

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA OPCIÓN INVESTIGACIÓN DE
OPERACIONES

SISTEMA DE ECUACIONES E INECUACIONES NO LINEALES PSEUDO-BOOLEANAS

PEDRO SAUCEDO T.

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL GRADO DE
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA CON ESPECIALIZACIÓN EN INVESTIGACIÓN DE
OPERACIONES.

PANAMÁ

2020

RESUMEN

En esta tesis revisaremos la solución de ecuaciones e inecuaciones bivalentes, llamadas ecuaciones e inecuaciones pseudo-booleanas. Las soluciones de esas ecuaciones o inecuaciones pueden determinarse mediante una lista completa de soluciones o agrupándolas en una familia de soluciones denominada **función característica**. El método que se aplicará para determinar la solución de las inecuaciones es el de **eliminación sucesiva**. Luego se presentará la resolución para un sistema no lineal, posteriormente se explicará cómo resolver un problema de programación lineal y por último se presenta una aplicación de este tipo de situaciones.

PALABRAS CLAVES

Ecuación pseudo-booleana, ecuación característica, familia de soluciones.

ABSTRACT

in this thesis we will review the resolution of bivalent equations and inequalities, called pseudoboolean equations and inequalities. The resolutions of those equations or inequalities can be determined by a complete list of solutions or by grouping them into a family of solutions of specific function. The method to be applied to determine the solution of the inequalities is the successive elimination method. Then the resolution for a non-linear system is presented, later it is explained how to solve a linear programming problem and finally an application of this type of situation is presented.

KEYWORDS

Pseudo-Boolean equation, characteristic equation, family of solutions.

AGRADECIMIENTO

El presente trabajo lo dedico principalmente a Dios por mantenerme con salud para así poder continuar en este proceso de obtener esta nueva meta. A mis padres, mi familia, mis hermanos, en especial a Jean Carlos Saucedo.

Agradezco a mi asesor el Dr. José Del Rosario Garrido, por haber compartido sus conocimientos a lo largo de mi preparación, por estar siempre pendiente para orientarme y sobre todo para tener en el momento oportuno esas palabras motivadoras que me impulsaron a terminar esta tesis. Mi agradecimiento a la Magister Iris Jiménez por tomar su tiempo en hacer excelentes recomendaciones y a todos los Profesores del programa de la Maestría en investigación de Operaciones.

ÍNDICE GENERAL

<i>INTRODUCCIÓN</i>	vi
<i>CAPÍTULO I. PRELIMINARES</i>	1
1. Álgebra de Boole. Propiedades.....	2
1.1. Principio de Dualidad	3
1.2. Función Booleana	3
1.2.1. Expresión Booleana.....	3
1.2.2. Conjunción elemental	3
1.2.3. Disyunción elemental	3
1.2.4. Forma disyuntiva.....	4
1.2.5. Forma conjuntiva	4
1.3. Función Pseudo-Booleana.....	6
<i>CAPÍTULO II. SISTEMA DE ECUACIONES E INECUACIONES PSEUDO-BOOLEANAS</i> ...	9
2.1. Determinación de una familia de soluciones	10
2.2. Solución de una ecuación lineal pseudo-Booleana.....	11
2.2.1. Función característica en el caso de ecuaciones lineales	16
2.3. Solución de una inecuación lineal pseudo-booleana.....	18
2.3.1. Solución de base de una inecuación pseudo-Booleana.	19
2.3.2. Función característica en el caso de inecuaciones lineales.....	23
2.4. Solución de un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales	25
2.5. Solución y función característica para una ecuación o inecuación no lineal.	34
2.6. Solución y función característica para un sistema no lineal.....	36
<i>CAPÍTULO III. PROGRAMACIÓN LINEAL CON VARIABLES BIVALENTES.</i>	49
3.1 Programación lineal con variables bivalentes.....	39
<i>CAPÍTULO IV. APLICACIÓN.</i>	42
4.1 Ejemplo	43
<i>CONCLUSIONES</i>	54
<i>RECOMENDACIONES</i>	57
<i>BIBLIOGRAFÍA</i>	59

INTRODUCCIÓN

El álgebra de Boole también se denomina álgebra booleana en honor a **George Boole**, matemático inglés, quien fue el primero en definirla como un sistema lógico en su libro: Las leyes del Pensamiento. Dicha obra es uno de los escritos que en los últimos 100 años ha tenido mayor impacto en la Matemática y la Filosofía.

Es un área de la matemática que actualmente es aplicada en muchos campos, por ejemplo el de circuitos de comunicación y principalmente en el área de diseños informáticos.

Las computadoras digitales emplean codificaciones binarias. En efecto la base del desarrollo computacional se debe a las propiedades del álgebra de Boole. Existen problemas que pueden resolverse mediante métodos analíticos y existen muchas situaciones que requieren de algoritmos numéricos para obtener las soluciones, dichos algoritmos son desarrollados gracias al avance computacional.

En los últimos 30 años el estudio de las funciones pseudo booleana introducidas hace más de 55 años por Peter L.Hammer, han tenido un gran impacto debido a la estrecha relación que existe entre el álgebra de Boole y la optimización no lineal.

En esta tesis se revisan las propiedades y teoremas que sustentan la forma de determinar y representar solución de una ecuación pseudo booleana y se desarrollará de manera detallada la eliminación sucesiva de una inecuación expresando el resultado como un conjunto de soluciones.

El algoritmo desarrollado por Peter Hammer y Sergiu Rudeanu permite minimizar las funciones no lineales eliminando recursivamente una variable en cada iteración.

Éste algoritmo es una combinación de procedimientos booleanos y del principio de la programación dinámica de Richard Bellman.

Los métodos de programación pseudo booleana son una poderosa herramienta que permiten determinar la solución de problemas binarios lineales y no lineales así como aquellos que por tener funciones pseudo booleanas facilitan la solución de problemas con programación polinómica entera.

La gran cantidad de situaciones donde los procedimientos booleanos son aplicables, evidencia la necesidad de nuevas investigaciones que incluyan aplicaciones como metodología para darle soluciones a problemas que no se pueden resolver con los métodos convencionales.

Para el estudio de este trabajo se contemplaron cuatro capítulos desglosados de la siguiente manera:

El Capítulo 1, define los conceptos preliminares de la programación pseudo booleanas.

El Capítulo 2, presenta un método para resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones pseudo booleanas.

El Capítulo 3, desarrolla un método para resolver un problema de programación lineal y no lineal pseudo booleana.

El Capítulo 4, presenta la solución de un problema de aplicación utilizando los conceptos y métodos de los capítulos anteriores.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

ÁLGEBRA BOOLEANA

1. Álgebra de Boole. Propiedades.

Es una estructura matemática en la que se distinguen dos elementos $B_2 = \{0,1\}$, y tres operaciones: disyunción \cup , conjunción \cap y negación $\bar{}$. El álgebra booleana de los elementos en $B_2 = \{0,1\}$ cumplen con las siguientes propiedades:

1. $0 \cup 0 = 0$

2. $0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1$

3. $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$

4. $1 \cdot 1 = 1$

5. $\bar{0} = 1$

6. $\bar{1} = 0$

7. $x \cup y = x + y - xy$

8. $\bar{x} = 1 - x$

9. $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$

10. $x^0 = \bar{x}$

11. $x^1 = x$

12. $x \leq y$ *sii* $x \cup y = y$

13. $x \leq y$ *sii* $xy = x$

14. $x \leq y$ *entonces* $x \cup z \leq y \cup z$

15. $x \leq y$ *entonces* $xz \leq yz$

16. $x \leq 1$

17. $0 \leq x$

1.1. Principio de Dualidad

A toda relación o ley lógica le corresponderá su dual, el cual se forma mediante el intercambio de las operaciones de disyunción \cup por conjunción \cap , las relaciones de orden \leq por \geq y de las constantes 0,1.

1.2. Función Booleana

Una función $f: B_2^n = \overbrace{B_2 x \dots x B_2}^{n \text{ veces}} \rightarrow B_2$ cuyos valores están en $B_2 = \{0,1\}$, es denominada una función booleana

1.2.1. Expresión Booleana

Una expresión booleana está constituida por un número finito de variables booleanas, relacionadas por operaciones booleanas.

Es importante resaltar que una función booleana es generada por varias expresiones booleanas y una expresión booleana genera una función booleana simple.

1.2.2. Conjunción elemental

Son expresiones booleanas que no contienen disyunciones.

Ejemplo: $x^0 \cdot y^1 \cdot z^0$

1.2.3. Disyunción elemental

Son expresiones booleanas que no contienen conjunciones.

Ejemplo: $x^0 \cup y^1 \cup z^0$

1.2.4. Forma disyuntiva

Es una expresión del tipo $a_1 \cup a_2 \dots \cup a_n$ donde los a_1, a_2, \dots, a_n son conjunciones elementales.

1.2.5. Forma conjuntiva

Es una expresión del tipo $a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_n$ donde los a_1, a_2, \dots, a_n son disyunciones elementales.

Teorema 1.

Toda función booleana puede ser escrita en la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1)$$

donde $\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ representan la disyunción extendida para todos 2^n posibles valores del

vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_2^n$

Prueba:

Partiendo de que $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$, $1 = \bar{0}$ y $0 = \bar{1}$ podemos concluir que para cada $\alpha, \beta \in B_2^n$ tenemos que:

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Entonces para cada $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in B_2^n$ tenemos que:

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

De esto se deduce que para cualquier sistema de valores $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n$ dado a las variables x_1, x_2, \dots, x_n , el lado derecho de (1) se reduce a:

$$f(\beta_1, \dots, \beta_n) \beta_1^{\beta_1} \dots \beta_n^{\beta_n} = f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

La fórmula (1) para cuando $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ queda expresada como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (2)$$

la cual es conocida como la forma **disyuntiva canónica** de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Teorema 2.

Toda función booleana puede ser escrita en la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} [f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \cup x_1^{\alpha_1} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n}] \quad (3)$$

donde $\prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ representan la conjunción extendida para todos 2^n posibles valores del vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_2^n$

Prueba:

La demostración es similar al **Teorema 1**.

La fórmula (3) para cuando $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = 0$ queda expresada como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (x_1^{\alpha_1} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n}) \quad (4)$$

la cual es conocida como la forma **conjuntiva canónica** de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ejemplo 1:

Sea la función: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup x_2) \cdot x_3 \cup \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cup x_3)$

La podemos escribir como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cup \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cup \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cup x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cup x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Y también de la forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cdot (\bar{x}_1 \cup x_2 \cup x_3) \cdot (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_3)$$

Observación 1: Es importante resaltar que la forma canónica conjuntiva y la forma canónica disyuntiva no son válidas para un álgebra booleana B que contiene más de dos elementos, revisemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2:

Sea $B = B_4 = \{0, a, \bar{a}, 1\}$ es un álgebra booleana de cuatro elementos, definimos la función

$$f: B_4 \rightarrow B_4 \text{ tal que: } f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Esta función no puede ser expresada en su forma disyuntiva canónica

$$f(x) = f(1)x \cup f(0)\bar{x} \quad \text{Porque } f(1)a \cup f(0)\bar{a} = 0a \cup 0\bar{a} = 0 \neq f(a) = a$$

Ver: (Rodeanu, Sergiu. 1974. Boolean Function and Equations)

1.3. Función Pseudo-Booleana

Una función $f: B_2^n \rightarrow R$ que asume valores reales con variables bivalentes se llamará función pseudo Booleana.

Teorema 3.

Cada función pseudo-booleana puede escribirse en la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad (5)$$

Donde la suma $\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ es extendida sobre todos los 2^n posibles valores del vector

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_2^n$ y los coeficientes $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ son únicamente determinados por las

relaciones: $c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Ejemplo 3:

Sea la función $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1\bar{x}_2 + 6x_1x_3 - 5\bar{x}_2\bar{x}_3$ la cual podemos definir mediante

la siguiente tabla:

Tabla 1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	-5
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	-3
1	0	1	8
1	1	0	0
1	1	1	6

Por el **teorema 3** podemos escribirla:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^0 x_2^0 x_3^0 - 3x_1^1 x_2^0 x_3^0 + 8x_1^1 x_2^0 x_3^1 + 6x_1^1 x_2^1 x_3^1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 - 3x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + 8x_1 \bar{x}_2 x_3 + 6x_1 x_2 x_3$$

CAPÍTULO II

SISTEMA DE ECUACIONES E INECUACIONES PSEUDO-BOOLEANAS

Sistema de ecuaciones e inecuaciones pseudo-booleanas

Para resolver una o más ecuación(es) y/o inecuación(es) o sistemas de ecuaciones y/o inecuaciones asociamos a cada una de ellas una **ecuación Booleana característica** que tiene la(s) misma(s) solución(es) de la(s) ecuación(es) y/o inecuación(es) o sistema original, mediante el uso de una condición lógica en el sistema. La construcción de la ecuación característica se basa en una metodología utilizada en la solución general para el caso lineal.

El problema es determinar la ecuación característica, esta tarea se realiza utilizando un producto que da soluciones agrupadas, disjuntas dos a dos que hemos conocido como **familias de soluciones**.

2.1. Determinación de una familia de soluciones

Es un proceso que consiste en dos pasos:

Primero:

La ecuación dada o sistema de ecuación es expresada como una ecuación simple de la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

dicha función podemos escribirla en una forma disyuntiva:

$$C_1 \cup C_2 \dots \cup C_m = 1$$

donde C_1, C_2, \dots, C_m son conjunciones elementales.

Segundo:

Se asigna a cada conjunción C_i la condición:

$$C_i = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots x_{i_{p(i)}}^{\alpha_{i_{p(i)}}} = 1 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Obtenemos:

$$x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} = x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} = \dots = x_{i_{p(i)}}^{\alpha_{i_{p(i)}}} = \mathbf{1} \quad (i = \mathbf{1}, \dots, m)$$

Recordando que: $x^\alpha = 1$ si y solo si $x = \alpha$ (para $x^1 = 1$ entonces $x = 1$, cuando $x^0 = 1$ entonces $\bar{x} = 1$ o sea $x = 0$). De esta forma conseguimos un grupo de soluciones llamadas **familia de soluciones**, en otras palabras:

$$x_{i_1} = \alpha_{i_1}, x_{i_2} = \alpha_{i_2}, \dots, x_{i_{p(i)}} = \alpha_{i_{p(i)}}$$

2.2. Solución de una ecuación lineal pseudo-Booleana

El conjunto:

$$a_1 z_1 + b_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 + b_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n + b_n \bar{z}_n = k \quad (*)$$

Donde $a_i, b_i (i = 1, \dots, n)$ y k son constantes dadas, y los $z_i (i = 1, \dots, n)$ las incógnitas, es la forma general de una ecuación pseudo-Booleana.

Para cada i del conjunto, se realiza la siguiente sustitución:

$$x_i = \begin{cases} z_i & \text{si } a_i > b_i \\ \bar{z}_i & \text{si } a_i < b_i \end{cases}$$

Por tanto, para cada término se tiene que:

$$a_i z_i + b_i \bar{z}_i = \begin{cases} (a_i - b_i)x_i + b_i & \text{si } a_i > b_i \\ (b_i - a_i)x_i + a_i & \text{si } a_i < b_i \end{cases}$$

Luego la ecuación (*) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = d \quad (**)$$

Donde $c_i (i = 1, \dots, n)$ y d son constantes y considerando que $c_i > 0 (i = 1, \dots, n)$

y $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0$.

La **tabla 2** muestra la forma sistemática de reducir la ecuación pseudo-Booleana, evitando los caminos sin solución.

Tabla 2.

No.	Casos	Conclusiones
1.	$d < 0$	No hay Solución.
2.	$d = 0$	La solución es: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
3.	$d > 0$ y $C_1 \geq \dots \geq C_p > d > C_{p+1} \geq \dots \geq C_n$	La solución es: $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ y $\sum_{j=p+1}^n c_j x_j = d$
4.	$d > 0$ y $C_1 = \dots = C_p = d > C_{p+1} \geq \dots \geq C_n$	a. Para cada $k = 1, 2, \dots, p$. $x_k = 1$ $x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ Es una solución. b. Las otras soluciones cumplen: $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ y $\sum_{j=p+1}^n c_j x_j = d$
5.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i < d$	No hay solución
6.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i = d$	La única solución es: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$
7.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i > d$ y $\sum_{j=2}^n c_j < d$	La solución cumple con: $x_1 = 1$, y $\sum_{j=2}^n c_j x_j > d - c_1$
8.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i > d$ y $\sum_{j=2}^n c_j \geq d$	La solución cumple con: $x_1 = 1$, y $\sum_{j=2}^n c_j x_j = d - c_1$ o $x_1 = 0$, y $\sum_{j=2}^n c_j x_j = d$

Analizando la tabla 2 vemos que pueden suceder las siguientes situaciones:

- La ecuación es inconsistente(caso 1 y 5)
- La ecuación tiene solución única(caso 2 y 6)
- La ecuación se sustituye por otra del mismo tipo, pero con menos variables(caso 3, 4 y 7)

- La ecuación se sustituye por dos del mismo tipo, pero con menos variables, donde cada una de estas ecuaciones se analiza por separado(caso 8)

Ejemplo 1

Resolvamos la siguiente ecuación pseudo-booleana:

$$4z_1 + \bar{z}_1 - 3z_2 + \bar{z}_2 + 5z_3 - 2z_4 + 5z_5 + 2z_6 - z_7 = 7 \quad (1)$$

Realizando las transformaciones:

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \bar{z}_2, \quad y_3 = z_3, \quad y_4 = \bar{z}_4, \quad y_5 = z_5, \quad y_6 = z_6, \quad y_7 = \bar{z}_7$$

Obtenemos:

$$3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 5y_5 + 2y_6 + y_7 = 12$$

Ordenando los coeficientes de la ecuación anterior:

$$5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 12 \quad (2)$$

Donde:

$$x_1 = y_3 = z_3$$

$$x_2 = y_5 = z_5$$

$$x_3 = y_2 = \bar{z}_2$$

$$x_4 = y_1 = z_1$$

$$x_5 = y_4 = \bar{z}_4$$

$$x_6 = y_6 = z_6$$

$$x_7 = y_7 = \bar{z}_7$$

De la tabla 2 aplicamos el caso 8 a la ecuación (2), para $x_1 = 1$ y $x_1 = 0$ obtenemos respectivamente las ecuaciones:

$$5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 7 \quad (3)$$

$$5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 12 \quad (4)$$

Primero analizaremos y determinaremos todas las soluciones de la ecuación (3). Comenzamos aplicándole el caso 8 de la tabla 2 para $x_2 = 1$ y $x_2 = 0$ obtenemos respectivamente las ecuaciones:

$$4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 2 \quad (5)$$

$$4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 7 \quad (6)$$

La ecuación (5) por el caso 3 de la tabla 2 cuando $x_3 = x_4 = 0$ nos da la ecuación:

$$2x_5 + 2x_6 + x_7 = 2 \quad (7)$$

Por el caso 4 la ecuación (7) tiene soluciones:

$$(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \text{ y } (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$$

y una ecuación:

$$x_7 = 2$$

que por el caso 5 no tiene solución.

Ahora analizamos la ecuación (6) y aplicándole el caso 8 para $x_3 = 1$ y $x_3 = 0$ obtenemos respectivamente las ecuaciones:

$$3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 3 \quad (8)$$

$$3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 7 \quad (9)$$

El caso (4) aplicado a la ecuación (8) nos da la solución:

$$(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$$

y la ecuación:

$$2x_5 + 2x_6 + x_7 = 3 \quad (10)$$

Por el caso 8, la ecuación (10), nos ofrece las ecuaciones:

$$2x_6 + x_7 = 1 \quad (11)$$

$$2x_6 + x_7 = 3 \quad (12)$$

Aplicando el caso 3 a la ecuación (11) obtenemos la solución:

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$$

Por el caso 6 la ecuación (12) tiene solución:

$$(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$$

Retomando la ecuación (9) y aplicando el caso 7, conseguimos la ecuación:

$$2x_5 + 2x_6 + x_7 = 4 \quad (13)$$

La ecuación (13) cumple con las condiciones del caso 7, así obtenemos la ecuación:

$$2x_6 + x_7 = 2 \quad (14)$$

La cual por el caso 4 tiene la siguiente solución:

$$(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

De esta manera obtenemos todas las soluciones de la ecuación (3). Ahora debemos proceder a determinar todas las soluciones de la ecuación (4). Comenzamos aplicando el caso 8, así obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 7 \quad (15)$$

$$4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 12 \quad (16)$$

La ecuación (15) coincide con la ecuación (6) por tanto tienen las mismas soluciones:

$$(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) ; (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) ; (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) ; (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$$

Por último aplicamos el caso 6 a la ecuación (16) obtenemos la solución:

$$(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$$

Realizando los respectivos reemplazos, obtenemos agrupadas las soluciones de (1)

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0

2.2.1. Función característica en el caso de ecuaciones lineales

Una ecuación o inecuación pseudo- Booleana o sistema de ecuaciones o inecuaciones pseudo-Booleana, se denota:

$$\Sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (I)$$

La ecuación característica de (I) es una ecuación Booleana de la forma:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (2)$$

Conocida como la función característica de (I) , la cual contiene las mismas soluciones. (Frank Markham Brown.1990. Boolean Reasoning The logic of Boolean Equations.)

La fórmula para la interpolación de funciones Booleanas es:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (3)$$

donde: $\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ es la disyunción extendida para todos los posibles 2^n valores del vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_2^n$ y x^α se define como:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{si } \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La expresión (3) la podemos escribir como:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (5)$$

Donde: $\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^1$ es la disyunción extendida solo sobre aquellos valores del vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ para cuando $\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$.

La función característica ϕ de $\Sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\Sigma x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (6)$$

Donde: $\bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\Sigma$ es la disyunción extendida para todas las soluciones de:

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $\Sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)$. (Rodeanu, Sergiu. 1974. Boolean Function and Equations)

La expresión (6) identifica la función característica que nos brinda el conjunto de todas las soluciones.

Ejemplo 2

En el ejemplo visto anteriormente:

$$4x_1 + \bar{x}_1 - 3x_2 + \bar{x}_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 2x_6 - x_7 = 7$$

se muestra todas las soluciones para la ecuación:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0

La función característica está dada por:

$$\Phi = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6 x_7 \cup \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \cup \dots \cup x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_6 \bar{x}_7$$

2.3. Solución de una inecuaciones lineales pseudo-booleanas

La forma general de una inecuación pseudo-Booleana es:

$$a_1 z_1 + b_1 \bar{z}_1 + a_2 z_2 + b_2 \bar{z}_2 + \dots + a_n z_n + b_n \bar{z}_n \geq k \quad (*)$$

Donde $a_i, b_i (i = 1, \dots, n)$ y k son constantes enteras, y los $z_i (i = 1, \dots, n)$ son

las incógnitas.

Si $S = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ es una solución de (*) y si I es un conjunto de índices $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $\Sigma(S, I)$ es el conjunto de todos los vectores que satisfacen: $z_i = z_i^*$ para todo $i \in I$, las otras variables $z_j (j \notin I)$ son arbitrarias.

Si todos los vectores $(z_1, \dots, z_n) \in \Sigma(S, I)$ satisfacen la ecuación (*), entonces $\Sigma(S, I)$ es conocida como **familia de soluciones**.

2.3.1. Solución de base de una inecuación pseudo-Booleana.

Un vector (x_1^*, \dots, x_n^*) se denominará **solución de base de (*)** si para cualquier $x_i^* = 1$ el vector $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ no es solución de (*).

Para cada solución $S = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ asociamos una familia de soluciones $\Sigma(S, J_S)$ definida como:

- i_0 será el último índice para el cual $x_i^* = 1$, en otras palabras $x_{i_0}^* = 1$ y $x_i^* = 0$ para todo $i > i_0$
- J_S será el conjunto de índices tal que $i \leq i_0$
- $\Sigma(S, J_S)$ es el conjunto de todos los vectores (x_i, \dots, x_n) que satisfacen:

$$x_i = \begin{cases} x_i^* & \text{para } i \leq i_0 \\ \text{arbitrario} & \text{para } i > i_0 \end{cases}$$

Para evitar revisar los 2^n caminos posibles, la siguiente tabla permite descartar todos los caminos sin solución. Este método es conocido como **eliminación sistemáticas de variables bivalentes**. (Rudeanu, Sergiu. 1974. Boolean Function and Equations)

Tabla 3.

No.	Casos	Conclusiones
1.	$d \leq 0$	$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
2.	$d > 0$ y $C_1 \geq \dots \geq C_p \geq d > C_{p+1} \geq \dots \geq C_n$	1. $x_k = 1$ para cada $k = 1, 2, \dots, p$ y $x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ es una solución básica. 2. Las otras soluciones se caracterizan por la propiedad: $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ y (x_{p+1}, \dots, x_n) es una solución básica de: $\sum_{j=p+1}^n c_j x_j \geq d$
3.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i < d$	No hay solución
4.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i = d$	La única solución básicas es: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$
5.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i > d$ y $\sum_{j=2}^n c_j < d$	La solución básica es caracterizada por la propiedad: $x_1 = 1$, y (x_2, \dots, x_n) es una solución básica de: $\sum_{j=2}^n c_j x_j > d - c_1$
6.	$d > 0$ y $C_i < d$ ($i = 1, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n c_i > d$ y $\sum_{j=2}^n c_j \geq d$	La solución básica son caracterizadas por la propiedad: a. si $x_1 = 1$, entonces (x_2, \dots, x_n) es una solución básica de: $\sum_{j=2}^n c_j x_j \geq d - c_1$ b. si $x_1 = 0$, entonces (x_2, \dots, x_n) es una solución básicas de: $\sum_{j=2}^n c_j x_j \geq d$

Ejemplo 3

Resolver:

$$2\bar{z}_1 - 5z_2 + 3z_3 + 4\bar{z}_4 - 7z_5 + 16z_6 - z_7 \geq -4 \quad (1)$$

Realizando el cambio de variables:

$$z_1 = \bar{y}_1, \quad z_2 = \bar{y}_2, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = \bar{y}_4, \quad z_5 = \bar{y}_5, \quad z_6 = y_6, \quad z_7 = \bar{y}_7$$

La ecuación nos queda:

$$2y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 7y_5 + 16y_6 + y_7 \geq 9$$

Ordenando los C_i obtenemos:

$$16x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 9 \quad (2)$$

Donde:

$$z_1 = \bar{y}_1 = x_6$$

$$z_2 = \bar{y}_2 = x_3$$

$$z_3 = y_3 = x_5$$

$$z_4 = \bar{y}_4 = x_4$$

$$z_5 = \overline{y_5} = x_2$$

$$z_6 = y_6 = x_1$$

$$z_7 = \overline{y_7} = x_7$$

Comenzaremos a reducir la inecuación aplicando el método de eliminación sistemática de las variables bivalentes.

Aplicando el caso 2 a (2):

Para $x_1 = 1, x_i = 0 \ i = 2, \dots, 7$ obtenemos la solución básica:

$$(1,0,0,0,0,0,0)$$

Para $x_1 = 0$ la inecuación (2) queda de la siguiente forma:

$$7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 9 \quad (3)$$

Aplicando el caso 6 a (3):

Para cuando $x_2 = 1$ y $x_2 = 0$ obtenemos respectivamente las inecuaciones:

$$5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 2 \quad (4)$$

$$5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 9 \quad (5)$$

Para (4) aplicamos el caso 2, obteniendo las soluciones básicas:

$$(0,1,1,0,0,0,0); (0,1,0,1,0,0,0); (0,1,0,0,1,0,0); (0,1,0,0,0,1,0)$$

Y la inecuación: $x_7 \geq 2$ la cual no tiene solución.

Para (5) aplicamos el caso 6 para $x_3 = 1$ y $x_3 = 0$ obtenemos respectivamente las inecuaciones:

$$4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 4 \quad (6)$$

$$4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 9 \quad (7)$$

Ahora aplicamos el caso 2 a (6) obteniendo la solución básica:

$$(0,0,1,1,0,0,0)$$

y la inecuación:

$$3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 4 \quad (8)$$

Aplicamos el caso 5 a la inecuación (8) obtenemos:

$$2x_6 + x_7 \geq 1 \quad (9)$$

Aplicando el caso 2 a (9) obtenemos las soluciones básicas:

$$(0,0,1,0,1,1,0) ; (0,0,1,0,1,0,1)$$

Retomando la inecuación (7), y le aplicamos el caso 5, obteniendo la inecuación:

$$3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 5 \quad (10)$$

La inecuación (10) está en el caso 5, así obtenemos:

$$2x_6 + x_7 \geq 2 \quad (11)$$

Ahora a (11) por el caso 2 obtenemos la solución básica:

$$(0,0,0,1,1,1,0)$$

y la inecuación:

$$x_7 \geq 2 \quad \text{que no tiene solución}$$

Agrupamos todas soluciones básicas de (2) en la siguiente tabla

No.	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	0	1	1	0
8	0	0	1	0	1	0	1
9	0	0	0	1	1	1	0

Donde:

$$J_1 = \{1\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$J_3 = J_6 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J_4 = \{1,2,3,4,5\}$$

$$J_5 = J_7 = J_9 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$J_8 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

Realizando el cambio de variables que se efectuaron al comienzo del problema, obtenemos la familia de soluciones de (1)

No.	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
1	A	A	A	A	A	1	A
2	A	0	A	A	0	0	A
3	A	1	A	0	0	0	A
4	A	1	1	1	0	0	A
5	0	1	0	1	0	0	A
6	A	0	A	0	1	0	A
7	0	0	1	1	1	0	A
8	1	0	1	1	1	0	0
9	0	1	1	0	1	0	A

Donde A representa variables que toman valores arbitrarios.

2.3.2. Función característica en el caso de inecuaciones lineales

La solución de una inecuación pseudo Booleana se da mediante un grupo de soluciones llamadas familias de soluciones. Dicha familia \mathcal{F} de soluciones se define como un conjunto de soluciones características debido a que ciertas variables tienen valores fijos y otras permanecen con valores arbitrarios.

El sistema de familias de soluciones puede expresarse mediante el conjunto:

$$\mathcal{L} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_p \quad (1)$$

Considerando (1), las leyes de idempotencia y la función característica para el caso de una ecuación lineal, podemos escribir:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{h=1}^p (\alpha_{1,\dots,n}) \in \mathcal{F}_h x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (2)$$

Donde:

$$\bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{F}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = x_{h_1}^{\xi_{h_1}} \dots x_{h_{m(h)}}^{\xi_{h_{m(h)}}} \quad (3)$$

La expresión (3) nos indica que cada familia $\mathcal{F}_h (h = 1, \dots, p)$ es caracterizada por una conjunción:

$$x_{h_1}^{\xi_{h_1}} \dots x_{h_{m(h)}}^{\xi_{h_{m(h)}}} = C_h \quad (4)$$

Por tanto la función característica para una inecuación lineal es:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = C_1 \cup \dots \cup C_p \quad (5)$$

(Rodeanu, Sergiu. 1974. Boolean Function and Equations)

Ejemplo 4

En el ejemplo 3

$$2\bar{z}_1 - 5z_2 + 3z_3 + 4\bar{z}_4 - 7z_5 + 16z_6 - z_7 \geq -4$$

Obtuvimos la familia de soluciones de

No.	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
1	A	A	A	A	A	1	A
2	A	0	A	A	0	0	A
3	A	1	A	0	0	0	A
4	A	1	1	1	0	0	A
5	0	1	0	1	0	0	A
6	A	0	A	0	1	0	A
7	0	0	1	1	1	0	A
8	1	0	1	1	1	0	0
9	0	1	1	0	1	0	A

La función característica se expresa como:

$$\Phi = z_6 \cup \overline{z_2 z_5 z_6} \cup z_2 \overline{z_4 z_5 z_6} \cup \dots \cup \overline{z_1 z_2 z_3 z_4} z_5 \overline{z_7}$$

2.4. Solución de un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales

El método desarrollado para resolver una ecuación o inecuación pseudo-Booleana se puede utilizar para generalizar el caso cuando se tiene un sistema de ecuaciones o inecuaciones con coeficientes reales es desarrollado en tres pasos (Peter Hammer and Segiu Rudeanu, Boolean Methods in Operations Research):

Primero:

Se reemplaza cada inecuación de la forma $f > 0$, $g < 0$ y $h \leq 0$ por las inecuaciones: $f - 1 \geq 0$, $-g - 1 \geq 0$, y $-h \geq 0$, respectivamente, donde obtenemos un sistema que contiene ecuaciones de la forma $G = 0$, o inecuaciones de la forma $F \geq 0$.

Segundo:

Sean x_1, \dots, x_n las incógnitas del sistema y utilizando los cambios de variables $\bar{x}_i = 1 - x_i$ y $x_j = 1 - \bar{x}_j$ podemos escribir cada inecuación de la forma:

$$c_{i_1}^i \tilde{x}_{i_1} + \dots + c_{i_m}^i \tilde{x}_{i_m} \geq d^i \quad (1)$$

Donde: $\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}$ representan las variables x_1, \dots, x_n involucradas en cada una de las inecuaciones del sistema, a demás \tilde{x} es cualquier x o \bar{x} , de manera que:

$$c_{i_1}^i \geq c_{i_2}^i \dots \geq c_{i_m}^i \tilde{x}_{i_m} > 0.$$

Tercero:

Cada ecuación (inecuación) se considera por separado, y la escribimos en su forma canónica respecto a la variable \tilde{x} involucrada en cada una de ellas.

Cuando alguna ecuación o inecuación del sistema no tiene solución, entonces todo el sistema es inconsistente.

De igual forma si la ecuación $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = 0$ tiene solución única, entonces cada solución del sistema debe satisfacer las restantes relaciones.

Ahora las tablas 4, 5 y 6 nos presentan unas conclusiones que nos permiten obtener las soluciones del sistema:

$$\sum_{j=1}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i.$$

Tabla 4

No.	Casos	Información		
		Conclusión	Variables fijas	Resto de la ecuación
1	$d^i < 0.$	Sin solución		
2	$d^i = 0.$	Todas las variables son fijas	$\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_m} = 0.$	
3	$d^i > 0$ y $c_{i_1}^i \geq \dots \geq c_{i_p}^i \geq d^i \geq c_{i_{p+1}}^i \geq \dots \geq c_{i_m}^i$	Ciertas variables son fijas	$\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_p} = 0.$	$\sum_{j=p+1}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i.$
4	$d^i > 0.$ y $c_{i_1}^i = \dots = c_{i_p}^i = d^i \geq c_{i_{p+1}}^i \geq \dots \geq c_{i_m}^i$	Tenemos $p + 1$ posibilidades $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta$	$\alpha_k: \tilde{x}_{i_k} = 1$ $\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_{k-1}} = \tilde{x}_{i_{k+1}} = \dots = \tilde{x}_{i_m} = 0$ $(k = 1, \dots, p)$	
			$\beta: \tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_p} = 0.$	$\sum_{j=p+1}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i.$
5	$d^i > 0.$ $c_{ij}^i < d^i (j = 1, 2, \dots, m)$ y $\sum_{j=1}^m c_{ij}^i < d^i.$	No hay solución		
6	$d^i > 0.$ $c_{ij}^i < d^i (j = 1, 2, \dots, m)$ y $\sum_{j=1}^m c_{ij}^i = d^i.$	Todas son variables fijas	$\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_p} = 1.$	
7	$d^i > 0.$ $c_{ij}^i < d^i (j = 1, 2, \dots, m)$ y $\sum_{j=1}^m c_{ij}^i > d^i$ y $\sum_{j=2}^m c_{ij}^i < d^i$	Una variable es fija	$\tilde{x}_{i_1} = 1.$	$\sum_{j=2}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i - c_{i_1}^i.$
8	$d^i > 0.$ $c_{ij}^i < d^i (j = 1, 2, \dots, m)$ y $\sum_{j=1}^m c_{ij}^i > d^i$ Y $\sum_{j=2}^m c_{ij}^i \geq d^i$	Tenemos dos posibilidades γ_1, γ_2	$\gamma_1: \tilde{x}_{i_1} = 1$	$\sum_{j=2}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i - c_{i_1}^i.$
			$\gamma_2: \tilde{x}_{i_1} = 0$	$\sum_{j=2}^m c_{ij}^i \tilde{x}_{ij} = d^i.$

Tabla 5

No.	Casos	Información		
		Conclusión	Variables fijas	Resto de la ecuación
1	$d^i \leq 0.$	Inecuación redundante		
2	$d^i > 0.$ y $c_{i_1}^i \geq \dots \geq c_{i_p}^i \geq d^i \geq c_{i_{p+1}}^i \geq \dots \geq c_{i_m}^i$	Tenemos $p + 1$ posibilidades $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta$	$\alpha_k: \tilde{x}_{i_k} = 1$ $\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_{k-1}} = \tilde{x}_{i_{k+1}} = \dots = \tilde{x}_{i_m} = 0$ ($k = 1, \dots, p$) $\beta: \tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_p} = 0.$	$\sum_{j=p+1}^m c_{i_j}^i \tilde{x}_{i_j} \geq d^i.$
3	$d^i > 0.$ $c_{i_j}^i < d^i$ ($j = 1, 2, \dots, m$) y $\sum_{j=1}^m c_{i_j}^i < d^i.$	No hay solución		
4	$d^i > 0.$ $c_{i_j}^i < d^i$ ($j = 1, 2, \dots, m$) y $\sum_{j=1}^m c_{i_j}^i = d^i.$	Todas son variables fijas	$\tilde{x}_{i_1} = \dots = \tilde{x}_{i_p} = 1.$	
5	$d^i > 0.$ $c_{i_j}^i < d^i$ ($j = 1, 2, \dots, m$) y $\sum_{j=1}^m c_{i_j}^i > d^i$ y $\sum_{j=2}^m c_{i_j}^i < d^i$	Una variable es fija	$\tilde{x}_{i_1} = 1.$	$\sum_{j=2}^m c_{i_j}^i \tilde{x}_{i_j} \geq d^i - c_{i_1}^i.$
6	$d^i > 0.$ $c_{i_j}^i < d^i$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\sum_{j=1}^m c_{i_j}^i > d^i$ y $\sum_{j=2}^m c_{i_j}^i \geq d^i$	Tenemos dos posibilidades γ_1, γ_2	$\gamma_1: \tilde{x}_{i_1} = 1$ $\gamma_2: \tilde{x}_{i_1} = 0$	$\sum_{j=2}^m c_{i_j}^i \tilde{x}_{i_j} \geq d^i - c_{i_1}^i.$ $\sum_{j=2}^m c_{i_j}^i \tilde{x}_{i_j} \geq d^i.$

Tabla 6

Orden de preferencia	Ecuación. Tabla 4	Inecuación. Tabla 5	Característica
Primero	1, 2, 3, 5, 6, 7	1, 3, 4, 5	Determinante
Segundo	4	2	Parcialmente determinado
Tercero	8	6	Indeterminado

Observando la tabla 4 y 5 tenemos algunas condiciones sobre las variables, las ecuaciones o inecuaciones:

- Podemos encontrarnos con variables fijas, otros casos con el sistema que no tiene solución o con ecuación o inecuación redundante, llamamos a este caso **determinado**.
- Podemos encontrarnos con situaciones que debemos separar en $p + 1$ casos para aumentar la información, a este lo llamamos **parcialmente determinado**.
- Podemos tener situaciones que no tenemos información y debemos separarlo en dos condiciones, a este caso le llamamos **indeterminado**.

El tercer paso de este proceso de resolución continua de la siguiente forma:

- Si algunas ecuaciones o inecuaciones pertenecen a casos determinados, sacamos las conclusiones correspondientes y se agrupan. Pueden surgir dos situaciones si al menos una ecuación o inecuación no tienen solución, o si dos ecuaciones o inecuaciones distintas conducen a conclusiones de la forma $\tilde{x}_i = 1$ y $\tilde{x}_i = 0$, entonces el sistema no tiene solución. El otro caso, se deben determinar los valores de ciertas variables, esto nos lleva a un sistema más pequeño que se debe revisar.

- Si no tenemos ecuaciones o inecuaciones en caso determinado, pero tenemos en caso parcialmente determinado, seguimos la conclusión correspondiente a cada una de estas ecuaciones o inecuaciones. Parece conveniente elegir la ecuación o inecuación donde p es mayor.
- Si todas las ecuaciones e inecuaciones se encuentran en el caso indeterminado, dividimos la discusión respecto a una de las variables, parece conveniente elegir la variable que aparecen con el coeficiente más grande en el sistema.

Ejemplo 5

Resolvamos el siguiente sistema:

$$2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 6x_5 = -2 \quad (1.1)$$

$$5x_1 - 4x_3 + 3x_5 + 2x_6 - x_7 + 9x_8 \leq 5 \quad (1.2)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 4x_4 - 5x_5 - 9x_6 + 8x_7 > -1 \quad (1.3)$$

$$2x_2 - 4x_4 - x_6 + 3x_8 \geq 1 \quad (1.4)$$

Realizando las transformaciones de los pasos 1 y 2 obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$8x_3 + 6\bar{x}_5 + 4\bar{x}_2 + 3x_4 + 2x_1 = 8 \quad (2.1)$$

$$9\bar{x}_8 + 5\bar{x}_1 + 4x_3 + 3\bar{x}_5 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 14 \quad (2.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 6x_2 + 5\bar{x}_5 + 4x_1 + 4x_4 \geq 14 \quad (2.3)$$

$$4\bar{x}_4 + 3x_8 + 2x_2 + \bar{x}_6 \geq 6 \quad (2.4)$$

La ecuación (2.1) es parcialmente indeterminada, mientras que las otras están en el caso indeterminado. Tenemos $p = 1$, lo cual indica que existen dos alternativas:

$$x_3 = 1, \quad \bar{x}_5 = \bar{x}_2 = x_4 = x_1 = 0 \quad (\alpha)$$

$$x_3 = 0, \quad 6\bar{x}_5 + 4\bar{x}_2 + 3x_4 + 2x_1 = 8 \quad (\beta)$$

Con la alternativa (α) la ecuación (2.1) desaparece de ese sistema, reduciéndolo a otro equivalente:

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_5 = 1 \quad \text{Variables fijas}$$

$$9\bar{x}_8 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 5 \quad (3.1)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 \geq 8 \quad (3.2)$$

$$3x_8 + \bar{x}_6 \geq 0 \quad (3.3)$$

En el sistema anterior, la inecuación (3.3) es redundante, es decir que es de tipo determinado, por tanto nuestro sistema se reduce a (3.1) y (3.2).

Las inecuaciones (3.1) y (3.2) caen en el caso parcialmente determinado, entonces $p = 1$ y $p = 2$, respectivamente, de este modo analizamos tres casos:

$$\bar{x}_6 = 1 \quad (\alpha'_1)$$

$$\bar{x}_6 = 0, x_7 = 1 \quad (\alpha'_2)$$

$$\bar{x}_6 = x_7 = 0 \quad (\alpha'_3)$$

Descartamos el caso (α'_3) ya que en (3.2) nos queda $0 \geq 8$,

Para el caso (α'_1), obtenemos solo una inecuación:

$$x_1 = x_4 = x_6 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_5 = 1 \quad \text{Variables fijas}$$

$$9\bar{x}_8 + x_7 \geq 3 \quad (4.1)$$

Para (4.1) tenemos dos posibilidades:

$$\bar{x}_8 = 1 \quad (\alpha'')$$

$$\bar{x}_8 = 0 \text{ y } x_7 \geq 3 \quad (\alpha''') \text{ la cual es inconsistente.}$$

Para (α'') no tenemos más condiciones y la solución del sistema es:

$$(0, 1, 1, 0, 1, 0, A, 0)$$

Retomando el caso (α'_2) en (3.2) obtenemos:

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 1 \quad \text{Variables fijas}$$

$$9\bar{x}_8 \geq 4 \quad (5.1)$$

Esto nos indica que $\bar{x}_8 = 1$, de esta forma obtenemos la siguiente solución para el sistema:

$$(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

Por último, analizaremos el caso (β)

$$x_3 = 0 \quad \text{Variable fija}$$

$$6\bar{x}_5 + 4\bar{x}_2 + 3x_4 + 2x_1 = 8 \quad (6.1)$$

$$9\bar{x}_8 + 5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_5 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 14 \quad (6.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 6x_2 + 5\bar{x}_5 + 4x_1 + 4x_4 \geq 14 \quad (6.3)$$

$$4\bar{x}_4 + 3x_8 + 2x_2 + \bar{x}_6 \geq 6 \quad (6.4)$$

La inecuación (6.2) es la única que cae en un caso determinado, por tanto $\bar{x}_8 = 1$, obteniendo así el sistema:

$$x_3 = x_8 = 0 \quad \text{Variables fijas}$$

$$6\bar{x}_5 + 4\bar{x}_2 + 3x_4 + 2x_1 = 8 \quad (7.1)$$

$$5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_5 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 5 \quad (7.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 6x_2 + 5\bar{x}_5 + 4x_1 + 4x_4 \geq 14 \quad (7.3)$$

$$4\bar{x}_4 + 2x_2 + \bar{x}_6 \geq 6 \quad (7.4)$$

La inecuación (7.4) cae en un caso determinado, por tanto, $\bar{x}_4 = 1$, de esta forma el sistema se transforma en:

$$x_3 = x_4 = x_8 = 0 \quad \text{Variables fijas}$$

$$6\bar{x}_5 + 4\bar{x}_2 + 2x_1 = 8 \quad (8.1)$$

$$5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_5 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 5 \quad (8.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 6x_2 + 5\bar{x}_5 + 4x_1 \geq 14 \quad (8.3)$$

$$2x_2 + \bar{x}_6 \geq 2 \quad (8.4)$$

En la ecuación (8.1) $\bar{x}_5 = 1$, así obtenemos el sistema:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_8 = 0 \quad \text{Variables fijas}$$

$$4\bar{x}_2 + 2x_1 = 2 \quad (9.1)$$

$$5\bar{x}_1 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 2 \quad (9.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 6x_2 + 4x_1 \geq 9 \quad (9.3)$$

$$2x_2 + \bar{x}_6 \geq 2 \quad (9.4)$$

En la ecuación (9.1) $\bar{x}_2 = 0$ obteniendo el sistema:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_8 = 0, x_2 = 1 \quad \text{Variables fijas}$$

$$2x_1 = 2 \quad (10.1)$$

$$5\bar{x}_1 + 2\bar{x}_6 + x_7 \geq 2 \quad (10.2)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 + 4x_1 \geq 3 \quad (10.3)$$

$$\bar{x}_6 \geq 0 \quad (10.4)$$

La inecuación (10.4) es satisfactoria, y la ecuación (10.1) implica que $x_1 = 1$, de este modo obtenemos el sistema:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_8 = 0, x_1 = x_2 = 1 \quad \text{Variables fijas}$$

$$2\bar{x}_6 + x_7 \geq 2 \quad (11.1)$$

$$9\bar{x}_6 + 8x_7 \geq -1 \quad (11.2)$$

La inecuación (11.2) es satisfactoria, y la inecuación (11.1) nos lleva a dos condiciones:

$$\bar{x}_6 = 1 \quad (\beta')$$

$$\bar{x}_6 = 0, x_7 \geq 2 \quad (\beta'') \quad \text{este caso es inconsistente.}$$

Por tanto la solución nos las brinda el caso (β'):

$$(1, 1, 0, 0, 0, A, 0)$$

Todas las soluciones del sistema son:

Tabla 7

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	1	1	0	1	0	Arbitrario	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	Arbitrario	0

La función característica está dada por

$$\Phi = \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}x_5\overline{x_6}\overline{x_8} \cup x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5x_6x_7\overline{x_8} \cup x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4}\overline{x_5}\overline{x_6}\overline{x_8}$$

2.5. Solución y función característica para una ecuación o inecuaciones no lineales.

Sea una ecuación no lineal pseudo-booleana con incógnitas: x_1, \dots, x_n :

$$\mathbf{a_1P_1} + \dots + \mathbf{a_mP_m} = \mathbf{b} \quad (1)$$

donde cada $P_i (i = 1, \dots, m)$ representa una cierta conjunción.

$$P_i = x_{i_1}^{\pi_{i_1}} \dots x_{i_{k(i)}}^{\pi_{i_{k(i)}}} \quad (2)$$

Si sustituimos el P_i por una única variable bivalente y_i y resolvemos la ecuación lineal pseudo-booleana resultante nos queda (1) expresada como:

$$\mathbf{a_1y_1} + \dots + \mathbf{a_my_m} = \mathbf{b} \quad (3)$$

con $y_i (i = 1, \dots, m)$ consideradas variables independientes.

Si $\Psi(y_1, \dots, y_m)$ es la función característica de (3), entonces:

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \Psi \left[x_{i_1}^{\pi_{i_1}} \dots x_{i_{k(1)}}^{\pi_{i_{k(1)}}}, \dots, x_{m_1}^{\pi_{m_1}} \dots x_{m_{k(m)}}^{\pi_{m_{k(m)}}} \right] \quad (4)$$

será la función característica de (1). Para el caso de una inecuación lineal, se aplica el mismo procedimiento.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación no lineal pseudo-Booleana:

$$-6x_1\overline{x_2}x_3 - 4x_2x_4 + 2x_2x_4\overline{x_5} + 4\overline{x_3}\overline{x_4} = -2 \quad (1)$$

Realizamos las siguientes sustituciones:

$$x_1\bar{x}_2x_3 = y_1, \quad x_2x_4 = y_2, \quad x_2x_4\bar{x}_5 = y_3, \quad \bar{x}_3\bar{x}_4 = y_4$$

Obtenemos la ecuación:

$$-6y_1 - 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 = -2 \quad (2)$$

que resolvemos como una ecuación lineal, obteniendo las soluciones:

$$(0, 1, 1, 0) \quad y \quad (1, 0, 0, 1)$$

de esta manera la función característica de (2) es:

$$\Psi_1 = \bar{y}_1y_2y_3\bar{y}_4 \cup y_1\bar{y}_2\bar{y}_3y_4 \quad (3)$$

De (3) y de las sustituciones que realizamos al principio del ejemplo, podemos entonces escribir la función característica de (1), de la siguiente forma:

$$\phi = (\bar{x}_1 \cup x_2 \cup \bar{x}_3) \cdot x_2x_4 \cdot x_2x_4\bar{x}_5 \cdot (x_3 \cup x_4) \cup x_1\bar{x}_2x_3(\bar{x}_2 \cup \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \cup \bar{x}_4 \cup x_5)\bar{x}_3\bar{x}_4 \quad (4)$$

Como también:

$$\phi_1 = x_2x_4\bar{x}_5 \quad (5)$$

La ecuación característica $\phi_1 = 1$ nos da como resultados la solución:

$$(A, 1, A, 1, 0)$$

Ejemplo 7

Resolver la inecuación no lineal pseudo-Booleana:

$$7x_1x_2x_3 + 5x_2x_4x_6x_7x_8 - 4x_3x_8 - 2\bar{x}_1x_4x_8 - x_4\bar{x}_5x_6 \leq 3 \quad (1)$$

Realizamos las sustituciones correspondientes:

$$x_1x_2x_3 = y_1, \quad x_2x_4x_6x_7x_8 = y_2, \quad x_3x_8 = y_3, \quad \bar{x}_1x_4x_8 = y_4, \quad x_4\bar{x}_5x_6 = y_5 \quad (2)$$

De esta manera, (1) queda expresada:

$$7y_1 + 5y_2 - 4y_3 - 2y_4 - y_5 \leq 3 \quad (3)$$

Resolviendo (3), obtenemos la familia de soluciones:

Tabla 8

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	0	-	-	-
0	1	1	-	-
0	1	0	1	-
1	0	1	-	-

Obteniendo así la función característica:

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= \bar{y}_1\bar{y}_2 \cup \bar{y}_1y_2y_3 \cup \bar{y}_1y_2\bar{y}_3y_4 \cup y_1\bar{y}_2y_3 \quad (4) \\ &= \bar{y}_1(\bar{y}_2 \cup y_3 \cup y_4) \cup \bar{y}_2y_3\end{aligned}$$

De esta forma la función característica de (I) es:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \cup \bar{x}_4 \cup \bar{x}_6 \cup \bar{x}_7 \cup \bar{x}_8 \cup x_3 \cup \bar{x}_1) \cup x_3x_8(\bar{x}_2 \cup \bar{x}_4 \cup \bar{x}_6 \cup \bar{x}_7) \quad (5) \\ &= \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_3\bar{x}_6 \cup \bar{x}_3\bar{x}_7 \cup \bar{x}_3\bar{x}_8 \cup \bar{x}_4x_8 \cup \bar{x}_6x_8 \cup \bar{x}_7x_8\end{aligned}$$

2.6. Solución y función característica para un sistema no lineal

Consideremos el sistema de ecuaciones e inecuaciones pseudo-Booleano:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1)$$

$$f_h(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad (h = m + 1, \dots, m + p) \quad (2)$$

Obteniendo:

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Hasta:

$$\varphi_q(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Las cuales son las correspondientes ecuaciones características.

Teorema 1.

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{s=1}^{m+p} \varphi_s(x_1, \dots, x_n)$$

donde ϕ representa la función característica para el sistema. (Frank Markham Brown. 1990. Boolean Reasoning The logic of Boolean Equations.)

Ejemplo 8

$$7x_1x_2x_3 - 2\bar{x}_1x_4x_8 + 5x_2x_4x_6x_7x_8 - 4x_3x_8 - x_4\bar{x}_5x_6 \leq 3 \quad (1)$$

$$3x_1 - 2x_2\bar{x}_6 + 4x_5\bar{x}_6\bar{x}_8 + 2x_1x_2x_3 - 7x_8 \geq -8 \quad (2)$$

$$8x_4x_5\bar{x}_8 - 4\bar{x}_3\bar{x}_7x_8 + 3x_1x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 < 3 \quad (3)$$

$$2x_3 + 3x_5 - \bar{x}_5\bar{x}_6 + 4x_6\bar{x}_7x_8 - 2x_5x_6x_7x_8 \geq 1 \quad (4)$$

La función característica para cada inecuación respectivamente es:

$$\varphi_1 = \bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3\bar{x}_8 \cup (\bar{x}_3 \cup x_8)(\bar{x}_4 \cup \bar{x}_6 \cup \bar{x}_7) \quad (1.1)$$

$$\varphi_2 = x_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_6 \cup \bar{x}_8 \quad (2.1)$$

$$\varphi_3 = \bar{x}_3\bar{x}_7x_8 \cup (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2)(x_3 \cup x_4 \cup x_5)(\bar{x}_4 \cup \bar{x}_5 \cup x_8) \quad (3.1)$$

$$\varphi_4 = x_3 \cup x_5 \cup x_6\bar{x}_7x_8 \quad (4.1)$$

Ahora aplicamos el **Teorema 4**, obtenemos la función característica del sistema:

$$\begin{aligned} \phi = & x_1\bar{x}_3x_5\bar{x}_7x_8 \cup \bar{x}_1x_5\bar{x}_7x_8 \cup \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_2x_3\bar{x}_5 \cup \bar{x}_2x_3x_8 \cup \bar{x}_2\bar{x}_4x_5 \cup \bar{x}_2x_5x_8 \\ & \cup \bar{x}_2x_6\bar{x}_7x_8 \cup \bar{x}_1x_3\bar{x}_5x_6 \cup \bar{x}_1x_3x_6x_8 \cup \bar{x}_1x_5x_6x_8 \cup \bar{x}_1x_6\bar{x}_7x_8 \\ & \cup \bar{x}_1x_3\bar{x}_5\bar{x}_8 \cup \bar{x}_1\bar{x}_4x_5\bar{x}_8 \end{aligned}$$

CAPÍTULO III
PROGRAMACIÓN LINEAL CON VARIABLES
BIVALENTES.

3.1 Programación lineal con variables bivalentes.

Para minimizar una función lineal con variables bivalentes

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

Se determinan sin mayor dificultad, de hecho, los puntos mínimos se obtienen mediante:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } c_i < 0, \\ 0 & \text{si } c_i > 0, \\ p_i & \text{si } c_i = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde p_i es un parámetro arbitrario B_2

Ejemplo 1

Sea la función lineal con variables bivalentes:

$$2 + 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_6 - x_7 \quad (3)$$

Aplicando (2), los puntos mínimos son:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = p_4, x_5 = p_5, x_6 = 0, x_7 = 1$$

donde p_4 y p_5 son parámetros arbitrarios en B_2 , entonces el valor mínimo de (3) es -6 .

La minimización de una función lineal con variables bivalentes

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(X) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (4)$$

sujeta a ciertas condiciones que pueden ser lineales o no lineales, se puede realizar de modo similar, aplicando los siguientes pasos:

- Determinar las soluciones del sistema de restricciones, agrupándolas en familias de soluciones F_1, \dots, F_p .
- Para cada familia de soluciones F_k , determinamos el valor de:

$$\min_{X \in F_k} f(X) \quad (5)$$

y los puntos $X^0 \in F_k$ para los cuales:

$$f(X^0) = \min_{X \in F_k} f(X) \quad (6)$$

c. Determinar por verificación directa los valores para los cuales:

$$\min_{k=1, \dots, p} \min_{X \in F_k} f(X) \quad (7)$$

y los puntos $X^* \in B_2^n$ para los cuales:

$$f(X^*) = \min_{k=1, \dots, p} \min_{X \in F_k} f(X) \quad (8)$$

Para efectuar el paso **b** debemos tomar en cuenta que los vectores $X = (x_1, \dots, x_n)$ que pertenecen a una familia de soluciones F_k se caracterizan por el hecho de que los valores de x_i son fijos para aquellos que están contenidos en algunos conjuntos de índices I_k

$$i \in I_k \text{ implica que } x_i = x_i^* = \text{fijo } B_2 \quad (9)$$

mientras que x_j sigue siendo arbitrario para $j \notin I_k$.

De lo anterior se puede verificar que los puntos X^0 que satisfacen (6) vienen dado por las siguientes condiciones:

$$x_i = \begin{cases} x_i^* & \text{si} & i \in I_k \\ \mathbf{1} & \text{si} & i \notin I_k \text{ y } c_i < \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{si} & i \notin I_k \text{ y } c_i > \mathbf{0} \\ p_i & \text{si} & i \notin I_k \text{ y } c_i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

donde p_i es un parámetro arbitrario en el conjunto B_2 .

Ejemplo 2

Minimizar la función

$$2 + 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 4x_6 \quad (11)$$

Sujeta a las condiciones:

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 2x_5 - x_6 \leq 2 \quad (12.1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 - x_5 - 3x_6 \geq 4 \quad (12.2)$$

La familia de soluciones de (II) es determinado por el proceso presentado anteriormente sobre solución de un sistema de desigualdades lineales. Las soluciones se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 9

N_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	A	A	0	1	A	A
2	A	1	1	1	A	A
3	0	0	1	1	0	A
4	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	0	0	A	0
7	1	0	0	0	0	0

Donde A indican las variables con valores arbitrarios. Ahora aplicamos (10) para sustituir las variables arbitrarias, obteniendo así la siguiente tabla:

Tabla 10

N_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Valor en (11)
1	0	1	0	1	p_1	0	2
2	0	1	1	1	p_2	0	-3
3	0	0	1	1	0	0	-1
4	0	0	1	1	1	1	3
5	1	0	1	1	0	1	6
6	1	1	0	0	p_6	0	3
7	1	0	0	0	0	0	5

Por consiguiente, el valor mínimo es -3 y se consigue con los siguientes vectores:

$$(0, 1, 1, 1, 0, 0) \text{ y } (0, 1, 1, 1, 1, 0)$$

CAPÍTULO IV
PROBLEMA DE APLICACIÓN

4.1 Problema de aplicación.

Para la construcción, mejoramiento de carreteras y zonas críticas viales el M.O.P cuenta con un presupuesto S y adicional cuenta con una cantidad V para importar en maquinarias, ingenieros, técnicos etc., donde existen al menos unas 15 carreteras que pueden construir o rehabilitar con la finalidad de beneficiar a la mayor cantidad de población. Estos proyectos son los siguientes:

1. Rehabilitar las calles del Distrito de Capira
2. Rehabilitar las calles del Distrito de Santiago
3. Rehabilitar las calles del Distrito de Cañazas
4. Rehabilitar las calles del Distrito de David
5. Interconexión vial de Santiago
6. Interconexión vial de Penonomé
7. Interconexión vial de Cabuya
8. Interconexión vial de Chitré
9. Rehabilitar la Vía Centenario
10. Rehabilitar la Vía Transísmica
11. Rehabilitar los puntos críticos de la Pintada
12. Construir la calle Santa Fe- Calobre
13. Construir la calle Veracruz- Vacamonte
14. Rehabilitar las calles del Distrito de Pacora
15. Rehabilitar la Vía Pedasí-Cañas.

Cada proyecto j con $1 \leq j \leq 15$ necesita una inversión I_j (en millones de dólares) y suministra un beneficio b_j (en miles de usuarios por año).

El plan prevé la realización de al menos Π unidades anuales (en millones de beneficios) y el proyecto j permite la realización de una producción anual de Π_j , y necesita importar equipo y materiales por un valor de v_j .

El M.O.P maneja un presupuesto de 600 millones de dólares y adicional cuenta con un importe de 100 millones para importaciones, donde se le pide que dichos proyectos generen una producción mínima de 460 millones

Se necesita tomar una decisión ¿Cuál de los proyectos debe implementar el M.O.P. bajo las condiciones antes descritas, para beneficiar a la mayor cantidad de población?

Solución:

Antes de comenzar a resolver el problema planteado, es importante definir las siguientes terminologías que son utilizadas y la forma como se obtuvieron los datos.

1. Beneficios: Número de personas que se favorece de manera periódica por el uso de un proyecto.

- **Variable utilizada:** b_j
- **Unidad:** Número de personas.
- **Origen del Dato:** Cuando se quiere estimar el impacto de beneficiarios en un proyecto, se trabaja a partir de los datos de censos en la Contraloría General de la República, donde se accede a revisar la población que estarían comunicadas al realizar dicho proyecto. Recordando que los beneficiarios no solo están basados a los conductores individuales o números de vehículos, sino a las personas que sacan provecho de que la vía permita un transporte eficiente. La Contraloría posee una división llamada INEC (Instituto Nacional de Estadística y Censo) donde se encontrarán la base estadística divididas por regiones.

2. Inversión: Costo estatal requerido para realizar cada proyecto.

- **Variable:** I_j
- **Unidad:** Dólares USD\$
- **Origen del Dato:** Cada proyecto que se realiza a nivel estatal por medio de un Ministerio en este caso del MOP, parte de los siguientes pasos para obtener el costo y proceder a licitarlo:
 - Evaluación de Proyecto: Es donde se analiza las necesidades y problemáticas actuales.

- Determinación de alcance de inversión: Según la importancia que el Gobierno desee llegar a tener en cuanto a condiciones urbanas o condiciones mínima de transito se determinan la cantidad de obras que se le atribuirán al ministerio.
- Trabajo de Oficina: Con lo anterior expuesto un grupo de profesionales de la construcción desglosan las actividades que involucran los alcances y sus cantidades, los cuales terminan en unos costos por actividad dando una sumatoria total del: Costo del Proyecto.

3. Producción Anual: Es el grado de rentabilidad que ofrece cada proyecto a nivel estatal.

- **Variable:** []
- **Unidad:** Dólares USD \$
- **Origen del Dato:** Cuando se quiere estimar el impacto de ganancia estatal que ofrece un proyecto, se hace un trabajo en conjunto de los datos estadísticos de la Contraloría General de la República de Panamá, que se usan como base y a su vez el Ministerio de Obras Publicas presenta las implicaciones de dinero en ahorros o ingresos a nivel estatal que ofrece el rehabilitar una ruta existente o construir una nueva vía de acceso. Esto se ve no solo en el beneficio de facilidades de intercambio comercial con mayor prontitud, sino en datos como: ahorros de las familias en cuanto a costo de transporte, alternativas de acceso a mejor condición de salud, colegiaturas entre otros que impactan directamente en la producción laboral de cada individuo.

4. Importación: Costo de Rubros que cada proyecto deberá conseguir fuera del país para poder ser ejecutado.

- **Variable:** v_j .

- **Unidad:** Dólares USD \$
- **Origen del Dato:** Cuando se realiza una estimación de costo en el Ministerio de Obras Públicas se trabaja en listar un conjunto de actividades que son necesarias para cumplir con alcances iniciales. A partir de allí habrá ítems de actividades que el contratista deberá conseguir de manera externa al país posiblemente porque no son producidas y solo se hacen labor de reventa, entre ellas: maquinarias, acero, accesorios urbanos entre otros, por tanto, son datos importantes a considerar ya que involucran tiempos adicionales que deberán contemplarse en la realización de la obra.

Luego de definir las variables involucradas, se procede a asignar a cada proyecto j una variable bivalente x_j que tomará el valor de 1 si se ejecuta el proyecto j y 0 si no.

El problema lo podemos plantear de la siguiente forma:

$$\max \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

Sujeta a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n I_j x_j \leq S$$

$$\sum_{j=1}^n \Pi_j x_j \geq \Pi$$

$$\sum_{j=1}^n v_j x_j \leq V$$

Donde $x_j \in \{0,1\}$

Los datos obtenidos se recopilan en la siguiente tabla:

Tabla 11

Datos	Proyectos														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Beneficios b_j	46,000	99,000	18,000	102,000	1,700,000	1,200,000	90,000	130,000	2,000,000	1,800,000	35,000	45,000	890,000	47,000	67,000
Inversión I_j	45,000,000	40,000,000	55,000,000	50,000,000	95,000,000	64,000,000	74,000,000	34,000,000	24,000,000	120,000,000	44,000,000	65,000,000	95,000,000	52,000,000	32,000,000
Producción anual Π_j	37,000,000	45,000,000	27,000,000	96,000,000	65,000,000	25,000,000	32,000,000	35,000,000	200,000,000	120,000,000	14,000,000	21,000,000	20,000,000	14,000,000	16,000,000
Importación v_j	9,000,000	8,000,000	11,000,000	10,000,000	19,000,000	13,000,000	15,000,000	7,000,000	5,000,000	24,000,000	9,000,000	13,000,000	19,000,000	10,000,000	6,000,000

Desarrollo:

$$\text{Max } 4600x_1 + 99000x_2 + 18000x_3 + 102000x_4 + 1700000x_5 + 1200000x_6 + 90000x_7 + 130000x_8 + 2000000x_9 \\ + 1800000x_{10} + 35000x_{11} + 45000x_{12} + 890000x_{13} + 47000x_{14} + 67000x_{15}$$

Sujeto a:

$$45x_1 + 40x_2 + 55x_3 + 50x_4 + 95x_5 + 64x_6 + 74x_7 + 34x_8 + 24x_9 + 120x_{10} + 44x_{11} + 65x_{12} + 95x_{13} + 52x_{14} + 32x_{15} \leq 600 \quad (1.1)$$

$$37x_1 + 45x_2 + 27x_3 + 96x_4 + 65x_5 + 25x_6 + 32x_7 + 35x_8 + 200x_9 + 120x_{10} + 14x_{11} + 21x_{12} + 20x_{13} + 14x_{14} + 16x_{15} \geq 460 \quad (1.2)$$

$$9x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 19x_5 + 13x_6 + 15x_7 + 7x_8 + 5x_9 + 24x_{10} + 9x_{11} + 13x_{12} + 19x_{13} + 10x_{14} + 6x_{15} \leq 100 \quad (1.3)$$

Realizamos los cambios correspondientes en cada restricción obtenemos:

$$120\bar{x}_{10} + 95\bar{x}_{13} + 95\bar{x}_5 + 74\bar{x}_7 + 65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 50\bar{x}_4 + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} + 24\bar{x}_9 \geq 289 \quad (2.1)$$

$$200x_9 + 120x_{10} + 96x_4 + 65x_5 + 45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 32x_7 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 20x_{13} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 460 \quad (2.2)$$

$$24\bar{x}_{10} + 19\bar{x}_5 + 19\bar{x}_{13} + 15\bar{x}_7 + 13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_4 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} + 5\bar{x}_9 \geq 78 \quad (2.3)$$

Todas las restricciones son del tipo indeterminado, comenzaremos a trabajar la (2.2) donde $x_9 = 1$ o $x_9 = 0$.

Si $x_9 = 1$ el sistema se transforma en:

$$120\bar{x}_{10} + 95\bar{x}_{13} + 95\bar{x}_5 + 74\bar{x}_7 + 65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 50\bar{x}_4 + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} \geq 289 \quad (3.1)$$

$$120x_{10} + 96x_4 + 65x_5 + 45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 32x_7 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 20x_{13} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 260 \quad (3.2)$$

$$24\bar{x}_{10} + 19\bar{x}_5 + 19\bar{x}_{13} + 15\bar{x}_7 + 13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_4 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 78 \quad (3.3)$$

En este sistema todas las restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (3.1) donde $\bar{x}_{10} = 1$ o $\bar{x}_{10} = 0$.

Si $\bar{x}_{10} = 1$ el sistema se transforma en:

$$95\bar{x}_{13} + 95\bar{x}_5 + 74\bar{x}_7 + 65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 50\bar{x}_4 + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} \geq 169 \quad (4.1)$$

$$96x_4 + 65x_5 + 45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 32x_7 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 20x_{13} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 260 \quad (4.2)$$

$$19\bar{x}_5 + 19\bar{x}_{13} + 15\bar{x}_7 + 13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_4 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 54 \quad (4.3)$$

En este sistema todas las restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (4.2) donde $x_4 = 1$ o $x_4 = 0$.

Si $x_4 = 1$ el sistema se transforma en:

$$95\bar{x}_{13} + 95\bar{x}_5 + 74\bar{x}_7 + 65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} \geq 169 \quad (5.1)$$

$$65x_5 + 45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 32x_7 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 20x_{13} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 164 \quad (5.2)$$

$$19\bar{x}_5 + 19\bar{x}_{13} + 15\bar{x}_7 + 13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 54 \quad (5.3)$$

En este sistema todas las restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (5.1) donde $\bar{x}_{13} = 1$ o $\bar{x}_{13} = 0$.

Si $\bar{x}_{13} = 1$ el sistema se transforma en:

$$95\bar{x}_5 + 74\bar{x}_7 + 65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} \geq 74 \quad (6.1)$$

$$65x_5 + 45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 32x_7 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 164 \quad (6.2)$$

$$19\bar{x}_5 + 15\bar{x}_7 + 13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 35 \quad (6.3)$$

La restricción (6.1) es un caso parcialmente indeterminado, entonces tenemos tres posibilidades:

$$\alpha_1: \bar{x}_5 = 1, \bar{x}_7 = 0$$

$$\alpha_2: \bar{x}_5 = 0, \bar{x}_7 = 1$$

$$\alpha_3: \bar{x}_5 = 0, \bar{x}_7 = 0$$

Para el caso α_1 el sistema se transforma en:

$$65\bar{x}_{12} + 64\bar{x}_6 + 55\bar{x}_3 + 55\bar{x}_{14} + 45\bar{x}_1 + 44\bar{x}_{11} + 40\bar{x}_2 + 34\bar{x}_8 + 32\bar{x}_{15} \geq -21 \quad (7.1)$$

$$45x_2 + 37x_1 + 35x_8 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 132 \quad (7.2)$$

$$13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 8\bar{x}_2 + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 16 \quad (7.3)$$

La inecuación (7.1) es redundante, entonces el sistema se reduce a (7.2) y (7.3) donde ambas restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (7.2) donde $x_2 = 1$ o $x_2 = 0$.

Si $x_2 = 1$ el sistema se transforma en:

$$37x_1 + 35x_8 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 87 \quad (8.2)$$

$$13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 16 \quad (8.3)$$

En este sistema todas las restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (8.2) donde $x_1 = 1$ o $x_0 = 0$.

Si $x_1 = 1$ el sistema se transforma en:

$$35x_8 + 27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 50 \quad (9.2)$$

$$13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_{11} + 7\bar{x}_8 + 6\bar{x}_{15} \geq 16 \quad (9.3)$$

En este sistema todas las restricciones son del tipo indeterminado, trabajaremos con la (9.2) donde $x_8 = 1$ o $x_8 = 0$.

Si $x_8 = 1$ el sistema se transforma en:

$$27x_3 + 25x_6 + 21x_{12} + 16x_{15} + 14x_{11} + 14x_{14} \geq 15 \quad (10.2)$$

$$13\bar{x}_6 + 13\bar{x}_{12} + 11\bar{x}_3 + 10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_{11} + 6\bar{x}_{15} \geq 16 \quad (10.3)$$

La restricción (10.2) es un caso parcialmente indeterminado, entonces tenemos cinco posibilidades:

$$\gamma_1: \quad x_3 = 1, x_6 = x_{12} = x_{15} = 0$$

$$\gamma_2: \quad x_3 = 0, x_6 = 1, x_{12} = x_{15} = 0$$

$$\gamma_3: \quad x_3 = x_6 = 0, x_{12} = 1, x_{15} = 0$$

$$\gamma_4: \quad x_3 = x_6 = x_{12} = 0, x_{15} = 1$$

$$\gamma_5: \quad x_3 = x_6 = x_{12} = x_{15} = 0$$

Para el caso γ_5 el nuevo sistema es:

$$14x_{11} + 14x_{14} \geq 15 \quad (11.2)$$

$$10\bar{x}_{14} + 9\bar{x}_{11} \geq -27 \quad (11.3)$$

La inecuación (II.3) es redundante y la inecuación (II.2) es un caso determinado, entonces la solución básica es:

$$(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$$

Para un valor en la función objetivo de: **2507600** de usuarios beneficiados.

Analizando las otras ramas, eliminando los caminos sin solución y mediante reducción sistemática de las variables, llegamos a la solución del sistema:

$$(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

Donde se obtiene un valor para la función objetivo de **7822000** de usuarios beneficiados.

Esto quiere decir que los proyectos que debe implementar el Ministerio de Obras Públicas son: 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13.

Observación:

A pesar que la población de Panamá ronda los 4.5 millones de personas, el total de beneficiarios que resultaron, involucran la sumatoria de beneficiarios individualmente de cada proyecto que debe implementar el M.O.P los cuales no solo contempla la persona que conduce un transporte, sino por ejemplo el número de personas que se benefician de que el transporte sea eficiente.

Los proyectos que se listan en este problema de aplicación, mantienen una relación entre ellos al momento de indicar dichos beneficiarios. Por ejemplo: Una persona que se transporta desde La chorrera hasta San Miguelito, emplea como ruta la carretera Autopista-Centenario y la Transísmica, en ese recorrido estaría utilizando dos de los proyectos listados.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Luego del estudio de los sistemas lineales y no lineales de ecuaciones e inecuaciones pseudo booleanas se concluye:

1. Cualquier función pseudo booleana se puede expresar como un polinomio multilineal.
2. Las funciones pseudobooleas juegan un papel importante en los modelos de optimización en una variedad de áreas, tales como: la mecánica, informática, estadísticas, economía, finanzas, investigación de operaciones, matemática discreta.
3. La amplia gama de aplicabilidad de los procedimientos booleanos hace necesaria la búsqueda de nuevas investigaciones que debe incluir tanto las aplicaciones como la metodología.
4. La programación entera, teoría de grafos, proporcionan al investigador situaciones atractivas que pueden traducirse al lenguaje booleano, por tanto el objetivo de las investigaciones deben ir dirigidas no solo al descubrimientos de nuevas técnicas booleanas, sino también a unificar los problemas que pueden tratarse de forma similar.

5. Al realizar la programación computacional del método propuesto por Hammer, Rosenber y Rudeanu se requiere de gran espacio de memoria para ir almacenando los resultados intermedios.

6. Los métodos que nos permiten transformar un problema de optimización entera en uno de programación bivalente, nos ayudan a resolver situaciones prácticas aplicadas a problemas de asignación, planificación, administración entre otros.

7. Los problemas de inferencia en la lógica proposicional se pueden traducir en problemas lineales de optimización pseudo booleana. En términos más generales, las restricciones pseudo booleanas se pueden ver como una forma particular de combinar dos de los dominios más importantes en la programación de lógica de restricción: aritmética y álgebra booleana.

RECOMENDACIONES

RECOMENDACIÓN

Luego del estudio de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones pseudo Booleanas, recomiendo:

1. Considerar como parte del contenido dentro del plan de estudio de la Licenciatura la programación pseudo Booleana.
2. Como un problema de aplicación directa, recomendamos abordar la programación digital del método de Eliminación sucesiva propuesto por Peter Hammer y Sergio Rudeano para la solución de un problema de optimización pseudo Booleano.
3. Profundizar el estudio de las transformaciones para expresar un problema de programación entera en programación pseudo Booleana.
4. Investigar más las propiedades, transformaciones y sus consecuencias para expresar un problema de lógica proposicional en uno de programación pseudo Booleano.
5. Que el uso de los métodos sobre programación pseudo Booleana sean considerados, al menos por la Universidad de Panamá, para dar soluciones a muchos problemas de interés nacional donde se necesita la toma de decisiones a problemas de asignación y de distribución.
6. Recopilar diferentes situaciones donde es posible aplicar los procedimientos booleanos, con el objetivo de determinar nuevos resultados que incluyan aplicaciones como metodología para darle soluciones a esos problemas que no se pueden resolver con los métodos convencionales.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Taha Handy A. 1995 investigation de operaciones, alfaomega Colombia.
2. Rodeanu, Sergiu. 1974. Boolean Function and Equations, American Elsevier Publishing Company, inc, New York
3. Kaufmann A, Labordere Henry, 1974. Methodes et medeles de la Recherche operationnelle, Vol. III, Dunod, Paris, Bruxelles, montreal.
4. Hammer, Peter L, and Rudeanu, Sergiu, 1968, Boolean Methods in operations Research. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
5. Franz E. Hohn, Applied Boolean Algebra. Second edition, The Macmillan company. New York.
6. Rudeanu Sergiu. Aplicatii ale Cercetarii operational in problem de conducere, organizare si planificare a lucrarilor de investitii, constructii si montaj. Republicii socialiste Romania. 1972.
7. J. Eldon Whitesitt, algebra Booleana y sus aplicaciones. Editrial continental. 1971.
8. Thayse André. Boolean Calculus of Differences, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
9. Frank Markham Brown, Boolean Reasoning The logic of Boolean Equations. Kluwer Academic Publishers. 1990.

10. Crama, Y., & Hammer, P. (2011). Pseudo-Boolean functions. In Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, pp. 564-608). Cambridge: Cambridge University Press.
11. Pseudo-Boolean and Finite Domain Constraint Programming: A Case Study
Alexander Bockmayr Thomas Kasper.
12. Contraloría General de Panamá, recuperado de: <https://www.contraloria.gob.pa/>
13. Ministerio de Obras Públicas, recuperado de: <http://www.mop.gob.pa/>