UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

ASPECTOS DE LA DISTRIBUCION WISHART
EN ESTADISTICA MULTIVARIANTE.

Por:

Aurora Mejía C.

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el Grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Estadística Matemática.

Febrero, 1986

T.M

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

acho del Vicerrector

22 ABR 1986

Director de Tesis ______________________
JORGE POLTRONIERI, Ph.D.

Miembro del Jurado ______________________
CONCEPCION VALDES C.,Ph.D.

Miembro del Jurado ______________________
MANUEL A. TEJADA S., M.Sc.

Fecha 14 de Marzo de 1986

216382

Ciudad Universitaria "Octavio Méndez Pereira"
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA, R. DE P.

DEDICATORIA

Quiero dedicar con un cariño muy especial este trabajo:

A mis padres, Cecilia y Emilio, quienes con mucha comprensión y amor me han ayudado a ser lo que hoy soy.

A Julio, que con voz alentadora, no me permitió desmayar jamás.

AGRADECIMIENTO

A Dios.

Al profesor Jorge Poltronieri, por sus sabias enseñanzas, acertados consejos e infinita paciencia.

A mis compañeros Ibarra y Ochoa, que estuvieron conmigo en los momentos más difíciles.

A mis amigas Argelia, Dilcia, Lulu, Mirta y Teresita por los consejos atinados y el ánimo que siempre me brindaron.

A todas aquellas personas que de una manera u otra hicieron posible la culminación de este trabajo.

INDICE

		Página
INTRODUCCION......................................		x
CAPITULO I.	FORMAS LINEALES Y CUADRATICAS.	
	Formas Lineales......................	2
	Distribución de Formas Lineales......	3
	Independencia de Formas Lineales.....	5
	Formas Cuadráticas..................	7
	Valor Esperado de una Forma Cuadrática	7
	Producto de Kronecker Asimétrico......	8
	Matriz de Covarianza de una Forma Cuadrática y una Forma Lineal............	9
	Matriz de Covarianza de dos Formas Cuadráticas..........................	13
	Independencia entre una Forma Cuadrática y una Forma Lineal.............	18
	Independencia entre dos Formas Cuadráticas...............................	20
CAPITULO II.	FUNCION DE DENSIDAD DE LA DISTRIBUCION WISHART NO CENTRADA.	
	Raiz Cuadrada de una Matriz Simétrica	25
	Distribución Wishart no Centrada......	25
	Reducción de una Matriz a la Forma Diagonal............................	26
	Función de Densidad. Caso Lineal.....	32

Página

Función Característica. Caso General.. 39

Suma de Matrices que siguen Distribuciones Wishart no Centradas........... 44

Formas Cuadráticas que siguen una Distribución Wishart..................... 45

CAPITULO III. FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE LAS RAICES Y VECTORES PROPIOS DE MATRICES ALEATORIAS QUE SIGUEN DISTRIBUCIONES WISHART CENTRADAS.

Valores y Vectores Propios de una Matriz que sigue una Distribución Wishart Centrada 52

El Jacobiano de $A = E'F\,E$ la Transformación $B = E'(I - F)E$ ... 56

Densidad Conjunta de las Matrices E y F 60

La Función de Distribución de los Valores Propios de una Matriz Aleatoria A, Singular.......................... 65

La Función de Distribución de los Valores Propios de una Matriz Aleatoria A, no Singular 70

CONCLUSIONES 78

BIBLIOGRAFIA.. 81

INTRODUCCION

El trabajo que estamos presentando como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Estadística, posee las características que de inmediato señalo.

En primer lugar, se inspira en el problema de la generalización de la distribución Chi-cuadrado, utilizada a menudo en la realización de pruebas de hipótesis. La mencionada generalización se conoce como la distribución Wishart.

Para iniciar el trabajo se hizo necesario definir conceptos como "formas lineales" y "formas cuadráticas" para el caso multivariado, esto es, utilizando matrices aleatorias.

Mostramos además algunos resultados importantes, entre los cuales se destacan las condiciones bajo las cuales mencionadas formas son independientes.

Cuando se trata con distribuciones, surgen dos funciones importantes, "la función de densidad" y "la función característica". Una vez obtenida la función característica, caracterizamos las condiciones bajo las cuales una forma cuadrática sigue una distribución Wishart.

Por último, deducimos la función de densidad de las raíces y vectores propios de una matriz aleatoria que sigue una distribución Wishart.

Es importante resaltar que para el estudio de la distribución Wishart en el caso general, sería necesario abordar el estudio de otros temas que nos alejarían del propósito del presente trabajo.

CAPITULO I

"FORMAS LINEALES Y CUADRATICAS"

En este primer capítulo estableceremos algunos resultados relativos a las formas lineales y cuadráticas, resultados que serán de verdadera importancia para el presente trabajo.

El estudio al cual hemos hecho mención, será circunscrito al caso en que, la matriz Y de orden p x n, asociada a la forma lineal o cuadrática sea tal que, sus columnas Y_α para $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, se distribuyan como normales con la misma matriz de covarianza Σ.

Notación

Para n vectores Y_α de orden p x 1 distribuidos normalmente con medias μ_α y matriz de covarianza Σ, diremos que la matriz $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)_{p \times n}$ tiene una distribución normal con matriz de media $\Gamma = (\mu_1, \ldots, \mu_n)_{p \times n}$ y matriz de covarianza $V \otimes \Sigma$ donde, V es una matriz simétrica de orden n x n tal que, $\operatorname{cov}(Y_\alpha, Y_\beta) = v_{\alpha\beta} \Sigma$ y, $V \otimes \Sigma$ es el producto de Kronecker de la matriz V y la matriz Σ.

Lo anterior será denotado por $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$.

Si resultase que V = I, las columnas de la matriz Y son independientes entre si.

Definición I.1 (Formas Lineales)

Si $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ y B es una matriz de orden n x q diremos que X = Y B es una forma lineal.

Si además $B = (B_1, \ldots, B_q)$, entonces para cada $1 \leq \alpha \leq q$,

$$X_\alpha = Y\, B_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\, Y_\beta$$

Proposición I.1

Si $Y \sim N\,(\Gamma,\, I \otimes \Sigma)$, B es una matriz de orden n x q y A es una matriz de orden q x p, entonces:

(i) $Y\,B \sim N\,(\Gamma B,\, B'B \otimes \Sigma)$

(ii) $A\,Y \sim N\,(A\Gamma,\, I \otimes A\,\Sigma\,A')$

Demostración

(i) Sea $Z = Y\,B$, entonces, para cada $1 \leq \alpha \leq p$

$$Z_\alpha = Y\,B_\alpha = \sum_{i=1}^{n} Y_i\, b_{i\alpha}$$

donde, Z_α y B_α representan la α-ésima columna de las matrices Z y B respectivamente.

Además, para todo $1 \leq \alpha \leq p$ se tiene:

$E(Z_\alpha) = E(Y\,B_\alpha) = E(Y)\,B_\alpha = \Gamma B_\alpha$

luego, $E(Z) = \Gamma B$

Por otro lado, para todo $1 \leq \alpha, \beta \leq p$ se tendrá;

$$\mathrm{c\,o\,v}(Z_\alpha, Z_\beta) = E\left[(Z_\alpha - \Gamma B_\alpha)(Z_\beta - \Gamma B_\beta)'\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\, b_{i\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, b_{i\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\, b_{j\beta} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, b_{j\beta}\right)'\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E\left[(Y_i\, b_{i\alpha} - \mu_i\, b_{i\alpha})\right.$$

$$\left.(Y_j\, b_{j\beta} - \mu_j\, b_{j\beta})'\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_{i\alpha}\, b_{j\beta}\, E\left[(Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)'\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_{i\alpha}\, b_{j\beta}\, \delta_{ij}\, \Sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{i\alpha}\, b_{i\beta}\, \Sigma$$

$$= (B'\,B)_{\alpha\beta}\, \Sigma$$

luego, la matriz de covarianza de Z es, $B'\,B \otimes \Sigma$

Finalmente, dado que por hipótesis Y se distribuye normal, entonces, $Z = Y\,B$ también se distribuye normal, con media ΓB y matriz de covarianza $B'\,B \otimes \Sigma$, esto es;

$$Z \sim N\,(\Gamma B,\ B'\,B \otimes \Sigma)$$

(ii) Consideremos ahora, $X = A\,Y$, entonces, para todo $1 \leqslant \alpha \leqslant n$

$$X_\alpha = A\,Y_\alpha$$

donde, al igual que en (i), X_α y Y_α representan la α-ésima columna de las matrices X e Y respectivamente.

Además, para todo $1 \leqslant \alpha \leqslant n$ se tendrá;

$$E\,(X_\alpha) = E\,(A\,Y_\alpha) = A\,E\,(Y_\alpha) = A\mu_\alpha$$

luego, $E(X) = A\Gamma$

Ahora, para todo $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ tendremos;

$$\begin{aligned} cov(X_\alpha, X_\beta) &= E\left[(X_\alpha - A\mu_\alpha)(X_\beta - A\mu_\beta)'\right] \\ &= E\left[(A Y_\alpha - A\mu_\alpha)(A Y_\beta - A\mu_\beta)'\right] \\ &= E\left[A (Y_\alpha - \mu_\alpha)(Y_\beta - \mu_\beta)' A'\right] \\ &= A\, E\left[(Y_\alpha - \mu_\alpha)(Y_\beta - \mu_\beta)'\right] A' \\ &= \delta_{\alpha\beta} A \Sigma A' \end{aligned}$$

luego, la matriz de covarianza de X es; $I \otimes A \Sigma A'$

Por último, como Y se distribuye normal por hipótesis, entonces, $X = A Y$ también se distribuye normal, con media $A\Gamma$ y matriz de covarianza $I \otimes A \Sigma A'$, esto es;

$$X \sim N(A\Gamma, I \otimes A \Sigma A')$$

Proposición I.2

Sean, $Y \sim N(\Gamma, I \otimes \Sigma)$ y, A, B dos matrices cuadradas de orden n. Entonces, para que las formas lineales $Y A$ y $Y B$ sean independientes, es necesario y suficiente, que $A' B = 0$.

Demostración

Sean $Z = Y A$ y, $X = Y B$, entonces,

para todo $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $Z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} Y_i \, a_{i\alpha}$ y,

para todo $1 \leqslant \beta \leqslant p$, $X_\beta = \sum_{j=1}^{n} X_j \, b_{j\beta}$

Como para cada $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p$, Z_α y X_β son vectores distribuidos normalmente, ellos serán independientes, si y solo si, para cada $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p$ $\operatorname{cov}(Z_\alpha, X_\beta) = 0$

Tendremos entonces;

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Z_\alpha, X_\beta) &= E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \, a_{i\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, a_{i\alpha}\Big) \\
&\qquad \Big(\sum_{j=1}^{n} Y_j \, b_{j\beta} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \, b_{j\beta}\Big)'\Big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E\big[(Y_i \, a_{i\alpha} - \mu_i \, a_{i\alpha}) \\
&\qquad (Y_j \, b_{j\beta} - \mu_j \, b_{j\beta})'\big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\alpha} \, b_{j\beta} \, E\big[(Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)'\big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\alpha} \, b_{j\beta} \, \delta_{ij} \Sigma \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha} \, b_{i\beta} \, \Sigma \\
&= (A' B)_{\alpha\beta} \Sigma
\end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{cov}(Y A, Y B) = A' B \otimes \Sigma$ de donde,

$\operatorname{cov}(Y A, Y B) = 0$, si y solo si, $A' B = 0$

Definición I.2 (Formas Cuadráticas)

Sea $Y \sim N\ (\Gamma,\ V \otimes \Sigma)$ y B una matriz simétrica cuadrada de orden n. Definimos el producto

$$Y\ B\ Y' = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\ Y_{\alpha}\ Y_{\beta}'$$

como una forma cuadrática.

Proposición I.3

Sea $Y \sim N\ (\Gamma,\ I \otimes \Sigma)$ y A una matriz simétrica de orden n. Entonces;

$$E\ (\ Y\ A\ Y'\ ) = tr\ (A)\ \Sigma + \Gamma\ A\ \Gamma'$$

Demostración

Sea $(Y\ A\ Y')_{\alpha\beta}$, la $\alpha\beta$ -ésima posición de $Y\ A\ Y'$, entonces;

$$(\ Y\ A\ Y'\ )_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{n} y_{\alpha i}\ a_{ij}\ y_{\beta j}$$

luego,

$$E\left[(Y\ A\ Y')_{\alpha\beta}\right] = \sum_{i,j=1}^{n} E(y_{\alpha i}\ a_{ij}\ y_{\beta j})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ E(y_{\alpha i}\ y_{\beta j})$$

como,

$$E\left[(y_{\alpha i}-\mu_{\alpha i})(y_{\beta j}-\mu_{\beta j})\right]=\sigma_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}$$

y,

$$E\left[(y_{\alpha i}-\mu_{\alpha i})(y_{\beta j}-\mu_{\beta j})\right]=E\,(y_{\alpha i}\,y_{\beta j})-\mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta j}$$

entonces,

$$E(y_{\alpha i}\,y_{\beta j})=\sigma_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}+\mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta j}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}E\left[(Y\,A\,Y')_{\alpha\beta}\right] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}+\mu_{\alpha i}\,\mu_{\beta j})\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\sigma_{\alpha\beta}\,\delta_{ij}+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{\alpha i}\,a_{ij}\,\mu_{\beta j}\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\sigma_{\alpha\beta}+(\Gamma\,A\,\Gamma')_{\alpha\beta}\\ &= \operatorname{tr}\,(A)\,\sigma_{\alpha\beta}+(\Gamma\,A\,\Gamma')_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

así,

$$E\,(Y\,A\,Y')=\operatorname{tr}\,(A)\,\Sigma+\Gamma\,A\,\Gamma'$$

<u>Definición I.3</u> (Producto de Kronecker asimétrico)

Sean A y B dos matrices. Definimos el producto de Kronecker asimétrico de A y B, que denotamos $A\,\dot{\otimes}\,B$, por:

$$(A\,\dot{\otimes}\,B)_{ijkl}=a_{il}\,b_{kj}=(A\otimes B)_{ilkj}$$

esto es, la entrada $ijkl$ de $A\,\dot{\otimes}\,B$, es la entrada $ilkj$ de $A\otimes B$.

Proposición I.4

Sean, $Y \sim N(\Gamma, I \otimes \Sigma)$, A una matriz simétrica de orden n y, B una matriz de orden q x n.

Entonces, la matriz de covarianza de la forma cuadrática $Y A Y'$ y la forma lineal $Y B'$, esta dada por;

$$\mathrm{cov}(Y A Y', Y B') = \Gamma A B' \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B'$$

Demostración

Tenemos que;

$$E(Y A Y') = \Gamma A \Gamma' + \mathrm{tr}(A) \Sigma$$

y,

$$E(Y B') = \Gamma B'$$

entonces,

tomando $\mathring{Y} = Y - \Gamma$ y, $\Gamma A = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ obtenemos;

$$Y A Y' - \Gamma A \Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma = \mathring{Y} A \mathring{Y}' + \Gamma A \mathring{Y}' + \mathring{Y} A \Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma \quad (1)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (a_{\alpha\beta} \mathring{Y}_\alpha \mathring{Y}_\beta' + \delta_{\alpha\beta}\gamma_\alpha \mathring{Y}_\beta' + \delta_{\alpha\beta}\mathring{Y}_\alpha \gamma_\beta' - \delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \Sigma)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left\{ a_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha} \mathring{Y}_\beta' \\ \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha} \mathring{Y}_\beta' \end{bmatrix} + \delta_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \gamma_{1\alpha} \mathring{Y}_\beta' \\ \vdots \\ \gamma_{p\alpha} \mathring{Y}_\beta' \end{bmatrix} + \delta_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha} \gamma_\beta' \\ \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha} \gamma_\beta' \end{bmatrix} - \delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \Sigma \right\}$$

Consideremos ahora,

$$\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad \text{y sea} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix}_{(p \times p) \times 1}$$

Disponiendo las filas de la forma cuadrática (1) de modo que el arreglo nos resulte en un vector tendremos:

$$Y A Y' - \Gamma A \Gamma' - tr(A)\Sigma \longrightarrow \sum_{\alpha,\beta} \left\{ a_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha}\mathring{Y}_{\beta} \\ \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha}\mathring{Y}_{\beta} \end{bmatrix} + \delta_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \gamma_{1\alpha}\mathring{Y}_{\beta} \\ \vdots \\ \gamma_{p\alpha}\mathring{Y}_{\beta} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \delta_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta} \\ \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta} \end{bmatrix} - \delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \sigma \right\}$$

Por otro lado, tomando también $\mathring{Y} = Y - \Gamma$ se tendrá;

$$(Y - \Gamma)\, B' = \sum_{\gamma=1}^{n} (b'_{\gamma 1}\, \mathring{Y}_{\gamma},\ \ b'_{\gamma 2}\, \mathring{Y}_{\gamma}\ , \dots,\ b'_{\gamma q}\, \mathring{Y}_{\gamma}\ )$$

y, efectuando un arreglo similar al de la forma cuadrática tendremos,

$$(Y - \Gamma)\, B' \longrightarrow \sum_{\gamma=1}^{n} (b'_{\gamma 1}\, \mathring{Y}'_{\gamma}\ , \dots,\ b'_{\gamma q}\, \mathring{Y}'_{\gamma}\ )$$

Luego, la covarianza entre $Y A Y'$ y, $Y B'$ es;

$$E\left\{\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left\{a_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\,\mathring{Y}_{\beta}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\,\mathring{Y}_{\beta}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\gamma_{1\alpha}\,\mathring{Y}_{\beta}\\ \vdots\\ \gamma_{p\alpha}\,\mathring{Y}_{\beta}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\,\gamma_{\beta}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\,\gamma_{\beta}\end{bmatrix}-\delta_{\alpha\beta}\,a_{\alpha\beta}\,\sigma\right\}(b'_{\gamma 1}\,\mathring{Y}'_{\gamma},\ldots,b'_{\gamma q}\,\mathring{Y}'_{\gamma})\right\}$$

$$E\left\{\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\begin{bmatrix}a_{\alpha\beta}\,\mathring{Y}_{1\alpha}\mathring{Y}_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\,\gamma_{1\alpha}\,\mathring{Y}_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\sigma_{1}\\ \vdots\\ a_{\alpha\beta}\,\mathring{Y}_{p\alpha}\mathring{Y}_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\gamma_{p\alpha}\mathring{Y}_{\beta}+\delta_{\alpha\beta}\mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}-\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\sigma_{p}\end{bmatrix}(b'_{\gamma 1}\,\mathring{Y}'_{\gamma},\ldots,b'_{\gamma q}\,\mathring{Y}'_{\gamma})\right\}$$

como los términos de ordenes 1 y 3 se anulan para distribuciones normales centradas, entonces, $\mathrm{cov}\,(Y A Y', Y B') =$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left\{E\left[\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\gamma_{1\alpha}\,b'_{\gamma 1}\,\mathring{Y}_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\mathring{Y}_{1\alpha}b'_{\gamma 1}\gamma_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\ldots+\gamma_{1\alpha}b'_{\gamma q}\,\mathring{Y}_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\mathring{Y}_{1\alpha}\,b'_{\gamma q}\gamma_{\beta}\mathring{Y}'_{\gamma}\\ \\ \gamma_{p\alpha}\,b'_{\gamma 1}\,\mathring{Y}_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\mathring{Y}_{p\alpha}b'_{\gamma 1}\gamma_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\ldots+\gamma_{p\alpha}b'_{\gamma 1}\,\mathring{Y}_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}+\mathring{Y}_{p\alpha}b'_{\gamma q}\,\gamma_{\beta}\,\mathring{Y}'_{\gamma}\end{bmatrix}\right]\right\}$$

Examinemos ahora el elemento en la entrada ijkl de

$cov(Y A Y', Y B');$

$$\left[cov(Y A Y', Y B')\right]_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left\{ E\left[\delta_{\alpha\beta}(\gamma_{i\alpha} b'_{\gamma j} \mathring{Y}_{k\beta} \mathring{Y}'_{l\gamma} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathring{Y}_{i\alpha} b'_{\gamma j} \gamma_{k\beta} Y_{l\gamma})\right]\right\}$$

como, $E(\mathring{Y}_{k\beta} \mathring{Y}'_{l\gamma}) = 0$ si $\beta \neq \gamma$ y, $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$

entonces, $\left[cov(Y A Y', Y B')\right]_{ijkl} =$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left[\delta_{\alpha\beta} \gamma_{i\alpha} b'_{\gamma j} E(\mathring{Y}_{k\beta} \mathring{Y}'_{l\gamma}) + \gamma_{k\beta} b'_{\gamma j} E(\mathring{Y}_{i\alpha} \mathring{Y}'_{l\gamma}) \right]$$

$$= \sum_{\beta} \left[\gamma_{i\beta} b'_{\beta j} E(\mathring{Y}_{k\beta} \mathring{Y}'_{l\beta}) + \gamma_{k\beta} b'_{\beta j} E(\mathring{Y}'_{i\beta} \mathring{Y}'_{l\beta}) \right]$$

$$= \sum_{\beta} \gamma_{i\beta} b'_{\beta j} \sigma_{kl} + \sum \gamma_{k\beta} b'_{\beta j} \sigma_{il}$$

$$= (\Gamma A B')_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{il} (\Gamma A B')_{kj}$$

luego,

$$\left[cov(Y A Y', Y B')\right]_{ijkl} = (\Gamma A B' \otimes \Sigma)_{ijkl} + (\Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B')_{ijkl}$$

por lo tanto,

$$cov(Y A Y', Y B') = \Gamma A B' \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B'$$

Observemos que

$$cov(Y B', Y A Y') = B A \Gamma' \otimes \Sigma + B A \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma$$

Proposición I.5

Sea $Y \sim N(\Gamma, I \otimes \Sigma)$ y, A, B dos matrices simétricas de orden n. Entonces, la covarianza entre las formas cuadráticas $Y A Y'$ y, $Y B Y'$ está dada por:

$$\mathrm{cov}(Y A Y', Y B Y') = \mathrm{tr}(A B)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Sigma) +$$
$$+ \Sigma \otimes \Gamma A B \Gamma' + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B \Gamma' +$$
$$+ \Gamma A B \Gamma' \otimes \Sigma + \Gamma A B \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma$$

Demostración

Se tiene que:

$$E(Y A Y') = \Gamma A \Gamma' + \mathrm{tr}(A)\Sigma$$

y, $$E(Y B Y') = \Gamma B \Gamma' + \mathrm{tr}(B)\Sigma$$

Sean ahora, $\Gamma A = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$; $\Gamma B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix} \text{ con, } \Sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \text{ y, } \mathring{Y} = Y - \Gamma$$

Entonces,

$$Y A Y' - \Gamma A \Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma = \mathring{Y} A \mathring{Y}' + \Gamma A \mathring{Y}' + \mathring{Y} A \Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma \quad (2)$$

y,

$$Y B Y' - \Gamma B \Gamma' - \mathrm{tr}(B)\Sigma = \mathring{Y} B \mathring{Y}' + \Gamma B \mathring{Y}' + \mathring{Y} B \Gamma' - \mathrm{tr}(B)\Sigma \quad (3)$$

El arreglo como un vector de la forma cuadrática (2) está dado por:

$$\sum_{\alpha,\beta}\left\{a_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\gamma_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\\ \vdots\\ \gamma_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\end{bmatrix}+\delta_{\alpha\beta}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}\end{bmatrix}-\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\sigma\right\}$$

Para el caso de la forma cuadrática (3) el arreglo como un vector es dado por:

$$\sum_{\delta,\tau}\left\{b_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\delta}\ \mathring{Y}_{\tau}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \mathring{Y}_{\tau}\end{bmatrix}+\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\lambda_{1\delta}\ \mathring{Y}_{\tau}\\ \vdots\\ \lambda_{p\delta}\ \mathring{Y}_{\tau}\end{bmatrix}+\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\delta}\ \lambda_{\tau}\\ \vdots\\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \lambda_{\tau}\end{bmatrix}-\delta_{\delta\tau}b_{\delta\tau}\sigma\right\}$$

Luego, $c\ o\ v\ (Y\ A\ Y',\ Y\ B\ Y') =$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau}\left\{E\left[a_{\alpha\beta}\ b_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{1\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\cdots\mathring{Y}_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{1\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\cdots\mathring{Y}_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\end{bmatrix}\right.\right. -$$

$$- \delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}\ b_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\mathring{Y}_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\,\sigma'_{1}\ \cdots\ \mathring{Y}_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \sigma'_{p}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mathring{Y}_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\,\sigma'_{1}\ \cdots\ \mathring{Y}_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \sigma'_{p}\end{bmatrix}+$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\gamma_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \lambda_{1\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\cdots\gamma_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\lambda_{p\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \gamma_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \lambda_{1\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\cdots\gamma_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\lambda_{p\delta}\ \mathring{Y}'_{\tau}\end{bmatrix}+$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix}\gamma_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{1\delta}\ \lambda'_{\tau}\cdots\gamma_{1\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \lambda'_{\tau}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \gamma_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{1\delta}\ \lambda'_{\tau}\cdots\gamma_{p\alpha}\ \mathring{Y}_{\beta}\ \mathring{Y}_{p\delta}\ \lambda'_{\tau}\end{bmatrix}+$$

$$
+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}\lambda_{1\beta}\mathring{Y}'_{\delta} & \cdots & \mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}\lambda_{p\delta}\mathring{Y}'_{\tau} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}\lambda_{1\delta}\mathring{Y}'_{\delta} & \cdots & \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}\lambda_{p\delta}\mathring{Y}'_{\tau} \end{bmatrix} +
$$

$$
+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\begin{bmatrix} \mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}\mathring{Y}_{1\delta}\lambda'_{\tau} & \cdots & \mathring{Y}_{1\alpha}\gamma_{\beta}\mathring{Y}_{p\delta}\lambda'_{\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}\mathring{Y}_{1\delta}\lambda_{\tau} & \cdots & \mathring{Y}_{p\alpha}\gamma_{\beta}\mathring{Y}_{p\delta}\lambda'_{\beta} \end{bmatrix} -
$$

$$
-\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\ b_{\delta\tau}\begin{bmatrix} \sigma_{1}\mathring{Y}_{1\delta}\mathring{Y}'_{\tau} & \cdots & \sigma_{1}\mathring{Y}_{p\delta}\mathring{Y}'_{\tau} \\ & & \\ \sigma_{p}\mathring{Y}_{1\delta}\mathring{Y}'_{\tau} & \cdots & \sigma_{p}\mathring{Y}_{p\delta}\mathring{Y}'_{\tau} \end{bmatrix} +
$$

$$
\left. +\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}\ b_{\delta\tau}\begin{bmatrix} \sigma_{1}\sigma'_{1} & \cdots & \sigma_{1}\sigma'_{p} \\ & & \\ \sigma_{p}\sigma'_{1} & \cdots & \sigma_{p}\sigma'_{p} \end{bmatrix} \ \Bigg] \right\}
$$

pues los términos de ordenes 1 y 3 se anulan para distribuciones normales centradas.

El elemento i j k l de c o v $(Y\,A\,Y',\ Y\,B\,Y')$ está dado por;

$$
\left[c\,o\,v(Y\,A\,Y',Y\,B\,Y')\right]_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau} E\Big[\, a_{\alpha\beta}b_{\delta\tau}\mathring{Y}_{i\alpha}\mathring{Y}_{k\beta}\mathring{Y}_{j\delta}\mathring{Y}_{l\tau} -
$$

$$
-\delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}b_{\delta\tau}\mathring{Y}_{i\alpha}\mathring{Y}_{k\beta}\sigma_{lj} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\mathring{Y}_{k\beta}\lambda_{j\delta}\mathring{Y}_{l\tau} +
$$

$$
+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\mathring{Y}_{k\beta}\mathring{Y}_{j\delta}\lambda_{l\tau} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\mathring{Y}_{i\alpha}\gamma_{k\beta}\lambda_{j\delta}\mathring{Y}'_{l\tau} +
$$

$$
+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\mathring{Y}_{i\alpha}\gamma_{k\beta}\mathring{Y}_{j\delta}\lambda_{l\tau} - \delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}\ b_{\delta\tau}\sigma_{ki}\mathring{Y}_{j\delta}\mathring{Y}_{l\tau} +
$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}\,b_{\delta\tau}\sigma_{ki}\sigma_{lj}\Big]$$

$$\Big[cov\,(Y\,A\,Y',Y\,B\,Y')\Big]_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau}\Big[a_{\alpha\beta}\,b_{\delta\tau}\,\cancel{(\delta_{\alpha\beta}\sigma_{ik}\delta_{\delta\tau}\sigma_{jl}} +$$

$$+\delta_{\alpha\delta}\sigma_{ij}\delta_{\beta\tau}\sigma_{kl} + \delta_{\alpha\tau}\sigma_{il}\delta_{\beta\delta}\sigma_{kj}) - \cancel{\delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}b_{\delta\tau}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{ik}\sigma_{lj}} +$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\lambda_{j\delta}\delta_{\beta\tau}\sigma_{kl} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\delta_{\beta\delta}\sigma_{kj}\lambda_{l\tau} +$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{k\beta}\delta_{\alpha\tau}\sigma_{il}\lambda_{j\delta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{k\beta}\delta_{\alpha\delta}\sigma_{ij}\lambda_{l\tau} -$$

$$-\cancel{\delta_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}b_{\delta\tau}\sigma_{ki}\delta_{\delta\tau}\sigma_{jl}} + \cancel{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}a_{\alpha\beta}b_{\delta\tau}\sigma_{ki}\sigma_{lj}}\Big]$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau} a_{\alpha\beta}\,b_{\delta\tau}\delta_{\alpha\delta}\sigma_{ij}\delta_{\beta\tau}\sigma_{kl} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau} a_{\alpha\beta}\,b_{\delta\tau}\delta_{\alpha\tau}\sigma_{il}\delta_{\beta\delta}\sigma_{kj} + \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\lambda_{j\delta}\delta_{\beta\tau}\sigma_{kl} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{i\alpha}\delta_{\beta\delta}\sigma_{kj}\lambda_{l\tau} + \sum_{\alpha,\beta,\delta,\tau}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{k\beta}\delta_{\alpha\tau}\sigma_{il}\lambda_{j\delta} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta,\delta,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\tau}\gamma_{k\beta}\delta_{\alpha\delta}\sigma_{ij}\lambda_{l\tau}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}\sigma_{ij}\sigma_{kl} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\,b_{\beta\alpha}\sigma_{il}\sigma_{kj} + \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{i\alpha}\lambda_{j\beta}\sigma_{kl} +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{i\alpha}\sigma_{kj}\lambda_{l\beta} + \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{k\beta}\sigma_{il}\lambda_{j\alpha} + \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{k\beta}\sigma_{ij}\lambda_{l\alpha}$$

$$= \mathrm{tr}\,(A\ B)\,\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \mathrm{tr}(A\ B)\,\sigma_{il}\sigma_{kj} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \gamma_{i\alpha}\,\lambda_{j\alpha}\sigma_{kl} + \sum_{\alpha} \gamma_{i\alpha}\,\lambda_{l\alpha}\,\sigma_{kj} + \sum_{\alpha} \gamma_{kj}\lambda_{j\alpha}\,\sigma_{il} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \gamma_{k\alpha}\,\lambda_{l\alpha}\sigma_{ij}$$

$$= \mathrm{tr}(A\ B)(\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{il}\sigma_{kj}) +$$

$$+ (\Gamma A\ B\,\Gamma')_{ij}\sigma_{kl} + (\Gamma A\ B\,\Gamma')_{il}\sigma_{kj} + (\Gamma A\ B\,\Gamma')_{kj}\sigma_{il} +$$

$$+ (\Gamma A\ B\,\Gamma')_{kl}\sigma_{ij}$$

$$= \mathrm{tr}(A\ B)\Big[(\Sigma \otimes \Sigma)_{ijkl} +$$

$$+ (\Sigma \dot{\otimes} \Sigma)_{ijkl}\Big] + (\Gamma A\ B\,\Gamma' \otimes \Sigma)_{ijkl} + (\Gamma A\ B\,\Gamma' \dot{\otimes} \Sigma)_{ijkl} +$$

$$+ (\Sigma \dot{\otimes} \Gamma A\ B\,\Gamma')_{ijkl} + (\Sigma \otimes \Gamma A\ B\,\Gamma')_{ijkl}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{cov}\,(Y A Y', Y B Y') = \mathrm{tr}(A\ B)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Sigma) +$$

$$+ \Sigma \otimes \Gamma A\ B\,\Gamma' + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A\ B\,\Gamma' +$$

$$+ \Gamma A\ B\,\Gamma' \otimes \Sigma + \Gamma A\ B\,\Gamma' \dot{\otimes} \Sigma$$

Proposición I.6

Sean, $Y \sim N(\Gamma, I \otimes \Sigma)$, B una matriz de orden $q \times n$ y, A una matriz simétrica de orden n. Entonces, la forma lineal $Y B'$ y la forma cuadrática $Y A Y'$ serán independientes, si y solo si, $A B' = 0$.

Demostración

($\Longleftarrow$)

Supongamos primeramente, $Y \sim N(\Gamma, I \otimes \Sigma)$, A una matriz simétrica de orden n y, B una matriz de orden $q \times n$ tales que $A B' = 0$.

Sea ahora P una matriz ortogonal tal que $P A P' = D$ con, $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, D_1 diagonal y consideremos, $Z = Y P'$ con lo cual, $Z \sim N(\Gamma P', I \otimes \Sigma)$ y, $C = P B'$.

Luego, $0 = A B' = P' D P P' C = P' D C$ con lo cual, $D C = 0$ y así

$$0 = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 C_1 & D_1 C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De $D_1 C_1 = 0$ y, $D_1 C_2 = 0$ obtenemos $C_1 = 0$ y, $C_2 = 0$ con lo cual,

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ T \end{bmatrix}$$

Por otro lado,

$$Y\,B' = Z\,C = (Z_1,\ Z_2) \begin{bmatrix} 0 \\ \\ T \end{bmatrix} = Z_2\,T$$

y,

$$Y\,A\,Y' = Z\,P\,P'D\,P\,P'Z' = Z\,D\,Z' = (Z_1,\ Z_2) \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1' \\ \\ Z_2' \end{bmatrix} =$$

$$= Z_1\,D_1\,Z_1'$$

Luego, la forma lineal $Y\,B'$ y la forma cuadrática $Y\,A\,Y'$ son independientes.

$(\Longrightarrow)$

Supongamos ahora, $Y \sim N\ (\Gamma,\ I \otimes \Sigma)$, B una matriz de orden $q \times n$ y, A una matriz simétrica de orden n tales que, la forma lineal $Y\,B'$ y la forma cuadrática $Y\,A\,Y'$ son independientes.

Sea P una matriz ortogonal tal que, $P'\,A\,P = D$ con D diagonal de rango $r \leqslant n$ y consideremos $Z = Y\,P$ con lo cual, $Z \sim N\ (\Gamma P,\ I \otimes \Sigma)$ y, $C = B\,P$

Luego,

$$Y\,B' = Z\,P'B' = Z\,C' = \left(\sum_{\beta=1}^{N} c_{1\beta}\,z_\beta\ ,\ldots,\ \sum_{\beta=1}^{N} c_{q\beta}\,z_\beta \right)$$

y,

$$Y\,A\,Y' = Z\,P'A\,P\,Z' = Z\,D\,Z' = \sum_{\alpha=1}^{r} z_\alpha\, d_\alpha\, z_\alpha'$$

Como por hipótesis $Y\,B'$ y $Y\,A\,Y'$ son independientes, entonces para cada $1 \leqslant \delta \leqslant q$ se tiene que,

$\sum_{\beta=1}^{N} c_{\delta\beta} z_\beta$ y, $\sum_{\alpha=1}^{r} z_\alpha\, d_\alpha\, z_\alpha'$ son independientes, esto es,

si $1 \leqslant \delta \leqslant q$ y, $1 \leqslant \beta \leqslant r$ se tendrá $c_{\delta\beta}\; d_\beta = 0$

Luego, $0 = D\,C' = P'A\,P\,P'B' = P'A\,B'$ y dado que P es ortogonal, se tiene; $A\,B' = 0$

Proposición I.7

Sean, $Y \sim N\,(\Gamma,\, I \otimes \Sigma)$ y, A y B dos matrices simétricas de orden n. Entonces, las formas cuadráticas $Y\,A\,Y'$ y, $Y\,B\,Y'$ serán independientes, si y solo si, $A\,B = 0$.

Demostración

$(\Longrightarrow)$

Supongamos primeramente, $Y \sim N\,(\Gamma,\, I \otimes \Sigma)$ y, A y B dos matrices simétricas de orden n tales que las formas cuadráticas $Y\,A\,Y'$ y $Y\,B\,Y'$ son independientes.

Sea P una matriz ortogonal tal que, $P'A\,P = D$ con D diagonal de rango $r \leqslant n$ y, $P'B\,P = C$ y consideremos,

$Z = Y\,P$ con lo cual, $Z \sim N\,(\Gamma P,\ I \otimes \Sigma\,)$

Entonces,

$$Y\,A\,Y' = Z\,P'A\,P\,Z' = Z\,D\,Z' = \sum_{\alpha=1}^{r} Z_\alpha\, d_\alpha\, Z'_\alpha$$

y,

$$Y\,B\,Y' = Z\,P'B\,P\,Z' = Z\,C\,Z' = \sum_{\alpha=1}^{n}\ \sum_{\beta=1}^{n} Z_\alpha\, C_{\alpha\beta}\, Z'_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha\, C_{\alpha\alpha}\, Z'_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta = 1}^{n} Z_\alpha\, C_{\alpha\beta}\, Z'_\beta$$

Como por hipótesis, $Y\,A\,Y'$ y $Y\,B\,Y'$ son independientes, entonces, siempre que $1 \leqslant \alpha \leqslant r$ y, $1 \leqslant \beta \leqslant n$ con $\alpha \neq \beta$ se tendrá, $d_\alpha\, C_{\alpha\alpha} = 0$ y, $d_\alpha\, C_{\alpha\beta} = 0$

Luego, $0 = D\,C = P'A\,P\,P'B\,P = P'A\,B\,P$ y dado que P es ortogonal se tendrá, $A\,B = 0$

$(\Longleftarrow)$

Supongamos ahora dos matrices simétricas de orden n tales que, $A\,B = B\,A = 0$.

Luego, existe una matriz ortogonal P, tal que;

$$P\,A\,P' = D_1^{*} \quad y, \quad P\,B\,P' = D_2^{*}$$

donde, D_1^{*} y D_2^{*} son matrices diagonales.

Como por hipótesis, $A\,B = 0$, entonces, $D_1^{*}\,D_2^{*} = 0$, de donde;

$$D_1^{*} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y, \qquad D_2^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea $Z = Y\,P'$ entonces, $Z \sim N(\Gamma P', I \otimes \Sigma)$

Luego,

$$Y\,A\,Y' = Z\,P\,A\,P'Z' = Z\,D_1^{*}\,Z' = (Z_1, Z_2, Z_3)\,D_1^{*}\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \end{bmatrix} = Z_1\,D_1\,Z_1'$$

y,

$$Y\,B\,Y' = Z\,P\,B\,P'Z' = Z\,D_2^{*}\,Z' = (Z_1, Z_2, Z_3)\,D_2^{*}\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \end{bmatrix} = Z_2\,D_2\,Z_2'$$

De esta manera, las formas cuadráticas $Y\,A\,Y'$ y $Y\,B\,Y'$ resultan independientes.

Observaciones

Para $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$ donde, V es una matriz de rango completo, se verifican los siguientes resultados:

* $Y\,B \sim N(\Gamma B, B'V\,B \otimes \Sigma)$

* $\mathrm{cov}(Y\,A, Y\,B) = A'V\,B \otimes \Sigma$

* $E(Y\,A\,Y') = \mathrm{tr}(V\,A)\,\Sigma + \Gamma A \Gamma'$

* $\mathrm{cov}\,(Y A Y', Y B) = \Gamma A V B \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \Gamma A V B$

* $\mathrm{cov}\,(Y A Y', Y B Y') = \mathrm{tr}(V A V B)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Sigma) +$

  $+ \Sigma \otimes \Gamma A V B \Gamma' + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A V B \Gamma' + \Gamma A V B \Gamma' \otimes \Sigma +$

  $+ \Gamma A V B \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma$

* $Y A$ y, $Y B$ serán independientes, si y solo si,

  $A' V B = 0$

* $Y A$ y, $Y B Y'$ serán independientes, si y solo si,

  $A' V B = 0$

* $Y A Y'$ y, $Y B Y'$ serán independientes, si y solo si,

  $A V B = 0$

La demostración de los resultados anteriores se puede desarrollar tomando $X = Y C$, donde, C es una matriz no singular tal que, $C' V C = I$.

CAPITULO II

FUNCION DE DENSIDAD DE LA DISTRIBUCION WISHART NO CENTRADA

En este segundo capítulo, dedicaremos nuestros esfuerzos a derivar la función de densidad y, la función característica de una matriz aleatoria que sigue una distribución Wishart no centrada.

Con el objetivo mencionado, nos introduciremos en el tema presentando algunas definiciones y propiedades previas.

<u>Definición II.1</u> (Raiz cuadrada de una matriz simétrica)

Sea A una matriz simétrica. Definimos $A^{1/2}$ como cualquier matriz B tal que; A = B B.

<u>Observaciones</u>

* Atendiendo a la definición anterior tenemos que, como A es simétrica, entonces, $A^{1/2}$ también es simétrica.

* Para una matriz simétrica A, $A^{1/2}$ no es única.

<u>Definición II.2</u> (Distribución Wishart)

Sea A una matriz aleatoria de orden p. Diremos que A sigue una distribución Wishart no centrada que denotaremos, $W_p(n, \Sigma, M)$ donde, M es el parámetro de descentraje y, n los grados de libertad, si y solo si, existen n vectores aleatorios independientes tales que; para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ se tiene

$$Y_i \sim N(\mu_i, \Sigma), \qquad A = \sum_{i=1}^{n} Y_i Y_i' \qquad y,$$

$$M = [\Sigma^{1/2}]^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \mu_i' \right) [\Sigma^{1/2}]^{-1}$$

donde, $\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2}$

<u>Observación</u>

* Si $M = 0$, esto es, $\mu_i = 0$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces, $A \sim W_p(n, \Sigma, 0)$ y diremos que A sigue una distribución Wishart centrada.

<u>Definición II.3</u> (Reducción a la forma diagonal)

Sea A una matriz de orden p x q y rango r. Entonces su reducción a la forma diagonal se escribirá;

$$P\,A\,Q = D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde, P y Q son matrices de ordenes p x p y, q x q respectivamente, $D_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_r \end{bmatrix}$ y, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios de la matriz A.

Observaciones

Si $Y \sim N(\Lambda, I_n \otimes \Sigma)$ y hacemos $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ y, $\Delta = (\Sigma^{1/2})^{-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ entonces,

$$A = Y Y' \quad y, \quad M = \Delta \Delta' \tag{1}$$

Sea t el rango de M con, $t \leq p$, entonces, existen t valores propios positivos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ y, $p - t$ valores propios nulos para M. Reescribimos ahora Δ por:

$$\Delta = \Gamma \begin{bmatrix} D_{\delta^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U \tag{2}$$

donde, Γ y U son matrices ortogonales de ordenes p y n respectivamente y, $D_{\delta^{1/2}}$ es una matriz diagonal con, $\delta_1^{1/2}, \delta_2^{1/2}, \ldots, \delta_t^{1/2}$ en su diagonal.

Sea,

$$Z = \Gamma' \Sigma^{-1/2} Y U' = \begin{bmatrix} Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

donde, $Z^{(1)} = (Z_1^{(1)}, \ldots, Z_n^{(1)})$ y, $Z^{(2)} = (Z_1^{(2)}, \ldots, Z_n^{(2)})$

Las columnas de Z resultan independientes ya que las columnas de Y lo son. Además, como

$Y \sim N\,(\Lambda,\ I_n \otimes \Sigma)$ donde, $\Lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$

entonces,

$$\Sigma^{-1/2}\, Y \sim N\left[\Sigma^{-1/2}\Lambda\ ,\ I \otimes \Sigma^{-1/2}\ \Sigma\ \Sigma^{-1/2}\right]$$

$$\Gamma'\,\Sigma^{-1/2}\, Y \sim N\left[\Gamma'\Delta\ ,\ I \otimes \Gamma'\,\Sigma^{-1/2}\ \Sigma^{1/2}\ \Sigma^{1/2}\ \Sigma^{-1/2}\,\Gamma\ \right]$$

$$\Gamma'\ \Sigma^{-1/2}\ Y\,U' \sim N\left[\Gamma'\,\Delta\,U'\ ,\ I_n \otimes I_p\right]$$

$$\Delta = \Gamma\,D\,U\ ,\qquad D = \begin{bmatrix} D_{\delta}^{1/2} & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$Z \sim N\left[D,\ I_n \otimes I_p\right]$$

Además, como $Z = \Gamma'\ \Sigma^{-1/2}\ Y\,U'$ se tiene que

$$Y = \Sigma^{1/2}\ \Gamma\,Z\,U$$

y,

$$A = Y\,Y' = \Sigma^{1/2}\ \Gamma\,Z\,Z'\,\Gamma'\ \Sigma^{1/2}$$

Consideremos ahora, $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ & \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = Z\,Z'$

donde, $S_{11} = Z^{(1)}\ Z^{(1)'}$; $S_{12} = Z^{(1)}\ Z^{(2)'} = S_{21}'$;

$$S_{22} = Z^{(2)}\ Z^{(2)'}$$

luego,

$$A = \Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2} \qquad (4)$$

siendo, $S = Z Z'$ y, $Z \sim N(D, I_n \otimes I_p)$

entonces, $S \sim W_p (n, I_p, M^{*})$ donde,

$$M^{*} = D D' = \begin{bmatrix} D_{\delta} & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lema II.1

Sean, $S_{11}^{1/2}$ cualquier raíz cuadrada de S_{11},

$R = (S_{11}^{1/2})^{-1} S_{12}$ y, $W = S_{22} - R'R$. Entonces, S_{11}, R y W son mutuamente independientes, además,

$S_{11} \sim W_t(n, I_t, D_{\delta})$, $W \sim W_{p-t} (n-t, I_{p-t}, 0)$ y,

$R \sim N (0, I_{p-t} \otimes I_t)$.

Demostración

Sea $F = (S_{11}^{1/2})^{-1} Z^{(1)}$, entonces,

$R = (S_{11}^{1/2})^{-1} Z^{(1)} Z^{(2)'} = F Z^{(2)'}$ y,

$$W = Z^{(2)} Z^{(2)'} - R'R = Z^{(2)} Z^{(2)'} - Z^{(2)} F'F Z^{(2)'} =$$

$$= Z^{(2)}(I - F'F) Z^{(2)'}$$

Como $F F' = I$, entonces, $F (I - F'F) = 0$

Condicionando R y W sobre $Z^{(1)}$, ellas resultan independientes (ver [1])

Además condicionalmente, dado que $R = F Z^{(2)'}$ y, $Z^{(2)} \sim N (0, I_n \otimes I_{p-t})$ entonces,

$F Z^{(2)'} \sim N(0, I_{p-t} \otimes F F') = N (0, I_{p-t} \otimes I_t)$(ver [2])

Así, $R \sim N (0, I_{p-t} \otimes I_t)$

Por otro lado, $S_{11} = Z^{(1)} Z^{(1)'}$ donde,

$$Z^{(1)} \sim N \left[\begin{bmatrix} D_{\delta}^{1/2} \\ \\ 0 \end{bmatrix}', \; I_n \otimes I_t \right]$$

o sea, $S_{11} \sim W_t (n, I_t, D_\delta)$.

Además, $W = Z^{(2)}(I - F'F) Z^{(2)'} \sim W_{p-t}(n-t, I_{p-t}, 0)$ dado que, $Z^{(2)} \sim N(0, I_n \otimes I_{p-t})$ y, $I - F'F$ es idempotente de rango n-t (ver [2]).

Así, la distribución condicional conjunta de R y W dada $Z^{(1)}$, es independiente de $Z^{(1)}$. En consecuencia, (R, W) es estadísticamente independiente de $Z^{(1)}$ y de $S_{11} = Z^{(1)} Z^{(1)'}$ pués, la distribución conjunta condicional de R y W es también, la distribución conjunta no condicional de R y W.

<u>Teorema II.1</u>

Si $A \sim W_p\ (n, \Sigma, M)$ donde, M admite la factorización

$$M = \Gamma \begin{bmatrix} D_\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma' \qquad (5)$$

y, $$A = \Sigma^{1/2} \Gamma \begin{bmatrix} Q & Q^{1/2} R \\ (Q^{1/2} R)' & W + R'R \end{bmatrix} \Gamma' \Sigma^{1/2} \qquad (6)$$

entonces, Q, R y W son mutuamente independientes y,

$Q \sim W_t\ (n, I_t, D_\delta),\quad W \sim W_{p-t}\ (n-t, I_{p-t}, 0)$

y, $\quad R \sim N\ (0, I_{p-t} \otimes I_t)$

<u>Demostración</u>

Sean $Q = S_{11}$, $R = (S_{11}^{1/2})^{-1} S_{12}$ y, $W = S_{22} - R'R$.

Por (1) y (2) se tiene,

$$M = \Delta \Delta' = \Gamma \begin{bmatrix} D_\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma'$$

Por (4), la matriz A se escribe; $A = \Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2}$

donde,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Dado que, $S_{11} = Q$ y, $R = (S_{11}^{1/2})^{-1} S_{12}$

entonces, $S_{12} = S_{11}^{1/2} R = Q^{1/2} R$

y como, $W = S_{22} - R'R$ y, $S_{22} = W + R'R$

Podemos entonces escribir;

$$A = \Sigma^{1/2} \Gamma \begin{bmatrix} Q & Q^{1/2} R \\ (Q^{1/2} R)' & W + R'R \end{bmatrix} \Gamma' \Sigma^{1/2}$$

Por el lema 1, Q, R y W son estadísticamente independientes, además, $Q \sim W_t (n, I_t, D_\delta)$,

$W \sim W_{p-t} (n-t, I_{p-t}, 0)$ y, $R \sim N (0, I_{p-t} \otimes I_t)$

La Función de Densidad en el caso lineal

Haciendo uso de (6), derivaremos la función de densidad de $A \sim W_p (n, \Sigma, M)$ para el caso lineal, esto es, cuando $r\,g\,(M) = t = 1$

En este caso, $R'_{(p-1)x1} \sim N(0, I_{p-1})$, $W \sim W_{p-1}(n-1, I_{p-1}, 0)$

y, $Q \sim \chi^2_n (\delta_1)$

Dado que Q, R y W son independientes, entonces, la función de densidad conjunta de ellas es:

$$f(Q, R, W) = f(Q)\, f(R)\, f(W)$$

donde,

$$f(Q) = \frac{Q^{(n-2)/2}\, e^{-Q/2}\, e^{-\delta_1/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})\, 2^{n/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{Q\,\delta_1}{4}\right]^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i\,!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

$$f(R) = (2\pi)^{-(\frac{p-1}{2})}\, e^{-tr\, R' R/2}$$

$$f(W) = \frac{\|W\|^{(n-1-p)/2}\, e^{-tr\, W/2}}{2^{(n-1)(p-1)/2}\, \pi^{(p-1)(p-2)/4} \prod_{i=1}^{p-1} \Gamma(\frac{n-i}{2})}$$

donde $\|W\| = d\,e\,t(W)$

Así, $f(Q, R, W) =$

$$= \left[\frac{Q^{n-2/2}\, e^{-1/2\,[Q+tr(W+R'R)]}\, e^{-\delta_{1/2}}\, \|W\|^{(n-1-p)/2}}{2^{n/2}\, 2^{(p-1)/2}\, 2^{(n-1)(p-1)/2}\, \pi^{(p-1)/2}\, \pi^{(p-1)(p-2)/4}} \right.$$

$$\left. \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\frac{n-i}{2})}\right] \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{Q\,\delta_1}{4}\right)^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i\,!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

$$= \frac{Q^{(n-2)/2}\, \|W\|^{(n-1-p)/2}\, e^{-\frac{1}{2}[Q+tr(W+R'R)]}\, e^{-\delta_1/2}}{2^{np/2}\, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma(\frac{n-i}{2})} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{Q\,\delta_1}{4}\right)^i \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

donde, $Q > 0$, $W > 0$ y, $-\infty < r_{ij} < \infty$

Tomando en cuenta que;

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

efectuando el siguiente cambio de variables;

$$S_{11} = Q, \quad S_{12} = S_{21}' = Q^{1/2}R, \quad S_{22} = W + R'R$$

El jacobiano de la transformación anterior está dado por;

$$\|J\| = Q^{-\frac{1}{2}(p-1)} = S_{11}^{-\frac{1}{2}(p-1)}$$

Luego, la densidad de S, está dada por; $f(S) =$

$$= \frac{S_{11}^{(n-2)/2} \, \| S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} \|^{(n-1-p)/2} \, e^{-\frac{1}{2}(S_{11} + tr(S_{22}))} \, e^{-\delta_{1/2}}}{2^{np/2} \, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-i}{2})} \cdot$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{S_{11}\delta_1}{4}\right)^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)} \, S_{11}^{-\frac{1}{2}(p-1)} \qquad (7)$$

Dado que;

$$S_{11}^{(n-2)/2} \, S_{11}^{-\frac{1}{2}(p-1)} = S_{11}^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \quad \text{y,} \quad tr(S) = S_{11} + tr(S_{22})$$

se tendrá;

$$f(S) = \frac{\| S \|^{(n-p-1)/2} \, e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(S)} \, e^{-\delta_1/2}}{2^{np/2} \, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-i}{2})} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s_{11}\delta_1}{4}\right)^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

Notemos que $s_{11}\delta_1$ es una solución no nula de la siguiente ecuación determinantal (donde γ es el valor desconocido);

$$\| M - \gamma \Sigma^{1/2} [\Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2}]^{-1} \Sigma^{1/2} \| = 0 \qquad (8)$$

tomando, $M = \Gamma D^2 \Gamma'$ y, $D^2 = \begin{bmatrix} D_\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se tendrá;

$$\| \Gamma D^2 \Gamma' - \gamma \Gamma S^{-1} \Gamma' \| = \| \Gamma (D^2 - \gamma S^{-1}) \Gamma' \|$$

$$= \| \Gamma \| \, \| D^2 - \gamma S^{-1} \| \, \| \Gamma' \|$$

$$= \| S \| \, \| D^2 - \gamma S^{-1} \|$$

$$= \| S D^2 - \gamma I_p \|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \gamma I \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} s_{11}\delta_1 & 0 \\ s_{21}\delta_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma I_{p-1} \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} s_{11}\delta_1 - \gamma & 0 \\ s_{21}\delta_1 & -\gamma I_{p-1} \end{bmatrix} \right\|$$

$$= (s_{11}\delta_1 - \gamma) \, \| -\gamma I_{p-1} \| = 0$$

lo que implica, $(s_{11}\delta_1 - \gamma)\,\gamma^{p-1} = 0$ de donde,

$$\gamma = 0 \quad ó \quad s_{11}\delta_1 - \gamma = 0.$$

Luego, $\gamma = s_{11}\delta_1$ es una solución no nula de (8).

Sin embargo, de (1), (4) y (6); (8) se transforma en;

$$\| \Lambda\Lambda' - \gamma\,\Sigma A^{-1}\Sigma \| = 0$$

De (1) se tiene;

$$M = \Delta\Delta' = \Sigma^{-1/2}\Lambda\Lambda'\,\Sigma^{-1/2}$$

por (4) tendremos;

$$A = \Sigma^{-1/2}\,\Gamma S \Gamma'\,\Sigma^{1/2}$$

luego, (8) se transforma en;

$$\| \Sigma^{-1/2}\Lambda\Lambda'\,\Sigma^{-1/2} - \gamma\,\Sigma^{1/2}\,A^{-1}\,\Sigma^{1/2} \| = 0$$

$$\| \Lambda\Lambda' - \gamma\,\Sigma A^{-1}\Sigma \| = 0 \qquad (9)$$

Verifiquemos ahora que δ_1 es la solución no nula de,

$$\| \Lambda \Lambda' - \delta \Sigma \| = 0 \qquad (10)$$

En efecto,

$$\| \Lambda \Lambda' - \delta \Sigma \| = \| \Lambda \Lambda' - \delta \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} \|$$

$$= \| \Sigma^{-1/2} \Lambda \Lambda' \Sigma^{-1/2} - \delta I_p \|$$

$$= \| M - \delta I_p \|$$

$$= \left\| \Gamma \begin{bmatrix} D_\delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Gamma' - \delta \Gamma \Gamma' \right\| \text{ con, } D_\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta I_{p-1} \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 - \delta & 0 \\ 0 & - \delta I_{p-1} \end{bmatrix} \right\|$$

Así, $(\delta_1 - \delta)\delta^{p-1} = 0$ implica, $\delta = 0$ ó $\delta_1 - \delta = 0$

Luego, $\delta = \delta_1$ es la solución no nula de (10).

Finalmente, haciendo el cambio de variable de S a,

$A = \Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2}$ donde, el jacobiano de la transformación está dado por; $\| J_1 \| = \| \Sigma \|^{-\frac{1}{2}(p+1)}$ tendremos,

$$f(A) = \frac{\| \Sigma \|^{-\frac{1}{2}(n-p-1)} \| A \|^{(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2} tr(\Gamma' \Sigma^{-\frac{1}{2}} A \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Gamma)} e^{-\delta_{1/2}}}{2^{np/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-i}{2})} .$$

$$\| \Sigma \|^{-\frac{1}{2}(p+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{4} \right)^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i\,!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

donde, δ_1 satisface (10) y, γ satisface (9).

Luego,

$$f(A) = \frac{\| A \|^{(n-p-1)/2} \, e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1} A)} \, e^{-\delta_1/2}}{\| \Sigma \|^{n/2} \, 2^{np/2} \, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-i}{2})} \, .$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{4} \right)^i \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{i\,!\,\Gamma(\frac{n}{2}+i)}$$

Observación

Si $A \sim W_p(n, \Sigma, o)$, su función de densidad está dada por:

$$f(A) = \frac{\| A \|^{(n-p-1)/2} \, e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1} A)}}{\| \Sigma \|^{n/2} \, 2^{np/2} \, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{n+1-i}{2})}$$

($A > 0$, esto es, A definida positiva).

Función Característica

Teorema II.2

Sean, $Y \sim N(\Lambda, I_n \otimes \Sigma)$ y,
$A = Y Y' \sim W_p(n, \Sigma, M)$. Entonces, la función característica de A está dada por:

$$\frac{\| \Sigma^{-1} \|^{\frac{1}{2}n}}{\| \Sigma^{-1} - 2 i \theta \|^{\frac{1}{2}n}} \exp \left[-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda - \Lambda' \Sigma^{-1} \left(\Sigma^{-1} - 2 i \theta \right)^{-1} \Sigma^{-1} \Lambda \right) \right]$$

Demostración

Sea $A = Y Y'$ donde, $Y \sim N(\Lambda, I_n \otimes \Sigma)$,
entonces, $A \sim W_p(n, \Sigma, M)$

Sea ahora,

$$\Delta = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Lambda \quad y, \quad M = \Delta \Delta' \quad \text{con } rg(M) = t, \ t \leqslant p$$

Entonces, existen t valores propios positivos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ y, p-t valores propios nulos asociados a la matriz M.

Sea, $Z = \Gamma' \Sigma^{-1/2} Y U'$ donde, Γ y U son como en (2) y descompongamos Z en $(Z^{(1)} \; Z^{(2)})$ con,

$$Z^{(1)} = (Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \ldots, Z_t^{(1)}) y, \quad Z^{(2)} = (Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)}, \ldots, Z_{n-t}^{(2)})$$

Luego,

$$Z \sim N(D,\ I_n \otimes I_p); \quad Z^{(1)} \sim N(D^*,\ I_t \otimes I_p)$$

con,

$$D^* = \begin{bmatrix} D_\delta^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y, } \quad Z^{(2)} \sim N(0,\ I_{n-t} \otimes I_p)$$

Sea, $S = Z\,Z'$ entonces, $S \sim W_p(n,\ I_p,\ M^*)$.

Calcularemos la función característica de S para luego, utilizando la transformación

$$S = \Gamma' \,\Sigma^{-1/2}\, A\, \Sigma^{-1/2}\, \Gamma$$ calcular la función característica de A.

Sea θ una matriz simétrica de orden p. Por definición, la función característica de S está dada por;

$$E\left[\exp\,(i\ tr(S\,\theta))\right] = E\left[\exp\,(i\ tr(Z\,Z'\theta))\right]$$

$$= E\left[\exp\,(i\ tr(Z'\theta\, Z))\right]$$

Como $Z = (Z^{(1)}\ Z^{(2)})$, entonces,

$$E\left[\exp(i\ tr(S\,\theta))\right] = E\left[\exp\,(i\ tr(Z^{(1)'}\theta\, Z^{(1)} + Z^{(2)'}\theta\, Z^{(2)}))\right]$$

$$= E\left[\exp\,(i\ tr(Z^{(1)'}\theta\, Z^{(1)}))\right] \cdot$$

$$E\left[\exp\,(i\ tr(Z^{(2)'}\theta\, Z^{(2)}))\right]$$

Dado que, $Z^{(2)} \sim N\ (0,\ I_{n-t} \otimes I_p)$ se tiene,

$$E\left[\exp\,(i\ tr(Z^{(2)'}\theta\, Z^{(2)}))\right] = \left\| I - 2\,i\,\theta \right\|^{-\frac{1}{2}(n-t)} \qquad (11)$$

Por otro lado, $E\left[\exp\left(i\ tr(Z^{(1)'}\theta\ Z^{(1)})\right)\right] =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\ tr(Z^{(1)}\ \theta\ Z^{(1)}\ )\right] . \left[(2\pi)^{(-1/2)tp}\right.$$

$$\left.\exp\left[-\frac{1}{2}\ tr(Z^{(1)}-D^{*})'(Z^{(1)}-D^{*})\right]\right] d\ Z^{(1)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}tp} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\ tr(Z^{(1)}-D^{*})'(Z^{(1)}-D^{*}) +\right.$$

$$\left.+\ i\ tr(Z^{(1)'}\theta\ Z^{(1)})\right] d\ Z^{(1)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}\ tp} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tr\ (i\ Z^{(1)'}\theta\ Z^{(1)} - \frac{1}{2}\ Z^{(1)'}Z^{(1)} +\right.$$

$$\left.+\ D^{*'}Z^{(1)} - \frac{1}{2}\ D^{*'}D^{*})\right] d\ Z^{(1)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}tp} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tr\ (-\frac{1}{2}\ Z^{(1)'}(I - 2_{i}\ \theta)\ Z^{(1)} +\right.$$

$$\left.+\ D^{*'}Z^{(1)} - \frac{1}{2}\ D^{*'}D^{*})\right] d\ Z^{(1)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}\ tp} \exp\left[-\frac{1}{2}\ tr\ (D^{*'}D^{*})\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[tr(-\frac{1}{2}\ Z^{(1)'}\right.$$

$$\left.(I - 2\ i\ \theta)\ Z^{(1)} + D^{*'}Z^{(1)})\right] d\ Z^{(1)}$$

Como, $I - 2i\ \theta$ es simétrica, existe G no singular de orden p tal que, $G'\ (I - 2i\ \theta)\ G = I$

Sea, $X = G^{-1}\left[Z^{(1)} - (I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*}\right]$ entonces,

$$Z^{(1)} = G\ X + (I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*}$$

El jacobiano de la transformación anterior está dado por, $\| G' \|^{t}$ o, de manera equivalente, $\| I - 2i\ \theta \|^{-\frac{1}{2}t}$ puesto que, $I - 2i\ \theta = (G\ G')^{-1}$

Por otro lado, $\exp\left[tr\ (-\frac{1}{2}\ Z^{(1)'}(I - 2i\ \theta)\ Z^{(1)} + \right.$

$$\left. + D^{*'} Z^{(1)}) \right] = \exp\left[tr\ (-\frac{1}{2}\ X'X - D^{*}G\ X - \frac{1}{2}\ D^{*'}(I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*} + \right.$$

$$\left. + D^{*'}\ G\ X + D^{*'}\ (I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*}) \right]$$

$$= \exp\left[tr\ (-\frac{1}{2}\ X'X + \frac{1}{2}\ D^{*'}\ (I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*}) \right]$$

luego, $E\left[\exp\ (i\ tr\ (Z^{(1)'}\ \theta\ Z^{(1)}) \right] =$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}tp} \exp\left[-\frac{1}{2}\ (tr\ (D^{*'}\ D^{*}) - tr\ (D^{*'}(I - 2i\ \theta)^{-1}D^{*})) \right] .$$

$$.\ \| I - 2i\ \theta \|^{-\frac{1}{e}t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\ tr(X'X) \right] d\ X$$

$$E\left[\exp\ (i\ tr(Z^{(1)'}\ \theta\ Z^{(1)})) \right] = \| I - 2i\ \theta \|^{-\frac{1}{2}t} .$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\ (tr\ (D^{*'}\ D^{*}) - tr\ (D^{*'}\ (I - 2i\ \theta)^{-1}D^{*})) \right] \qquad (12)$$

De (11) y (12) se tiene;

$$E\left[\exp\ (i\ tr(S\ \theta)) \right] = \| I - 2i\ \theta \|^{-\frac{1}{2}n} \exp\left[-\frac{1}{2}(tr\ (D^{*'}\ D^{*}) - \right.$$

$$\left. - tr(D^{*'}\ (I - 2i\ \theta)^{-1}\ D^{*})) \right] \qquad (13)$$

Como, $A = \Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2}$, entonces,

$$E\left[\exp(i\ tr(A\ \theta))\right] = E\left[\exp(i\ tr(\Sigma^{1/2} \Gamma S \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta))\right.$$

$$= E\left[\exp(i\ tr(S \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma))\right.$$

y por (13) se tendrá, $E\left[\exp(i\ tr(A\ \theta))\right] =$

$$= \| I - 2i \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma \|^{-\frac{1}{2}n} .$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\ tr\ (D^{*'} D^{*} - D^{*'}(I - 2i \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma)^{-1} D^{*})\right]$$

pero,

$$\| I - 2i \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma \|^{-\frac{1}{2}n} = \| \Sigma \|^{-\frac{1}{2}n} \| \Sigma^{-1} - 2i\ \theta \|^{-\frac{1}{2}n}$$

$$tr\ (D^{*'} D^{*}) = tr\ (U \Lambda' \Sigma^{-1/2} \Gamma \Gamma' \Sigma^{-1/2} \Lambda U') = tr(\Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda)$$

$$tr\ (D^{*'}(I - 2i \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma)^{-1} D^{*})$$

$$= tr(U \Lambda' \Sigma^{-1/2} \Gamma (I - 2i \Gamma' \Sigma^{1/2} \theta \Sigma^{1/2} \Gamma)^{-1} \Gamma \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Lambda U')$$

$$= tr\ (\Lambda' \Sigma^{-1} (\Sigma^{-1} - 2i\ \theta)^{-1} \Sigma^{-1} \Lambda)$$

luego, $E\left[\exp(i\ tr\ (A\ \theta))\right] =$

$$= \frac{\| \Sigma^{-1} \|^{\frac{1}{2}n}}{\| \Sigma^{-1} - 2i\ \theta \|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\ tr(\Lambda' \Sigma^{-1} \Lambda - \Lambda' \Sigma^{-1} \cdot (\Sigma^{-1} - 2i\ \theta)^{-1} \Sigma^{-1} \Lambda)\right]$$

Observación

Si $A \sim W_p\ (n, \Sigma, 0)$, su función característica está dada por:

$$\frac{\| \Sigma^{-1} \|^{\frac{1}{2} n}}{\| \Sigma^{-1} - 2i\ \theta \|^{\frac{1}{2} n}}$$

Suma de matrices que siguen distribuciones Wisharts no centradas

Teorema II.3

Si A y B se distribuyen independientemente con $A \sim W_p\ (n, \Sigma, N)$ y $B \sim W_p\ (m, \Sigma, M)$, entonces,

$$A + B \sim W_p\ (n + m, \Sigma, N + M)$$

Demostración

Como $A \sim W_p\ (n, \Sigma, N)$, entonces,

$A = \sum_{i=1}^{n} Z_i\ Z_i'$ donde, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $Z_i \sim N(\mu_i, \Sigma)$

y, Z_i independiente de Z_j para $i \neq j$

Además, como $B \sim W_p\ (m, \Sigma, M)$, entonces,

$B = \sum_{i=n+1}^{n+m} Z_i\ Z_i'$ donde, para cada $n+1 \leqslant i \leqslant n+m$, $Z_i \sim N(\mu_i, \Sigma)$

y, Z_i independiente de Z_j para $i \neq j$.

Dado que, A y B se distribuyen independientemente, los Z_i son independientes de los Z_j si $i \neq j$ para cada $1 \leqslant i,\ j \leqslant n + m$

Luego, $A + B = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i\, Z_i'$ donde, $Z_i \sim N(\mu_i, \Sigma)$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n + m$ y así,

$$A + B \sim W_p\ (n + m, \Sigma, N + M)$$

Observación

El resultado anterior puede generalizarse a la suma de n matrices que se distribuyen independientemente y que cada una sigue una distribución Wishart no centrada.

Formas cuadráticas que siguen una distribución Wishart.

Teorema II.4

Sean, $Y \sim N\ (\Gamma, I \otimes \Sigma)$ y, A una matriz simétrica de orden n y de rango r. Entonces, $Y A Y' \sim W_p\ (r, \Sigma, \Gamma A \Gamma')$, si y solo si, A es idempotente.

<u>Demostración</u>

($\Longrightarrow$)

Sea L una matriz ortogonal tal que, $L'AL = D(\lambda_\alpha)$ donde, $D(\lambda_\alpha)$ es una matriz diagonal con los valores propios λ_α de la matriz A en su diagonal y, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$

Consideremos $Z = Y\,L$, entonces, $Z \sim N\,(\Gamma L,\ I \otimes \Sigma)$.

Luego,

$$Y\,A\,Y' = Z\,L'A\,L\,Z' = Z\,D(\lambda_\alpha)\,Z' = \sum_{\alpha=1}^{r} Z_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha'$$

donde, $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$

Por lo anterior, la función característica de la forma cuadrática $Y\,A\,Y'$ se puede expresar en función de las columnas de la matriz Z de la siguiente manera;

$$\begin{aligned}
\varphi_{YAY'}(\theta) &= \varphi_{\sum_{\alpha=1}^{r} Z_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha'}(\theta) \\
&= E\left[\exp\left(i\ tr\left(\theta \sum_{\alpha=1}^{r} Z_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha'\right)\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{r} tr(\theta\, Z_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha')\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{r} tr\,(Z_\alpha' \lambda_\alpha \theta\, Z_\alpha)\right)\right] \\
&= \prod_{\alpha=1}^{r} E\left[\exp\left(i\ tr(Z_\alpha' \lambda_\alpha \theta\, Z_\alpha)\right)\right]
\end{aligned}$$

Como $Z \sim N(\Gamma L_\alpha, \Sigma)$, entonces, $\varphi_{YAY'}(\theta) =$

$$= \left[\prod_{\alpha=1}^{r} \| I - 2i\,\lambda_\alpha \theta \Sigma \|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{r} L'_\alpha \Gamma' (I - 2i\lambda_\alpha \theta \Sigma)^{-1} \lambda_\alpha \theta \Gamma L_\alpha\right)\right. \tag{14}$$

La función característica de una $W_p(r, \Sigma, \Gamma A \Gamma')$ está dada por

$$\| I - 2i\,\theta \Sigma \|^{-\frac{r}{2}} \exp\left[i\, tr((I - 2i\,\theta\Sigma)^{-1}\theta \Gamma A \Gamma')\right] \tag{15}$$

Luego, $Y A Y' \sim W_p(r, \Sigma, \Gamma A \Gamma')$, si y solo si, se verifica la igualdad de (14) y (15).

Consideremos $\theta = tI$ para $t \geqslant 0$, entonces,

$$\| I - 2i\,t\Sigma \|^{-\frac{r}{2}} e^{i\, tr\,[(I - 2i\,t\Sigma)^{-1}\, t\Gamma A \Gamma']} =$$

$$= \left[\prod_{\alpha=1}^{r} \| I - 2i\lambda_\alpha\, t\,\Sigma \|^{-\frac{1}{2}}\right] e^{it \sum_{\alpha=1}^{r} L'_\alpha \Gamma' \cdot (I - 2i\,\lambda_\alpha t\, \Sigma)^{-1} \lambda_\alpha \Gamma L_\alpha} \tag{16}$$

Además, como Σ es simétrica, existe P ortogonal tal que;

$$P' \Sigma P = \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_p \end{bmatrix}$$

De esta manera, (16) se transforma en;

$$\| I - 2i\, t\sigma \|^{-\frac{r}{2}} \exp\left[i \operatorname{tr}\left[(I - 2i\, t\sigma)^{-1} t\, P'\Gamma A \Gamma' P \right]\right] =$$

$$= \left[\prod_{\alpha=1}^{r} \| I - 2i\, \lambda_\alpha t\, \sigma \|^{-\frac{1}{2}} \right] \exp\left[it \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha L_\alpha L'_\alpha \Gamma' P \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (I - 2i\, \lambda_\alpha t\sigma)^{-1} \Gamma P' \right]$$

Pasamos ahora a la función generatriz de momento sustituyendo t por it y denotemos $\Lambda = P'\Gamma$.

Tendremos entonces;

$$\prod_{j=1}^{p} (1 - 2t\sigma_j)^{-\frac{r}{2}} \exp\left[t \operatorname{tr}\left[(I - 2t\sigma)^{-1} \Lambda A \Lambda' \right]\right] =$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{r} \prod_{j=1}^{p} (1 - 2\lambda_\alpha t \sigma_j)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[t \operatorname{tr}\left[\sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha L_\alpha L'_\alpha \Lambda' \right.\right.$$

$$\left. (I - 2\lambda_\alpha t\sigma)^{-1} \Lambda \right] \qquad (17)$$

Como funciones a valores reales, resultan iguales para todo t, salvo en los puntos de discontinuidad.

Examinemos ahora, cada una de las dos posibilidades que pueden presentarse.

(a) Si $\lambda_\alpha = 1$ para todo $1 \leqslant \alpha \leqslant r$ entonces, la tésis queda demostrada.

(b) Supongamos que existe $1 \leqslant \alpha_o \leqslant r$ para el cual $\lambda_{\alpha_o} \neq 1$.

Consideremos entonces, el límite de las funciones cuando $t \longrightarrow \frac{1}{2\sigma_{j_o}}$

El miembro derecho de (17) será;

$$\prod_{\alpha=1}^{r} \prod_{j=1}^{p} (1- \frac{2\lambda_\alpha \sigma_j}{2\sigma_{j_o}})^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2\sigma_{j_o}} \operatorname{tr}\left[\sum_{\alpha=1}^{r} (I- \frac{2\lambda_\alpha}{2\sigma_{j_o}}\sigma)^{-1} \cdot \Lambda \lambda_\alpha L_\alpha L_\alpha' \Lambda\right]\right] \neq 0$$

que existe, pués es válido para todo Σ.

El miembro izquierdo de (17) lo reescribimos por;

$$g(t) \frac{1}{(1-2t\sigma_{j_o})^{r/2}} \exp\left[\frac{(\Lambda A \Lambda')_{ij_o}}{1 - 2t\sigma_{j_o}} + h(t)\right]$$

donde, $g(t)$ y $h(t)$ están definidas cuando $t \longrightarrow \frac{1}{2\sigma_{j_o}}$

Así, cuando $t \longrightarrow \frac{1}{2\sigma_{j_o}}$, el miembro izquierdo tiende a $+\infty$ o cero según $(\Lambda A \Lambda')_{ij}$ sea positivo o negativo lo que contradice que subsiste la igualdad en todo punto salvo en los puntos de discontinuidad pues, en una vecindad de los puntos de discontinuidad su comportamiento es diferente.

De esta manera, no puede existir $\lambda_\alpha \neq 1$ con lo cual, esta posibilidad queda descartada.

$(\Longleftarrow)$

Supongamos ahora que la matriz A es idempotente y de rango r. Entonces, existe una matriz ortogonal P tal que,

$$P' A P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora $Z = Y P$, entonces,

$Z \sim N(\Gamma P, I \otimes \Sigma)$.

Luego, tomando $Z = (Z_1, \dots, Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_n) =$

$$= (Z^{(1)}, Z^{(2)})$$

donde, $Z^{(1)} \sim N(\Gamma P_r, I_r \otimes \Sigma)$ se tendrá que;

$$Y A Y' = Z P' A P Z' = Z \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z' = \sum_{\alpha=1}^{r} Z_\alpha Z_\alpha' = Z^{(1)} Z^{(1)}$$

luego,

$$Y A Y' \sim W_p(r, \Sigma, \Gamma P_r P_r' \Gamma')$$

con

$$P_r P_r' = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P' = A$$

CAPITULO III

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE LAS RAICES Y VECTORES PROPIOS DE MATRICES ALEATORIAS QUE SIGUEN DISTRIBUCIONES WISHART CENTRADAS

Este último capítulo, estará básicamente dedicado a deducir las funciones de densidad que siguen los valores y vectores propios de matrices aleatorias que se distribuyen independientemente siguiendo cada una de ellas una distribución Wishart centrada.

Con más precisión, nos interesará conocer la función de densidad que siguen los valores y vectores que satisfacen la ecuación matricial $A - \lambda B = 0$ donde, A y B son matrices aleatorias que se distribuyen independientemente con,

$A \sim W_p(m, \Sigma, 0)$ y $B \sim W_p(n, \Sigma, 0)$.

Por otro lado, abordaremos el estudio de la función de densidad de los valores propios para el caso de que la matriz aleatoria sea singular.

<u>Valores y Vectores Propios de una Matriz que sigue una Distribución Wishart Centrada</u>.

Sean A^* y B^* dos matrices aleatorias de orden p que se distribuyen independientemente y tales que,

$A^* \sim W_p(m, \Sigma, 0)$, $B^* \sim W_p(n, \Sigma, 0)$ con, $m, n \leqslant p$.

Sea C una matriz tal que $C \Sigma C' = I$ y además consideremos las matrices $A = C A^* C'$ y, $B = C B^* C'$.

Entonces, las matrices A y B se distribuyen independiente mente y además, $A \sim W_p(m, I, 0)$ y, $B \sim W_p(n, I, 0)$

Por otro lado, como;

$$\| A - \lambda B \| = \| C A^* C' - \lambda C B^* C' \| = \| C \| \| A^* - \lambda B^* \| \| C' \|$$

entonces, las raíces de $\| A^* - \lambda B^* \| = 0$ son también raíces de

$$\| A - \lambda B \| = 0 \qquad (1)$$

Por otra parte, los vectores que satisfacen la ecuación matricial,

$$A - \lambda B = 0 \qquad (2)$$

satisfacen también la ecuación matricial,

$$C^{-1}(A - \lambda B) = C^{-1}(C A^* C' - \lambda C B^* C') = (A^* - \lambda B^*) C' = 0 \qquad (3)$$

luego, los vectores propios de A^* en la métrica de B^*, están dados por $X^* = C' X$ donde, X es un vector propio de A en la métrica B.

Si consideramos las raíces de la ecuación,

$$\| A - \gamma (A + B) \| = 0 \qquad (4)$$

y los vectores que satisfacen la ecuación matricial;

$$A - \gamma (A + B) = (1 - \gamma) A - \gamma B = 0 \qquad (5)$$

tendremos que, como $\| B \| \neq 0$, la probabilidad de $\gamma = 1$ es nula, luego la ecuación anterior la reescribimos,

$$A - \frac{\gamma}{1 - \gamma} B = 0 \qquad (6)$$

Así, las raíces de (1), están relacionadas con las raíces de (4) por,

$$\lambda = \frac{\delta}{1 - \delta} \quad o, \quad \delta = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad y,$$

los vectores que satisfacen (2), son iguales o proporcionales a los vectores que satisfacen (5).

Examinemos ahora la distribución de las raíces y vectores que satisfacen (4) y (5).

Sea, $$F = \begin{bmatrix} \delta_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \delta_p \end{bmatrix} \tag{7}$$

con, $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_p > 0$

Supongamos que los vectores solución de (5) normalizados por:

$$y' (A + B) y = 1 \tag{8}$$

son, $y_1, \ldots, y_p$. Estos vectores satisfacen:

$$y_i' (A + B) y_j = 0 \quad si \; i \neq j \tag{9}$$

La ecuación (5) puede escribirse entonces de la siguiente manera:

$$A Y = (A + B) Y F \tag{10}$$

donde, $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)$ es una matriz de orden p y, las ecuaciones (8) y (9) se escribirán;

$$Y' (A + B) Y = I \tag{11}$$

De (10) tendremos;

$$Y'A\,Y = Y'\,(A+B)\,Y\,F \qquad (12)$$

y de (11) y (12) obtenemos $Y'A\,Y = F$

Multiplicando (11) y (12) a izquierda por $(Y')^{-1}$ y a derecha por Y^{-1} se tendrá,

$$\left.\begin{aligned} A + B &= (Y')^{-1}\,Y^{-1} \\ A &= (Y')^{-1}\,F\,Y^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Sea, $E = Y^{-1}$ (14)

entonces, $A + B = E'E$ y,

$$\left.\begin{aligned} A &= E'F\,E \\ B &= E'E - E'F\,E = E'\,(I - F)\,E \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Consideremos ahora, la distribución conjunta de E y F.

De (15) tenemos que E y F definen unívocamente a A y B. De (4), (5) y la ordenación $\gamma_1 > \dots > \gamma_p$ se tiene que A y B determinan unívocamente a F. La ecuación (4) para $\gamma = \gamma_i$ y la ecuación (5), definen a Y_i unívocamente excepto por multiplicación por -1 (esto es, reemplazando Y_i por $-Y_i$). Como $Y\,E = I$, se tendrá que E es definido unívocamente excepto para las filas de E que sean multiplicadas por -1. Esto es, se requiere que los $e_{i1} \geqslant 0$. Así, E y F son unívocamente definidos en términos de A y B.

Para determinar la densidad de E y F, sustituimos en la expresión de la densidad de A y B según (15) y, multiplicamos por el jacobiano de la transformación.

Teorema III.1

El jacobiano de la transformación (15) está dado por:

$$\left| 2^p \| E \|^{p+2} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\gamma_i - \gamma_j) \right] \right|$$

Demostración

Como la transformación de A y B a, A y G = A + B posee jacobiano igual a uno, es inmediato que;

$$\left\| \frac{\partial (A,\ G)}{\partial (E,\ F)} \right\| = \left\| \frac{\partial (A,\ B)}{\partial (E,\ F)} \right\| \tag{16}$$

Por otro lado, como $A = E' F E$ entonces, para cada $1 \leqslant i,j \leqslant p$, a_{ij} es una transformación de los e_{ij} y de los f_i, dada por;

$$a_{ij} = t_{ij}\ (e_{11}, \ldots, e_{pp}, f_1, \ldots, f_p) = \sum_{k=1}^{p} e_{ki}\ f_k\ e_{kj}$$

Luego, el diferencial de la transformación a_{ij} será:

$$d\ a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial t_{ij}}{\partial e_{ki}}\ d\ e_{ki} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial f_k}\ d\ f_k + \frac{\partial t_{ij}}{\partial e_{kj}}\ d\ e_{kj} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left[d(e_{ki})\ f_k\ e_{kj} + e_{ki}\ d\ (f_k)\ e_{kj} + e_{ki}\ f_k\ d(e_{kj}) \right]$$

Además, siendo $G = E' E$ tendremos que, para cada

$1 \leq i, j \leq p$, g_{ij} resulta una transformación de los e_{ij} dada por;

$$g_{ij} = W_{ij} (e_{11}, \ldots, e_{pp}) = \sum_{k=1}^{p} e_{ki}\, e_{kj}$$

luego, el diferencial de la transformación g_{ij} estará dado por;

$$d\, g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial w_{ij}}{\partial e_{ki}}\, d\, e_{ki} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial e_{kj}}\, d\, e_{kj} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left[d(e_{ki}) e_{kj} + e_{ki} d(e_{kj}) \right]$$

Dado que las entradas ij-ésimas de las matrices dA y dG están dadas por $d\, a_{ij}$ y $d\, g_{ij}$ respectivamente entonces,

$$dA = (dE)' F\, E + E' (dF)\, E + E' F\, (dE) \qquad (17)$$

y,

$$dG = (dE)'\, E + E'\, (dE) \qquad (18)$$

Por lo tanto, el determinante de esta transformación lineal es el jacobiano de la transformación de (A, G) a (E, F).

Multiplicando ahora, (17) y (18) a izquierda por E'^{-1} y a la derecha por E^{-1} obtenemos;

$$E'^{-1} (dA)\, E^{-1} = E'^{-1}\, (dE)'\, F + dF + F\, (dE)\, E^{-1} \qquad (19)$$

y,

$$E'^{-1}(dG)\,E^{-1} = E'^{-1}(dE)' + (dE)\,E^{-1} \qquad (20)$$

Tomando,

$$d\bar{A} = E'^{-1}(dA)\,E^{-1} \qquad (21)$$

$$d\bar{G} = E'^{-1}(dG)\,E^{-1} \qquad (22)$$

$$dW = (dE)\,E^{-1} \qquad (23)$$

se tendrá que, (19) y (20) se transforman en;

$$d\bar{A} = (dW)'\,F + dF + F\,dW \qquad (24)$$

$$d\bar{G} = (dW)' + dW \qquad (25)$$

así,

$$\left\| \frac{\partial(A,G)}{\partial(E,F)} \right\| = \left\| \frac{\partial(W,F)}{\partial(E,F)} \right\| \left\| \frac{\partial(\bar{A},\bar{G})}{\partial(W,F)} \right\| \left\| \frac{\partial(A,G)}{\partial(\bar{A},\bar{G})} \right\| \qquad (26)$$

donde,

$$\left\| \frac{\partial(W,F)}{\partial(E,F)} \right\| = \left\| \begin{matrix} E^{-1} & & & & \bigcirc \\ & E^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E^{-1} & \\ \bigcirc & & & & I_p \end{matrix} \right\| = \| E \|^{-p} \qquad (27)$$

$$\left\| \frac{\partial(\bar{A},\bar{G})}{\partial(W,F)} \right\| = \left\| \begin{matrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 2F & 2I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & I \\ 0 & 0 & Q & I \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} I & 0 \\ 2F & 2I_p \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P & I \\ Q & I \end{matrix} \right\| = 2^p \, \| P-Q \|$$

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_1 I_{p-1} & & & \\ & \gamma_2 I_{p-2} & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \gamma_{p-1} \end{bmatrix}$$

y,

$$Q = \begin{bmatrix} \gamma_2 & & & & & & & \\ & \gamma_3 & & & & & \bigcirc & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \gamma_p & & & & \\ & & & & \gamma_3 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ \bigcirc & & & & & & \gamma_p & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \gamma_p \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\left\| \frac{\partial (\bar{A}, \bar{G})}{\partial (W, F)} \right\| = 2^p \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\gamma_i - \gamma_j) \right] \tag{28}$$

$$\left\| \frac{\partial (A, G)}{\partial (\bar{A}, \bar{G})} \right\| = \| E \|^{p+1} \, \| E \|^{p+1} \quad \text{(ver [1])} \tag{29}$$

De (26), (27), (28) y (29) se obtiene

$$\left\| \frac{\partial (A, G)}{\partial (E, F)} \right\| = 2^p \, \| E \|^{p+2} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p-1} (\gamma_i - \gamma_j) \right]$$

y de (16) obtenemos finalmente;

$$J^{*} = \left\| \frac{\partial (A,\ B)}{\partial (E,\ F)} \right\| = 2^{p} \, \| E \|^{p+2} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\gamma_i - \gamma_j) \right]$$

Densidad conjunta de las matrices E y F

Como las matrices aleatorias A y B se distribuyen independientemente donde $A \sim W_p\ (m,\ I,\ 0)$ y $B \sim W_p\ (n,\ I,\ 0)$, entonces, la función de densidad conjunta de A y B está dada por el producto de las respectivas funciones de densidad de A y B.

Tendremos entonces,

$$K_1(I,\ m)\ K_2(I,\ n)\ \| A \|^{(m-p-1)/2}\ \| B \|^{(n-p-1)/2}$$

$$\exp \left[- \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ (A + B) \right] \qquad (30)$$

donde,

$$K_1^{-1}\ (I,\ m) = 2^{mp/2}\ \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\ (m + 1 - i)\right]$$

y,

$$K_2^{-1}\ (I,\ n) = 2^{np/2}\ \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\ (n + 1 - i)\right]$$

Como $A = E'F\,E$ y, $B = E'(I - F)\,E$ entonces,

$$\| A \| = \| E'F\,E \| = \prod_{i=1}^{p} \gamma_i\ \| E'E \|$$

y,

$$\| B \| = \| E'\ (I - F)\,E \| = \prod_{i=1}^{p} (1 - \gamma_i)\ \| E'E \|$$

Además,

$$tr\ (A + B) = tr\left[E^{'}F\ E + E^{'}(I - F)\ E\right] = tr\ (E^{'}E)$$

Efectuando el cambio de variables dado en (30) y multiplicando por el jacobiano de la transformación obtendremos la función de densidad conjunta de E y F. De esta manera, la función de densidad conjunta de E y F estará dada por;

$$K_1\ (I,\ m)\ K_2(I,\ n)\ \prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{(m-p-1)/2} \left\| E^{'}E \right\|^{(m-p-1)/2}\ .$$

$$.\ \prod_{i=1}^{p} (1 - \gamma_i)^{(n-p-1)/2} \left\| E^{'}E \right\|^{(n-p-1)/2} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\ tr(E^{'}E)\right] J^{*}$$

$$= 2^{p}\ K_1(I,\ m)\ K_2(I,\ n) \left\| E^{'}E \right\|^{(m+n-p)/2} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\ tr(E^{'}E)\right]\ .$$

$$.\ \prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} (1 - \gamma_i)^{(n-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p-1}\left[\prod_{j=i+1}^{p} (\gamma_i - \gamma_j)\right] \quad (31)$$

Como la función de densidad conjunta de E y F resulta del producto de las funciones de densidad de E y F respectivamente, entonces, ellas son estadísticamente independientes y solo nos resta, determinar la constante de cada función.

Para ello, calculemos la siguiente integral;

$$2^{p} \int \left\| E^{'}E \right\|^{(m+n-p)} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\ tr\ (E^{'}E)\right] d\ E \qquad (32)$$

donde, $0 < e_{i1} \leqslant \infty$ y, $-\infty < e_{ij} < \infty$ para, $j \neq 1$

Observemos que el valor de (32) no varía si; $-\infty < e_{il} < \infty$ y multiplicamos por 2^{-p}. Así, (32) se transforma en;

$$(2\pi)^{p^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \| E'E \|^{(m+n-p)/2} \left[(2\pi)^{-p^2/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} e_{ij}^2 \right) \right] \prod_{i,j=1}^{p} d\, e_{ij} \qquad (33)$$

Notemos que la función,

$$(2\pi)^{-p^2/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} e_{ij}^2 \right)$$

resulta ser la función de densidad conjunta de p^2 variables aleatorias independientes con distribución N(0, 1) por lo que, $E \sim N\,(0,\ I_p \otimes I_p)$ y se tendrá entonces que $E'E \sim W_p\,(p,\ I,\ 0)$.

Por lo anterior, (33) es el momento de orden $\frac{1}{2}\,(m + n - p)$ de la varianza generalizada $\| E'E \|$ para $E'E \sim W_p\,(p,\ I,\ 0)$.

Así,

$$(2\pi)^{p^2/2} \int \frac{\| E'E \|^{(m+n-p)/2} \, \| E'E \|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\, tr(E'E) \right]}{2^{p^2/2}\, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(p + 1 - i)\right]} \, d(E'E) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{p^2/2}}{2^{p^2/2}\, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(p+1-i)\right]} \int \| E'E \|^{(m+n-p-1)/2}$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(E'E)\right] d\,(E'E)$$

$$= \frac{\pi^{p^2/2}}{\cancel{\pi^{p(p-1)/4}} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(p+1-i)\right]}\; 2^{(m+n)p/2}\, \cancel{\pi^{p(p-1)/4}}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+n+1-i)\right]$$

$$= \frac{2^{(m+n)p/2}\, \pi^{p^2/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+n+1-i)\right]}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(p+1-i)\right]}$$

Luego, la función de densidad de E es;

$$\frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+n+1-i)\right]}{2^{(m+n)p/2}\, \pi^{p^2/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+n+1-i)\right]} \| E'E \|^{(m+n-p)/2}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(E'E)\right] \qquad (34)$$

Por otro lado, la función de densidad de F es (31) dividida por (34), esto es;

$$K \prod_{i=1}^{p} \gamma_i^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} (1-\gamma_i)^{(n-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\gamma_i - \gamma_j) \right] \quad (35)$$

donde,

$$K = \frac{\pi^{p/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+n+1-i)\right]}{\prod_{i=1}^{p} \left[\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1-i)\right] \right]}$$

La función de densidad de λ_i para $1 \leqslant i \leqslant p$ se obtiene de (35) reemplazando;

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1}, \quad 1 - \gamma_i = \frac{1}{\lambda_i + 1} \quad \text{y,} \quad \gamma_i - \gamma_j = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1)}$$

donde el jacobiano de la transformación está dado por:

$$J^{**} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i + 1)^2}$$

Luego, la densidad conjunta de los λ_i será;

$$K \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1} \right]^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{1}{\lambda_i + 1} \right]^{(n-p-1)/2}$$

$$\prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{(\lambda_i + 1)(\lambda_j + 1)} \right] \cdot \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i + 1)^2}$$

$$= K \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i + 1)^{-\frac{1}{2}(m+n)+\cancel{(p-1)}}$$

$$\cdot \frac{\prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right]}{\cancel{\prod_{i=1}^{p} (\lambda_i + 1)^{p-1}}}$$

$$= K \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{(m-p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i + 1)^{-\frac{1}{2}(m+n)}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right] \qquad (36)$$

para $\lambda_1 \geqslant \cdots\cdot \geqslant \lambda_p \geqslant 0$

<u>La función de distribución de los valores propios de una matriz aleatoria A, singular</u>.

<u>Definición III.1</u>

Sea A una matriz aleatoria. Diremos que la matriz A sigue una distribución Wishart Singular, si y solo si,

$A = \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha Y_\alpha'$ donde, para $1 \leqslant \alpha \leqslant m$, $Y_\alpha \sim N(0, I)$,

los Y_α se distribuyen independientes con $p > m$. Esto es, la dimensión p de los vectores es mayor que el número m de vectores.

Teorema III.2

Si $A = \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha Y_\alpha'$ donde los Y_α son independientes, cada uno con distribución $N(0, I)$, $p > m$ y, B independientemente distribuyendose $W_p(n, I, 0)$, $n \geqslant p$, entonces, la función de densidad de las raíces no nulas de $\| A - \lambda(A + B) \| = 0$ es dada por:

$$\pi^{m/2} \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\left[\frac{1}{2}(m+n+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+n-p+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]} \right]$$

$$\prod_{i=1}^{m} \left[\lambda_i^{(p-m-1)/2} (1-\lambda_i)^{(n-p-1)/2} \right] \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right] \quad (37)$$

Demostración

Sea $G = A + B$. La función de densidad conjunta de B y, Y_α está dada por;

$$\frac{\| B \|^{(n-p-1)/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)\right]}{2^{np/2}\, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right] (2\pi)^{mp/2}} \qquad (38)$$

El jacobiano de la transformación de los $y_{i\alpha}$ y, B a los $y_{i\alpha}$ y, $G = A + B$ es 1, ya que

$$y_{ij} = y_{ij} \quad ; \quad g_{ij} = \sum_{=1}^{m} y_{i\alpha}\, y_{j\alpha} + b_{ij}$$

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial y_{ij}} = 1 \; ; \; \frac{\partial y_{ij}}{\partial y_{nm}} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq i \quad \text{o} \quad m \neq j$$

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial g_{nm}} = 0 \quad \text{para todo n y m}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial g_{ij}} = 1 \; ; \; \frac{\partial b_{ij}}{\partial g_{nm}} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq i \quad \text{o} \quad m \neq j$$

$$J = \begin{Vmatrix} I & T \\ 0 & I \end{Vmatrix} = 1 \qquad \text{donde} \quad T = \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial y_{ij}}\right]_{ij}$$

Así, la función de densidad conjunta de los y_i y G está dada por;

$$\frac{\| G - A \|^{(n-p-1)/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(G)\right]}{2^{p(n+m)/2}\, \pi^{mp/2+p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \qquad (39)$$

Sean, $G = C\,C'$ donde C es una matriz no singular y, $Y = C\,U$. Examinemos ahora la función de densidad conjunta de G y U.

El jacobiano de la transformación de (G, Y) a (G, U) está dado por;

$$\operatorname{mod} \| C \|^{m} = \| G \|^{m/2} \tag{40}$$

Además,

$$A = Y\,Y' = C\,U\,U'C'$$

y,

$$\begin{aligned} \| G - A \| &= \| C\,C' - C\,U\,U'C' \| \\ &= \| C\,(I - U\,U')\,C' \| \\ &= \| C\,C' \| \; \| I - U\,U' \| \\ &= \| G \| \; \| I - U\,U' \| \end{aligned} \tag{41}$$

Luego, por (39), (40) y (41), la función de densidad conjunta de G y U está dada por:

$$\frac{\| G \|^{(n+m-p-1)/2} \; \| I - U\,U' \|^{(n-p-1)/2} \; \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(G)\right]}{2^{p(n+m)/2} \; \pi^{mp/2 + p(p-1)/4} \; \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \tag{42}$$

De (42) se deduce que $G \sim W\,(n+m,\ I,\ 0)$ luego, la función de densidad de U está dada por:

$$\pi^{-mp/2} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+m+1-i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1-i)]} \right] \| I - U U' \|^{(n-p-1)/2} \tag{43}$$

De otro lado tenemos que,

$$0 = \| A - \lambda(A + B) \| = \| A - \lambda G \| = \| C U U' C' - \lambda C C' \| =$$
$$= \| C \| \, \| U U' - \lambda I \| \, \| C' \|$$

Dado que la matriz C es no singular, entonces, los λ_i son raices de:

$$\| A - \lambda(A + B) \| = \| U U' - \lambda I \| \tag{44}$$

De esta manera, los valores propios de la matriz A en la métrica A + B resultan ser los valores propios de la matriz $U U'$ en la métrica I.

Sean ahora, $\lambda_1 > \ldots > \lambda_m$ las raices no nulas de (44), entonces,

$$\| U U' - \lambda I \| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)(-\lambda)^{p-m} \tag{45}$$

y,

$$\| U' U - \lambda I \| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda) \tag{46}$$

Observemos que para $\lambda = 1$, las raices no nulas de (45) son también las raices no nulas de (46), esto es,

$$\| I - U U' \| = \| I - U' U \| \tag{47}$$

Sustituyendo (47). en (43) se obtiene que la función de densidad de U es dada por:

$$K \; \| I - U'U \|^{(n-p-1)/2} \tag{48}$$

donde,

$$K = \pi^{-mp/2} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\,(n+m+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\,(n+1-i)\right]} \right]$$

Sea ahora, $U^* = U'$ con orden $p^* \times m^*$ donde, $p^* = m$, $m^* = p$, $n^* = n+m-p$, $p^* \leqslant m^*$ y función de densidad dada por (48).

Se verifica sin dificultad que (35) es la función de densidad de las raices de

$$\| U^* U^{*'} - \lambda I \|$$

Finalmente, reemplazando m por p, p por m y, n por n+m-p obtenemos (37).

<u>La función de distribución de los valores propios de una matriz aleatoria A, no singular</u>.

Consideremos una matriz aleatoria A (no singular), tal que, $A \sim W_p\,(n, I, 0)$ y además,

$$\| A - \lambda I \| \tag{49}$$

Dedicaremos nuestra atención a determinar la función de distribución de las raices de (49). Con este objetivo, examinaremos previamente, algunos resultados que facilitarán nuestro estudio.

Lema III.1

Si la función de densidad de una matriz aleatoria Y es, $f(Y\,Y')$ entonces, la función de densidad de la matriz $B = Y\,Y'$ está dada por:

$$\frac{\|B\|^{(m-p-1)/2} f(B) \Pi^{p\,[m-(p-1)/2]/2}}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]} \qquad (50)$$

Demostración

Supongamos sin pérdida de generalidad que $Y \sim W(0,\, I_n \otimes I_p)$ con función de densidad

$$f(Y\,Y') = (2\Pi)^{-pm/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(Y\,Y')\right]$$

luego, la matriz $B = Y\,Y'$ sigue una distribución $W_p(m,\, I,\, 0)$ con lo cual, su función de densidad está dada por (50).

Teorema III.3

Sean, B una matriz simétrica, $\lambda_1 > \ldots . > \lambda_p$ sus valores propios y, $g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ su función de densidad.

Entonces, la función de distribución conjunta de los valores propios $\lambda_1 > \ldots > \lambda_p$ es dada por:

$$\frac{\pi^{p(p+1)/4}\, g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right]}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(p-i+1)\right]} \tag{51}$$

Demostración

Dado que B es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal C tal que, $B = C' D_\lambda C$ donde, D_λ es una matriz diagonal y, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ constituyen su diagonal principal.

Si $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$ y $C_{i1} \geqslant 0$ entonces, la transformación de B a, D_λ y C es única.

Sea $f(D_\lambda, C)$ el jacobiano de la transformación anterior, entonces, la función de densidad conjunta de D_λ y C es;

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\; f(D_\lambda, C) \tag{52}$$

Como, $\int g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) f(D_\lambda, C) d\, C =$

$$= g(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \int f(D_\lambda, C)\; d\, C$$

entonces, para finalmente mostrar la tesis del teorema, bastará con probar que;

$$\int f(D_\lambda, C)\, d\, C = \frac{\pi^{p(p+1)/4} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right]}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}\,(p+1-i)\right]}$$

Sea, $B = U\,U'$ donde, U es una matriz de orden $p \times m$, $m \geqslant p$ y función de densidad dada por (43).

En virtud del lema anterior, la función de densidad de B es dada por (50) donde, $f(B)$ está dada por (43).

Así, la función de densidad de la matriz B estará dada por:

$$\pi^{-p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+n+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}\,(n+1-i)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\,(m+1-i)\right]} \right]$$

$$\| B \|^{(m-p-1)/2} \, \| I - B \|^{(n-p-1)/2} \tag{53}$$

Como, $B = C'\,D_\lambda\,C$ entonces,

$$\| B \| = \| D_\lambda \| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i \qquad \text{y,}$$

$$\| I - B \| = \| I - C'D_\lambda C \| = \| C' \| \; \| I - D_\lambda \| \, \| C \| =$$

$$= \| I - D_\lambda \| = \prod_{i=1}^{p} (1 - \lambda_i)$$

Luego, (53) se transforma en: $g^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) =$

$$= \pi^{-p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \left[\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(m+n+1-i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1-i)]\,\Gamma[\frac{1}{2}(m+1-i)]} \right]$$

$$\prod_{i=1}^{p} \left[\lambda_i^{(m-p-1)/2} (1-\lambda_i)^{(n-p-1)} \right] \qquad (54)$$

Observemos que, la función de densidad conjunta de, D_λ y C es, $g^*(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\ f(D_\lambda C)\ d\,C$ y, la función de densidad de D_λ está dada por (35).

Entonces, $\int g^*(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\ f(D_\lambda C)\ d\,C$, es igual a la función dada en (35), y dado que, $g^*(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ está dada por (54) entonces se tendrá:

$$\int f\ (D_\lambda, C)\ d\,C = \frac{\pi^{p(p+1)/4} \prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right]}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma[\frac{1}{2}(p+1-i)]}$$

lo cual demuestra el teorema.

<u>Teorema III.4</u>

Sea A una matriz aleatoria tal que $A \sim W_p(n, I, 0)$. Entonces, las raices $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$ de, $\| A - \lambda I \|$ tienen una función de densidad conjunta dada por;

$$\frac{\pi^{p/2} \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{(n-p-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)}{2^{pn/2} \prod_{i=1}^{p} \left[\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1-i)\right]\right]}$$

$$\prod_{i=1}^{p-1} \left[\prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_i - \lambda_j) \right] \qquad (55)$$

sobre el rango donde la función de densidad no se anula.

Demostración

Como $A \sim W_p\ (n, I, 0)$ entonces, la función de densidad de A está dada por;

$$\frac{\| A \|^{(n-p-1)} \exp\left[-\frac{1}{2} tr(A)\right]}{2^{pn/2}\ \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \qquad (56)$$

Como la matriz A es simétrica enton ces, existe una matriz ortogonal C tal que, $A = C' D_\lambda C$ donde, D_λ es una matriz diagonal con $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ en su diagonal.

Luego, $\| A \| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$ y, $tr(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ de donde,

(56) se transforma en:

$$\frac{\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{(n-p-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)}{2^{pn/2}\, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

y, en virtud del teorema III.3, la función de densidad de los valores propios de la matriz A estará dada por (55).

CONCLUSIONES

Esta sección intentará resumir lo que se ha expuesto, sacar ciertas conclusiones y dejar al lector con posiblemente, algunas inquietudes.

En primer lugar, debe hacerse resaltar que este trabajo no recoge todo sobre la distribución Wishart pero sí conceptos que son los más importantes. Los libros de Anderson (1958) y Muishead (1982) hacen un estudio profundo de esta distribución.

Llevar el paso con la literatura mundial sobre cualquier tema científico en la actualidad, es muy difícil. Es por esto que al desarrollar el trabajo hemos tenido que demostrar muchos resultados que son asegurados por los autores en libros y artículos utilizados.

Tuvimos que demostrar resultados sobre formas lineales y formas cuadráticas que fueron de mucha utilidad. Resultados que fueron utilizados luego para obtener la función de densidad y la fución característica de una matriz que sigue una distribución Wishart. El lema II.1 nos facilitó enormemente esta labor pues en él se daban condiciones de independencia entre matrices con sus respectivas distribuciones. En el teorema II.1 damos prácticamente la función de densidad de interés, haciendo uso de la transformación (6), que es usada también para dar la función característica presentada en el teorema II.2.

En el último capítulo, dedicamos nuestra atención a las raíces y vectores propios de una matriz que sigue una distribución Wishart; dando la función de densidad.

Por último, quiero hacer la observación que la densidad de la distribución Wishart no centrada, en el caso general, puede ser obtenida utilizando el grupo de las matrices ortogonales, la medida invariante de Haar, los polinomios zonales y las funciones hipergeométricas de matriz argumento.

BIBLIOGRAFIA

1- ANDERSON, T.W. An Introduction to Multivariante Statistical Analysis. John Wiley and Sons, Inc. New York. (1958).

2- ______________ The Non-Central Wishart Distribution and Certain Problems of Multivariate Statistics. Annals of Math. Stat. Volumen 17, 409-431. (1946).

3- ______________ and GIRSHICK, M.A. "Some Extensions of the Wishart Distribution", Annals of Math. Stat. Volumen 15, 345-357. (1944).

4- GLESER, LEON JAY A Canonical Representation for the Noncentral Wishart Distribution Useful for Simulation. JASA, Volume 71, Number 355, 690-695. (1976).

5- MUIRHEAD, ROBB J. Aspects of Multivariante Statistical Theory. John Wiley and Sons, Inc. Michigan. (1982).

6- POLTRONIERRI, J. Formes Quadratiques et Formes Lineaires en Statistique Multivariee. Ciencia y Tecnología. Vol. VIII, No. 2, 153-165. (1984).

7- ______________ Sur la Distribution des Formes Quadratiques. (Por publicar en Ciencia y Tecnología).

8- SEARLE, S.R. Linear Models, John Wiley and Sons, Inc., New York. (1971).