tanto Θ es secuencialmente abierto y finalmente $V \in \mathcal{V}(0, \tau_{cs})$

Así, $\tau \leqslant \tau_{cs}$

(jj)

<u>Condición Suficiente</u>·

Consideremos V una τ-vecindad secuencial disqueada del origen en E Entonces $V \in \mathcal{V}(0, \tau_{cs})$ Como por hipótesis $\tau = \tau_{cs}$, entonces V es una vecindad disqueada del origen para τ.

Luego (E, τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial.

<u>Condición</u> <u>Necesaria</u>:

Como por (j) tenemos que $\tau \leqslant \tau_{cs}$, bastará mostrar que $\tau_{cs} \leqslant \tau$

Para tal efecto, consideremos W una τ_{cs}-vecindad del origen en E, entonces existe V, una vecindad disqueada τ-secuencial del origen en E, tal que $V \subseteq W$.

Como (E, τ) es C-secuencial por hipótesis, tendremos que V es una τ-vecindad del origen en E y como $V \subseteq W$, tendremos que W es una τ-vecindad del origen en E, con lo que $\tau_{cs} \leqslant \tau$

(jjj)

Como por (j) se tiene que $\tau \leqslant \tau_{cs}$, entonces es inmediato que toda sucesión τ_{cs}-convergente será también τ-convergente.

Sea ahora, $(x_n) \subseteq E$, tal que $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ y consideremos W una τ_{cs}-vecindad del origen en E.

Como $W \in \mathcal{V}(0, \tau_{cs})$, entonces existe V una vecindad τ-secuencial disqueada del origen en E tal que $V \subseteq W$.

Veamos que (x_n) está eventualmente en W.

Supongamos que no es así:

Entonces, $\forall m \geqslant 1$, $\exists n_m > m$, tal que $x_{n_m} \notin W$, luego $\forall m \geqslant 1, \exists n_m > m$, tal que $x_{n_m} \in V^c$.

Como $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} 0$ y V^c es τ-secuencialmente cerrada, se tendrá $0 \in V^c$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\exists N \geqslant 1$, tal que $\forall n \geqslant N$, $x_n \in V \subseteq W$, luego (x_n) es τcs-convergente

(jv)

Sea τ' otra topología localmente convexa sobre E, tal que posee las mismas sucesiones convergentes que para τ .

Consideremos $V \subseteq E$, una τ'-vecindad disqueada del origen en E y $(x_n) \subseteq E$, tal que $x_n \xrightarrow{\tau'} 0$.

Entonces, (x_n) está eventualmente en V y como $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, por hipótesis se tiene que $V \in \mathcal{P}cs$, con lo cual V es una τcs-vecindad disqueada del origen en E.

De esta manera hemos probado que $\tau' \leqslant \tau cs$.

(v)

Para mostrar que $(E, \tau cs)$ es C-secuencial, mostraremos que $(\tau cs)cs = \tau cs$ y por (jj) $(E, \tau cs)$ será C-secuencial.

Verifiquemos que $(\tau cs)cs$ y τ poseen las mismas sucesiones convergentes y por (jv) $(\tau cs)cs \leqslant \tau cs$.

Por (jjj) $(\tau cs)cs$ y τcs poseen las mismas sucesiones convergentes y por (jjj) τcs y τ también poseen las mismas sucesiones convergentes, luego $(\tau cs)cs$ y τ poseen las mismas sucesiones convergentes.

Por otro lado, por (j) tenemos que $\tau cs \lneq (\tau cs)cs$

Así pues, hemos logrado probar que $\tau cs = (\tau cs)cs$ ■

Proposición

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico; entonces, entre todas las topologías localmente convexas que poseen las mismas sucesiones convergentes que para τ, τcs es la única para la cual $(E,\tau cs)$ es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración

Por teorema anterior tenemos que τcs es una topología localmente convexa sobre E, tal que posee las mismas sucesiones convergentes que τ y, además, $(E,\tau cs)$ es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Veamos que τcs es la única topología sobre E con las propiedades mencionadas.

Para esto, sea τ' otra topología localmente convexa sobre E, tal que posee las mismas sucesiones convergentes que τ y que, además, (E,τ') es un espacio lineal topológico

C-secuencial.

Puesto que τ y τ' poseen las mismas sucesiones convergentes, tenemos $\tau' \leqslant \tau_{cs}$. Probemos ahora que $\tau_{cs} \leqslant \tau'$, con lo que habremos mostrado que $\tau' = \tau_{cs}$.

En esta dirección, consideremos $V \subseteq E$ una vecindad convexa del origen para τ_{cs} y $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\tau'} 0$.

Como, por hipótesis, τ', τ y τ_{cs} poseen las mismas sucesiones convergentes, entonces $x_n \xrightarrow{\tau_{cs}} 0$, por lo cual (x_n) e.e. en V, de donde $V \subseteq E$ es una vecindad secuencial convexa del origen para τ' y, siendo (E, τ') un espacio lineal topológico C-secuencial, se tendrá que $V \subseteq E$ es una vecindad convexa del origen para τ', con lo que $\tau_{cs} \leqslant \tau'$. ∎

ESPACIOS LINEALES TOPOLOGICOS

S-BORNOLOGICOS

Basados en las definiciones dadas en las secciones precedentes podemos enunciar nuestra definición de Espacio Lineal Topológico S-bornológico.

Definición (Espacio Lineal Topológico S-Bornológico)

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. (E,τ) se dice Secuencialmente Bornológico o simplemente S-bornológico, si y solamente si, todo subconjunto bornívoro convexo $A \subseteq E$, es una vecindad secuencial del origen en E.

Una vez dada la definición de un espacio lineal S-bornológico nuestro siguiente paso, será el de enunciar un Teorema que nos dará una primera caracterización de tales espacios, a partir de los discos bornívoros del espacio, las vecindades secuenciales del origen en él y las semi-normas localmente acotadas definidas sobre él.

Teorema

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) (E,τ) es S-bornológico

(ii) Todo disco bornívoro en E, es una vecindad secuencial del origen en E.

(iii) Toda semi-norma localmente acotada sobre E, es secuencialmente continua.

Demostración

$$(i) \Longrightarrow (ii)$$

En efecto, si $(E, \mathfrak{T})$ es S-bornológico entonces, todo subconjunto bornívoro convexo de E es vecindad secuencial del origen en E, luego en particular todo subconjunto bornívoro convexo equilibrado (disco bornívoro) de E, será vecindad secuencial del origen en E.

$$(ii) \Longrightarrow (iii)$$

Supongamos que todo disco bornívoro de E es vecindad secuencial del origen en E, y consideremos que $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una semi-norma localmente acotada sobre E.

Probemos que p es secuencialmente continua, mostrando que $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ es una vecindad secuencial del origen en E.

Puesto que p es una semi-norma, entonces V_p es un disco.

Probemos ahora que V_p es bornívoro.

Para ello, sea $B \subseteq E$ con B acotado y supongamos que V_p no absorbe a B. Entonces $\forall\, n \geq 1$ se tiene que $B \not\subseteq nV_p$, de donde, $\forall\, n \geq 1$, $\exists\, x_n \in B$, tal que $x_n \notin nV_p$, luego, $\forall\, n \geq 1$, $\exists\, x_n \in B$, tal que $\frac{x_n}{n} \notin V_p$, por tanto, $\forall\, n \geq 1$, $\exists\, x_n \in B$, tal que $p(\frac{x_n}{n}) \geq 1$, entonces $\forall n \geq 1$, $\exists\, x_n \in B$, tal que $p(x_n) \geq n$ y así $\sup\limits_{n\geq 1} p(x_n) = \infty$

Como $\sup\limits_{x\in B} p(x) \geq \sup\limits_{n\geq 1} p(x_n) = \infty$, tendremos que p no es acotada sobre B, lo cual es una contradicciòn a nuestra hipótesis.

De esta manera V_p absorbe a B, con lo cual V_p es un disco bornívoro de E y por (ii) V_p es una vecindad secuencial del origen en E· así hemos demostrado que p es secuencialmente continua

$$(iii) \Longrightarrow (i)$$

Asumamos ahora que toda seminorma localmente acotada sobre E, es secuencialmente continua, y sea $V \subseteq E$ con V un bornívoro convexo.

Probemos que V es una vecindad secuencial del origen en E, mostrando que contiene una de tales vecindades.

Para ello, consideremos b(V), el núcleo equilibrado de V.

Puesto que V es bornívoro tendremos que $0 \in V$, de donde $b(V) \neq 0$ y finalmente $b(V) = \bigcap\limits_{|\lambda|\geq 1} \lambda V$

Como V es convexo, entonces b(V) es también convexo y siendo b(V) equilibrado, tendremos que b(V) disco.

Probemos ahora que b(V) es un bornívoro.

Con tal fin, consideremos $B \subseteq E$ con B acotado y e(B) la cápsula equilibrada de B.

Como B es acotado, entonces e(B) es un subconjunto acotado y equilibrado de E, por tanto:

$\forall |\lambda| \geq 1$, $\lambda^{-1} e(B) \subseteq e(B)$ de donde $\forall |\lambda| \geq 1$, $e(B) \subseteq \lambda e(B)$, luego $e(B) \subseteq \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda e(B)$

Por otro lado, como V es bornívoro y e(B) es acotado, entonces $\exists \alpha > 0$, tal que $e(B) \subseteq \alpha V$, luego, $\forall |\lambda| \geq 1$ $e(B) \subseteq \lambda(\alpha V)$, de donde $e(B) \subseteq \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda \alpha V$, por lo que $e(B) \subseteq \alpha \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda V$, por tanto $e(B) \subseteq \alpha\, b(V)$ y como $B \subseteq e(B)$, tendremos que b(V) es un bornívoro.

Siendo b(V) un disco bornívoro, entonces $g_{b(v)}$, el funcional de Minkowski de b(v), es una semi-norma sobre E.

Probemos ahora que $g_{b(V)}$ es una semi-norma localmente acotada sobre E.

Sea $A \subseteq E$ con A acotada y supongamos que $g_{b(V)}$ no es acotada sobre A.

Entonces, $\forall n \geq 1$, $\exists a_n \in A$, tal que $g_{b(V)}(a_n) > n^2$ o de la otra manera, $g_{b(V)}(\frac{a_n}{n}) > n$, tendremos entonces $\forall n \geq 1$, $\exists a_n \in A$, tal que $\frac{a_n}{n} \notin n\, b(V)$.

Como $\forall n \geq 1$, $a_n \in A$, tendremos que $(a_n) \subseteq A$ y puesto que A es acotado, se tendrá (a_n) acotado.

Por otro lado como $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ y (a_n) es un acotado, entonces $\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0$, de donde $(\frac{a_n}{n})$ también es un acotado.

Como b(V) es bornívoro, $\exists m \geq 1$, tal que $\frac{a_n}{n} \in m\, b(V)$ $\forall n \geq 1$, luego $\frac{a_m}{m} \in m\, b(D)$, lo cual es una contradicción

Así tenemos que $g_{b(V)}$ es una semi-norma localmente acotada sobre E y por (iii) $g_{b(V)}$ es una semi-norma secuencialmente continua sobre E, de donde b(V) es una vecindad secuencial del origen en E.

Finalmente, puesto que $b(V) \subseteq V$, tenemos que V es una vecindad secuencial del origen en E, con lo que probamos que (E,τ) es S-bornológico. ■

La proposición que enunciaremos a continuación caracterizará las semi-normas localmente acotadas sobre un espacio lineal topológico (E,τ) a partir de los discos bornívoros del espacio.

Proposición:

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$ y $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una semi-norma sobre E

Es condición necesaria y suficiente para que p sea localmente acotada en E, que $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ sea un disco bornívoro de E.

Demostración

Condición Necesaria

Sea $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una semi-norma localmente acotada en E. Entonces, $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ es un disco absorbente de E.

Veamos que V_p es $\mathcal{T}$-bornívoro.

Para ello, consideremos $A \subseteq E$ con A $\mathcal{T}$-acotado. Puesto que p es localmente acotada, se tiene que $\exists \alpha > 0$, tal que $\sup_{x \in A} \{p(x)\} < \alpha$, luego $\exists \alpha > 0$, tal que $\sup_{x \in A} \{p(\frac{x}{\alpha})\} < 1$ de donde $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall x \in A$, $\frac{x}{\alpha} \in V_p$, por tanto, $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall x \in A$, $x \in \alpha V_p$, entonces $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha V_p$, por lo que V_p es $\mathcal{T}$-bornívoro.

<u>Condición</u> <u>Suficiente</u>:

Supongamos ahora que $V_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$ es un disco bornívoro de E.

Verifiquemos que p es localmente acotada.

Para ello, sea $A \subseteq E$ con A un $\mathcal{T}$-acotado.

Puesto que V_p es $\mathcal{T}$-bornívoro, tendremos que $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha V_p$, luego, $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall x \in A$, $p(x) < \alpha$, por tanto, $\exists \alpha > 0$, tal que $\sup_{x \in A} \{p(x)\} < \alpha$ con lo que $p(A)$ es acotado en $\mathbb{R}$, con lo cual p es localmente acotada. ∎

Una vez caracterizadas las semi-normas localmente acotadas a partir de los discos bornívoros del espacio enunciaremos el siguiente Teorema, que pondrá a nuestra disposición una segunda caracterización de los espacios lineales topológicos S-bornológicos, esta vez, a partir de las aplicaciones lineales localmente acotadas sobre espacios lineales topológicos localmente convexos.

Teorema·

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$

Entonces·

(j) Si (E, τ) es S-Bornológico, entonces dado $(F, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal localmente acotada de E en F, se tiene que f es necesariamente secuencialmente continua

(jj) Si (E, τ) posee la propiedad a continuación·
"Dado $(F, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal localmente acotada de E en F, entonces f es secuencialmente continua", entonces (E, τ) es un espacio lineal topológico S-bornológico

Demostración

(j)

Supongamos que (E, τ) es un espacio lineal topológico S-bornológico y sean $(F, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$, una aplicación lineal localmente acotada de E en F.

Probemos que f es secuencialmente continua.

Para ello, sea V una vecindad del origen en F, con V disqueada.

Puesto que f es lineal, entonces $f^{-1}(V)$ es disqueada.

Veamos que $f^{-1}(V)$ es un disco bornívoro.

Consideremos, para tal fin, $A \subseteq E$ con A τ-acotado. Puesto que f es localmente acotada, entonces f(A) es $\mathcal{T}$-acotado en F. Así, $\exists \alpha > 0$, tal que $f(A) \subseteq \alpha V$, de donde $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha f^{-1}(V)$, con lo que $f^{-1}(V)$ es un disco bornívoro de E y como (E, τ) S-bornológico $f^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen, de donde f es secuencialmente continua.

(jj)

Asumamos ahora que (E, τ) posee la propiedad enunciada en (jj) y probemos que (E, τ) es S-bornológico.

Para ello, consideremos $V \subseteq E$ con V un disco bornívoro y mostremos que V es una vecindad secuencial del origen en E.

Sea $g_V: E \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de V.

Puesto que V es un disco bornívoro de E, entonces $g_V: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una semi-norma localmente acotada y además $V_{g_V} \subseteq V$.

Consideremos ahora $N = \{x \in E : g_V(x) = 0\}$ y puesto que N es un subespacio lineal de E, podemos considerar el espacio lineal normado $(^E/N, \|\cdot\|_V)$ donde:

$^E/N$ designa el espacio lineal cociente E módulo N y·

$\|\cdot\|_V : {^E/N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por : $\forall \bar{x} \in {^E/N}$, $\|\bar{x}\|_V = g_V(x)$

Sea ahora $\varphi : E \longrightarrow {}^{E}/N$ el epimorfismo canónico de E en ${}^{E}/N$.

Tenemos que φ es lineal, verificaremos que φ es localmente acotada en E.

Para este efecto, sea A un $\mathcal{T}$-acotado de E y mostremos que $\varphi(A)$ es $\|\cdot\|_v$-acotado en ${}^{E}/N$.

Puesto que g_v es localmente acotada y A es $\mathcal{T}$-acotado de E, entonces $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall x \in A$, $g_v(x) < \alpha$, luego $\forall x \in A$, $\|\varphi(x)\|_v = \|\bar{x}\|_v = g_v(x) < \alpha$, de donde $\sup_{x \in A} \|\varphi(x)\|_v$, con lo cual $\varphi(A)$ es $\|\ \|_v$-acotado en ${}^{E}/N$, por lo que φ es localmente acotada en E.

Siendo $\varphi : E \longrightarrow {}^{E}/N$ lineal y localmente acotada, entonces φ es secuencialmente continua, de donde $\varphi^{-1}(B_{\|\cdot\|_v})$ es una vecindad secuencial del origen en E.

Pero:
$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(B_{\|\cdot\|_v}) &= \{x \in E:\ \varphi(x) \in B_{\|\cdot\|_v}\} \\ &= \{x \in E:\ \|\varphi(x)\|_v < 1\} \\ &= \{x \in E:\ g_v(x) < 1\} \\ &= V_{g_v} \end{aligned}$$

Luego V_{g_v} es una vecindad secuencial del origen en E y como $V_{g_v} \subseteq V$, entonces V es una vecindad secuencial del origen en E, con lo cual $(E, \mathcal{T})$ es S-bornológico. ∎

<u>Corolario</u>

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico sobre

$\mathbb{K}$. Para que (E,τ) sea S-bornológico, es necesario y suficiente que posea la siguiente propiedad:

"Dado un espacio lineal topológico localmente convexo $(F,\mathcal{T})$ sobre $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal localmente acotada $f:E \longrightarrow F$ de E en F, entonces f es secuencialmente continua".

Demostración

Es claro que la condición necesaria del corolario nos la ofrece (j) del teorema anterior y para la condición suficiente, basta considerar (jj) del mismo teorema, ya que los espacios lineales normados son espacios lineales topológicos localmente convexos particulares. ■

Lograda la caracterización de los espacios lineales topológicos S-bornológicos en los sentidos en que lo hemos hecho, pasaremos a estudiar la construcción de topologías sobre espacios lineales topológicos localmente convexos dados, de manera tal que se constituyan en espacios topológicos S-bornológicos, además de estudiar algunas de sus propiedades y su relación con la topología original dada.

Con este fin enunciamos el siguiente:

Teorema

Sea (E,τ) un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$.

Sea $\mathcal{B}_b$ la colección de todos los discos τ-bornívoros de E.

Entonces, $\mathcal{B}_b$ es una base local de una única topología lineal que denotaremos por τ_b, tal que (E, τ_b) es un espacio lineal topológico localmente convexo sobre K.

Además, los espacios lineales topológicos localmente convexos (E,τ), (E, τ_{cs}), (E, τ_b) tienen las siguientes propiedades:

(j) $\tau \leqslant \tau_{cs} \leqslant \tau_b$

(jj) (E,τ) S-bornológico si y solo si $\tau_{cs} = \tau_b$

(jjj) τ y τ_b poseen los mismos acotados, esto es $A(\tau) = A(\tau_b)$

(jv) τ_b es la más fina de todas las topologías lineales localmente convexas sobre E, para las cuales, los acotados son los mismos que para τ

(v) (E, τ_b) es S-bornológico.

<u>Demostración</u>

Sea $\mathcal{B}_b = \{V \subseteq E : V \text{ disco } \tau\text{-bornívoro}\}$.

Mostremos que $\mathcal{B}_b$ posee las propiedades exigidas en el Teorema de [1] .

En efecto, podemos afirmar que $\mathcal{B}_b$ es una familia no vacia de partes de E, puesto que toda vecindad disqueada del origen V en E es un τ-bornívoro, luego $V \in \mathcal{B}_b$

Por otro lado, dada $V \in \mathcal{B}_b$ tenemos que $V \neq \emptyset$ puesto que siendo disco τ-bornívoro $0 \in V$.

De otra parte, dados V, $V' \in \mathcal{B}_b$, tendremos $V \cap V' \in \mathcal{B}_b$, puesto que siendo V y V' discos, $V \cap V'$ lo será y siendo A un τ-acotado, existen $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$, tales que $A \subseteq \alpha V$ y $A \subseteq \alpha' V'$. Tomando $\lambda = \max\{\alpha, \alpha'\}$ obtenemos $A \subseteq \lambda(V \cap V')$, con lo cual $V \cap V'$ es un τ-bornívoro.

Además siendo cada $V \in \mathcal{B}_b$ disqueada y τ-bornívora, se tiene que en particular cada $V \in \mathcal{B}_b$ es equilibrada, convexa y absorbente.

Por último dado $V \in \mathcal{B}_b$, tendremos que $U = \frac{1}{2}V \subseteq V$ es convexas y equilibrada puesto que V lo es y siendo las homotecias de razón no nulas homeomorfismos, entonces si A es τ-acotado, tendremos que también $2A$ es τ-acotado y como V es bornívoro, $\exists \alpha > 0$ tal que $2A \subseteq \alpha V$, de donde $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \frac{1}{2}\alpha A$, por lo que $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha U$, con lo que U es τ-bornívoro con lo que es finalmente $U \in \mathcal{B}_b$ y además $U + U = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subseteq V$.

Entonces, existe una única topología sobre E que denotaremos τ_b, tal que (E, τ_b) es un espacio lineal topológico localmente convexo, para lo cual $\mathcal{B}_b$ es una base del filtro de vecindades del origen en E.

Además:

(j)

En efecto, sea V, una τcs-vecindad disqueada del origen en E. Verifiquemos que V es τ-bornívora.

Supongamos que V no es τ-bornívora, entonces $\exists$ A un τ-acotado tal que $\forall n \geq 1$, $A \not\subseteq nV$, luego, $\forall n \geq 1$, $\exists x_n \in A$ tal que, $x_n \notin nV$ por tanto, $\forall n \geq 1$, $\exists x_n \in A$, tal que $\frac{x_n}{n} \notin V$.

Pero $\frac{x_n}{n} \longrightarrow 0$ puesto que $(x_n) \subseteq A$, que es τ-acotado y $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ luego $(\frac{x_n}{n})$e.e. en V, pues V es una vecindad secuencial del origen en E, lo cual es una contradicción.

Así tenemos que V es τ-bornívora con lo cual V es una τ_b-vecindad disqueada del origen en E, de donde $\tau_{cs} \leq \tau_b$

Como se tiene que $\tau \leq \tau_{cs}$, tenemos finalmente que

$\tau \leq \tau_{cs} \leq \tau_b$

(jj)

<u>Condición Necesaria</u>

Supongamos que (E, τ) es un espacio lineal topológico S-bornológico.

Tenemos por (j) $\tau_{cs} \leq \tau_b$. Consideremos ahora a V una τ_b-vecindad disqueada del origen en E. Como (E, τ) es S-bornológico, entonces V es una vecindad secuencial del origen en E, de donde $\tau_b \leq \tau_{cs}$

Así $\tau_{cs} = \tau_b$

<u>Condición Suficiente</u>

Supongamos ahora que

$\tau_{cs} = \tau_b$ y sea V un disco τ-bornívoro de E. Entonces V es una τ_b-vecindad del origen en E. Como $\tau_{cs} = \tau_b$, $\exists U \in \mathcal{B}_{cs}$, tal que $U \subseteq V$, con lo cual V es una vecindad secuencial del origen en E y por tanto (E, τ) es un espacio S-bornológico.

(jjj)

Como por (j) se tiene que $\tau \leqslant \tau_b$ entonces es inmediato que todo τ_b-acotado es también un τ-acotado, de donde $A(\tau_b) \subseteq A(\tau)$.

Sea ahora A un τ-acotado de E y W una τ_b-vecindad del origen en E

Entonces, $\exists$ V un disco τ-bornívoro, tal que $V \subseteq W$, luego $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha V \subseteq \alpha W$, con lo que A es un τ_b-acotado de E, de donde $A(\tau) \subseteq A(\tau_b)$.

Así, $A(\tau) = A(\tau_b)$

(jv)

Sea τ' otra topología localmente convexa sobre E, tal que posee los mismos acotados que para τ.

Consideremos a V una τ'-vecindad disqueada del origen en E y a A, un τ'-acotado de E. Entonces, $\exists \alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha V$. Como A es también un τ-acotado, entonces V es un disco τ-bornívoro de E y en consecuencia $V \in \mathcal{B}_b$, con lo que V es una τ_b-vecindad disqueada del origen en E, de donde $\tau' \leqslant \tau_b$

(v)

Probaremos que $(\tau_b)_b = (\tau_b)_{cs}$ y por (jj) obtendremos que (E,τ_b) S-bornológico

Por (j) sabemos $\tau_b \leqslant (\tau_b)_b$

Por otro lado, por (jjj) tenemos que $(\tau_b)_b$ y τ_b poseen los mismos acotados y nuevamente por (jjj) tenemos que τ_b y τ poseen los mismos acotados, entonces $(\tau_b)_b$ y τ poseen los mismos acotados, de donde por (jv) tendremos que $(\tau_b)_b \leqslant \tau_b$

Así $\tau_b = (\tau_b)_b$ y como por (j) se tiene

$\tau_b \leqslant (\tau_b)_{cs} \leqslant (\tau_b)_b$ entonces finalmente se tendrá $(\tau_b)_{cs} = (\tau_b)_b$

PROPIEDADES DE PERMANENCIA

Y

OTRAS PROPIEDADES

Esta sección estará dedicada a examinar algunas de las propiedades de permanencia de que gozan los espacios lineales topológicos C-secuenciales y S-bornológicos y algunas propiedades de estabilidad para productos y sub-espacios densos de los mencionados espacios.

TEOREMA

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $((E_i, \tau_i))_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios lineales topológicos, todos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia no vacia de aplicaciones lineales, tal que $\forall i \in I$, $f_i : E_i \longrightarrow E$. Sea τ la topología lineal localmente convexa final sobre E, respecto a la familia $(f_i)_{i\in I}$.

Entonces, si para cada $i \in I$, (E_i, τ_i) es un espacio lineal topológico C-secuencial, tendremos que (E, τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración:

Sabemos que τ, la topología lineal localmente convexa final sobre E respecto a la familia $(f_i)_{i\in I}$, es la más fina de todas las topologías lineales localmente convexas sobre E, para la cual cada una de las aplicaciones de la familia $(f_i)_{i\in I}$ es continua.

Por otro lado, una base del filtro de vecindades del origen para (E, τ) está dado por:

$\mathcal{B} = \{V \subseteq E$: V es un disco absorbente de E y tal que $\forall_{i \in I}$ $f_i^{-1}(V)$, τ_i-vecindad del origen en $E_i\}$

Supongamos ahora que $\forall_{i \in I}$ tenemos (E_i, τ_i) C-secuencial.

Probemos que (E, τ) también es C-secuencial.

Para ello, sea V una vecindad secuencial disqueada del origen en E, entonces V es un disco absorbente de E.

Veamos que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una τ_i-vecindad del origen en E_i.

Como $\forall_{i \in I}$, f_i es lineal y τ_i-τ continua, entonces $\forall_{i \in I}$, f_i es lineal τ_i-τ secuencialmente continua y como V es una vecindad secuencial disqueada y absorbente del origen en E, se tendrá que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial disqueada del origen en E_i.

Siendo cada (E_i, τ_i) C-secuencial entonces $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una τ_i-vecindad del origen en E_i, de donde $V \in \mathcal{B}$, con lo cual V es una τ-vecindad del origen en E y por tanto (E, τ) es C-secuencial.

<u>TEOREMA</u>

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $((E_i, \tau_i))_{i \in I}$ una familia no vacía de espacios lineales topológicos todos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de aplicaciones lineales tal que, $\forall_{i \in I}$ $f_i : E_i \longrightarrow E$ y además

$\bigcup_{i \in I} f_i(E_i)=E.$

Entonces, existe sobre E, una topología lineal localmente convexa $\mathcal{T}$, la más fina, tal que $\forall_{i \in I}$, f_i es secuencialmente continua.

Además $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico C-secuencial.

<u>Demostración</u>:

Consideremos en E la familia:

$\mathcal{B} = \{V \subseteq E$: V disco absorbente y tal que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)\}$

Probemos que $\mathcal{B}$ posee las propiedades exigidas en el Teorema de [1] .

En efecto, $\mathcal{B}$ es una colección no vacía, dado que $E \in \mathcal{B}$ puesto que siendo E un disco absorbente se tiene que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(E)=E_i$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$.

En otra vía, dada $V \in \mathcal{B}$, tendremos que $V \neq \emptyset$, pues siendo un disco se tiene $0 \in V$.

Por otro lado, dadas V, $V' \in \mathcal{B}$ entonces V y V' son discos absorbentes, de donde $V \cap V'$ es también disco absorbente y siendo $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$, $f_i^{-1}(V')$ vecindades secuenciales del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$, se tendrá que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V \cap V')=f_i^{-1}(V) \cap f_i^{-1}(V')$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$.

Además, siendo cada $V \in \mathcal{B}$ un disco absorbente, se tendrá que cada $V \in \mathcal{B}$ será en particular equilibrada, convexa y absorbente.

Por último, dado $V \in \mathcal{B}$, tendremos que $U = \frac{1}{2}V \subseteq V$ es un disco absorbente y además $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(\frac{1}{2}V) = \frac{1}{2}f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Además $U + U = \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subseteq V$, pues V es convexo.

Consecuentemente, existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre E, tal que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico localmente convexo, para la cual $\mathcal{B}$ es una base del filtro de vecindades del origen.

Verifiquemos ahora que $\forall_{i \in I}$, $f_i : E_i \longrightarrow E$ es secuencialmente continua.

Para ello consideremos a W una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq W$.

Como $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$ y además como $f_i^{-1}(V) \subseteq f_i^{-1}(W)$, se tendrá que $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(W)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$ con lo cual $\forall_{i \in I}$, f_i es secuencialmente continua

Mostraremos ahora que $\mathcal{T}$ así construída es la más fina de todas las topologías sobre E, para la cual cada aplicación de la familia $(f_i)_{i \in I}$ es secuencialmente continua.

En efecto, sea $\mathcal{T}'$ otra topología sobre E, para la cual cada aplicación de la familia $(f_i)_{i \in I}$ es secuencialmente continua y sea V una $\mathcal{T}'$-vecindad disqueada del origen en E. Entonces $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$, luego $V \in \mathcal{B}$, de donde V es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E, de donde $\mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}$

Finalmente probemos que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topologico C-secuencial.

Para el efecto, sea V una vecindad secuencial disqueada del origen en E. Entonces V es un disco absorbente de E.

Veamos que V es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E, verificando que $\forall i \in I$, $f^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$.

Consideremos para ello $f_i^{-1}(V)$ y $(x_n) \subseteq E_i$ con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_i} 0$

Como $\forall_{i \in I}$, $f_i: E_i \longrightarrow E$ es secuencialmente continua, entonces $f_i(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$

Siendo V una vecindad secuencial del origen en E, tendremos que $\exists_{m \geqslant 1}$, tal que $\forall_{n \geqslant m}$, $f_i(x_n) \in V$, luego $\exists_{m \geqslant 1}$, tal que $\forall_{n \geqslant m}$, $x_n \in f_i^{-1}(V)$, de donde $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en $(E_i, \mathcal{T}_i)$

Por tanto, V es una $\mathcal{T}$-vecindad del origen en E y por ende $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico C-secuencial. ■

Basados en los dos teoremas precedentes enunciamos el siguiente, Corolario

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $((E_i, \tau_i))_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios lineales topológicos, todos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de aplicaciones lineales, tal que $\forall_{i \in I}$, $f_i \cdot E_i \longrightarrow E$ y además $\bigcup_{i\in I} f_i(E_i) = E$

Entonces, la topología τ sobre E, que hace a (E, τ) un espacio lineal topológico localmente convexo con f_i $\tau_i - \tau$ continua $\forall_{i\in I}$ y, la topología τ' sobre E, que hace a (E, τ') un espacio lineal topológico localmente convexo con f_i $\tau_i - \tau$ secuencialmente continua $\forall_{i\in I}$, son las mismas, si $\forall_{i\in I}$ se tiene que (E_i, τ_i), es un espacio lineal topológico C-secuen-

Demostración

En efecto, si V es una τ-vecindad disqueada del origen en E, como $\forall_{i\in I}$ f_i $\tau_i - \tau$ es continua, entonces $\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una τ_i-vecindad del origen en E_i, de donde $\forall_{i\in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en (E_i, τ_i) y por tanto V es una τ'-vecindad del origen en E, con lo cual $\tau \leqslant \tau'$

Recíprocamente si V es una τ'-vecindad del origen en E, como $\forall_{i\in I}$ f_i $\tau_i - \tau$ es secuencialmente continua, entonces $\forall_{i\in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad secuencial del origen en (E_i, τ_i). Puesto que $\forall_{i\in I}$, (E_i, τ_i) es C-secuencial entonces

$\forall_{i \in I}$, $f_i^{-1}(V)$ es una $\mathcal{T}_i$-vecindad del origen en E_i de donde $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$. Así $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ ■

Las proposiciones que estudiaremos a continuación servirán de apoyo en el estudio de los productos numerables de espacios lineales topológicos C-secuenciales y de espacios lineales topológicos S-bornológicos.

<u>Proposición</u>

Sean, $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico, $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal secuencialmente continua.

Entonces $f: E \longrightarrow F$ es localmente acotada

<u>Demostración</u>

Supongamos que nuestra tesis es falsa, esto es que $f: E \longrightarrow F$ no es localmente acotada. Entonces existe $A \subseteq E$, A $\mathcal{T}$-acotado, tal que $f(A)$ no es $\|\cdot\|$-acotado.

Luego, $\forall_{n \geq 1}$, $\exists a_n \in A$ tal que $\| f(a_n) \| \geq n$, entonces $\forall_{n \geq 1}$, $\exists a_n \in A$, tal que $\| f(\frac{a_n}{n}) \| \geq 1$

Pero $\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0$, puesto que $(a_n) \subseteq A$ es $\mathcal{T}$-acotada y $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ y como f es secuencialmente continua, se tendrá $f(\frac{a_n}{n}) \longrightarrow 0$ $\exists N \geq 1$, tal que $\forall n \geq N$ $\| f(\frac{a_n}{n}) \| < 1$, lo cual es una contradicción

Por tanto $f: E \longrightarrow F$ es localmente acotada. ■

<u>Proposición</u>

Sean, $((E_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ una familia no vacía de es pacios lineales topológicos, $(E,\mathcal{T})$ su producto topológico, $(F,\|\cdot\|)$ un espacio normado y $f:E\longrightarrow F$ una aplicación lineal.

Entonces, si $f:E\longrightarrow F$ es localmente acotada, se tendrá que f es idénticamente nula, salvo en un número finito de los E_i, considerados como subespacios del producto.

<u>Demostración</u>

Supongamos nuevamente que nuestra tesis es falaz: entonces existirá una sucesión infinita de índices distintos $i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots$ de I, tales que $f/E_{i_n} = f_{i_n} \neq 0$.

Entonces existirá una sucesión (x_{i_n}) con $x_{i_n}\in E_{i_n}$ y $n = 1,2,\ldots$ tal que $f_{i_n}(x_{i_n})\neq 0$.

Consideremos la sucesión $(a_n) \subseteq E$ dada por : $\forall n\geqslant 1$

$$a_n = \left(0,\ldots,0,\frac{nx_{i_n}}{\|f_{i_n}(x_{i_n})\|},0,\ldots\right)$$

Sea para cada $i \in I$, $\Pi_i : E\longrightarrow E_i$ la i-ésima proyección de E sobre E_i

Entonces,

$$\Pi_i(a_n) = \begin{cases} \dfrac{nx_{i_n}}{\|f_{i_n}(x_{i_n})\|} & \text{si } i\in\{i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots\} \\ 0 & \text{si } i\notin\{i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots\} \end{cases}$$

Como cada proyección es acotada, entonces la sucesión (a_n) también es acotada.

Pero

$$\left\| f \left(\frac{n x_{i_n}}{\| f_{i_n}(x_{i_n}) \|} \right) \right\| = n$$

de donde f no es acotada sobre (a_n), lo cual es una contradicción. ∎

TEOREMA

Sea $((E_n, \tau_n))_{n \geq 1}$ una familia numerable de espacios lineales topológicos y sea (E, τ) su producto topológico

Es condición necesaria y suficiente para que (E, τ) sea un espacio lineal topológico C-secuencial, que para cada $n \geq 1$, (E_n, τ_n) sea un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración

Condición Necesaria

Supongamos que (E, τ) el espacio producto topológico de la familia $((E_n, \tau_n))_{n \geq 1}$ es C-secuencial.

Consideremos $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado y para un k fijo, sea $f: E_k \longrightarrow F$ una aplicación lineal secuencialmente continua de E_k en F.

Consideremos ahora la aplicación $\tilde{f} : E \longrightarrow F$ dada por: $\forall x = (x_n) \in E$, $\tilde{f}(x) = f(x_k)$

Tenemos que $\tilde{f}$, así definida, no es más que $f \circ \Pi_k$ esto es $\tilde{f} = f \circ \Pi_k$ donde Π_k denota la k-ésima proyección de E sobre E_k.

Tenemos que $\tilde{f}$ es lineal, por ser compuesta de aplicaciones lineales y además $\tilde{f}$ es secuencialmente continua, por ser compuesta de una aplicación continua (la proyección Π_k) y una aplicación secuencialmente continua (la aplicación dada f).

Puesto que por hipótesis $(E, \mathcal{T})$ es C-secuencial, entonces $\tilde{f} = f \circ \Pi_k$ es continua, de donde f es continua y por tanto $(E_k, \mathcal{T}_k)$ es C-secuencial.

Condición Suficiente

Asumamos ahora que, para cada $n \geqslant 1$, se tiene que $(E_n, \mathcal{T}_n)$ es C-secuencial.

Consideremos $(F, \|\cdot\|)$, un espacio normado y $f : E \longrightarrow F$, una aplicación lineal secuencialmente continua de E en F.

Como $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal secuencialmente continua de E en F (espacio normado) entonces $f : E \longrightarrow F$ es localmente acotada y, en consecuencia, f es idénticamente nula, salvo en un número finito de los E_n, considerados como subespacios de E.

Así, existe un número finito de índices $I = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$, tales que

$$f/E_{n_k} \neq 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, p$$

y,

$$f/E_n = 0 \qquad \text{para } n \notin I$$

De esta manera, basta que demostremos que el producto finito de espacios C-secuenciales es C-secuencial.

Para ello, sean $(E_1, \mathcal{T}_1)$ y $(E_2, \mathcal{T}_2)$ espacios C-secuenciales y $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ una aplicación secuencialmente continua con F, espacio normado.

Consideremos ahora:

$$f_1 : E_1 \longrightarrow F \text{ dada por } \forall x_1 \in E_1 \text{ , } f_1(x_1) = f(x_1, 0)$$

$$f_2 : E_2 \longrightarrow F \text{ dada por } \forall x_2 \in E_2 \text{ , } f_2(x_2) = f(0, x_2)$$

Dado que $f_1 = f/_{E_1 \times \{0\}}$, $f_2 = f/_{E_2 \times \{0\}}$ y f es secuencialmente continua, también lo serán f_1 y f_2 y puesto que $(E_1, \mathcal{T}_1)$ y $(E_2, \mathcal{T}_2)$ son C-secuenciales, entonces f_1 y f_2 serán continuas.

Puesto que $f = f_1 \circ \Pi_1 + f_2 \circ \Pi_2$, entonces f es continua, de donde $E_1 \times E_2$ es C-secuencial.

Dedicaremos ahora nuestros esfuerzos al estudio de los subespacios densos en espacios lineales topológicos C-secuenciales y de sus propiedades respecto a lo C-secuencial.

<u>Definición</u> (Subespacio secuencialmente denso)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológicio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$, y sea F un subespacio vectorial de E.

Se dice que F es un sub-espacio <u>secuencialmente</u> <u>denso</u> en E, si y solo si, para cada $x \in E$, existe una sucesión $(x_n) \subseteq F$, tal que $x_n \xrightarrow{\tau} x$

TEOREMA

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y F un sub-espacio secuencialmente denso en E.

Se tiene que, si (F, τ_F) es un espacio lineal topológico C-secuencial, entonces (E, τ) es también un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración

Sea $(G, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $f : E \longrightarrow G$ una aplicación lineal secuencialmente continua respecto a τ.

Es inmediato que $f/_F = f_F$ es secuencialmente continua respecto a τ_F, puesto que si $(x_n) \subseteq F$ con $x_n \xrightarrow{\tau_F} 0$, entonces $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, de donde $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ y finalmente $f_F(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, puesto que $\forall x_n \in F$, $f_F(x_n) = f(x_n)$.

Dado que por hipótesis (F, τ_F) es C-secuencial, entonces tendremos que $f_F : F \longrightarrow G$ es continua.

Tenemos, entonces, una aplicación lineal continua y por el Teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación lineal continua, $g : E \longrightarrow G$ de E en G, tal que su restricción a F, esto es $g/F = g_F$, coincide con f_F, esto es $g_F = f_F$.

Probaremos que $g = f$, de donde f será continua y podremos afirmar entonces que (E, τ) es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Con este fin, consideremos la aplicación $h: E \longrightarrow G$, definida por $h=f-g$ y probemos que $h=0$, con lo cual $g = f$.

Anotemos primeramente que h es lineal, pues es la diferencia de dos aplicaciones lineales y es secuencialmente continua, puesto que es la diferencia de una aplicación continua (g) y una aplicación secuencialmente continua (f).

Sea ahora $x \in E$; como F es un sub-espacio secuencialmente denso en E, existe $(x_n) \subseteq F$, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$$
\begin{aligned}
\text{Además, } h(x) &= h\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (h(x_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - g(x_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f_F(x_n) - g_F(x_n)) \\
&= 0 \qquad (\text{puesto que } f_F = g_F) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Definición (Subespacio localmente denso)

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ y sea F un subespacio vectorial de E.

Se dice que F es un sub-espacio localmente denso en E, si y solo si, para cada $x \in E$, existe un disco acotado B de E, tal que existe $(x_n) \subseteq E_B \cap F$, de manera que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_B} x$, en $(E_B, \|\cdot\|_B)$, donde E_B designa el sub-espacio vectorial de E, generado por B, esto es $E_B = \langle B \rangle$ y $\|\cdot\|_B : E_B \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por : $\forall x \in E_B$, $\| x \|_B = g_B(x)$ (funcional de Minkowski de B.)

TEOREMA

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico localmente convexo y, F un sub-espacio localmente denso en E.

Se tiene que, si $(F, \mathcal{T}_F)$ es un espacio lineal topológico C-secuencial, entonces $(E, \mathcal{T})$ es también un espacio lineal topológico C-secuencial.

Demostración

Por el Teorema precedente bastará mostrar que la densidad local de F en E, implica la densidad secuencial de F en E.

Para ello, sea $x \in E$. Como F es localmente denso, entonces existe B, disco acotado de E y $(x_n) \subseteq E_B \cap F$, tal que $x_n \xrightarrow{\|\ \|_B} x$

Ahora, siendo B un $\mathcal{T}$-acotado en E, la topología inducida por $\mathcal{T}$ sobre E_B, es menos fina que la topología de la norma sobre E_B.

Consecuentemente, $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_F} x$, de donde $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ en E_B.

Por tanto, para cada $x \in E$, existe $(x_n) \subseteq F$, tal que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, de donde F es un sub-espacio secuencialmente denso en E. ∎

TEOREMA (Garsoux)

Sea $(E, \mathcal{T})$ el espacio lineal topológico límite inductivo estricto de la familia $((E_n, \mathcal{T}_n))_{n \geqslant 1}$ de espacio lineales topológicos localmente convexos, $(x_n) \subseteq E$ y $x \in E$.

Entonces, para que (x [illegible] sea $\mathcal{T}$-convergente a x, es necesario y suficiente que $\exists_{m \geqslant 1}$, tal que $(x_n) \subseteq E_m$, $x \in E_m$ y (x_n) $\mathcal{T}_m$-congergente a x.

Demostración

Dado que $(E, \mathcal{T})$ es el espacio "límite inductivo estricto" entonces, para cada $n \geqslant 1$, se tiene que $\mathcal{T}_{n+1}$ induce sobre E_n la topología $\mathcal{T}_n$ y, en consecuencia, (Dieudonne-Schwartz ver [4] $\mathcal{T}$ induce sobre E_n la topología $\mathcal{T}_n$.

Por otro lado, como para cualquier natural $n \geqslant 1$, E_n es $\mathcal{T}_{n+1}$-cerrado en E_{n+1}, tendremos (Dieudonne-Schwartz ver), que A es $\mathcal{T}$-acotado en E, si y solo si existe $n \geqslant 1$, tal que $A \subseteq E_n$ y A es un $\mathcal{T}_n$-acotado.

Necesidad

Supongamos que $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$ y $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. Entonces, para cualquier $V \subseteq E$, V $\mathcal{T}$-vecindad de x en E, se tiene (x_n) e.e. en V y, además, siendo (x_n), $\{x\}$ $\mathcal{T}$-acotados, se tiene $(x_n) \cup \{x\}$ $\mathcal{T}$-acotado y, por tanto, $\exists_{m \geq 1}$, tal que $(x_n) \subseteq E_m$, $x \in E_m$.

Sea ahora $U \subseteq E_m$, U τ_m-vecindad de x, entonces $\exists$ $V \subseteq E$, V τ-vecindad de x, tal que $U=V \cap E_m$, de donde, $\exists_{m \geq 1}$, tal que $(x_n) \subseteq E_m$, $x \in E_m$ y (x_n) e.e. en $U=V \cap E_m$, por lo que (x_n) τ_m-convergente a x en E_m.

<u>Suficiencia</u>

Asumamos ahora que $(x_n) \subseteq E$, $x \in E$ y, además, que $\exists_{m \geq 1}$, tal que $(x_n) \subseteq E_m$, $x \in E_m$ y $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$.

Sea ahora $V \subseteq E$, V τ-vecindad de x. Entonces, $V \cap E_m$ es una τ_m-vecindad de x y puesto que $x_n \xrightarrow{\tau_m} x$, se tiene que (x_n) e.e. en $V \cap E_m$, de donde (x_n) e.e. en V, lo cual nos dice que (x_n) τ-convergente a x. $\blacksquare$

<u>TEOREMA</u>

Sea $((E_n, \tau_n))_{n \geq 1}$ una sucesión de espacios lineales topológicos localmente convexos, tales que: para cualquier natural $n \geq 1$, E_n es τ_{n+1}-cerrado en E_{n+1}. Sea (E, τ) el espacio lineal topológico localmente convexo, "limite inductivo estricto".

Luego, si para cada $n \geq 1$, (E_n, τ_n) es S-bornológico, entonces (E, τ) es S-bornológico.

Utilizaremos el resultado anterior (Garsoux) para de- demostrar que $V \subseteq E$ es vecindad secuencial del origen en (E, τ), si y solo si, para cualquier natural $n \geq 1$, $V \cap E_n$

es una vecindad secuencial del origen en (E_n, τ_n).

Supongamos en primera instancia que $V \subseteq E$ es una vecindad secuencial del origen en (E, τ) y sea $(x_k) \subseteq E_n$ tal que (x_k) converge al origen en (E_n, τ_n).

Como $(x_n) \subseteq E_n$, $0 \in E_n$ y $x_k \xrightarrow{\tau_n} 0$, entonces $x_k \xrightarrow{\tau} 0$.

Siendo $V \subseteq E$ una vecindad secuencial del origen en (E, τ), tendremos que (x_k) e.e. en V.

Así, (x_k) e.e. en $V \cap E_n$, con lo cual $V \cap E_n$ es una vecindad secuencial del origen en (E_n, τ_n).

Asumamos ahora que para cualquier natural $n \geqslant 1$, $V \cap E_n$ es una vecindad secuencial del origen en (E_n, τ_n) y sea $(x_n) \subseteq E$, tal que (x_n) converge al origen en (E, τ).

Como $x_n \xrightarrow{\tau} 0$, existe un natural $k \geqslant 1$, tal que $(x_n) \subseteq E_k$ y $x_n \xrightarrow{\tau_k} 0$.

Siendo $V \cap E_k$ una vecindad secuencial del origen en (E_k, τ_k), tendremos que (x_n)e.e. en $V \cap E_k$, con lo que (x_n) e.e. en V y por tanto V es una vecindad secuencial del origen en (E, τ).

Una vez obtenido este resultado previo, lancémonos a mostrar que, si para todo natural $n \geqslant 1$, (E_n, τ_n) es S-bornológico, entonces (E, τ) también lo será.

Para ello, sea $V \subseteq E$ un disco τ-bornívoro y verifiquemos que V es una vecindad secuencial del origen en (E, τ).

En este sentido, bastará mostrar que para cualquier natural $n \geqslant 1$, $V \cap E_n$ es una vecindad secuencial del origen en (E_n, τ_n).

Tenemos que para cualquier $n \geqslant 1$. $V \cap E_n$ es un disco en E_n puesto que V y E_n son discos.

Verifiquemos, ahora, que $V \cap E_n$ es τ_n-bornívoro, con lo cual siendo para cualquier $n \geqslant 1$ (E_n, τ_n) S-bornológico, tendremos que $V \cap E_n$ es una vecindad secuencial del origen en (E_n, τ_n), para cualquier $n \geqslant 1$, de donde V será una vecindad secuencial del origen en (E, τ) y finalmente (E, τ) será un espacio lineal topológico S-bornológico.

Sea, entonces, A un τ_n-acotado, entonces, A es un τ-acotado y siendo V un τ-bornívoro, existirá $\alpha > 0$, tal que $A \subseteq \alpha V$, con lo cual:

$$A \cap E_n = A \subseteq (\alpha V) \cap E_n = \alpha (V \cap E_n)$$

y por tanto, $V \cap E_n$ es un disco bornívoro en (E_n, τ_n). ■

TEOREMA

Sea $((E_n, \tau_n))_{n \geqslant 1}$ una sucesión no vacía de espacios lineales topológicos y sea (E, τ) su producto topológico.

Es condición necesaria y suficiente para que (E, τ) sea un espacio lineal topológico S-bornológico, que para cualquier natural $n \geqslant 1$, (E_n, τ_n) sea un espacio lineal topológico S- bornológico.

Demostración

Condición Necesaria

Supongamos que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio S-bornológico y sea $(F, \mathcal{J})$ un espacio lineal topológico localmente convexo y para $k \geq 1$ fijo, sea $f: E_k \longrightarrow F$ una aplicación lineal localmente acotada.

Mostremos que f es secuencialmente continua, con lo que $(E_k, \mathcal{T}_k)$ será un espacio lineal topológico S-bornológico

Para ello, consideremos la aplicación $\tilde{f}: E \longrightarrow F$ definida por: para cualquier $x=(x_n) \in E$, $\tilde{f}(x)=f(x_k)$.

Tenemos entonces que $\tilde{f}= f \circ \Pi_k$, donde Π_k denota la k-ésima proyección de E sobre E_k, además, podemos anotar que $\tilde{f}$ es lineal y localmente acotada, puesto que resulta ser la compuesta de aplicaciones lineales y localmente acotadas.

Puesto que por hipótesis $(E, \mathcal{T})$ es S-bornológico y $\tilde{f}$ lineal y localmente acotada, entonces $\tilde{f}$ es secuencialmente continua.

Finalmente, puesto que $f=f \circ \Pi_k$ es secuencialmente continua y Π_k es continua, entonces f es secuencialmente continua.

Condición Suficiente

Asumamos ahora que se

tiene a $f : E \longrightarrow F$ localmente acotada.

Entonces, f es idénticamente nula, salvo para un número finito de índices.

De esta manera, bastará mostrar que el producto topológico finito de espacios S-bornológico es un espacio S-bornológico.

Sean entonces $(E_1, \mathcal{T}_1)$ y $(E_2, \mathcal{T}_2)$ dos espacios S-bornológicos, $(F, \mathcal{J})$ un espacio lineal topológico localmente convexo y $f: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, una aplicación lineal localmente acotada.

Consideremos ahora las aplicaciones:

$f_1: E_1 \longrightarrow F$ dada por $\forall x_1 \in E_1$, $f_1(x_1) = f(x_1, 0)$

$f_2: E_2 \longrightarrow F$ dada por $\forall x_2 \in E_2$, $f_2(x_2) = f(0, x_2)$

Puesto que f es lineal y localmente acotada, también lo serán f_1 y f_2; además, siendo E_1 y E_2 S-bornológicos, entonces f_1 y f_2 serán secuencialmente continuas.

Ahora, siendo $f = f_1 \circ \Pi_1 + f_2 \circ \Pi_2$, entonces f es secuencialmente continua, de donde $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico S-bornológico. ■

<u>Definición</u> (Sucesión bornológicamente convergente)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico, $(x_n) \subseteq E$ y $x \in E$. Se dice que la sucesión $(x_n) \subseteq E$ <u>converge bornológicamente</u> a $x \in E$ (ó $(x_n) \in E$

es <u>bornológicamente</u> <u>convergente</u> a $x \in E$) y se denota por $x_n \xrightarrow{b} x$, si y solo si, existe un disco $B \subseteq E$, τ-acotado, tal que $x_n \longrightarrow x$ en el espacio normado (E_B, g_B)

<u>Definición</u> (Aplicación con gráfico b- $\mathcal{T}$ -cerrado)

Sean $(E, \tau), (F, \mathcal{T})$ espacios lineales topológicos y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación de E en F. Se dice que f tiene el gráfico <u>b- $\mathcal{T}$ -cerrado</u>, si y solo si, para cualquier sucesión $(x_n) \subseteq E$, tal que de $x_n \xrightarrow{b} x$ se tiene $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}} f(x)$.

<u>TEOREMA</u>

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$ con la siguiente propiedad:

"Dado un espacio normado $(F, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con el gráfico b—$\|\cdot\|$—cerrado, entonces la aplicación lineal f es secuencialmente continua".

Entonces, (E, τ) es un espacio lineal topológico S-bornológico.

<u>Demostración</u>

Supongamos (E, τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$ con la propiedad enunciada y sea $V \subseteq E$ un disco τ-bornívoro.

Puesto que V es un disco τ-bornívoro, su funcional de Minkowski asociado, $g_V : E \longrightarrow \mathbb{R}$, es una semi-norma.

Consideremos el subespacio vectorial $N=\{x \in E: g_V(x)=0\}$ de E y el espacio normado $(E/N, \|\cdot\|_V)$, donde E/N es el espacio cociente de E módulo N y $\|\cdot\|_V : E/N \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\forall \bar{x} \in E/N$, $\|\bar{x}\|_V = g_V(x)$

Sea $\varphi : E \longrightarrow E/N$ la suryección lineal canónica de E sobre E/N, definida por $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \bar{x}$

Verifiquemos que φ posee el gráfico b- $\|\cdot\|_V$-cerrado.

Para ello, sea $(x_n) \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{b} 0$. Entonces, existe un disco $B \subseteq E$, τ-acotado, tal que $x_n \longrightarrow 0$ en (E_B, g_B).

Así, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \geqslant 1$, tal que $\forall n \geqslant N$, se tiene que $x_n \in \varepsilon V_{g_B}$.

Puesto que B es un disco τ-acotado y V un disco τ-bornívoro, se tiene que existe $\alpha > 0$, tal que $B \subseteq \alpha V$ y, además, $\forall\ \varepsilon > 0$ $\varepsilon V_{g_B} \subseteq \varepsilon B \subseteq \varepsilon(\alpha V)$.

Así entonces, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \geqslant 1$, tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $x_n \in \varepsilon(\alpha V)$.

De esta manera $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \geqslant 1$, tal que $\forall n \geqslant N$ se tiene que $\|\varphi(x_n)\|_V \leqslant \varepsilon\alpha$

Por la arbitrariedad de ε, tendremos que $\|\varphi(x_n)\|_V \longrightarrow 0$, de donde $\varphi(x_n) \longrightarrow \bar{0} = \varphi(0)$, en $(E/N, \|\cdot\|_V)$ y, finalmente, φ tiene el gráfico b- $\|\cdot\|_V$-cerrado.

Entonces, por hipótesis, φ es secuencialmente continua, y puesto que $B_{\|\cdot\|_V}$ es una vecindad del origen en $(E/N, \|\cdot\|_V)$, entonces $\varphi^{-1}(B_{\|\cdot\|_V})=V_{g_V}$, es una vecindad secuencial del origen en $(E, \mathcal{T})$.

Por otro lado, como $V_{g_V} \subseteq V$, entonces V es también una vecindad secuencial del origen en $(E, \mathcal{T})$, de donde podemos afirmar que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal S-bornológico. ∎

EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

Esta sección la dedicaremos a la presentación de ejemplos de espacios lineales C-secuenciales pero no S-bornológicos, así como espacios lineales topológicos S-bornológicos, pero no C-secuenciales, además de presentar la relación entre los espacios lineales topológicos estudiados y otros espacios como lo son los lineales topológicos que cumplen con la condición de convergencia de Mackey y los lineales topológicos Semi-bornológicos.

Aseguramos, mediante la presentación de los mencionados ejemplos, el hecho de que estas clases de espacios no incluye estrictamente la una a la otra y, además del hecho de que no son iguales.

<u>Definición</u> (Sucesión localmente acotada)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico y (x_n) una sucesión en E. Se dice que $(x_n) \subseteq E$ es una sucesión <u>localmente acotada</u>, si y solo si, existe una sucesión de números reales positivos (λ_n) con $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, tal que $\{\lambda_n x_n : n \geqslant 1\}$ es un $\mathcal{T}$-acotado en E.

<u>Proposición</u>

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico.

Si toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ es una sucesión localmente acotada, entonces todo $\mathcal{T}$-bornívoro de

E es una vecindad secuencial del origen en E.

Demostración

Sea $(x_n) \subseteq E$ una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ entonces, por hipótesis, (x_n) es una sucesión localmente acotada y en consecuencia, existe una sucesión de reales positivos (λ_n) con $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, tal que $\{\lambda_n x_n : n \geqslant 1\}$ es τ-acotado en E.

Así, para cualquier $V \subseteq E$ con V τ-bornívoro, V absorbe $\{\lambda_n x_n : n \geqslant 1\}$, luego, $\exists\, \alpha > 0$, tal que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \geqslant \alpha$ se tiene $\{\lambda_n x_n : n \geqslant 1\} \subseteq \lambda V$.

Por otro lado, como $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ y $|\lambda_n| = \lambda_n$, entonces existe $n \geqslant 1$, tal que $\forall_{m \geqslant n}$ se tiene $\lambda_m \geqslant \alpha$

De esta manera, $\{\lambda_m x_n : m \geqslant n\} \subseteq \lambda_n V$, luego, $\forall_{m \geqslant n}$, $\lambda_m x_m \in \lambda_m V$, por tanto $\forall_{m \geqslant n}$ se tiene $x_m \in V$, con lo que la sucesión (x_n)e.e. en V y finalmente V es una vecindad secuencial del origen en (E, τ). ■

Definición (Sucesión localmente nula)

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico y (x_n) una sucesión en E con $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ Se dice que la sucesión $(x_n) \subseteq E$ es localmente nula, si y solo si, existe una sucesión de números reales (λ_n) con $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, tal que $\lambda_n x_n \xrightarrow{\tau} 0$.

<u>Definición</u> (Espacios lineales topológicos braked)

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico. Se dice que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico <u>braked</u> o que cumple con la <u>condición de convergencia de Mackey</u>, si y solo si, toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$, es localmente nula.

<u>Proposición</u>

Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico. Si $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico braked, entonces $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico S-bornológico.

<u>Demostración</u>

En efecto, sea $(x_n) \subseteq E$ con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$. Como $(E, \mathcal{T})$ cumple con la condición de convergencia de Mackey, entonces (x_n) es una sucesión localmente nula y por tanto, localmente acotada.

Por la arbitrariedad de la sucesión nula escogida, tenemos entonces que todo $\mathcal{T}$-bornívoro de E es una vecindad secuencial del origen y, en especial lo será todo disco $\mathcal{T}$-bornívoro de E de donde podemos afirmar que $(E, \mathcal{T})$ es un espacio lineal topológico S-bornológico. ■

Presentaremos ahora, un primer ejemplo que nos exhibirá un espacio lineal topológico S-bornológico, pero no C-secuencial.

En esta dirección, consideremos el espacio de sucesiones infinitas:

$$l^1 = \left\{ x = (x_n) \;:\; \forall n \in \mathbb{N},\; x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n\geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

provisto de la topología inducida por la norma:

$$\|\cdot\|_1 : l^1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \forall x = (x_n) \in l^1,\; \|x\|_1 = \sum_{n\geq 1} |x_n|$$

que denotaremos por τ_1.

Consideremos en l^1 el sistema $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, donde:

$e_1 = (1,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots), \ldots$

Se tendrá entonces que para cualquier $x=(x_n) \in l^1$; $x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n$.

Sea ahora $(l^1, \tau_1)'$ el dual topológico de (l^1, τ_1) y $f \in (l^1, \tau_1)'$.

Puesto que f es lineal, tendremos que para cada $x = (x_n) \in l^1$

$$f(x) = f\Big(\sum_{n\geq 1} x_n e_n\Big) = \sum_{n\geq 1} x_n f(e_n)$$

de donde, toda $f \in (l^1, \tau_1)'$ queda unívocamente determinada al fijarse, por f las imágenes de los vectores del sistema B.

Por otro lado, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(e_n) = y_n$, entonces para que:

$$f(x) = f\Big(\sum_{n\geq 1} x_n e_n\Big) = \sum_{n\geq 1} x_n f(e_n) = \sum_{n\geq 1} x_n y_n$$

tenga sentido (o converja en $\mathbb{C}$) es condición necesaria y suficiente que $(y_n) = (f(e_n)) \in l^\infty$, donde $l^\infty = \{ y=(y_n) : \forall n \in \mathbb{N},$

$y_n \in \mathbb{C}$ y $\max |y_n| < +\infty \}$

Se establece entonces una isometría

$T : (l^1, \tau_1)' \longrightarrow l^\infty$, que permite identificar toda $f \in (l^1, \tau_1)'$ con $(y_n) \in l^\infty$, tomando $f(e_n) = y_n$ para todo $e_n \in B$ (Ver [4])

Consideremos ahora, la dualidad canónica entre l^1 y $(l^1, \tau_1)'$, $\langle\, ,\, \rangle : l^1 \times l^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\forall x = (x_n) \in l^1$, $\forall\, y = (y_n) \in l^\infty$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n \geqslant 1} x_n y_n$

Tenemos que $\langle , \rangle : l^1 \times l^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$, así definida, es bilineal

Verifiquemos que $\langle , \rangle : l^1 \times l^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$, así definida, es separante en l^1 y en l^∞.

Para este efecto, consideremos $y = (y_n) \in l^\infty$, tal que $\forall x = (x_n) \in l^1$ se tenga $\langle x, y \rangle = 0$. Entonces, para los vectores del sistema $B = (e_n)_{n \geqslant 1}$ también se tendrá que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle e_n, y \rangle = 0$, pero siendo $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle e_n, y \rangle = y_n$, tendremos finalmente que $y = 0$ con lo que la dualidad $\langle\, ,\, \rangle : l^1 \times l^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ es separante en l^1.

De manera similar se demuestra que la dualidad es separante en l^1.

Por lo anterior $(l^1, l^\infty, \langle , \rangle)$ conforman un sistema dual, con lo que podemos construir, sobre l^1, la topología debil $\sigma(l^1,l^\infty)$

Consideremos en este momento, el espacio lineal topológico localmente convexo $(l^1,\sigma(l^1,l^\infty))$ y mostremos que no es C-secuencial, pero sí es S-bornológico.

Para probar que $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ no es C-secuencial mostraremos que no toda vecindad secuencial disqueada del origen en l^1, es vecindad del origen en $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$

Para ello, sea $B_1 = \{ x =(x_n)\in l^1 : \| x \|_1 < 1 \}$

Es inmediato que B_1 es un disco y puesto que $\sigma(l^1,l^\infty) \lneq \tau_1$, obtenemos que B_1 es una vecindad secuencial del origen para $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$

Veamos ahora que B_1 no es una vecindad del origen para $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty))$

Supongamos que B_1 es vecindad del origen para $(l^1,\sigma(l^1,l^\infty)$, entonces $(B_1)' = (B_1)^o$ es una parte $\sigma(l^1, l^\infty)$ - equicontinua de $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))'$ y por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki $(B_1)' = (B_1)^o$ sería una parte $\sigma(l^\infty, l^1)$- compacta de $(l^\infty, \sigma(l^\infty, l^1))$, con lo que por el Teorema de Banach-Bourbaki se tendría que $(l^\infty, \| \|_\infty)$ sería reflexivo, lo cual es una contradicción.

Así B_1 no es vecindad del origen para $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ y, por ende, $(l^1, \sigma(l^1,l^\infty))$ no es un espacio lineal topológico C-secuencial.

Para probar que $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty))$ es un espacio S-bornológico, es suficiente con mostrar que cumple con la condición de convergencia de Mackey.

Como apoyo a la demostración de que $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty))$ cumple con la condición de convergencia de Mackey, demostraremos la siguiente propiedad.

Proposición

Para l^1, la τ_1-convergencia y la σ-(l^1, l^∞)-convergencia, son las mismas.

Demostración

En el primer sentido, puesto que $\tau_1 \geq \sigma(l^1, l^\infty)$ entonces, para cada sucesión $(x^{(m)}) \subseteq l^1$ con $x^{(m)} \xrightarrow{\tau_1} 0$, se tendrá que $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$, con lo que la τ_1-convergencia implica la $\sigma(l^1, l^\infty)$-convergencia.

En el otro sentido, supongamos que nuestra tesis es falsa, esto es, que existe una sucesión $(x^{(m)}) \subseteq l^1$ con $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$ y $x^{(m)} \not\xrightarrow{\tau_1} 0$.

Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión de $(x^{(m)})$ que para facilidad de la notación, la denotaremos también por $(x^{(m)})$, tal que, para todo $m \geq 1$, se tiene $\|x^{(m)}\|_1 > \varepsilon$

Construiremos, en este momento, dos sucesiones de enteros positivos (m_k) y (n_k) de la siguiente manera:

Así, sea $m_1 = 1$. Puesto que $\sum_{i \geq 1} |x_i^{(m_1)}| < \infty$, entonces existe $n_1 \geq 1$, tal que $\sum_{i=n_1+1}^{\infty} |x_i^{(m_1)}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$

Por otro lado, como $p_{e_i}(x^{(m)}) = |x_i^{(m)}|$, donde $p_{e_i}: l^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es dada por $p_{e_i}(x) = |\langle x, e_i \rangle|$ y $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$, se tendrá que para cualquier $i \geq 1$, $p_{e_i}(x^{(m)}) = |x_i^{(m)}| \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow +\infty$, de donde $\sum_{i=1}^{n_1} |x_i^{(m)}| \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow +\infty$, por lo que podemos asegurar que existe $m_2 > m_1$, tal que $\sum_{i=1}^{n_1} |x_i^{(m_2)}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$

De manera general, conocidos m_{k-1} y n_{k-1}, tales que $\sum_{i=n_{k-1}+1}^{\infty} |x_i^{(m_{k-1})}|$, puesto que $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$, existe $m_k > m_{k-1}$, tal que $\sum_{i-1}^{n_{k-1}} |x_i^{(m_k)}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ y dado que $\sum_{i \geq 1} |x_i^{(m_k)}| < +\infty$, existe $n_k > n_{k-1}$, tal que $\sum_{i=n_{k+1}}^{\infty} |x^{(m_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}$

Consideremos ahora la sucesión (ξ_j), donde:

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j < n_1 \\ e^{-i \arg x_j^{(m_k)}} & \text{si } n_{k-1} < j \leq n_k \end{cases}$$

Tenemos que $(\xi_j) \in {}^{\infty}$, puesto que $\forall j \geq 1$, $|\xi_j| = 1$, de donde $\sup |\xi_j| < +\infty$

Definamos ahora una forma lineal sobre l^1 por:

$f: l^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\forall x = (x_n) \in l^1$; $f(x) = \sum_{n \geq 1} \xi_n x_n$

Puesto que $(\xi_j) \in l^{\infty}$, entonces $f \in (l^1, \tau_1)' \cong l^{\infty}$, de donde f es $\sigma(l^1, l^{\infty})$-continua.

Por otro lado, puesto que por hipótesis, $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$ y f es $\sigma(l^1, l^{\infty})$-continua, deberíamos tener que $f(x^{(m)}) \xrightarrow{\tau_e} 0$, pero: $|f(x^{(m_k)})| = |\sum_{j \geq 1} \xi_j x_j^{(m_k)}|$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n_{k-1}} \xi_j x_j^{(m_k)} + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \xi_j x_j^{(m_k)} + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \xi_j x_j^{(m_k)} \right|$$

$$\geq \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \xi_j x_j^{(m_k)} \right| - \left| \sum_{j=1}^{n_{k-1}} \xi_j x_j^{(m_k)} + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \xi_j x_j^{(m_k)} \right|$$

$$\geq \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \xi_j x_j^{(m_k)} \right| - \left(\left| \sum_{j=1}^{n_{k-1}} \xi_j x_j^{(m_k)} \right| + \left| \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \xi_j x_j^{(m_k)} \right| \right)$$

$$\geq \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \xi_j x_j^{(m_k)} \right| - \left(\sum_{j=1}^{n_{k-1}} |\xi_j x_j^{(m_k)}| + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} |\xi_j x_j^{(m_k)}| \right)$$

Como $Z = |Z| e^{i\theta}$ con $\theta = \arg(Z)$, entonces $|Z| = Ze^{-i\theta}$

de donde

$$= \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} |x_j^{(m_k)}| - \left(\sum_{j=1}^{n_{k-1}} |x_j^{(m_k)}| + \sum_{j=n_k+1}^{\infty} |x_j^{(m_k)}| \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(m_k)}| - 2 \left(\sum_{j=1}^{n_{k-1}} |x_j^{(m_k)}| + \sum_{j=n_k}^{\infty} |x_j^{(m_k)}| \right)$$

$$\geq \varepsilon - 2 \left(\frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} \right) = \frac{\varepsilon}{5}$$

lo cual es una contradicción.

De esta manera hemos mostrado que si $x^{(m)} \xrightarrow{\sigma} 0$, entonces se tendrá que $x^{(m)} \xrightarrow{\tau_1} 0$.

Mostremos finalmente que $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty))$ cumple con la condición de convergencia de Mackey, con lo cual $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty))$ será un espacio lineal topológico S-bornológico.

Sea, entonces, $(x^{(n)})$ una sucesión $\sigma(l^1, l^\infty)$-convergente al origen en l^1.

En estas condiciones $(x^{(n)})$ es también τ_1-convergente y, puesto que (l^1, τ_1) es un espacio normado, tendremos que cumple con la condición de convergencia de Mackey; por tanto, existe una sucesión de números reales (λ_n) con $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ tal que $(\lambda_n x^{(n)})$ es τ_1-convergente al origen y por ende $(\lambda_n x^{(n)})$ es $\sigma(l^1, l^\infty)$-convergente.

Nuestro siguiente ejemplo nos proveerá de un espacio lineal topológico C-secuencial, pero no S-bornológico.

Consideremos en esta ocasión el espacio de sucesiones infinitas:

$$l^2 = \left\{ x = (x_n) \;:\; \forall n \in \mathbb{N} \;,\; x_n \in \mathbb{C} \;\text{ y }\; \sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

provisto de la topología inducida por la norma:

$$\|\cdot\|_2 \;:\; l^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \forall x = (x_n) \in l^2, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n \geq 1} |x_n|^2}$$

que denotaremos por τ_2.

Tenemos que $(l^2, \tau_2)' \cong l^2$ (Ver [4]) y tomando en cuenta la dualidad canónica entre l^2 y $(l^2, \tau_2)'$, podemos considerar, entonces, el espacio lineal topológico localmente convexo $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$.

Consideremos finalmente el espacio lineal topológico localmente convexo $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$ generado por $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$.

Tenemos que $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$ es un espacio lineal topológico C-secuencial y mostraremos, a continuación, que no es un espacio lineal topológico S-bornológico.

Para el efecto, bastará que mostremos un disco $\sigma(l^2, l^2)_{cs}$-bornívoro de l^2, que no sea una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$.

Consideremos entonces $B_2 = \{ x=(x_n) \in l^2 : \| x \|_2 < 1 \}$

Es inmediato que B_2 es un disco de l^2 y, dado que los $\sigma(l^2, l^2)$-acotados y los τ_2-acotados son los mismos, entonces B_2 es un $\sigma(l^2, l^2)$-bornívoro, puesto que lo es para τ_2.

Por otro lado, como $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$ y $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$ poseen las mismas sucesiones convergentes, entonces poseen los mismos acotados, por lo que B_2 es un disco $\sigma(l^2, l^2)_{cs}$-bornívoro de l^2.

Veamos que B_2 no es una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$

Para ello, consideremos la sucesión (e_n) de l^2.

Tenemos que (e_n) es $\sigma(l^2, l^2)$-convergente al origen y, por ende, (e_n) será $\sigma(l^2, l^2)_{cs}$-convergente al origen en l^2.

Sin embargo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \notin B_2$, puesto que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| e_n \|_2=1$, lo que prueba que B_2 no es una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2)_{cs})$.

<u>Definición</u> (Espacios lineales topológicos Semi-bornologicos)

Sea (E, τ) un espacio lineal topológico sobre $\mathbb{K}$. Se dice que (E, τ) es un espacio lineal topológico <u>Semi-bornológico</u>, si y solo si, toda forma lineal localmente acotada sobre E, es continua.

Daremos a continuación un ejemplo de un espacio lineal topológico Semi-bornológico, pero no S-bornológico.

Para ello, consideremos nuevamente el espacio de sucesiones infinitas l^2 provisto de la topología τ_2, inducida por la norma $\|\cdot\|_2$ y, además, provisto de la topología débil $\sigma(l^2, l^2)$, inducida por la dualidad canónica entre l^2 y $(l^2, \tau_2)' \cong l^2$.

Probaremos, en primera instancia, que siendo (l^2, τ_2) un espacio lineal topológico normable, se tiene que $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$ es un espacio lineal topológico Semi-bornológico.

Sea entonces $f:l^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(l^2, l^2)$-localmente acotada y mostremos que f es $\sigma(l^2, l^2)$-continua.

Puesto que, por hipótesis, f es $\sigma(l^2, l^2)$-localmente acotada y los acotados para τ_2 y $\sigma(l^2, l^2)$ son los mismos, entonces f es τ_2-localmente acotada y como (l^2, τ_2) normable, entonces f es τ_2-continua y, finalmente, puesto que $\sigma(l^2, l^2) \leqslant \tau_2$, entonces f es $\sigma(l^2, l^2)$-continua.

De esta manera $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$ es un espacio lineal topológico Semi-bornológico.

Veamos ahora que $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$ no es un espacio lineal topológico S-bornológico.

Para esto, basta que encontremos un disco $\sigma(l^2, l^2)$-bornívoro en l^2, que no sea una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$.

Consideremos nuevamente el disco $B_2 = \{x=(x_n)\in l^2 : \|x\|_2$

Tenemos que B_2 es un disco τ_2-bornívoro de l^2 y, puesto que los acotados para $\sigma(l^2, l^2)$ son los mismos que para τ_2, resulta que B_2 es un disco $\sigma(l^2, l^2)$-bornívoro de l^2.

Probemos ahora que B_2 no es una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$.

Consideremos una vez más la sucesión (e_n) de l^2.

Tenemos que (e_n) es $\sigma(l^2, l^2)$-convergente al origen y sin embargo $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \notin B_2$, puesto que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| e_n \|_2 = 1$, de donde B_2 no es una vecindad secuencial del origen para $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$.

Así, $(l^2, \sigma(l^2, l^2))$ es un espacio Semi-bornológico pero no S-bornológico.

CONCLUSIONES

El desarrollo de este modesto trabajo, en general, no ha sido fácil.

Hemos tenido que superar muchas dificultades, entre las cuales la principal de ellas la ha constituido el escaso material bibliográfico que al respecto existe y cuya razón básica es el hecho de lo reciente de los espacios lineales topológicos C-secuenciales y S-bornológicos, además de lo poco que sobre ellos se ha trabajado.

Por esta razón, hemos tenido que desarrollar todos los teoremas que, en general, solamente se enuncian, incluyendo además las demostraciones y proposiciones de apoyo que no aparecen en la bibliografía con que contamos, como el teorema de Garsoux y el hecho de que para l^1, la convergencia débil y la convergencia en norma son las mismas, por ejemplo.

Por otro lado, a los grandes teoremas de construcción y caracterización de las topológias C-secuenciales y S-bornológicas, hemos agregado propiedades que a nuestro juicio poseían y que nuestro esfuerzo ha demostrado.

Entre otros, presentamos particularmente como humildes aportes a la teoría de los espacios estudiados una relación, a nuestro juicio interesante, entre espacios lineales topológicos, aplicaciones lineales en espacios normados con gráficos b-$\|\cdot\|$-cerrados y espacios lineales topológicos S-bornológicos, así como la necesidad de toda una familia de ser C-secuencial, para que las topologías finales localmente convexas respecto de una familia de aplicaciones lineales que hagan cada aplicación lineal continua y secuencialmente continua, respectivamente, sean los mismos y la determinación de que la topología C-secuencial es final respecto a las que poseen sus propiedades.

Nos hemos encontrado a través de la elaboración del trabajo con resultados que a nuestro criterio resultan interesantes por su proyección y la posibilidad de la investigación en esa vía.

Entre estos citamos los teoremas de construcción de las topologías C-secuenciales y S-bornológicos, puesto que nos plantean el problema de caracterizar el espacio (X, τ) para que el espacio $C(X,\mathbb{R})$ provisto de la topología compacta-abierta sea C-secuencial ó S-bornológico.

En igual dirección nos planteamos la necesidad de caracterización de las vecindades del origen para la topología S-bornológica con propiedades internas, de manera que podamos determinar si esta topología es final respecto a las que poseen sus características.

En relación a las propiedades de permanencia nos planteamos el problema de encontrar si existen las condiciones para que el producto de una familia no numerable de espacios lineales topológicos C-secuenciales o S-bornológicos también sea un espacio del mismo tipo, problema que ha sido resuelto para los espacios bornológicos con la exigencia de no existencia de una medida de Ulam sobre el conjunto de indices (Ver [6])

En este mismo sentido, no se conocen aún las condiciones de los sub-espacios de espacios C-secuenciales o S-bornológicos, de manera que con la topología inducida mantengan las propiedades respectivas.

Respecto a los sub-espacios secuencialmente densos, sería interesante resolver la interrogante de que si los mismos podrían caracterizar los espacios lineales topológicos C-secuenciales.

Igual conjetura nos planteamos para determinar si los sub-espacios localmente densos que, provistos de la topología inducida son C-secuenciales, podrían caracterizar los espacios S-bornológicos.

Estas y otras interrogantes están planteadas y, solamente rogamos al todopoderoso para que, de la misma manera como la Universidad de Panamá a través de la acción mancomunada de la Vice-Rectoría de Investigación y Post-Grado que implementó el Programa de Maestría en Matemática, la Vice-Rectoría Académica que nos dió las mejores condiciones de estudio que los medios a su alcance le permitieron en cada momento y la Rectoría que con su visión futurista apoyó decididamente las acciones de los anteriores, puedan seguir apoyándonos en el estudio y la investigación, de manera que cada dia que pase seamos cada vez más útiles a esta pequeña patria nuestra, que tanto necesita de sus hijos para resolver los múltiples problemas que la aquejan.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N., Eléments de Mathématiques Livre V Espaces vectoriels topologiques Actualités Scientifiques et Industrielles Hermann, París, 1935-1955.

[2] BOURBAKI, N. "Sur Certains Espaces Vectoriels Topologiques" Ann. Inst. Fourier 2,5-16(1950)

[3] DUDLEY, R M. "Convergence of Sequences of Distributions" American Mathematical Society. Volume 27, Number 3, 531-534 (1971)

[4] HORVATH, JOHN Topological Vector Spaces and Distributions Vol I Addison-Wesley Reading, Mass (1966)

[5] MACKEY, G.W. "On Convex Topological Linear Spaces" Trans Amer Math. Soc 60,519-537 (1946)

[6] KELLEY, JOHN NAMIOKA ISAAC AND CO-AUTHORS Linear Topological Spaces Springer-Verlag New York (1963)

[7] ROJO, JORGE "Sobre Ciertas Propiedades de los Espacios C-secuenciales y S-bornológicos".

[8] ROJO, JORGE Apuntes de Análisis Funcional. Universidad de Panamá. División de Investigaciones y Post-Grado (1981)

[9] SNIPES, RAY F. "C-Sequential and S-Bornological Topological Vector Spaces". Math. Ann. 202,273-283. Springer-Verlag (1973)

[10] WILANSKY, ALBERT Topics in Functional Analysis Springer-Verlag (1967)