UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRIA EN MATEMATICA

UNA APLICACION DEL MODELO DE VAN HIELE A NIVEL SECUNDARIO: LAS PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

M A Y R A E. M U R I L L O L.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS
PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
ESPECIALIZACION EN MATEMATICA EDUCATIVA

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA
1994

UNIVERSIDAD DE PANAMA

ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

APROBADO:

ANALIDA ARDILA
PRESIDENTE

JUAN NOLE
MIEMBRO

OMAR OLIVEROS
MIEMBRO

FECHA: 26 DE AGOSTO DE 1994

AGRADECIMIENTO

Mi profundo agradecimiento a la profesora Analida Ardila, quien con marcado interés me ofreció su orientación en la elaboración de este trabajo que fue determinante para lograr la culminación del mismo.

A los profesores Omar Oliveros y Juan Nole por sus orientaciones en el mismo.

A mis compañeros de la IV promoción: Ariscela, Fernando, Germán, José, María y Miguel, con los cuales compartimos buenos momentos.

C O N T E N I D O

CAPITULO III. PROPUESTA DIDACTICA: LAS PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

INTRODUCCION

Una de las inquietudes que como docentes a nivel secundario hemos vivido y compartido con colegas es la problemática que presenta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría tanto en el nivel secundario, como al nivel primario y universitario. Los profesores con frecuencia manifiestan su interés en conocer nuevas propuestas metodológicas que le permitan ayudar al estudiante a construir un concepto geométrico.

El trabajo que se presenta es una propuesta metodológica, basada en el modelo de Van Hiele. Este describe como el razonamiento geométrico pasa por cinco niveles diferentes y secuenciales, por lo cual algunos seguidores del modelo lo consideran una teoría de aprendizaje.

La propuesta desarrolla todas las fases del nivel de **Deduccion Informal** del modelo de Van Hiele y está dirigida a estudiantes de 14 a 16 años.

El objetivo primordial de la propuesta es la utilización del Modelo de Van Hiele como alternativa metodológica para la elaboración de una unidad de enseñanza sobre las propiedades de los paralelogramos.

Para lograr el objetivo propuesto se ha dividido en tres capítulos que detallamos a continuación:

En el primer capítulo, se presenta un resumen del origen del modelo cuyo autores fueron los esposos Van Hiele , luego se describe el modelo el cual consta de dos partes: la primera describe los cinco distintos niveles de razonamiento geométrico que se pueden encontrar en los estudiantes que son: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor. La segunda parte se refiere a las cincos fases de cada nivel y a las actividades de aprendizaje que pueden ayudar al profesor a organizar sus clases, para que los estudiantes logren adquirir el nivel posterior a el que se encuentran. Las fases son: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Además se presenta, dentro del trabajo, explicaciones de ciertas propiedades encontradas en el modelo a través de investigaciones realizadas por seguidores del mismo y por último un resumen del desarrollo cronólogico del modelo producto de las diferentes investigaciones y trabajos que se han realizado en diferentes países como: la antigua Unión Soviética, Estados Unidos, España, Puerto Rico, México y Panamá.

En el segundo capítulo, presentamos nuestra justificación de la propuesta aclarando con más detalle las bases teóricas de la misma. Luego se detallan los prerrequisito que debe conocer el estudiante para lograr "descubrir" las propiedades de los paralelogramos. Además se presenta la descripción de la propuesta y la clasificación del contenido de la misma. Por último se introducen sugerencias de actividades que servirán de guía para el profesor en los dos primeros niveles del modelo: Reconocimiento y Análisis si se encuentra el profesor con el dilema que sus estudiantes no han superado dichos niveles.

En el tercer capítulo, se presentan las actividades llamadas "tareas" que siguen la secuencia de las cinco fases de aprendizaje del modelo en el nivel de Deducción Informal. Cada fase presenta objetivos específicos con propósitos diferentes y encaminados a lograr que en la última fase, la de Integración, el estudiante resuma los conocimientos adquiridos para lograr el paso del nivel de Análisis al Deducción Informal.

Finalmente se presentan algunas conclusiones, recomendaciones y las referencias bibliográficas consultadas.

CAPITULO I

EL MODELO DE VAN HIELE

1.1 ORIGEN DEL MODELO

Los autores del modelo que se presenta en este trabajo fueron los esposos Van Hiele, ambos profesores de Geometría en la Escuela Secundaria de Montessori, Holanda. Preocupados al observar las deficiencias que sus estudiantes presentaban en actividades de comprensión geométrica, presentan un modelo que intenta explicar cómo se da la evolución del pensamiento geométrico. Este es sustentado en un trabajo para optar por el título de Doctor en Ciencias de la Educación en la Universidad de Utrech, Holanda, en 1957.

El modelo consta de dos partes: la primera explica cómo se produce, en los estudiantes, el desarrollo del razonamiento geométrico, y la segunda parte presenta la forma en que el profesor puede ayudar al estudiante para que desarrolle el razonamiento geométrico.

En esa investigación los esposos Van Hiele se repartieron el trabajo: Dina Van Hiele-Geldof se encargó de un experimento didáctico con el fin de averiguar en qué nivel de razonamiento se encuentra determinado estudiante y Pierre Van Hiele se encargó de estructurar los principios para guiar a los estudiantes a desarrollar su intuición geométrica.

La tésis de los Van Hiele fue dirigida por Hans Freudenthal, investigador en Educación Matemática de reconocido prestigio internacional. Para el desarrollo de esta teoría los Van Hiele se inspiraron en los resultados obtenidos por Piaget en su Teoría Psicogénetica sobre el desarrollo de los esquemas mentales del ser humano.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Se mencionó anteriormente que el modelo presenta dos partes: la primera describe los distintos niveles de razonamiento geométricos que pueden encontrarse en los estudiantes a través de su formación matemática que se inicia desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el razonamiento formal y abstracto. Los niveles son cinco: Visualización o *Reconocimiento*, *Análisis*, *Deducción informal* o *Clasificación*, *Deducción formal* y *Rigor*. La segunda parte se refiere a cómo el profesor puede realizar actividades en clase para ayudar a los estudiantes a adquirir el nivel posterior a la etapa en que se encuentra. Cada nivel consta de cinco fases de aprendizaje que son: *Información*, *Orientación dirigida*, *Explicitación*, *Orientación libre* e *Integración*.

A continuación presentamos las características de los cinco niveles de razonamiento propuestos por los Van Hiele.

1.2.1 NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICOS

Nivel 1 : Reconocimiento o Visualización

En este primer nivel el estudiante:

-Visualiza las figuras en su totalidad y como unidades.

-Describe las figuras de acuerdo a como las observa físicamente usando su propio vocabulario.

-Diferencia o clasifica las figuras de acuerdo a como las observa físicamente.

-Puede reproducir las figuras y copiarlas por su aspecto físico, usando el ensayo y error para dibujarlas o formar las figuras.

-Identifica figuras geométricas en diferentes posiciones y direcciones.

-No reconoce explícitamente las propiedades y componentes de una figura.

Es importante que a este nivel, que es de familiarización del estudiante con el objeto geométrico, el estudiante no tome como parte de este objeto lo que no es inherente a él, como lo es la posición que ocupa el objeto en el plano o en el espacio .

Como ejemplo podemos citar que se acostumbra dibujar los triángulos rectángulos apoyados en uno de sus catetos (ver figura #1). Si los representamos como en la figura #2, se les dificulta a los estudiantes, algunas veces, reconocer si se trata de un triángulo rectángulo.

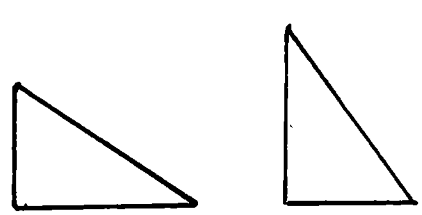


Fig. #1

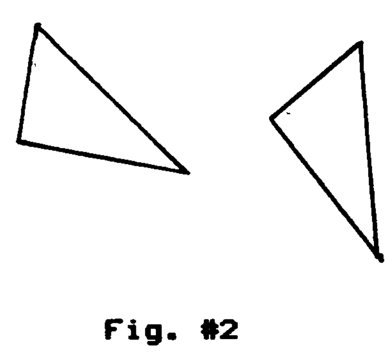


Fig. #2

Otro ejemplo, muy común, es representar el cuadrado como en la figura # 3. Al dibujarlo apoyado en uno de sus vértices, como en la figura # 4, ya no representa para el estudiante un cuadrado, lo visualiza como un rombo.

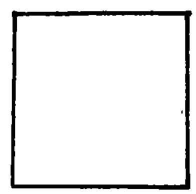


Fig. #3

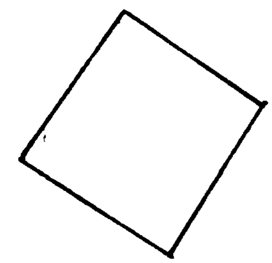


Fig #4

Con los ejemplos citados se muestran algunas dificultades que presentan los estudiantes al identificar una figura; la posición que ésta tome es determinante para su identificación.

Es conveniente, en este nivel, presentar el objeto geométrico en diferentes posiciones y hacerles notar que éste es el mismo, independientemente de la posición en que se presenta.

La visualización juega un papel importante. Pero para los estudiantes muchas veces la posición del objeto sobre el papel o tablero , hace que ésta forme parte de la naturaleza del mismo ya sea porque los profesores o porque los libros de textos presentan siempre el dibujo en la misma posición.

Veamos a continuación lo que nos dice Adda (1987, p.62) acerca de la posición de las figuras :

"es tradicional trazar una recta en posición horizontal, (Fig. #5) *lo que es totalmente lógico, porque si la dibujamos así:* (ver Fig. #6)

desperdiciamos papel. Así pues por tener la escritura lineal, hay direcciones privilegiadas. Todo esto está ligado a ciertas normas tipográficas en las representaciones, que no tienen qué ver con el objeto matemático ".

Fig.#5

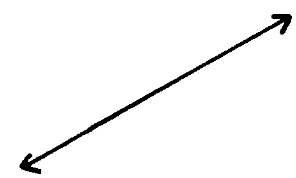


Fig. #6

Las representaciones comunes, como las señaladas, originan confusiones y mal hábito en las representaciones realizadas para desarrollar la visualización en los estudiantes. En este nivel se desea corregir este tipo de confusiones en la que la posición la han hecho inherente al objeto geométrico.

Para la Psicología la "visualización" consiste en utilizar el conocimiento sensorial, en acumular ideas sobre objetos y fenómenos concretos para conseguir conocimientos teóricos generalizados y perfeccionarlos.

En la visualización es costumbre utilizar medios auxiliares que le permitan al estudiante captar la percepción del objeto estos son: gráficos, figuras esquemáticas, láminas, fotografías, materiales concretos, etc.,. Hay que tener presente que estos medios auxiliares de apoyo, deben representar en primer plano lo que se quiere y no deben mostrar aquellos aspectos que puedan llamar la atención al estudiante y que no son inherente a la figura.

Nivel 2 : Análisis

El estudiante en este nivel :

-Describe una figura por sus características o propiedades a través de la observación y experimentación y no sólo por la forma.

-Puede deducir nuevas propiedades a través de la experimentación, no siente la curiosidad o necesidad de justificarlas.

-No puede identificar las relaciones que existen entre las propiedades de una figura.

-Define una figura de acuerdo a las propiedades, no escoge el conjunto mínimo de propiedades para dar una definición formal y precisa, es decir la define de diferente formas de acuerdo a todas las propiedades que la particularizan.

Observamos que en el nivel de Análisis es donde el estudiante empieza a identificar las propiedades de una figura, ya no se centra en el objeto geométrico solamente. El conocer detenidamente la figura le permite un estudio descriptivo del objeto. Cuando más completo y detallado sea el estudio hacia el objeto geométrico es más fácil su reconocimiento.

Veamos un par de ejemplos para el nivel de análisis. Tomemos uno de los teoremas más conocidos de la geometría el *Teorema de Pitágoras* que nos dice: " *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual* *al cuadrado de la hipotenusa* "; podemos llevar al estudiante a que verifique el teorema mediante un enfoque empírico tomando casos particulares, por ejemplo un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. El estudiante puede construir un triángulo con estas medidas y usando papel cuadriculado construir los cuadrados respectivos para los catetos (ver figura #7), luego sumará los cuadritos que componen cada cateto y verificará que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa. Luego se le puede pedir, al estudiante que repita la misma actividad para el triángulo rectángulo de lado 5,12,13. De esta manera el estudiante "generaliza" el teorema ya que lo verificó para casos particulares .

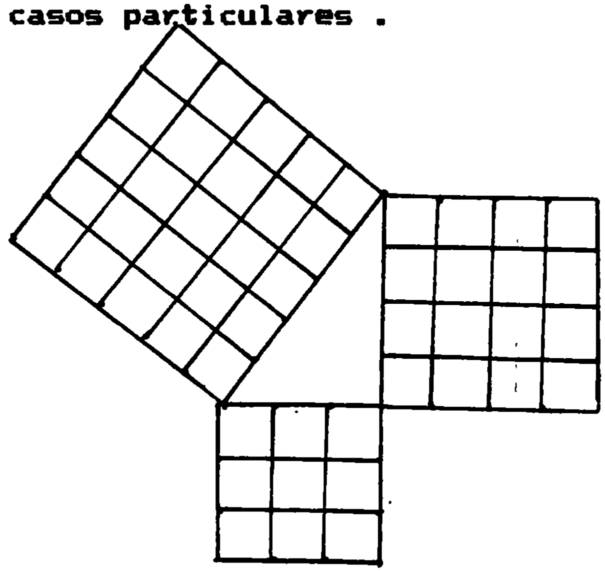


Figura #7

Otro ejemplo es comprobar empíricamente que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, mediante plegados de papel, veamos:

a. Pídale al estudiante que construya un triángulo ABC. Luego que trace la altura con respecto al vértice B. Llámele D al punto donde se cortan el pliegue formado en el paso anterior con el lado $\overline{AC}$. (ver figura a).
b. Dóblese el triángulo de forma que el vértice B se

sitúe sobre el pie D de la altura $\overline{DB}$. De esta forma, el ángulo de vértice B del triángulo ha tomado una posición tal que su vértice está confundido con el punto D .

C. Dóblece ahora los triángulos de la izquierda y la derecha de la fig.b, de modo que el vértice A se sitúe sobre D, y el vértice C también.

Con esta construcción, los tres ángulos A, B y C, del triángulo ABC se han trasladado hasta hacer coincidir sus vértices con el punto D. Estos tres ángulos con el vértice común D forman, como se observa en la fig.b, un ángulo llano, es decir, suma 180^{o}.

Este resultado, comprueba empíricamente que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^{o}.

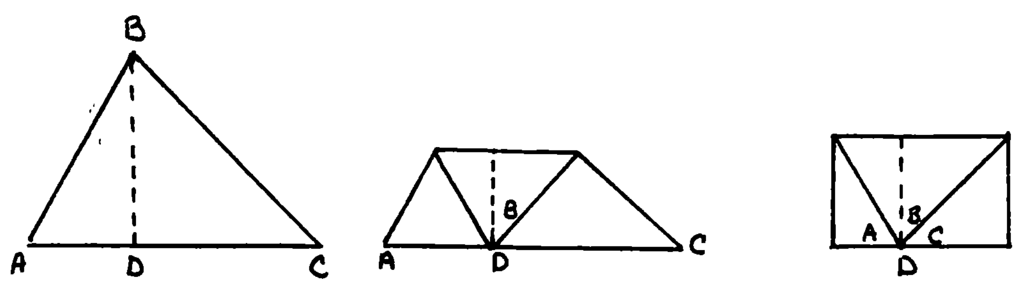


fig a fig b

Figura # 8

Nivel 3 : Clasificación o Deducción Informal

En este nivel el estudiante :

-Establece las relaciones entre las propiedades que posee la figura.

-Define y describe una figura con las mínimas propiedades que la puedan conceptualizar.

-Descubre nuevas propiedades en base a las conocidas.

-Puede realizar inclusiones de figuras, es decir puede identificar entre dos figuras si las propiedades de una figura se cumple en la otra y si son ambas de la misma clase.

-Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico, pero no comprende la conexión y la estructura de una demostración.

-Aún no siente la necesidad del uso de un razonamiento lógico para justificar sus conclusiones .

En este nivel de Clasificación es cuando el estudiante observa las interrelaciones de las propiedades, por lo que se refleja la capacidad de aplicar los conocimiento previos asimilados, para poder descubrir nuevas propiedades basándose en las ya conocidas, además asegura la clasificación del objeto ante la clase a la cual pertenece.

A continuación un ejemplo para introducir la fórmula del área del círculo $A = \pi r^2$. Muchas veces le damos la fórmula y el estudiante la aplica, pero en realidad no comprende cómo se deduce ésta. Podemos presentarle la fórmula, al estudiante, de forma intuitiva utilizando plegados de papel para que conozca porque es esa la fórmula, ver figura # 9.

Recortar un círculo, doblarlo en dos, cuatro y ocho partes, (ver fig.a). Luego abrir el círculo y marcar con un lápiz los dobleces, (ver fig. b). Recortar la figura por estos dobleces y colocar las piezas como la figura c que se asemeja a un paralelogramo. Calcular el área de esta nueva figura aplicando la del paralelogramo. De esta manera el estudiante deduce la fórmula del área del círculo.

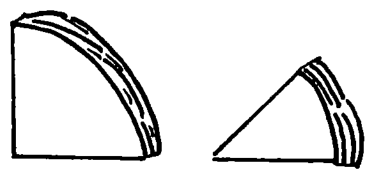


Fig. a

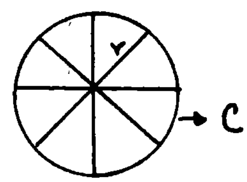


Fig. b

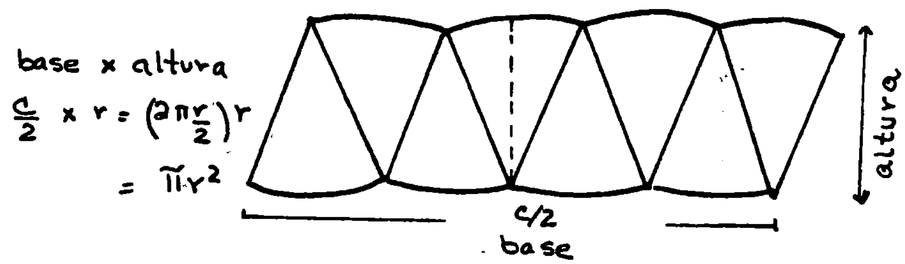


Fig. c

Figura #9

Otra actividad para este nivel de clasificación es proveer los pasos de una demostración por ejemplo:

Dado el ΔABC y ΔABD, ver Figura #10, con $\angle DAB \cong \angle DBA$ y $\angle CAD \cong \angle CBD$.

Demostrar que: $\angle CAB \cong \angle CBA$.

El estudiante debe justificar cada paso

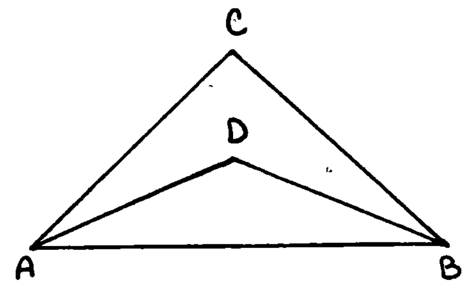


Figura #10

1. m $\angle$ DAB = m $\angle$ DBA ________________
2. m $\angle$ CAD = m $\angle$ CBD ________________
3. m $\angle$ DAB + m $\angle$ CAD = m $\angle$ DBA + m $\angle$ CBD

   ____
4. m $\angle$ CAB = m $\angle$ CBA ________________
5. $\angle$ CAB $\cong$ $\angle$ CBA. ________________

Nivel 4 : Deducción Formal

El estudiante :

-Puede construir una demostración y realizarla por diferentes vías. Es decir, utiliza técnicas y métodos variados en sus demostraciones.

-Identifica en una proposición la hipótesis (datos) y la tésis (lo que se quiere demostrar).

-Comprende la estructura axiomática de la matemática es decir clasifica las aseveraciones en postulados o axiomas, teoremas, definiciones y demostraciones.

-Puede realizar comparaciones entre las diferentes demostraciones para un mismo teorema.

El razonamiento deductivo refleja la combinación de análisis, síntesis y comparación donde el estudiante es capaz de comprender y realizar una demostración sin necesidad de memorizarla; conectar los axiomas o postulados, definiciones, y teoremas que requiere para llegar a la veracidad de lo que quiere probar. Aunque el estudiante a este nivel esté predispuesto a demostar es muy importante aclarar que existen dificultades de tipo lógico que debe superar. De La Vega (p.23) menciona a A. Fetisov (1980) y S. Senk (1985), quienes analizaron algunas de estas dificultades. Unas se basan en la figura sobre la que se razona, otras sobre los resultados que se usan y otras en las reglas lógicas.

Veamos algunas de ellas:

-Razonar sobre el caso particular representado por el dibujo. Por ejemplo demostrar una propiedad de los triángulos usando un triángulo equilátero y basándose en las propiedades de éste.

-Interpretar figuras superpuestas o didujos con líneas auxiliares.

-Emplear en la ejecución de la demostración el teorema que se quiere probar, o resultados que son equivalentes a ésta.

-Utilizar el recíproco de un teorema que a veces no siempre es cierto en lugar de usar el teorema directo.

-Argumentar la demostración en una propiedad aún no demostrada.

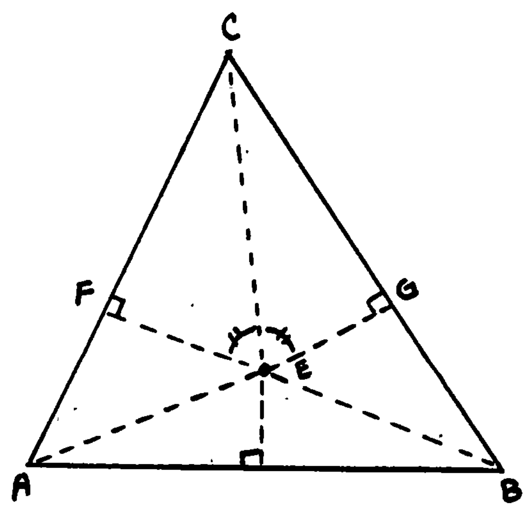
-Si se tiene que A implica B y que C implica B deducir que A implica C.

A continuación mencionaremos un par de ejemplos que constituyen paradojas geométricas originadas por razonar en dibujos erróneos :

* "*Todos los triángulos son isósceles* "

Demostración :

Sea ABC un triángulo cualquiera :



Tracemos la bisectriz del ∠ C y la mediatriz del lado $\overline{AB}$. Llamemos E el punto de intersección de estas construcciones. Desde el punto E tracemos las perpendiculares $\overline{EF}$ al lado $\overline{AC}$ y $\overline{EG}$ perpendicular al lado $\overline{BC}$. Tracemos los segmento $\overline{EA}$ y $\overline{EB}$.

Como $\overline{CE}$ es la bisectriz del ∠ C entonces ∠ FCE = ∠ GCE además por construcción $\measuredangle$ CFE y $\measuredangle$ CGE son ángulos rectos, $\overline{CE}$ es hipotenusa de ambos triángulos; por el criterio A-L-A los $\Delta CFE \cong \Delta CGE$. Por lo tanto $\overline{CF} \cong \overline{CG}$ y $\overline{FE} \cong \overline{EG}$.

De la misma manera:

$\overline{FE} \cong \overline{EG}$ por la anterior congruencia.

$\measuredangle AFE \cong \measuredangle BGE = 90^{o}$ por construcción

$\overline{AE} \cong \overline{BE}$ por ser E un punto de la mediatriz de AB.

por el criterio hipotenusa-cateto $\Delta EFA \cong \Delta EGB$.

luego $\overline{FA} = \overline{GB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } \overline{AC} = \overline{CF} + \overline{FA} \\ \qquad \overline{CB} = \overline{CG} + \overline{GB}\end{array}\right\} \overset{\text{como:}}{\left.\begin{array}{l}\overline{FA}\cong\overline{GB} \\ \overline{CG}\cong\overline{CF}\end{array}\right\}} \overline{AC} \cong \overline{CB} \text{ luego el}$$

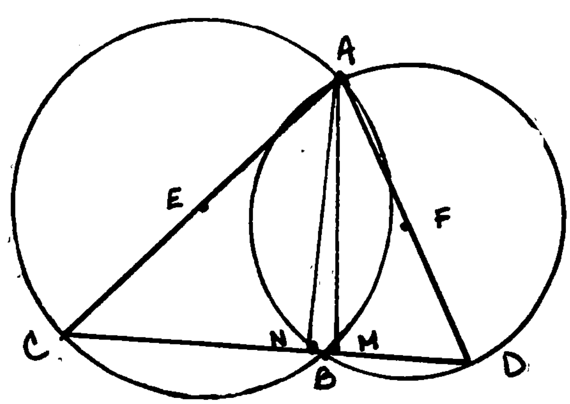
ΔABC es isósceles.

Citemos otro ejemplo :

* *"Desde un punto exterior a una recta dada se pueden trazar dos perpendiculares a ella "*

Demostración:

Supongamos que las dos circunferencias con centro E y F respectivamente se cortan en A y en B.



Trace los diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, luego unamos C y D, llamemos M y N los puntos donde el segmento $\overline{CD}$ corta a las dos circunferencias. Como los triángulos AMC y AND están inscritos en una semicircunferencia estos son triángulos rectángulo. Por lo tanto $\overline{AM}$ Y $\overline{AN}$ son perpendiculares a $\overline{CD}$.

Observemos que los argumentos utilizados en las demostraciones son lógicamente coherentes. El problema está en los dibujos seleccionados, en el primer ejemplo el error no se daría si se eligiera un triángulo escaleno. Para el segundo ejemplo es necesario utilizar la regla y el compás para observar que las perpendiculares trazadas coinciden.

Nivel 5 : Rigor

En este último nivel :

-El estudiante es capaz de establecer comparaciones entre distintos sistemas axiomáticos.

-La geometría se observa más abstracta.

-Puede analizar varios sistemas deductivos.

-Comprende propiedades de los sistemas deductivos: consistencia, independencia y completitud.

Este nivel fue muy poco estudiado por Pierre Van Hiele, por motivo de que en los cursos de Geometría que impartía, desarrollaba hasta los cuatros niveles anteriores. Investigaciones realizadas muestran una inconsistencia del nivel de razonamiento de rigor con las anteriores, debido a que sólo se encuentra en los matemáticos profesionales y en algunos estudiantes de la carrera de matemática.

1.2.2 Propiedades del Modelo

El modelo presenta ciertas propiedades que muestran guías para que el profesor fundamente y desarrolle la clase en base a este modelo.

Vamos a referirnos a las propiedades que aparece en Crowley (1987) y Jaime Gutiérrez (1990).

Recursividad : en cada uno de los niveles aparecen ciertas características implícitas; y no es hasta el nivel que le sigue donde estas características se hacen explícitas.

Por ejemplo en el nivel de análisis el estudiante ha identificado propiedades del cuadrado tales como: cuatro ángulos rectos, cuatro lados iguales, cuatro lados paralelos dos a dos, las diagonales se cortan en el punto medio, pero no sabe que estas propiedades, descubiertas en este nivel, están relacionadas. Que el paralelismo involucra ángulos iguales y lados iguales. Tampoco puede deducir que el cuadrado tiene todas las propiedades del rombo y del rectángulo. Ve a estos tres objetos geométricos, cuadrado, rombo y rectángulo, como clases disjuntas; lo anteriormente expuesto se hace explícito en el siguiente nivel de razonamiento el de clasificación o deducción informal.

Veamos a continuación una tabla donde se resume los elementos implícitos que están en un nivel y cuando se hacen explícitos (Gutiérrez,1990) .

Nivel	Elementos explícitos	Elemento Implícitos
1. Reconocimiento	Objetos geométricos	Propiedades matemáticas los objetos
2. Análisis	Propiedades mat. de los objetos	Relaciones entre propiedades y/o elementos
3. Clasificación	Relac. entre prop. o elementos	Deducción formal de relaciones
4. Deducción Formal	Deduc. formal de relac.	

Cada nivel presenta ciertas destrezas o habilidades que el estudiante debe dominar, para poder proseguir al siguiente nivel. Es claro, que en la tabla presentada el nivel 1 es donde el estudiante empieza a tener contacto con el objeto: reconocer y representar la figura tal y como la observa y expresarla en su propio vocabulario, por ejemplo un rectángulo por el "tablero". En el nivel 2, es cuando se hace uso de las propiedades del objeto y utiliza ya un vocabulario geométrico. Para el nivel 3, el alumno observa las relaciones entre las propiedades descubiertas y se dá una clasificación del objeto hacia el género al cual pertenece. En el nivel 4, siente la necesidad de argumentar, mediante razonamientos lógicos formales, las verdades descubiertas y las relaciones entre las propiedades enunciadas en el nivel 3.

Secuencialidad : no es posible saltar de un nivel al siguiente si el estudiante no domina las destrezas y habilidades propias del nivel inferior. Es decir, para estar en un nivel N debe haber superado todos los niveles anteriores.

El aprendizaje por memorización, que se da en la escuela, es peligroso porque se puede creer que el estudiante está en un nivel N por razón de presentar síntomas propios de las características del nivel N, ya sea por el manejo del vocabulario, las destrezas o habilidades; cuando en realidad no comprende ni usa correctamente lo que conoce. En matemática ocurre esto, cuando en una demostración, enseñada por el profesor de matemática, el estudiante se la aprende de memoria y actúa en forma mecánica al resolver un determinado tipo de problema.

Linguística : cada uno de los niveles lleva un modo peculiar y distintivo del tipo de lenguaje para expresarse y un vocabulario matemático específico; de forma que para un nivel N una expresión o una relación es aceptada, pero para el nivel N + 1 esa misma relación se modifica.

Esta propiedad del modelo nos indica que dos estudiantes de niveles diferentes no pueden entenderse. Por ejemplo, para un estudiante del nivel 2 Demostrar " que las diagonales de un rectángulo son iguales" lo verificará vía experimental ya sea midiéndolas o utilizando plegados de papel, en cambio en el nivel 4 el estudiante hará una demostración formal; usando los conocimientos previos que requiere para argumentar la veracidad de la misma.

Es importante resaltar, tal y como opinan otros investigadores, que el mensaje del modelo de Van Hiele es que los profesores deben situarse al nivel del estudiante utilizando el lenguaje apropiado para éste y no querer que el estudiante se sitúe en el nivel del profesor.

Continuidad : La transición de un nivel a otro puede durar algunos años ésta se hace de forma lenta, gradual y contínua.

¿ Qué pasaría si un estudiante manisfestara a la vez características propias de distintos niveles ?. ¿ Cómo podemos ubicarlo ? o si presentase característica de un nivel N y no ha adquirido las del nivel N - 1. Estas son complicaciones que se nos presentan al aplicar el modelo .

Los Van Hiele presentaron en sus investigaciones, a través de sus experiencias como profesores de Geometría, una estructura discreta en los niveles. Veamos el ejemplo (Gutiérrez 1990, p.95) :

> *" ...Había partes de la materia que yo podía explicar y explicar y aún así los alumnos no entendían ...De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión; podía hablar de ella con bastante sentido ...".*

Las investigaciones referentes a este modelo concluyen, con respecto a lo anteriormente citado, que :

- No se debe confundir haber entendido la solución de un problema específico ya que se pudo haber adquirido la destreza, habilidad o tipo de razonamiento necesaria para dar solución a ese nuevo problema a través de haber resuelto varios problemas similares.

- Los niveles presentan diferentes destrezas o habilidades propias de cada uno. Pensar que un estudiante está en un nivel N es considerar que presenta todas las destrezas o habilidades de ese nivel.

Gutiérrez (1990), nos menciona que durante los últimos años diversas investigaciones con respecto al modelo de Van Hiele (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys 1988, Jaime y Gutiérrez (1990b), se han encontrado con el dilema de que algunos estudiantes al resolver un problema usan simultáneamente diferentes tipos de niveles de razonamiento consecutivos. El problema está en ubicar al estudiante en un nivel de razonamiento determinado .

Para este dilema, por ejemplo, Burguer y Shausghnessy (1986) y Fuys (1988) en sus investigaciones, para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes, usan la estrategia de la entrevista clínica . Pero como conocemos ésta tiene su desventaja , si la muestra es demasiado grande se consume mucho tiempo.

La otra alternativa son los test de respuesta libre. Al elaborarlos, deben estar bien estructurado de modo que puedan medir todas las destrezas que se requieren para un nivel N. No es una tarea fácil construir un test que realmente puedan determinar el nivel en que se encuentra un estudiante .

Avance de un nivel : El progreso de un nivel N depende del método de enseñanza que utilice el profesor, de acuerdo al contenido y al nivel específico. Y éste no depende de la edad cronológica, según los Van Hiele.

Es decir, que si la enseñanza y el aprendizaje se encuentran en niveles diferentes el progreso no se dará, ya que el lenguaje, los materiales, contenidos se encuentran en un nivel superior al que tienen actualmente los estudiantes. Esta propiedad nos dice que al elaborar las actividades hay que tomar en cuenta los elementos mencionados, con el fin de que se alcancen los objetivos propuestos en el programa . Es necesario que los programas de estudios cuenten con objetivos generales, específicos, contenidos, actividades, metodología y técnicas de enseñanza propias del año escolar en que se encuentre el estudiante. También hay que considerar las otras propiedades del modelo ya mencionadas : recursividad, secuencialidad, lingüística y continuidad .

El profesor debe seleccionar muy bien el método de enseñanza que utilizará, porque de él depende que se dé un avance en el nivel N donde se encuentre el estudiante.

1.2.3 FASES EN EL PROCESO DE ENSENANZA-APRENDIZAJE

Pierre Van Hiele propone, a los profesores, cinco fases de aprendizaje secuenciales con el fin de que el estudiante alcance el nivel de razonamiento superior al que tiene actualmente. Estas fases son las mismas para los cinco niveles de razonamiento, lo que cambia son las actividades, contenidos matemáticos, lenguaje, objetivos, materiales que organiza el profesor. Estas fases son de carácter cíclico, si el estudiante supera el nivel en que se encuentra actualmente, debe iniciar el proceso nuevamente con las cinco fases para llegar al nivel siguiente.

Las fases de aprendizaje, propuestas a los profesores, son guías de orientación de la manera en que él puede organizar sus clases en forma sistemática y proporcionar al estudiante, experiencias adecuadas para lograr el avance del nivel en que se encuentra.

Las fases del modelo de Van Hiele son:

1. **Información:** el profesor y el estudiante se relacionan mediante conversaciones, preguntas y observaciones, con el fin de poner en contacto al estudiante con el objeto de estudio. Esta fase persigue dos fines: el primero diagnostica los conocimientos previo que tiene el estudiante acerca del tema que se va desarrollar; de esta manera el

profesor conoce los esenciales mínimos que necesita el alumno para abordar el tema, ya sean estos incorrectos o correctos .
La enseñanza que implante el profesor deberá adecuarse a los conocimientos y al nivel de razonamiento actual de los estudiantes, evitándose en esta fase el desparejamiento. El segundo fin, consiste en que el estudiante sabe hacia dónde se enfoca el campo de investigación.

2. **Orientación dirigida:** el estudiante explora el objeto de estudio, a través de las actividades que prepara el profesor en forma progresiva y sistemática . Estas actividades deben conducir al estudiante a experiencias necesarias, para desarrollar ciertas destrezas características del propio nivel de razonamiento que se quiere superar.

   La fase de orientación dirigida persigue la comprensión, descubrimiento y construcción de los conocimientos básicos del contenido que se quiere empezar a estudiar.

3. **Explicitación:** los estudiantes intercambian opiniones acerca de las actividades realizadas anteriormente, discuten sus resultados, dificultades, y experiencias, en un lenguaje adecuado a su nivel de razonamiento. El papel del profesor es mínimo, sólo interviene para guiar al estudiante a expresarse con la terminología adecuada, característica del propio nivel de razonamiento que se quiere dirigir.

Esta fase es importante porque se manifiesta, en primer lugar, si se están logrando los objetivos del estudio, y si la metodología, el vocabulario, los materiales, la secuencialidad y sistematización de las actividades, fueron las adecuadas. En segundo lugar permite al estudiante afianzar sus conocimiento y corregir aquellos resultados que fueron incorrectos. El sistema de relaciones, características del nivel de razonamiento, comienza a resaltarse en esta fase.

La fase de explicitación no debe entenderse como que sólo debe ser intercalada entre la fase 2 y fase 4 sino que ella deberá interactuar durante todas las demás fases y actividades desarrolladas en clases.

4. **Orientación Libre:** los estudiantes realizan tareas más complejas aplicando sus nuevos conocimientos al campo de estudio. Hay creatividad por parte de él resolviendo las tareas por sus propios caminos. Las tareas son menos dirigidas permitiendo al estudiante que integre sus conocimientos para dar solución al problema. El material es, en gran parte, conocido. Lo que se quiere lograr es que el estudiante pueda descubrir, afianzar, relacionar los conocimientos y usar las nueva formas de razonamiento.

5. **Integración:** el profesor elabora tareas de comprensión global de manera que se pueda resumir en un todo el campo de objeto de estudio y lograr que los estudiantes interconecten lo que aprendieron. En esta fase no debe

proporcionarse, al estudiante, conocimientos nuevos. Debe enfatizarse en una condensación, análisis y resumen de los conocimientos que tiene con anticipación.

1.2.4 SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LOS CUATRO PRIMEROS NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO.

A continuación mencionaremos una lista de actividades propias de cada nivel. En Crowley (1987) se pueden encontrar otras ideas de actividades para desarrollar la enseñanza de los cuatro primeros niveles de razonamiento geométrico.

Nivel 1 : Visualización o Reconocimiento

1. Permitir al estudiante recortar, dibujar, construir con materiales rígidos figuras geométricas.
   Se recomienda para este nivel utilizar el "geoplano" Utilizar también fotografías, láminas, objetos que los rodean.

2. Confeccionar figuras donde se encuentren contenidas otras figuras geométricas, con el fin de que se le pida al estudiante identificarlas.

3. Permitir al estudiante que describa en su propio lenguaje una figura geométrica, relacionándola con un objeto que lo rodea en su ambiente.

4. Colorear o marcar en un conjunto de figuras geométricas solamente aquellas que se le pide.

5. Se recomienda usar rompecabezas de figuras geométricas.

Nivel 2 : Análisis

1. Uso de los instrumentos de geometría para que el estudiante verifique las propiedades que se quiere que descubra.

2. Repetir varias veces la misma actividad para que el estudiante generalice lo que descubrió empíricamente.

3. Usar plegados de papel para la verificación de sus resultados.

4. Pedirle al estudiante que describa una figura geométrica usando las propiedades descubiertas y decirles que pueden hacer las descripciones, para la misma figura, de diferentes maneras.

4. Pedirle al estudiante que haga comparaciones entre figuras geométricas; y que conteste preguntas como : en qué se parecen, en qué se diferencian.

Nivel 3 : Clasificación o Deducción Informal

1. Usar cuadros comparativos donde el estudiante pueda anotar las propiedades que cumplen ambas figuras. para que observe la inclusión y relaciones entre de ellas .

2. Pedirle al estudiante que, con las propiedades descubiertas anteriormente y las relaciones entre ellas, defina la figura con las mínimas propiedades que la puedan conceptualizar.

3. Usar geoplano para que conviertan una figura geométrica en otra.

4. Proporcionarles los pasos de una aseveración descubierta por el estudiante con anterioridad y pedirle que justifique cada paso.

5. Proveerles proposiciones de tal manera que puedan enunciar su recíproco.

6. Motivarlos, por medio de interrogatorio constante, para que justifiquen sus aseveraciones.

Nivel 4 : Deducción Formal

1. Pedirle al estudiante que identifique la hipótesis y la tesis del teorema a demostrar.

2. Presentar una lista de enunciados para que

clasifiquen en axiomas o postulados, teoremas y definiciones.

3. Pedirle que compare las diferentes demostraciones para un mismo teorema.

4. Argumentar los enunciados a demostrar.

5. Permitirles el uso de diferentes estrategias o métodos para demostrar: generalización, inducción, deducción, analogías, reducción al absurdo.

1.3. DESARROLLO DEL MODELO

El modelo de Van Hiele se puso en práctica en la antigua Unión Soviética, donde atrajo la atención de los educadores soviéticos quienes estaban en una fase de un proyecto de reforma curricular. Después de realizar intensos estudios se incorporó el modelo como base para la elaboración del nuevo currículo de la geometría en la Antigua Unión Soviética y se implanta en 1964.

En los países de Occidente el modelo llamó muy poca atención, y no fue hasta 1976 cuando el norteamericano Izaak Wirszup en una conferencia donde describe los resultados del currículo soviético, cuando éste se conoce y pone alerta a los Estados Unidos ya que demuestra la eficacia del modelo. Con este hecho, en los Estados Unidos, se realizan diversas investigaciones con referencia a este modelo, el cual despierta interés en la investigación educativa y en la práctica docente.

En los años 80, en los Estados Unidos, se empieza a desarrollar proyectos de investigación sobre los niveles del modelo los cuales según Limardo (1989) y Hoffer (p.212) son :

- Proyecto de Chicago, Usiskin (1982) :Estudió las habilidades geométricas de los estudiantes de secundaria en función de los niveles del modelo. Encontró que el modelo es muy útil para corregir las deficiencias de los estudiantes en el curso de geometría del nivel superior.

El proyecto constó de cuatro test. El primero se elaboró de selección múltiple, cuyo propósito fue el de identificar los prerrequisitos necesarios en los estudios de geometría en el segundo ciclo.

El segundo test, de selección múltiple, fue confeccionado de acuerdo a los niveles propuestos por los Van Hiele en donde cada item es relacionado con el nivel mínimo necesario para responder las preguntas correctamente.

El tercer test se refiere a la habilidad de escritura en demostraciones, en donde a cada estudiante se le proporcionó dos problemas para que completaran partes de las demostraciones.

El cuarto test contiene demostraciones tradicionales.

- Proyecto de Georgia, Mayberry (1983) : estudió la naturaleza jerárquica de los niveles del modelo y la ubicación de futuros maestros en dichos niveles. Los resultados encontrados sustentaron la validez del modelo.

- Proyecto de Brooklyn, Geddes, Fuys y Tischeler (1985) : El proyecto evaluó el contenido de geometría de varios textos según el nivel de actividades del modelo de Van Hiele. El propósito del proyecto consistió en el desarrollo e implementación de cuatro módulos instruccionales los cuales se usarán para recoger información en cuanto a identificar los efectos de la instrucción, en los estudiantes, en adquisición de un nivel.

- Proyecto de Oregon, Burger y Shaughnessy (1986) : Investigaron la utilidad de los niveles para la identificación y ubicación de estudiantes en los mismos.

- En España, el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidd de Valencia, Jaime y Gutiérrez (1989) llevan algunos años trabajando en la enseñanza de las isometrías utilizando el modelo. El artículo presentado muestra una aplicación del modelo de Van Hiele particularizado a Los Giros. Esta es sólo una parte del proyecto, que es más amplio, y cuyo fin es el diseño de unidades para la enseñanza de las isometrías en el plano.

El artículo presenta una serie de actividades para los cuatro primeros niveles de razonamiento. Esta unidad de enseñanza está dirigida a estudiantes de enseñanza primaria y comienzos de la secundaria cuyas edad están entre 9 y 16 años, aproximadamente y a estudiantes de magisterio de primaria.

- En Puerto Rico, en el Departamento de Instrucción Pública, han empezado en 1988 a integrar el modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría ya que fue considerado al desarrollar una revisión curricular de geometría en la educación media .

En Panamá, la aplicación de este modelo es casi nula, se desconoce la teoria sustentada por los Van Hiele y por lo tanto no se ha aplicado. De ahí nuestro interés al desarrollar esta tésis.

CAPÍTULO II

JUSTIFICACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

2.1 JUSTIFICACION DE LA PROPUESTA

Cuando hablamos de la enseñanza-aprendizaje de la matemática aparece siempre el problema de la Geometría, siendo éste agudo en todos los niveles de enseñanza.

Entre las dificultades que se presentan en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría, a nivel primario, los maestros mencionan: falta de materiales didácticos, falta de conocimientos básicos, no se cumple en su totalidad con el programa de Geometría, el educador no se siente lo suficientemente capacitado en esta rama de la matemática; Murillo y González (1990). A nivel secundario el problema no se queda atrás. En los seminarios ofrecidos por el Departamento de Matemática, en el verano de 1992 y en el Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa, en septiembre de 1992 el educador manifiesta la necesidad de que se le proporcione propuestas metodológicas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Una fuerte crítica sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría, en los colegios secundarios panameños, la hace Cheng (1990); menciona algunos elementos importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta rama de la matemática como lo son: los métodos, los textos utilizados, los materiales didácticos con los que consta el docente, los docentes no le otorgan importancia a las definiciones y construcciones geométricas, se dan los resultados geométricos sin que el alumno experimente como se deducen, los temas de cálculo de áreas y volúmenes se desarrollan algorítmicamente, al igual que otros temas.

Con respecto a los programas vigentes para primer ciclo, en 1981 se hizo una restructuración de los contenidos y para Bachilleratos en Ciencias, Letras y Comercio aún siguen vigentes los de 1961, salvo que en algunos colegios se ha implementado una restructuración que ha planteado el Ministerio de Educación.

Para Cheng (1990) los cambios en los programas de primer ciclo no ha mejorado la enseñanza-aprendizaje de la geometría veamos la siguiente cita:

> "No hay duda en la falta de seguimiento y de una debida orientación pedagógica, así como la carencia de textos adecuados, han dificultado la implementación exitosa de este currículo en las escuelas públicas. En las escuelas particulares la situación ha resultado diferente gracias al empleo de mejores textos y a una más eficiente labor de supervisión."

Sabemos que los cursos de geometría que se imparten en el colegio no tienen el propósito de formar geómetras, podemos decir que la finalidad general es: Que el estudiante conozca los resultados geométricos, conceptos geométricos, teoremas, fórmulas, propiedades, etc. y que pueda aplicarlos. La mayoría de los docentes pretenden que el estudiante memorice todo esto, causando en ellos una actitud de rechazo a la materia.

Buscar solución a la problemática no es sólo estructurar los contenidos de geometría en un programa, sino que además, se necesitan buenos libros de textos y capacitar a los docentes.

La experiencia en la docencia, nos muestra que los estudiantes al finalizar sus estudios de secundaria no alcanzan a desarrollar el pensamiento operacional formal. A continuación citaremos ciertas investigaciones realizadas en la Universidad de Panamá en que se argumenta lo mencionado:

Sánchez, Guerra 1983, indican que en una muestra de estudiantes del primer curso de capacitación entre las edades de 17 y 22, solamente el 60% ha completado la etapa del pensamiento concreto, el 5% posee un pensamiento operacional formal, y un 15% se encontraba en un período de transición hacia el pensamiento lógico formal.

Achurra, D. 1988, en su estudio de una muestra de 47 estudiantes del primer semestre de Odontología, además de aplicarles la prueba de LAWSON, se le sometió al método clínico-crítico individualizado de Piaget, encontrando que el 6% de la muestra tenía características del pensamiento lógico formal. Se identificó que el 71% se encontraba en el período de transición hacia el pensamiento formal y un 32% se ubicaba en el período de operaciones concretas.

Samudio, Maturell y otros en 1991 en su estudio evaluaron, a través de la prueba de LAWSON, el tipo de pensamiento en una muestra de 116 estudiantes de Capacitación de Medicina, cuyas edades oscilaron entre 18 y 20 años, obteniendo los siguientes resultados: el 100% de los estudiantes ha completado la etapa de pensamiento concreto y menos del 20% posee un pensamiento operacional formal.

Ruiz y otros en 1992 en su estudio de una muestra de 91 estudiantes de primer ingreso a la Facultad de Ciencias, concluyeron que el 42% de los estudiantes carece de esquemas lógico formal con relación a la proporcionalidad, el 55% carece de razonamiento combinatorio, el 76% carece del esquema de probabilidad.

Montanari, R. en 1993 en su investigación sobre una muestra de aproximadamente de 3000 estudiantes entre las edades de 16 y 20 años, indica:

Que los alumnos de 16 y 17 años que cursan regularmente V y VI años, no están en condiciones de aprender conceptos que involucren esquemas cognoscitivos lógico formales.

Que 87 de cada 100 estudiantes de 18 años no opera en el nivel de pensamiento lógico formal.

Que 79 de cada 100 estudiantes de 19 años no operan lógico formalmente.

Que 57 de cada 100 estudiantes de 20 años no poseen un nivel de pensamiento lógico formal.

Las investigaciones mencionadas anteriormente y los problemas existentes en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, nos sirven para justificar nuestro interés en desarrollar la propuesta, utilizando como base teórica el modelo de Van Hiele, el cual describimos en el capítulo I.

En esta propuesta se describen las actividades a desarrollar para lograr la transición del nivel de Análisis al de Deducción Informal.

Es a este nivel, de Deducción Informal, donde el estudiante realiza relaciones entre propiedades que con anterioridad las veía aisladamente, siendo capaz de seguir razonamientos informales. Sin embargo el estudiante no comprende, en su totalidad, los elementos de un sistema matemático.

No se debe confundir el hecho de que un estudiante que posea un amplio manejo de símbolos matemáticos indique que esté en un nivel pensamiento formal; ya que podría darse el caso que este estudiante memorice al reproducir una demostración.

El trabajo presentado como propuesta didáctica, está basado en el modelo de Van Hiele. Nuestro interés nace en el Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa, septiembre de 1992, en el cual dictamos la conferencia titulada "**Enseñanza-Aprendizaje de la Geometría por medio del modelo de Van Hiele** "; cuyo fin fue el que los profesores de primaria y secundaria conocieran en qué consiste el modelo. La misma llamó la atención a los educadores y por tal motivo presentamos esta propuesta que pretende que el estudiante descubra las propiedades de los paralelogramos. Este objetivo se contempla en el programa de Matemática de tercer año de la educación secundaria.

La propuesta pretende, además, que el contenido se dé en forma diferente. Tradicionalmente el profesor explica las propiedades y luego da una serie de problemas para que el estudiante los aplique.

En esta propuesta se presentan actividades para cada una de las cinco fases del nivel de deducción informal; los objetivos de cada actividad son diferentes y lo que se persigue es que el estudiante participe en forma activa al tratar de resolver un problema, y así "descubra" la propiedad que se desea.

Para implementar la propuesta se da por hecho que el estudiante ha superado los niveles de *Reconocimiento* y de

Análisis. Sino es así se presentará, dentro del trabajo, ciertas sugerencias de actividades que puedan ayudar, a los estudiantes, a superar estos niveles.

2.2 O B J E T I V O

UTILIZAR EL MODELO DE VAN HIELE COMO ALTERNATIVA METODOLOGICA PARA LA ELABORACION DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

2.3 PRERREQUISITOS DE LA PROPUESTA

Para implementar la propuesta se necesita que el estudiante tenga ciertos conocimientos geométricos que son básicos y que le permiten hacer uso de estos en la resolución de un determinado tipo de problema. Los temas que se en listarán a continuación el alumno lo ha visto en el primero, segundo y tercer año de secundaria. Es importante resaltar que el objetivo específico #19 (último objetivo) del Programa del Ministerio de Educación de tercer año es: *Identificar paralelogramos utilizando las propiedades.*

A continuación se detallan los esenciales mínimos que debe conocer el estudiante, para poder implementar la propuesta:

TEMAS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

CUADRILÁTEROS

-Lados opuestos

-Lados consecutivos

-Vértices

PARALELOGRAMO

-Rectángulo

-Cuadrado

-Rombo

TRIÁNGULOS

-triángulo isósceles

-triángulo equilátero

-triángulo rectángulo

-Alturas de un triángulo

-Medianas de un triángulo

-Criterio de Congruencia:

L-L-L, A-L-A, L-A-L

Hipotenusa-Cateto

Cateto-Cateto

ÁNGULOS

-Angulo recto

-Angulos opuestos por el vértice

-Angulos complementarios

-Angulos suplementarios

-Angulos correspondientes

-Angulos conjugado interno

-Angulos alternos internos

-Angulos colaterales internos

SEGMENTOS Y RECTAS

-Bisectriz de un ángulo

-Mediatriz de un segmento

-Transversal

-Paralelismo

-Perpendicularidad

-Diagonales

-Congruencia de segmentos

CONSTRUCIONES CON REGLA Y COMPÁS

-Paralelogramo

-Rombo

-Mediatriz de un segmento

-Triángulo isósceles

-Copiado de ángulo

-Copiado de segmento

RESULTADOS GEOMÉTRICOS

PROPIEDADES DE LAS RECTAS PARALELAS

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante :

1. Los pares de ángulos correspondientes son iguales.
2. Los pares de ángulos alternos internos son iguales.
3. Los ángulos conjugados internos son suplementarios.

RECÍPROCO

Dos rectas cortadas por una secante son paralelas si:

4. Dos ángulos alternos internos, o alternos externos, o correspondientes, son congruentes.
5. Dos ángulos conjugados internos son suplementarios.

SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO Y DE UN CUADRILÁTERO

6. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^{o}.
7. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360^{o}.

TEOREMAS O PRINCIPIOS FUNDAMENTALES RELATIVOS A ÁNGULOS

8. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
9. Dos ángulos que sumados valen un ángulo recto, es decir 90^{o}, son complementarios.
10. Dos ángulos que sumados valen dos ángulos rectos o

sea 180^{o}, son suplementarios .

11. Si dos ángulos suplementarios son iguales, ambos son rectos.

TEOREMAS O PRINCIPIOS RELATIVOS A TRIÁNGULOS ISÓSCELES, EQUILÁTEROS Y RECTÁNGULOS.

12. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes y recíprocamente.
13. Todo triángulo equilátero es equiángulo y recíprocamente.
14. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.4 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El desarrollo de la propuesta contiene 20 propiedades de los paralelogramos, las cuales serán distribuida de la siguiente manera :

A. Cinco propiedades generales de los paralelogramos.

B. Cinco propiedades que corresponden a la verificación que un cuadrilátero es paralelogramo.

C. Seis propiedades de los paralelogramos especiales: rectángulo, rombo y cuadrado.

D. Cuatro propiedades para demostrar que un paralelogramo es rectángulo, rombo o cuadrado.

Es importante recalcar que el contenido que se presenta, es con el fin de que el estudiante "descubra" las propiedades de los paralelogramos, ya que lo tradicional es darle las propiedades y que el estudiante las aplique en los problemas propuestos.

Las tareas que se presentan contienen un seguimiento para el desubrimiento de estas propiedades. Estas llevarán al alumno a la observación, reflexión, transmisión de conocimientos y familiarización del lenguaje simbólico.

Al final de cada tarea, se plantea problemas donde el estudiante tendrá que hacer uso de las propiedades. Estas son elaboradas de forma que se le dan los pasos para que él complete sus argumentaciones .

Las propiedades se detallan a continuación :

A. PROPIEDADES GENERALES DE LOS PARALELOGRAMOS

P1 :Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.

P2 :Todo paralelogramo tiene iguales sus ángulos opuestos.

P3 :Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

P4 :Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

P5 :Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.

B. VERIFICACIÓN DE QUE UN CUADRILÁTERO ES PARALELOGRAMO.

P6 : Un cuadrilátero es paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos.

P7 : Un cuadrilátero es paralelogramo si sus lados opuestos son iguales.

P8 : Un cuadrilátero es paralelogramo si dos de sus lados opuestos son iguales y paralelos.

P9 : Un cuadrilátero es paralelogramo si sus ángulos opuestos son iguales.

P10 : Un cuadrilátero es paralelogramo si sus diagonales se bisecan mutuamente.

C. PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS ESPECIALES: ROMBO, CUADRADO Y RECTÁNGULO.

P11 : Todo rectángulo, cuadrado, rombo tiene las propiedades de los paralelogramo.

P12 : Las diagonales de un rectángulo son iguales.

P13 : Las diagonales de un rombo forman cuatro triángulos congruentes.

P14 : Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y se bisecan mutuamente.

P15 : Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos de los vértices

P16 : El cuadrado tiene todas las propiedades del rombo y del rectángulo.

D. VERIFICACIÓN DE QUE UN PARALELOGRAMO ES RECTÁNGULO, ROMBO O CUADRADO.

P17 : Si un paralelogramo tiene un ángulo recto entonces es un rectángulo

P18 : Si un paralelogramo tiene las diagonales iguales entonces es un rectángulo .

P19 : Si un paralelogramo tiene dos lados contiguos iguales entonces es un rombo .

P20 : Si un paralelogramo tiene un ángulo recto y dos lados consecutivos iguales entonces es un cuadrado.

2.5 DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA LOS NIVELES DE RECONOCIMIENTO Y ANÁLISIS

Esta sección muestra una guía para el profesor, si se encuentra con el problema de que al introducir la propuesta los estudiantes no han superados los niveles de Reconocimiento y de Análisis.

Las actividades que se presentan se orientan hacia nuestro objetivo: descubrir las propiedades de los paralelogramos.

Las actividades sugeridas servirán como pautas para ayudar al estudiante a superar la transición de los dos primeros niveles de razonamiento geométrico de los Van Hiele. El nivel de Reconocimiento trata de la identificación de los paralelogramos: cuadrado, rombo y rectángulo, atendiendo a su aspecto físico y las describe con su propio vocabulario. El segundo nivel presenta el descubrimiento empírico de las propiedades particulares del rombo, cuadrado y rectángulo.

2.5.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos particularizados de los dos primeros niveles de razonamineto geométrico son:

NIVEL 1 : RECONOCIMIENTO

Identificar cuadrado, rombo y rectángulo por su aspecto físico y global.
Reconocer y dibujar estos paralelogramos de un grupo de polígonos en diferentes contextos.

NIVEL 2 : ANÁLISIS

Identificar rombo, cuadrado y rectángulo como un polígono que tiene ciertas propiedades, sin establecer relaciones entre las propiedades descubiertas empíricamente .

2.5.2 FASES DEL NIVEL 1 : RECONOCIMIENTO

FASE 1. INFORMACION

1.1 El profesor verificará, por medio de una prueba diagnóstica, si los estudiantes identifican de un grupo de cuadriláteros aquellos que son paralelogramos, si no es así el profesor diseñará actividades para este fin.

1.2 El profesor puede interrogar a los estudiantes para que describan los paralelogramos especiales: rombo, cuadrado y rectángulo con el fin de conocer si los pueden reconocer.

1.3 Pedirles, a los estudiantes, que represente estos tipos de paralelogramos en un geoplano.

1.4 Presentarles, a los estudiantes, estos tipos de paralelogramos en figuras que estén contenidas en otras figuras, para que las reconozcan.

FASE 2. ORIENTACION DIRIGIDA

2.1 El profesor agrupará los estudiantes y repartirá las figuras (paralelogramos) construidas en papel construcción o de cartulina.

2.2 El profesor le pedirá a sus estudiantes que identifiquen, de la actividad 2.1 de la fase 2, qué forma tiene cada uno de estas figuras.

2.3 El profesor puede pedirles a los estudiantes que en un papel cuadriculado dibujen estos paralelogramos especiales en diferentes posiciones.

FASE 3. EXPLICITACIÓN

Pídales a sus estudiantes que intercambien sus ideas, observaciones y discutan lo que han hecho en la fase 1 y 2.

Anote las observaciones comunes que cada uno observó en las actividades.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE

Se les pedirá a los estudiantes :

4.1 Que dibujen, en una hoja, objetos físicos que representen estos tipos paralelogramos.

4.2 Que reconozcan estos paralelogramo en diferentes contextos.

FASE 5. INTEGRACIÓN

Resumen por parte del profesor

5.1 Què entendieron por paralelogramo ?
5.2 Cómo describen el cuadrado, rectángulo y rombo ?
5.3 Cómo dibujan estos paralelogramos ?

2.5.3. FASES DEL NIVEL 2 : ANALISIS

FASE 1 : INFORMACIÓN

El profesor deberá asegurarse de que los estudiantes tengan conocimientos sobre : medida de ángulos, rectas perpendiculares, bisectriz de un ángulo, triángulos congruentes, diagonales, bisectar un segmento. Sino es así debe realizar actividades para este fin.

FASE 2 : ORIENTACIÓN DIRIGIDA

2.1 Identificar, de los paralelogramos construidos, cuáles tienen: ángulos rectos, lados iguales, par de lados opuestos iguales, ángulos opuestos iguales, midiéndolos con los instrumentos de geometrría. (realizar cada una de las actividades por separado)

2.2 Repartir por lo menos 3 cuadrados, 3 rectángulos y 3 rombos de diferentes medidas y pídales, con cada uno de los grupos de paralelogramos, realizar la actividad anterior 2.1.

2.3 Una vez realizada la actividad con cada uno de estos paralelogramos y que hayan descubierto las propiedades en forma empírica, déles el nombre que recibe cada uno de los grupos de paralelogramos con los que trabajó .

2.4 Hacer un cuadro como el cuadro #1 donde ellos anotarán SI si posee la propiedad y NO si no la posee.

2.5 Pídales a los estudiantes que tracen las diagonales,que las midan y que llenen el cuadro donde las diagonales son ambas iguales.

2.6 Determinar dónde las diagonales forman cuatro triángulos congruentes. (harán esto en forma experimental midiendo los lados de los triángulos).

2.7 Determinar donde las diagonales bisecan los ángulos. (medirán estos ángulos).

2.8 Realizar la medida desde un vértice hasta el punto donde se cortan las diagonales, y así con los vértices restantes de cada uno de los paralelogramos y que anoten las observaciones.

FASE 4 : ORIENTACIÓN LIBRE

4.1 Describir el cuadrado, rombo y rectángulo de acuerdo a sus observaciones realizadas empíricamente.

4.2 Realizar un resumen en un cuadro donde anoten las propiedades descubiertas empíricamente con cada uno de los paralelogramos.

FASE 5 : INTEGRACIÓN

Resume por parte del profesor acerca de las actividades realizadas:

¿ Cómo describieron el cuadrado, rombo y rectángulo ?

¿ Cuál es el cuadro que resume las propiedades de estos paralelogramos, descubiertas empíricamente ?

C U A D R O # 1

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS PARTICULARES: CUADRADO; RECTANGULO Y ROMBO

	cuadrado	rectangulo	rombo
ÁNGULOS RECTOS	Si	Si	No
DIAGONALES IGUALES	Si	Si	No
LADOS IGUALES	Si	No	Si
DIAGONALES PERPENDICULARES ENTRE SÍ	Si	No	Si
DIAGONALES SE BISECAN ENTRE SÍ	Si	Si	Si
DIAGONALES BISECAN LOS ÁNGULOS	Si	No	Si
DIAGONALES FORMAN CUATRO TRIÁNGULOS CONGRUENTES	Si	No	Si

CAPÍTULO III

PROPUESTA DIDÁCTICA:

LAS PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta está dirigida a estudiantes de 14 a 16 años. Se desarrolla para lograr la transición del nivel de Análisis al de Deducción Informal; recordemos que a este nivel el estudiante aplica los conocimientos previos adquiridos, para poder descubrir nuevas propiedades basándose en las ya conocidas. Puede seguir los pasos individuales de un razonamiento intuitivo lógico, pero tenemos que aclarar que no comprende la conexión y la estructura de una demostración formal.

Citemos lo que nos dice Morales (1992) acerca de su opinión sobre la diferencia entre la Deducción Informal y la Deducción Formal:

> "La diferencia esencial a mi entender está en la diferente calidad del pensamiento geométrico que posee el individuo: si posee un conocimiento axiomático entonces el puede ser capaz de arribar en todo momento a las explicaciones en base a resultados previamente establecidos axiomáticamente y si es necesario llegar a las últimas en términos de axioma, definiciones y elementos indefinidos; si se encuentra en el nivel previo entonces el alumno estará imposibilitado de la concepción anterior será capaz de realizar deducciones pero sus justificaciones se sustentarán en resultados no necesariamente demostrados, si acaso probados empíricamente, además no podrá descender a las últimas explicaciones las que proporcionan los axiomas y los terminos indefinidos ".

La propuesta a desarrollar sigue la secuencia de las cinco fases de aprendizaje de los Van Hiele. En ella se presentan actividades para las propiedades de los paralelogramos con un propósito específico: que el estudiante "descubra" las propiedades, se familiarice con el lenguaje simbólico, aplique las propiedades para la resolución de un problema, reconozca las interrelaciones entre propiedades, realice inclusiones de diferentes tipo de figuras que cumplen determinada propiedades y distinga las propiedades particulares para el cuadrado, rombo y rectángulo.

3.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL NIVEL 3

El estudiante a este nivel será capaz de:

- Descubrir, intuitivamente, las propiedades generales de un paralelogramo.
- Reconocer las propiedades comunes entre diferentes tipos de paralelogramos.
- Reconocer las condiciones necesarias para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.
- Utilizar las propiedades citadas en la resolución de un problema.
- Utilizar el lenguaje simbólico de la matemática para argumentar las propiedades.

3.2 FASE 1: INFORMACIÓN

3.2.1 MATERIALES

Juego de geometría, Geoplano, Ligas, Papel o papel de construcción, lápices de colores, presillas y madera.

3.2.2 CONTENIDO

Se presentan sugerencias de actividades que le permiten al profesor diagnosticar los conocimientos previos que necesita el estudiante, para encaminarlo hacia el tema principal de estudio, recomendándose pruebas diagnósticas, trabajos grupales, hojas de trabajo .

Recordemos que el estudiante a este nivel ha superado los niveles de Reconocimiento y de Análisis, es decir que el estudiante es capaz de distinguir de un grupo de polígonos aquellos que son cuadriláteros y de un grupo de cuadriláteros aquellos que son paralelogramos. Es conveniente preparar hojas de trabajo o una prueba diagnóstica en la que se involucre los temas básicos señalados en el Capítulo II.

3.2.3 ACTIVIDADES

El profesor puede formar grupos y elaborar hojas de trabajo, para que en forma grupal, se realicen las siguientes actividades:

1. Presentar una lista de polígonos y pedirle al estudiante que marque con una cruz azul aquellos que son cuadriláteros, luego que marque con una cruz roja aquellos que son paralelogramos, después que marque con una cruz verde los cuadrados, con dos cruces verde los rectángulos y tres cruces verde los rombos .

   Luego, para afianzar, pídales que en un geoplano construyan varios cuadrados, rombos y rectángulos en diferentes posiciones.

2. Repartir, a los grupos de estudiantes, un ángulo

articulado en forma de cruz, de manera que representen los diferentes ángulos que usted le pide : rectos, opuestos por el vértice, suplemetarios, complementarios, obtusos, agudos.

3. Pedirle a los estudiantes que presenten los ángulos de la actividad 3 en el geoplano, en distintas posiciones.

4. Presentar los siguientes diagramas y pídales para la Fig# 1 identificar rectas paralelas y perpendiculares. Presentar cuadriláteros donde se encuentre paralelismo y perpendicularidad entre sus lados. (Fig# 2).

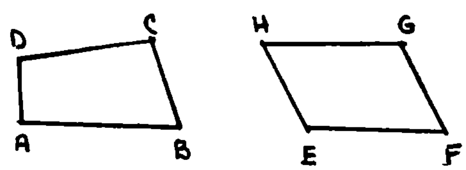


Fig #1

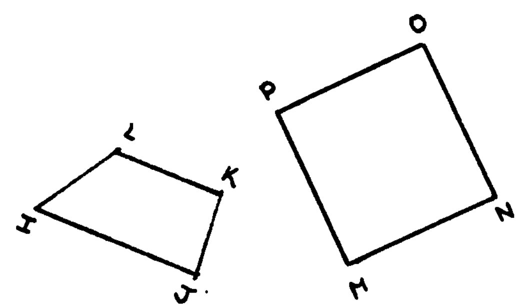


Fig #2

5. Presentar una lista de polígonos y pedirle al estudiante que marque con una cruz azul aquellos que son triángulos, luego que marque con una cruz roja a aquellos que son triángulos equiláteros, después que marque con una cruz verde los triángulos isósceles y con dos cruces verde los triángulos rectángulos.

6. Luego, para afianzar, pídales que en el geoplano construyan diferentes triángulos: rectángulos, equiláteros e isósceles en distintas posiciones.

7. Presentar una hoja de trabajo donde se dé indicaciones para construir con regla y compás : Bisectriz de un

ángulo y mediatriz de un segmento, construcción de un triángulo rectángulo, isóscele y equilátero, rectas perpendiculares, paralelas, paralelogramos, cuadrados, rombos y rectángulos.

8. Construir con papel las alturas de un triángulo, medianas, mediatrices.

9. Visualizar con papel que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^{o}.

10. Presentar en una hoja de trabajo congruencias de triángulos donde se involucre los criterios de congruencia : ALA, LLL, LAL, Hipotenusa-Cateto y Cateto-Cateto.

11. Interrogue a los grupos de manera que usted conozca si poseen los prerrequisitos de los temas geométrico .

Estas actividades implican el conocer si los estudiantes están o no listo para empezar el tema de interés: las propiedades de los paralelogramos. Es importante que las actividades sean discutidas permitiendo libertad al estudiante para que exprese lo que ha experimentado y el papel del profesor es corregir, guiar, indagar al estudiante. Sino se logra el objetivo, debe repetir nuevamente la actividad o el profesor debe estar listo para realizar otra actividad que conlleve al mismo fin.

3.3. FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

3.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Construirá con regla y compás paralelogramos dados algunos elementos de éstos.

- Identificará de manera intuitiva las propiedades de los paralelogramos.
- Enunciará la propiedad descubierta .
- Utilizará símbolos matemáticos al descubrir una propiedad.
- Relacionará las propiedades "descubiertas" para resolver un problemas donde sea necesaria utilizarlas.

3.3.2 CONTENIDO

Esta fase permite al estudiante experimentar en forma gradual y sistemática el tema a estudiar : las propiedades de los paralelogramos.

Recordemos que el profesor prepara estas actividades con el fin de obtener respuestas específicas orientadas al nuevo conocimiento que va adquirir el estudiante.

Las actividades presentadas se distribuyen en "tareas", que pretenderán lograr el "descubrimiendo" de cada una de las 20 propiedades de los paralelogramos las cuales se indicaron en el Capítulo II y se dispondrán de la siguiente manera: Cinco propiedades generales de los paralelogramos; verificación de que si un cuadrilátero es paralelogramo, que también consta de cinco propiedades; seis propiedades de los paralelogramos especiales (rombo,rectángulo y cuadrado); y cuatro propiedades para verificar que un paralelogramo es rombo, cuadrado o rectángulo.

La fase de **Orientación Dirigida** constará de un total de 20 tareas donde el estudiante "descubrirá" gradualmente y sistemáticamente las propiedades especificadas anteriormente.

Las tareas, en forma general, son elaboradas de manera que se le arme al estudiante los elementos necesarios, para que "descubra" las propiedades. En algunas requerirá habilidad en la construcción con regla y compás, en otras habrá transferencia de conocimiento y constantemente, se le hará reflexionar sobre sus descubrimientos para lograr conducirlo correctamente al propósito de la tarea, es decir, guiarlo hacia una constante observación , análisis y encaminarlo a que complete las argumentaciones que lo conllevan a reflexionar y convencerse del "descubrimiento de la propiedad". Las representaciones gráficas y las que él construya son apoyo para que al final de la tarea pueda enunciar la propiedad que experimentó y ayudarlo a que se familiarice con la representación simbólica.

3.3.3 ACTIVIDADES

TAREA 1. RELACION DE LOS LADOS OPUESTO DEL PARALELOGRAMO

1.

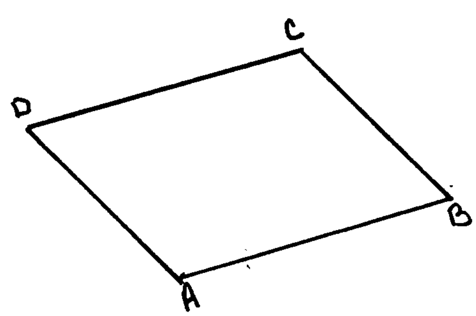


Fig #1

PROCEDIMIENTO

En la fig. #1 tienes un paralelogramo ▱ABCD. Por ser un paralelogramo existe una relación entre sus lados de :

a. paralelismo

b. perpendicularidad

Esta relación simbólicamente la podemos expresar como :

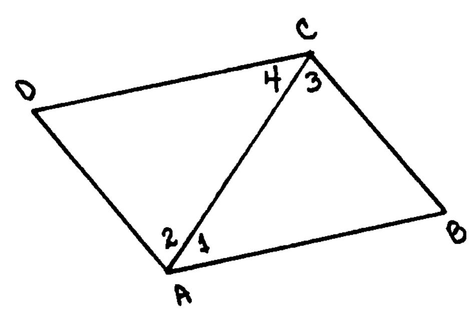
_____ ______ y _____ ______

Con esto afianzaste y recordaste lo que representa un paralelogramo.

Si observas (Fig# 1), se parte de que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, esto se conoce como hipótesis, pero no se conoce si los pares de lados paralelos son congruentes, esto es la tésis, lo que se quiere que descubras.

Traza la diagonal $\overline{AC}$ y se forman los triángulos Δ ____ y Δ ______ que tienen el lado ____ común.

2.



Fig# 2

Ahora debes tener una figura como la #2, donde se ha enumerado los ángulos. Como los lados $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es una transversal. Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 4$ son:

a. alternos interno b. alternos externos

c. ángulos conjugados.

Como también los lados $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{AC}$ es una transversal, los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ son :

a. alternos interno b. alternos externos

c. ángulos conjugados.

Estos dos pares de ángulos en medida son __________.

3. De acuerdo a la actividad 2, se tienen las siguientes congruencias

∠ 1 ≅ ∠ ___ por ser __________.

∠ 2 ≅ ∠ ___ por ser __________.

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ por ser lado____________.

Por lo que el ΔABC ___ ΔCDA, de acuerdo al criterio :

a. Lado-Lado-Lado (L-L-L) b. Angulo-Lado-Angulo (A-L-A)

c. Lado-Angulo-Lado (L-A-L)

4.

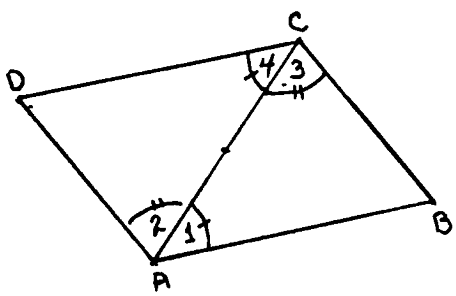


Fig. #3

En la fig# 3 se muestran los elementos congruentes de los ΔABC y ΔCDA.

Según esta congruencia los lados homólogos correspondientes son:

_____≅_____ y _____≅____

5.

Fig# 4

Dibuja el paralelogramo ▱ABCD (Fig# 4) con los elementos congruentes encontrados en la actividades 3 y 4.

Qué puedes concluir con respecto a los lados opuestos de esta figura geométrica ?.

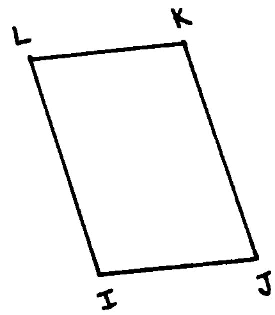
Son congruentes los pares de lados opuestos del paralelogramo ? Completa :

TODO PARALELOGRAMO TIENE SUS LADOS OPUESTOS

____________________.

TAREA 2. TRAZO DE LAS DIAGONALES DEL PARALELOGRAMO

1.

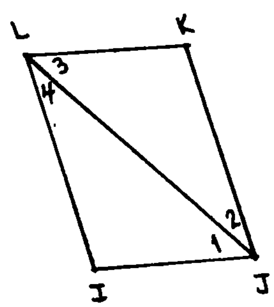


Fig# 1

PROCEDIMIENTO

En la fig. #1 tienes un paralelogramo ▱IJKL. Traza la diagonal $\overline{JL}$ y se forman dos triángulos Δ ____ y Δ ______ que tienen el lado ____ común.

2.

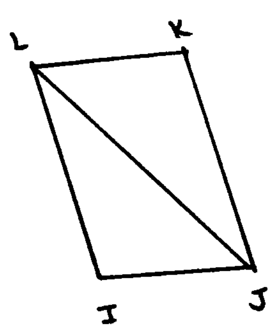


Fig# 2

En la fig# 2 se han enumerado los ángulos. Como los lados $\overline{LK}$ ∥ $\overline{IJ}$, y $\overline{LJ}$ es una transversal los ángulos alternos internos son: $\angle$_____ y $\angle$______.

Además, $\overline{IL}$ ∥ $\overline{JK}$ y $\overline{LJ}$ una tranversal. Los ángulos alternos internos son: $\angle$____ y $\angle$____

3.



Fig# 3

Marca las congruencias de los elementos de los ΔLIJ y ΔJKL en la fig# 3.

$\angle$ 1 ≅ $\angle$____ por ser __________.

$\angle$ 2 ≅ $\angle$____ por ser __________:

$\overline{LJ}$ ≅ $\overline{LJ}$ por ser lado____________.

De acuerdo a los elementos congruentes, los triángulos ΔLIJ y ΔJKL son _______________, por el criterio :

a. L-L-L b. A-L-A c. L-A-L

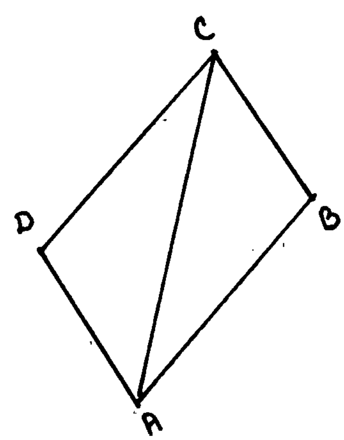
4. ¿ Has observado la propiedad al trazar la diagonal del paralelogramo ? ¿ En cuántas partes divide la diagonal al paralelogramo, y qué figuras geométricas son ?

Si estás claro en la observación completa lo siguiente :

LAS _________________ DE UN PARALELOGRAMO LO DIVIDEN EN ________ TRIANGULOS _________________.

TAREA 3. RELACIÓN DE LOS ÁNGULOS OPUESTOS DE UN PARALELOGRAMO

1. Se traza la diagonal $\overline{AC}$ del paralelogramo ▱ABCD (fig #1), dividiéndolo en dos triángulos ΔABC y ΔCDA congruentes, (ver tarea #2).



Fig# 1

Nuestra interrogante es con respecto a los ángulos opuestos del ▱ABCD. ¿ Qué relación existirá entre los ángulos opuestos del paralelogramo ?. Veámoslo

2. Según la congruencia de los ΔABC y ΔCDA, los ángulos opuestos $\angle ADC \cong \angle CBA$, ahora te queda conocer si ocurre lo mismo con los ángulos opuestos $\angle DAB$ y $\angle BCD$.

Observa que el $\angle DAB$ se puede expresar como la suma de dos ángulos. Cuáles son ?

$\angle DAB = \angle$________ + $\angle$________. (4)

lo mismo ocurre con el ángulo $\angle DCB$, escríbela

$\angle DCB = \angle$_________ + $\angle$________ (5)

Son los $\angle DAB$ y $\angle DCB$ congruentes ?. Compara cada uno de los cuatro ángulos en (4) y (5). Qué ángulos son congruentes ?. Coloca en los espacios en blanco los pares de ángulos congruentes $\angle$_____ y $\angle$_____ , $\angle$_____ y $\angle$_____. Sustituye los ángulos $\angle DAB$ y $\angle DCB$ por los congruentes encontrados en (4) y (5).

Puedes concluir, lo que observaste, con los ángulos $\angle DCB$ y $\angle DAB$, ellos son :

a. congruentes b. no congruentes

3. Menciona los ángulos opuestos del paralelogramo ABCD:

________ y ________ ,

_______ y ________ .

Los pares de ángulos opuestos del paralelogramo son :

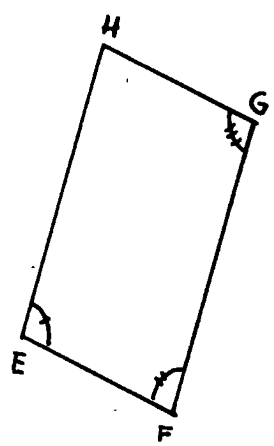
a. congruentes b. no congruentes

Completa la propiedad con respecto a los ángulos opuestos del paralelogramo

TODO PARALELOGRAMO TIENE SUS ANGULOS OPUESTOS ___________

TAREA 4 . ÁNGULOS CONSECUTIVOS DEL PARALELOGRAMO

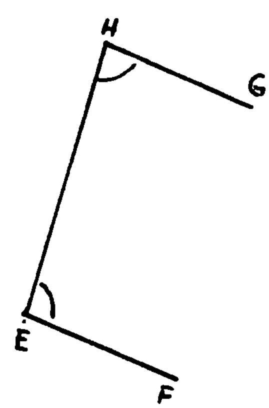
1.



Fig# 1

En la Fig# 1 se tiene el paralelogramo ▱ EFGH, señalándose una secuencia de ángulos consecutivos del paralelogramo. ¿ Qué relación hay entre estos ángulos ?. Sigue las siguientes indicaciones para que lo averigues.

2.



Fig# 2

Dado que $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ son paralelas y $\overline{HE}$ una transversal, observamos que (fig# 2) :

(1) Si dos rectas son ___________, los ángulos conjugados internos son ___________________.

3. Observa en la fig #2 los ángulos $\angle$ GHE y $\angle$ HEF.
¿ Están de un mismo lado de la transversal $\overline{EH}$? _______
¿Qué nombre reciben estos ángulos ?_______. Por consiguiente son:

a. Suplementarios b. Complementarios

4. Veamos ahora los ángulos consecutivos $\angle$ HEF y $\angle$ EFG del ▱EFGH.
como $\angle$ GHE $\cong$ $\angle$ EFG por ser ángulos ________ del paralelogramo (relacionar con la tarea 3).

como: $\angle$ GHE + $\angle$ HEF = 180°. (actividad 3)

luego entonces obtienes que: $\angle$____+ $\angle$ HEF = 180°.

5. Completa el siguiente enunciado, de acuerdo a lo que observaste con los ángulos consecutivos del paralelogramo.

LOS ANGULOS _________________ DE UN PARALELOGRAMO SON _______________.

TAREA 5. INTERSECCION DE LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO

Se tiene el paralelogramo ABCD. (Fig #1). Se traza las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, Observa que las diagonales se cortan

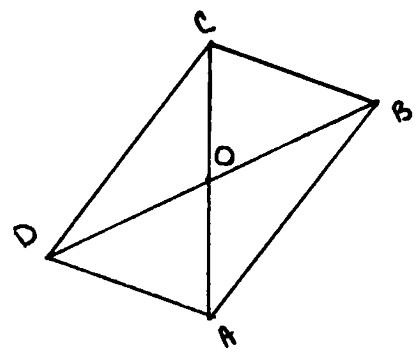
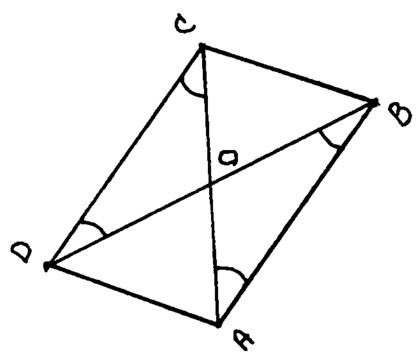


Fig #1

en un punto, llamémosle O. Luego se forman los ΔOAB y ΔOCD. Sombréalos.

2.



Fig#2

En la fig #2 se señalan algunos ángulos de los triángulos indicados, ¿cuáles de estos ángulos son congruentes ?

$\angle$________ $\cong$ $\angle$________

$\angle$________ $\cong$ $\angle$_______

Porque ellos son ángulos:

a. alternos internos

b. correspondientes

c. conjugados internos

Hay algún lado congruente de los ΔOAB y ΔOCD ?

_____________________ por qué ________________.

Los triángulos ΔOAB y ΔOCD son congruentes por el criterio:

a. L-L-L b. A-L-A c. L-A-L

¿ Cuáles son los restantes elementos correspondientes de los triángulos Δ OAB y Δ OCD ?

$\overline{DO} \cong$ ____ $\overline{OC} \cong$ ____ y $\angle$ AOB $\cong \angle$ _____

Observa que los lados de los triángulos ΔOAB y ΔOCD tienen como lados segmentos de las diagonales y cada una de estos segmentos son congruentes. ¿ Se dividen las diagonales en mitades ? ¿ Qué puedes decir ?. Si has observado detenidamente y estás claro, completa :

el punto O es el punto _______ de las dos diagonales

Enuncia la propiedad encontrada al trazar las dos diagonales del paralelogramo

LAS ___________ DE UN PARALELOGRAMO SE BISECAN MUTUAMENTE EN SU PUNTO __________.

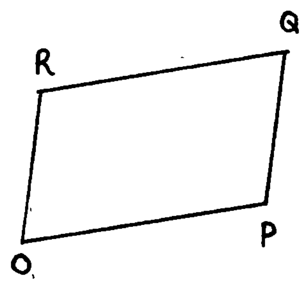
Construcción con papel de la intersección de las diagonales de un paralelogramo

PASOS

1. Construye un paralelogramo con regla y compás. Recórtalo y nombra los vértices A,B,C,D.
2. Construye mediante dobleces las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Luego dobla la diagonal $\overline{AC}$ de modo que se superpongan los vértices A y C, marca el punto donde se corta este doblez y llámale O.
3. Ahora realiza lo mismo para la diagonal $\overline{BD}$. ¿ Coinciden las marcas de las diagonales.? Es este el punto medio de las diagonales ?

TAREA 6. DADO UN CUADRILÁTERO CON SUS LADOS OPUESTOS PARALELOS.

1.



Fig# 1

Se tiene el cuadrilátero OPQR, por dato $\overline{RQ} \parallel \overline{OP}$ y $\overline{RO} \parallel \overline{QP}$. Traza la diagonal $\overline{OQ}$, se tiene los ΔQRO y ΔOPQ. Veamos si los triángulos son congruentes.

Observa que por el paralelismo de los lados se tiene que:

$\angle RQO \cong \angle$______

$\angle ROQ \cong \angle$______

y $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ por _______

El criterio de congruencia para estos triángulos es:_______

2. De la congruencia de los ΔQRO y ΔOPQ obtienes que los lados $\overline{RO} \cong$ _____ y $\overline{RQ} \cong$ ______. es decir, los lados opuestos del cuadrilátero además de ser paralelos son congruentes por lo tanto es un __________.

Enunciemos la propiedad

UN CUADRILÁTERO ES________________SI SUS LADOS ______________ SON PARALELOS.

TAREA 7. DADOS LOS PARES DE LADOS OPUESTOS CONGRUENTES EN UN CUADRILÁTERO

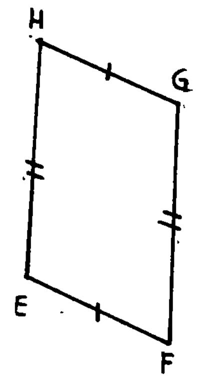
1. 

Fig #1

Se tiene el Cuadrilátero EFGH.
Traza la diagonal $\overline{EG}$. En la Fig# 1 se marcan los elementos congruentes que son los lados,
______ ≅ ______ y
______ ≅ ______
y son los datos de la tarea a realizar.

2. Los ΔEGH y ΔEGF son congruentes por el criterio:

a. L-L-L   b. A-L-A   c. L-A-L

Por lo tanto los ángulos correspondientes congruentes en los triángulos ΔEGH y ΔEGF son:

______ ≅ ______ , ______ ≅ ______, ______ ≅ ______.

3. Observa el cuadrilátero EFGH, toma a $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ como segmentos de rectas y $\overline{EG}$ como una transversal. (ver Fig# 2). Recuerdas el corolario que dice:

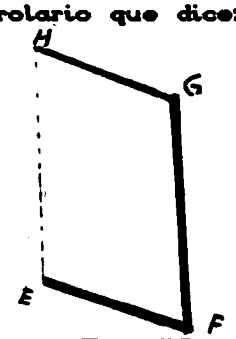


Fig #2

"DOS RECTAS CORTADAS POR UNA SECANTE O TRANSVERSAL SON PARALELAS SI LOS ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS, SON IGUALES".

¿Qué ángulos son alternos internos ? ____________________.

Esto te indica que los lados del cuadrilátero $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ son

____

Si tomamos a $\overline{HE}$ y $\overline{FG}$ como segmentos de rectas y $\overline{GE}$ como transversal. Los ángulos alternos internos son:

_________________________.

Puedes concluir que los lados $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$ son también paralelas ? _____

Tiene el cuadrilátero EFGH los dos pares de lados paralelos ?____

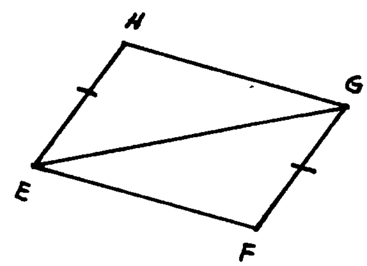
El nombre de esta figura geométrica es : __________

Enuncia la propiedad encontrada en esta tarea, observa que se inició de un cuadrilátero con sus pares de lados opuestos congruentes.

UN CUADRILÁTERO ES ____________________ SI SUS LADOS OPUESTOS SON ______________

TAREA 8. DADO UN CUADRILÁTERO CON UN PAR DE LADOS OPUESTOS IGUALES Y PARALELOS.

1.



Fig# 1

En la fig #1 se tiene el cuadrilátero EFGH, con $\overline{EH} \cong \overline{FG}$ y además paralelos.

Se traza la diagonal $\overline{EG}$ formándose los ΔGHE y ΔEFG cuyos elementos congruente son: $\overline{HE} \cong \overline{GF}$ por ______________.

$\angle HEG \cong \angle FGE$ por ______________.

$\overline{EG} \cong \overline{EG}$ por ____________.

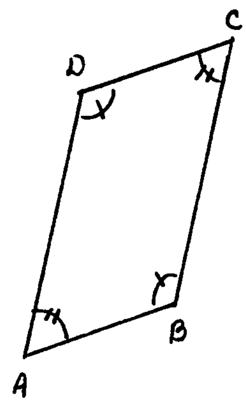
Por consiguiente $\Delta GHE \cong \Delta EFG$ por el criterio de congruencia ________ y $\overline{HG} \cong$ _____ por ser elementos correspondientes en triángulos congruentes.

Tenemos entonces que el cuadrilátero EFGH tiene sus pares de lados opuestos congruentes y por la tarea 7 podemos decir que es un ______________.

Completa el enunciado:

UN CUADRILÁTERO ES _______________ SI DOS DE SUS LADOS OPUESTOS SON ___________Y __________.

TAREA 9. DADOS LOS ÁNGULOS OPUESTOS CONGRUENTES DE UN CUADRILÁTERO.

1. 

Fig#1

Sea el cuadrilátero ABCD, en la fig #1 se marcan los ángulos congruentes. Estos son:

∠______ ≅ ∠________ y

∠______ ≅ ∠________

(es la hipótesis, datos del problema)

2. Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°.

Así que se tiene:

$$\angle\_\_\_\_\_\_ + \angle\_\_\_\_\_ + \angle\_\_\_\_\_\_\_ + \angle\ \_\_\_\_\_\_ = 360^\circ. \quad (1)$$

3. Ya conoces por dato que ∠ ADC ≅ ∠ CBA y ∠ DAB ≅ ∠ DCB En la ecuación (1) sustituye el ángulo ∠ ADC por ∠ CBA y el ∠ DAB por ∠ DCB.

luego obtienes la siguiente ecuación :

$$2\angle\ \_\_\_\_\_ + 2\angle\ \_\_\_\_\_ = 360^\circ.$$

$$2\,(\angle\ \_\_\_\_ + \angle\ \_\_\_\_\_\ ) = 360^\circ.$$

$$\angle\ \_\_\_\_\_\_\_ + \angle\_\_\_\_\_\_\_ = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

4. Por lo anterior tenemos que los ángulos $\angle$______ y $\angle$______ son suplementarios. ¿ Son los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ del cuadrilátero paralelos? _____________

5. Vamos a recordar un corolario de rectas cortadas por una transversal donde se involucra los ángulos encontrados.

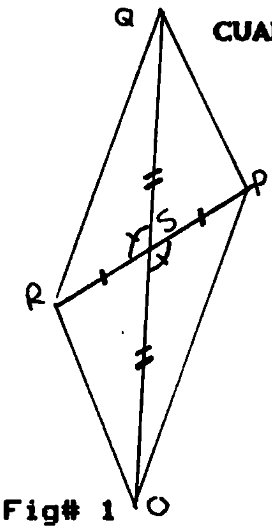
DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL SON_____________ SI LOS ÁNGULOS CONJUGADOS INTERNOS SON ________________.

Si hacemos la sustitución de $\angle$ DCB por $\angle$ DAB y el $\angle$ ADC por $\angle$ ABC encontramos que los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son paralelos. Entonces el cuadrilátero ABCD es un: ________________.

Completa la propiedad que dedujiste del cuadrilátero conociendo que sus ángulos opuestos son congruentes.

UN CUADRILÁTERO ES _____________ SI SUS ÁNGULOS OPUESTOS SON ______________.

TAREA 10. BISECCIÓN DE LAS DIAGONALES DE UN CUADRILÁTERO



Fig# 1

1. En la fig #1 se trazan las diagonales $\overline{OQ}$ y $\overline{RP}$ del cuadrilátero OPQR. El punto donde se cortan se denota S, $\overline{RS} \cong \overline{SP}$ y $\overline{OS} \cong \overline{SQ}$, (datos). No se conoce nada de los lados del cuadrilátero, encontremos la relación.

2. En la fig.1 se señala los elementos congruentes de los triángulos. Los ángulos $\angle$ RSQ $\cong$ $\angle$ OSP son congruentes por ser __________.

Los triángulos ΔSOP y ΔSQR son ___________, por el criterio:

a. Lado-Lado-Lado b. Angulo-Lado-Angulo

c. Lado-Angulo-Lado

Menciona los elementos restantes correspondientes congruentes de los ΔSOP y ΔSQR

$\overline{RQ} \cong$ ___, $\angle$ QRS $\cong$ $\angle$______ (1)

$\angle$ RQS $\cong$ $\angle$_____ (2)

Puedes identificar qué nombre reciben los pares de ángulos en (1) y (2).

¿ Son los lados $\overline{RQ} \parallel \overline{OP}$ y $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$ según (1) y (2). ?

_____________.

Completa el enunciado de la propiedad del cuadrilátero recuerda que solo se conocía que las diagonales se bisecan mutuamenmte

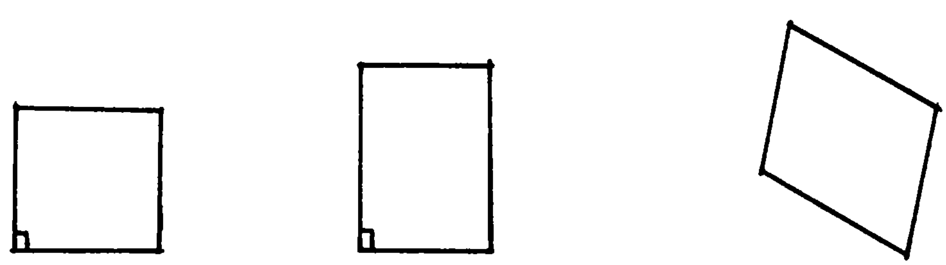
UN CUADRILÁTERO ES ________________ SI LAS ______________ SE BISECAN MUTUAMENTE.

TAREA 11. CUMPLEN EL CUADRADO, RECTÁNGULO Y ROMBO CON LAS PROPIEDADES GENERALES DEL PARALELOGRAMO ?

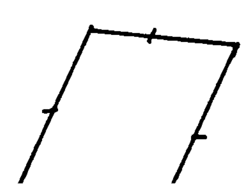
En la siguiente tarea debes observar si cada uno de los paralelogramos especiales cumplen la propiedad enunciada.

1. LOS LADOS OPUESTOS DE UN PARALELOGRAMO SON IGUALES

CUADRADO RECTÁNGULO ROMBO

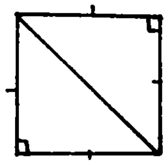


LAS CUMPLE SI NO

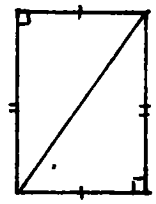


2. CADA DIAGONAL DE UN PARALELOGRAMO LO DIVIDE EN DOS TRIÁNGULOS CONGRUENTES

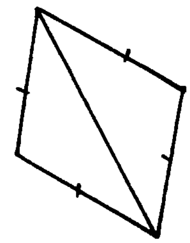
CUADRADO



RECTÁNGULO



ROMBO

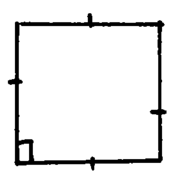


Por el criterio de congruencia ________ el rectángulo, el cuadrado y el rombo quedan divididos en dos triángulos congruentes, al trazar una de sus diagonales.

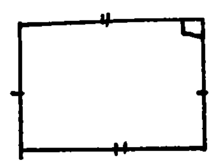
Cumplen estas figuras geométricas la propiedad enunciada SI NO

3. LOS ÁNGULOS OPUESTOS DE UN PARALELOGRAMO SON IGUALES

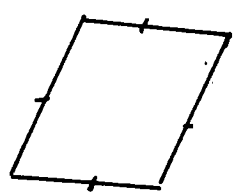
CUADRADO



RECTÁNGULO



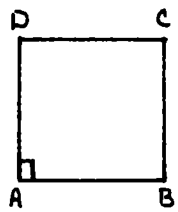
ROMBO



LAS CUMPLE SI NO

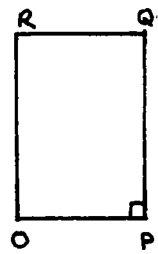
4. LOS ÁNGULOS CONSECUTIVOS DE UN PARALELOGRAMO SON SUPLEMENTARIOS

CUADRADO



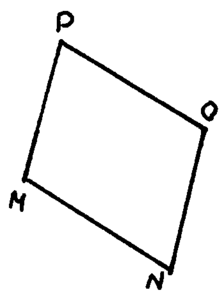
$\measuredangle DAB + \measuredangle ABC =$ ____

RECTÁNGULO



$\measuredangle OPQ + \measuredangle PQR =$ ____

ROMBO



CUMPLE ESTOS PARALELOGRAMO LA PROPIEDAD | SI | NO |

5. LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO SE BISECAN MUTUAMENTE

Dibuja las figuras y marca

CUADRADO

RECTÁNGULO

ROMBO

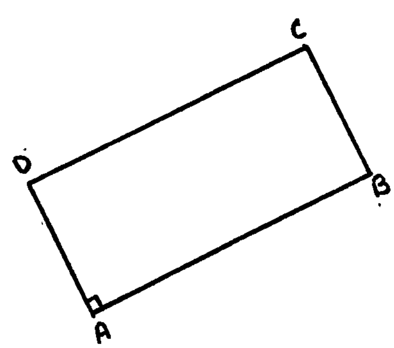
CUMPLEN LA PROPIEDAD $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$

Enunciemos lo experimentado:

EL CUADRADO, RECTÁNGULO Y ROMBO CUMPLE CON LAS PROPIEDADES DEL --------------------.

TAREA 12. LAS DIAGONALES DEL RECTÁNGULO

1.



Fig# 1

Sea el rectángulo ABCD, traza las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, obtienes los ΔACB y ΔBDA. Como el rectángulo es un paralelogramo sus lados opuestos son congruentes, simbólicamente $\overline{AB} \cong$ ___ y $\overline{DA} \cong$ ____.

2. En el rectángulo ABCD se tiene los elementos congruentes que son : $\overline{DA} \cong$ ______ por ser ______

$\angle DAB \cong \angle ABC$ por medir____

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ___________

Por lo tanto, el criterio de congruencia de los ΔABD y ΔABC es: L-L-L A-L-A L-A-L

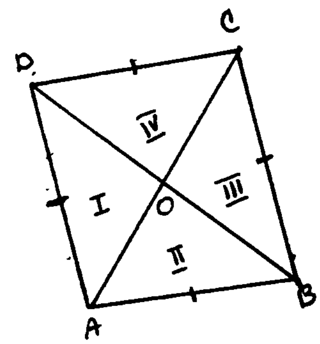
3. De la congruencia de los triángulos se deduce que $\overline{DB} \cong$_____, observa que estos lados de los triángulos representan las _________ del rectángulo.

De esta manera podemos enunciar una propiedad particular para el rectángulo que es:

LAS DIAGONALES DE UN RECTÁNGULO SON _______________.

TAREA 13. TRAZO DE LAS DIAGONALES DEL ROMBO

1.



Fig# 1

Sea ABCD un rombo (Fig#1) Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, sea O el punto de intersección de las diagonales.

Comparemos los cuatro triángulos formados I,II,III y IV.

a) Primero veamos la relación entre los triángulos I y II.

Tenemos que:

$\overline{DA} \cong$ ______ por ser ABCD un rombo.

$\overline{DO} \cong$ ______ por _______________.

$\overline{AO} \cong \overline{AO}$ por __________.

Por lo tanto los triángulos I y II son ________ por el criterio ____________.

b) Ahora veamos la relación entre los triángulos II y III.

Tenemos que:

$\overline{AB} \cong$ _______ por dato

$\overline{AO} \cong$ _____ por ______________

$\overline{OB} \cong \overline{OB}$ por ____________.

Luego los triángulos II y III son ________ por el criterio ________________.

c) Ahora, tú sólo compara los triángulos III y IV. Recuerda que debes justificar tus afirmaciones. Qué puedes decir de los triángulos III y IV ?

De esta tarea obtuviste que:

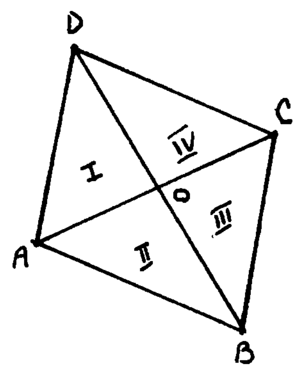
Δ _____ $\cong$ Δ______ $\cong$ Δ _____ $\cong$ Δ______

Completa el enunciado de la propiedad a la que acabas de llegar al trazar las diagonales de un rombo.

LAS _____________ DE UN ROMBO FORMAN CUATRO TRIÁNGULOS __________________.

TAREA 14. INTERSECCIÓN DE LAS DIAGONALES DE UN ROMBO

1\.



Sea ABCD un rombo. Por la tarea 13 sabes que: $\Delta_{I} \cong \Delta_{II} \cong \Delta_{III} \cong \Delta_{IV}$. De esta congruencia observas que : $\angle$ DOA $\cong$ $\angle$____ $\cong$ $\angle$_____ $\cong$ $\angle$ _______, por ser elementos correspondientes en triángulos congruentes. Además tenemos que estos ángulos son consecutivos y forman un ángulo de giro o sea que la suma de ellos es ___________.

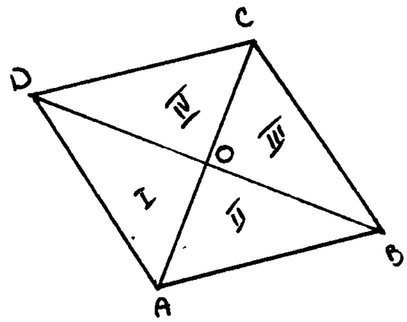
Y como son congruentes entre sí cada uno mide ____ o sea que son ángulos rectos, por lo que podemos decir que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son _________

Ahora podemos enunciar la propiedad siguiente:

LAS _________________ DE UN ROMBO SON _____________ ENTRE SÍ.

TAREA 15. LAS DIAGONALES A LOS VÉRTICES DE LOS ÁNGULOS DEL ROMBO

1.



Fig# 1

Sea ABCD un rombo. De la tarea 13 conoces que los triángulos I,II,III y IV son congruentes. De ahí que: ∠ DAO ≅ ∠____≅ ∠____ ≅ ∠______, por ser elementos correspondientes en triángulos congruentes. Observaste que la diagonal $\overline{AC}$ divide al ∠ DAB y al ∠ BCD en ángulos congruentes, entonces puedes decir que la diagonal $\overline{AC}$ es ____________ ∠ DAB y ∠ BCD ?.

Por otro lado tenemos que ∠ ODA ≅ ∠____≅ ∠____≅ ∠_____ por ser elementos correspondientes en triángulos congruentes.

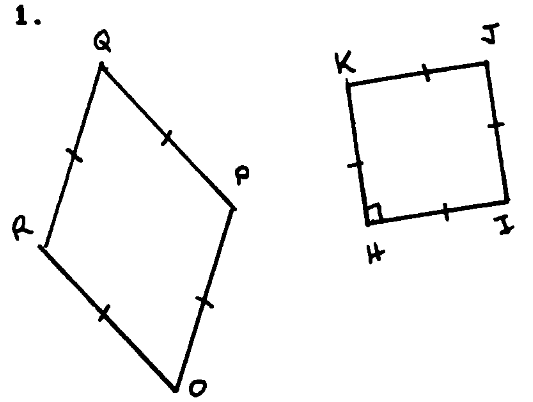
La diagonal $\overline{DB}$ es ________ de los ángulos CDA y ABC.

Completa lo siguiente que enuncia una propiedad de las diagonales del rombo y los ángulos en los vértices:

EN UN ROMBO LAS_______________ SON ___________ DE LOS ÁNGULOS DE LOS VÉRTICES.

TAREA 16. PROPIEDADES ESPECIALES DEL CUADRADO

1.

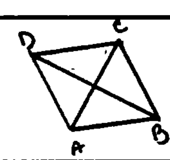
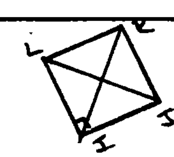
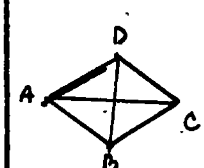
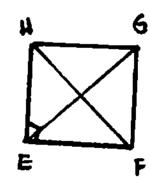


Sea OPQR un rombo y HIJK un cuadrado. Compara las dos figuras, de manera que puedas relacionar si las características del rombo las cumple el cuadrado

ROMBO	CUADRADO	
4 lados iguales	SI	NO
Par de lados paralelos	SI	NO
Ángulos opuestos iguales	SI	NO

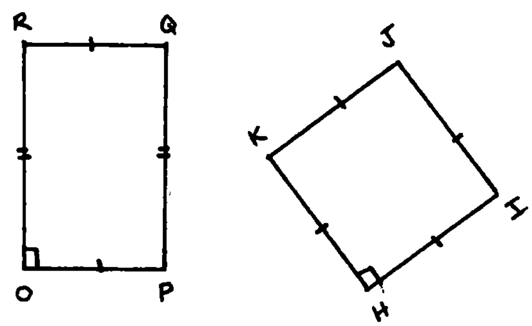
Puedes concluir que el cuadrado es un rombo ? _____

2. Veamos si el cuadrado cumple con las propiedades particulares del rombo :

PROPIEDAD	ROMBO	CUADRADO
Las diagonales forman cuatro Δ congruentes		 SI NO
Las diagonales son bisectriz de los ángulos de los vértices		 SI NO

Cumple el cuadrado con las propiedades particulares del rombo ?

3.



Fig# 2

En la fig #2 se tiene el rectángulo OPQR y el cuadrado HIJK. Comparemos si el cuadrado posee las características del rectángulo veamos:

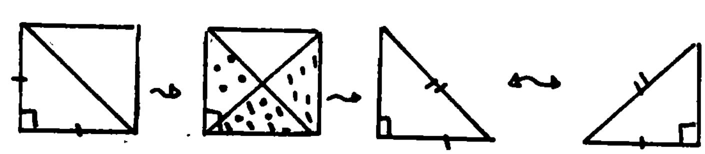
RECTANGULO	CUADRADO	
4 ÁNGULOS RECTOS	SI	NO
PAR DE LADOS PARALELOS	SI	NO
LADOS OPUESTOS IGUALES	SI	NO

Consideras al cuadrado un rectángulo ?__________

4. En la siguiente secuencia de figuras se trata de que observes si el cuadrado cumple la propiedad particular del rectángulo.

PROPIEDAD **CUADRADO**

Las diagonales del rectángulo son iguales.

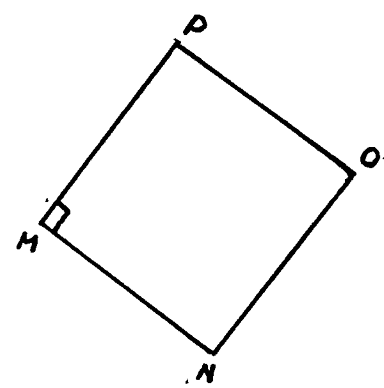


Completa el enunciado según con la respuestas del cuadro y la secuencia de figuras:

EL CUADRADO TIENE LAS PROPIEDADES DEL ____________ Y DEL _________________.

TAREA 17. DADO UN PARALELOGRAMO CON UN ÁNGULO RECTO

1.



Fig# 1

En la fig #1 se tiene el ▱ MNOP con ∠ PMN = 90°. El ∠PON = 90° por ser ángulo _________. (Tarea 3)

2. Los ∠ PMN y ∠ MNO son ángulos consecutivos por la tarea 4, estos son _______________., es decir ,

∠ PMN + ∠ MNO = _____

90°+ ∠ MNO = _____

∠ MNO = ___ - ____

∠ MNO = ____. (Márcalo en la figura.)

El ∠ OPM mide también ___ por ser opuesto al ángulo ______ (Márcalo).

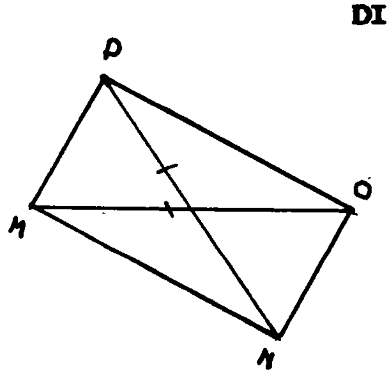
3. Observa que clase de paralelogramo es MNOP. La medida de los cuatro ángulos de este son paralelogramo es de __________, por lo tanto es un ________________.

Completa la propiedad que dedujiste donde el paralelogramo tenía un ángulo recto

SI UN PARALELOGRAMO TIENE UN ÁNGULO _________ ENTONCES ES UN ______________________.

TAREA 18. DADO UN PARALELOGRAMO CON LAS DIAGONALES IGUALES

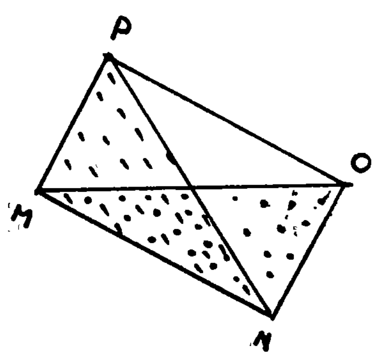
1.



Fig# 1

En la fig #1 se tiene el ▱MNOP, por dato $\overline{PM} \cong \overline{ON}$, además $\overline{PN} \cong \overline{OM}$.

2.



Fig# 2

Tomemos los ΔPNM y ΔOMN, fig #2, los elementos congruentes de este par de triángulos son:

$\overline{PM} \cong \overline{ON}$ por _____________

$\overline{PN} \cong \overline{MO}$ por ____________

$\overline{MN} \cong \overline{MN}$ por ___________

Luego los ΔPNM y ΔOMN son ________________ por el criterio de congruencia ________________.

3. De la congruencia obtienes que $\angle PMN \cong \angle ONM$ y además son consecutivos, y de la tarea 4 sabemos que estos ángulos son ________________.

Simbólicamente $\angle PMN + \angle ONM =$ _____

$$2 \angle PMN = \_\_\_\_\_$$

$$\angle PMN = \_\_\_\_\_$$

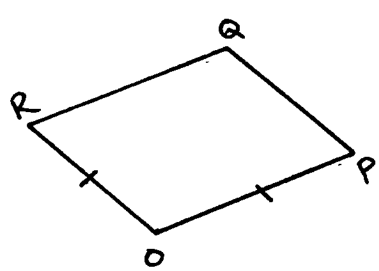
es decir, el ángulo PMN es recto De acuerdo con la tarea 17 este paralelogramo es un ______________.

Enunciemos la propiedad para esta experiencia

SI UN PARALELOGRAMO TIENE LAS DIAGONALES ______________ ENTONCES ES UN ________________.

TAREA 19. - DADO UN PARALELOGRAMO CON LOS LADOS CONTIGUOS IGUALES

1.



Fig# 1

Sea ▱OPQR, por dato $\overline{RO} \cong \overline{OP}$ (fig 1). Los lados $\overline{RO}$ y $\overline{QP}$ son paralelos y además son _______. Simbólicamente $\overline{RO} \cong$ ________. (1)

Similarmente lo mismo pasa con los lados $\overline{OP}$ y $\overline{RQ}$, es decir, $\overline{OP} \cong$ _____. (2)

2. De (1) y (2) obtienes que el $\square$ OPQR tiene sus cuatro lados _________. Por lo tanto $\square$ OPQR es un _________________.

Enunciemos la propiedad del paralelogramo con sus lados contiguos iguales.

SI UN PARALELOGRAMO TIENE DOS LADOS CONTIGUOS _______________ ENTONCES ES UN _________________.

TAREA 20. PARALELOGRAMO CON UN ANGULO RECTO Y DOS LADOS CONSECUTIVOS IGUALES

1.

Fig a

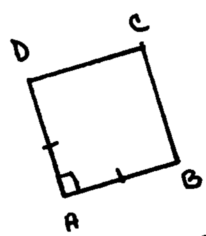
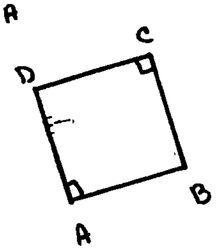


Fig b



Sea $\square$ABCD , por dato $\overline{DA} \cong \overline{AB}$ y $\angle A \cong 90^\circ$. (fig a)

Además $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos__________ (fig b)

Los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ son lados opuestos del $\square$ABCD, entonces $\overline{DC} \cong$ ____(fig b)

Observa que el $\square$ABCD tiene sus cuatro lados _______.

Recuerda que : $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

con $\angle A \cong \angle C = 90^\circ$ $\quad \angle B + \angle D = 360^\circ -$ ____

$\angle B + \angle D =$ ____

En la fig b los ∠ B y ∠ D son _________________ del ▱ABCD, y por la tarea 8 son congruentes, por lo tanto cada uno mide _______.

Hallaste que el ▱ABCD tiene 4 ángulo rectos y los 4 lados iguales, este paralelogramo es un ______________

Completa el enunciado de esta tarea :

SI UN PARALELOGRAMO TIENE UN ÁNGULO ______ Y DOS LADOS CONSECUTIVOS ____________ ENTONCES ES UN ____________ .

3.4 FASE 3 EXPLICITACIÓN

3.4.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

El estudiante será capaz de:

-Ejercitar el lenguaje simbólico de la matemática para la expresión del problema ha resolver.

-Analizar los esquemas de las figuras para expresar por escrito y verbalmente la tarea propuesta.

-Relacionar y discutir los conocimientos previos que necesita para la solución de la tarea.

-Utilizar propiedades descubiertas en la fase 2.

3.4.2 CONTENIDO

Esta fase consta de 6 tareas con un total de 14 problemas en la que se involucran los conocimientos previos y los conocimientos adquiridos en la fase 1 y 2; como son: identificación de ángulos entre paralelas, identificación de rectas paralelas, propiedades de triángulos isósceles, ángulos suplementarios, congruencia de triángulos, propiedades de los paralelogramos, construcción con regla y compás de paralelogramos. Solamente se han escogido algunos temas no porque los demás no sean importantes, sino que el propósito de la fase 3 es que el estudiante pueda relacionar el tema de estudio e intercambie las ideas con los demás compañeros, y el profesor pueda conocer si las explicaciones dadas son coherentes y están utilizando correctamente el lenguaje matemático en la expresión verbal o escrita, observando así que se logre el avance progresivo en los estudiantes y además percartarse que las explicaciones de los estudiantes vaya acorde al nivel 3 .

La fase de Explicitación en la propuesta permitirá al estudiante la libertad de comprensión, asimilación y el desenvolvimiento en sus explicaciones escritas o verbales de la tarea ha resolver. En esta fase el profesor debe intervenir lo menos posible y su papel es el de guía para que sus estudiantes puedan utilizar un lenguaje coherente, sistemático y con lógica que es característico del lenguaje matemático.

Mencionemos lo que nos dice Shardavok(1987) con respecto al lenguaje, lo cual creemos que es importante, ya que la fase 3 de los Van Hiele ayuda al profesor a comprobar si las actividades realizadas anteriormente están logrando los objetivos. Por parte de los estudiantes estas actividades afianzan sus conocimientos, corrige aquellos resultados incorrectos y retroalimenta los temas que les causan dificultades.

> "Cuando más preciso y claro sea el lenguaje; tanto más elevado sera el nivel de la mente y tanto mayor la cognición y la actividad mental creadora de los alumnos "

Las tareas que se proponen involucran, por una parte una ilustración del problema marcándose en éste la hipótesis (datos) y la tésis (incógnita). Luego se desglosa la figura con nuevos datos hallados a partir de los datos anteriores o de construcciones auxiliares, dándole al estudiante en algunos casos sugerencias de procedimientos que deberá realizar para que pueda dar solución al problema planteado en las figuras secuenciales y analice la solución del mismo.

La tarea 6 es un poco diferente a las demás ya que ésta tiene la finalidad que el estudiante pueda argumentar y completar las afirmaciones siguiendo un esquema o un formato para la demostración del problema, y observe que estas afirmaciones, que las ve aisladas, se puedan escribir paso a paso (existiendo conexión entre ellas) y al finalizar el último paso se llega a la tésis.

La tarea 6 consta de tres partes:

La tarea 6.1 representa la tarea 3 de la fase 2, presentándose al estudiante, dentro del formato las justificaciones, de modo que complete tanto las afirmaciones como las razones; con el fin de encaminarlo a la sistematización de los pasos en la resolución del problema.

La tarea 6.2 representa la tarea 14 de la fase 2, ahora el estudiante debe completar las razones con el fin de que el profesor observe si el estudiante realiza conexiones e interrelaciones de los conocimientos que hasta ahora ha adquirido.

En la tarea 6.3 se presenta, al estudiante, las razones de las afirmaciones en forma desordenada y su trabajo consiste en encontrar la secuencia lógica que se presentan en el cuadro de la DEMOSTRACION. Esta experiencia debe realizarla el estudiante individual y luego discutirla en grupo.

En conclusión las tareas de la Fase de Explicitación tiene el própósito de que el profesor observe si el estudiante está comprendiendo el análisis de la tarea, y a la vez observe la organización de la solución del ejercicio, es decir, el nivel 3 se caracteriza en que se introduce al estudiante en el comienzo del razonamiento formal; de modo que el estudiante utilice métodos de justificación propios del nivel de Deducción Informal.

3.4.3 ACTIVIDADES

TAREA 1. IDENTIFICACIÓN DE ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

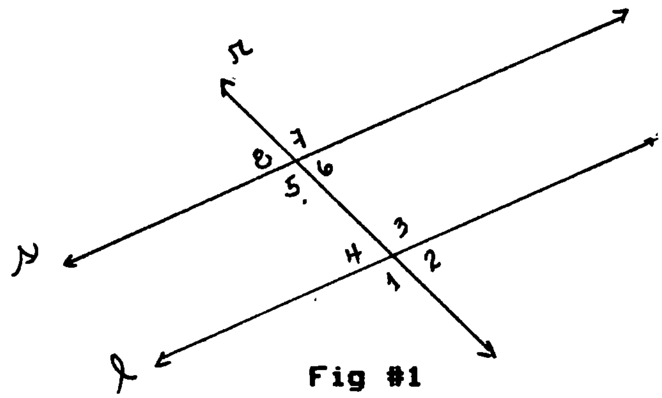
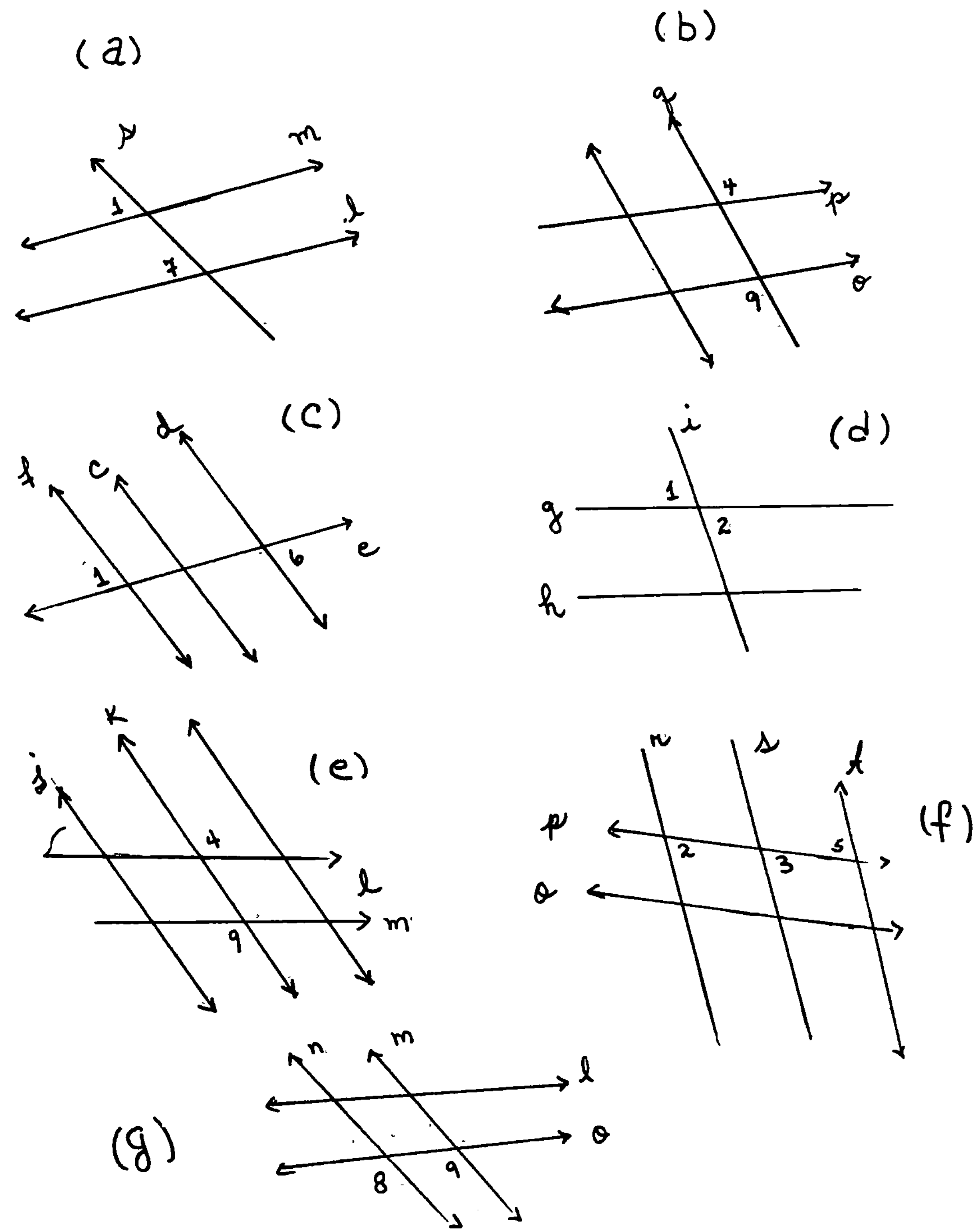


Fig #1

En la fig #1 se tiene las rectas *l* y *s* paralelas y *r* una transversal se enumeran los ángulos entre las paralelas. Identifica los ángulos que se te pide y llena el cuadro con la información.

Cuatro pares de ángulos correspondientes Dos pares de ángulos alternos internos Dos pares de angulos alternos externos Dos pares de ángulos conjugados Dos pares de ángulos externos del mismo lado de la transversal	

TAREA 2. IDENTIFICACIÓN DE RECTAS PARALELAS



En la figura nombra las rectas que deben ser paralelas para que se dé la igualdad de los ángulos siguientes:

a.	$\angle 1 \cong \angle 7$
b.	$\angle 4 \cong \angle 9$
c.	$\angle 1 \cong \angle 6$
d.	$\angle 1 \cong \angle 2$
e.	$\angle 4 + \angle 9 = 180°$
f.	$\angle 2 \cong \angle 3 + \angle 5$
g.	$\angle 8 + \angle 9 = \angle 180°$

PROCEDIMIENTO

Luego por escrito para cada uno de los puntos presentados en los cuadros, justifica tus conclusiones, puedes hacer uso de diagramas para justificar cada uno.

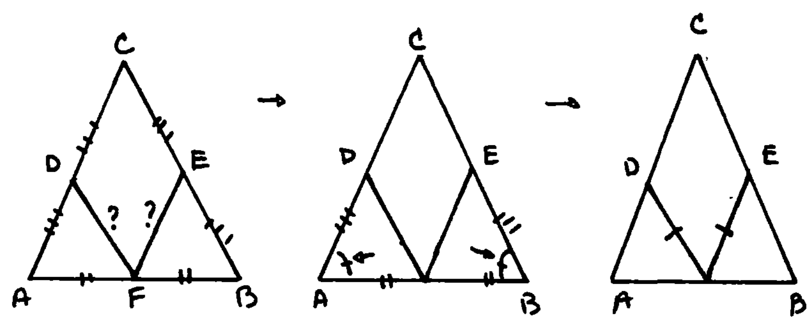
TAREA 3. CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULO

En las figuras observa que tienes marcado tanto los datos y la incógnita (tésis). Debes seguir todos los pasos e interpretar el enunciado. Se te dá una guía de lo que debe contener el problema y que deberás realizar para todos los problema de esta fase 3, la sistematización debes respetarla. Antes de buscar solución al mismo es recomendable que reflexiones si comprendes los esquemas de las figuras y percatarte que puedes encontrarte con puntos de la guía que no se necesitaron, lo cual no se presentan en el reporte individual y grupal.

El reporte grupal debe contener la enunciación de la hipótesis (datos) y tésis (incógnita) redactados por escrito y simbólicamente, los conocimientos previos que se necesita, dificultades del grupo, los errores, y si se presentaron diferentes soluciones al problema.

En el reporte individual debe presentarse los tres primeros puntos que se señalan y las preguntas que se detallan en cada problema.

TAREA 3.1



1 ENUNCIACIÓN DEL PROBLEMA (ESCRITA Y SIMBÓLICA)

2. TÉSIS

3. CONOCIMIENTOS PREVIOS

4. . JUSTIFICACIONES

PREGUNTAS PARA DISCUSIÓN

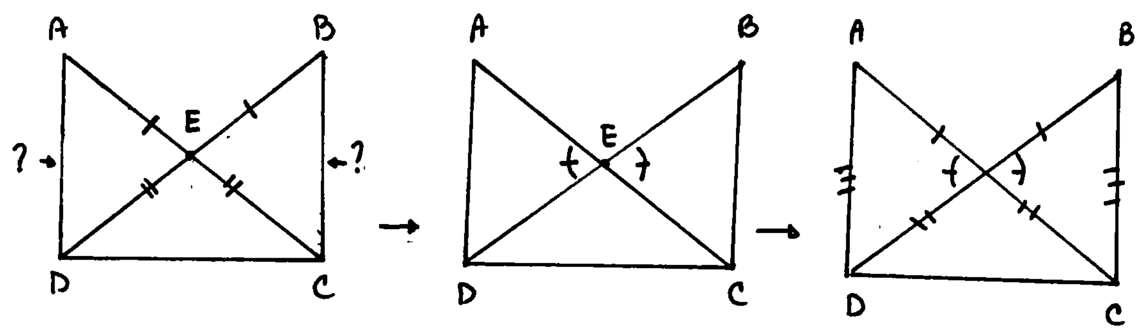
Luego de resolver el problema discutir las preguntas

1.¿Qué clase de triángulo resultó ABC ?

2.¿Qué puedes decir del punto F ?

3.¿Es el $\angle$ CDF $\cong$ $\angle$ CEF ?

TAREA 3.2



1. ENUNCIACIÓN DEL PROBLEMA (ESCRITA Y SIMBÓLICA)

2. TÉSIS

3. CONOCIMIENTOS PREVIOS

4. JUSTIFICACIONES

DISCUTE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y JUSTIFICA TUS RESPUESTAS.

1. En la fig ABCD ¿Cuántos triángulos observas ? Simbolízalos
2. Qué clase de triángulo resulta ser DEC ?
3. Son los ΔADC y ΔBCD congruentes ?

TAREA 4. ¿ LAS PROPIEDADES DE LAS DIAGONALES DEL RECTÁNGULO Y EL ROMBO LAS POSEE EL CUADRADO ?

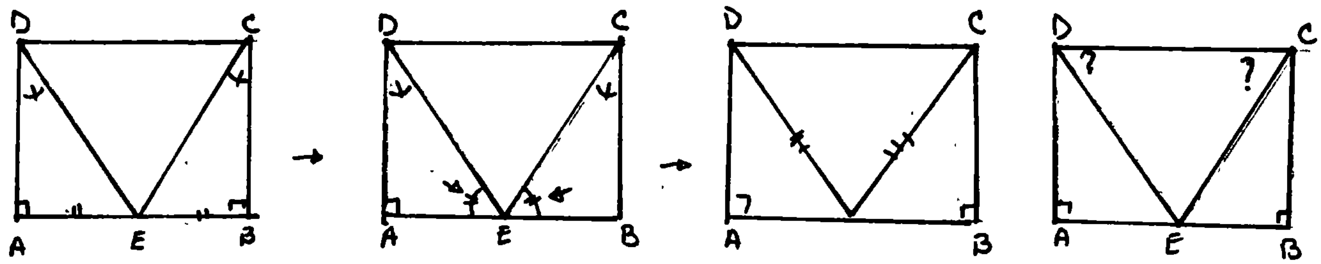
TAREA 4.1

PROPIEDADES DE LAS DIAGONALES	RECTÁNGULO	ROMBO	CUADRADO
SE BISECAN MUTUAMENTE SON IGUALES			
SON PERPENDICULARES			
SON BISECTRIZ DE LOS ANGULOS			
FORMAN DOS PARES DE TRIÁNGULOS CONGRUENTES			
FORMAN CUATRO TRIÁNGULOS CONGRUENTES			

Debes llenar con una crux (X) si el cuadrado posee cada una de las propiedades enunciadas y justificar tu afirmación, ya que en la fase 2 se te presentaron cuadros para completar en que sólo se te pedía indicar si se cumplía una propiedad o no. Ahora debes justificar tu respuesta.

TAREA 4.2

La figura inicial se desglosa, sigue esta secuencia y en la última representación debes marcar lo que se deduce.



DISCUTE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS ADICIONALES Y JUSTIFICA TU RESPUESTAS.

¿Qué significa el punto E del segmento $\overline{AB}$?
¿Qué clase de triángulo es ΔDCE?
¿Qué clase de paralelogramo resulta ser ABCD?

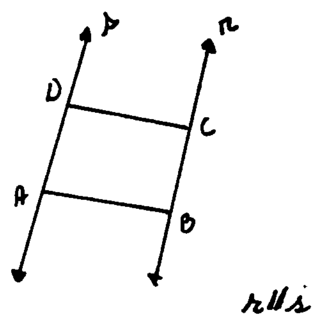
TAREA 4.3

Construye un rombo con regla y compás dadas las longitudes de las diagonales. Representa una secuencia gráfica de tú construcción y ve anontando tus procedimientos. Luego explica porque consideras que es suficientes construir un rombo dadas las longitudes de las diagonales. Sugerencia toma las longitudes de las diagonales una mayor que la otra.

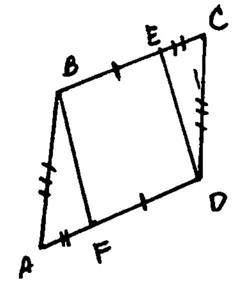
SECUENCIA DE LA CONTRUCCIÓN

TAREA 5. VERIFICACIÓN DE QUE UN CUADRILÁTERO ES PARALELOGRAMO.

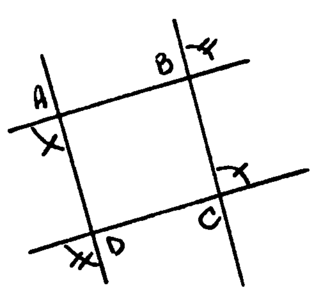
La tarea que se presenta acontinuación es con el hecho que puedas explicar la razón; por la cual consideras que cada uno de los cuadriláteros representados son paralelogramos, observarás que se te marcan los datos y tú tarea será la de investigar en qué propiedades, teoremas, etc. te apoyas para argumentar tus afirmaciones. Debes redactar tus explicaciones siguiendo el mismo patrón que las anteriores.



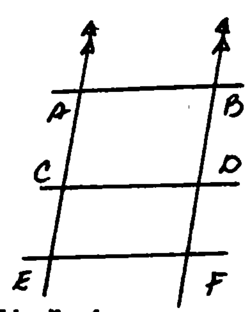
Fig#1



Fig# 2



Fig# 3

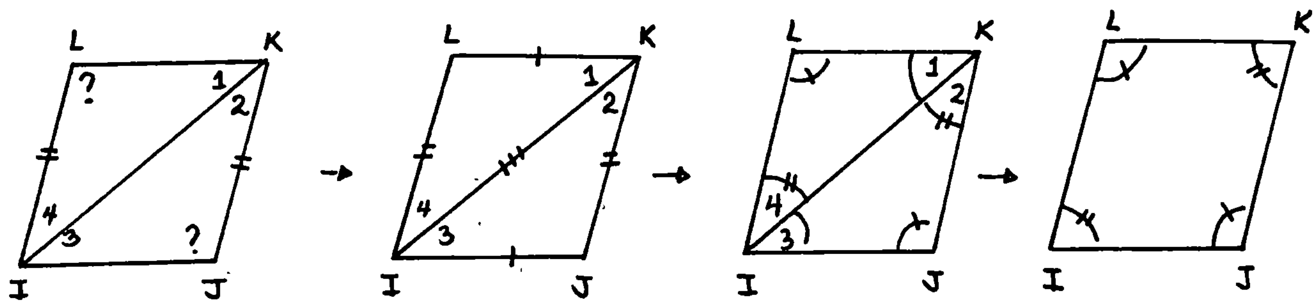


Fig# 4

TAREA 6. PRÁCTICA EN LAS JUSTIFICACIONES DE LAS TAREAS 3

La tarea que se te presenta la has realizado en la fase 2, pero ahora debes seguir la secuencia de las gráficas y escribir los pasos en el esquema que se te presenta o completar lo que hace falta.

6.1 RELACIÓN DE LOS ÁNGULOS OPUESTOS DE UN PARALELOGRAMO



ENUNCIADO

DEMOSTRACIÓN

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1	$\overline{IL} \cong \overline{KJ}$ y $\overline{IJ} \cong \overline{LK}$	______________________
2	____________________	lado común de los Δs
3	$\Delta IKL \cong$ _________	Criterio ______
4	$\angle L \cong \angle J$	_________________
5	$\angle 4 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 1$	________________
6	$\angle 4 + \angle 3 =$ _____	Adición de ángulos
7	$\angle 1 + \angle 2 =$ ______	_______________
8	$\angle J \cong$ ___	paso 6 y 7
9	$\angle L \cong \angle J$ y $\angle K \cong$ ______	Son ángulos _____ del IJKL

6.2 LAS DIAGONALES DE UN ROMBO SON PERPENDICULARES

Esta propiedad la has resuelto en la tarea 11, fase 2. Debes justificar las razones y presentar una secuencia de gráficas.

ENUNCIADO

DEMOSTRACIÓN

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1	▱MNOP es un rombo	____________
2	$\overline{PM} \cong \overline{ON}$	____________
3	MNOP es un paralelogramo	____________
4	$\overline{MQ} \cong \overline{QO}$	____________
5	$\overline{NQ} \cong \overline{PQ}$	____________
6	$\Delta PQM \cong \Delta PQO$	____________
7	$\angle PQM \cong \angle PQO$	____________
8	$\angle MQO$ mide 180°	____________
9	$\overline{MO} \perp \overline{NP}$	____________

6.3. LAS DIAGONALES DE UN CUADRILÁTERO SE BISECAN.

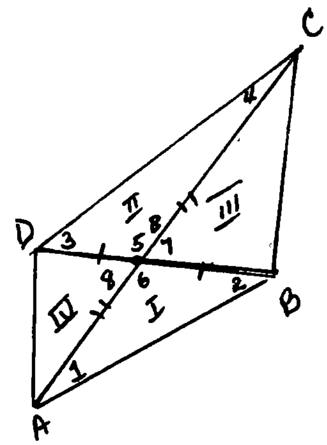
A continuación se dá el enunciado de la tarea y su representación gráfica, debes tú colocar en los respectivos espacios los datos (hipótesis) y la incógnita (tésis) del problema en forma simbólica, luego ordena en el esquema los pasos de las justificaciones, según tu criterio.

DEMOSTRAR QUE SI LAS DIAGONALES DE UN CUADRILÁTERO SE BISECA ENTRE SÍ, LOS LADOS OPUESTOS SON PARALELOS.

HIPÓTESIS : *ABCD ES UN* ____________

(Datos) ___ *Y* _____ *SE BISECAN ENTRE SÍ*

TESIS: ________ *Y* ___________



DEMOSTRACIÓN

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1	$\overline{AC}$ Y $\overline{BD}$ SE BISECAN	1
2	$\overline{BE} \cong \overline{ED}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	2
3	$\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$	3
4	$\Delta I \cong \Delta II$, $\Delta III \cong \Delta IV$	4
5	$\angle 1 \cong \angle 4$. $\angle 2 \cong \angle 3$	5
6	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	6

RAZONES. ORDENA Y COLOCA EN EL CUADRO.

Criterio L-A-L

Rectas cortadas por una transversal son pararelas si los ángulos alternos internos son congruentes.

Dato

Bisecar es dividir en dos partes congruentes

Angulos opuestos por el vértice son congruentes.

Elementos correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

3.5 FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE

3.5.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS

El estudiante será capaz de:

- Justificar la solución de los problemas, enumerando los pasos y siguiendo los datos de la secuencia gráfica.
- Resolver los problemas presentados.

3.5.2 CONTENIDO

La fase 4: Orientación Libre contiene 9 tareas. En esta fase el estudiante resuelve por su iniciativa, buscando él la vía de solución. En algunos casos requerirá utilizar construcciones con regla y compás o papel con el fin de ayudarlo a la visualización de la tarea. Se le pedirá, para guiarlo en sus afirmaciones, que escriba en un esquema los pasos jerárquicos de las propiedades geométricas que va a utilizar.

Las tareas propuestas de la fase 4 se tornan más complejas y nuevamente se enfatiza en que el estudiante escriba los datos, la tésis y enuncie o redacte el problema, esto ayudará al estudiante a que organice su vía de solución para el problema.

En cada una de las tareas se le pide al estudiante que redacte simbólicamente el enunciado de la tarea. Para ello se le presenta un esquema donde debe colocar, en su respectiva casilla, la hipótesis y la tésis. Como también se le presentan tareas sin gráfica, el estudiante debe construir éstas de acuerdo al enunciado del mismo, esto le ayuda a la interpretación del problema. Es conveniente en esta clase de tareas que el profesor le pida al estudiante que le enseñe la interpretación gráfica del problema.

Las tareas 1,2,3,4 y 5 involucran la identificación de paralelogramos, para ello el estudiante hace uso de las propiedades que conoce de la Fase 2 (20 propiedades), aislando las que necesita. Además en las tareas 1 y 3 el estudiante construye la figura para la interpretación del problema ha resolver con el propósito de ayudarlo en la comprensión e interpretación del mismo.

La tarea 6 contiene la construcción de un paralelogramo dado un ángulo, un lado y la altura correspondiente a ese lado; para ello requiere destreza en la construcción y la utilización de los conocimientos que ha adquirido en las fases anteriores.

Las tareas 7, 8 y 9 proponen problemas en el espacio tridimensional. El estudiante hace uso de las propiedades de los paralelogramos y para ayudarlo en la visualización del mismo se le recomienda construir estos problemas con cartón y papel.

Recordemos que es en la fase de **Deducción Informal**, donde el estudiante empieza a tomar rumbo hacia la demostración; porque al solucionar la tarea se le pide una redacción de ella que luego debe colocarla en el esquema de la demostración.

3.5.3. ACTIVIDADES

TAREA 1. IDENTIFICACIÓN DE ROMBO

Construye un triángulo isósceles, llámale a los vértices, A,B,C. con AC ≅ CB. Luego localiza los puntos medios de cada lado llamándoles R,P,Q correspondiente a los lados AC, AB y CB respectivamente. Une los puntos medios y observa que se tiene el cuadrilátero PQCR. Demuestra que este cuadrilátero es un Rombo.

ENUNCIADO SIMBÓLICO

HIPOTESIS [ ] $\longrightarrow$ TESIS [ ]

PROPIEDADES A UTILIZAR

1. Enumera, en orden, las propiedades que vas a utilizar para la solución de la misma.

PROPIEDADES

2. ESCRIBE TU SOLUCIÓN EN EL ESQUEMA.

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

TAREA 2. IDENTIFICACIÓN DE TIPO DE PARALELOGRAMO

En esta sección de la tarea se te presentan dos figuras (a) y (b), donde luego debes redactar por escrito lo que se te pide. Redacta el enunciado a partir de las figuras, realiza solamente tus argumentaciones en carâcter explicativo, sin utilizar el esquema de la demostración como en las tareas anteriores.

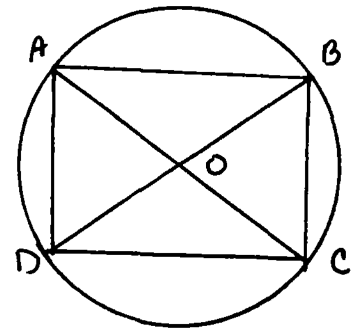


Fig.(a)

PREGUNTAS

¿Qué clase de triángulo es ΔOCD?

¿Qué clase de cuadrilátero es ABCD ?

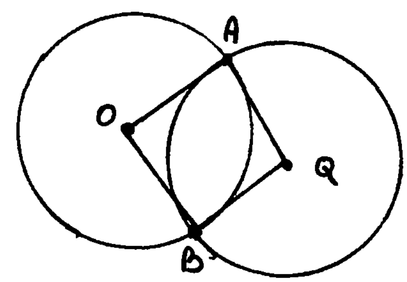


Fig (b)

PREGUNTAS

El círculo de centro O es congruente con el círculo de centro Q. ¿Qué clase de cuadrilátero es OAQB?. Recuerda que dos círculos son congruentes si sus radios tienen la misma longitud .

TAREA 3. IDENTIFICACIÓN DE PARALELOGRAMO

Construye un paralelogramo y traza las diagonales. Localiza los puntos medios de los segmentos que unen la intersección de las diagonales con cada uno de los vértices del paralelogramo. Luego une estos puntos y se forma un cuadrilátero. Veamos si este cuadrilátero es paralelogramo.

COMPLETA SIMBÓLICAMENTE

HIPÓTESIS [ ] $\longrightarrow$ **TESIS** [ ]

PROPIEDADES A UTILIZAR

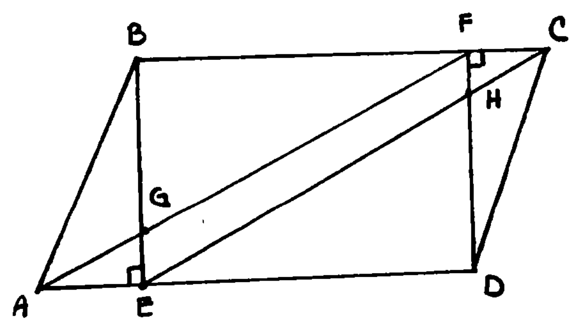
1. Enumera, en orden, las propiedades que vas a utilizar para la solución de la misma.

PROPIEDADES

2. ESCRIBE TU SOLUCIÓN EN EL ESQUEMA.

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

TAREA 4. IDENTIFICACIÓN DE PARALELOGRAMO



Se tiene el ▱ABCD y las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$ respectivas de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Observa el cuadrilátero EHFG, puedes concluir que representa un paralelogramo.

COMPLETA SIMBÓLICAMENTE

HIPÓTESIS [ ] $\rightarrow$ TÉSIS [ ]

PROPIEDADES A UTILIZAR

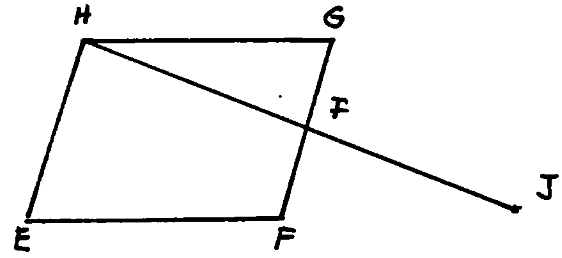
1. Enumera, en orden, las propiedades que vas utilizar para la solución de la misma.

PROPIEDADES

2. ESCRIBE TU SOLUCIÓN EN EL ESQUEMA.

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

TAREA 5. IDENTIFICACIÓN DE PARALELOGRAMO



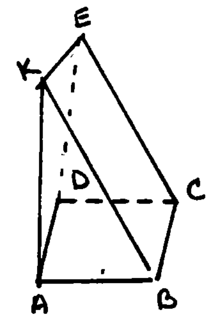
La figura EFGH es un paralelogramo, I es el punto medio de $\overline{FG}$ y $\overline{HI} \cong \overline{IJ}$. Une los puntos FJGH, puedes decir que representa un paralelogramo. ¿ Que representa el punto F de $\overline{EJ}$?

TAREA 6. CONSTRUCCION DE UN PARALELOGRAMO DADO UN LADO, UN ÁNGULO Y LA ALTURA CON RESPECTO A ESE LADO

Representa una secuencia de tu construcción y explica cada paso.

Explicación

TAREA 7. IDENTIFICACIÓN DE PARALELOGRAMO EN UN PROBLEMA TRIDIMENSIONAL.



En la figura, tenemos que: ▱ABCD, el ▱ADEK y el ▱BCEK son paralelogramos. Demostrar que:

A. $\overline{EK} \cong \overline{BC}$ B. $\Delta KAB \cong \Delta EDC$

Visualiza los elementos que tienes, márcalos en la figura o desglosalos, o construye la figura con cartón.

COMPLETA SIMBÓLICAMENTE

HIPÓTESIS [ ] → TÉSIS [ ]

PROPIEDADES A UTILIZAR

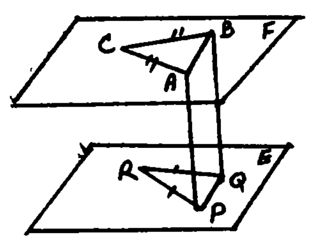
1. Enumera, en orden, las propiedades que vas utilizar para la solución de la misma.

PROPIEDADES

2. ESCRIBE TU SOLUCIÓN EN EL ESQUEMA.

PASOS	AFIRMACIONES	RAZONES
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

TAREA 8. USO DE LAS PROPIEDADES DEL RECTÁNGULO



Se da la figura con el $\triangle ABC$ en el plano F; el $\triangle PQR$ está en el plano E; el ▱ABQP es un rectángulo y $\overline{AP} \perp E$. Determinar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

a. $\overline{BQ} \perp E$ b. $\overline{AQ} \cong \overline{BP}$ c. $F \parallel E$

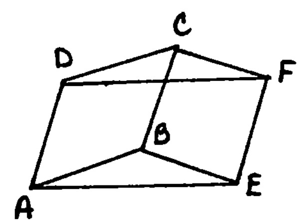
d. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ e. $\overline{PC} \cong \overline{QC}$ f. $\overline{BC} \parallel \overline{RQ}$

g. $\triangle PAC \cong \triangle RBC$

Redacta tus justificaciones.

TAREA 9. IDENTIFICACIÓN DE PARALELOGRAMO

En la figura plana, el ▱ABCD y el ▱BEFC son paralelogramos. Demostrar que el AEFD es un paralelogramo.



Explicación

3.6 FASE 5: INTEGRACIÓN

3.6.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

El estudiante será capaz de:
- Sintetizar, en las tareas, los conocimientos adquiridos.
- Reconstruir problemas realizados en las fases anteriores.

3.6.2 CONTENIDO

La fase de **Integración** tiene dentro de sus propósitos globalizar lo que los estudiantes acaban de aprender. Presentándose, además, los conceptos conectados con el fin de observar que las tareas propuestas forman una red de conocimientos que involucran los conocimientos básicos y los nuevos conocimientos adquiridos. Otras tareas propuestas involucran el Algebra en la solución de la misma ya que los estudiantes para quienes está dirigida la propuesta, tienen conocimiento de está.

La fase de integración es la culminación de la transición de un nivel a otro; es ahí donde el profesor observa si los estudiantes, a través de las experiencias realizadas, son capaces de integrar todo los conocimientos vinculados con el tema; en este caso de las **propiedades de los paralelogramos.**

En la fase 5 se presentan 14 tareas. En esta fase el profesor hace una evaluación del tópico de las propiedades de los paralelogramos, es decir, verifica si los estudiantes han comprendido el contenido desarrollado. Para el estudiante significa el progreso en su nuevo estudio, que ha explorado a través de las actividades realizadas por él.

La tarea 1, contiene la construcción de la mediatriz de un segmento dado y se le hará reflexionar sobre el tipo de paralelogramo que se forma al unir los puntos, con esto se quiere mostrar que apartir de un hecho geométrico se puede encontrar relación con otro vinculado con el tema de los paralelogramos.

La tarea 2, contiene tipos de paralelogramos donde el estudiante tendrá que explicar, la transformación de un paralelogramo a otro.

Es importante que el estudiante realice la tarea 3 individualmente y luego la discuta en grupo; ya que ésta tiene el propósito de que el estudiante pueda justificar los enunciados de acuerdo a las propiedades que posee el paralelogramo.

La tarea 4, contiene un cuadro que el estudiante llenará con SI o NO si el paralelogramo posee dicha propiedad; con esta actividad se podrá conocer si existe una recopilación y distinción de las propiedades de los paralelogramos.

Las tareas 5,6,7,8,9,10,11,12 y 13 son problemas que involucran una conexión de propiedades geométricas, donde el estudiante tendrá que encontrar la solución aplicando todo los conocimiento que ha adquirido.

La tarea 14 contiene problemas que relacionan las propiedades de los paralelogramos; el estudiante debe aplicar el Algebra para la solución de éstos.

3.6.3 ACTIVIDADES

TAREA 1. CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO DADO

PASO 1. Dado el segmento $\overline{AB}$. Traza la circunferencia con centro A y radio $\overline{AB}$.

PASO 2. Trácese la circunferencia con centro B y radio $\overline{AB}$.. Llámale a las intersecciones P y Q.

PASO 3. Trácese $\overline{PQ}$.

PASO 4. Trácese APBQ.

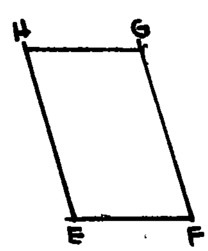
PASO 5 Demuestra que $\overline{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$

PASO 6. De este hecho geométrico, que puedes decir del ▱AQBP?

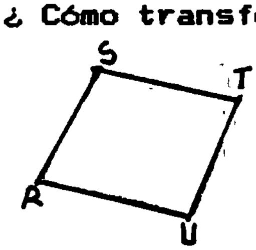
TAREA 2. TRANSFORMACIÓN DE PARALELOGRAMOS

Explica la transformación de un paralelogramo a otro de acuerdo a los datos dados.

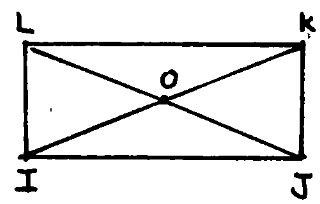
1. ¿ Cómo transformar el ▱EFGH en un rectángulo ?



2. ¿ Cómo transformar el rombo RSTU a un cuadrado ?



3. ¿ Puedes transformar el rectángulo IJKL con las diagonales trazadas a un paralelogramo ?



4. Con cuatro triángulo isósceles con ángulos en la base de 45°. ¿ Qué clase de paralelogramo puedes formar ?

TAREA 3. DISTINCIONES DE TIPOS DE PARALELOGRAMOS DE ACUERDO A LAS PROPIEDADES QUE POSEE.

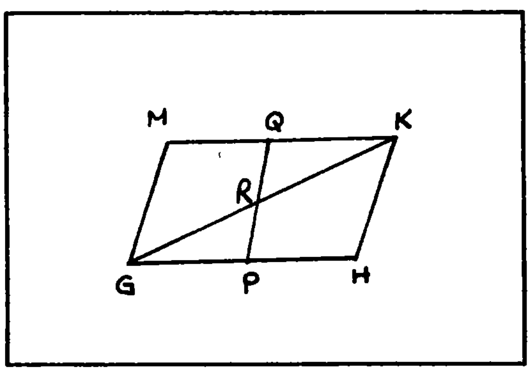
Reflexiona sobre los enunciados que a continuación se te dan, para conocer si sería suficiente las condiciones impuestas a un cuadrilátero para demostrar que representa un paralelogramo, cuadrado, rombo o rectángulo. Justifica tus afirmaciones.

1. Los cuatro lados congruentes.
2. Cada dos ángulos consecutivos son suplementarios.
3. Dos lados son paralelos
4. Cada dos lados opuestos son congruentes.
5. Tres de sus ángulos son ángulos rectos.
6. Sus diagonales son congruentes y perpendiculares.
7. Las diagonles se bisecan.
8. Es equilátero y equiángulo

TAREA 4. RECOPILACIÓN DE LAS PROPIEDADES GENERALES Y PARTICULARES DE LOS PARALELOGRAMOS.

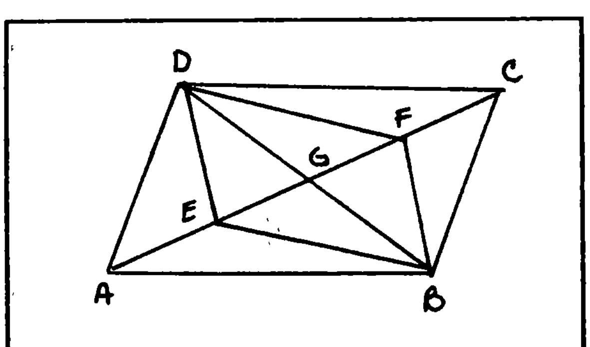
Construye un cuadro donde se recopile las propiedades de los paralelogramos y marca con SI o un NO si el paralelogramo poseen o no dicha propiedad. Discutir en grupo y argumentar tus afirmaciones o negaciones.

TAREA 5.



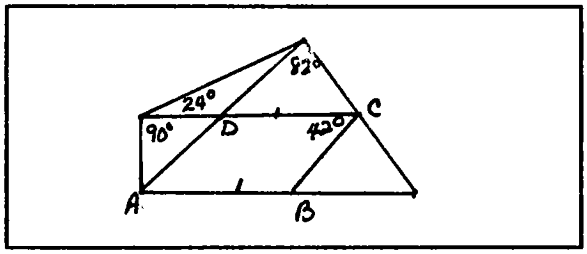
Datos: El ▱GHKM es un paralelogramo y $\overline{MQ} \cong \overline{HP}$. Demostrar que $\overline{GK}$ y $\overline{PQ}$ se biseca.

TAREA 6



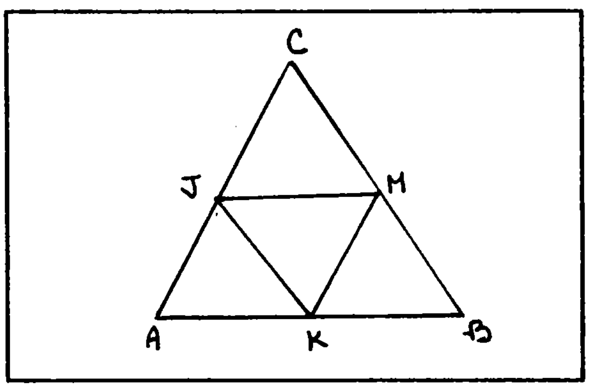
En la figura, el ▱DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \cong \overline{CF}$. Demostrar que ABCD es un paralelogramo.

TAREA 7.



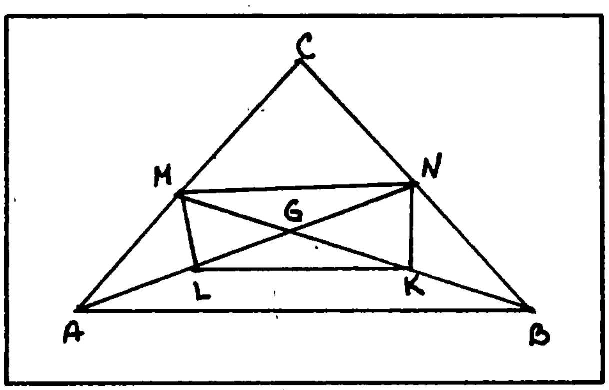
En la figura de la izquierda, determinar la medida de cada ángulo sin usar transportador.

TAREA 8.



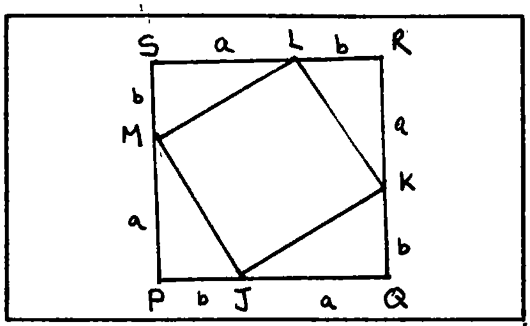
En la figura AKMJ y el BMJK son paralelogramo. Demostrar que si $\overline{KJ} \cong \overline{KM}$ entonces ΔABC es isósceles.

TAREA 9



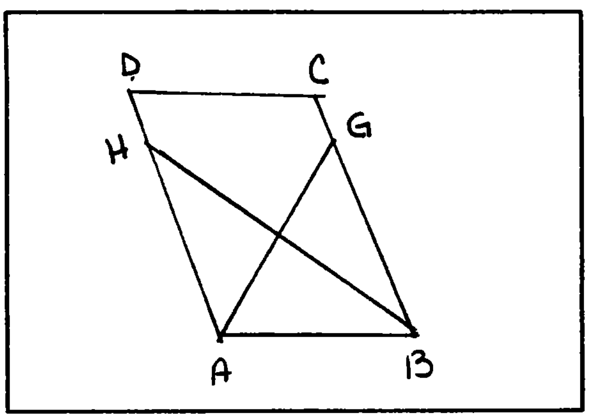
Se tiene el ΔACB, $\overline{BM}$ y $\overline{AN}$ son medianas que se intersectan en G. K es el punto medio de $\overline{BG}$ y L el punto medio de $\overline{AG}$. Demostrar que KLMN es un paralelogramo.

TAREA 10



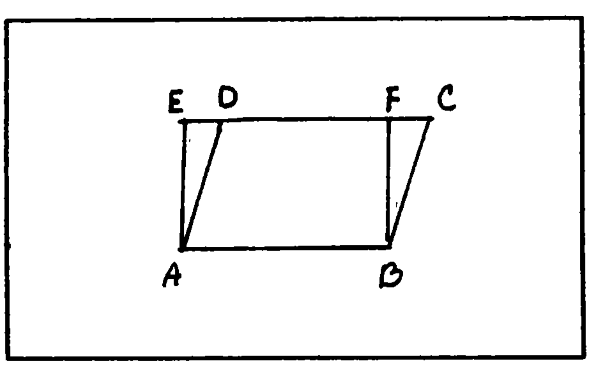
Datos: El ▱ PQRS es un cuadrado. Los puntos J,K,L,M dividen a los lados en segmentos de longitud a y b. Demostrar que JKLM es un cuadrado.

TAREA 11



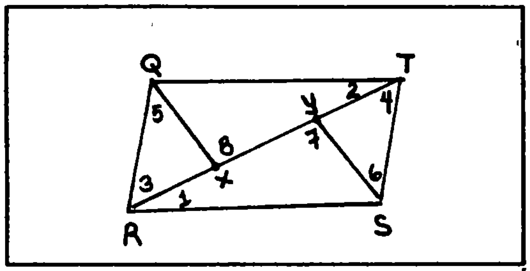
Se da el ▱ABCD, con $\overline{AD} > \overline{AB}$. La bisectriz del <A intersecta a BC en G, y la bisectriz del <B intersecta a $\overline{AD}$ en H. Demostrar que el ▱ ABGH es un rombo.

TAREA 12



ABCD es un paralelogramo. $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BF} \perp \overline{DC}$. Prueba $\overline{AE} \cong \overline{BF}$. Además puedes decir que tipo de paralelogramo es ABFE.

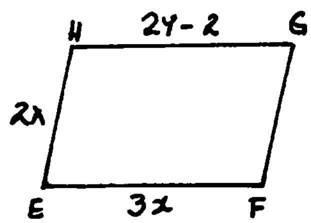
TAREA 13



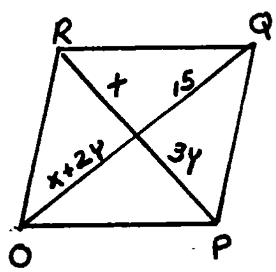
Dado $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$; $\overline{ST} \cong \overline{QR}$ con el $\angle 7 \cong \angle 8$. Demostrar que $\overline{QX} \cong \overline{SY}$. Sugerencia demuestra $\Delta RST \cong \Delta TQR$, luego demostrar $\Delta RSY \cong \Delta TQX$

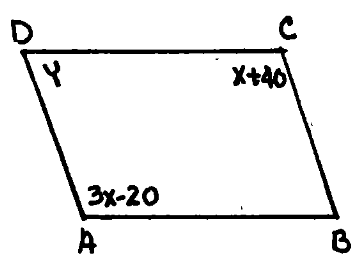
TAREA 14.

Encuentra los valores de x e y en los siguientes paralelogramos.



Perímetro de ▱EFGH es 40





CONCLUSIONES

1. El modelo de Van Hiele es una interacción entre didáctica y psicología, ya que provee recursos para desarrollar la madurez geométrica de los estudiantes.

   Tiene interacción didáctica, porque el profesor es quien provee las experiencias, los materiales y los métodos de enseñanza más adecuados, con el fin de lograr el crecimiento y desarrollo de los estudiantes a través de los niveles.

   Tiene interacción psicológica, porque el estudiante con ayuda de las actividades diseñadas en las diferentes fases, explora y construye el concepto que se desea. Además, el modelo postula la existencia de cinco niveles de razonamiento geométrico, por lo que debemos estar claro que el aumento en la edad cronólogica de un estudiante no produce un aumento en el nivel de razonamiento geométrico propuestos por los Van Hiele.

2. El modelo de Van Hiele presenta dos visiones en cuanto al área de la matemática. Los estudiantes que se encuentran en los niveles 1, 2 y 3 presentan una visión local de la matemática. Los estudiantes situados en los niveles 4 y 5, poseen una visión globalizadora de la matemática.

3. Se debe estar consciente que al aplicar el modelo el paso de un nivel a otro se produce lentamente. Lo más importante es que dependerá de la metodología, el contenido, los materiales y el vocabulario que son elementos importantes en el modelo.

4. El valor del modelo de Van Hiele no sólo está en presentar diferentes tipos de razonamiento geométrico que se encuentran en los estudiantes, ni tampoco en las fases de aprendizaje, sino que lo importante radica en el diseño de un tema y de como puede ser interpretado a través del modelo, teniendo claro el objeto de estudio y las metas a las que se quiere llegar.

RECOMENDACIONES

1. Divulgar el modelo de Van Hiele a los profesores de matemática a nivel primario y secundario.

2. Utilizar el modelo de Van Hiele en el diseño de unidades de enseñanza en temas de geometría.

3. Implementar la propuesta de "Las propiedades de los paralelogramos" a un grupo piloto y comparar los resultados con un grupo tradicional.

4. Formar un grupo de profesores de matemática que estén anuentes a participar en investigaciones, con respecto al modelo de Van Hiele, en la elaboración de un test que pueda medir el nivel de razonamiento geométrico de un estudiante.

5. Llevar a cabo una revisión curricular de los contenidos de geometría en los diferentes niveles de escolaridad, y una revisión de los textos que se utilizan para conocer a qué nivel de razonamiento están dirigido y si promueven el paso de un nivel a otro.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Adda, Josette (1987). **Elementos de la Didáctica de la Matemática.** Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN, México.

Baldor, Aurelio (1986). **Geometría.** Ediciones y Distribuciones Códice, S. A. Madrid, España.

Barnet, Rich (1993). **Geometría.** Segunda Edición. McGraw-Hill. México

Beitía, Germán (1991). **Enfoque de la Geometría Euclideana para Segundo Año con Laboratorio.** Trabajo de graduación. Universidad de Panamá, Panamá.

Cheng C, Isidro (1990). **Situación de la Enseñanza Geométrica en el Nivel Medio: Necesidad de la Reestructuración de los Contenidos Programáticos.** Tésis de Maestría. Universidad de Panamá, Panamá.

Crowley M. (1987). **The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. Learning and Teaching Geometry,** K-12, N.C.T.M, pp.1-16. Estados Unidos.

De la Vega, María Luz (1980). **La Geometría en el Aprendizaje de la Matemática.** Departamento de Matemática I.E.P.S. Narcea, S.A de Ediciones. pp. 15-28. Madrid, España.

Donovan A. Johnson y Wenninger, Magnus J. (1975). **Matemáticas más Fáciles con Manualidades de Papel.** Ediciones Distein, pp. 9-21. España.

Dudnov (1973). **Errores en la Demostración Geométrica.** Editorial Limusa. México.

Flores, Alfino (1992). La Feria de Pitágoras (I parte). **Revista Educación Matemática.** Vol.4 N° 1, Abril Editorial Iberoamerica. pp. 66-83. México.

Flores, Alfino (1992). La Feria de Pitágoras (II parte). **Revista Educación Matemática.** Vol.4 N° 2, Agosto Editorial Iberoamerica. pp. 81-89. México.

Fuys, David J. (1984). **Van Hiele Levels of Thinking of Sixth Graders.** PME-NA. pp. 113-119. Estados Unidos.

Gutiérrez, Angel y Jaime, Adela (1987). Estudio de las características de los niveles de Van Hiele. **Proceeding of PME-XI**, Vol° 3. pp. 131-137. Montreal, Canadá.

Gutiérrez Angel y Adela Jaime (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele Model. **Proceeding of the 13rd International Meeting of the PME.** Vol. 2. pp.131-138. Canadá.

Gutiérrez Angel (1990). Investigaciones actuales sobre el aprendizaje de la Geometría. **Cuaderno de Investigación.** N° 14 Año IV, Abril. pp. 81-99. México.

Gutiérrez Angel y Adela Jaime (1991). El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. **Revista Educación Matemática** . Vol. 3 N° 2. Agosto. Editorial Iberoamericana. pp. 49-65. México.

Herderson, Kenneth; Pingry, Robert,; Robinson, George (1968). **Modern Geometry: Structure and Funtion.** McGraw-Hill. Estados Unidos.

Hoffer, Alan (1981). Geometry is more than proof. **Mathematics Teacher**, Vol. N° 74. pp 11-18. Estados Unidos.

Hoffer, Alan (1983). Van Hiele-based Research. **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**, R. Lesh and M. Landau (Eds). New York : Academic Press. Cap.7. pp. 205-227. Estados Unidos.

Jurgensen, Ray; Donnelly, Alfred y Dolciani, Mary (1985). **Geometría Moderna**. Publicaciones Cultural S.A de C.V. México.

Lanverde, Felipe de Jesús (1990). **Curso de Geometría**. Sexta edición. Editorial Progreso, S.A. México.

Limardo R., Noemí (1989). Niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele y sus implicaciones para la enseñanza. **Revista Arista** 2, Marzo. pp. 8-26. Puerto Rico.

Moise, Edwin y Downs, Floys (1972). **Matemática IV: Geometría**. Editorial Norma. Fondo Educativo Interamericano S.A. Calí, Colombia.

Montanari, María Rosa (1993). **Estudio Descriptivo Acerca de la Edad en la que el Adolescente Panameño Accede al Pensamiento Lógico Formal**. Ministerio de Educación. Panamá.

Morales S, María Lesbia (1992). **Elementos Teóricos-metodológicos en el Diseño de una Estrategia Didáctica para la Enseñanza-aprendizaje de la Geometría en el Bachillerato.** Tésis de Maestría. CINVESTAV. I.P.N. México .

Murillo, Mayra y González, Luis (1990). **Alternativas Metodológicas para la Enseñanza de la Geometría en IV grado.** Trabajo de graduación. Universidad de Panamá, Panamá.

Murillo, Mayra (1992). Enseñanza-aprendizaje de la Geometría por medio del modelo de los Van Hiele. **Memorias del Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa.** pp. 88-93. Universidad de Panamá, Panamá.

Orton, Anthony (1990). **Didáctica de la Matemática.** Ediciones Morata, S.A. Madrid, España.

Rodríguez A., Rosa (1989). Niveles de Madurez Matemática en el Estudio de la Geometría. **Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores E Investigación en Matemática Educativa.** pp. 180-185. San José, Costa Rica.

Samudio, Matilde y Maturel (1992). **Encuentro de Investigadores Piagetianos Panameños .** Memorias del IX Congreso Científico Nacional. Universidad de Panamá, Panamá.

Selby, Peter H. (1992). **Geometría y Trigonometría.** Editorial Limusa S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores. México.

Senk, Sharon L. (1985). How well do students write geometry proof ?. **Mathematics Teacher**, Vol. 78. pp. 448-456. Estados Unidos.

Senk, Sharon L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal Research in Mathematics Education.** Vol 20, N° 3. pp. 309-321. Estados Unidos.

Shardakov M.N. (1987). **Desarrollo del Pensamiento en el Escolar**. Editorial Grijalbo. México

Shaughnessy, M ; Burger W,; Gutiérrez y otros (1987). **Analyzing and Describing Student's Thinking in Geometry: Continuity in the Van Hiele levels"**. pp. 183-186. Estados Unidos.

Torrez, J. y Carmona, R. (1992). Repores de avance de Investigación. **Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa**. Vol 1, pp. 171-176. México.

University of Illinois (1960). **Unidad 6. Geometry.** Max Beberman, Director. Herbert E. Vaughan, Editor. Estados Unidos.