UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS HOMOLÓGICAS

ALBIN LEONEL MORENO ALVARADO

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

ASESOR: JOSUE ORTIZ

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2005

APROBADO POR:

M.Sc. JOSUE ORTIZ
PRESIDENTE

Dr. JORGE HERNANDEZ
MIEMBRO

MSc. SIMÓN VÁSQUEZ
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 21 de abril de 2006

DEDICATORIA

A mis padres Jorge (q.e.p.d.) y Elsa con mucho amor

A mi esposa Ely, soporte inquebrantable en el quehacer diario.

A mis hijos Taryn, Thais, Albin y Johany Michell por ser fuente inagotable de inspiración y motivación.

Agradecimiento

A Dios Todopoderoso, luz que alumbra por siempre

Al profesor Josué Ortiz mi más sincero deseo de prosperidad por su apoyo incondicional y su magnifica asesoría en el desarrollo del presente trabajo.

A mi sobrino Mario Hugo por la dedicación constante al escribir el original de este trabajo y a todas aquellas personas que de una u otra forma han contribuido para la culminación exitosa de este trabajo

El Autor

INDICE

CAPITULO II

El funtor Hom

CAPITULO III

Un Funtor Derivado

Resumen

En este trabajo estudiamos los conceptos fundamentales del lenguaje de funtores tales como módulos, sucesiones exactas, categorías y bifuntores; los cuales son necesarios para el desarrollo del Algebra Homológica.

En particular, estudiamos el funtor Hom y la teoría de $\mathbb{Z}$-módulo (proyectivos e inyectivos). De capital importancia resultan ser los conceptos de cubrimiento inyectivos y extensiones esenciales de módulos.

Otro tópico importante con el que trabajamos la contituyen la sucesión núcleo-conucleo, la cual es vital para el estudio de diagramas conmutativos y los teoremas relacionados con ellos.

Finalmente, se considera la construcción de funtor $Ext_{\wedge}^{1}$ y sus principales propiedades conjuntamente con los conceptos de dimensión inyectiva y proyectiva para módulos.

Abstract

In this work we study the fundamental concepts about the language of functors such as modules, exact sequences, category and bifunctors, which are necessary for the development of homological Algebras.

In particular we study the Hom funtor and the theory of $\mathbb{Z}$-modules (injectives and projectives $\mathbb{Z}$-modules). At this point it turns out to be very important the ideas of injectives envelopes and essential extensions.

Another important topic we deal with is the construction of the ker – co – ker sequence; which is vital for studying commutative diagrams and related theorems.

Finally we consider the construction of the $Ext_{\wedge}^{1}$ functor and its main properties together with the ideas of injective and projective dimension of modulos.

Introducción

Es impresionante observar el papel que han jugado los métodos algebraicos en el desarrollo de la matemática en las últimas décadas del pasado siglo XX, muy en particular la pertinencia del Algebra en el campo de la Topología Algebraica y la Geometría Algebraica.

El estudio de las Álgebras Homológicas, en este trabajo de investigación, nos permite incursionar de manera específica en el desarrollo del álgebra en si misma como un campo de estudio muy particular dentro del mundo de la matemática.

El trabajo será desarrollado en tres capítulos, tal como se describe a continuación:

El primer capítulo hace referencia a los conceptos fundamentales del álgebra, enfatizándose lo conceptos de módulos, sucesiones exactas, categorías y funtores.

En el segundo capítulo estudiamos de manera especial el funtor Hom y los módulos proyectivos e inyectivos. También se consideran las extensiones esenciales, los cubrimientos inyectivos y los monomorfismos esenciales.

El tercer capítulo constituye la parte medular de nuestro trabajo. En el mismo estudiamos un funtor especial llamado el funtor $Ext^1_{\wedge}$ y se construye la sucesión núcleo – conucleo.

Finalmente, se estudian las propiedades del funtor $Ext^1_{\wedge}$ y se introducen los conceptos de dimensión inyectiva y dimensión proyectiva.

Capitulo I

Estructura de Módulos, Bimódulos, Categorías y Funtores

1. Estructura de Módulos, bimódulos, categorías y funtores.

1.1 Módulos

Definición: Sea $\wedge$ un anillo cualquiera. Un conjunto no vacío A se dice que es un $\wedge$ -Módulo (o un módulo sobre c) si A es un grupo abeliano bajo una operación +, tal que para cada $r \in \wedge$ y $m \in \wedge$ existe un elemento r.m en A de tal modo que se verifican las siguientes propiedades:

a) r(a+b)=ra+rb

b) r(sa)=(rs)a

c) (r+s)a=ra+sa

Para cualquiera $a, b \in A$ y $r, s \in \wedge$.

Observación: Si $\wedge$ tiene un elemento unitario 1 y si 1.m=m $\forall\, m \in A$, entonces, a A lo llamaremos un $\wedge$ -Módulo unitario.

Ejemplo 1.1: Todo grupo abeliano A es un módulo sobre el anillo de los enteros.

Ejemplo 1.2: si A={o}, entonces A admite una (única) estructura de $\wedge$ -Módulos, cualquiera que sea el anillo $\wedge$.

Denotaremos dicha estructura por O

Ejemplo 1.3: Sea $\wedge$ un anillo. El producto de anillo en $\wedge$. $(r,x) \rightarrow r.x$

determina sobre $\wedge$ una estructura de $\wedge$ -Módulo. Es decir que todo anillo $\wedge$ es un módulo sobre si mismo.

1.2 Sub-Módulo

Definición: Un sub grupo aditivo A del $\wedge$-Módulo M se llama sub-módulo de M si siempre que $r \in \wedge$ y $a \in A$, entonces $r.a \in A$.

Ejemplo 1.4: Si A es un módulo, entonces {o} y A son sub-módulos de A.

Ejemplo 1.5: Sea A un $\wedge$-módulo y sea $a \in A$. Entonces $\wedge a = \{r.a / r \in \wedge\}$ es un sub-módulo de A, que denotaremos también por $\wedge.a = \langle a \rangle$ y que denominaremos el submódulo cíclico de A generando por a. Más generalmente, si $\{a_1,\ldots,a_n\}$es un conjunto finito de elemento de A, el conjunto A de todas las "combinaciones lineales"

$$\sum_{x=1}^{n} r_i a_i \qquad r_i \in \wedge$$

Constituye un sub-módulo de A, que denominamos el sub-módulo de A generando por $a_1,\ldots,a_n$ y denotamos por $\langle a_1,\ldots,a_n \rangle$

1.3 Homomorfismo y $Hom_{\wedge}$ (A,B)

Definición: Sea $\wedge$ un anillo con identidad $1 \neq 0$. Sean A y B, $\wedge$-módulos a la izquierda. Sea $f{:}A \to B$ una aplicación de A en B.

Se dice que f es un homomorfismo de Módulos, si $\forall x,y,a \in A$, $r \in \wedge$ se cumplen las siguientes propiedades:

a.) f es un Homomorfismo de grupo: f(x+y)=f(x)+f(y), es decir f es aditiva

b.) f es homogénea, esto es: f(r.a)=r.f(a)

Notación:

* $Hom_{\wedge}$ (A,B) representa la totalidad de los homomorfismos de $\wedge$-módulos de A en B.

Observaciones: * Se dice que un hom omorfismo f formado entre los módulo A y B es:

- Monomorfismo, si f es inyectiva
- Epimorfismo, si f es sobreyecti va
- Endomorfismo, si A=B
- Isomorfismo, si f es monomo rfismo y epimorfismo
- Automorfismo, si f es una iso morfismo y A=B

1.4 Módulo cociente

Definición: Sea M un $\wedge$-módulo y A un sub-módulo. Sea $\sim$ la relación de equivalencia inducida por A; por M/ $\sim$, o también por M/A, denotaremos el conjunto cociente de M por $\sim$. Sea θ:M$\rightarrow$ M/A la aplicación canónica.

Existe sobre M/A una única estructura de $\wedge$-módulos a la izquierda que hacen de θ un homomorfismo de $\wedge$-módulos, el cual es suryectivo.

Observación:

Los módulos cíclicos se identifican con los módulos cocientes $\wedge$/I por un ideal a la izquierda I de $\wedge$.

1.5 Bimódulos

Definición: Supongamos que A es un $\wedge$- módulo y un $\wedge'$- módulo, la estructura aditiva se presenta en ambos casos. Si la multiplicación (de un elemento de A) por un elemento de $\wedge$ siempre conmutan con un elemento de $\wedge'$, podemos decir, entonces que A es un ($\wedge$, $\wedge'$) Bimódulo.

Ejemplo 1.6: Cada $\wedge$ -módulo es un ($\wedge$, $\mathbb{Z}$)-bimódulo.

1.6 Sucesiones exactas

Definición: Sea A, B y C $\wedge$ – módulos y sea $f:A \to B$ y $g:B \to C$ $\wedge$ -homomorfismos. Se dice que la sucesión de módulos y homomorfismos:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta (o exac ta en B), si Ker g= Imf. Es decir $\forall a \in B$, $g(a)=0$ Sii existe $a' \in A$ tal que $a=f(a')$.

Ejemplo 1.7: Sea A un $\wedge$ –módulo, indiquemos con $0 \to A$ el único homomorfismo del $\wedge$ -Módulo 0 en A. Entonces la suc esión de módulos y homomorfismo $0 \to A \xrightarrow{f} C$ es exacta. Si y solo si f es un monomorfismo.

Ejemplo 1.8: La sucesión de módulos y homomorfismos $0 \to A \xrightarrow{f} C \to 0$ es exacta sí y solo si f es un isomorfismo.

Ejemplo 1.9: Sean M un $\wedge$ módulo y A un sub-módulo de M, entonces l a sucesión $0 \to A \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\theta} M/A \to 0$ (donde t es la inclusión y θ es el epimorfismo canónico, es exacta.

Teorema 1.1

Sea (C): $0 \to C' \xrightarrow{s} C \xrightarrow{t} C'' \to 0$ una sucesión exacta de Λ-módulos. Sea M un Λ-Módulo. Entonces la sucesión

$0 \to Hom_{\Lambda}(C'',M) \xrightarrow{t^*} Hom_{\Lambda}(C,M) \xrightarrow{s^*} Hom_{\Lambda}(C',M) \to 0$ es exacta.

Prueba

t^* es un monomorfismo: en efecto, sea $g \in Hom_{\Lambda}(C'',M)$, tal que $t^*(g)=0$; Esto equivale a decir que el morfismo $C \xrightarrow{t} C'' \xrightarrow{g} M$ es trivial. Siendo t un epimorfismo, entonces g debe ser cero.

Ahora debemos probar que:

$Im(t^*)=Ker(s^*)$

Veamos la condición necesaria

a) $Im(t^*) \subset Ker(s^*)$

En efecto, como $0=t.s$ implica que $0=s^*.t^*$ que demuestra que $Im(t^*) \subset Ker(s^*)$

b) $Ker(s^*) \subset Im(t^*)$ sea $g \in Hom_{\Lambda}(C,M)$ tal que $s^*(g)=0$. Esto equivale a decir que el homomorfismo $C' \xrightarrow{s} C \xrightarrow{t} M$ es 0 ahora. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & C'' \\ & M & \end{tikzcd}$$

g.s=0 implica que Ker(t)=Im(s)$\subset$Ker(g) con lo que existe un único homomorfismo $g'':C''\rightarrow M$ tal que $g''.t=g$

Pero $g''.t$ no es otra cosa que $t^*(g'')$, esto demuestra que si $s^*(g)=0$, entonces $g=t^*(g'')$ con $g''\in$ $Hom_\wedge$ (C''M), lo que finalmente prueba la otra inclusión, esto es Ker(s*) $\subset$ Im(t*) y así la sucesión es exacta.

1.7 Categorías

Definición: Una categoría $\mathbb{C}$ consiste en una colección de objetos abstractos (espacios vectoriales, grupos, etc.) que denotaremos por A, llamados los objetos de la categoría, tal que para dos objetos A,B $\in$ $\mathbb{C}$ existe una aplicación de A en B llamada morfismo.

En el caso de la Categoría de espacios vectoriales los morfismos son precisamente las aplicaciones lineales y para los grupos estos se corresponden con los homomorfismos de grupos.

Esta clase de objetos con sus correspondientes morfimos debe cumplir con los siguientes axiomas.

1. El producto triple $\varnothing_3(\varnothing_2\,\varnothing_1)$ está definida si y solo si $(\varnothing_3\,\varnothing_2)\varnothing_1$ está definido, en cuyo caso la ley asociativa se verifica, por lo cual simplemente escribimos $\varnothing_3\,\varnothing_2\,\varnothing_1$.
2. El producto triple $\varnothing_3\,\varnothing_2\,\varnothing_1$ está definido cada vez que ambos $\varnothing_3\,\varnothing_2$ y $\varnothing_2\,\varnothing_1$ están definidos.

3. Para un morfismo $\varnothing \in \mathbb{C}$ existe por lo menos una identidad $e_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\varnothing e_1$ está definida y al menos una identidad $e_2 \in \mathbb{C}$ tal que $e_2\varnothing$ está definida.
4. El morfismo e_A correspondiente a cada objeto A de $\mathbb{C}$ es una identidad.
5. Para cada identidad e de $\mathbb{C}$ existe un único objeto A de $\mathbb{C}$ tal que e_A=e

Observación *: Un Morfismo $e \in \mathbb{C}$ se llamará una identidad de $\mathbb{C}$ si y sólo si la existencia de cualquier producto $e\varnothing$ 0 βe implica que $\propto \varnothing = \varnothing$ o $\beta e = \beta$.

Observación **: Una categoría $\mathbb{C}$ es lineal si y solo si cada A, $B \in \mathbb{C}$ es un grupo aditivo y cumple las leyes distributivas

1. $(\Psi_1 + \Psi_2)\varnothing = \Psi_1 \varnothing + \Psi_2 \varnothing$
2. $\Psi(\varnothing_1 + \varnothing_2) = \Psi \varnothing_1 + \Psi \varnothing_2$

Ejemplo 1.10: En las categorías lineales los objetos son los $\wedge$-módulos; y los morfismos son los homomorfismos de $\wedge$-módulos.

1.8 Funtor

Definición: Sea $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}'$ dos categorías.

Un funtor es toda aplicación T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ tal que: si A y B son objetos de $\mathbb{C}$ y F: $A \to B$ es un morfismo en $\mathbb{C}$, entonces se tienen sendos objetos T(A) y T(B), así como un morfismo $T(f):T(A) \to T(B)$ en $\mathbb{C}'$.

1.9 Funtor Covariante

Definición: Sea $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}'$ dos categorías. Un funtor covariante T (de una variable) de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}'$ es una función que asocia a cada objeto $A \in \mathbb{C}$ un objeto $B \in \mathbb{C}'$ y cada morfismo $\varnothing : A \to B$ un morfismo $T(\varnothing) : T(A) \to T(B)$; tal que: $T(e_A) = e_{T(A)}$ y $T(\Psi\varnothing) = T(\Psi)T(\varnothing)$ siempre que $\Psi : B \to C$ y por ello $T(\Psi) : T(B) \to T(C)$.

Observación: F se dice "aditiva" si siempre que f_1 $A \to A'$ y f_2 $A \to A'$ son $\wedge$-homomorfismos, tienen un dominio común A y un codominio común A', tenemos que $F(f_1+f_2)=F(f_1)+F(f_2)$.

Lema 1.1

Supongamos que $A_1 \xrightarrow{\sigma_1} A$ y $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ son $\wedge$-homomorfismos tal que $\pi_1\sigma_1$=identidad. Entonces $A = \operatorname{Im}\sigma_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi_1$.

Prueba:

Sea $a \in A$. Entonces $\pi_1(a - \sigma_1\pi_1(a)) = 0$ y por consiguiente,

$$a = \sigma_1\pi_1(a) + (a - \sigma_1\pi_1(a)) \in \operatorname{Im}\sigma_1 + \operatorname{Ker}\pi_1.$$

Ahora supongamos que $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma_1 \cap \operatorname{Ker}\pi_1$, diremos que $\alpha = \sigma_1(a_1)$ con $a_1 \in A_1$. Entonces $a_1 = \pi_1\sigma_1(a_1) = \pi_1(\alpha) = 0$, por lo tanto $\alpha = 0$.

Asi $A = \operatorname{Im}\sigma_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi_1$

Notación: El símbolo $[\sigma_1,...,\sigma_n;A;\pi_1,...,\pi_n]=A_1*A_2*...*A_n$ significa que $\sigma_i:A_i\to A$ es un monomorfismo y $\pi_i:A\to A_i$ es un epimorfismo. A esta igualdad la llamaremos descomposición canónica de A.

Teorema 1.2

Sea $0\to A_1\xrightarrow{\sigma_1}A\xrightarrow{\pi_2}A_2\to 0$ una sucesión exacta en $\mathbb{C}_\wedge$.

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. **Im** σ_1=Ker(π_2) es un sumando directo de A;
2. **Existe un** $\wedge$ -homomorfismos π_1 :$A\to A_1$, tal que $\pi_1\,\sigma_1$=identidad;
3. **Existe un** $\wedge$ -homomorfismos σ_2 :$A_2\to A$ tal que $\pi_2\,\sigma_2$=identidad.
4. Existe un $\wedge$ -homomorfismos $\sigma_2:A_2\to A$ y π_1:$A\to A_1$ tal que:

   $[\sigma_1,\sigma_2;A;\pi_1,\pi_2]=A_1*A_2$.

Prueba: Por la observación anterior y el lema (1.1)

(4) $\Rightarrow$(2) $\Rightarrow$(1) y (4) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(1)

Asumamos (1)

Podemos decir que A=Im$\sigma_1\oplus$B para algún submódulo B de A.

Ahora σ_1 induce un isomorfismo $A_1\xrightarrow{\sim}\text{Im}\,\sigma_1$.

Sea U:Im$\sigma_1\xrightarrow{\sim}A_1$ su inverso.

Luego π_2 induce un isomorfismo $B\xrightarrow{\sim}A_2$.

Sea $V:A_2 \xrightarrow{\sim} B$ su inverso.

Hagamos π_1=Up y σ_2=jv, donde $A \rightarrow \mathrm{Im}\,\sigma_1$ es la proyección asociada con la relación $A=\mathrm{Im}\,\sigma_1 \oplus B$ y $j:B \rightarrow A$ es la aplicación inclusiva.

Entonces $\pi_1\,\sigma_1$=identidad, y $\pi_1\,\sigma_2=0$, $\pi_2.\sigma_1=0$, $\pi_2\,\sigma_1=0$, $\pi_2\,\sigma_2$=identidad

Finalmente, si $A \in A$, entonces $\sigma_1\,\pi_1(a)$ es la projección de a sobre $\mathrm{Im}\,\sigma_1$ y $\sigma_2\,\pi_2(a)$ es la proyeccion de a en B.

Asi $\sigma_1\,\pi_1(a)+\sigma_2\,\pi_2(a)=a$ o $\sigma_1\,\pi_1+\sigma_2\,\pi_2$=identidad,

por consiguiente (1) implica (4).

1.10 Sucesión exacta separante

Sea $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\sigma_1} A \xrightarrow{\pi_2} A_2 \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathbb{C}_\wedge$.

Si las 4 condiciones equivalentes del teorema anterior se cumplen, entonces esta es llamada una sucesión exacta separante.

1.11 Funtor contravariante:

Definición: Un funtor contravariante T de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}'$ es una función que asocia, a cada objeto A de $\mathbb{C}$ un objeto $T(A) \in \mathbb{C}'$ y a cada morfismo $\varnothing:A \rightarrow B$ un morfismo $T(\varnothing):T(B) \rightarrow T(A)$ tal que $T(e_A)=e_{T(A)}$ y $T(\Psi\,\varnothing)=T(\varnothing)T(\Psi)$.

Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d, "\propto"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "\Psi"] & D
\end{tikzcd}$$

Surge otro diagrama conmutativo. Si T es covariante, el diagrama resultante es:

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(\varnothing)"] \arrow[d, "T(\propto)"] & T(B) \arrow[d, "T(\beta)"] \\
C \arrow[r, "T(\Psi)"'] & D
\end{tikzcd}$$

Puesto que $T(\beta)\,T(\varnothing)=T(\beta\ \varnothing)=T(\Psi\ \propto)=T(\Psi)T(\propto)$

En el diagrama conmutativo. Si T es contravariante, la imagen del diagrama es:

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(\varnothing)"] \arrow[d, "T(\propto)"] & T(B) \arrow[d, "T(\beta)"] \\
T(C) \arrow[r, "T(\varnothing)"'] & T(D)
\end{tikzcd}$$

Puesto que $T(\varnothing)\,T(\beta)=T(\beta\ \varnothing)=T(\Psi\ \propto)=T(\propto)T(\Psi)$

Este diagrama es además conmutati vo

1.12 **Funtor Aditivo**

Definición:

Si $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}'$ son categorías lineales, entonces un funtor T de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}'$ es llamado aditivo si y solamente si $T(\varnothing+\Psi)=T(\varnothing)+T(\Psi)$, para $\varnothing$, $\Psi \in \mathbb{C}_{(A,B)}$.

Observación: En la teoría clásica de Módulos la suma directa finita y los productos directos finitos son indistinguibles.

Propiedad 1

Sea $0 \to A_1 \xrightarrow{\sigma_1} A \xrightarrow{\pi_1} A_2 \to 0$ es una sucesión exacta separante en $\mathbb{C}_\wedge$ y sea G: $\mathbb{C}_\wedge \to \mathbb{C}_\wedge$ un funtor aditivo contra variante, entonces

$0 \to G(A_2) \xrightarrow{G(\pi_2)} G(A) \xrightarrow{G(\sigma_1)} G(A_1) \to 0$ es también una sucesión exacta.

Teorema 1.3:

Sea T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ un funtor covariante exacto, entonces T preserva la imagen y el núcleo.

Prueba:

Sea f:$A \to B$ un homomorfismo. Entonces surgen de manera natural el epimorfismo $A \to \mathrm{Im}\, f$ y el monomorfismo $\mathrm{Im}\, f \to B$.

Luego $T(f)$ se obtiene por combinación del epimorfismo $T(A) \to T(\mathrm{Im} f)$ con el monomorfismo $T(\mathrm{Im} f) \to T(B)$.

Ahora

ImT(f) es justo T(Imf) considerado como un submodulo de T(B). Podemos, por lo tanto escribir simbólicamente ImT(f)=T(Im f)

Seguidamente, como

Kerf $\rightarrow$A $\rightarrow$B es exacto, así también si t(Kerf) $\rightarrow$T(A) $\rightarrow$T(B) y

Además, T(Ker f) $\rightarrow$T(A) es inyectivo,

Por consiguiente

Ker T(f)=T(Ker f)

Teorema 1.4:

Sea V:A$\rightarrow$A′ un Λ-homomorfismo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1.) V es suryectiva

2.) $g_1V=g_2V$ (para Λ-homomorfismo g_1, g_2) siempre implica $g_1=g_2$

Prueba:

(1) $\Rightarrow$(2)

Sea g_1, g_2:A′$\rightarrow$B son Λ-homomorfismo tal que $g_1v=g_2v$. tal que $g_1v=g_2v$. Para todo $a'\in A'$ existe $a\in A$ tal que v(a)=a′; por consiguiente

$g_1(a')=g_1v(a)=g_2v(a)=g_2(a')$

Por lo tanto

$$g_1=g_2$$

(2) $\Rightarrow$(1)

supongamos que v es suryectivo. Entonces existe $a' \in A'$ tal que $a' \notin \mathrm{Im}\, v$.

Definamos $g_i:A' \to A'/\mathrm{Im}v (i=1,2)$ por

$g_1=0$ y g_2 es el epimorfismo natural. Entonces $g_1(a')=0$, $g_2(a')\neq 0$ lo que muestra que $g_1 \neq g_2$; pero $g_1v=0=g_2v$, lo que contradice a (2)

Teorema 1.5:

Sea $\mu:A\to A'$ un $\wedge$-homomorfismo. Prueba que las siguientes condiciones son equivalentes.

1) $\mu(a_1) \neq \mu(a_2)$ siempre que a_1, a_2 son elementos distintos de A.
2) $\mu f_1=\mu f_2$ (para $\wedge$-homomorfismo f_1 y f_2) siempre implica $f_1=f_2$

Prueba

(1) $\Rightarrow$(2)

Sea f_1, $f_2:B\to A$ un $\wedge$-homomorfismo tal que $\mu f_1=\mu f_2$. Entonces, para todo $b\in B$,

$\mu(f_1(b))= \mu(f_2(b))$

y así, por (1)

$f_1(b)=f_2(b)$ y por lo tanto$f_1=f_2$

(2) $\Rightarrow$ (1) supongamos que tenemos Λ - módulos izquierdos.

Sea $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$, Para i=1,2

Definamos el Λ - homomorfismo f_i: $\Lambda \rightarrow A$

Por $f_i(\lambda)=\lambda a_i$, entonces

$f_1 \neq f_2$ y por consiguiente

Por (2), $\mu f_1 \neq \mu f_2$.

Como existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mu f_1(\lambda) \neq \mu f_2(\lambda)$

i.e $\lambda\ \mu(a_1) \neq \lambda\ \mu(a_2)$ se sigue que:

$\mu(a_1) \neq \mu(a_2)$

Teorema 1.6

Sea $\varnothing$:A$\rightarrow$B y ψ un Λ - homomorfismo.

Entonces $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varnothing} B \xrightarrow{\psi} C$ es exacta si y solo si las siguientes condiciones se cumplen.

a) $\psi\ \varnothing=0$

b) Siempre que exista es una Λ - homomorfismo

θ:X$\rightarrow$B tal que $\psi\ \theta=0$, entonces

$\theta=\varnothing f$ para un único Λ - homomorfismo f:X$\rightarrow$A.

(2) $\Rightarrow$ (1) supongamos que tenemos Λ - módulos izquierdos.

Sea $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$, Para i=1,2

Definamos el Λ- homomorfismo f_i: $\Lambda \rightarrow A$

Por $f_i(\lambda)=\lambda a_i$, entonces

$f_1 \neq f_2$ y por consiguiente

Por (2), $\mu f_1 \neq \mu f_2$.

Como existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mu f_1(\lambda) \neq \mu f_2(\lambda)$

i.e $\lambda\ \mu(a_1) \neq \lambda\ \mu(a_2)$ se sigue que:

$\mu(a_1) \neq \mu(a_2)$

Teorema 1.6

Sea $\varnothing$:$A \rightarrow B$ y ψ un Λ- homomorfismo.

Entonces $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varnothing} B \xrightarrow{\psi} C$ es exacta si y solo si las siguientes condiciones se cumplen.

a) $\psi\varnothing=0$

b) Siempre que exista es una Λ- homomorfismo

θ:$X \rightarrow B$ tal que $\psi\theta=0$, entonces

$\theta=\varnothing f$ para un único Λ- homomorfismo f:$X \rightarrow A$.

¿ $Im\phi = Ker\Psi$?

Sea $y \in B$ T.q. existe $x \in A$ con $y = \phi(x)$

Debemos verificar que $\Psi(y) = 0$.

En efecto, $\Psi(y) = \Psi(\phi_{(x)}) = (\Psi o \phi)_{(x)} = 0$ por la condición (a).

Luego $Im\phi \subset Ker\,\Psi$ ($\propto$)

Análogamente, si $y \in Ker\,\Psi \Rightarrow \Psi(y) = 0$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi", no head] & B \arrow[r, "\Psi", no head] & A \\
& \begin{matrix} y \in Ker\,\Psi \\ x \end{matrix} \arrow[ul, dotted, "\exists !f"] \arrow[u, dotted, "i=\theta"'] \arrow[ur, dotted, "Nula"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por la condición (b) tomando $X = Ker\,\psi$ y por θ la inclusión i, tendremos que:

$y = \theta(y) = i(y) = \varnothing(f(y))$ por la condición (b) para unica $f: Ker\psi \to A$

Luego basta tomar a $x = f(y) \in A$ para ver que $y = \varnothing(x)$ con $x \in A$, esto es:

$$y \in Im\,\varnothing$$

En conclusión

$Ker\psi \subset Im\,\varnothing$ $\qquad\qquad (\beta)$

De $\alpha y \beta$ se concluye la demostración.

Observación

Además de los funtores en una variable, existen funtores en varias variables. Tales funtores pueden ser covariantes en algunas de sus variables o contravariantes con respecto a otras de sus variables.

Consideraremos a continuación un funtor en dos variables, el cual será contravariante con respecto a la primera variable y covariante respecto a la segunda.

1.13 Bifuntor

Definición: Sean $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}'$ y $\mathbb{C}''$. Supongamos que a cada par de objeto A en $\mathbb{C}$ y B en $\mathbb{C}'$, esta asociado a un objeto T(A,B) en $\mathbb{C}''$ y supongamos que dados los morfismos $f:A'\rightarrow A$ en $\mathbb{C}$ y $g:B\rightarrow B'$ en $\mathbb{C}'$, le corresponde un morfismo T:

$T(f,g):T(A,B)\rightarrow T(A', B')$

Si ahora

1) $T(i_A, i_{B'})=i_{T(A,B')}$

2) $T(ff_1,g_1g)=T(f_1,g_1)T(f,g)$ siempre que

$A''\xrightarrow{f_1}A'\xrightarrow{f}A$ en $\mathbb{C}$ y

$B\xrightarrow{g}B'\xrightarrow{g_1}B''$ en $\mathbb{C}'$, entonces decimos que T es un bifuntor de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}'$ en $\mathbb{C}''$ el cual es Contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.

1.14 Equivalencias naturales

Definición: Sean T(A,B) y U (A,B) dos funtores definidos de $\mathbb{C}_{\wedge}$ x $\mathbb{C}_{\Gamma}$ en $\mathbb{C}_{\wedge}$, los cuales son contravariantes en A y covariantes en B. Si para cada módulo A en $\mathbb{C}_{\wedge}$ y cada modulo B en $\mathbb{C}_{\Gamma}$ está definido un Λ- homomorfismo $\eta_{AB}: T(A,B) \to U(A,B)$ definido de manera tal que cada vez que se consideren homomorfismos de módulos $A' \to A$ en $\mathbb{C}_{\wedge}$ y $B \to B'$ en $\mathbb{C}_{\Gamma}$, resulta conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} T(A,B) & \xrightarrow{\eta_{AB}} & U(A,B) \\ \downarrow{=T(f,g)} & & \downarrow{=U(f,g)} \\ T(A',B') & \xrightarrow[\eta_{A'B'}]{} & U(A',B') \end{array}$$

Bajo las condiciones descritas anteriormente diremos que los funtores T y U son naturalmente equivalentes y que la aplicación η_{AB} es una transformación natural o también una equivalencia natural.

Capitulo 2

El Funtor Hom

2.1 El Funtor Hom

Sean A y B dos Λ-módulos. Consideremos además los Λ-homomorfismos $U:A'\to A$ y $V:B\to B'$. Asociado a estos Λ-homomorfismos podemos definir la aplicación: $Hom_\Lambda(U,V)$: $Hom_\Lambda(A,B) \to Hom_\Lambda(A',B')$ requiriendo que para una f en $Hom_\Lambda(A,B)$ le demos por imagen el homomorfismo VfU en $Hom_\Lambda(A',B')$.

Es claro que el $Hom_\Lambda(U,V)$ es un homomorfismo de grupos abelianos y si U, V fueran las aplicaciones identidad, entonces $Hom_\Lambda(U,V)$ también sería una aplicación identidad.

Nuevamente, si se tienen aplicaciones $U':A''\to A'$ y $V':B'\to B''$ entonces $Hom_\Lambda(UU',V'V)= Hom_\Lambda(U',V')\,Hom_\Lambda(U,V)$.

En efecto, $Hom_\Lambda(A,B)$ es un bifuntor de $\mathbb{C}_\Lambda \mathrm{x} \mathbb{C}_\Lambda$ sobre la categoría de Λ-módulos (grupos abelianos aditivos), el cual es contravariante en la primera variable pero convariante en la segunda. Este es llamado el funtor Hom.

Observación:

Si u_1, $u_2:A'\to A$ y $v_1v_2:B\to B'$ entonces $Hom_\Lambda(u_1+u_2,B)= Hom_\Lambda(u_1,B)+ Hom_\Lambda(u_2,B)$ y $Hom_\Lambda(A,v_1+v_2)= Hom_\Lambda(A,v_1)+ Hom_\Lambda(A,v_2)$

bajo estas condiciones, el funtor Hom es aditivo.

Teorema 2.1

Supongamos que el funtor Hom es exacto a izquierda. Si $0\to A'\to A\to A''\to 0$ es exacta en $\mathbb{C}_\wedge$ entonces

$0\to Hom_\wedge(A'',B)\to Hom_\wedge(A,B)\to Hom_\wedge(A',B)$ es exacta $\forall\, B\in\mathbb{C}_\wedge$, y si además

$0\to B'\to B\to B''\to 0$ es exacta en $\mathbb{C}_\wedge$ entonces:

$0\to Hom_\wedge(A,B')\to Hom_\wedge(A,B)\to Hom_\wedge(A,B'')$ es exacta $\forall\, A\in\mathbb{C}_\wedge$

Prueba:

P.D. El Bifuntor $Hom_\wedge:\mathbb{C}_\wedge\times\mathbb{C}_\wedge\to\mathbb{C}_z$ es exacto a izquierda.

Sea $0\to B'\xrightarrow{\varnothing} B\xrightarrow{\psi} B''\to 0$ exacta en $\mathbb{C}_\wedge$ y $A\in\mathbb{C}_\wedge$

Supongamos que $f_1,f_2\in Hom_\wedge(A,B')$, tales que $Hom_\wedge(A,\varnothing)(f_1)= Hom_\wedge(A,\varnothing)(f_2)$.

Entonces

$\varnothing f_1=\varnothing f_2$. Por consiguiente como $\varnothing$ es un monomorfismo, $f_1=f_2$

Así $Hom_\wedge(A,\varnothing)$ es un monomorfismo.

Además,

$$\begin{aligned} Hom_\wedge(A,\Psi)\ Hom_\wedge(A,\varnothing) &= Hom_\wedge(A,\Psi\varnothing) \\ &= Hom_\wedge(A,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que $Hom_\wedge(A,-)$ es aditiva.

Por lo tanto $\mathrm{Im}\{Hom_\wedge(A,\varnothing)\}\subseteq \mathrm{Ker}\{Hom_\wedge(A,\Psi)\}$

Sea $f{:}A \to B$ elemento de Ker{ $Hom_{\wedge}$ (A,Ψ)} i,e

Supongamos que ψ f=0, entonces

$Imf \subseteq Ker\Psi = Im\phi$, pero ϕ es un mono morfismo. Se sigue que existe un

Λ homomorfismo g $A \to B'$ el cual forma el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B' \arrow[rr, "\phi"] & & B \end{tikzcd}$$

Conmutativo, i,e que satisface $Hom_{\wedge}(A,\varnothing)(g)=f$

Así Ker{ $Hom_{\wedge}(A,\Psi) \subseteq$ Im{ $Hom_{\wedge}(A,\varnothing)$}

Y tenemos que probar que:

$0 \to Hom_{\wedge}(A,B') \to Hom_{\wedge}(A,B) \to Hom_{\wedge}(A,B'')$es exacta

Sea $0 \to A' \xrightarrow{\sigma} A'' \xrightarrow{\pi} 0$ exacta en $\mathbb{C}_{\wedge}$y$B \in \mathbb{C}_{\wedge}$ ahora, si g_1, $g_2 \in Hom_{\wedge}(A'',B)$y son

tales que $Hom_{\wedge}(\pi,B)(g_1)= Hom_{\wedge}(\pi,B)(g_2)$

Entonces $g_1\pi=g_2\pi$ y, como π es epi morfismo, $g_1=g_2$. Por consiguiente.

$Hom_{\wedge}(\pi,B)$ es un monomorfismo.

Seguidamente

$Hom_{\wedge}(\sigma,B)\ Hom_{\wedge}(\pi,B)= Hom_{\wedge}(\pi\sigma,B)=0$

Porque $\pi\sigma = 0$

Así establecemos que:

$0 \to Hom_{\wedge}$ (A'',B) $\to Hom_{\wedge}$ (A,B) $\to Hom_{\wedge}$ (A',B) es exacta y se completa la prueba, si mostramos que:

Ker{ $Hom_{\wedge}$ (σ,B)} $\subseteq$ Im{ $Hom_{\wedge}$ (π,B)}

Sea f:A $\to$ B $\in$ Ker{ $Hom_{\wedge}$ (σ,B)}, i,e supongamos que $f\sigma=0$.

Entonces f(Ker π)=f(Im σ)=0 y por lo tanto existe un $\wedge$ homomorfismo g:A'' $\to$ B lo cual forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[dl, dashed, "g"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Un diagrama conmutativo, i.e el cual asegura que $Hom_{\wedge}(\pi,B)(g)=f$

Así Ker{ $Hom_{\wedge}$ (σ,B)} $\subseteq$ Im{ $Hom_{\wedge}$ (π,B)} lo que completa la prueba.

Ejemplo: 2.1

Sea el módulo $A \in \mathbb{C}_{\wedge}$. Como $\wedge$ es un ($\wedge$, $\wedge$)- bimódulo, $Hom_{\wedge}$ (A, $\wedge$) es un $\wedge$ - módulo del mismo tipo que A. De hecho tenemos un isomorfismo $Hom_{\wedge}(\wedge, A) \xrightarrow{\sim} A$ de $\wedge$ -Módulos en el cual f es proyectada en f(1). En verdad si $A \to A'$ es un $\wedge$ -homomorfismo, entonces el diagrama.

$$\begin{tikzcd} Hom_{\wedge}(\wedge, A) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ Hom_{\wedge}(\wedge, A') \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

Es conmutativo.

Así $Hom_{\wedge}$ ($\wedge$,-) es naturalmente equivalente al funtor identidad

Ejemplo 2.2: Sea A $\in \mathbb{C}_{\wedge}$. Como $\wedge$ es un ($\wedge$, $\wedge$)-bimódulo, $Hom_{\wedge}$ (A, $\wedge$) es un $\wedge$ -módulo, pero de tipo opuesto al de A.

Así $Hom_{\wedge}$ (-, $\wedge$) es un funtor exacto a izquierda de $\mathbb{C}_{\wedge}^{L}$ a $\mathbb{C}_{\wedge}^{R}$. Es además un funtor exacto izquierdo de $\mathbb{C}_{\wedge}^{R}$ a $\mathbb{C}_{\wedge}^{L}$. Este funtor forma las bases de una importante Teoría técnica de dualidad.

2.2 **Módulos Proyectivos**

Definición: Sea P $\in \mathbb{C}_{\wedge}$, P es llamado un " $\wedge$ - modulo proyectivo" si el funtor $Hom_{\wedge}$ (P,-) $\in \mathbb{C}_{\wedge}$ de la categoría de los grupos abelianos es exacto.

Observación: Obviamente si un módulo es proyectivo, entonces también lo es cualquier módulo que sea Isomorfo a este.

Lema: 2.1

Sea P $\in \mathbb{C}_{\wedge}$, entonces las siguientes dos proposiciones son equivalentes

a. P es $\wedge$ -Proyectivo
b. Siempre que tenemos un diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

En $\mathbb{C}_\wedge$ y la fila es exacta, entonces existe un $\wedge$ -homomorfismo $g{:}P \to A$ tal que $f{=}u.g$

Prueba:

La condición (b) es equivalente a lo siguiente: siempre que $A \to B$ es un epimorfismo en $\mathbb{C}_\wedge$, el homomorfismo inducido $Hom_\wedge$ (P,A) $\to$ $Hom_\wedge$ (P, B), es también un epimorfismo. En otras palabras, (b) es equivalente a asumir que $Hom_\wedge$ (P,-) preserva epimorfismo.

El lema, ahora dice que, en cualquier caso $Hom_\wedge$ (P,-) es exacto a izquierda.

Recordemos que un $\wedge$ -módulo es llamado libre si este es isomorfo a la suma directa de varias $\wedge$ o equivalentemente si este tiene una base, que es un sistema linealmente independiente de generadores.

Teorema 2.2:

Todo $\wedge$ -módulo libre es un $\wedge$ -módulo proyectivo

Prueba:

Sea F un $\wedge$ -módulo libre y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, dotted, "\exists!"'] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r, no head] & {}
\end{tikzcd}$$

Donde la sucesión $A \to B \to 0$ es exacta

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base para F, y para cada $i\in I$, sea $b_i=\sigma(e_i)$.

Como π es un epimorfismo para $i\in I$, existe $a_i \in A$ tal que $\pi(a_i)=b_i$.

Definamos un homomorfismo $T:F \to A$ por $T(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i)=\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$

Entonces

$$\pi T(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i)=\sum_{i\in I} \lambda_i \pi(a_i)=\sum_{i\in I} \lambda_i b_i=\sigma \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Por consiguiente $\pi T=\sigma$ y por lo tanto F es proyectiva

Teorema 2.3

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de Λ-módulos en $\mathbb{C}_\Lambda$, con la notación usual para suma directa, hagamos $A=\oplus A_i$, entonces A es proyectivo si y solo si cada A_i es proyectivo.

Prueba:

Sea $\sigma_i : A_i \rightarrow A$ y $\pi_i : A \rightarrow A_i$ el homomorfismo canónico.

Primero asumiremos que A es proyectivo y consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

en $\mathbb{C}_\Lambda$ donde la fila es exacta.

Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obtenemos un homomorfismo $\alpha : A \to B$ tal que $g\alpha = f\pi_i$

Definamos $\beta : A_i \to B$ por $\beta = \alpha\,\sigma_i$, entonces $g\beta = g\alpha\,\sigma_i = f\pi_i\,\sigma_i = f$

Así A_i es proyectivo.

Supongamos, ahora que cada A_i es proyectivo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] & & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

Donde la sucesión es exacta. Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\sigma_i"] & A \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obtenemos un homomorfismo α_i:$A_i \to B$ tal que gα_i=fσ_i .

Definamos β:A$\to$B por β(a)= $\sum_{i\in I} \alpha_i \pi_i$(a) siempre que a$\in$A. Esto es un

$\wedge$ -homomorfismo.

Ahora, para cada a$\in$A

$g\beta(a) = \sum_{i\in I} g\alpha_i\pi_i(a) = \sum_{i\in I} f\sigma_i\pi_i(a)$

$= f(\sum_{i\in I} \sigma_i\pi_i(a))$

=f(a)

i.e g. β=f, lo cual prueba que

A es proyectivo

Propiedad 2.1

Si A pertenece $\mathbb{C}_\wedge$. Entonces existe una sucesión exacta P$\to$A$\to$0, en $\mathbb{C}_\wedge$ donde

P es $\wedge$ -proyectiva

Propiedad 2.2

Todo submódulo de un $\mathbb{Z}$-módulo libre es libre y se deduce que cada $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo es libre.

Ejemplo 2.3 un módulo proyectivo que no es libre.

Solución: si tenemos $2Z+3Z=Z$ y $2Z\cap 3Z=6Z$. Por tanto si Λ es el anillo $Z/6Z$, $A=2Z/6Z$, y $B=3Z/6Z$, entonces $\Lambda = A\oplus B$ y por consiguientes A es Λ -Proyectivo.

Pero Λ contiene 6 elementos, por consiguiente un Λ -módulo libre contiene o un numero infinito de elementos o un numero finito K de elementos donde K es un múltiplo de 6. Sin embargo el números de elementos en **A** esta entre 0 y 6.

Por lo tanto **A** no es libre

Observaciones:

Sea Λ un dominio de integridad con la propiedad que todo Λ -ideal puede ser generado por un elemento único. Este argumento puede ser adoptado para probar que cualquier submódulo de un Λ -módulo libre es en si mismo libre.

Teorema 2.4 (teorema de base dual)

Un Λ -módulo P es proyectivo si y solo si existen familias $\{a_i\}_{a\in I}$ de elemento de P y $\{f_i\}_{i\in I}$ de elementos de $Hom_\Lambda(P, \Lambda)$ tal que:

i) par cada $a \in P$, $f_i(a)=0$ para casi todo i

ii) $a=\Sigma f_i(a)a$ para todo $a \in P$

Cuando P es proyectivo la familia $\{a_i\}_{a\in I}$ puede ser cualquier sistema generador de P.

Prueba:

Asumamos por el momento que $\psi : F \to P$ es un epimorfismo, donde F es $\wedge$ -módulo libre con una base $\{e_i\}_{a \in I.}$

Antes de continuar con el teorema observemos que si $A_1 \xrightarrow{\sigma_1} A$ y $A \xrightarrow{\pi_1} A_1$ son $\wedge$ -homomorfismo tal que $\pi_i \sigma_i =$ identidad, entonces A= $\operatorname{Im} \sigma_i \oplus Ker \pi$. En efecto:

Sea $a \in A$ entonces π_1 (a- $\sigma_1 \pi_1(a)) = 0$ y por consiguiente,

a= $\sigma_1 \pi_1(a) + (a - \sigma_1 \pi_1(a)) \in \operatorname{Im} \sigma_1 + Ker \pi_1$

ahora supongamos que $\alpha \in \operatorname{Im} \sigma_i \bigcap Ker \pi_1$ decimos que $\alpha = \sigma_1 (a_1)$ con $a_1 \in A_1$, entonces

$a_1 = \pi_1 \; \sigma_1 \; (a_1) = \; \pi_1(\alpha) = 0$

por lo tanto $\alpha = 0$ luego

$A = \operatorname{Im} \sigma_1 \oplus \ker \; \pi_1$

Ahora bien por el ***lema 2.1*** vemos que P es proyectivo si y solo si $\psi\varnothing$ es una proyección identidad para algún $\wedge$ -homomorfismo donde $\varnothing : P \to F$

Supongamos primero que P es proyectivo y escojamos alguna F, ψ y $\varnothing$.

Hagamos $a_i = \psi(e_i)$

Sea $a \in P$, entonces podemos escribir

$\varnothing(a) = \Sigma f_i(a) e_i$ donde $f_i(a)=0$

Para casi todo i y cada $f_i : P \to \wedge$ es un $\wedge$ -homomorfismo, además $a = \psi\varnothing(a) = \Sigma f_i(a) a_i$.

Evidentemente en la elección F y ψ, podemos disponer que $\{a_i\}_{i\in I}$ es cualquier conjunto generado de P.

Ahora supongamos que tenemos familias $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ que satisface las condiciones (i) y (ii) en la proposición del teorema.

Construyamos $\wedge$ -homomorfismo $\psi : F \to P$ en el cual F es un $\wedge$ -módulo libre con una base $\{e_i\}_{i\in I}$ y $\psi(e_i)=a_i$

Definamos un $\wedge$-homomorfismo $\varnothing$:P$\to$F tal que $\varnothing(a)=\Sigma f_i(a)e_i$ entonces $\psi\varnothing(a)=\Sigma f_i(a)a_i = a$ y por consiguiente $\psi\,\varnothing$ es una proyección de identidad por lo tanto ψ es identidad y ahora P es proyectivo por lo que observamos al inicio.

Lema 2.2

Sea $\wedge$ un dominio integridad con campos cocientes $\mathbb{Q}$ y sea I $\neq (0)$ un ideal de $\wedge$.

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) I es proyectivo

b) I es invertible, esto es, existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en I y $q_1, q_2, \ldots, q_n$ en $\mathbb{Q}$ tal que $q_v I \subseteq \wedge$ para v=1, 2, …,n y $a_1, q_1 + a_{2,} q_2 + \ldots + a_n q_n = 1$ deducir que un ideal proyectivo de $\wedge$ es necesariamente generado finitamente.

Prueba:

Veamos la primera condición:

Supongamos que I es proyectivo, por el teorema 2.4, existen familias $\{a_j\}_{j\in J}$

De elementos de I y $\{f_j\}_{j\in J}$ de elementos de $Hom_{\Re}(I, \Lambda)$ tal que para cada elemento x de I, $f_j(x)=0$ para casi todos $j\in J$ y $x=\sum_{j\in J} f_j(x)a_j$.

Sea a un elemento no nulo de I. Entonces $a = f_{j1}(a)a_{j1} + f_{j2}(a)a_{j2} + ... + f_{jn}(a)a_{jn}$ donde $j_1, j_2,\ldots,j_n$ son elementos distintos de J

Hagamos

$a_v = a_{jv}$ y

$q_v = a^{-1} f_{jv}(a)$

Así que $a_1q_1+ a_2q_2+\ldots+a_nq_n=1$

Si ahora $y\in I$, entonces

$q_v y = a^{-1} f_{jv}(ay) = f_{jv}(y)$

Asi $q_v y \in \Lambda$ y vemos que I es invertible

Veamos la segunda condición:

Asumamos (b) y definamos una familia $\{f_v| v=1,2,\ldots,n\}$ de elementos de $Hom_{\Re}(I, \Lambda)$ por $f_v(x)=q_v(x)$ notemos que cuando $x \in I$ tenemos que $q_v x \in \Lambda$ porque $q_vI \subseteq \Lambda$ para $x\in I$, ahora vemos que $x= a_1q_1+ a_2q_2+\ldots+a_nq_n(x)$

$= a_1f_1(x)+ a_2f_2(x)+\ldots+a_nf_n(x)$ por lo tanto, I es proyectivo.

Finalmente, supongamos que I es un ideal proyectivo no nulo de Λ y escojamos $a_1, a_2,\ldots,a_n$ y $q_1,q_2,\ldots,q_n$ como lo seleccionamos anteriormente.

Si ahora $x \in I$, entonces $x= a_1q_1x+ a_2q_2x+\ldots+a_nq_nx = a_1v_1+ a_2v_2+\ldots+a_nv_n$

Donde $V_v=q_v(x) \in q_vI \subseteq \Lambda$.

Así $a_1, a_2, \ldots, a_n$ genera y por consiguiente es generado finitamente.

2.3 Módulos Inyectivos

Definición: Si E pertenece a $\mathbb{C}_{\wedge}$.

E se dice un “ Λ -módulo inyectivo” si $Hom_{\wedge}(-,E)$ es un funtor exacto en la categoría de los grupos abelianos.

Observación:

Todo Λ -módulo que es isomorfo a un módulo inyectivo es también inyectivo.

Lema 2.3

Sea E que pertenece a $\mathbb{C}_{\wedge}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) E es Λ -inyectivo

b) Siempre que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

En $\mathbb{C}_{\wedge}$ en que la fila es exacta, existe una Λ -homomorfismo $g:B \rightarrow E$ tal que $gu=f$.

La prueba es similar a la presentada en el ***lema 2.1***, por lo cual será omitida.

Observaciones:

- una suma directa de Λ -módulo inyectivo es Λ-inyectivo
- Si E es Λ -inyectivo entonces E es un sumando directo de cada Λ -módulo que contiene a E como un submódulo.

Teorema 2.5:

Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de Λ -módulos y pongamos $B = \underset{i\in I}{\pi} B_i$ (producto directo)

Entonces B es Λ -inyectivo si y solo si cada B_i es Λ -inyectivo.

Prueba:

Veamos la condición necesaria:

primero supongamos que B es Λ -inyectivo.

Sea $i \in I$ y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, dash, "f_i"'] & C \\
& B_i &
\end{tikzcd}$$

Donde la fila es exacta.

Sea σ_i :$B_i \to B$ y π_i :$B \to B_i$ dos homomorfismos canónicos. Entonces del diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"'] & C \\ & B_i \arrow[r, "\sigma_i"] & B \end{tikzcd}$$

Se observa que existe un homomorfismo.

Sea h'_i:$C \to B$ tal que $h'_i g = \sigma_i f_i$

Definamos h'_i:$C \to B_i$ por $h_i = \pi_i h'_i$, entonces $h'_i g = \pi_i h'_i g = \pi_i \sigma_i f_i = f_i$ por consiguiente B_i es inyectivo.

Veamos la condición suficiente:

Asumamos que cada B_i es inyectiva.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ & B & \end{tikzcd}$$

En $\mathbb{C}_\wedge$, donde la fila es exacta.

Del diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ & B \arrow[r, "\pi_i"] & B_i \end{tikzcd}$$

Obtenemos un homomorfismo $K_i:C \rightarrow B_i$ tal que $\pi_i f = K_i g$.

Definamos un homomorfismo $K:C \rightarrow B$ por $K(C)=\{ K_i(c)\}_{i\in I}$

Entonces para cada $a \in A$, $Kg(a)=\{ K_i g(a)\}_{i\in I}=\{ \pi_i f(a)\}_{i\in I}=f(a)$

Por lo tanto $Kg=f$ y en consecuencia B tiene que ser inyectivo.

Teorema 2.6

Sea E Λ -módulo a izquierda. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes.

a) E es Λ -inyectivo

b) Para todo ideal a izquierda I y Λ -homomorfismo $f:I \rightarrow E$ existe un Λ -homomorfismo $g: \Lambda \rightarrow E$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "f"'] & \Lambda \arrow[dl, dashed, no head, "\exists g"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

Observación:

Un resultado similar se cumple para Λ -módulos a derecha.

Prueba:

La condición necesaria se puede demostrar aplicando el ***lema 2.3***

Condición suficiente

Supongamos que A es un submódulo de un $\wedge$ -módulo izquierdo B y que damos un $\wedge$ -homomorfismo $\varnothing$: A $\rightarrow$E.

Por el **lema 2.3**, es suficiente probar que $\varnothing$ puede ser extendido a un $\wedge$ -homomorfismo B$\rightarrow$E.

Sea Σ que consiste en todas las parejas (C,ψ), donde C es un $\wedge$ -módulo entre A y B y ψ es un homomorfismo C$\rightarrow$E extendiendo $\varnothing$.

Claramente (A, $\varnothing$)$\in \Sigma$

Si (C_1,ψ_1), (C_2,ψ_2) pertenecen a la Σ , entonces escribimos (C_1,ψ_1)$\leq$ (C_2,ψ_2) si $C_1 \subseteq C_2$ y ψ_2 extendido ψ_1. Σ es ahora parcialmente ordenado y es fácil verificar que Σ es un sistema inductivo pasivo.

Por el lema de Zorn este tiene un miembro maximal (C*, Ψ *).

La construcción asegura que A $\subseteq$ C* $\subseteq$B.

La prueba estará completa si demostramos que B=C*.

Supongamos que B $\neq$C* (R.A)

Elijamos $\beta \in$B, tal que $\beta \notin$C*

Pongamos I ={ $\lambda \mid \lambda \in \wedge, \lambda\beta \in C^*$}, entonces I es un ideal a izquierda.

Si $\lambda \in$I , entonces podemos definir f:I $\rightarrow$E por f(λ)=ψ *(λ β)

La proyección f es un Λ -homomorfismo y, por hipótesis, este puede ser extendido a un Λ -homomorfismo g: $\Lambda \rightarrow E$

Así $g(\lambda)=\psi^*(\lambda\beta)$ si $\lambda \in I$

Hagamos $C=C^*+\Lambda\beta$. Si $c \in C$, entonces podemos escribir $c=c^*+\lambda\beta$, donde $c^* \in C^*$ y $\lambda \in \Lambda$. Sea $c=c_1^*+\lambda_1\beta$ una segunda representación.

Entonces $\lambda-\lambda_1 \in I$ y por consiguiente: $\psi^*(c^*)+g(\lambda)=\psi^*(c_1^*)+g(\lambda_1)$

Podemos, por lo tanto definir a $\psi:C \rightarrow E$ por $\psi(c^*+\lambda\beta)=\psi^*(c^*)+g(\lambda)$ y este será un Λ -homomorfismo.

Si $a \in A$, entonces $\psi(a)=\psi(a+0\beta)=\psi^*(a)=f(a)$

Así $(C,\psi) \in \Sigma$. Como $c^* \subset C$ y ψ extiende ψ^* se contradice la maximalidad de (C^*,ψ^*).

Por lo tanto $B=C^*$

Ejemplo 2.4: Sea R un dominio de integridad y $\mathbb{Q}$ un campo cociente, entonces $\mathbb{Q}$ es un R-módulo inyectivo. Para $f:I \rightarrow \mathbb{Q}$ un R-homomorfismo, donde I es un ideal entonces por el **teorema 2.6** podemos verificar la demostración, si podemos probar que f puede ser extendido a un R-homomorfismo.

Sea $\varnothing:R \rightarrow \mathbb{Q}$ en esta conexión podemos suponer que $I\neq(0)$.

Supongamos ahora que a, $b \in I$ y $a\neq0$, $b\neq0$ como f es un R-homomorfismo, se sigue que $f(a)/a = f(b)/b$

Así $f(a)/a = q$ es independiente de la elección de a.

Definamos $\varnothing$:R $\to$Q por $\varnothing$(r) =rq

Entonces $\varnothing$es un R-homomorfismo extendiendo f.

2.4 $\mathbb{Z}$-Módulos Divisibles

Definición: el $\mathbb{Z}$-módulo A es llamado "divisible" si A=mA para todo entero no nulo m.

Teorema 2.7:

Un $\mathbb{Z}$-módulo es inyectivo si y solo si este es divisible.

Este teorema se prueba sin dificultad, aplicando el ***teorema 2.6***; notemos que si m $\in \mathbb{Z}$, entonces m$\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-ideal típico

Veamos la condición necesaria:

En efecto, supongamos que E es $\mathbb{Z}$-inyectivo y sea m un entero no nulo.

Sea e $\in$ E y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \\ E & \end{tikzcd}$$

Donde I es el ideal de $\mathbb{Z}$ generado por un m y f es el homomorfismo definido por f(nm)=ne.

Como E es inyectivo existe un homomorfismo h: $\mathbb{Z} \to$ E extendiendo f.

Por consiguiente e=f(m)=h(m)=mh(1). De donde $e \in m$ E.

Se sigue que E=mE y la divisibilidad de E queda probada

Veamos la condición suficiente:

Recíprocamente, supongamos que E divisible y sea I cualquier ideal no nulo de $\mathbb{Z}$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \\ E & \end{tikzcd}$$

En $\mathbb{C}$. Tenemos I=$\mathbb{Z}$ m para algún entero no nulo m. Sea e=f(m)

Como mE=E existe un elemento e′ en E tal que e=me′.

Definamos un homomorfismo h: $\mathbb{Z} \to$ E por h(n)=ne′. Entonces h extiende f.

Por consiguiente por el ***teorema 2.6*** E es inyectivo.

Lema 2.4

Sea X un $\mathbb{Z}$-módulo, y x un elemento no nulo de X, entonces existe $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(X, \Omega)$ tal que f (x)≠0.

Prueba:

Como Ω es $\mathbb{Z}$-inyectivo, podemos asumir que $X=\mathbb{Z}x$.

Primero supongamos que el periodo de x es infinito, entonces X es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base x y podemos elegir f. Así que f(x) es cualquier elemento no nulo de Ω.

Ahora supongamos que x tiene periodo m.

Elijamos $w \in \Omega$. Así que $w \neq 0$ pero $mw=0$(por ejemplo w puede ser tomado $(1/m+z)$)

Ahora definamos $f \in Hom_{Z}(X, \Omega)$ por $f(nx)=nw$.

Así se obtiene la prueba requerida.

Propiedad 2.4:

Todo Λ-módulo a izquierda es proyectivo si y solo si cada Λ-módulo izquierdo es inyectivo

Propiedad 2.5:

Sea $A \in \mathbb{C}_{\Lambda}$, entonces en $\mathbb{C}_{\Lambda}$ podemos construir una sucesión exacta $0 \to A \to E$, donde E es Λ-inyectivo

2.5 Extensiones Esenciales

Definición:

Sea A un submódulo de un Λ-módulo B i.e B es una extensión de A.

B se dice una "extensión esencial" de A si y solo si todo submódulo no nulo de B tiene una intersección no nula con A.

Observaciones:

a) Un módulo es siempre una extensión esencial de si mismo

b) Una extensión de un Λ -módulo A, el cual es diferente de A, se dice no trivial

c) Si V es un Λ -módulo inyectivo entonces V tiene una extensión esencial no trivial y viceversa

2.6 Cubrimientos Inyectivos

Definición:

Sea A un Λ -módulo. Un "cubrimiento inyectivo" de A es una extensión esencial inyectiva de A.

Observaciones:

a) Si A es un Λ -módulo y E una extensión inyectiva de A. Entonces E contiene un submódulo, el cual es un cubrimiento inyectivo de A.

b) Sea $f:A \xrightarrow{\sim} A'$ un isomorfismo de Λ -módulo, E un cubrimiento inyectivo de A, y E' un cubrimiento inyectivo de A'. Entonces f puede ser extendido a un isomorfismo de E en E'.

Propiedad 2.6

Sea $f: A \xrightarrow{\sim} A'$ un isomorfismo de Λ -módulos, E un cubrimiento inyectivo de A y E′ un cubrimiento inyectivo de A′. Entonces f puede ser extendido a un isomorfismo de E en E′.

Teorema 2.8:

Sea Λ un dominio de integridad.

Entonces el cubrimiento inyectivo de Λ (considerado como un Λ-módulo) es un campo cociente. Deducimos que Λ, considerado como un Λ-módulo es inyectivo, si y solo si Λ es un campo.

Prueba:

Sea $\mathbb{Q}$ el campo cociente de Λ. Entonces por el ***ejemplo 2.2***, $\mathbb{Q}$ en inyectivo.

Supongamos ahora que A es un submódulo no nulo de $\mathbb{Q}$ y sea r/s un miembro no nulo de A, donde $r, s \in \Lambda$ y $s \neq 0$. Entonces $r = s(r/s)$ es un miembro no nulo de $A \cap \Lambda$.

Por lo tanto $\mathbb{Q}$ es una extensión esencial de Λ y por consiguiente un cubrimiento inyectivo de Λ.

Finalmente Λ es inyectivo si y solo si, es este un cubrimiento inyectivo propio. Por lo tanto Λ es inyectivo si y solo si es un campo cociente propio.

Sea p un número primo. Los números racionales cuyos denominadores son potencias de p forman un anillo D_p que contiene a $\mathbb{Z}$.

Hagamos $\mathbb{Z}(p^{\infty}) = D_p / \mathbb{Z}$ y lo consideramos como un $\mathbb{Z}$-módulo. Como $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ es un grupo abeliano, entonces es isomorfo al grupo multiplicativo formado por todas las P^{V}-ésimas raíces de unidad, donde v es una variable entera positiva.

Teorema 2.9

Sea P un número primo y v un entero positivo.

Muestre que $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ es el cubrimiento inyectivo de un $\mathbb{Z}$-módulo el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}/P^{v}\mathbb{Z}$.

Prueba:

Primero vamos a probar que $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ es divisible, y por lo tanto, por el ***teorema 2.7***, inyectivo.

Sea $\alpha \neq 0$ que pertenece a $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ y se $m \neq 0$ un entero. Entonces $\alpha = (a/p^{r}) + \mathbb{Z}$, donde $r > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ y p no divide a a.

También podemos expresar a m en la forma $m = p^{s}m$, donde $s \geq 0$ y n es un entero no divisible por T.

Podemos ahora encontrar enteros h,k tal que $hp^{r} + kn = a$.

Así $hp^{r+s} + km = ap^{s}$ y por consiguiente

$$m\left(\frac{k}{p^{r+s}} + \mathbb{Z}\right) = \frac{a}{p^{r}} + \mathbb{Z} = \alpha$$

Por consiguiente $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ es inyectivo

Luego C un $\mathbb{Z}$-módulo de $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ generado por $(1/p^{r}) + \mathbb{Z}$

Entonces C es cíclico con un generador cuyo periodo es p^r y por consiguiente C es isomorfo a $\mathbb{Z} / p^r\mathbb{Z}$.

La prueba se completa si probamos que $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ es una extensión esencial de C. Esto se logra si se prueba que $\mathbb{Z}_{\alpha} \cap C \neq 0$. Si $r \leq v$, entonces α pertenece a $\mathbb{Z}_{\alpha}$ y C, luego podemos asumir que $r > v$.

Pero entonces $p^{r-v}\alpha \neq 0$.

Observación:

Por $\mathbb{Q}$ denotamos los números racionales y sea p un número primo. Los números racionales quienes tienen denominadores p forman un anillo que es denotado por $\mathbb{Z}_p$.

Teorema 2.10

Muestre que $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p$ son $\mathbb{Z}$-módulo isomorfos.

Prueba:

Sea D_p el $\mathbb{Z}$-módulo que consiste de todos los números racionales con denominadores que son potencia de p, entonces la proyección inducida $D_p \rightarrow \mathbb{Q}$ induce un $\mathbb{Z}$-homomorfismo f: $\mathbb{Z}(P^{\infty}) \rightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_p)$

Ahora f es un monomorfismo; pero si m/p^r, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 0$, pertenece a $\mathbb{Z}_p$, entonces p^r divide a m y por consiguiente m/p^r esta en $\mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que, c y $d\neq 0$ son enteros. Podemos escribir $d=p^s{}_n$, donde $s\geq 0$ y n es un entero no divisible por p, entonces $c=hp^s+kn$ para enteros apropiados h y k, y por consiguiente $c/d=k/p^s+h/n$.

Por lo tanto $f(k/p^s+\mathbb{Z})=K/p^s+\mathbb{Z}_p=c/d+\mathbb{Z}_p$

Así, se muestra que f es un epimorfismo así como también un monomorfismo y por ende un isomorfismo.

2.7 Monomorfismo Esencial

Definición:

Un monomorfismo $f:A \rightarrow A'$ en $\mathbb{C}_\wedge$ es esencial si A' es una extensión esencial de f(A).

Teorema 2.11:

Sea I un ideal bilateral de $\wedge$. Muestre que $Hom_\wedge(\wedge/I, -)$ considerado un funtor covariante de $C^L_\wedge$ a $C^L_{\wedge/I}$ preserva monomorfismos esenciales.

Prueba:

Sea A un módulo en la categoría $C^L_\wedge$

Hagamos $0:{}_A I=\{a \mid a \in A, I_a=0\}$

Entonces $0:{}_A I$ es un Λ -submódulo de A, quien es anulado por I y por tanto este es un Λ /I-módulo.

Supongamos que f $\in Hom_\Lambda(\Lambda/I,A)$ y sea 1 la imagen del elemento de identidad de Λ en Λ /I.

Si ahora $\lambda \in I$, entonces: $\lambda f(1) = f(\lambda\, 1)=f(0)=0$ y por consiguiente $f(1)$ esta en $0:{}_A I$.

Ahora tenemos la proyección de $Hom_\Lambda(\Lambda/I,A)$ en $0:{}_A I$ en quien f va en $f(\bar{1})$.

A través de una comprobación trivial, se muestra que este es un isomorfismo de Λ /I-módulos.

Sea $\varnothing$:A$\rightarrow$A' un Λ -homomorfismo. Entonces $\varnothing$ induce una proyección de $0:{}_A I$ en $0={}_{A'}I$.

Ahora se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom_\Lambda(\Lambda/I,A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & 0={}_A I \arrow[d] \\
Hom_\Lambda(\Lambda/I,A') \arrow[r, "\sim"] & 0={}_{A'}I
\end{tikzcd}$$

En C_Λ^L/I que es conmutativo y en el cual las aplicaciones horizontales son isomorfismos.

Sean $\varnothing$:A$\rightarrow$A' un Λ -monomorfismo es esencial.

Para mostrar que $Hom_\Lambda(\Lambda/I,A) \rightarrow Hom_\Lambda(\Lambda/I,A')$ es un Λ /I-monomorfismo esencial y será suficiente mostrar que lo mismo es verdadero de $(0:{}_A I)\rightarrow(0:{}_{A'}I)$.

Alternativamente, es suficiente probar que A'es una extensión esencial $0:{}_A I$ de A.

Esto es claro porque si B es submódulo 0: $_{A'}I$, entonces B$\bigcap$(0: $_{A}I$)=B$\bigcap$A luego, supongamos que A es sigma inyectivo. Mostrar que $Hom_{\wedge}(\wedge/I, A)$ es $\wedge/I$ – inyectivo será suficiente probar que 0: $_{A}I$ es $\wedge$ /I-inyectivo.

Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & V \\
 & 0={}_{A}I &
\end{tikzcd}$$

Un diagrama en $\mathbb{C}^{L}_{A/I}$ con las filas exactas,

Entonces

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & V \\
 & 0={}_{A}I \arrow[d, "j"'] & \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Es un diagrama $C_{\wedge}^{L}$ donde j es una proyección inclusiva.

Como A es $\wedge$ -inyectiva existe un $\wedge$ -homomorfismo $h:V \rightarrow A$ tal que hq=jp.

Pero IV=0 y por ende Ih(v)=0 y por consiguiente $h(v) \subseteq (0:\ _A I)$

Así existe un $\wedge$ -homomorfismo $h:V \rightarrow (0:\ _A I)$ tal que jk=h.

Se sigue que kq=p

$0:\ _A I$ es $\wedge$ /I-inyectivo

Puesto que, como V y $0:\ _A I$ son $\wedge$ /I-módulos, h es $\wedge$ /I homomorfismo

Capitulo 3

El Funtor Derivado

3.1 Construcción de un isomorfismo básico

Consideremos las siguientes propiedades

a) Sea A un elemento de $\mathbb{C}_\wedge$. Entonces existe una sucesión exacta $P \to A \to 0$ en $\mathbb{C}_\wedge$,

donde P es $\wedge$ - proyectivo.

Prueba:

Hagamos $P = \bigoplus_{\alpha \in A} \wedge$. Entonces P es libre.

Además la proyección $P \to A$ en la cual $\{\lambda\alpha\}_{\alpha \in A}$ es pareada con $\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha \alpha$ es un

$\wedge$ -epimorfismo.

b) Sea A un elemento de $\mathbb{C}_\wedge$. Entonces en $\mathbb{C}_\wedge$ podemos construir una sucesión exacta

$0 \to A \to E$, donde E es $\wedge$ -inyectivo.

En base a las propiedades anteriores, podemos construir en $\mathbb{C}_\wedge$, sucesiones exactas

$0 \to A_1 \to P \to A \to 0$ y

$0 \to B \to E \to B_1 \to 0$

Donde $A, B \in \mathbb{C}_\wedge$, P es proyectivo y E es inyectivo.

Como el funtor $Hom_\wedge$ es exacto a izquierda entonces surgen las sucesiones exactas

$0 \to Hom_\wedge(A,B) \to Hom_\wedge(P,B) \xrightarrow{\alpha} Hom_\wedge(A_1,B) \to$ co-núcleo $\alpha \to 0$ y

$0 \to Hom_\wedge(A,B) \to Hom_\wedge(A,E) \xrightarrow{\beta} Hom_\wedge(A_1,B_1) \to$ co-núcleo $\beta \to 0$

Respectivamente.

Verificaremos a continuación que:

co-núcleo de α y co-núcleo de β son grupos abelianos isomorfos.

En efecto, decimos que f en $Hom_{\wedge}(A_1,B)$ es asociado con g en $Hom_{\wedge}(A,B_1)$ si existe $u \in Hom_{\wedge}(P,E)$ tal que el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d, "u"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Notemos que dada $f:A_1 \to B$ siempre se puede elegir u y g para lograrlo. De igual forma dado $g:A \to B_1$ podemos encontrar u y f.

Supongamos que $f \in Hom_{\wedge}(A_1,B)$ y que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d, "u"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Son conmutativos, así que g y g′ son asociadas con f.

Entonces

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "u-u'"'] & A \arrow[d, "g-g'"] \\ E \arrow[r] & B_1 \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo y u-u′ es nula sobre la imagen de A_1 en P.

Por lo tanto existe un Λ - homomorfismo $A \rightarrow E$ tal que:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "u-u^1"'] & A \arrow[d, "g-g'"] \arrow[dl, dashed] \\ E \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

es también conmutativo y esto muestra que $g-g' \in \operatorname{Im}\{ Hom_\Lambda(A,E) \xrightarrow{\beta} Hom_\Lambda(A,B_1)\}$

Así si [g] y [g′] son las imágenes naturales de g y g′ en el co-núcleo β, entonces [g]=[g′].

de esta forma llegamos al $\mathbb{Z}$ - homomorfismo

$Hom_\Lambda((A_1,B) \xrightarrow{T_1}$ co-núcleo β en el cual f es llevado sobre [g].

Supongamos, por el momento, que $f \in \operatorname{Im}\{ Hom_\Lambda(P,B) \xrightarrow{\alpha} Hom_\Lambda(A_1,B)\}$.

Entonces existe un Λ - homomorfismo $P \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[dl, dashed] \\ B & \end{tikzcd}$$

es conmutativo

Definamos u:P$\rightarrow$E en $\mathbb{C}_{\wedge}$, de modo que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & P \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dashed] \\
B \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y veamos que f es asociado con el homomorfismo nulo de A en B_1.

Finalmente mostramos que el $\mathbb{Z}$- homomorfismo (T_1) induce el homomorfismo siguiente:

co-núcleo $\alpha \xrightarrow{T_2}$co-núcleo β (T_2)

En este caso, si f,g son asociados en lo que vimos anteriormente y [f] y [g] son imágenes naturales en co-núcleo α y co-núcleo β respectivamente, entonces [f] es llevada sobre [g].

Simultáneamente podemos definir un $\mathbb{Z}$ - homomorfismo

co-núcleo $\beta \xrightarrow{T_3}$co-núcleoα (T_3) en el cual [g] es llevado sobre [f]. Las composiciones de (T_2) y (T_3) son proyecciones idénticas. Por consiguiente, ellos son isomorfismos inversos.

Lema 3.1

Si A es proyectivo o B es inyectivo, entonces, co-núcleo α y co-núcleo β son nulos.

Prueba:

Si A es proyectivo, podemos tomar

P=A y A_1=0

Así co-núcleo α=0 y por consiguiente co-núcleo β=0.

Por otro lado, si b es inyectivo entonces podemos tomar E=B y B_1=0 y se concluye lo mismo.

3.2 Construcción de diagramas

Si A', A y B, B' pertenecen a $\mathbb{C}_\wedge$ podemos considerar las sucesiones exactas

$0 \to A_1' \to P' \to A' \to 0$ (3.1.1)

$0 \to A_1 \to P \to A \to 0$ (3.1.2)

$0 \to B \to E \to B_1 \to 0$ (3.1.3) y

$0 \to B' \to E' \to B_1' \to 0$ (3.1.4)

Donde P', P son proyectivas y E, E' son inyectivos. Supongamos, ahora los homomorfismos $\varnothing : A' \to A$ y $\psi : B \to B'$ en $\mathbb{C}_\wedge$ son dados, podemos entonces construir diagramas conmutativos como se muestra a continuación,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1' \arrow[r] \arrow[d, "\varnothing_1"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\varnothing"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (3.1.5)$$

y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (3.1.6)$$

Aun cuando esto se puede realizar de muchas formas. De (3.1.5) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\wedge}(P,B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Hom_{\wedge}(A_1, B) \arrow[r] \arrow[d] & \text{co-núcleo } \alpha \arrow[d] \\
Hom_{\wedge}(P', B') \arrow[r, "\alpha'"] & Hom_{\wedge}(A_1', B') \arrow[r] & \text{co-núcleo } \alpha'
\end{tikzcd} \qquad (3.1.7)$$

puesto que (3.1.6) produce

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\wedge}(A_1,E) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Hom_{\wedge}(A,B_1) \arrow[r] \arrow[d] & \text{co-núcleo } \beta \arrow[d] \\
Hom_{\wedge}(A',E') \arrow[r, "\beta^1"] & Hom_{\wedge}(A', B_1') \arrow[r] & \text{co-núcleo } \beta'
\end{tikzcd} \qquad (3.1.8)$$

que es además conmutativo

Lema 3.2

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{co-núcleo } \alpha \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \text{co-núcleo } \beta \arrow[d] \\
\text{Co-núcleo } \alpha' \arrow[r, "\sim"] & \text{co-núcleo } \beta'
\end{tikzcd} \qquad (3.1.9)$$

en el cual las proyecciones horizontales son isomorfismos canónicos, es conmutativo.

Prueba:

Supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces f y g son asociados y por consiguiente la imagen de f en co-núcleo α corresponde a la imagen de g en el co-núcleo β.

Consecuentemente $\psi f \varnothing_1$ y $\psi_1 g \varnothing$ son asociados y por lo tanto la imagen $\psi f \varnothing$ en co-núcleo α' corresponde a la imagen de $\psi_1 g \varnothing$ en co-núcleo β', lo cual prueba el lema.

Observación:

Como el diagrama (3.1.9) es conmutativo, co-núcleo $\alpha \rightarrow$ co-núcleo α' es independiente de la libre elección asociada con $\varnothing_1$ y ε. De igual forma: co-núcleo $\beta \rightarrow$ co-núcleo β' es independiente de la libre elección asociada con η y ψ_1

Ejemplo: 3.1: cualquier diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_A"] & {} \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Juntamente con la proyección $i_B:B \to B$, inducirá la proyección identidad en co-núcleo α.

Construcción 3.3

Supongamos que en $\mathbb{C}_{\wedge}$ tenemos diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
A'' \arrow[dr] \arrow[dd] & & & & B \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& A' \arrow[dl] & \text{y} & B' \arrow[dr] & \\
A & & & & B''
\end{tikzcd}$$

y que de cada A, A′, A″ respectivamente B, B′, B″ construimos una sucesión exacta en las líneas (3.1.2) y (3.1.3) de tal forma que obtenemos los homomorfismos;

co-núcleo $\alpha \to$co-núcleo α'

co-núcleo $\alpha \to$co-núcleo α''

co-núcleo $\alpha \to$co-núcleo α'

y una proyección similar para co-núcleo β, co-núcleo β' y co-núcleo β''.

Se verifica fácilmente que los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
\text{Co-núcleo } \alpha \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \text{Co-núcleo } \alpha' \arrow[dl] \\
\text{Co-núcleo } \alpha'' &
\end{tikzcd} \qquad (3.1.10)$$

$$\begin{tikzcd}
& \text{Co-núcleo } \beta \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\text{Co-núcleo } \beta' \arrow[dr] & \\
& \text{Co-núcleo } \beta''
\end{tikzcd} \qquad (3.1.11)$$

Se concluye de esto último que si $A' \to A$ y $B \to B'$ son isomorfismos, entonces co-núcleo $\alpha \to$co-núcleo α' y co-núcleo $\beta \to$co-núcleo β' son isomorfismos para cada A en $\mathbb{C}_\wedge$.

Construyamos una sucesión exacta $0 \to A_1 \to P \to A \to 0$ (3.1.12)

Con P proyectiva. Una vez que se a logrado esto co-núcleo α es determinado solamente por A y B. De hecho nuestros resultados muestran que co-núcleo α es un bifuntor de $\mathbb{C}_\wedge \mathrm{x} \mathbb{C}_\wedge$ en la categoría de los grupos abelianos que es contravariante en A y covariante en B.

Similarmente, si para cada B en $\mathbb{C}_\wedge$ construimos una sucesión exacta del tipo.

$0 \to B \to E \to B_1 \to 0$ (3.1.13) en donde se asume que E es inyectivo, entonces co-núcleo β es de igual forma un bifuntor de $\mathbb{C}_\wedge x \mathbb{C}_\wedge$ en la categoría de los grupos abelianos y es también contravariante en A y covariante en B.

Además, por el ***lema 3.2*** se muestra que los funtores co-núcleo α y co-núcleo β son equivalentes naturalmente.

Los funtores co-núcleo α y co-núcleo β dependen de manera muy superficial de las elecciones tipificadas por (3.1.12) y (3.1.13).

Supongamos que se realizan nuevas elecciones del tipo (3.1.12) pero dejamos aquellos de tipo (3.1.13) unilaterales; entonces el funtor co-núcleo α cambiará, pero co-núcleo β no. Se sigue que dentro de la equivalencia, el funtor co-núcleo α es independiente de la sucesión (3.1.12) utilizado en esta construcción, de igual forma se aplica al co-núcleo β.

Como este hecho es de fundamental importancia debemos fundamentarlo en algo más fuerte. El funtor co-núcleo α respectivamente co-núcleo β depende inicialmente de la selección de la sucesión (3.1.12) respectivamente (3.1.13).

Supongamos que hacemos un cambio arbitrario en esas selecciones, tipificadas en (3.1.12), se convierten

$$0 \to A_1 \to P \to A \to 0 \qquad \text{Y} \quad (3.1.13) \text{ en} \qquad 0 \to B \to E \to B_1 \to 0$$

Esto produce nuevos funtores co-núcleo α y co-núcleo β. Por las observaciones previas las funciones identidad de A y B producen isomorfismos co-núcleo $\alpha \longrightarrow$ co-núcleo α y co-núcleo $\beta \longrightarrow$ co-núcleo β. Además por el ***lema 3.2***, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \text{Co-núcleo } \alpha \arrow[r] \arrow[d, "\int"] & \text{co-núcleo } \beta \arrow[d, "\int"] \\ \text{Co-núcleo } \alpha \arrow[r] & \text{co-núcleo } \beta \end{tikzcd} \qquad (3.1.14)$$

es conmutativo. En realidad si consideramos todos los términos como funtores, entonces (3.1.14) es un diagrama conmutativo de transformaciones naturales.

3.3 El Funtor Extensión $Ext^1_\wedge$

El funtor que hemos construido en la sección anterior es llamado el funtor primera extensión y este es denotado por $Ext^1_\wedge$ (A,B). Más precisamente, para cada A, B en $\mathbb{C}_\wedge$ formamos un diagrama conmutativo de grupos abelianos.

$$\begin{tikzcd} & Ext^{'}_\wedge(A,B) \arrow[dl, "\int"'] \arrow[dr, "\int"] & \\ \text{Co-núcleo } \alpha \arrow[rr, "\sim"] & & \text{co-núcleo } \beta \end{tikzcd} \qquad (3.1.15)$$

en el cual todas las proyecciones son isomorfas y la horizontal el isomorfismo canónico introducido anteriormente.

En primer lugar notemos que $Ext^1_\wedge$ (A,B) es justamente un grupo abeliano; introducido por conveniencia, pero tambien lo podemos considerar como un funtor (contravariante a A y covariante a B) requiriendo como condición que los isomorfismos de (3.1.15) sean equivalencias naturales, de tal forma que evitamos un tratamiento preferencial a Co-núcleo α o al co-núcleo β.

Sea A y B $\wedge$ - modulos y construyamos sucesiones exactas del tipo:

$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ y

$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0$

donde p es proyectivo y E es inyectivo.

Por la construcción de $Ext^1_\wedge$ (A,B) tenemos sucesiones exacta.

$$0 \to Hom_\wedge(A,B) \to Hom_\wedge(P,B) \to Hom_\wedge(A_1,B) \to Ext^1_\wedge(A,B) \to 0 \qquad (3.1.16)$$

Y

$$0 \to Hom_\wedge(A,B) \to Hom_\wedge(A,E) \to Hom_\wedge(A,B_1) \to Ext^1_\wedge(A,B) \to 0 \qquad (3.1.17)$$

de $\mathbb{Z}$ - módulos.

Teorema 3.1:

Sea A un $\wedge$ - módulo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) A es proyectivo

b) $Ext^1_\wedge$ (A,B)=0 para todo $\wedge$- modulo B.

Prueba:

por el **lema 3.1**, la condición necesaria es inmediata.

Veamos la condición suficiente:

Asumamos (b) y construyamos una sucesión exacta $0 \to A_1 \to P \to A \to 0$ con P proyectivo. Para cada $\wedge$ - modulo B tenemos una sucesión exacta (3.1.16)

Tomemos $B=A_1$, y recordemos que $Ext^1_\wedge$ (A,B)=0 encontramos que

$Hom_\wedge(P,A_1) \rightarrow Hom_\wedge(A_1,A_1) \rightarrow 0$ es exacta.

Por lo tanto existen un $\wedge$- homomorfismo $P\rightarrow A_1$, el cual cuando está compuesto con $A_1\rightarrow P$ de la proyección identidad. Por consiguiente la sucesión exacta $0\rightarrow A_1\rightarrow P\rightarrow A\rightarrow 0$ es separante y por lo tanto A es isomorfo a un sumando directo de P. Se sigue que A es proyectivo lo que completa la prueba.

Teorema 3.2

Sea B un $\wedge$ - modulo. Entonces las siguientes dos proposiciones son equivalentes.

a) B es inyectivo

b) $Ext^1_\wedge$ (A,B)=0 para todo $\wedge$- modulo A.

Prueba:

por el ***lema 3.1*** (a) implica (b) es inmediato

asumamos (b) y construyamos una sucesión exacta $0\rightarrow B\rightarrow E\rightarrow B_1\rightarrow 0$, donde E es inyectivo, como $Ext^1_\wedge(B_1,B)=0$, obtenemos una sucesión exacta.

$0\rightarrow Hom_\wedge(B_1,B) \rightarrow Hom_\wedge(B_1,E) \rightarrow Hom_\wedge(B_1,B_1) \rightarrow 0$ entonces existe $f\in Hom_\wedge(B_1,E)$

tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & B_1 \\
 & B_1 \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "iB_1"']
\end{tikzcd}
$$

Es conmutativo. Por consiguiente

$0 \to B \to E \to B_1 \to 0$ es separante.

Se sigue que B es un sumando directo de E y luego B es inyectivo.

3.4 Construcción de la Sucesión Núcleo – Co-núcleo

En primer lugar se entenderá que los diagramas son formados en $\mathbb{C}_\wedge$. Así todos los objetos en los diagramas poden ser $\wedge$ - módulos y todas las aplicaciones $\wedge$ - homomorfismos.

Notemos que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\psi"] & V \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo núcleo $\varnothing \to$ núcleo ψ y co-núcleo $\varnothing \to$ co-núcleo ψ el cual puede extenderse en forma conmutativa a:

$$\begin{tikzcd} \text{núcleo } \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \text{co-núcleo } \varnothing \arrow[d] \\ \text{núcleo } \psi \arrow[r] & U \arrow[r, "\psi"] & V \arrow[r] & \text{co-núcleo } \psi \end{tikzcd}$$

Lema 3.3

sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\ A' \arrow[r, "\varnothing'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo con filas exactas. Si ahora $A' \to B'$ es inyectiva, entonces la sucesión inducida núcleo f$\to$núcleo g$\to$núcleo h es exacta. Similarmente, si $B \to C$ es suryectiva, entonces la sucesión resultante

co-núcleo f$\to$co-núcleo g$\to$co-núcleo h es exacta.

Prueba:

Asumamos que $A' \to B'$ es inyectiva, obviamente la composición de

núcleo f$\to$núcleo g y núcleo g $\to$núcleo h es nula.

Supongamos que b en núcleo g es llevado sobre 0 en núcleo h.

Entonces b es la imagen con respecto a $A \to B$ de algún elemento a de A.

Ahora f(a) se convierte g(b)=0 en B' y por consiguiente f(a)=0, i.e a $\in$núcleo f, porque

$A' \to B$ es inyectiva.

Esto prueba que núcleo f $\to$ núcleo g $\to$ núcleo h es exacta.

De igual forma probaremos que la sucesión co-núcleo f $\to$co-núcleo g $\to$co-núcleo h es exacta.

Asumamos que ψ es suryectiva, supongamos que $b' \in B'$ y que $[b']$ denota esta imagen co-núcleo g.

Si $[b']$ se proyecta en 0 en co-núcleo h, entonces ψ' (B')=$h(c)$ para algún $c \in C$ y por lo tanto porque ψ es suryectiva, $\psi'(b')=h\psi(b)= \psi' g(b)$ para un b apropiado en B.

Se sigue que $b' \to g(b)$ esta en el núcleo $\psi'=\mathrm{Im}\,\varnothing'$.

Por lo tanto existe $a' \in A$ tal que $b'=g(b)+\varnothing'(a')$. Luego $[b']=[\varnothing'\ (a')]$ que indica que $[b']$ es la imagen del elemento $[a']$, del co-núcleo f, que corresponde a a'. Esto demuestra que núcleo{co-núcleo g $\to$ co-núcleo h} $\subseteq$ Im{co-núcleo f $\to$ co-núcleo g} lo cual completa la prueba.

Observación: Antes de revisar el siguiente teorema, debemos ocuparnos de un diagrama conmutativo (diagrama de culebra) muy particular

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Ker}\ h \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varnothing'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' & \\
 & \mathrm{Coker}\ f & & &
\end{tikzcd} \qquad 3.1.18$$

Con filas exactas.

Ahora definimos un $\wedge$ - homomorfismo:

Δ: núcleo h $\to$ co-núcleo f

3.5 Construcción de Δ

Sea $c \in$ núcleo $h \subseteq C$ como ψ es un epimorfismo, $c= \psi(b)$ para algún elemento $b \in B$ y entonces $\psi' g(b)=h\psi(b)=h(c)=0$

Así $g(b)=\varnothing'(a')$ para algún $a' \in A'$ y además a' tiene en si misma una imagen natural, la cual es $[a']$ y representa el co-núcleo f. La proyección Δ es ahora definida por $\Delta(c)=[a']$. En esta construcción el elemento b no es único; sin embargo, si cambiamos a b, el efecto sobre a' será remplazada por un elemento de la forma $a'+f(a)$, donde $a \in A$. Así no se altera $[a']$ y podemos afirmar que Δ está bien definido.

Se observa claramente que Δ es un $\wedge$- homomorfismo el cual se denomina homomorfismo conector.

Teorema 3.3 (la sucesión núcleo - co-núcleo)

Consideremos el diagrama 3.1.18 el cual es conmutativo con filas exactas, entonces la sucesión resultante:

núcleo f $\rightarrow$núcleo g $\rightarrow$núcleo h $\xrightarrow{\Delta}$ co-núcleo f $\rightarrow$ co-núcleo g $\rightarrow$ co-núcleo h

es exacta. (3.1.19)

Prueba:

por el ***lema 3.3***, es suficiente mostrar que la sucesiones:

núcleo g $\rightarrow$núcleo h $\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo f y núcleo $\xrightarrow{\Delta}$ co-núcleo f $\rightarrow$ co-núcleo g son exactas.

Sea b $\in$ núcleo g y consideremos $\Delta(\psi(b))$.

Como g(b)=0=$\varnothing'$ (0), se sigue $\Delta(\varphi(b))$ es la imagen de 0 en co-núcleo f.

Así $\Delta(\varphi(b))$=0 y por consiguiente el resultado de la combinación núcleo g $\rightarrow$núcleo h con Δ es núlo.

Ahora supongamos que c$\in$núcleo h y Δ(c)=0. Sea b y a$'$ definidos como en la construcción Δ(c). Entonces a$'$=f(a), para algún a$\in$A, se sigue que g(b)=$\varnothing'$(a$'$)=$\varnothing'$f(a)=g$\varnothing$(a) y por consiguiente b-$\varnothing$(a) $\in$núcleo g.

Así c=ψ(b)= ψ(b-$\varnothing$(a)) $\in$ ψ(núcleo g).

Lo que demuestra que núcleo g$\rightarrow$núcleo h$\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo f es exacta.

Ahora probaremos que: núcleo h $\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo f$\rightarrow$co-núcleo g es exacta.

Supongamos que c$\in$núcleo h

Como ψ es suryectiva, existe b$\in$B tal que ψ(b)=c y entonces ψ'g(b)=hψ(b)=h(c)=0, por lo tanto g(b) esta en el núcleo ψ'=Im$\varnothing'$, que es g(b)= $\varnothing'$(a$'$) para algún a$'\in$A$'$.

Por la definición de homomorfismo conectivo Δ(c)=[a$'$] donde la notación es la misma que en el ***lema 3.3***.

Pero [$\varnothing'$(a$'$)]=[g(b)]=0 y por consiguiente c proyecta un 0 fijo bajo los homomorfismo compuestos núcleo h$\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo f$\rightarrow$co-núcleo g.

Supongamos ahora que [a$'$] proyecta un 0 bajo co-núcleo f$\rightarrow$co-núcleo g.

Entonces $\varnothing'$(a$'$)=g(b) para algún b en B y hψ(b)= ψ'g(b)= $\psi'\varnothing'$(a$'$)=0

Así ψ(b) $\in$núcleo h y $\Delta\psi$(b)=[a$'$]

Se sigue que [a$'$] esta en ImΔ, lo cual completa la prueba.

3.6 Propiedades de $Ext^1_\wedge$

En las siguientes propiedades se considerará la categoría $\mathbb{C}_\wedge$ y por consiguiente todas las aplicaciones son $\wedge$ - homomorfismos de $\wedge$ - modulos.

Propiedad 3.1

Sea $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exacta y sea $0 \to B \to E \to B_1 \to 0$ también exacta, pero con E inyectivo, entonces resulta un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Hom_\wedge(A'',B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_\wedge(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_\wedge(A',B) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Hom_\wedge(A'',E) \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & Hom_\wedge(A,E) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & Hom_\wedge(A',E) \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_\wedge(A'',B_1) \arrow[r] & Hom_\wedge(A,B_1) \arrow[r] & Hom_\wedge(A',B_1) &
\end{tikzcd}$$

(3.1.20)

Con filas y columnas exactas.

Notemos que la filna intermedia, que es más extensa que las otras, es exacta porque E es inyectivo.

La teoría de la sucesión núcleo-co-núcleo produce ahora la sucesión exacta:

Núcleo $\beta''\rightarrow$núcleo $\beta\rightarrow$núcleo $\beta'\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo $\beta''\rightarrow$co-núcleo $\beta\rightarrow$co- núcleo β'

(3.1.21)

Y esto nos conduce a la siguiente sucesión exacta

$0\rightarrow Hom_{\wedge}(A'',B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A,B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A',B)\xrightarrow{\Delta}$co-núcleo $\beta''\rightarrow$co-núcleo $\beta\rightarrow$co-núcleo β'

Finalmente de las equivalencias (3.1.1 5) esta se pueden convertir en la siguiente sucesión exacta.

$$0\rightarrow Hom_{\wedge}(A'',B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A,B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A',B)\xrightarrow{\Delta} Ext^1_{\wedge}(A'',B)\rightarrow Ext^1_{\wedge}(A,B)\rightarrow Ext^1_{\wedge}(A',B)$$

(3.1.22)

Propiedad 3.2:

toda sucesión exacta $0\rightarrow A'\rightarrow A\rightarrow A''\rightarrow 0$ dada, produce una sucesión exacta

$$0\rightarrow Hom_{\wedge}(A'',B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A,B)\rightarrow Hom_{\wedge}(A',B)\xrightarrow{\Delta} Ext^1_{\wedge}(A'',B)\rightarrow Ext^1_{\wedge}(A,B)\rightarrow Ext^1_{\wedge}(A',B)$$

además si

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

3.1.23

Es un diagrama conmutativo $\mathbb{C}_{\wedge}$ con filas exactas $B\rightarrow B$ es un sigma homomorfismo, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom_\wedge(A',B) & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A'',B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_\wedge(A,B) & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A'',B) \end{array}$$

es conmutativo.

Propiedad 3.3:

Toda sucesión exacta $0 \to B' \to B'' \to 0$ induce la siguiente sucesión

$$0 \to Hom_\wedge(A,B') \to Hom_\wedge(A,B) \to Hom_\wedge(A,B'') \xrightarrow{\Delta} Ext^1_\wedge(A,B') \to Ext^1_\wedge(A,B) \to Ext^1_\wedge(A,B'').$$

Más aún, si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{B}' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathbb{C}_\wedge$ con filas exactas y $A \to A$ es un $\wedge$- homomorfismo, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom_\wedge(A,B'') & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A,B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_\wedge(A,\bar{B}'') & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A,\bar{B}) \end{array}$$

es también conmutativo.

Ejemplo 3.2: sea Γ el centro de $\wedge$. Entonces los homomorfismos conectores (denotados por Δ) definidos anteriormente son Γ-homomorfismos.

Solución:

Para cualquier $\wedge$ - módulo M y $\Upsilon \in \Gamma$, denotada por $\Upsilon_m : M \to M$ el homomorfismo quien multiplica todo elemento de m por Υ.

Consideremos una sucesión exacta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Entonces:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Upsilon_{A'}} & & \downarrow{\scriptstyle \Upsilon_{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \Upsilon_{A''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathbb{C}_\wedge$ con filas exactas. De la propiedad 3.1 obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Hom_\wedge(A',B) & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A'',B) \\ \downarrow{\scriptstyle Hom_\wedge(\Upsilon_{A'},B)} & & \downarrow{\scriptstyle Ext^1_\wedge(\Upsilon_{A''},B)} \\ Hom_\wedge(A',B) & \xrightarrow{\Delta} & Ext^1_\wedge(A'',B) \end{array}$$

Sin embargo las aplicaciones verticales son multiplicaciones por Υ. Por consiguiente Δ es un Γ - homomorfismo. De otra manera, consideramos la sucesión exacta

$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$, entonces:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\Upsilon_{B'}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\Upsilon_{B}"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\Upsilon_{B''}"] & 0 \\
O \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es también un diagrama conmutativo en $\mathbb{C}_{\wedge}$ con filas exactas, de la propiedad 3.1 se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\wedge}(A,B'') \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "Ext^1_{\wedge}(A,\, \Upsilon_{B''})"] & Ext^1_{\wedge}(A,B') \arrow[d] & Ext^1_{\wedge}(A, \Upsilon_{B'}) \\
Hom_{\wedge}(A,B'') \arrow[r, "\Delta"] & Ext^1_{\wedge}(A,B') &
\end{tikzcd}$$

Y el resultado se obtiene de manera análoga al caso anterior.

Teorema 3.4:

un Λ - módulo a izquierda E es inyectivo si y sólo si

Ext^1_Λ (Λ /I, E)=0

Para cualquier ideal izquierdo I

Prueba:

probaremos solamente que si Ext^1_Λ (Λ /I, E)=0 para todas los ideales izquierdos I, entonces E es inyectivo la otra demostración es posible, aplicando el ***teorema 3.2*** de esta sección.

Sea I un ideal izquierdo y f:I$\rightarrow$E un Λ - homomorfismo.

Por el ***teorema 2.6*** del capitulo 2 es suficiente demostrar que f puede ser extendido a un homomorfismo de Λ en E.

Esto será posible, si probamos que el homomorfismos Hom_Λ(Λ , E) $\rightarrow$ Hom_Λ(I, E) inducido por la aplicación de inclusión I$\rightarrow$ Λ es suryectiva.

Pero la sucesión 0$\rightarrow$I$\rightarrow$ Λ $\rightarrow$ Λ /I $\rightarrow$0 es exacta.

Por lo tanto por la propiedad 3.1 tenemos una sucesión exacta.

$0\rightarrow Hom_\Lambda(\Lambda/I, E) \rightarrow Hom_\Lambda(\Lambda, E) \rightarrow Hom_\Lambda(I, E) \rightarrow Ext^1_\Lambda(\Lambda/I, E)$

Sin embargo Ext^1_Λ (Λ /I, E)=0. Por consiguiente Hom_Λ(Λ , E) $\rightarrow$ Hom_Λ(I, E) es suryectiva.

* Recordemos que un módulo es llamado cíclico, si este puede ser generado por un elemento singular.

Ejemplo 3.3 Mostraremos que si cada Λ- módulo izquierdo cíclico es proyectivo, entonces todo Λ - módulo izquierdo es proyectivo.

Solución:

Supongamos que todo Λ - módulo izquierdo cíclico en proyectivo Entonces Λ/I es proyectivo para todo ideal izquierdo de Λ. Por lo tanto, por ***teorema 3.1***, $Ext^1_\Lambda(\Lambda/I, B)=0$ para todo Λ - módulo izquierdo B y todo ideal izquierdo I.

El teorema anterior (3.4) muestra que todo Λ - módulo izquierdo debe ser inyectivo.

Por consiguiente, por la propiedad (2.1) del capitulo 2, cada Λ - módulo izquierdo es proyectivo.

Propiedad 3.4

Sea $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ una sucesión separante exacta de Λ - módulo.

Entonces para cada B en $\mathbb{C}_\Lambda$, el homomorfismo conectivo

$\Delta : Hom_\Lambda(A', B) \to Ext^1_\Lambda(A'', B)$ es nulo

Propiedad 3.5:

Sea $0 \to B \to E \to E_1 \to \dots \to E_{n-1} \to B_n \to 0$ Y $0 \to B \to E'_0 \to E'_n \to \dots \to E'_n \to 0$ exactas en Ext^1_Λ con $n \geq 1$ y E_i y E'_i inyectiva. Entonces para un módulo A en $\mathbb{C}_\Lambda$ tenemos un isomorfismo.

$Ext^1_\wedge$ (A, B_n)$\approx$ $Ext^1_\wedge$ (A, B'_n) de grupos abelianos. Por consiguiente B'_n es inyectivo

Teorema 3.5:

Sea $0\to B\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A\to 0$ una sucesión exacta en $\mathbb{C}_\wedge$ y sea $\Upsilon:B\to B'$ un $\wedge$ - homomorfismo, entonces es posible contribuir un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Upsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle i_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\psi} & x' & \xrightarrow{\varnothing} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en $\mathbb{C}_\wedge$, con filas exactas

Prueba:

Sea μ $B\to B'\oplus X$ un $\wedge$ - homomorfismo, no definido por μ(b)=(- Υ (b),g(b)). Luego puesto que g es un monomorfismo también lo es μ y podemos construir una sucesión exacta del tipo.

$$0\longrightarrow B\xrightarrow{\mu}B'\oplus X\xrightarrow{\pi}X'\longrightarrow 0$$

Ahora definimos $\psi:B'\to X'$ por ψ(b')= π(b', 0).

Si ψ(b')=0, entonces (b',0) =(- Υ (b),g(b))

Para algún b en B y por consiguiente b=0 y por lo tanto b'=0. Se sigue que ψ es un monomorfismo.

Ahora si $\pi(b', x) = \pi(b', x_1)$, entonces $x_1 - x = g(\beta)$ par algún β en B, por consiguiente $f(x_1) = f(x)$

Podemos ahora definir un $\wedge$ - homomorfismo $\varnothing : X' \to A$ por $\varnothing\pi(b', x) = 0$ entonces $x = g(b_0)$ para algún $b_0 \in B$ y por consiguiente: $(b', x) = (b'_0, 0) + \mu(b_0)$, donde $b'_0 \in B'$ así $\pi(b', x) = \pi(b'_0, 0) = \psi(b'_0)$ y por lo tanto $\pi(b', x) \in \operatorname{Im}\psi$, lo que prueba que la sucesión $0 \to B' \xrightarrow{\psi} X' \xrightarrow{\varnothing} A \to 0$ es exacta.

Ahora definamos y $\wedge$ - homomorfismo $\Gamma : X \to X'$ por $\Gamma(x) = \pi(0, x)$

Si $b \in B$, entonces $\Gamma g(b) = \pi(0, g(b)) = \pi(\Upsilon(b), 0) = \psi\Upsilon(b)$ y por consiguiente $\Gamma g = \psi\Upsilon$.

Finalmente si $x \in X$, entonces: $\varnothing\Gamma(x) = \varnothing\pi(0, x) = f(x)$ lo que muestra que $\varnothing\Gamma = f$ lo cual completa la prueba.

Teorema 3.6:

Si A y B pertenecen $\mathbb{C}_\wedge$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

a) $Ext^1_\wedge(A, B) = 0$;

b) Toda sucesión exacta $0 \to B \to X \to A \to 0$ en $\mathbb{C}_\wedge$ es separante, para todo $X \in \mathbb{C}_\wedge$.

Prueba:

Veamos la primera equivalencia:

Sea $0 \to B \to X \to A \to 0$ exacta, $Ext^1_\wedge$ (A, B)=0 entonces tenemos una sucesión exacta $Hom_\wedge(X, B) \to Hom_\wedge(B, B) \to 0$ y por consiguiente i_B es la imagen de un homomorfismo $X \to B$.

Así el producto $B \to X$ y $X \to B$ es una proyección identidad y por lo tanto $0 \to B \to X \to A \to 0$ es separante.

Veamos la segunda equivalencia:

Construimos primero una sucesión exacta $0 \to A_1 \to P \to A \to 0$ con p proyectivo.

Sea $\Upsilon \in Hom_\wedge(A_1, B)$, por el ***teorema 3.5***, podemos obtener en $\mathbb{C}_\wedge$ un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\Upsilon"] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "i_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Con filas exactas, y por hipótesis las filas inferiores son escalonadas.

Como $Ext^1_\wedge$ (P, B)=0, por la ***propiedad 3.2*** se muestra que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
Ext^1_\wedge(B,B) & \xrightarrow{\varepsilon} & Ext^1_\wedge(A,B) \\
\downarrow & & \downarrow I_{(A,B)} \\
Hom_\wedge(A_1,B) & \xrightarrow{\eta} & Ext^1_\wedge(A,B) \to 0
\end{array}$$

Donde las filas inferiores son exactas y ε, η son homomorfismos conectivos. Por la ***propiedad 3.4*** ε es una proyección nula, por lo tanto i_B esta en $Hom_\wedge(B, B)$ y tiene imagen Υ en $Hom_\wedge(A_1, B)$. Se sigue que $\eta(\Upsilon)=0$. Pero Υ es un elemento arbitrario de $Hom_\wedge(A_1, B)$ y η es suryectivo. Por consiguiente $Ext^1_\wedge(A, B)=0$

Teorema 3.7:

Supongamos que $0 \to A_1 \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} A \to 0$, $0 \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} E \to B_1 \to 0$ son exactas en $\mathbb{C}_\wedge$ con P proyectivo y E inyectivo.

Entonces tenemos un $Ext^1_\wedge(A, B) \approx Ext^1_\wedge(A, B_1)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Prueba:

por ***teorema 3.1*** y ***3.2***, $Ext^1_\wedge(P, B)=0$ y $Ext^1_\wedge(A_1, E)=0$. Así tenemos sucesiones exactas como las que siguen: $Hom_\wedge(A_1, E) \xrightarrow{\mu} Hom_\wedge(A_1,B_1) \to Ext^1_\wedge(A_1, B) \to 0$ y $Hom_\wedge(P, B_1) \xrightarrow{\nu} Hom_\wedge(A_1, B_1) \to Ext^1_\wedge(A, B_1) \to 0$.

Tenemos que demostrar ahora que Im u=Im v.

Sea f $\in$ Im u, entonces existe un $\wedge$- homomorflsmo $g:A_1 \to E$ tal que $\mu g=f$

Como E es inyectivo, existe un $\wedge$- homomorfismo $\varnothing$:P$\to$E tal que $\varnothing\,\alpha$=g

Así $\mu\,\varnothing\,\alpha$=f y $\mu\,\varnothing \in Hom_{\wedge}$(P, B_1)

La relación $\mu\,\varnothing\,\alpha$=f muestra que f=v($\mu\,\varnothing$)$\in$Im v; lo cual prueba que Im u $\subseteq$ Im v.

La inclusión inversa (Im v $\subseteq$ Im u) puede ser demostrada utilizando argumentos similares.

Observación:

Vamos a realizar algunas observaciones concernientes al isomorfismo

$Ext^1_{\wedge}$ (A_1, B)$\approx$ $Ext^1_{\wedge}$ (A, B_1).

Supongamos que A y B son fijos, entonces es posible cambiar a $0\to A_1\to P\to A\to 0$

Dejando $0\to B\to E\to B_1\to 0$ sin alteraciones. Esto refleja que un isomorfismo de grupos abelianos, $Ext^1_{\wedge}$ (A_1, B) es independiente de la sucesión $0\to A_1\to P\to A\to 0$.

En forma similar $Ext^1_{\wedge}$ (A, B_1) es independiente de la sucesión $0\to B\to E\to B_1\to 0$.

Identificaremos $Ext^1_{\wedge}$ (A_1, B) y $Ext^{'}_{\wedge}$(A, B_1), y obtenemos de este modo un grupo abeliano $Ext^2_{\wedge}$(A, B), el cual depende de A y B. Esto de hecho, es un nuevo bifuntor, es llamado funtor segunda extensión. Sin embargo, este no es parte de nuestro estudio.

Teorema 3.8

Sea $0\to A_n\to P_{n-1}\to\ldots\to P_1\to P_0\to A\to 0$ y $0\to B\to E_0\to E_1\to\ldots\to E_{n-1}\to B_n\to 0$ sucesiones exactas en $\mathbb{C}_{\wedge}$, donde $n\geq 1$, P_i es proyectivo y E_j inyectivo, entonces existe un isomorfismo $Ext^1_{\wedge}$ (A_n, B)$\approx$ $Ext^1_{\wedge}$ (A, B_n) de grupos abelianos.

Prueba:

Hagamos A_0=A, para $1 \leq i \leq n-1$, $A_i = Im(P_i \to P_{n-1})$ la cual es una sucesión exacta.

$0 \to A_i \to P_{i-1} \to A_{i-1} \to 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Hagamos ahora B_0 = B, para $1 \leq j \leq n-1$, el conjunto $Im(E_{j-i} \to E_j) = B_j$. Con esto tenemos una sucesión exacta $0 \to B_{j-1} \to E_{j-1} \to B_j \to 0$ para $1 \leq j \leq n$. Por el ***teorema 3.7***, tenemos un isomorfismo: $Ext^1_\wedge(A_{i-1}, B_{n-i+1}) \approx Ext^1_\wedge(A_i, B_{n-i})$ para cada i en el rango $1 \leq i \leq n$.

Teorema 3.9

Sea $0 \to A_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ y $0 \to A'_n \to P'_{n-1} \to \ldots \to P'_1 \to P'_0 \to A \to 0$ son sucesiones exactas en $\mathbb{C}_\wedge$, donde $n \geq 1$ y P_i, P'_i son proyectivos. Entonces para cada B en $\mathbb{C}_\wedge$ tenemos un isomorfismo $Ext^1_\wedge(A_n, B) \approx Ext^1_\wedge(A'_n, B)$ de grupos abelianos, además A_n es proyectivo si y solo si A'_n es proyectivo.

Prueba:

Aplicando la **propiedad 2.5** del capitulo 2, podemos construir una sucesión exacta $0 \to B \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_{n-1} \to B_n \to 0$ donde E_j es inyectivo, entonces por el **teorema 3.8** tenemos los siguientes isomorfismos:

$Ext^1_\wedge(A_n, B) \approx Ext^1_\wedge(A, B_n) \approx Ext^1_\wedge(A'_n, B)$.

Finalmente A_n, A'_n respectivamente son proyectivos si y solo si $Ext^1_\wedge(A_n, B)$, $Ext^1_\wedge(A'_n, B)$ es un grupo nulo para todo B.

Propiedad 3.6

Sea $0 \to B \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_{n-1} \to B_n \to 0$

$0 \to B \to E'_0 \to E'_1 \to \ldots \to E'_{n-1} \to B'_n \to 0$

Sucesiones exactas en $\mathbb{C}_\wedge$ con $n \geq 1$ y E_i E'_i inyectivos, entonces para algún módulo A en $\mathbb{C}_\wedge$ tenemos un isomorfismo $Ext^1_\wedge$ (A, B_n) $\approx$ $Ext^1_\wedge$ (A, B'_n) de grupos abelianos. Además B_n es inyectivo si y solo si B'_n es inyectivo.

3.7 Dimensión Proyectiva e inyectiva

En esta sección vamos a trabajar en primera instancia en la categoría $\mathbb{C}^L_\wedge$ de $\wedge$ - módulo a izquierda.

Definición: Supongamos que $A \neq 0$ es un $\wedge$- módulo izquierdo. Asumamos que $n \geq 0$ es un entero y que existe una sucesión exacta: $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ con cada P_i proyectivo, pero que no existe una sucesión exacta de la misma clase formada con menos términos, entonces decimos que A tiene dimensión proyectiva a izquierda n y escribimos l .$pd_\wedge$ (A)=n; si no existe tal sucesión escribimos l .$pd_\wedge$ (A)=∞.

Finalmente, si A=0 entonces ℓ.$pd_\wedge$ (A)=-1.

Supongamos ahora que C pertenece a $\mathbb{C}^L_\wedge$ y que $C \neq 0$ es un entero y que existe una sucesión exacta: $0 \to C \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_n \to 0$ Con cada E_i inyectivo, pero que no existe una sucesión exacta de la misma clase. Entonces decimos que C tiene dimensiones inyectiva (izquierda) n y escribiremos $\ell I d_\wedge$ C=n.

Si no existe tal sucesión, entonces escribimos $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$ C=∞.

Finalmente si C=0 entonces $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$(0)=-1 Así $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$(C) esta definida para todo módulo C en $\mathbb{C}_{\wedge}^{L}$ (Si B pertenece a $\mathbb{C}_{\wedge}^{\Re}$, entonces el concepto análogo es denotado r. $\ell \mathrm{I}\, d_{\wedge}$(B) y es llamado la dimensión inyectiva (derecha) de B).

Observemos que C es inyectiva si y solo si $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}(C) \leq 0$.

También módulos isomorfos tienen la misma dimensión inyectiva. Además si: $0 \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow C_1 \rightarrow 0$ es exacto y E es inyectivo, entonces $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$(C)= $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$(C)+1 bajo la condición de que $\ell \mathrm{I} d_{\wedge}$(C)> 0.

Así ℓ .pd$_{\wedge}$ (A) es definido para todo módulo A en $\mathbb{C}_{\wedge}^{L}$(si B pertenece $\mathbb{C}_{\wedge}^{L}$ el concepto análogo es denotado por Υ .pd$_{\wedge}$ (B) y es llamado la dimensión proyectiva derecha de B)

Notemos que A es proyectivo si y solo si ℓ .pd$_{\wedge}$ (A)≤ 0 es importante observar que los módulos isomorfos tiene la misma dimensión proyectiva, entonces,

Nuevamente si $0 \rightarrow A_1 \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow O$ es exacta y P es proyectivo,

Entonces ℓ .pd$_{\wedge}$ (A)= ℓ .pd$_{\wedge}$ (A$_1$)+1 con la condición de que ℓ .pd$_{\wedge}$ (A)>0

Ejemplo 3.3 Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de $\wedge$ -módulos izquierda y A su suma directa, entonces ℓ .pd$_{\wedge}$ (A)=$\sup_{i \in I}$ ℓ .pd$_{\wedge}$ (A$_i$).

Solución

Supongamos que $n \geq 0$ es un entero y para cada $i \in I$ y construimos una sucesión exacta

$0 \rightarrow A_{i,n} \rightarrow P_{i,n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow P_{i,1} \rightarrow P_{i,0} \rightarrow A_i \rightarrow 0$

Donde cada $P_{i,v}$ es proyectivo. Esta sucesiones dan lugar en forma obvia a una sucesión exacta $0 \to \oplus_{i\in I} A_{i,n} \to \oplus_{i\in I} P_{i,n-1} \to \ldots \to \oplus_{i\in I} P_{i,0} \to A \to 0$ y por el ***teorema 2.3*** del capitulo 2, $\oplus_{i\in I} P_{i,v}$ es proyectivo y si aplicamos el mismo teorema $\oplus_{i\in I} A_{i,n}$ es proyectivo si y solo si $A_{i,n}$ es proyectivo.

Para todo i en I, ahora se observa que las siguientes proposiciones son equivalentes

1. $\ell\,.pd_{\wedge}\ (A) \leq n$
2. $\oplus_{i\in I} A_{i,n}$ es proyectivo
3. $A_{i,n}$ es proyectivo para cada $i \in I$
4. $\ell\,.pd_{\wedge}\ (A_i) \leq n$ para cada $i \in I$
5. $\sup_{i\in I} \ell\,.pd_{\wedge}\ (A_i) \leq n$

De las propiedades anteriores se deduce el resultado que buscábamos.

Ejemplo 3.4 Determine $Pd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ y $Id_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Q}$ denota el campo de los números racionales.

Solución: podemos construir una sucesión exacta $0 \to A \to F \to 0$ en $\mathbb{C}_{\mathbb{Z}}$, donde F es libre y A es un sub-módulo de F (por la propiedad 2.1 del capitulo 2) A es libre y por lo tanto proyectiva.

Ahora $\mathbb{Q}$ no es proyectivo (pero si este es, entonces por la ***propiedad 2.2*** del capitulo 2, debe ser libre y también divisible; sin embargo, el $\mathbb{Z}$ - módulo no nulo no es divisible, luego, $Pd_{\mathbb{Z}}\ (\mathbb{Q}) - 1$.

Consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$

Ambas $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles y por consiguiente $\mathbb{Z}$ - módulo inyectivos, puesto que podemos aplicar el ***teorema 2.7*** del capitulo 2.

De otra forma, $\mathbb{Z}$ no es divisible y por lo tanto no es inyectivo luego, $Id_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})=1$.

Teorema 3.10:

$\sup_A \ell.pd_\wedge(A)=\sup_c \ell.Id_\wedge(C)$ donde A y C varían en $\mathbb{C}_\wedge^L$

Prueba:

Probaremos primero que $\sup_A \ell.pd_\wedge(A)\leq \sup_c \ell.Id_\wedge(C)$

Supongamos que $\sup_c \ell.Id_\wedge(C)=n$, donde $0\leq n<\infty$, lo cual podemos suponer basándonos en la ***propiedad 2.4*** del capitulo 2.

Sea A que pertenece $\mathbb{C}_\wedge^L$ y, aplicando la ***propiedad 2.1*** del capitulo 2, construimos una sucesión exacta $0\rightarrow A_n\rightarrow P_{n-1}\rightarrow\ldots\rightarrow P_1\rightarrow P_0\rightarrow A\rightarrow 0$

Con P_i proyectivo.

Si podemos demostrar que A_n es proyectivo, esto demostrara que $\ell.pd_\wedge(A)\leq n$ y lo que queremos probar quedara establecido. Supongamos que C pertenece a $\mathbb{C}_\wedge^L$. Observe que si podemos demostrar que $Ext_\wedge^1(A_n, C)=0$, entonces el carácter proyectivo de A_n se cumplirá por el ***teorema 3.1***.

Si formamos una sucesión exacta $0\rightarrow C\rightarrow E_0\rightarrow E_1\rightarrow\ldots\rightarrow E_n\rightarrow 0$ donde E_j es inyectiva, puesto que $\ell.Id_\wedge(C)\leq n$.

Por ***teorema 3.2***, $Ext^1_\wedge$ (A, E_n)=0, por lo tanto, por el teorema 3.8, $Ext^1_\wedge$ (A_n, C)=0 lo que demuestra la desigualdad inicial. La otra desigualdad $\sup_c \ell.Id_\wedge(C) \leq \sup_A \ell.pd_\wedge(A)$ se verifica de manera similar.

3.8 Dimensión Global

Definición:

En virtud del teorema anterior, podemos escribir $\ell.GD(\wedge)=\sup_A \ell.pd_\wedge(A)=\sup_c \ell.Id_\wedge(C)$ y llamamos $\ell.GD(\wedge)$ la dimensión global izquierda de $\wedge$.

Por lo tanto A y C cambian en $\mathbb{C}^L_\wedge$.

Si trabajamos en $\mathbb{C}^R_\wedge$ obtenemos la dimensión global derecha de $\wedge$.

Puede suceder que $\ell.GD(\wedge)$ y $\Upsilon.GD(\wedge)$ sean diferentes.

Teorema 3.11

$\ell.GD(\wedge)=\sup_I \ell.pd_\wedge(\wedge/I)$, donde I representan todos los ideales izquierdos de $\wedge$.

Prueba:

es suficiente mostrar que:

$\ell.GD(\wedge) \leq \sup_I \ell.pd_\wedge(\wedge/I)$

como la desigualdad opuesta es obvia, podemos suponer que $\sup_I \ell.pd_\wedge(\wedge/I)=n$, donde $0 \leq n < \infty$.

Sea C pertinente a $\mathbb{C}^L_\wedge$. Es suficiente probar que $\ell.Id_\wedge(C) \leq n$.

Si n=0 entonces para todo I, Λ /I es proyectivo y por lo tanto Ext^1_Λ (Λ /I,C=0). Del ***teorema 3.4***, se puede deducir que C es inyectivo y por lo tanto ℓ .Id$_\Lambda$ (C) $\leq 0 \leq n$ podemos entonces suponer que $1 \leq n < \infty$.

Construyamos, con la ayuda de la ***propiedad 2.5*** del capitulo 2 una sucesión exacta:

$0 \to C \to E_0 \to \ldots \to E_{n-1} \to C_n \to 0$

Con E_i inyectivo

Ahora es suficiente demostrar que C_n es inyectivo por ***teorema 3.4***, se sigue que Ext^1_Λ (Λ /I,C_n)=0 para cada ideal izquierdo I.

Sea I un ideal izquierdo. Como 1 .pd$_\Lambda$ (Λ /I)$\leq$n podemos construir una sucesión exacta.

$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \Lambda /I \to 0$

Con P_i proyectiva para $0 \leq i \leq n$.

Entonces Ext^1_Λ (P_n, C)=0.

Pero, ahora Ext^1_Λ (Λ /I, C_n)=0 por el ***teorema 3.8*** lo cual demuestra el teorema.

Ejemplo 3.5: GD($\mathbb{Z}$)=1

Solución:

Para todo ideal I de $\mathbb{Z}$, tenemos una sucesión exacta $0 \to I \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/I \to 0$

Ahora $\mathbb{Z}$ es proyectivo y, si $I \neq 0$, I y $\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos isomorfismo.

Para todo I es proyectivo.

Se sigue que $Pd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/I) \leq 1$. Por consiguiente, por el teorema 3.11, GD ($\mathbb{Z}$) ≤ 1. Pero, por el ***ejemplo 3.4*** $Pd_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})=1$ y finalmente GD($\mathbb{Z}$)=1

Sea A un $\wedge$ - módulo izquierdo.

Sabemos que podemos construir una sucesión exacta $0 \to A_1 \to P_0 \to A \to 0$ con P_0 proyectivo.

Podemos también construir una sucesión exacta $0 \to A_2 \to P_1 \to A_1 \to 0$ con P_1 proyectivo.

Realmente es posible continuar con este proceso de construcción indefinidamente y obtendremos una sucesión exacta de la siguiente forma: $0 \to A_{i-1} \to P_i \to A_i \to 0$, P_i es proyectivo.

Si combinamos estas sucesiones cortas, llegamos a obtener una sucesión exacta infinita como la que sigue:

$\ldots \to P_m \to P_{m-1} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$

Donde P_0, P_1, P_2, etc. Son todos proyectivos.

Una sucesión exacta de esta forma es llamada **resolución proyectiva de A**.

Note que A tiene dimensión proyectiva finita si y solo si esta tiene una resolución proyectiva que esta compuesta de módulos 0, de algunos puntos en adelante.

Ahora B es un $\wedge$- módulo izquierdo. Usando consideraciones similares podemos construir una resolución inyectiva de B, que es una sucesión exacta infinita

$0 \to B \to E_0 \to E_1 \to E_{m-1} \to E_m \to \ldots$

Donde cada E_i es inyectivo.

Podemos observar que B tiene dimensión inyectiva si y solo si tiene una resolución inyectiva cuyos módulos componentes son módulos 0 de algunos puntos en adelante; sin embargo, podemos observar mejor la situación en el caso de ser inyectivo.

Sea E_0 el cubrimiento inyectivo de B, entonces podemos construir una sucesión exacta, $0 \to B \to E_0 \to B_1 \to 0$ donde $B \to E_0$ es una proyección inclusiva.

De la misma forma podemos construir una sucesión exacta $0 \to B_1 \to E_1 \to B_2 \to 0$ donde E_1, es el cubrimiento inyectivo de B_1 y así sucesivamente. Estas sucesiones pueden en forma conjunta dar una resolución inyectiva de B.

En particular vemos que existen sucesiones exactas $0 \to B \xrightarrow{\varepsilon} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \xrightarrow{d_2} E_3 \to \ldots$

Donde :

i) E_0 es el cubrimiento inyectivo de la $\varepsilon(B)$ y

ii) Para cada $i \geq 0$, E_{i+1} es cubrimiento inyectivo de $d_i(E_i)$. Tal sucesión exacta es conocida como una resolución inyectiva minimal de B.

Teorema 3.12:

sean los Λ - módulo B y B' que tiene resolución minimal inyectiva

$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \longrightarrow \ldots$ Y

$0 \longrightarrow B' \longrightarrow E'_0 \xrightarrow{d'_0} E'_1 \xrightarrow{d'_1} E'_2 \longrightarrow \ldots$

Respectivamente.

Además sea f: $B \xrightarrow{\sim} B'$ un isomorfismo en $\mathbb{C}_{\wedge}$. Entonces es posible construir una sucesión de $\wedge$ - isomorfismo $\varnothing_0 : E_0 \xrightarrow{\sim} E'_0$, $\varnothing_1 : E_1 \xrightarrow{\sim} E'_1$ y así sucesivamente en el cual en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{d_0} & E_1 & \xrightarrow{d_1} & E_2 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow f & & \downarrow \varnothing_0 & & \downarrow \varnothing_1 & & \downarrow \varnothing_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & E'_0 & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & E'_2 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

Es conmutativo.

Observación: Este teorema muestra que la resolución minimal inyectiva es esencialmente única.

Prueba:

La existencia de $\varnothing_0$ que se encuentra en el primer cuadro se debe a la aplicación de la **propiedad 2.6 del capitulo 2**, lo cual induce un isomorfismo de $d_0(E_0)$ en $d'_0\,(E'_0)$ Pero la misma propiedad el isomorfismo inducido de $d_0(E_0)$ en $d'_0\,(E'_0)$ puede ser extendido a un isomorfismo $\varnothing_1 : E_1 \xrightarrow{\sim} E'_1$ entre sus cubrimientos inyectivos, y ahora tenemos $\varnothing_1 d_0 = d'_0\, \varnothing_0$. Ahora se induce un isomorfismo $d_1(E_1)$ en $d'_1\,(E'_1)$ y este conduce a un isomorfismo $\varnothing_2 : E_2 \xrightarrow{\sim} E'_2$, lo que satisface $\varnothing_2 d_1 = d'_1 \varnothing_1$ y así indefinidamente.

Teorema 3.13:

Supongamos que $0 \longrightarrow B \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \longrightarrow \ldots$ es una resolución minimal inyectiva de Λ - módulos izquierdos B y sea $n \geq 0$ un entero. Entonces $\ell.\mathrm{Id}_\Lambda(B)<n$ si y solo si $E_i=0$ para todo $i \geq n$

Prueba:

Es claro que si $E_m=0$, Entonces $E_h=0$ $\forall\, h \geq m$.

Debemos por consiguiente asumir que $\ell.\mathrm{Id}_\Lambda(B)<n$ y deducimos que $E_n=0$.

La prueba entonces se completa, por lo tanto las otras afirmaciones son triviales.

Es evidente que podemos suponer que $n \geq 2$, puesto que esparte del argumento.

Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_{n-2} \longrightarrow d_{n-2}(E_{n-2}) \longrightarrow 0$$

Y por lo tanto $\ell.\mathrm{Id}_\Lambda(B)<n$, existe también la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E'_0 \longrightarrow E'_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E'_{n-2} \longrightarrow E'_{n-1} \longrightarrow 0$$

Donde cada E_j es inyectiva

Por 3.6 $d_{n-2}(E_{n-2})$ también es inyectivo lo cual implica que $d_{n-2}(E_{n-2})=E_{n-1}$.

Así d_{n-2} es suryectivo y por consiguiente $d_{n-1}(E_{n-1})=0$.

Por lo tanto E_n es el cubrimiento inyectivo de $d_{n-1}(E_{n-1})$, lo cual prueba que $E_n=0$

Bibliografía

Atiyah, M.F. y Macdonnald, I,G (1969) **Introduction to commutative Algebra**. Addison – Wesley, Reading, Mass.

Bourbaki, N. (1970) **Algebre**, Hermann, Paris

Cartan, H. y Eilenberg, S. (1956). **Homological Algebra**. Princeton, University Press, Princenton, Nueva Jersey.

Chevalley, C. (1956) **Fundamental Concepts of Algebra**, Academic, Nueva York, N.Y.

Cohn, P.M. (1979) **Algebra**, Wiley, Nueva York, N.Y.

Donald R. Horner.(1971).**Algebraic Elementary Functions and Relations**. Holt Rinehart and Wiston

Fuchs, L. (1960) **Abelian Groups**, Pergamen, Londres

Gentile, Enzo R. (1971) **Estructuras Algebraicas**. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires Argentina. Monografía No. 12, O.E.A..

Godement, R. (1963). **Cours d' Algibre**. Hermann, Paris.

Griffith, A. (1970) **Infinite Abelian Group Theory**, University of Chicago Press, Chicago, Illinois

Halmos, P.R. (1958). **Finite – Dimensional Vector Spaces**. Segunda Edición. D. Van Nostrand Company, Inc. Princenton.

Jacobson, N. (1953) **Lesctures in Abstract Algebra.** Vils I y II., Van Nostrand Princenton, Nueva Jersey.

Jacobson, N. (1985). **Basic Algebra** New York: W.H. Freeman and Company.

Jaus, J. (1964). **Ring and Homology.** Holt, Rineheart and Wiston, New Cork.

Lang, Serge. (1983). **Undergraduate Analysis.** New York: Springer – Verlag.

Lang, Serge. (1984). **Álgebra.** Second Edition. Addilson Wesley Publishing Company, Inc. U.S.A.

Lezana, O. y Villamaría, G. (1994). **Topología, Módulos y anillos.** Santa Fe de Bogotá. Sección de Publicaciones Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.

Maclane, S. y Birkhoff, G. (1967) **Algebra**,Mac Millan, Nueva York, N.Y.

Micali, Artibano y Villamayor Orlando. **Estructuras algebraicas IV.** Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. O.E.A., Monografía No. 16.

Milton, P y Wu, Y. (1977). **Curso de Álgebra Moderna.** España, Reverté, S.A..

Northcott, D.G. (1973). **A First Course of homological Algebra**. Cambridge University Press. Printed in Great Britain.

Renault, G. (1975). **Algebre Non Commutative**, Gauthier – Villars. Paris

Zariski, O. y Samuel, P. (1958) **Conmutative Algebra, Vol 1**, Van Nestrand, Pricenton, Nueva Jersey.