UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

"LAS CONICAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LAS ENVOLVENTES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS"

Por:

Narciso Galástica Ruíz

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

Panamá, República de Panamá

1990

UNIVERSIDAD DE PANAMA

ULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, ______________________

Aprobado por:

Directora de Tesis ______________________
Xenia C. de Moscote, M. A.

Miembro del Jurado ______________________
Analida Ardila, M. Sc.

Miembro del Jurado ______________________
María Dixiana Espinosa, M. Sc.

Fecha 21 de febrero de 1990

DEDICATORIA

Esta investigación la dedico a mi querida hija Marta Georgina, quien siempre fue mi inspiración. A mi esposa Mimi por su comprensión, durante el tiempo, que por razones de estudio, no le dediqué.

AGRADECIMIENTO

El autor agradece a las Profesoras: Xenia de Moscote, por la Asesoría de esta investigación.

Teresita de Avila, por su cooperación desinteresada y sus atinados consejos.

Ellas contribuyeron a que esta investigación fuese una realidad.

CONTENIDO

INTRODUCCION

En el presente trabajo se hace una propuesta metodológica sobre la enseñanza de las Cónicas.

A través de muchos años en nuestro sistema educativo, se ha recurrido a la Geometría Analítica como herramienta para la enseñanza de las cónicas, esta manera de presentar las mismas, crea en el estudiante una predisposición en el uso de la memoria en lugar de utilizar el razonamiento y la intuición. Al respecto, Castelnuovo [1978:10] dice lo siguiente:

> "Los jóvenes que actualmente salen de nuestras escuelas secundarias tienen la idea de que las matemáticas consisten, por una parte, en un puro mecanismo, y por la otra parte, que se trata de una construcción perfecta y completamente terminada, ignorando si se puede hacer o no algún descubrimiento con esta disciplina".

El recurrir a la Geometría Analítica en estas situaciones, requiere sobre todo el uso de fórmulas, lo cual contribuye a fomentar hábitos al resolver los problemas, ya que, se les convierten en simples procedimientos rutinarios. En este sentido, Varón [1964:6] hace la siguiente consideración:

> "El objeto de un problema que se propone al alumno debe ser el de aprender el procedimiento que haya de seguir en problemas similares, no el de practicar la mecánica de las operaciones que en ellas intervienen.

> De donde se desprende que los problemas deben armarse con datos sencillos y estudiar por separado la mecánica de las operaciones".

De igual manera, para obtener las ecuaciones, tanto de la recta como de los diferentes lugares geométricos a los que dedica especial atención la Geometría Analítica, en vez de tomar como punto de partida alguna propiedad particular, se ha tomado en cuenta, preferentemente, un principio fundamental, la definición general, y se ha deducido, como se esperaba, la ecuación que se trataba de obtener.

Al respecto, Swokowski [1979:322] señala:

> "En la Geometría Analítica, las figuras planas se estudian introduciendo primero un sistema coordenado, usando después varios tipos de ecuaciones y fórmulas".

Esta forma de presentar los conceptos geométricos, es un patrón seguido en los textos clásicos empleados en la enseñanza de la geometría.

1.1. ANTECEDENTES

Debido a la evolución interna en toda disciplina y por otra, a la aparición de nuevos procedimientos didácticos, obliga a todo especialista innovar la metodología, en el caso de la geometría y muy en especial de las cónicas (parábola, elipse, hipérbola), cuya enseñanza orientada y fundamentada en la Geometría Analítica, ha permanecido invariante a través de los años. Es por ello que la enseñanza de las mismas, mediante el uso de la regla y el compás, es prácticamente desconocida en nuestro medio educativo; y es precisamente, a esta manera a la cual se le brinda gran dedicación en el presente estudio. Por otra parte, presentar las cónicas como una envolvente geométrica, no es contemplado en los programas de geometría ni a nivel medio ni superior. Luego, es una forma de enseñarlas totalmente nueva en nuestro medio. Esta manera de presentar estas curvas no recurre a la Geometría Analítica, sino a la Geometría Diferencial.

1.2. JUSTIFICACION

Las cónicas fueron estudiadas extensamente por los primeros matemáticos griegos, quienes utilizaban los métodos de la Geometría Euclideana.

Swokowski [1981:512] señala que si la Geometría Analítica, se pudiera resumir en una sola frase quizás la siguiente sería la apropiada:

> "Dada una ecuación, encuentre su gráfica e, inversamente, dada una gráfica, encuentre su ecuación".

Desde que los griegos descubrieron las propiedades que nos permiten definir a las cónicas; tales como: focos, directrices, ejes de simetrías, rectas tangentes, etc; esta manera ha sido escogida desde entonces para enseñar estas curvas, manteniéndose casi invariante en nuestro sistema educativo.

Las cónicas han sido definidas tradicionalmente de la siguiente manera:

Para la parábola:

> "Una parábola es un conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (el foco) y de una línea recta fija L (la directriz) en el plano"

Para la elipse:

> "Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la suma, de sus distancias a dos puntos fijos en el plano (los focos), es constante".

Para la hipérbola:

> "Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los focos), es una constante".

Esta manera de presentar las definiciones de estas tres curvas, es la empleada en los textos tradicionales en la enseñanza de la geometría en nuestro sistema.

Recientes estudios demuestran el grado de interés que existe por este tema, cuando Liustérnik [1985:93] dice:

> "Si la curva S tiene forma de una elipse, los rayos salen del foco F de esta elipse se reúnen, al ser reflejados, en otro foco.

> Si la curva S tiene forma de una parábola, los rayos que salen del foco de la parábola y se reflejan de ella, se transforman en rayos paralelos al eje de la parábola y viceversa, los rayos paralelos al eje de la parábola se reúnen siendo reflejados, en el foco de la parábola".

De lo anterior, se desprende el interés por aportar nuevas ideas que conduzcan al docente a facilitar los conocimientos sobre la enseñanza de las cónicas.

1.3. ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA

Son pocos los autores de textos que le han dedicado tiempo al tema de esta investigación.

Por lo general los pocos textos existentes que tratan el problema de la construcción de estas curvas desde el punto de vista de las envolventes, sólo le dedican tiempo a su construcción como envolvente de rectas y no a deducir sus ecuaciones. Es por ello que, en esta investigación, se presenta no sólo la construcción de la curva mediante el uso de la regla y el compás, sino que, además, se determina la relación que existe entre la construcción y la deducción de las ecuaciones mediante el concepto de una envolvente geométrica.

1.4. IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACION

El estudio de las cónicas se remonta desde la antigüedad, éstas han sido de gran interés para los científicos y han contribuido al planteamiento de soluciones a grandes problemas de la humanidad.

Pedoe [1976:201] afirma:

> "Las secciones cónicas llegaron a formar parte intrínseca de nuestra cultura cuando Kepler descubrió que el Planeta Marte viaja alrededor del Sol en una Elipse, situando el Sol en uno de sus focos".

Debido a la importancia que el estudio de las cónicas tiene en todos los tiempos, es que surgen inquietudes para poder presentar de manera diferente estas tres milenarias curvas.

En este estudio se le brinda al estudiante la posibilidad de emplear temas por él conocidos, al momento de tratar el estudio de estas curvas, como lo son: Trigonometría, Diferenciación y conceptos elementales de la Geometría Diferencial.

1.5. ALCANCE Y LIMITACIONES

Se puede considerar la presente investigación como uno de los primeros estudios, donde las cónicas son vistas como envolventes. Ello es así, cuando al construir las curvas con regla y compás, esta construcción le dá una "impresión" de envolvente y por otra parte, se recurre a los principios más elementales de la Geometría Diferencial, para deducir las ecuaciones.

En el desarrollo del tema seleccionado en este estudio, uno de los grandes problemas encontrados es el referente a la bibliografía, ya que, sobre el mismo hay poca información.

1.6. DESCRIPCION DEL CONTENIDO

La presente investigación se desarrolla de la siguiente manera:

En el Primer Capítulo, se presentan los elementos básicos en toda construcción geométrica que recurra al sólo uso de la regla y el compás. Se señalan algunas propiedades, teoremas y definiciones que nos conducen al teorema de Wantzell, el cual garantiza que las ecuaciones de segundo grado también son construibles con regla y compás.

En el Segundo Capítulo, se construyen las cónicas con regla y compás, además, se introducen los conceptos más generales de la Geometría Diferencial y en especial del concepto de envolvente, el cual es utilizado para deducir las ecuaciones de las curvas.

En el Tercer Capítulo, se realizan algunas aplicaciones mediante las cuales se demuestra que además de ser construibles con regla y compás, sus ecuaciones son deducibles mediante el concepto de envolvente.

Finalmente, se hacen algunas conclusiones y recomendaciones que se han considerado pertinentes como resultado de esta investigación.

1.7. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

Los objetivos propuestos en esta investigación son:

1.7.1. OBJETIVOS GENERALES

- Estudiar las secciones cónicas a un nivel superior.
- Presentar una alternativa en la enseñanza de las secciones cónicas.
- Realizar aplicaciones de las secciones cónicas.

1.7.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Describir la importancia de la construcción con regla y compás en la geometría.
- Destacar el papel que juegan los números construibles en la solución de las ecuaciones de segundo grado.
- Exponer una metodología en la presentación de las secciones cónicas mediante el uso de la regla y el compás dándole un enfoque hacia las envolventes.
- Hacer uso de las secciones cónicas como envolventes para construir nuevas aplicaciones geométricas.

CAPITULO # 1

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

En este Primer Capítulo se presenta entre los aspectos importantes, el teorema sobre la equivalencia entre el compás moderno y el euclideo, se pretende con ello dejar sentado el hecho de que cualquier demostración realizada en base al compás euclídeo persiste y por lo tanto su validez tiene vigencia en nuestra época. Por otro lado, se presentan todas las operaciones básicas fundamentales en toda construcción con regla y compás, las cuales son necesarias para introducir el conjunto de los números construibles, el cual se demuestra mediante algunas propiedades que tiene estructura de cuerpo. Así, con el conjunto de los números construibles con estructura de cuerpo, se puede incorporar el concepto de extensión cuadrática, mediante éste podemos llegar a plantear el teorema de Wantzell, el cual garantiza que todo número construible es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y su grado es una potencia de dos. Este teorema, garantiza la construcción con regla y compás de las tres curvas a estudiar en esta investigación.

Ahora, procederemos a realizar algunas consideraciones que se han dado sobre las construcciones geométricas, empleando sólamente los instrumentos geométricos, la regla y el compás.

Los problemas de construcción han sido siempre un tema favorito en geometría.

Alsina y Trillas [1984:207] reflexionan al respecto:

> "La regla y el compás, en feliz complementariedad, han marcado el diseño, retando siempre a su usuario a una lucha constante de ingenio y sagacidad.

> Instrumentos acompañados por el fervor intelectual de siglos y generaciones, han sobrevivido al peso del tiempo hasta adquirir rango y permanente de clasicidad".

Sólo con el auxilio de la regla y el compás puede realizarse una variedad de construcciones. Ahora bien, cuando se trata de construcciones geométricas, lo importante no es dibujar figuras con cierto grado de exactitud, el hecho consiste, en demostrar que sin otra ayuda que la regla y el compás la solución puede hallarse teóricamente suponiendo que los instrumentos tienen la precisión ideal.

El uso de estos instrumentos llevó a resolver una buena cantidad de problemas teóricos por ejemplo muchos de los llamados teoremas de existencia, cuya demostración exige una construcción, y a plantear otros cuantos que no sólo pudieron ser resueltos en la época moderna cuando el desarrollo del álgebra proporcionó técnicas matemáticas consideradas, en cierta forma, ajenas al razonamiento geométrico.

Johnson y Glenn [1970:40] , señala entre otros aspectos:

> "Sólo con la ayuda del álgebra se logró despejar la gran incógnita que por siglos tenían pendiente los matemáticos, ¿Cómo demostrar la imposibilidad de construir ciertos problemas?"

Se demuestra la imposibilidad de trisecar el ángulo, de construir el heptágono regular, o de duplicar el cubo, sólo con ayuda de la regla y el compás. La clave de una demostración geométrica reside en trasladar los problemas geométricos al lenguaje del álgebra.

Para empezar, probaremos que el compás euclídeo es equivalente al compás moderno.

2.1. DEFINICION #1: [El compás euclídeo]

Es el que se cierra sólo, es decir, el compás que permite, dados dos puntos A y B, trazar la circunferencia que pasa por A con centro B. Este compás no permite trasladar distancias ya que las puntas del compás se cierran una vez que este se ha levantado del papel.

2.2. DEFINICION # 2: [El compás moderno]

Es un instrumento complejo, que no sólo permite trazar circunferencias sino que, al poder mantener aberturas constantes, permite trasladar distancias y en particular trazar circunferencias de radio conocido. Es un compás con medida.

2.3. TEOREMA # 1:

El compás moderno y el euclídeo son equivalentes.

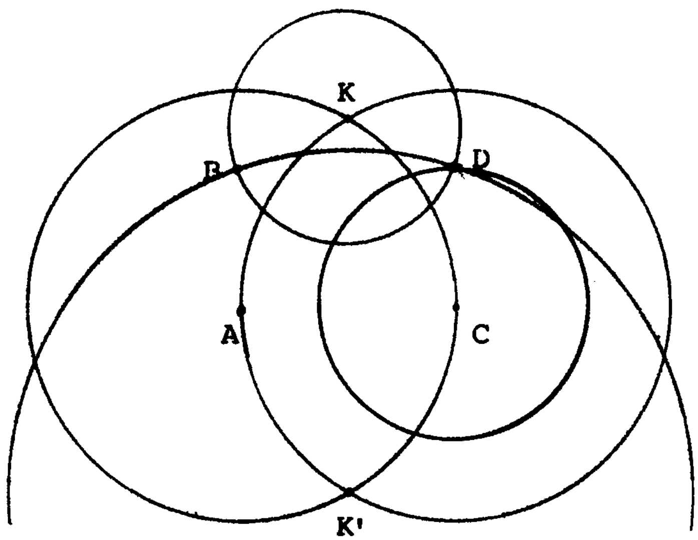
Solución:

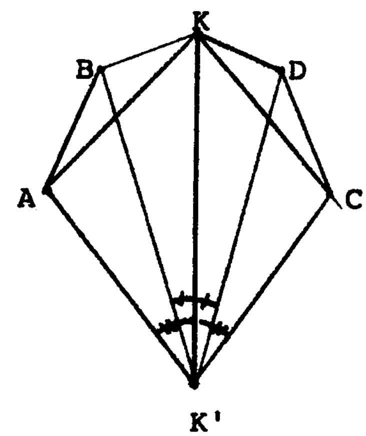
Se debe probar que dados tres puntos A, B, C; se puede trazar, con el compás euclídeo, el círculo con centro en C y radio $\overline{AB}$. (fig. # 1)

Con centro en C se traza el círculo que pasa por A y, con centro en A, el círculo que pasa por C. Sean K y K' el punto de intersección de ambas circunferencias. Con centro en K y luego en K' se trazan los círculos que pasan por B.

Si $B \notin \overline{KK'}$; éstos círculos se intersectan en otro punto, digamos D, cuya distancia a C es precisamente $\overline{AB}$.

Veremos que en efecto el segmento $\overline{AB}$ es igual al segmento $\overline{CD}$.





$$\left.\begin{array}{l} \overline{BK'} = \overline{DK'} \\ \overline{BK} = \overline{DK} \\ \overline{KK'} = \overline{KK'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BKK' \cong \Delta DKK'$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AK} = \overline{CK} \\ \overline{AK'} = \overline{CK'} \\ \overline{KK'} = \overline{KK'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KAK' \cong \Delta KCK'$$

Figura # 1

Observe que, $\overline{BK'} = \overline{DK'}$ por ser radio de un mismo círculo y, por la misma razón, $\overline{BK} = \overline{DK}$; puesto que el lado $\overline{KK'}$ es común, asi tenemos que los triángulos $\Delta BKK'$ y $\Delta DKK'$ son congruentes (L.L.L.) y, en consecuencia, el $\sphericalangle KK'B$ es congruente al ángulo $\sphericalangle KK'D$. El mismo razonamiento nos muestra que los triángulos $\Delta KAK'$ y $\Delta KCK'$ son congruentes, luego lo son también los ángulos $\sphericalangle KK'C$ y $\sphericalangle KK'A$.

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos que el ángulo $\sphericalangle BK'A$ es congruente al ángulo $\sphericalangle DK'C$ y, por el axioma (L.A.L.) los triángulos $\Delta BK'A$ y $\Delta DK'C$ son congruentes.

Por consiguiente, $\overline{AB} = \overline{CD}$ y por lo tanto el circulo buscado tiene centro en C y pasa por D.

Si $B \in KK'$; el resultado es trivial ya que siendo K y K' puntos que equidistan de A y de C, el segmento que los une está también formado por puntos que equidistan de A y de C; luego, el círculo buscado tiene centro en C y pasa por D.

Gracias a este teorema, en adelante podremos suponer que el compás euclídeo sirve para transportar distancias.

Una construcción con regla y compás comprende una secuencia finita de operaciones básicas.

Courant y Robbins [1971:138] indican al respecto que dichas operaciones son:

a) Trazar una recta entre dos puntos dados.

b) Hallar el punto de intersección de dos rectas.

c) Trazar una circunferencia de centro y radio dados.

d) Hallar los puntos de intersección de un círculo con otro o con una recta dada.

2.4. DEFINICION # 3: [Número contruible]

Diremos que un número real x es construible si existe un segmento de longitud x construible con regla y compás.

Indicaremos por $\mathcal{C}$ al conjunto de números reales construibles, es decir;

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es construible} \right\}$$

A continuación veremos las propiedades básicas.

Podremos referirnos siempre a un sistema de coordenadas rectangulares. En efecto, si partimos de un segmento unidad, tendremos, sobre una recta que llamaremos el eje X, los puntos $X = 0$ y $X = 1$. El eje Y sería perpendicular por el 0. Ahora, si P es un punto construible del plano, se trazan desde P las perpendiculares a los ejes; obtendremos asi sus coordenadas (x_o, y_o) con x_o, y_o números construibles.

Recíprocamente, dados x_o en el eje X; y_o en el eje Y, números construíbles, trazaremos las perpendiculares a los ejes por esos puntos. El punto de intersección P es entonces construible y tiene coordenadas (x_o, y_o). (fig. #2) .

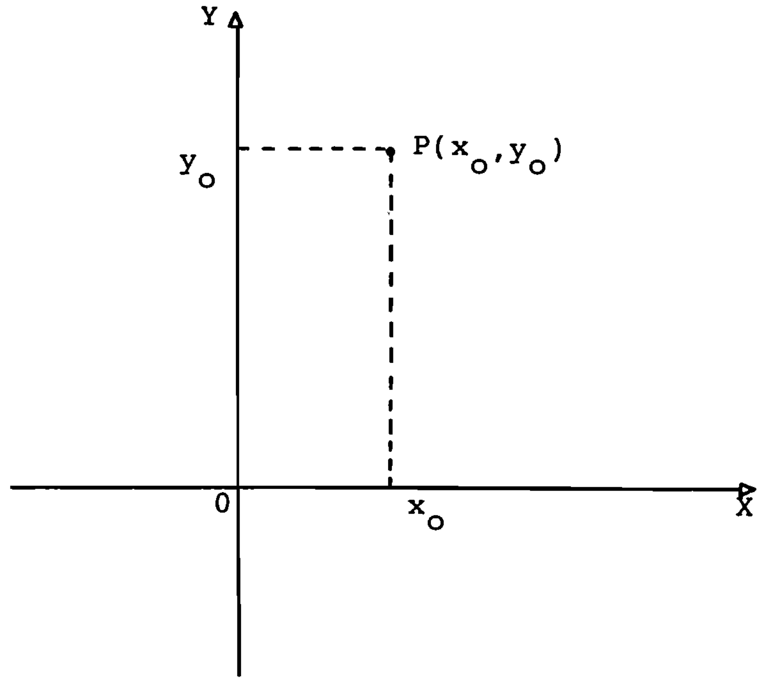


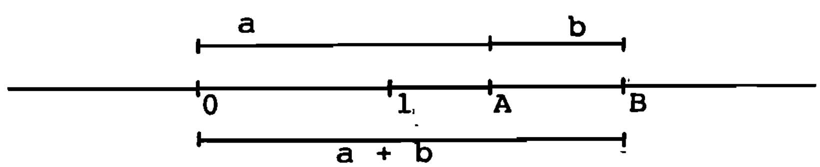
Figura # 2

2.5. PROPIEDAD # 1:

$\mathcal{C}$ admite estructura algebraica de cuerpo.

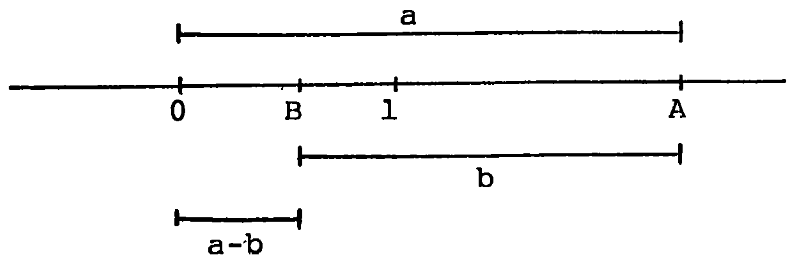
Solución:

Tomemos $a, b \in \mathcal{C}$; trazamos una recta y llevamos con el compás las distancias $|\overline{OA}| = a$ y $|\overline{AB}| = b$ (para $\overline{OA}$ y $\overline{AB}$ construibles)



entonces $|\overline{OB}| = a + b$; y $(a+b) \in \mathcal{C}$

Análogamente, tomando $|\overline{OA}| = a$ y $|\overline{AB}| = b$ (con $b < a$); pero esta vez $|\overline{AB}|$ en sentido opuesto a $\overline{OA}$



entonces $|\overline{OB}| = a - b$, y $(a-b) \in \mathcal{C}$.

Con estas operaciones asi definidas es fácil verificar que la suma es asociativa, conmutativa, tomando a $\overline{OO} = 0$ como elemento neutro.

Si $a \in \mathcal{C}$ el opuesto $-a \in \mathcal{C}$ es el simétrico de a respecto de 0.

Tomemos ahora a, $b \in \mathcal{C}$ con $a, b \neq 0$ y sean A, B dos puntos construibles situados sobre los ejes ortogonales X e Y respectivamente, tal que $\overline{OA} = a$ y $\overline{OB} = b$. Tomemos un punto C sobre el eje Y donde $\overline{OC} = 1$. (fig. # 3).

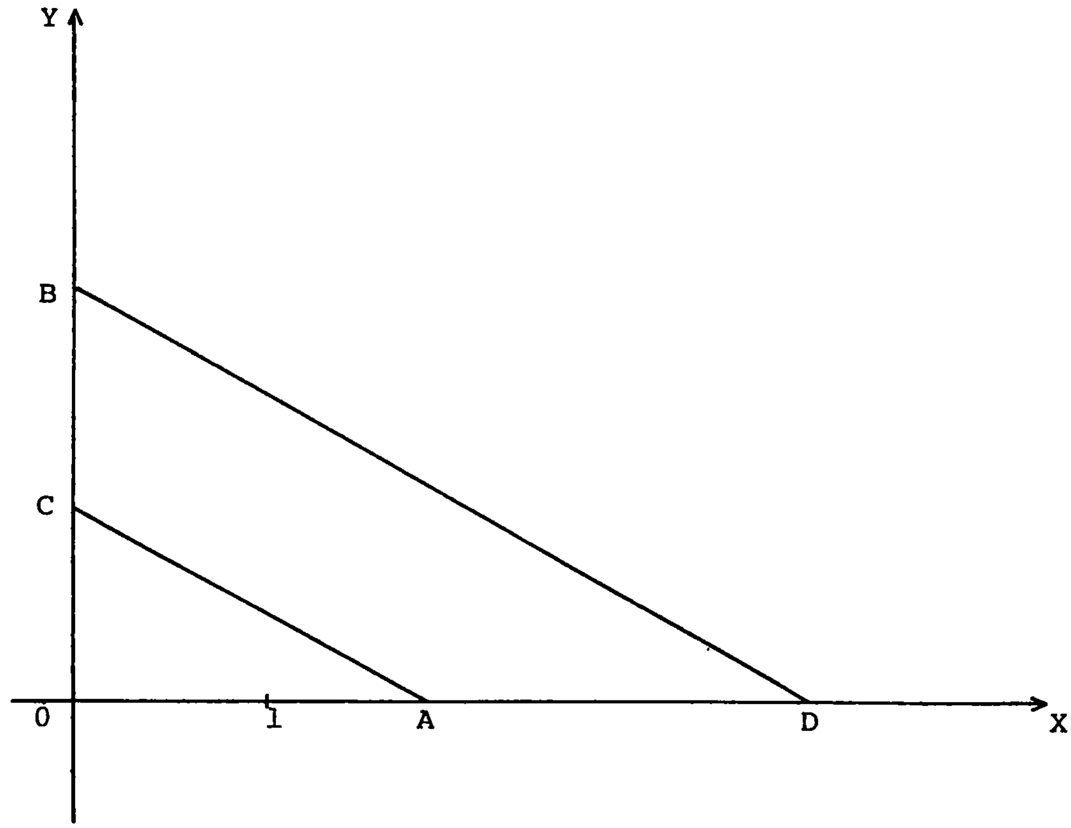


Figura # 3

Se traza el segmento $\overline{AC}$ y una paralela a él que pase por B; dicha paralela corta al eje X en un punto D y se obtienen dos triángulos semejantes: ΔAOC y ΔDOB, de donde;

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} \quad \text{es decir} \quad \frac{a}{1} = \frac{\overline{OD}}{b}$$

así; $\overline{OD} = a.b$ y $a.b \in \mathcal{C}$

Dicho producto es asociativo y conmutativo; además verifica la propiedad distributiva con respecto a la suma vista anteriormente; el número $1 \in \mathcal{C}$ actúa como el elemento neutro con respecto al producto.

Por otro lado; si $a \in \mathcal{C}$ $(a \neq 0)$ y tomando un punto construible a, con $|\overline{OA}| = a$ en el eje X y otro número construible C con $|\overline{OC}| = 1$ sobre eje Y. Tracemos el segmento $|\overline{AC}|$. Desde el punto X tal que $|\overline{OX}| = 1$ en el eje X se traza la paralela a AC, la cual corta el eje Y en un punto B dando lugar al ΔOBX semejante al triángulo ΔOCA (fig. # 4)

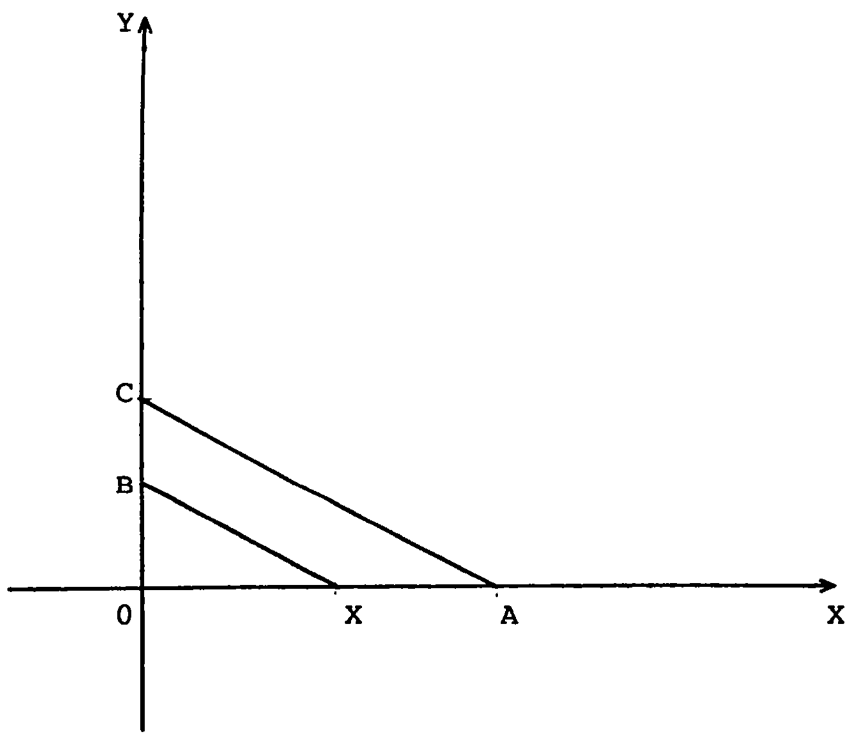


Figura # 4

De la semejanza de los triángulos tenemos

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}} \quad \text{es decir;} \quad \frac{|\overline{OB}|}{1} = \frac{1}{a}$$

de donde $|\overline{OB}| = \frac{1}{a}$.

Por consiguiente $\frac{1}{a} \in \mathcal{C}$.

Asi pues $(\mathcal{C},+,\bullet)$ es un cuerpo.

Ahora podremos agregar las construcciones de raíces cuadradas.

2.6 PROPIEDAD # 2:

Si $a \in \mathcal{C}$, $a > 0$ entonces $\sqrt{a} \in \mathcal{C}$

Solución:

En la siguiente construcción (fig. # 5)

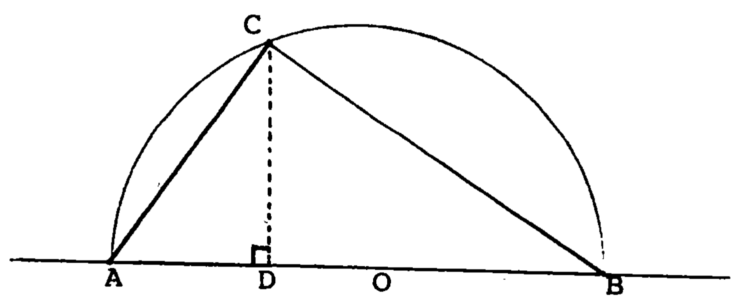


Figura # 5

los triángulos ΔADC y ΔCDB son semejantes;

luego: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}}$ asi $(\overline{CD})^2 = (\overline{AD})(\overline{DB})$

si tomamos el segmento $\overline{AD} = 1$ y $\overline{DB} = a$ obtenemos que: $\overline{CD} = \sqrt{a}$.

Así pues, el conjunto de los números construibles contiene además las raíces cuadradas de los números construibles positivos.

Esto es señalado por Courant y Robbins [1979:133] cuando afirman sobre la construcción de raices cuadradas:

> "Dado un segmento a, $\sqrt{a}$ puede construise con regla y compás".

Como un primer resultado en el estudio de $\mathcal{C}$ es el siguiente: $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$; $\mathbb{Q} \neq \mathcal{C}$. ($\mathbb{Q}$: conjunto de los números racionales).

La afirmación es evidente ya que $\sqrt{2} \in \mathcal{C}$ pero, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Para ver que $\mathcal{C}$ contiene los radicales, partimos del segmento unidad y construimos inductivamente los números enteros; así $\frac{m}{n}$ es entonces construible; para m,n arbitrarios $n \neq 0$.

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿es $\mathcal{C} = \mathbb{R}$?
($\mathbb{R}$: conjunto de los números reales).

La respuesta es $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}$; puesto que existen números reales como e y π que no pueden construirse por ninguna secuencia finita de operaciones con regla y compás.
Albis [1984:57] comenta al respecto: que Hermite, en 1873, demostró que e es trascendente sobre $\mathbb{Q}$ y Liendeman logró demostrar en 1882, con una modificación del método dado por Hermite para e, que π es trascendente lo cual significa que no existe un polinomio con coeficientes en

$\mathbb{Q}$ que tenga a e o π como raíz (los números no trascendentes se llaman algebraicos).

2.7. DEFINICION # 4: [Extensión Cuadrática]

Sea K un subcuerpo de $\mathbb{R}$ y sea x un elemento de K, $x > 0$ y tal que $\sqrt{x} \notin K$.

$K(x) = \{ a+b\sqrt{x} : a,b \in K \}$ se llama extensión cuadrática de K.

Es claro que $K \subset K(x)$ y que $\sqrt{x} \in K(x)$.

De la definición anterior podemos destacar que si K y K(x) son dos cuerpos tales que K es un subcuerpo de K(x), se dice que K(x) es una extensión de K; se indica simplemente por $K \subset K(x)$.

Si $K \subset K(x)$ y si consideramos a K(x) un espacio vectorial sobre K. La dimensión del espacio K(x) sobre el cuerpo K es llamado el grado de la extensión y se denotará $[K(x):K]$.

La ampliación de un cuerpo K por extensiones cuadráticas es una operación que se puede repetir un número finito de veces, consiguiendo así una sucesión de cuerpos

$K_o \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$ donde K_{i+1} es una extensión cuadrática de K_i y $K_o = K_1$.

2.8. TEOREMA # 2: Wantzell

Todo número construible es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y su grado es una potencia de 2.

Solución:

La ecuación de una recta construible que pase por los puntos A y B; con $A(a_1,a_2)$; $B(b_1,b_2)$ y $a_1 \neq b_1$;

es de la forma:

$$\frac{Y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{x-a_1}{b_1-a_1}$$

ecuación que con $\alpha = \frac{1}{b_2-a_2}$, $\beta = \frac{1}{a_1-b_1}$ y

$$\delta = \frac{a_1}{b_1-a_1} - \frac{a_2}{b_2-a_2}$$

se reduce a:

$$\alpha Y + \beta X + \delta = 0; \text{ con } \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2). \quad (1)$$

Análogamente, la ecuación de un círculo construible de centro $A(a_1,a_1)$ y radio BC, con $B(b_1,b_1)$ y $C(c_1,c_1)$, resulta ser de la forma:

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \delta = 0; \text{ con } \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2). \quad (2)$$

Todo $x \in \mathcal{C}$ asociado a $\overline{OM}$, con $M(x,o)$ construible, obtenido después de una secuencia finita de puntos construidos con regla y compás:

$$O(0,0),\ I(1,0),\ M_1(a_1,b_1),\ \ldots,\ M_n(a_1,b_n),\ M(x,0).$$

Fijemos las extensiones de cuerpos:

$$\mathbb{Q} \subset K_1 = \mathbb{Q}(a_1,b_1) \subset K_2 = \mathbb{Q}(a_1,b_1,a_2,b_2) \subset \ldots \subset K_{n+1} = \mathbb{Q}(a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots s_n,b_n,x,o) \subset \mathcal{C}$$

Por ser M construible, será intersección de dos rectas o dos círculos o una recta y un círculo y, por lo tanto, (x,o) deberá ser solución de un sistema de dos ecuaciones del tipo (1) o del tipo (2). Como dichas ecuaciones son lineales o cuadráticas y tienen coeficientes en los cuerpos $\mathbb{Q}$, K_1, K_2, ... , K_{n+1} ; necesariamente deberán ser $K_i = k_{i+1}$

o bien $\left[K_{i+1} : K_i\right] = 2$; lo cual implica que:

$$\left[K_{n+1}:\mathbb{Q}\right] = \left[K_{n+1}:K_n\right] \times \left[K_n:K_{n+1}\right] \times \ldots \times \left[K_i:\mathbb{Q}\right] = 2^n.$$

Siendo $X \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x) \subset K_{n+1}$, tendremos

$$\left[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}\right]\left[K_{n+1}:\mathbb{Q}(x)\right] = \left[K_{n+1}:\mathbb{Q}\right] = 2^n$$

de donde $\left[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}\right]$ es un divisor de 2^n, es entonces una potencia de 2 que notaremos 2^q. Consideremos la familia $1, X, X^2, \ldots, X^{2q}$; de $2^q + 1$ elementos, puesto que la dimensión de $\mathbb{Q}(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ es 2^q existen $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{2q} \in \mathbb{Q}$ no todos nulos, con

$a_o + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{2q} X^{2q} = 0$,

se demuestra que X es una solución de un polinomio de grado una potencia de dos con coeficientes en $\mathbb{Q}$; es decir, X es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y además, el grado de X sobre $\mathbb{Q}$ es $\left[\mathbb{Q}(x):\mathbb{Q}\right] = 2^q$.

Al demostrarse mediante el teorema de Wantzell, la construcción por medio de la regla y el compás de los polinomios cuyo grado es una potencia de dos sobre $\mathbb{Q}$ y como las ecuaciones de las cónicas se enmarcan dentro de estos tipos de polinomios, se garantiza la construcción de las tres curvas mediante el uso de la regla y el compás. Estamos en condiciones de presentar entonces, las cónicas como envolventes, tema del siguiente capítulo.

CAPITULO # 2

LAS CONICAS COMO ENVOLVENTES

En este capítulo presentaremos la construcción de las tres cónicas: la parábola, la elipse y la hipérbola; siguiendo los lineamientos del primer capítulo, con regla y compás. A esta forma de construir las cónicas, es necesario darle una formalidad matemática, es por ello que dichas construcciones serán justificadas desde el punto de vista de las envolventes. En donde, las envolventes serán el resultado de un número infinito de construcciones de líneas rectas; esto es, de una familia a un parámetro de construcciones, cuando el parámetro recorre un cierto intervalo de números reales. Antes de empezar se dará una idea de lo que es una envolvente, se definirá tal concepto, luego, se procederá a construir las cónicas y seguido a su construcción, se procederá a deducir mediante la aplicación del concepto de envolvente, cada ecuación.

3.1. INTRODUCCION AL CONCEPTO DE ENVOLVENTE

Para introducir el concepto de envolvente en $\mathbb{R}^3$, vamos a necesitar una idea de lo que es una superficie.

Una región del plano se llamará región elemental si es la imagen de un círculo abierto obtenido por una aplicación topológica. O sea, una región elemental es una región homeomorfa a un círculo.

Pogorélov [1984:88] señala que:

> "Un conjunto Φ de puntos del espacio se denominará superficie elemental si es la imagen en el espacio de una región elemental en el plano obtenida por una aplicación topológica".

Diremos que una superficie Φ viene definida implícitamente por la ecuación:

$$\varphi(x,y,z) = 0$$

entendiendo con ello exclusivamente que las coordenadas de los puntos de la superficie satisfacen la ecuación dada, con la particularidad de que puede existir puntos del espacio que satisfagan la ecuación dada y no pertenezcan a la superficie Φ.

Para el presente trabajo vamos a imaginar las rectas situadas no en el plano sino en el espacio de tal manera que la recta correspondiente al valor t del parámetro se encuentre a la altura t, obteniendo así la siguiente superficie

$$\left\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,t) = 0\right\}$$

Recuperaremos la construcción proyectando esta superficie sobre el plano XY. Ahora bien, la envolvente es la parte que aparece más sombreada en esta proyección (fig. # 6). Podemos imaginar una fuente luminosa encima de la superficie de tal manera que esta deja pasar una cierta cantidad de luz; el plano XY será la pantalla de proyección; la parte más sombreada en la pantalla corresponderá entonces aquellos puntos en los cuales la superficie es "más vertical". Por ejemplo, en la esfera la parte más sombreada en la proyección

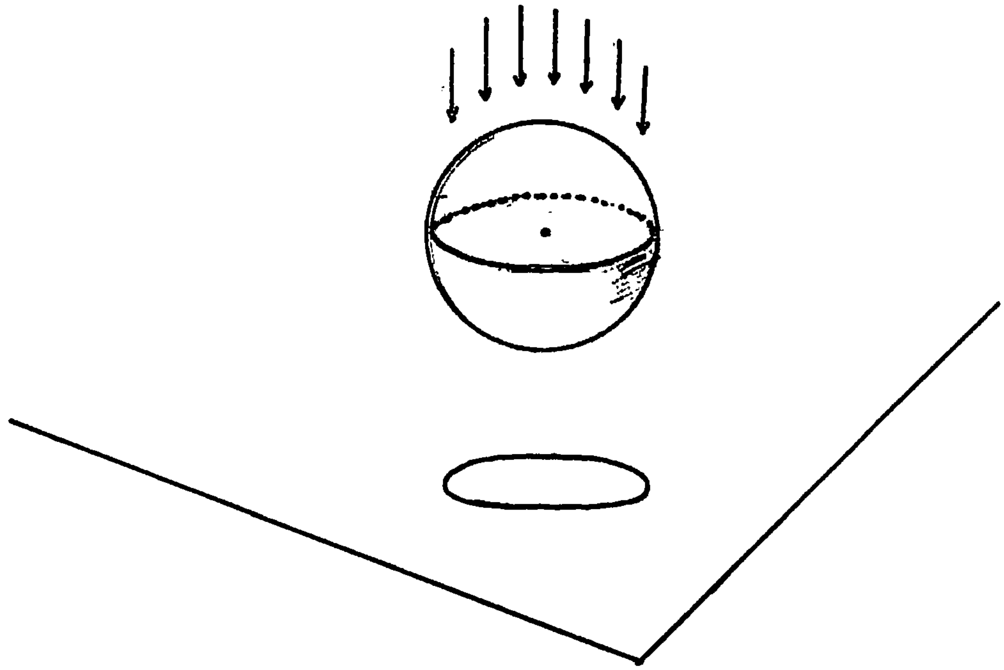


Figura # 6

es el circulo imagen del ecuador y sobre estos puntos, el plano tangente a la superficie es vertical.

Por la presentación que Fedenko [1981:46] hace podemos entonces definir la envolvente como la imagen por la proyección en el plano XY de los puntos de la superficie $F(x,y,t)=0$ cuyo plano tangente es vertical.

Ahora bien, en una superficie descrita por la ecuación $F(x,y,t)=0$, el vector grad F en el punto (x,y,t) es normal a la superficie en ese punto, (grad F es el vector de las derivadas parciales de F), es decir, a su plano tangente. Luego, el plano tangente en su punto es vertical si el vector grad F en ese punto es paralelo al plano XY, o sea, si la tercera componente es cero:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0$$

Todo lo anterior se puede resumir en la siguiente definición:

3.2. DEFINICION # 5 :

Dada una familia a un parámetro de curvas en el plano, si t es el parámetro y $F(x,y,t) = 0$ es la ecuación de la curva, para el valor t del parámetro la envolvente de esta familia es la ecuación:

$$\Pi_{xy}\left(\left\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,t) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0\right\}\right)$$

donde Π_{xy} es la proyección en el plano XY.

Empezaremos ahora el estudio de las cónicas, recordando lo planteado por Yákivliev [1982:163] , el cual refiriéndose a las cónicas señala:

> "Los matemáticos griegos no conocían ni el método de coordenadas ni las ecuaciones, no obstante les eran bien conocidas todas las propiedades de la elipse, hipérbola y parábola. Obtenían y estudiaban estas curvas como secciones planas de una superficie cónica. Desde entonces la elipse, hipérbola y parábola se denominan secciones cónicas".

El esquema aquí planteado, es el seguido al estudiar estas tres curvas tradicionalmente. En este estudio, cada una de las cónicas será analizada, pero desde un punto de vista diferente.

3.3. LA PARABOLA:

La construcción de la parábola se basará en los procedimientos señalados por Pedoe [1979:201] , donde se procede de la siguiente manera: Tracemos una línea ℓ, y tomemos un punto S (fijo) no situado sobre esta línea y para cada punto P de ℓ se traza el segmento $\overline{SP}$ y luego una semirrecta $\overrightarrow{PP'}$ perpendicular a $\overline{SP}$ (fig. # 7).

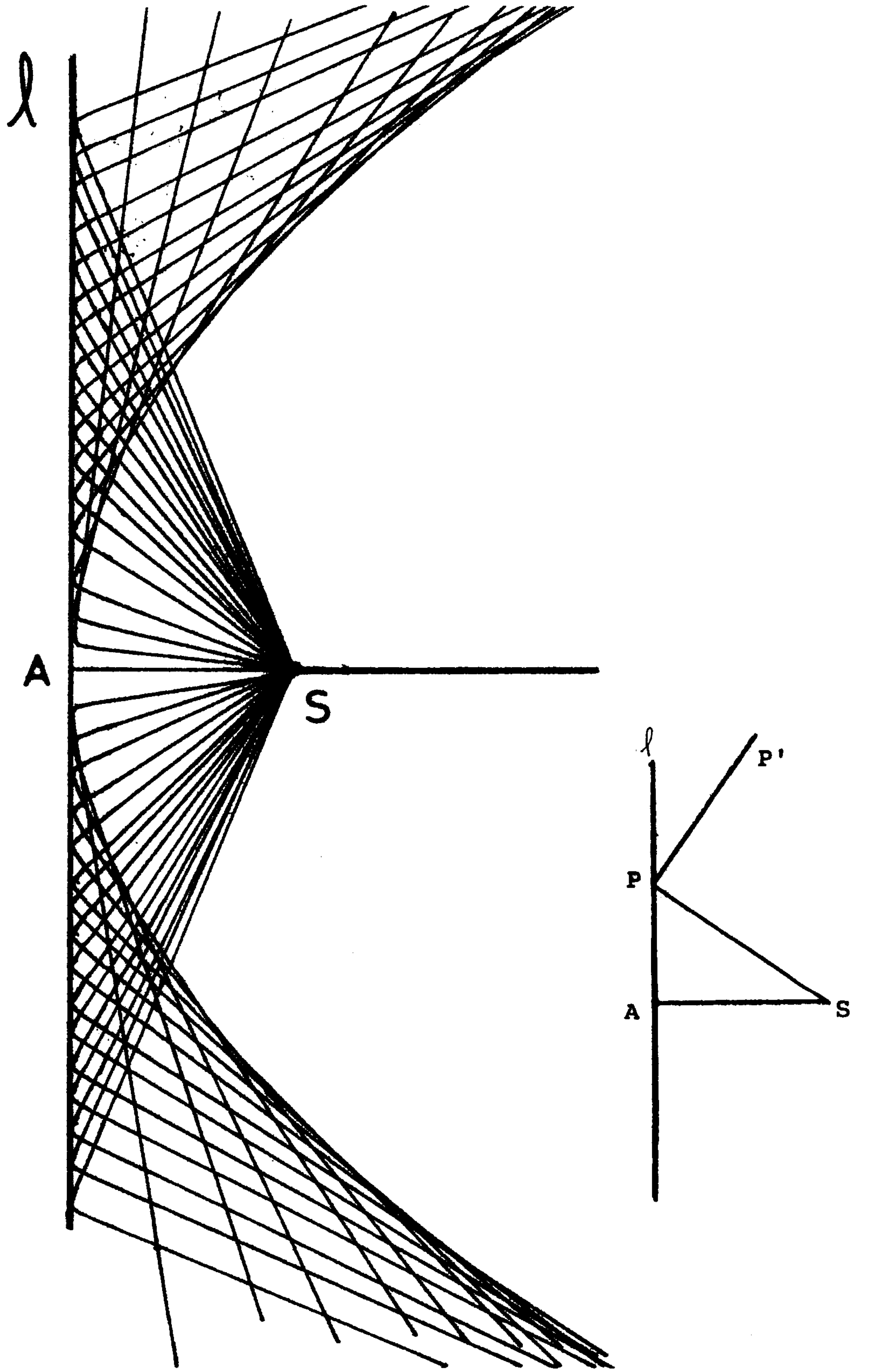


Figura # 7

Se observa que la figura resultante es una parábola, y decimos entonces que la parábola es la envolvente de la familia de rectas $\overleftrightarrow{PP'}$.

3.4. DEDUCCION DE LA ECUACION:

Procederemos ahora a la deducción de la ecuación de la parábola.

Si escogemos un sistema de coordenadas adecuado, es posible obtener la ecuación de cada recta de la familia.

De manera general observemos que si S es un punto tal que S(a,b) y P es otro punto tal que P(m,t).

Entonces la recta $\overleftrightarrow{PP'}$, donde P' (x,y) tiene por ecuación: (P'-P)(P-S) = 0 que se traduce del hecho que $\overleftrightarrow{PP'}$ es un vector perpendicular al vector $\overleftrightarrow{SP}$.

Luego;

$$\left[(x,y) - (m,t)\right]\left[(m,t) - (a,b)\right] = 0$$

es decir

$$(x-m,y-t)(m-a,t-b) = 0$$

$$xm - ax - m^2 + am + yt - by - t^2 + bt = 0$$

ó $$m^2 - (x+a)m + ax + t^2 - (y+b)t + by = 0 \qquad (1)$$

De la ecuación (1), examinemos uno de los casos que se presentan, si elegimos sobre el eje X el punto S(a,o) y hacemos que el eje Y coincida con la recta dada L: un punto P sobre esta recta tendrá coordenadas (o,t). Entonces la ecuación (1) se reduce a:

$$F(x,y,t) = t^2 - yt + ax.$$

Derivando la función $F(x,y,t)$ con respecto al parámetro t; obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 2t - y.$$

De acuerdo a la definición de envolvente se obtienen las dos ecuaciones:

$$F(x,y,t) = t^2 - yt + ax = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t} = \quad 2t - y \qquad = 0$$

De aquí que:

$y = 2t \quad , \quad x = \dfrac{t^2}{a}$ que son las ecuaciones paramétricas de la parábola $x = \dfrac{y^2}{4a}$.

De manera similar se pueden trabajar los diferentes casos que se presentan, al trabajar las ecuaciones de la parábola. Basta con tomar los puntos de interés que se desean hacer variar en la ecuación (1) y estudiar los casos necesarios.

3.5. LA ELIPSE.

Para la construcción de la elipse Pedoe [1976:206] indica el siguiente procedimiento.

Veamos ahora la elipse y cómo puede obtenerse esta curva como envolvente. Se traza un círculo y un punto S (fijo) dentro del círculo (fig. # 8).

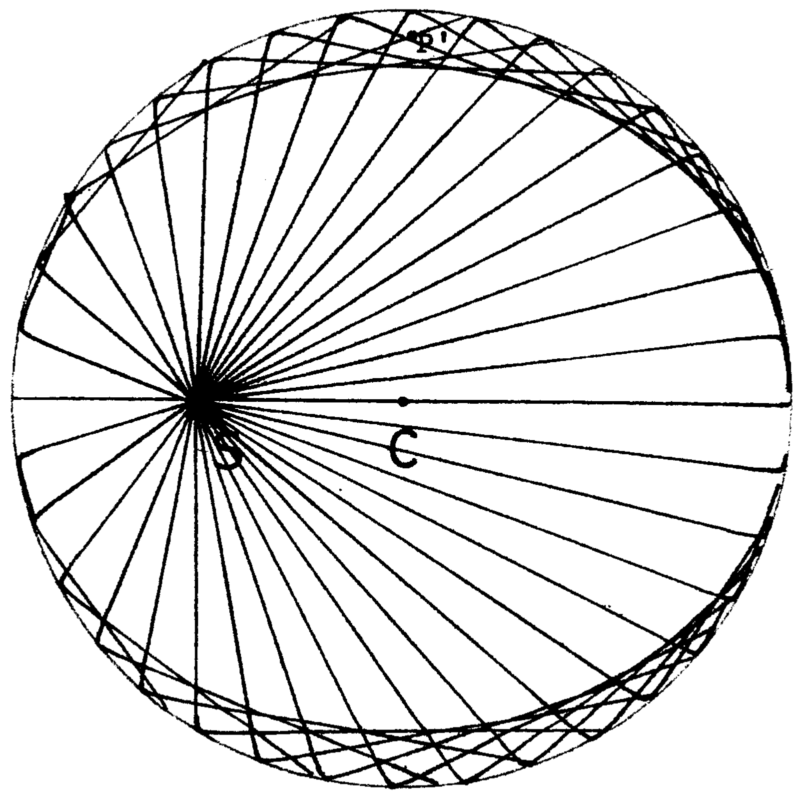


Figura # 8

Se une S a cualquier punto P de la circunferencia y se trazan rectas $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{SP}$ que pasen por P.

El resultado de todas las rectas es que envuelven una elipse. Si el punto coincide con el centro se obtiene el círculo original, si el punto S está sobre el círculo se obtiene el punto opuesto.

3.6 DEDUCCION DE LA ECUACION.

Ahora, procederemos a encontrar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{PP'}$, donde $P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, $S(a,b)$ y $P'(x,y)$

$$\left[P' - P\right] \left[P-S\right] = 0$$

asi;

$$\left[(x,y) \quad (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\right] \left[(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) - (a,b)\right] = 0$$

resolviendo obtenemos que:

$$F(x,y,\theta) = x(r \cos \theta - a) + y(r \operatorname{sen} \theta - b) + (a\, r \cos \theta + b\, r \operatorname{sen} \theta - 1) = 0 \tag{1}$$

y derivando con respecto a θ

$$\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial \theta} = r\left[-x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta - a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta\right] = 0 \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son de acuerdo a la definición de envolvente, las que nos permiten estudiar todos los casos de la elipse de acuerdo a nuestro interés.

Si hacemos el círculo de radio 1, y tomamos el origen de coordenadas en el centro del círculo con el ángulo θ como parámetro y además, el punto S sobre el eje X (fig. # 9)

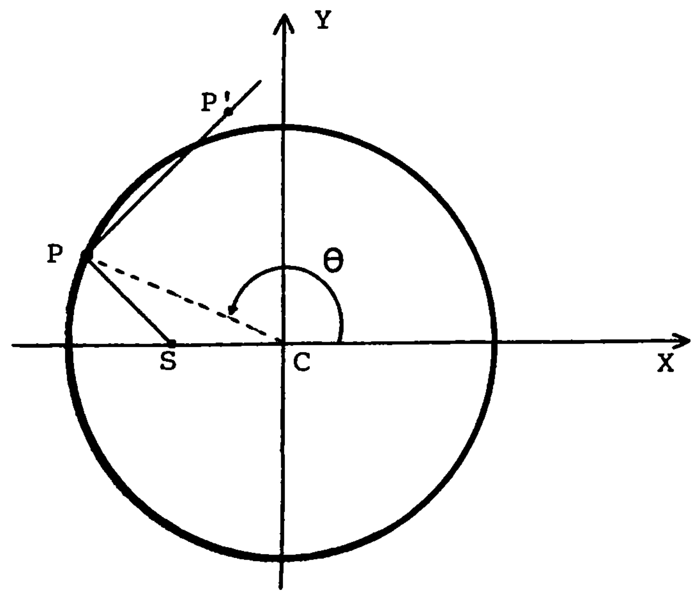


Figura # 9

entonces; las ecuaciones $F(x,y,\theta) = 0$ y $\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial \theta} = 0$

se reducen a:

$$F(x,y,\theta) = x(\cos\theta - a) + y \operatorname{sen}\theta + a\cos\theta - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = -x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta - a \operatorname{sen}\theta = 0$$

de donde;

$$x(\cos\theta - a) + y \operatorname{sen}\theta = 1 - a\cos\theta \qquad (3)$$

$$-x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = a \operatorname{sen}\theta \qquad (4)$$

resolviendo el sistema anterior para x e y obtenemos:

$$x = \frac{\cos\theta - a}{1 - a\cos\theta} \quad , \quad y = \frac{(1-a^2)\operatorname{sen}\theta}{1 - a\cos\theta}$$

por lo tanto; $x^2 + \frac{y^2}{1 - a^2} = 1$ que se obtiene al reemplazar los valores de $\cos\theta - a$ y $\operatorname{sen}\theta$ en las ecuaciones (3) ó (4).

Como $x^2 + \frac{y^2}{1 - a^2} = 1$; hemos obtenido la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y radio 1. Observemos que S está en el interior del círculo y por lo tanto $1 - a^2 > 0$.

Si cambiamos la posición de S y realizamos un procedimiento similar, se estudian otros interesantes casos de la elipse.

3.7. LA HIPERBOLA.

Para la hipérbola obtenida como envolvente Pedoe [1979: 210] sugiere para su construcción el siguiente procedimiento:

La hipérbola puede obtenerse al trazar un círculo, elegir un punto S fijo fuera del círculo, unir S con un punto P sobre la circunferencia y trazar rectas a través de P en ángulo recto con relación a $\overline{SP}$ (fig.# 10).

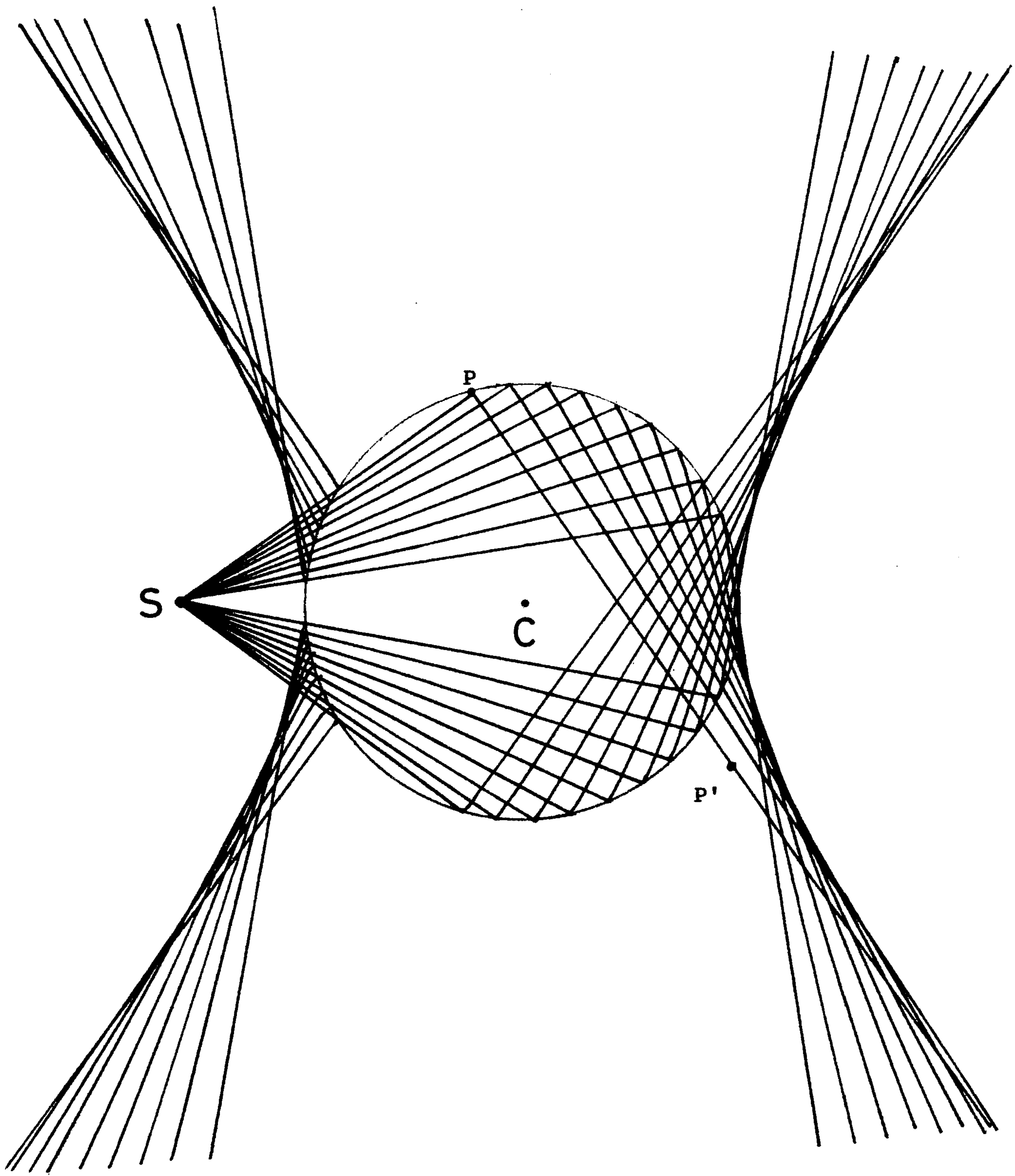


Figura # 10

La envolvente resultante es un tanto diferente a las demás. Se separa en dos curvas o ramas.

3.8. DEDUCCION DE LA ECUACION.

Se procederá ahora a la deducción de la ecuación de la hipérbola.

Una vez más, si hacemos el análisis anterior y tomamos a $P(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\theta)$, $S(a,b)$ y $P'(x,y)$. Se obtienen las ecuaciones de la recta para $\overleftrightarrow{PP'}$ vista en la elipse:

$$F(x,y,\theta) = x(r\cos\theta - a) + y(r\,\mathrm{sen}\,\theta - b) + (a\,r\cos\theta + b\,r\,\mathrm{sen}\,\theta - 1) = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = r\left[-x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta + b\cos\theta\right]$$

que no son otras que las ecuaciones (1) y (2).

Si para estas ecuaciones hacemos $S(a,0)$ y tomamos el círculo de radio úno en el centro del eje de coordenadas (fig. # 11)

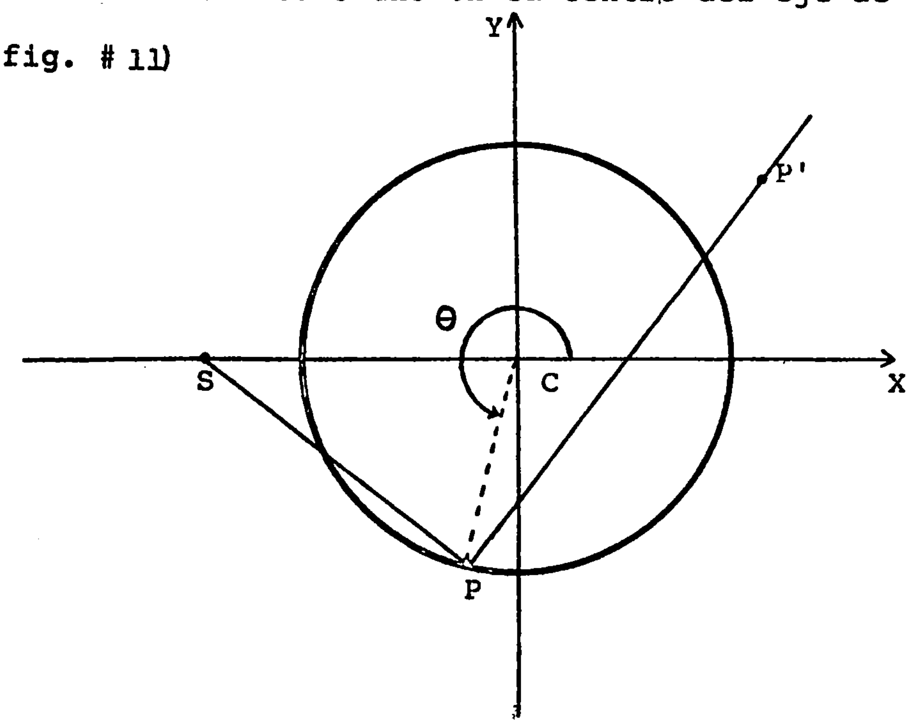


Figura # 11

se obtiene que:

$$F(x,y,\theta) = x(\cos\theta - a) + y \operatorname{sen}\theta + a\cos\theta - 1$$

$$\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = - x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta - a \operatorname{sen}\theta$$

al igualarla a cero se obtienen las ecuaciones (3) y (4) vistas en la elipse y al realizar los cálculos nos resulta la ecuación:

$x^2 - \dfrac{y^2}{a^2 - 1} = 1$; puesto que como S esta fuera del círuclo, $a^2 > 1$. Como se puede observar la ecuación resultante es la ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas y un punto S sobre el eje de las abscisas.

Las ecuaciones (1) y (2) nos permiten estudiar todos los posibles casos que sean de nuestro interés, al hacer variar a S no sólo sobre el eje X e Y sino el origen de coordenadas. Con un procedimiento similar al visto, se pueden analizar las diferentes situaciones que se presenten.

Rápidamente, observemos que si en las ecuaciones (1) y (2) se hace S(0,0), obtenemos como resultado las ecuaciones

$x = \cos\theta$

$y = \operatorname{sen}\theta$ que corresponden al círculo original.

CAPITULO # 3

APLICACIONES

Continuaremos estudiando algunas de las hermosas curvas que pueden obtenerse como envolventes. Empezaremos por el cardioide.

4.1. EL CARDIOIDE

Tracemos un circulo (al que llamaremos circulo - base) y señalemos sobre él un punto A que mantendremos fijo. Con centro en un punto cualquiera Q del circulo, y con radio $\overleftarrow{QA}$, tracemos otro circulo. Este proceso lo repetimos varias veces para diferentes posiciones de Q alrededor del circulo base.

Todos estos circulos envuelven a una figura en forma de corazón, llamada cardioide (fig. # 12). Al punto A se le llama cúspide.

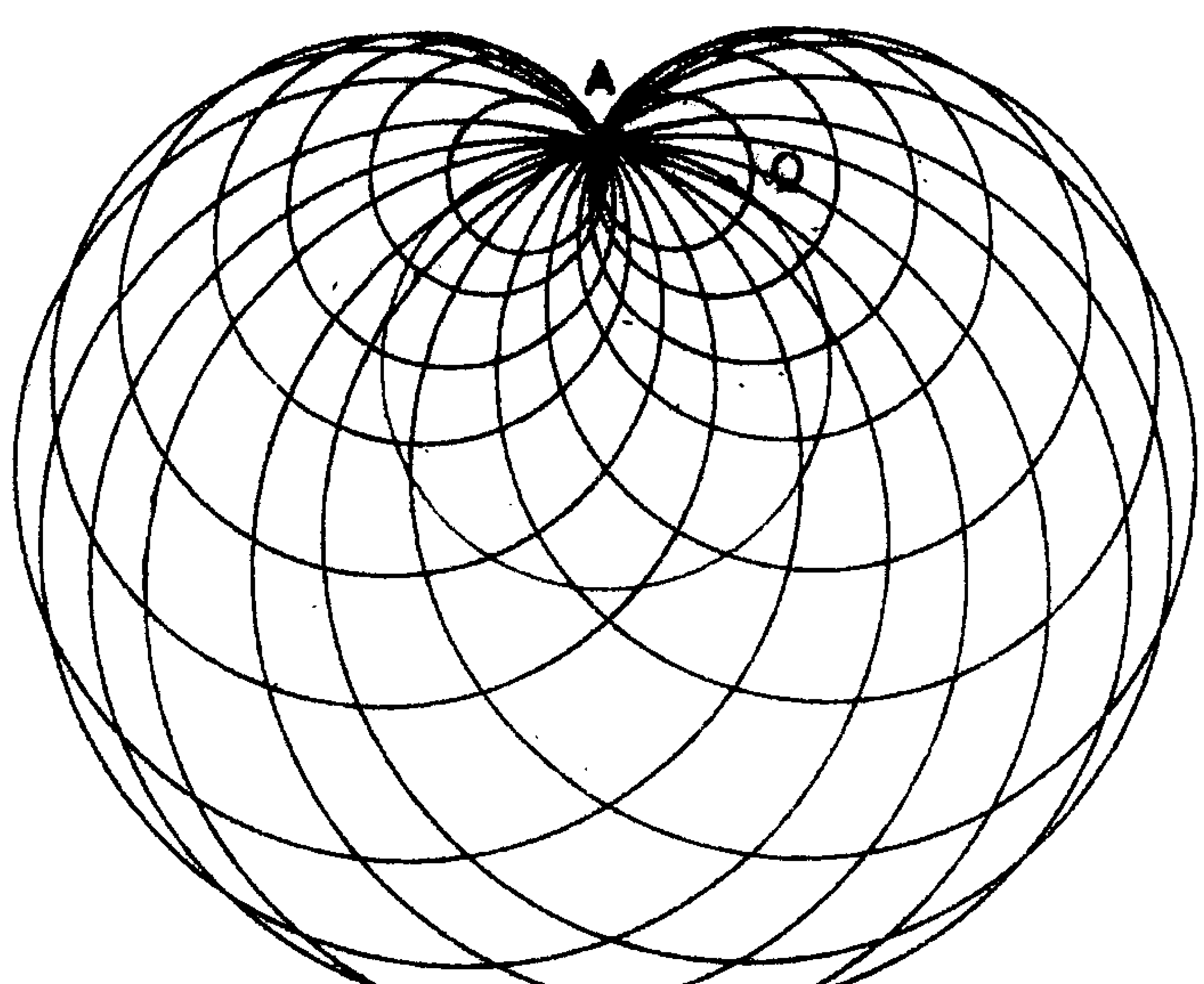


Figura # 12

4.2. DEDUCCION DE LA ECUACION.

Si el círculo base se considera centrado en el origen de coordenadas y de radio 1, y el punto A sobre el eje Y; un punto Q sobre el círculo tiene coordenadas Q(cos Θ, sen Θ).

Luego, la ecuación del círculo con centro Q y radio $\overline{QA}$ será:

$$F(x,y,\Theta) = (x-\cos\Theta)^2+(y-\operatorname{sen}\Theta)^2+2\cos\Theta - 2 = 0 \quad (4)$$

y

$$\frac{\partial F(x,y,\Theta)}{\partial\Theta} = x\operatorname{sen}\Theta - y\cos\Theta - \operatorname{sen}\Theta = 0 \quad (5)$$

La envolvente será la solución del sistema de ecuaciones (4) y (5).

Despejando x en (5) tenemos:

$$x = 1 + y\frac{\cos\Theta}{\operatorname{sen}\Theta} \quad \text{si} \quad \operatorname{sen}\Theta \neq 0 \quad (\Theta \neq n\pi),\ n \in \mathbb{Z}$$

sustituyendo este valor en (4) obtenemos el valor para y:

$$y = 2(1-\cos\Theta)\operatorname{sen}\Theta$$

de donde resulta que

$$x = 1 + 2(1-\cos\Theta)\cos\Theta$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cardioide.

4.3. LA NEFROIDE

Cuando un disco de radio $\frac{1}{4}$ se le hace rodar sobre el borde de un disco de radio $\frac{1}{2}$; se obtiene (fig. #13).

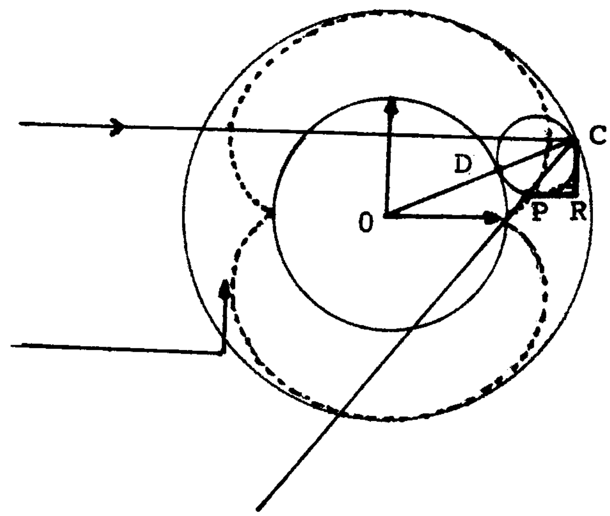


Figura # 13

4.4. DEDUCCION DE LA ECUACION

Si el círculo de radio $\frac{1}{2}$ lo tomamos en el centro de coordenadas y el punto P(x,y) es el punto que va describiendo la curva, se observa que el ángulo CPD es recto puesto que está inscrito en un semicírculo.

Se obtiene además;

$$\overline{PR} = \cos\theta - x = \operatorname{sen}(\pi/2 - 2\theta)\ \overline{CP}$$

Pero

$$\overline{CP} = \overline{DC} \cos \theta = \frac{1}{2} \cos \theta$$

Luego,

$$\cos \theta - x = \operatorname{sen} \pi/2 \cos 2\theta . \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} \cos \theta \cos 2\theta$$

de donde;

$$x = \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cos 2\theta \qquad (5)$$

Por otro lado;

$$\overline{CR} = \operatorname{sen} \theta - y = \overline{CP} \cos (\pi/2 - 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta \operatorname{sen} \pi/2 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta$$

de donde;

$$y = \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta \qquad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) corresponden a las ecuaciones paramétricas de una curva llamada Nefroide (en forma de riñón); que son justamente las ecuaciones para la envolvente. En la práctica sólo aparece la mitad de la curva puesto que la otra mitad es la envolvente de rayos verticales: proyecciones de rayos hacia atrás.

4.5. LA NEFROIDE POR REFLEXION.

El caso del Nefroide también se puede apreciar cuando consideramos un haz de rayos paralelos que inciden en un círculo dado en el plano (fig. # 14).

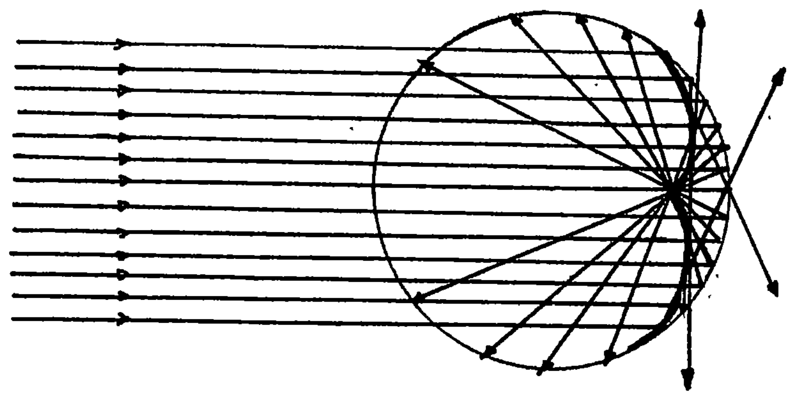


Figura # 14

Si suponemos el círculo de radio 1 con centro en el origen de coordenadas y un punto P sobre el círculo con coordenadas (cos θ, sen θ), según se muestra en la fig # 15

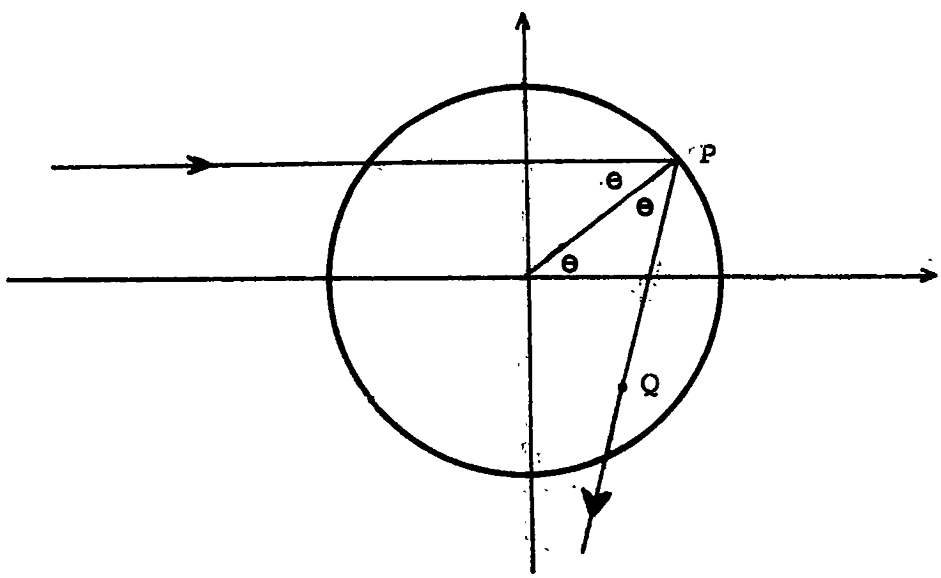


Figura # 15

la ecuación del rayo reflejado $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$y - \text{sen } \theta = m(x - \cos \theta)$$

donde m es la pendiente, la cual es igual a tan 2 θ.

De donde;

$$F(x,y,\theta) = x \text{ sen } 2\theta - y \cos 2\theta - \text{sen } \theta = 0 \qquad (7)$$

y

$$\frac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial \theta} = 2x \cos 2\theta + 2y \text{ sen } 2\theta - \cos \theta = 0 \qquad (8)$$

Resolviendo (7) y (8) para x e y obtenemos:

$$x = \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cos 2\theta$$

$$y = \text{sen } \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \text{ sen } 2\theta$$

que son las ecuaciones paramétricas de la Nefroide.

4.6. EL CARDIOIDE POR REFLEXION

Mostraremos ahora que si una fuente luminosa se coloca en un punto de un círculo, la caústica por reflexión en un círculo es un cardioide.

En la siguiente gráfica (fig. # 16) se muestra la trayectoria de uno de los rayos luminosos emitidos por la fuente, en donde se señalan los ángulos generados. Para relacionar este problema con el primero presentado, tomaremos un círculo con tres unidades de radio.

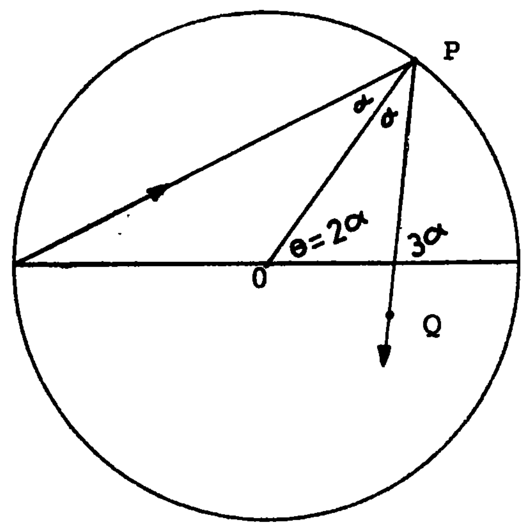


Figura # 16

Calculando la ecuación que le corresponde al rayo $\overrightarrow{PQ}$:

$$y - 3 \operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha (x-3 \cos 2\alpha)$$

de donde;

$$F(x,y,\alpha) = x \operatorname{sen} 3\alpha - y \cos 3\alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha = 0 \qquad (8)$$

y

$$\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = x \cos 3\alpha + y \operatorname{sen} 3\alpha - \cos \alpha = 0 \qquad (9)$$

Resolviendo las ecuaciones (8) y (9) para encontrar los valores de x e y, obtenemos:

$x = 1 + 2 \cos \theta(1-\cos \theta)$ y $y = 2 \operatorname{sen} \theta(1-\cos \theta)$, donde $\theta = 2\alpha$, las cuales son ecuaciones paramétricas de la cardioide.

5.0. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta sección trataremos las conclusiones y recomendaciones resultado de la presente investigación.

5.1. CONCLUSIONES

- El uso de la regla y el compás, en las construcciones geométricas, deben ser incorporados en la enseñanza de las cónicas.

- Se puede estudiar las cónicas en un sistema de ejes cartesiano y luego, transformarlo a un sistema de coordenadas polares o viceversa.

- La presentación de las cónicas desde el punto de vista de las envolventes, permite deducir la ecuación de cada cónica y estudiar todas sus propiedades.

- El estudio de las cónicas como envolventes se puede extender al estudio de otras curvas geométricas y las construcciones y deducciones de sus ecuaciones seguiran un procedimiento similar al estudiado en las tres grandes curvas: la Parábola, la Elipse y La Hipérbola.

- Se determina la relación entre la construcción con regla y compás, la teoria de cuerpo que permiten introducir la Geometría Diferencial, mediante el concepto de envolvente, a la enseñanza de las cónicas.

5.2. RECOMENDACIONES

De acuerdo a la presente investigación se presentan las siguientes recomendaciones:

- Realizar este trabajo mediante una investigación de tipo experimental con la finalidad de verificar si la propuesta de presentar las cónicas desde el punto de vista de la Geometría Analítica es menos funcional que presentar las cónicas como envolventes.

- Revisar la propuesta presentada en esta investigación, con la finalidad de enseñar las cónicas desde el punto de vista de las envolventes, a un nivel secundario.

- Difundir esta presentación de las cónicas entre los docentes por medio de seminarios, material audiovisual, de tal forma, que esta experiencia se transmita hasta los educandos.

6.0 BIBLIOGRAFIA

[1] ALBIS, VICTOR. Temas de Aritmética y Algebra. Departamento de Matemática y Estadística. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D.E.. 1984.

[2] ALSINA Y TRILLAS. Lecciones de Algebra y Geometría. Editorial Gili S.A., Barcelona, España, 1984.

[3] ARBOLEDA, FERNANDO I. Dibujo Protécnico, Tomo I, Editorial Susaeta, Colombia, 1987.

[4] ARBOLEDA, FERNANDO I. Dibujo Protécnico, Tomo II, Editorial Suseta, Colombia, 1987.

[5] BRUÑO, G. M. Geometría Curso Superior, Ediciones Bruño, Valencia, España, 1966.

[6] CAGNAC Y THIBERGE. Mathematiques Elementaires, Editorial Masson, Francia. 1963.

[7] CARREGA, JEAN CLAUDE. Theorie des corpes, le regle et le compás, Editorial Hermann. Francia. 1981.

[8] COLLETTE, JEAN-PAUL. Historia de las Matemáticas, Tomo I, Editorial Siglo Veintiuno, Colombia, 1986.

[9] COURANT Y RIBBINS. ¿Qué es la Matemática? , Editorial Aguilar. España. 1971.

[10] COXETER, H.S.M. Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa. Colombia. 1965.

[11] FEDENKO, A.S. Problemas de Geometría Differencial, Editorial Mir, Moscú, 1981.

[12] JOHNSON, D.: GLENN, W.: NORTON, M.: GARCIA, M. Explorando la Matemática, Tomo L, McGraw-Hill, México, 1970.

[13] JOHNSON, D.: GLENN, W.: NORTON, M.: GARCIA, M. Explorando la Matemática, Tomo II, McGraw-Hill, México, 1970.

[14] JOHNSON, DONAVAN A. Matemáticas más fácil doblando papel, Ediciones Distein, Barcelona, España, 1975.

[15] LESPINARD Y PERNET. Geometrie. Editorial Andre Disvigne. Francia. 1961.

[16] LIUSTERNIK, L.A. Líneas más cortas. Problemas de variaciones. Editorial Mir, Moscú, 1985.

[17] LYUBICH, Y.: SHOR L.A. Métodos cinemáticos en problemas Geométricos, Editorial Mir, Moscú, 1984.

[18] MOISES, E.: DOWNS, F. Matemática Moderna (Geometría), Editorial Norma y Fondo Educativo Interamericano S.A., Cali, Colombia, 1972.

[19] PEDOE, DAN. La Geometría en el arte, Colección Punto y Línea, Editorial Gili, S. A., Barcelona. España. 1979.

[20] POGORELOV, A.V. Geometría Diferencial, Editorial Mir, Moscú, 1984.

[21] STEEN, F.: BALLOU, D. Geometría Analítica, Editorial Publicaciones Culturales S. A., México, D.F., 1978.

[22] SWOKOWSKI, EARL. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamerica, México, 1981.

[23] SWOKOWSKI, EARL. Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamerica, México, 1981.

[24] YAKOVLIEV, G.N. Geometría. Editorial Mir, Moscú, 1985.