UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

“TOMA DE DECISIONES EN INVERSIÓN DE CARTERA DE ACTIVOS DEL ÍNDICE DOW JONES DE LA BOLSA DE VALORES DE NUEVA YORK, MEDIANTE LA TEORÍA DE MARKOWITZ Y SHARPE, UTILIZANDO TRADING 212 Y MICROSOFT EXCEL”

POR:

LIC. ROBERTO A. MARTÍNEZ C.

Trabajo de graduación para optar por el título de Maestría en Matemática, opción: Investigación de Operaciones

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2021

PROFESOR ASESOR:

Pedro A. Marrone G.

INDICE

Agradecimiento i
Dedicatoria ii
Introducción iii
Resumen vi
CAPITULO 1
DISEÑO Y MARCO METODOLÓGICO
DE LA INVESTIGACIÓN
.... 1
1.1- Antecedentes de la investigación 2
1.2- Justificación 16
1.3- Alcance y límites 18
1.4- Hipótesis 19
1.5- Objetivos 21
1.5.1- Generales: 21
1.5.2- Específicos: 21
1.6- Variables 22
1.7- Tipo de estudio 22
1.8- Sujetos 24
1.9- Procedimiento 24
1.10- Instrumentos 26
1.11- Cronograma de actividades 26
CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO
.... 28
2.1- Definición de inversión 29
2.2- Harry Markowitz y la evolución de su teoría 29
2.3- La teoría de Harry Markowitz 35
2.4- Modelo de markowitz y el método de los multiplicadores de lagrange 38
2.5- La técnica de la recta crítica 43
2.6- La recta de mercado de capitales (lmc) 46

2.7- La cartera óptima en el punto de tangencia 56

2.8- El método simplex, las condiciones de Karush kunt tucker y los multiplicadores de Lagrange, como herramienta útil en la solución de un problema de programación cuadrática........ 58

2.9- Ejemplificación elemental de la teoría de inversión: 61

2.10- La bolsa de valores de nueva york (nyse): índice de industriales dow jones..... 79

2.11- Trading 212: una herramienta o plataforma tecnológica efectiva, para el trading de acciones en mercados internacionales 84

2.12- Solver de excel: su uso en la solución de un problema de programación no lineal para la selección de carteras. 86

CAPÍTULO 3

MARCO OPERATIVO 94

3.1- Desarrollo del modelo utilizando Excel 95

3.2- Activos seleccionados para invertir 97

3.3- Planteamiento del modelo de Harry Markowitz y la frontera eficiente 99

3.4- Planteamiento de la teoría de Sharpe y la recta de mercado de capitales 109

3.5- Ejecución del modelo mediante la teoría de Konno y Yamazaki 111

3.6- Establecimiento del portafolio óptimo 113

3.7- Inversión en el portafolio óptimo dentro de la aplicación de Trading 212 116

3.8- Resultados de prueba de la inversión realizada 119

Tabla de reportes con los precios de cierre de los primeros y ultimos días de las semanas de observación 125

Conclusiones vi

Recomendaciones ix

Anexos xi

Glosario xiii

Bibliografía xxiii

AGRADECIMIENTO

El señor es mi fuerza y mi escudo; mi corazón en el confía, de él recibo ayuda. Mi corazón salta de alegría y con cánticos le daré gracias. ***Salmo 28: 7***

Agradezco a Dios, por permitirme continuar ante las adversidades de la vida y culminar con éxito otro reto más de mi vida profesional: mi trabajo de tesis para optar por el título de Maestría en Matemáticas, opción Investigación de Operaciones.

No tuviera fuerzas y ánimos para cumplir mis metas, si no fuera por mi madre Milva, quien siempre me ha guiado, orientado, educado y apoyado, dándome fortalezas en cada momento para cumplir mis metas y retos, en este caso especializarme con una Maestría en Matemáticas, a la cual le doy las gracias.

No puedo dejar de mencionar a mi padre Rory y a mis hermanos Rory y Arturo, por brindarme su ayuda incondicional en los momentos que más los necesité, al igual que mis sobrinos Rory Said y Diana que representan parte de mi vida y familia.

Desde siempre han sido una guía mis profesores, quienes a lo largo de los años estuvieron pendientes de mi avance y preocupados en mis estudios para poder obtener este título, gracias por sus enseñanzas, apoyo y preocupación.

Adicionalmente, agradecer al profesor Pedro Marrone quien estuvo al pendiente de mi tesis: asesorándome y brindándome su tiempo, experiencia, conocimientos y opiniones, para hacer posible este trabajo de investigación.

Finalmente, agradezco a mis compañeros de maestría Erika y Yexely por apoyarme en el avance de mi trabajo de investigación. A todos muchas gracias.

DEDICATORIA

"En la vida se corren riesgos, minimizarlos nos llevan al éxito. El esfuerzo, las oportunidades y los deseos de cumplir las metas son las puertas hacia una vida plena".

Roberto Martínez C.

He hecho esta investigación por años y en el transcurso he aprendido cosas nuevas de diversas áreas. El resultado de mi esfuerzo, de las grandes oportunidades que se me presentaron, el conocimiento adquirido y el desarrollo de este trabajo se lo dedico ante todo a mi familia mi madre, padre, hermanos y sobrinos, que han estado conmigo siempre y son el motor de mi vida.

Estoy seguro de que esta investigación, a pesar de contener elementos iniciales de la Toma de decisiones en inversión de cartera en la bolsa de valores, permitirá el fortalecimiento de la aplicación de análisis con modelos matemáticos en Panamá en esta área, y es por eso que dedico igualmente, este trabajo a la investigación en Panamá , esperando que contribuya en este campo de las Matemáticas que se debe seguir desarrollando para el fortalecimiento de la República ante la actual era tecnológica y del conocimiento.

INTRODUCCIÓN

Las bolsas de valores son organizaciones donde concurren y se ponen en contacto oferentes y demandantes de valores o instrumentos financieros como activos, pasivos, créditos, derivados, patrimonios, opciones, obligaciones, divisas, materia prima, etc. de diversas partes, con la finalidad de obtener un mayor rendimiento sobre sus ahorros o tener recursos para los proyectos de inversión a nivel corporativo. No obstante, la bolsa de valores de Nueva York es un mercado ubicado en el Wall Street, conocido también por sus iniciales NYSE, uno de los más importantes mercados de valores a nivel mundial, en donde se cotizan diversos instrumentos de inversión entre ellos oro, petróleo, divisas y acciones de diferentes empresas de Estados Unidos.

Esta investigación titulada: ***"Toma de decisiones en inversión de Cartera de activos del Índice Dow Jones de la Bolsa de Valores de Nueva York, mediante la Teoría de Markowitz y Sharpe, utilizando Trading 212 y Microsoft Excel"*** , se enfoca en la bolsa de Valores de Nueva York "NYSE", que está conformada por variados mercados bursátiles, donde los movimientos o transacciones que se realizan tienen una variación en cada momento durante todo el día. Uno de esos mercados es el conocido como INDICE INDUSTRIAL DOW JONES por sus siglas DJI US 30, conformado por las treinta industrias más reconocidas de los Estados Unidos y en el cual se enfoca esta investigación, con la intención de invertir en acciones de estas industrias desde cualquier parte del mundo incluyendo a Panamá, a través de un ordenador o computador dentro de plataformas virtuales como Trading 212 y muchas otras.

Las transacciones se llevan a cabo con la intermediación de personas calificadas, agentes de Bolsa o Brókeres, quienes con previa autorización del inversionista tienen acceso a las sesiones de esta, llevando un control sobre los instrumentos financieros, con los que cualquier persona natural, jurídica o empresa desea realizar transacciones, utilizando una cuenta de la aplicación Trading 212 (disponible para computadoras y celulares). Esta plataforma, posee una cuenta demo, simulada o de práctica para realizar transacciones con dinero ficticio o bien una cuenta real para invertir con dinero propio.

Esta investigación, se basa en la utilización de una cuenta de práctica con la finalidad de iniciar con un capital determinado y probar la factibilidad del Modelo de Markowitz para la inversión en carteras o portafolio de activos financieros sobre un mercado específico (DJI US 30).

Todo agente de bolsa tiene como objetivo obtener beneficios para el inversor al cual representan, pero no siempre esto ocurre. Ellos, toman las decisiones de comprar y vender títulos de su representación a fin de lograr un mejor rendimiento a un bajo riesgo o dependiendo del Risk Aversion (Aversión al riesgo o no disposición de correr riesgo).

En esta investigación se actúa como agentes de bolsa, teniendo la tarea de seleccionar lo más conveniente en la relación RIESGO – RENDIMIENTO, para algún inversionista dados ciertos parámetros; que junto a un modelo matemático como herramienta de **investigación de operaciones**, se logrará establecer y seleccionar una diversidad de acciones que son convenientes para invertir en un periodo determinado (cartera o portafolio de acciones), mediante precios de cierre históricos de los activos de las empresas que conforman al Índice Dow Jones. Se trata del conocido modelo de programación cuadrático paramétrico, diseñado por Markowitz y Sharpe en 1952; en el cual es necesario utilizar acciones del mercado secundario que no posean short sales (apalancamiento o ventas en corto), esto significa que no se toma en cuenta la técnica de pedir prestado un título valor que se cree que bajará y venderlo inmediatamente para luego comprarlo a un precio más bajo y finalmente devolverlo a su prestatario y ganar las diferencias obtenidas.

Esta investigación busca verificar la eficiencia del modelo de Harry Markowitz en la actualidad, donde las fórmulas y los modelos matemáticos teóricos podrían estar siendo dejados de segundo plano a pesar de que son el origen o fundamento de las soluciones a esos problemas actuales de un mercado que utiliza la tecnología y aplicaciones digitales como principal herramienta para la compra y venta de activos financieros.

RESUMEN

Actualmente, las más importantes bolsas de valores a nivel mundial como: la Bolsa de Nueva York, Nasdaq, Tokio, Shanghái, Londres, Euronext, Ibex, entre otras; se dedican a la compra y venta de instrumentos financieros (acciones, bonos, valores, etc.) y pueden ser un indicador importante para fortalecer la economía mundial. En ellos concurren inversionistas que compran y venden títulos valores, los cuales buscan ganar dinero producto de sus inversiones y necesitan crear carteras o portafolios de valores de los mercados en diversos países del mundo.

Los mercados actuales han expandido sus fronteras para que personas de diversas partes del mundo puedan realizar inversiones en divisas, acciones, bonos, valores, opciones o cualquier otro instrumento financiero, mediante plataformas tecnológicas que actúan como agentes de bolsa (encargados dentro de los mercados financieros de cotizar y dar opciones a los inversionistas para la compra y venta de valores).

La tecnología actual de inversión tiene como fundamento para sus soluciones, la utilización de modelos matemáticos relacionados con la programación no lineal, teniendo por interés maximizar el rendimiento esperado (ganancia por acción) o bien, minimizar el riesgo asociado a una inversión para determinar el portafolio de acciones que garantice un trueque óptimo entre esos dos factores: riesgo y rendimiento (Hiller, 2010).

El enfoque matemático de programación no lineal del cual trata esta investigación está basado en la teoría de programación no lineal (Media – Varianza) de Harry Markowitz y William Sharpe, cuya teoría les permitió ganar el Premio Nobel de Economía en 1990 (Hiller, 2010).

El modelo mencionado, minimiza el riesgo o varianza de los activos seleccionados sujeto a la condición de obtener una rentabilidad adecuada con ponderaciones positivas o iguales a cero, para así formar la llamada frontera eficiente de Markowitz que posee las mejores combinaciones de activos, es decir, portafolios o carteras eficientes ante los parámetros establecidos. Además, se determina la llamada Línea o Recta de Mercados de Capitales, que está formada por aquellos portafolios o carteras sujetas a una tasa libre de riesgo en la cual el inversionista puede apostar, considerando esta tasa equivalente a las del tesoro del estado.

Finalmente, se encuentra la cartera o portafolio óptimo en el punto de tangencia entre la recta de mercado de capitales (LMC) y la curva de la frontera eficiente; luego se verifica la efectividad del modelo, invirtiendo de forma práctica sobre la plataforma Trading 212.

CAPITULO 1
DISEÑO Y MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1- ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación está basado en la selección de carteras de los treinta activos que conforman el índice bursátil Dow Jones de la bolsa de valores de Nueva York (NYSE), utilizando el modelo de programación No Lineal cuadrático paramétrico de Markowitz. Dicha investigación, se ha de sostener en las siguientes afirmaciones expuestas por varias fuentes que enriquecen el estudio. A continuación, son detalladas:

- **Juan Manuel Pacheco** en su investigación titulada: **Programación cuadrática y selección de carteras de inversión;** asegura que NO existe un algoritmo general para resolver modelos no lineales como lo es el de MARKOWITZ, debido al comportamiento irregular de las funciones no lineales por lo que, en relación con la programación lineal, no se puede reducir el campo de elección al conjunto de puntos extremos de la región factible. Sin embargo, se han determinado condiciones que bajo ciertos requisitos se convierten en condiciones de primer orden o necesarias, e inclusive en condiciones necesarias y suficientes. Estas son las condiciones de Karush – Kuhn – Tucker (KKT), donde en un problema de minimización dichas condiciones KKT son necesarias y suficientes, si y solo si la matriz de varianza – covarianzas es definida positiva, lo que equivale a que los auto valores de dicha matriz sean todos positivos.

  Pacheco, también resalta que las carteras de títulos o portafolios son combinaciones de activos financieros con las que se busca reducir el riesgo que estos poseen individualmente, conocido también como diversificación (para reducir los riesgos). Así pues, mientras mayor sea la cantidad de activos en la cartera, mayor es la influencia sobre la varianza de la cartera (riesgo de la cartera) de las covariancias entre activos, y menor será la de las covariancias de cada uno, lo cual demuestra que en carteras bien diversificadas lo que adiciona cada título al riesgo de la cartera depende en mayor medida de la forma en que varía su rentabilidad respecto a la de los otros activos que conforman la cartera y en menor medida de la variación de la rentabilidad de ese título con su propia rentabilidad promedio.

- **Carlos Romero** hace referencia al tema en el trabajo **Modelos de selección de carteras de valores bursátiles, con aplicaciones a las bolsas españolas**, asegurando que una posible forma de generar carteras eficientes en el sentido de Markowitz es hallar las carteras de varianzas mínimas para diferentes valores del rendimiento medio, este problema de selección de carteras es un programa cuadrático paramétrico, ya que para cada valor que demos al parámetro de rentabilidad obtendremos una cartera, que es eficiente por ser la de varianza más pequeña para el valor de rentabilidad dado. Por tanto, para generar el conjunto de todas las carteras eficientes bastará con que el parámetro de rentabilidad tome todos los valores correspondientes a su campo de variación. La operatividad de este procedimiento es escasa, dado que la aplicación de los algoritmos de la programación cuadrática constituye siempre una tarea muy laboriosa, pero actualmente tecnológicamente es posible realizar una comparación de resultados con varios modelos, en cuestión de segundos.
- **Ricardo Delgado,** en su video publicado en el sitio de internet YouTube, titulado: **Manual de portafolio de Harry Markowitz,** sustenta que los plazos adecuados para hacer portafolios según Markowitz son de dos a tres años (para observar y tratar de controlar volatilidad) donde el tamaño de la muestra de los datos que se

recopilen en ese periodo, permitirá que se aproxime más a la distribución normal, ya que en los mercados los activos financieros no se comportan de forma normal, porque dependen del comportamiento de cada empresa y además, los años bursátiles están compuestos por 252 días. También se señala que el índice de Sharpe indica la cantidad a pagar por una empresa en relación con los riesgos que asumen por arriba de la tasa libre de riesgo. En este punto es necesario aclarar que la tasa libre de riesgo (risk free), es aquella que se logra al momento en que se compra un activo financiero y se realiza un préstamo o empréstito conocido en inglés como debt securities, denominados colectivamente como valores del Tesoro o Treasuries donde los inversionistas a nivel mundial eligen economías como la alemana en Europa o la estadounidense en América, ya que son países con una economía sostenible y dichos valores del estado ocupan un puesto especial en el mundo, lo que constituye una referencia para la mayoría de los empréstitos.

En un empréstito conocido como un ingreso fijo o un BONO, el inversionista le presta dinero a la entidad que promete devolverle el préstamo al concluir un periodo conocido como plazo. Los T-Bonds (Bonos del tesoro) suelen ser atractivos para los inversionistas que compran manteniéndolos hasta su vencimiento, ya que ofrecen una fuente de ingreso regular de un periodo amplio sin el riesgo de incumplimiento. Por ejemplo, en el caso de los valores del Tesoro; el inversionista le presta dinero a la Tesorería de los Estados Unidos y el monto del préstamo se conoce como valor nominal o paridad del empréstito. Por otra parte, la Tesorería (Entidad) le paga intereses por el uso de su dinero durante el plazo del empréstito, comúnmente dos veces al año. El tipo de interés libre de riesgo no es un valor real, porque cada inversión tiene un riesgo, dado que es teórico, la mayoría de los inversores hacen una estimación de la tasa libre de riesgo usando la tasa de los bonos del tesoro de Estados Unidos a tres meses. Esto se debe a que los Estados Unidos es visto como una economía estable y tres meses es un tiempo lo suficientemente corto como para no tener tanto riesgo. En conclusión, el Risk Free es la tasa de retorno que un inversionista espera sin posibilidad de pérdida.

Adicionalmente, Delgado añade en su escrito; que como sugerencia se debe invertir en la empresa que tiene mayor su índice de Sharpe. También dice, que el riesgo sistemático es el riesgo del mercado, es decir, aquel que abarca factores globales o externos a una compañía de tipo económico, político y social lo que provoca una variación de la rentabilidad de un activo sin poder repararlo mediante la diversificación como, por ejemplo, una guerra o cambios de intereses, por ser problemas externos o fuera de la compañía. Este riesgo NO es diversificable y es el denominado índice Beta. Delgado concluye diciendo que el riesgo sistemático es otro dato que se debe considerar en la selección de carteras.

- **Eugenio Prieto Pérez,** en su tesis **Teoría de la selección de carteras**, resalta que el agente está con frecuencia más interesado en los rendimientos reales que en los nominales, pues los reales se obtienen dividiendo los nominales por el índice de precios. Si este índice aumenta, el dinero pierde poder adquisitivo variando éste inversamente al índice de precios. Pérez cita la idea de Karl H. Borch, "la idea básica tras el modelo de Markowitz es la de que el inversionista debería examinar la curva durante un ***tiempo suficientemente prolongado*** y después decidirse por un punto que más que ningún otro satisface sus necesidades y preferencias en lo referente al riesgo y beneficios".

- **José Corrales Céspedes**, en la tesis titulada **Optimización del modelo media-varianza-skewness para la selección de un portafolio de acciones y su aplicación en la bvl usando programación no lineal**, cita a Bazaraa y Shetty (1993) y señala que se puede demostrar que un punto de KKT es aquel que no admite dirección que satisfaga las condiciones de primer orden para mejorar la solución del PNL, por lo tanto las condiciones de KKT son suficientes para establecer un óptimo cuando la ausencia de direcciones factibles son suficientes. El caso más común es con los programas convexos, donde si un punto x es un punto de KKT en un programa convexo, entonces x es un óptimo global. Además, Corrales añade que a partir de la selección de portafolio de acciones y la optimización matemática es el modelo de Media - Varianza de Markowitz, debido a que dicho modelo ofrece relativa simplicidad para obtener resultados y facilidad para comprender los parámetros empleados en la optimización, características que son valoradas por los inversionistas que buscan herramientas rápidas para tomar decisiones, que les permitan aprovechar oportunidades de obtener rentabilidad en mercados de acciones muy dinámicos y altamente sofisticados. El detalle es que existe una asimetría que es dejada de lado en el modelo de Markowitz y que es de utilidad para el inversor.
- **Luis Enrique Cayatopa Rivera**, en su trabajo de investigación **Desarrollo sobre la teoría de la cartera**, concluye que esta teoría identifica la cartera óptima de todo inversionista.

Cayatopa indica que la cartera de mercado consta de todos los valores en los que la proporción invertida en cada valor corresponde a su valor de mercado relativo. El valor de mercado relativo de un activo riesgoso es igual al valor de mercado agregado por el activo dividido con la suma de los valores de mercado agregados de todos los activos riesgosos. Esta cartera de mercado juega un papel importante, ya que al ser combinada con la cantidad deseada de endeudamiento o de préstamos libre de riesgos determinan el conjunto lineal óptimo, representado por la RECTA DEL MERCADO DE CAPITALES. La diversificación de esos valores mobiliarios repercute en la rentabilidad esperada de la cartera de manera positiva, porque eleva la probabilidad de una posible ganancia y disminuye el nivel de riesgo frente a las inversiones individuales de activos.

- **Cesar de Prada,** en su presentación **Optimización con restricciones,** asegura que existen varios caminos o métodos para solucionar un problema de programación cuadrático enlistando las condiciones de Karush Kunt Tucker, métodos más generales como el de Wolfe, inclusive mediante conjuntos activos, entre otros. Al resolverlo por las condiciones KKT asegura Prada, que se puede encontrar una solución factible del conjunto de ecuaciones lineales en (x, λ, μ) como un problema lineal (PL) en dichas variables con el algoritmo simplex tipo I, y mantener la condición $\mu x=0$ imponiendo como regla de cambio de pivote que no estén simultáneamente en la base columnas con componentes del vector (x,λ,μ)distintas de cero en x y en μ , siendo un método diseñado por DantzingWolfe.
- **Alcides José Lasa Crespo,** en la investigación **Construcción de la frontera eficiente de portafolios de inversión aplicación al caso de México,** indica que

cuando se incluye la restricción de no negatividad de las ponderaciones, se elimina la posibilidad de ventas en corto, short sales o apalancamiento, es decir, sin tomar en cuenta la técnica de pedir prestado un título valor que se cree que bajará y el mismo se vende inmediatamente, para luego comprarlo a un precio más bajo y finalmente devolverlo a su prestatario y ganar las diferencias obtenidas.

Lasa Crespo destaca que, muchos de los activos considerados inicialmente no llegan a formar parte de la frontera, esto es, sus ponderaciones son cero y la suma de las ponderaciones de los considerados debe ser igual a 1; y a medida que aumenta la tasa de rendimiento exigida, hay emisoras que van dejando de pertenecer a la frontera eficiente. Aunque el resultado de la frontera eficiente es consecuencia de la interacción de los parámetros estadísticos de todos los activos involucrados, es necesario que los coeficientes de correlación relativamente bajos de los activos sean considerados. Además, los portafolios teóricos ubicados en tres posiciones diferentes de la LMC tuvieron un desempeño más que satisfactorio en comparación con los fondos de inversión existentes en el mercado que utilizamos como puntos de referencia para cada clase de riesgo. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los fondos de inversión son administrados por instituciones financieras –en particular los bancos– pero los propietarios últimos pueden ser (y por lo general son) una cantidad numerosa de personas y empresas que compran y venden partes alícuotas (proporcionales) de esos fondos. Por lo tanto, existe un costo de gestión y una rentabilidad para el administrador de esos fondos que se obtiene a partir del rendimiento bruto de la cartera de inversión. Lasa Crespo, también sustenta que el mecanismo para seleccionar la cartera óptima es construir primero la frontera de portafolios eficientes con acciones que forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa de Valores; los activos que forman parte de este conjunto de portafolios tienen ponderaciones positivas, como resultado de haber incorporado la restricción de no negatividad de esas ponderaciones. A esto se incorpora un activo "libre de riesgo" y se encuentra el llamado portafolio de tangencia para definir una nueva frontera de portafolios eficiente como combinación de este último y el activo libre de riesgo.

- **Gaspar F.** en su resumen de Fundamentos de Dirección Financiera **Rentabilidad y riesgo de carteras y activos,** dice que luego de crear la frontera eficiente, el conjunto de mínima varianza se parte en dos mitades; las carteras más deseables por el inversor se representan en la mitad superior (conjunto o frontera eficientes) y se caracterizan porque son carteras que, dado un nivel de riesgo, poseen el rendimiento esperado más alto. A fin de obtener una combinación, se fija un valor de esperanza matemática de la rentabilidad de la cartera y se resuelve, repitiendo con otro valor, para obtener otra combinación, y así sucesivamente se obtiene la frontera eficiente; por lo que el programa es cuadrático paramétrico. Si se resuelve uno de los problemas cuadráticos paramétricos indicados, dando todos los valores posibles a la varianza o a la rentabilidad esperada de la cartera, respectivamente, obtendremos el conjunto de combinaciones eficientes.

  Cuanto mayor sea el número de activos que componen la cartera, menor será el riesgo de la misma, pero el riesgo se reduce hasta un límite siempre que exista una porción de riesgo debido a la covarianza entre los activos que no se puede eliminar. El riesgo que incorpora un activo a la cartera dependerá, única y exclusivamente de su correlación o covarianza con el resto de los títulos que formen parte de la cartera y no de su riesgo individual o específico medido por su varianza, que se puede eliminar con tan sólo incrementar el número de títulos. Bajo esta línea, sustenta Gaspar que no tiene mucho sentido formar carteras cuyo volumen de títulos supere 10 ó 15 clases de títulos distintos, ya que el beneficio de la diversificación que se consigue introduciendo más títulos diferentes, es mínimo y no se vería compensado con los costes de transacción y administración a los que se deberá hacer frente. Añade la hipótesis de la existencia de una tasa libre de riesgo a la cual se puede prestar o pedir prestado cualquier cantidad de dinero, en donde el inversor puede no sólo invertir todo su presupuesto en activos riesgosos, sino también destinar parte del mismo a la compra del activo sin riesgo o cederla en préstamo al tipo de interés sin riesgo, teniendo la posibilidad de invertir en activos con riesgo una cantidad superior al presupuesto de inversión disponible, endeudándose para financiar la diferencia.

Todo individuo tiene una capacidad de crédito limitada y además, el tipo de interés que ha de pagar cuando se endeuda, normalmente, es superior al que le pagan por la colocación de sus ahorros. Esto simplifica el problema de selección de carteras, en donde la curva de carteras eficientes del modelo de Markowitz se transforma en una recta y el inversor puede colocar todo su presupuesto de inversión en el activo sin riesgo o en el activo arriesgado, o puede invertir en cualquier combinación entre el título libre de riesgo y las carteras eficientes (carteras mixtas). Al considerar el activo libre de riesgo, la frontera eficiente se transforma en una línea recta, que parte del punto Rf y es tangente a la frontera eficiente obtenida sin introducir el título sin riesgo. El punto de tangencia entre la curva y la recta define la cartera eficiente de activos con el riesgo en que invertirá el decisor; el inversor repartirá su presupuesto entre la cartera arriesgada y el activo sin riesgo.

- **Santiago Fernández Valbuena,** en el artículo: **¿Cómo reducir el riesgo de las inversiones?** , añade que para un índice beta de cero, es decir, para una variabilidad de los rendimientos de la cartera nulos, debemos llenar la cartera con el activo libre de riesgo que es la Letra del Tesoro (Estados Unidos) o activo equivalente; es decir, que es la rentabilidad teórica e históricamente más baja de las que se registran en los mercados de capitales, pero al mismo tiempo con variabilidad nula. Las Letras del Tesoro tienen un valor que se puede predecir con casi total exactitud hasta el día de su vencimiento y su nivel de riesgo sistemático es cero, por lo que su beta es cero.

  Independientemente de lo que varíe el mercado financiero en su conjunto el rendimiento de las letras es perfectamente conocido y no está relacionado con el rendimiento de los mercados de activos financieros con riesgo implícito.

- **Alfredo Rodrigálvarez Batanero**, de la Universidad Pontificia ICADE BUSINESS SCHOOL de Madrid, en su trabajo: **Selección de activos de una cartera usando la teoría de Markowitz;** señala que es necesario en el momento de diversificar hacer un análisis del comportamiento histórico de los precios de las acciones y la relación existente entre estos, para así formar una adecuada cartera de inversión que permita la disminución del impacto del riesgo que se pueda llegar a presentar. Además, enlista una serie de hipótesis sobre el modelo de Markowitz como: que todas las inversiones tienen el mismo tiempo; los activos de la cartera son conocidos; todos los activos son de riesgo, es decir, su varianza es mayor que cero, además se conocen las variables aleatorias de la rentabilidad de los activos que se distribuyen según las leyes normales y el inversor tiene aversión al riesgo, por lo que en vez de reducirlo prefiere obtener una rentabilidad baja, pero no exponer el capital a un riesgo elevado y por último, no hay costes de transacción, todos los activos son divisibles y sobre todo vender en corto no está permitido. Rodrigálvarez también sustenta que el modelo de Markowitz se puede resolver de forma gráfica al tener pequeñas cantidades de activos, pero se vuelve complicado de resolver al tener muchos activos en estudio; por lo que concretamente la herramienta empleada para resolver el sistema será Solver de Excel, entre otras, por su rapidez y sencillez, pero a su vez existen otros programas como Matlab.

Por otra parte, el autor resalta que en la confección de la frontera eficiente se utiliza el Método de la Recta Crítica, el cual es un método teórico que se emplea en la búsqueda de las carteras esquina, en donde una cartera esquina se define como eficiente si y solo si es combinación lineal convexa entre dos carteras esquinas consecutivas, es decir, las carteras que forman la frontera eficiente se encuentran entre la cartera eficiente de máxima rentabilidad y la cartera eficiente de mínima volatilidad, varianza o riesgo.

Finalmente, Rodrigálvarez indica que el modelo de Markowitz teóricamente es útil y ha tenido éxito, puesto que ha habido una gran cantidad de modelos posteriores que se fundamentan en éste, pero en la práctica suele ser muy complejo por lo que su resolución algorítmica no es trivial y el elevado número de rentabilidades, varianzas y covarianzas deben calcularse para una gran cantidad de activos, sin embargo no es muy complicado por el uso de herramientas tecnológicas como Solver de Excel o Matlab.

Los problemas técnicos no son un impedimento, pero las hipótesis que hace el modelo, es decir, sus condiciones restrictivas no son lo suficientemente buenas como para no ser consideradas por los gestores a la hora de hacer un análisis, como por ejemplo: la no consideración de impuestos ni los costes de transacciones, la perfecta divisibilidad de los títulos seleccionados y que el modelo no da ninguna herramienta para que el inversor pueda valorar el riesgo que está asumiendo pues su objetivo final es obtener la máxima rentabilidad con el mínimo riesgo.

- **Levišauskait Kristina,** en su investigación titulada: **Investment analysis and portfolio management**, indica que cuando el coeficiente de correlación es igual a 0, no existe una relación lineal entre los rendimientos de dos activos. Combinar dos activos con correlación cero entre sí reduce el riesgo de la cartera. Mientras que una correlación cero entre los retornos de dos activos es mejor que la correlación positiva, pero no proporciona los resultados de reducción de riesgo tal que un coeficiente de correlación negativo.

  Por otro lado, se añade que los fondos de cobertura son sociedades de inversión privada no reguladas, limitadas a instituciones y personas de alto patrimonio neto, que buscan explotar diversos mercados de oportunidades y, por lo tanto, obtener rendimientos mayores de los que normalmente están disponibles. Esos mercados, requieren una alta inversión inicial y normalmente tienen restricciones sobre la rapidez con que el inversor puede retirar sus fondos. Los fondos de cobertura toman posiciones especulativas concentradas y pueden ser muy riesgosas. Al combinar diferentes tipos de inversiones, incluidos los derivados, los fondos tratarían de cubrir riesgo mientras busca un mayor rendimiento, pero hoy la palabra "cobertura" se aplica incorrectamente a estos fondos porque generalmente adoptan estrategias agresivas para invertir en acciones, bonos y otros mercados financieros de todo el mundo y su nivel de riesgo es alto.

Adicionalmente, se dice que las transacciones que utilizan instrumentos derivados no se limitan a activos financieros. Como, por ejemplo, existen derivados que involucran diferentes materias primas como: café, granos, metales preciosos y otras.

Existen derivativos o derivados donde el activo subyacente o fundamental es un activo financiero.

Además, entre otras herramientas de inversión existen varios tipos de fondos de inversión, seguros de vida de inversión, fondos de pensión y fondos de cobertura.

Los futuros son el otro tipo de derivados, un contrato futuro es un acuerdo entre dos partes de lo que establecen realizar transacciones con respecto a algunos activos a un precio predeterminado en una fecha futura especificada: una de las partes acuerda comprar el activo financiero y el otro se compromete a vender el activo financiero. Es muy importante que en caso de contrato de futuros ambas partes están obligadas a cumplir y ninguna de las partes cobra la cuota.

En conclusión, haciendo referencia a lo escrito por Levišauskait y apoyado en lo señalado en la investigación titulada: "An Introduction to Derivative Securities, Financial Markets, and Risk Management Downloaded", se puede concluir en que las acciones y los bonos se utilizan a menudo para crear nuevas clases de valores denominados derivados, y ahí es donde entra la variedad. Un valor derivado es un contrato financiero cuyo valor se deriva de uno o más activos subyacentes o índices: una acción, un bono, una mercancía, una moneda extranjera, un índice, una tasa de interés, o incluso otro valor derivado, al igual que los futuros y opciones que son tipos básicos de derivados.

Los contratos derivados se pueden comprender mejor sabiendo que:

1. Los activos reales incluyen terrenos, edificios, máquinas y productos básicos, mientras que los activos incluyen acciones, bonos y divisas, pero tanto los activos reales como financieros deben tener valores tangibles.
2. Las variables nocionales incluyen tasas de interés, tasas de inflación e índices de seguridad que existen como nociones más que como activos tangibles.

La teoría moderna de carteras anima a los inversores a construir una cartera de arriba hacia abajo. Esto implica tres pasos:

1. Hacer una asignación de activos, lo que significa decidir cómo distribuir su inversión entre amplias clases de activos, como efectivo, bonos, acciones y derivados.
2. Hacer una selección de valores, lo que significa decidir qué valores mantener dentro de cada clase de activo.

3. Revisar periódicamente estos temas, reequilibrar y cubrir la cartera con derivados según corresponda. La gestión de riesgo de cartera es fundamental para las empresas de inversión como los fondos de cobertura y los fondos mutuos. Estos intermediarios financieros reciben dinero del público, lo invierten en varios valores financieros, y traspasan las ganancias y pérdidas a los inversores después de deducir gastos y honorarios.

1.2- JUSTIFICACIÓN

La bolsa de valores de Nueva York (NYSE) no ha parado de crecer, frente a la globalización, la liberación de las fronteras comerciales, la era de la tecnología, el crecimiento de la economía mundial y la comunicación inmediata. La bolsa está acogiendo actualmente, inversionistas de diversas partes del mundo y con ello, ha impulsado el crecimiento económico de los Estados Unidos y ha permitido que sus participantes logren recopilar información e invertir en sus mercados desde cualquier parte del mundo, mediante sistemas de información públicos como Yahoo Finance y Trading 212. En estas plataformas se pueden obtener los precios actuales e históricos de cierre de diversos instrumentos financieros (acciones, bonos, etc.) creando así una bolsa de valores cada vez más cotizable (bursátil) y accesible, siendo un factor determinante para el éxito en una inversión dentro del mercado de acciones.

Los inversionistas de acciones de empresas del mercado pueden tener corredores o agentes de bolsa que orientan a sus clientes para tomar decisiones sobre la mejor elección para la inversión en activos financieros acorde a un historial de precios al momento de realizar transacciones en el mercado.

Los agentes poseen herramientas o plataformas tecnológicas para la toma de decisión en inversión de carteras o portafolios de activos financieros, pero dichas plataformas tienen como fundamento el modelo matemático establecido por Harry Markowitz en 1952 y que con el tiempo se han considerado otros factores mejorando este modelo con las ideas de Sharpe.

La importancia de esta investigación radica en que el modelo matemático de programación no lineal cuadrático paramétrico de Harry Markowitz es el fundamento de los actuales algoritmos de las plataformas utilizadas para la toma de decisión de selección de carteras, por lo cual su aplicación podría tener un impacto significativo en la toma de decisiones de selección de activos financieros. Por lo anterior, se plantean las siguientes interrogantes: ¿tendrá alguna efectividad el modelo de Markowitz aplicado en una inversión actual?, ¿es necesario el análisis de datos históricos que ayuden a identificar los mejores activos al momento de una inversión en el Índice de Industriales Dow Jones?, ¿será útil el modelo matemático para desafiar (mediante el análisis) las constantes variaciones de precio en el mercado de las diversas acciones que posee el índice?, ¿serán las plataformas de trading como Trading 212 herramientas certeras, oportunas y eficaces para realizar desde cualquier parte del mundo negociaciones de acciones del Índice de Industriales Dow Jones?, ¿proveerá la matemática una decisión que a largo plazo sea factible, eficiente u óptima al inversor mediante el modelo?, el modelo matemático diseñado por Markowitz y Sharpe, para que a partir de un conjunto de acciones de alta bursatilidad se diversifiquen los activos en un pequeño grupo, cartera o portafolio ¿le garantizará al inversor aumentar su rendimiento y disminuir el riesgo?, ¿se cumplirá el axioma de las inversiones que dice: “a mayor riesgo mayor beneficio”?

1.3- ALCANCE Y LÍMITES

- **ALCANCE**

Mediante este trabajo se espera contribuir a la toma de decisiones para la selección de carteras de activos altamente cotizables (de alta bursatilidad) en el mercado de valores, ejemplificando un asesoramiento de forma directa en las transacciones de una persona que desea invertir un capital determinado en activos del mercado estadounidense específicamente del índice de industriales DOW JONES de la bolsa de valores de Nueva York (NYSE), con el uso del modelo matemático de Markowitz dentro de plataformas de trading como Trading 212. Además, se recopilan datos históricos mediante la plataforma de Yahoo Finance, la cual muestra la evolución de los mercados en el tiempo y es importante mencionar que no es la única existente. Como Yahoo Finance existen otros sitios webs que muestran el avance o evolución de los mercados como: Bloomberg, Morningstar, Bolsamanía, Infobolsa, Investing, entre muchas otras. En lo que respecta a esta investigación se utilizará Yahoo Finance para conocer los precios de cierre de las empresas que pertenecen al Índice Dow Jones, ya que dicho sitio web, publica la información necesaria para los efectos de esta investigación y lo más importante es que se trata de una plataforma amigable que permite la facilidad de descargar la información y obtenerla mediante documentos o libros de Excel, por los muchos datos que se necesitan.

Después de conocer los precios de cierre se espera poder aplicar el modelo de programación cuadrática paramétrica de Harry Markowitz, James Tobin y William Sharpe; solucionándolo mediante técnicas teóricas (método matricial) y el programa Solver de Excel, para analizar los datos y dar solución al problema de programación matemática.

Finalmente, se verifica la eficiencia de la teoría de Markowitz y Sharpe en la actual selección de carteras o portafolios de activos, que se plasmará sobre herramientas tecnológicas, para darle solución rápida y precisa al problema.

- **LÍMITES**

Esta investigación se verá limitada primeramente por las herramientas de análisis matemático con las cuales se cuenta para desarrollar modelos complejos, de igual manera, al momento de investigar los diversos parámetros necesarios para la creación del modelo de Markowitz como los rendimientos históricos anuales de los activos seleccionados. Además, otra de las limitantes es la resolución teórica del modelo, para la selección apropiada de los activos que garanticen una matriz de varianza – covarianza positiva, mediante una matriz de correlación con elementos negativos que busque la minimización del riesgo en la inversión, luego, comprender la aplicación de las condiciones de KKT, los multiplicadores de Lagrange y el método simplex para la solución teórica del problema cuadrático paramétrico que sustenta la teoría de Markowitz al tener un conjunto considerable de variables de decisión o activos que complican el modelo y con ello, la búsqueda de su solución.

Por último, se incluye la limitante de conocer el campo de las finanzas, la forma de trabajo de la bolsa de valores de Nueva York (NYSE) y los factores que intervienen para la toma de decisiones en la selección de cartera.

1.4- HIPÓTESIS

Al aplicar la teoría de Markowitz y Sharpe a los mejores títulos valores (activos) del índice de industriales Dow Jones de la bolsa de valores de Nueva York (NYSE), se determinará la mejor combinación de activos en los cuales se debe invertir, para obtener un mínimo riesgo con una rentabilidad adecuada, dados los datos históricos recopilados de las treinta industrias que cotizan en dicho índice.

La toma de decisiones en selección de cartera o portafolio de activos se realizará, luego de construir la frontera eficiente de portafolios o carteras de activos más conveniente para invertir. Seguidamente, se incluye un activo libre de riesgo al modelo, representado por el tesoro de los Estados Unidos, para crear la línea de mercado de capitales y deducir el portafolio o cartera óptima en el punto de tangencia entre ambas líneas.

Por otro lado, empleando conceptos matemáticos como las condiciones de Karush Kunt Tucker, los multiplicadores de Lagrange y el método simplex, junto con paquetes de computadora como SOLVER de EXCEL; se podrá solucionar el modelo de programación cuadrática diseñado por Harry Markowitz y con ello, realizar la toma de decisiones en inversión de activos, a través de aplicaciones como Trading 212.

Finalmente, se puede verificar con el paso del tiempo y bajo ciertas condiciones, que la Teoría de Markowitz sigue siendo una posible solución como fundamento de los actuales mecanismos de selección de carteras.

De forma general, lo que se espera es verificar la efectividad actual del modelo como la base de las nuevas formas de toma de decisión en selección de carteras, luego de recopilar la información histórica, aplicar el modelo de Harry Markowitz y Sharpe, y utilizar los resultados de este modelo en la plataforma Trading 212.

1.5- OBJETIVOS

1.5.1- GENERALES:

- Evaluar la eficiencia que tiene el modelo de Harry Markowitz en la actualidad, al ser aplicada su solución en la compra y venta de activos financieros; ante un tecnológico mercado en donde las fórmulas y los modelos matemáticos teóricos están siendo dejados de segundo plano, a pesar de que son el origen o fundamento de las soluciones a los problemas actuales en la toma de decisiones de inversión en carteras de acciones de un mercado bursátil.

1.5.2- ESPECÍFICOS:

- Desarrollar un modelo de optimización basado en la teoría de Markowitz y Sharpe, que permita crear un balance adecuado entre la rentabilidad y el riesgo en la toma de decisiones en inversiones de acciones del índice de industriales Dow Jones de la bolsa de valores de Nueva York, dentro de plataformas de trading como Trading 212.
- Establecer y seleccionar una diversidad de acciones que son convenientes para invertir en un tiempo o periodo determinado en el ÍNDICE DOW JONES de la Bolsa de Valores de Nueva York.
- Recopilar datos históricos diarios (Precios de cierre diarios) en la plataforma Yahoo Finance del periodo del 2 de enero de 2015 al 17 de junio de 2019.
- Determinar la línea de la frontera eficiente de portafolio de acciones, mediante el modelo matemático de programación no lineal cuadrático paramétrico dado por la teoría de Markowitz.

- Determinar la recta de Mercado de Capitales, al combinar los activos seleccionados con un activo libre en riesgo.
- Identificar el portafolio óptimo en el punto de tangencia entre la recta de mercado de capitales y la curva de la frontera eficiente.

1.6- VARIABLES

Este trabajo de investigación se caracteriza por plantear dos variables bien definidas para formar la frontera eficiente y la línea o recta de mercado de capitales de los activos altamente cotizables (de alta bursatilidad) considerados según datos históricos, estas variables son: *una variable dependiente* caracterizada por el rendimiento mínimo aceptable esperado de cada cartera que se encuentre en la frontera eficiente, la cual depende del valor dado por el interesado (agente de bolsa o inversionista) al momento de la transacción; y una *variable independiente*, la cual está representada por la varianza o riesgo esperado de dicha cartera a invertir que es variable en el tiempo por los constantes cambios del mercado.

1.7- TIPO DE ESTUDIO

Este estudio realizado con activos del Índice de Industriales DOW JONES, a través de plataformas de trading como Trading 212 es de tipo descriptivo, ya que busca conocer, comprobar, identificar, señalar y describir el modelo matemático de programación no lineal cuadrático paramétrico, diseñado por Markowitz y su aplicación en el mercado de valores de Nueva York.

Este modelo, permite el asesoramiento al momento de una inversión o bien sirve como herramienta de un agente de bolsa para la toma de decisiones para invertir en un conjunto de activos que busca minimizar el nivel de riesgo a una tasa de rendimiento deseada, mediante la diversificación.

Adicionalmente, esta investigación es de tipo cualitativa-cuantitativa, ya que se basa en la naturaleza numérica de la información que se recolecta según los deseos del inversionista de activos o bien el llamado **Risk Tolerance** (grado de variabilidad que un inversor está dispuesto a resistir en sus planes financieros); lo cual contribuye a tomar la mejor decisión en la selección de carteras de activos, apoyada con el análisis de tipo financiero, estadístico, matemático y de optimización.

En esta teoría, vale la pena destacar que la sustentación matemática inicial es de tipo estadístico para luego ir a sustentaciones de tipo probabilísticas y emplear técnicas estocásticas (procesos dominados por el azar, en este caso en la toma de decisiones al azar de un conjunto de activos que cumplen con ciertas condiciones probabilísticas y estadísticas).

Posteriormente, se controla la volatilidad siendo cuantificador de riesgo, en particular con las acciones; dentro del modelo de media – varianza de Harry Markowitz y Sharpe. También, se busca reducir el riesgo o varianza y por lo tanto, en toda cartera debe haber algún componente de derivativos (Acuerdo financiero que indica un valor a través del valor de un activo subyacente o bien no tiene un valor propio sino que depende de otro activo vinculado como ejemplo: futuros, opciones y FDC).

El último paso, implica tomar decisiones finales mediante la investigación de operaciones y en particular el uso de técnicas simples o de tipo polinomial.

1.8- SUJETOS

Como analistas o agentes de investigación de operaciones, buscando establecer la toma de decisiones óptima en selección de carteras de activos del Índice de Industriales Dow Jones mediante la teoría de Markowitz, el estudio está dirigido a aquellos individuos considerados como persona natural, jurídica, empresa privada, institución bancaria, sociedad anónima, institución estatal u otra; que desee invertir en el mencionado índice desde diversas partes del mundo o más específicamente desde Panamá, a través de plataformas de negociación como Trading 212. Estos sujetos son aquellos que buscan invertir con un determinado beneficio a largo plazo, cotizando en el mercado con el menor riesgo posible y una rentabilidad adecuada.

Adicionalmente, se pude destacar que existen sitios de internet donde se puede observar la evolución del mercado e incluso los comportamientos de las carteras en las cuales se invierte, para experimentar con las teorías (en el caso de esta investigación experimentar la teoría de Markowitz para la toma de decisiones de inversión en carteras de acciones), contando con algún criterio para escoger los instrumentos en los cuales se invertirá. Por otra parte, hay que considerar al invertir si se necesita capital o bien rendimiento.

1.9- PROCEDIMIENTO

Esta investigación que se caracteriza por ser de tipo **cuantitativa – cualitativa** y un estudio **descriptivo,** en donde se interpretan determinadas situaciones, será realizada en cuatro fases:

FASE 1:

Analizar y ejemplificar el modelo de Markowitz, su resolución matemática como un problema de programación cuadrático paramétrico y emplear algunas herramientas tecnológicas como Solver de Excel que permitan resolver el problema de forma rápida, eficiente y conveniente.

FASE 2:

Realizar una investigación práctica mediante la plataforma Yahoo Finance, conociendo su funcionamiento y esclareciendo conceptos financieros necesarios para la investigación. Además, se incluye la realización de entrevistas a personas expertas de la bolsa de valores de Panamá o bien especialistas que nos apoyen a la recolección de información necesaria para el estudio.

FASE 3:

Aplicar las herramientas matemáticas (Programación Cuadrática) y tecnológicas (Solver de Excel) que permitan resolver el problema planteado en la fase 2, determinando la frontera de carteras eficientes y luego la línea de mercado de capitales, cuyo punto de tangencia resultaría ser la cartera con el mejor balance Riesgo – Rendimiento, en la cual se le recomienda invertir a un agente de bolsa o inversionista, asesorándolo en la toma la decisiones.

FASE 4:

Utilizar la aplicación de Traiding 212 para que mediante una cuenta de práctica o simulada se realice una inversión ficticia determinada y finalmente, probar la efectividad del modelo matemático planteado.

1.10- INSTRUMENTOS

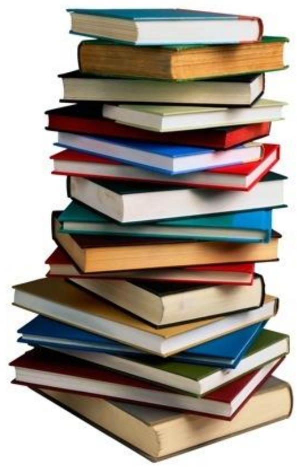
Para la recolección de datos específicos en la realización de este trabajo de investigación utilizamos diferentes recursos como:

- Entrevistas a personas especialistas en el tema.
- Investigaciones anteriormente realizadas, bajo el mismo enfoque de este estudio.
- Videos publicados en YouTube, sirviendo de apoyo para la comprensión de conceptos y procesos.
- El modelo planteado por Harry Markowitz en su teoría, que permite resolver el problema de estudio.
- La programación cuadrática aplicada al modelo de Markowitz.
- El método de las condiciones de Karush Kunt Tucker y el método simplex para solucionar el problema cuadrático, mediante Wolfe.
- Herramienta SOLVER DE EXCEL, para la recopilación de datos y rápida resolución del problema de programación No lineal.
- Herramienta TRADING 212, que puede ser utilizada por cualquier persona para hacer inversiones en mercados de valores desde Panamá o diversas partes del mundo, mediante un dispositivo móvil u ordenador.

1.11- CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

#	ACTIVIDAD	DURACIÓN EN MESES																																												
		AÑO 2016									AÑO 2017												AÑO 2018												AÑO 2019												AÑO 2020	
	INICIO	ABR	MAY	JUN	JUL	AGST	SEPT	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGST	SEPT	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGST	SEPT	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGST	SEPT	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB
1	Selección de tema																																															
2	Revisión de Bibliografía																																															
3	Redacción de Anteproyecto de tesis																																															
4	Aprobación del Anteproyecto de tesis por la comisión encargada																																															
	DESARROLLO																																															
5	Revisión de Bibliografía																																															
6	Diseño y confección de Marco Metodológico																																															
7	Solucionar problemas de programacion para el Problema de Markowitz																																															
8	Diseño y confección de Marco Teórico																																															
9	Elaboracion de instrumentos de recolección de información																																															
10	Entrevistas a especialistas e investigaciones en la Bolsa de Valores de Panama y New York																																															
11	Busqueda del programa de trading, trading 212																																															
12	Seleccionar acciones de la bolsa de Nueva York																																															
13	Prueba de práctica en excel del modelo de selección de carteras																																															
14	Recopilar datos desde enero de 2015 a junio de 2019 de las acciones del indice Dow Jones																																															
15	Formular el modelo matematico según la teoría de Markowit y Sharpe, mejorado por el metodo de Konno y Yamazaki para selección de carteras y el uso del excel																																															
16	Deducir el portafolio óptimo, mediante la solución al modelo planteado																																															
17	Aplicar la solucion descrita, invirtiendo en la plataforma trading 212																																															
18	Recopilación de resultados obtenidos en la plataforma trading 212																																															
19	Presentar avances del trabajo de tesis																																															
20	Confección del Marco Operativo (Resultados obtenidos)																																															
21	Confección de conclusiones, recomendaciones anexos																																															
	CIERRE																																															
22	Exposición de un resumen de los avances de la investigación al grupo de Maestría en Investigacion de Operaciones y en la semana de la Matemática																																															
23	Revisión de la redacción y corrección del trabajo en general																																															
24	Revisión del trabajo borrador final																																															
25	Transcripción y entrega del trabajo final para presentación																																															
26	Exposición y defensa ante los jurados calificadores del trabajo final																																															
27	Algunas correcciones adicionales a la investigación																																															



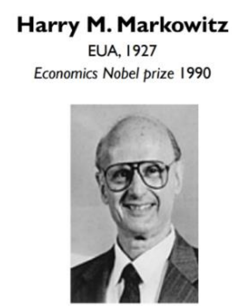
CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

2.1- DEFINICIÓN DE INVERSIÓN

Al realizar una toma de decisiones dentro de un mercado financiero, todo gira entorno a una "INVERSIÓN", ya que es la primera acción que se efectúa dentro del mercado, por lo cual es necesario conocer su definición.

Etimológicamente la palabra inversión proviene del latín "invertere", formada por el prefijo in- que significa hacia dentro (incorporar, inculcar o inflar) y el verbo "vertere" que significa versus (verter, girar, dar vueltas). Por lo tanto, INVERSIÓN es la acción donde se utilizan ciertos bienes con el objetivo de obtener ingresos o rentas a medida que pasa el tiempo o utilizar recursos para lograr un beneficio, ya sea económico, político, social, una satisfacción personal, etc. En el sentido económico una inversión es una colocación de capital para adquirir una ganancia futura, al colocar el capital debería cambiar un beneficio inmediato por uno futuro, el mismo que casi siempre es improbable.[29]

2.2- HARRY MARKOWITZ Y LA EVOLUCIÓN DE SU TEORÍA



Harry Markowitz, es considerado como el padre de la Teoría Moderna de Portafolio, fue galardonado con el premio Nobel de Economía en 1990, por su aporte hecho sobre la selección de cartera en 1950. Realizó estudios de cómo los inversionistas concilian el riesgo y el rendimiento dentro de inversiones riesgosas. Publica en 1952 su artículo titulado: *"Portfolio Selection" (Selección de Cartera o Portafolio) publicado en Journal of Finance,* en el cual detalla un modelo matemático que muestra cómo los inversionistas pueden obtener el menor riesgo posible a partir de una determinada tasa de rendimiento.[26]

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167.
29…https://economipedia.com/definiciones/mercado-bursatil.html

En el libro: “A history of the theory of Investments” (M. Rubeinstein, 2006), el autor relata la historia de la evolución de las teorías de inversión y la subdivide en tres periodos: Periodo Antiguo (antes de 1950), periodo clásico (1950 – 1980) y Periodo Moderno (después de 1980). Durante el Periodo Clásico surgen las ideas de Harry Markowitz sobre la teoría del portafolio de Media – Varianza (Rendimiento – Riesgo), después de haber establecido el riesgo de aversión dado por Huggens, el mismo que concluye el periodo antiguo.[26]

En marzo de 1952 Harry Markowitz junto a Andrew Donald Roy, comparte el título de honor de Padre de la Teoría de la Cartera o del Portafolio, sin embargo, Daniel Bernoulli, antes de Roy y Markowitz, también argumenta sobre la aversión al riesgo necesaria para la diversificación.

Markowitz, escribe en su autobiografía del Premio Nobel diciendo: “Los conceptos básicos de la teoría de la cartera vinieron a mí una tarde en una biblioteca mientras leía ‘The Theory of Investments Value’ de John B. Williams. Es ahí donde se percata que Williams, no considera el punto de vista de la cartera dado por Roy y Markowitz, quienes plantearon un segundo aspecto relevante que interviene en el proceso de inversión de cartera: el riesgo.[26]

Además, Williams argumentó su posición en contra de la rebaja de las ganancias en lugar de los dividendos y cita el consejo que un granjero le daba a su hijo: “Una vaca por su leche, una gallina por sus huevos y un valor ¡demonios! por sus dividendos”.[26]

Por otra parte, Markowitz, señala que los inversionistas no les gusta la varianza del retorno de la cartera desde que están aversos al riesgo.

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167.

En el año de 1959, Markowitz detalla el desarrollo del portafolio, indicando las matemáticas de la diversificación y tomando en cuenta una vía para conciliar su criterio de Media – Varianza con la maximización de la utilidad logarítmica esperada de retorno o rendimiento y además, demuestra una útil aproximación cuadrática para la estrategia que permite al inversionista escoger portafolios o carteras basados en la media y la varianza; es aquí donde se recomienda la semi varianza como una medida de riesgo dentro de los campos, dándole importancia a sus propiedades y procedimientos computacionales de la cartera óptima.[26] Markowitz, asegura que el análisis basado en la tendencia de la semi varianza produce mejores carteras que aquellos basados en la varianza, donde se consideran retornos extremadamente altos o bajos.[26] Un análisis basado en la varianza busca eliminar análisis extremos, sin embargo, un análisis basado en la semi varianza se concentra en reducir pérdidas. En este punto, Markowitz hace referencia a la diagonal o modelo de mercado, pero no fue hasta 1963 cuando es mejorado por William Sharpe y es quien considera maximizar las rentabilidades de acuerdo con los axiomas de Savage (1954) con alternativas de medidas de riesgo como: desviación estándar, el valor esperado de pérdida, la desviación absoluta esperada, las probabilidades de pérdida y la máxima pérdida. Adicionalmente, Markowitz establece la forma en cómo resolver el problema mediante la teoría de programación dinámica.[26]

Por otra parte, James Tobin afirma que el coeficiente de correlación de los activos de la cartera seleccionados mediante la diversificación, crean un portafolio libre de riesgo, es decir, aquel en el cual los riesgos individuales de cada activo se anulen y genere una

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167.

cobertura ante el riesgo. Este activo tan particular recibe el nombre de Activo Arrow – Debreu (contingente o elemental). Dicho en otras palabras, ese activo es aquel que promete pagar una unidad monetaria si se da un cierto estado de la naturaleza y nada (en caso contrario), estableciendo una probabilidad a cada uno de esos estados y cuya suma de probabilidades sea igual a 1.

Justamente a esto se refería James Tobin (Premio Nóbel de Economía) en relación con la teoría del portafolio: "... simplemente no es bueno poner todos los huevos en la misma canasta".

En 1999, Harry Markowitz escribe su perspectiva histórica diciendo: "El juego de la inversión fue un tiempo considerado discreto en lugar de continuo, no reflejó el descubrimiento de la utilidad de las funciones y tampoco el comportamiento de un gran mercado con muchos consumidores e inversionistas jugando".

Hacia 1964 sobresale la figura de William Sharpe, quien luego de preguntarse: ¿qué pasaría si todos en la economía siguieran los mismos consejos que daba en su teoría Markowitz?, esta interrogante dirige a Sharpe a su primera publicación titulada: "Capital Asset Pricing Model" (CAPM), cuyo significado en español es: "Modelo de Valoración de Activos de Capital". [26] Este modelo indica que los valores de retorno μ_j , equivalen a la suma de los retornos sin riesgo r sumado con el producto de aversión al riesgo de todo el mercado y la covarianza de los valores de retorno con el retorno de la cartera del mercado ($\theta > 0$). Así:

$$\boldsymbol{\mu_j = r + \theta \, Cov(r_j, r_M)}$$

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167.

En la actualidad, la fórmula de Sharpe se describe así: $\boldsymbol{\beta_j = Cov\,(r_j, r_g)/\sigma^2{}_G}$

Además, Sharpe muestra que: $\boldsymbol{\beta_j = -\left[\frac{r}{\mu_g - r}\right] + \left[\frac{1}{\mu_g - r}\right]\mu_j}$ **,** donde "g" es cualquier cartera de media varianza.[26]

La ecuación de CAPM puede ser interpretada como una descripción para discontinuar un incierto flujo de caja recibido al final de un solo periodo. El modelo CAPM construido sobre el de Markowitz, Roy y Tobin (1952-1958), supone que todos los inversores escogen su portafolio o cartera de valores considerando únicamente la media de la cartera y la varianza del retorno, en el sentido de los deseos que el inversionista prefiera, tanto un retorno apropiado como una varianza retenida igual, adicional a un riesgo de aversión en el sentido que no sea del agrado del inversionista la varianza y el retorno esperado retenido igual.

El descubrimiento del CAPM es uno de los eventos más misteriosos en la historia de la teoría de inversión, a pesar de que Sharpe está sujeto a la invariabilidad dada por el crédito. Otros tres economistas más: Litner en 1965, Mossin en 1966 y Treynor en 1999; están sujetos a la variabilidad dada por la igualdad de crédito.

El libro The Treynor Capital Asset Pricing Model, dado a conocer por las investigaciones de Craig Frank en 2003 en Journal of Investment Management 1 No. 2 páginas 62, 72; provee la solución para el misterio del modelo CAPM y asegura que motivado por Markowitz y Tobin entre 1952 y 1958, todos los cuatro economistas adoptaron muy

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 – 167.

cercanamente el mismo conjunto de suposiciones sobre las preferencias de la media y la varianza, además de los perfectos y competitivos mercados, la existencia de un valor sin riesgo y las expectativas homogéneas[26]. En general, estos economistas asumen dos conclusiones claves:

1. Todos los inversionistas, sin tomar en cuenta las preferencias y riquezas, dividen su riqueza entre las mismas dos carteras: dinero efectivo y cartera del mercado.[26]
2. Versiones equivalentes al CAPM a la ecuación de valor; aseguran que Sharpe no concluyó o hizo énfasis sobre la hipótesis de que "todo inversionista mantiene la cartera del mercado", ya que él permitió que algunos valores fueran replicados por otros y con ello, se permite una matriz singular de valores de retorno. Sin embargo, en la ausencia de replicación, todos los inversionistas bajo sus propias suposiciones mantendrían en efecto, la cartera del mercado.[26]

Jack Treynor y William Sharpe descubrieron estos resultados casi al mismo tiempo, pero Treynor había publicado más temprano su escrito en Market Value Time and Risk en 1961. En resumen, el portafolio de media – varianza de Markowitz y Roy selecciona el problema con muchos valores de riesgo complementado en los valores sin riesgo de Tobin de 1958, demostrando que se requiere de una solución basada en el análisis numérico. Sin embargo, Treynor Black en 1977 presenta de forma ingeniosa cómo una combinación con la diagonal de Markowitz y Sharpe o modelo de mercado, dado por la ecuación:

$$\boldsymbol{r_j - r = \alpha_j + (\, r_M + r)\beta_j + \varepsilon_j}$$

26… Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167.

puede derivarse en una forma cerrada y en particular, su solución muestra cómo la compensación entre el valor Alpha α_j y el valor residual de la varianza: $\boldsymbol{w^2}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{V_m}\ (\boldsymbol{\varepsilon_j})$ afecta a la asignación óptima de la cartera de un inversionista.[26]

Con el pasar de los años, el desarrollo de las teorías de inversión ha tenido su mayor aporte en lo planteado por Harry Markowitz, cuya teoría da paso a nuevas ideas que se han ido complementando en la ejecución de inversiones pasando por las ideas de Tobin, seguido por Sharpe con el establecimiento del CAPM, y cuyos fundamentos se han mantenido como la base fundamental desde distintos puntos de vista para tomar decisiones en inversión de carteras dentro de un mercado de valores bursátil. Hoy en día se dan otras alternativas de inversión, motivadas por el surgimiento de los productos derivados y su efecto sobre el riesgo. Aun así, el CAPM y la Teoría de Markowitz todavía impactan, aunque en menor grado a la teoría de inversiones.

2.3- LA TEORÍA DE HARRY MARKOWITZ

Uno de los modelos de evaluación y selección de carteras de activos es el desarrollado por Harry Markowitz en 1952, donde dada una cartera base, el modelo determina los pesos que deben tener los activos en la cartera para obtener la máxima rentabilidad con mínima varianza, en base a la condición que:

1. La distribución de probabilidad de los precios de los activos es conocida.
2. El retorno del portafolio o rentabilidad es la esperanza matemática del retorno de los activos.

5… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.
8…Hillier, F. (2010). Introducción a la Investigación de operaciones. McGraw Hill. México. Pág. 496 – 562.

3. El riesgo del portafolio es considerado como su varianza[5].

Así el modelo queda sustentado como un problema de programación No lineal cuadrático[8], de la siguiente forma:

$$Minimizar \qquad V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

Sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq L$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{Para } j=1, 2,\ldots, n.$$

Donde:

σ_{ij} La covarianza del rendimiento de cada acción de tipo i y tipo j.

x_j Las variables de decisión o número de acciones j que se van a incluir.

μ_j Es la media estimada del rendimiento de cada acción del tipo j.

σ_{jj} La varianza estimada de cada acción del tipo j, mide el riesgo de dicha acción.

$R(x)$ Esperanza o Rendimiento promedio esperado de la cartera

$V(x)$ Varianza esperada de la cartera

P_j Precio de cada acción del tipo j.

L Rendimiento mínimo aceptable esperado.

B Cantidad de dinero presupuestada para la cartera.

La varianza de un activo se calcula como[4]:

$$\sigma_i{}^2 \sigma_i{}^2(R_i),$$

$$donde: \;\; \sigma_i{}^2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{it} - E_i)^2}{n}$$

y la desviación estándar es $\sqrt{\sigma_i{}^2} = \sigma_i = \sigma(R_i)$

La covarianza entre el activo *i* y *j*

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}[(R_{it} - E(R_i))]\big[(R_{jt} - E(R_j))\big]}{n} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

Donde: $\rho_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}[(R_{it}-E(R_i))]\big[(R_{jt}-E(R_j))\big]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_{it}-E(R_j))^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(R_{jt}-E(R_j))^2}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$

es **el coeficiente de correlación** lineal entre los activos *i* y *j*.

La matriz de varianza – covarianza utilizada en el modelo es:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el valor de la rentabilidad es obtenido en base a:

$R_{it} = \frac{P_{it}-P_{it-1}+d_{it}}{P_{it-1}}$ **Donde:** P_{it}: Precio de cotización del título al final del periodo t.

P_{it-1}: Precio de cotización al comienzo del periodo.

d_{it}: Ganancias que ha obtenido el título a lo largo del periodo, como dividendos, cupones por derecho de suscripción preferente, etc.

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

Además, el rendimiento esperado del activo i, viene dado por:

$$E_i = E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{n}$$

Con $R_i = \frac{cotización\ actual - cotización\ anterior}{cotización\ anterior}$

En el modelo se muestra la función objetivo de tipo cuadrático y el conjunto de restricciones lineales.

El problema de generar carteras eficientes se transforma en un problema de programación cuadrática paramétrica, pues existe el parámetro **L** que constituye un valor que se le asigna al problema y así se obtiene una cartera, que es eficiente por ser la de varianza más pequeña para el valor de **L** (Rendimiento esperado) dado, para un conjunto de valores asignados a **L**. Por tanto, para generar el conjunto de todas las carteras eficientes bastará con que el parámetro **L** tome todos los valores correspondientes a su campo de variación, resolviendo las correspondientes programaciones cuadráticas[18].

2.4- MODELO DE MARKOWITZ Y EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El modelo de selección de carteras de Markowitz busca generar carteras eficientes,

18… Romero, C. (1974). Modelos de selección de carteras de valores bursátiles, con aplicaciones a las bolsas españolas. Revista de Económica Política. Universidad Politécnica de Madrid. España.

mediante el hallazgo de las carteras de varianzas mínimas para los diferentes valores del rendimiento medio. Resolver el modelo utilizando la programación cuadrática es un procedimiento complejo y tedioso, dado que la aplicación de los algoritmos de la misma, constituye siempre una tarea muy laboriosa.

Existen muchos métodos de solución, uno de ellos es utilizando los máximos y mínimos asociados a los multiplicadores de Lagrange.

Este método consiste en buscar los extremos (máximos y mínimos) condicionados de una función con $-n$ restricciones, lo que equivale a buscar los extremos sin restricciones de una nueva función construida como una combinación lineal de la función y las restricciones (Función Lagrangiana), donde los coeficientes de las restricciones son los multiplicadores. Crear la función Lagrangiana, se basa en sumarle a la función objetivo, cada restricción de igualdad y cada restricción de desigualdad con su respectivo multiplicador. Así:

$$L(x,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j + \lambda_1\left[L - \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j\right] + \lambda_2\left[1 - \sum_{j=1}^{n}x_j\right]$$

La nueva función es la combinación lineal, entre la función objetivo y las restricciones originales del problema, donde $\lambda_1\ y\ \lambda_2$ corresponden a los multiplicadores de Lagrange, que miden el grado de sensibilidad del valor óptimo del problema por cambios en las restricciones[6].

Luego se iguala a cero las derivadas de primer orden de la función lagrangiana, respecto a cada variable x_i y por último, respecto a los multiplicadores λ_1, λ_2, se obtiene finalmente una matriz de *n*+2 filas con *n*+2 columnas, donde *n* representa el número de filas y columnas de la matriz de varianza – covarianza, la cual contiene en su diagonal principal las varianzas entre las mismas acciones y se encuentran las covarianzas por pares en la parte inferior y superior.

Las dos últimas filas y columnas corresponden al vector de rentabilidades promedio de cada acción y al vector de la restricción que garantiza que el total de los recursos son invertidos respectivamente.

Los multiplicadores de Lagrange (λ_1, λ_2) óptimos (precios sombra) dan las sensibilidades opuestas de la función objetivo ***V*** respecto a las restricciones ***L*** de rendimiento.

Todas las derivadas parciales respecto a cada variable de la función lagrangiana se igualan a cero, ya que debe cumplirse que *los gradientes de la función respecto a cada variable sean linealmente independientes*, para que haya solución óptima; lo que se conoce como cualificación de las restricciones.

Suponiendo que las funciones *V*, $\mu_j x_j$ y x_j son continuamente diferenciables, es posible encontrar condiciones necesarias y suficientes del óptimo del problema de programación No lineal (NLP) denominadas condiciones de Karush-Kunt-Tucker (KKT).[19]

El desarrollo de las condiciones KKT parte de la Lagrangiana, considerando que si una restricción de desigualdad está activa en el óptimo (linealmente independiente), entonces puede tratarse como una de igualdad asignándole un multiplicador de Lagrange λ, y si no está activa entonces puede ignorarse con lo que su multiplicador λ debe hacerse cero. De esta forma λ o la función de la restricción de desigualdad deben ser cero[19].

6… Cruz, E. (2013). Optimización de portafolio de acciones utilizando los multiplicadores de LaGrange. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.
19… Prada, C. (2011). Optimización con Restricciones. Universidad de Valladolid. España.

La exigencia de que el gradiente de las funciones de las restricciones de igualdad y desigualdad (para las restricciones activas en el óptimo) sean linealmente independientes, a fin de que el sistema de ecuaciones tenga solución se conoce también como cualificación de las restricciones[19].

Si la función objetivo $\boldsymbol{V}$ es convexa, las restricciones de desigualdad convexas y las restricciones de igualdad son lineales, entonces la región factible es convexa y si además existe una solución de las condiciones KKT, entonces dicha solución es el óptimo global del problema NLP[19].

Así tenemos el siguiente sistema:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1} = x_1\sigma_{11} + x_2\sigma_{12} + \cdots + x_n\sigma_{1n} - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_2} = x_1\sigma_{21} + x_2\sigma_{22} + \cdots + x_n\sigma_{2n} - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2 = 0$$

...

$$\frac{\delta L}{\delta x_n} = x_1\sigma_{n1} + x_2\sigma_{n2} + \cdots + x_n\sigma_{nn} - \lambda_1\mu_n - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_1} = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n - L = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda_2} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1 = 0$$

De las dos últimas igualdades se tiene:

$$x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n = L$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

19… Prada, C. (2011). Optimización con Restricciones. Universidad de Valladolid. España.

El anterior sistema de ecuaciones puede expresarse, matricialmente, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1/2\,\mu_1 & 1/2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1/2\,\mu_2 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1/2\,\mu_n & 1/2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones en forma matricial puede escribirse, abreviadamente, así:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Donde **A** es la matriz de los coeficientes; **X** el vector columna de las incógnitas, y **B** el vector columna de los términos independientes[19].

Al modelo le interesa obtener los valores de las ponderaciones x_n , por lo que en el sistema matricial se despeja X así:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1/2\,\mu_1 & 1/2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1/2\,\mu_2 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1/2\,\mu_n & 1/2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siempre que la matriz aumentada "**A**" tenga inversa, el modelo tiene solución.

La matriz **A** tiene inversa siempre que, al ser una matriz cuadrada, cumpla con la condición necesaria y suficiente de que su determinante sea distinto de cero, ya que para calcularla es necesario dividir la matriz traspuesta de su adjunta entre su determinante. Al estar en el denominador es necesario que la determinante sea distinta de cero.

El algoritmo de solución matricial presenta el inconveniente de que, para ciertos valores del parámetro **L** algunos elementos del vector de soluciones **X** son números negativos (activos con short sales o ventas en corto), por lo que no se cumple la última restricción del modelo y en tal caso se utilizan técnicas que nos permitan evadir esos valores.

El modelo de Lagrange se caracteriza por el uso de los multiplicadores λ_1, λ_2, relacionados con la rentabilidad y el riesgo respectivamente. La interpretación de estos multiplicadores se basa en establecer en cuánto cambiará porcentualmente la rentabilidad ante un cambio porcentual del riesgo.[6]

2.5- LA TÉCNICA DE LA RECTA CRÍTICA

Entre las técnicas más utilizada para la construcción de la frontera eficiente está el método de la Recta Crítica, conocido por detectar las llamadas carteras esquina, las cuales forman la curva eficiente.

El procedimiento de esta técnica inicia con escoger la primera cartera como aquella que solo contiene el activo de máxima rentabilidad, luego se disminuye la rentabilidad deseada hasta encontrar el momento en que la cartera cambia su composición por la entrada de un nuevo activo o la salida de uno que ya estaba dentro. En el caso de entrada de un título, la cartera esquina será la anterior a la entrada. Si se trata de una salida, se considerará cartera esquina una vez haya salido el título completamente. La última cartera esquina es la de menor volatilidad o riesgo de todas las carteras de la frontera eficiente.

19… Prada, C. (2011). Optimización con Restricciones. Universidad de Valladolid. España.
6… Cruz, E. (2013). Optimización de portafolio de acciones utilizando los multiplicadores de LaGrange. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.

El Algoritmo de la Recta Crítica fue adoptado en 1959, para facilitar el cálculo de cualquier matriz de covarianzas cuando es extenso con base en el Algoritmo SIMPLEX creado en 1947 y atribuido a George Bernard Dantzing (Estados Unidos) y Leonid Vitalievich Kantorovich (Rusia). Con este algoritmo se resuelven problemas de $\boldsymbol{m}$ restricciones y $\boldsymbol{n}$ variables, en donde las restricciones pueden ser de *mayor o igual que*, *menor o igual que*, e *igual* y m con respecto a n puede ser *menor que, igual que* o *mayor que*. El número de soluciones básicas factibles es menor o igual a m o n, respectivamente. Las ecuaciones de la Línea Crítica dependen de si las variables son de entrada o de salida.[20]

Según el Dr. José B. Sáez Madrid, el Dr. Francesc Ortí Celma y el Dr. Jesús López Zaballos, una cartera esquina es aquella cartera que cambia cualitativamente la composición de la cartera, ya sea porque entra a formar parte de la cartera un activo que antes no estaba, o bien porque desaparece de la cartera un activo que antes sí estaba.

En un problema de minimización las condiciones KKT son condiciones necesarias y suficientes si y solo si la matriz de varianza y covarianza es definida positiva, lo que equivale a que los auto valores de dicha matriz sean todos positivos de acuerdo con el teorema. De esta manera, los resultados del sistema matricial antes descrito son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Proporción\ del\ activo\ 1 \\ Proporción\ del\ activo\ 2 \\ \vdots \\ Proporción\ del\ activo\ n \\ Valor\ del\ multiplicador\ 1 \\ Valor\ del\ multiplicador\ 2 \end{pmatrix}$$

20… Melo, A. (2015). Conformación de portafolios óptimos de inversión a través de métodos de estimación robusta, un estudio comparativo. Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia.

Una herramienta útil para el cálculo de la frontera eficiente de carteras de activos es *Solver de Microsoft Excel*, el cual permite plantear el problema de optimización, cuya celda objetivo es la que se desea minimizar o maximizar. En el caso de esta investigación, se minimiza la volatilidad o riesgo de la cartera, buscando el valor mínimo sujeto a las restricciones que se han ordenado previamente.

En el modelo de Markowitz las restricciones establecen que la suma de ponderaciones sea igual a "1" y que éstas sean positivas o nulas.

Para que Solver pueda encontrar el mínimo, es necesario cambiar el valor de algunas celdas, tratándose de las ponderaciones.[17]

Para los diversos rendimientos esperados requeridos a la cartera, se obtendrá un riesgo asociado a la misma. Aplicando este procedimiento, se continúa con la técnica de la cartera esquina, lo que permitirá construir la FRONTERA EFICIENTE para los valores mobiliarios riesgosos en análisis, y obtener un gráfico así:

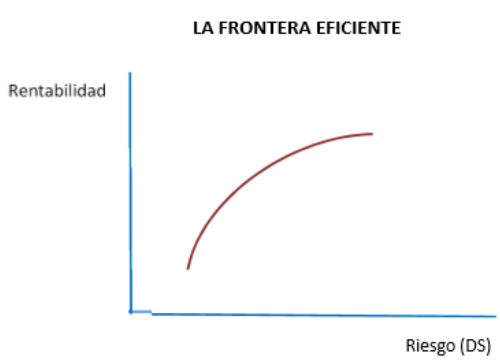


Figura 2.1

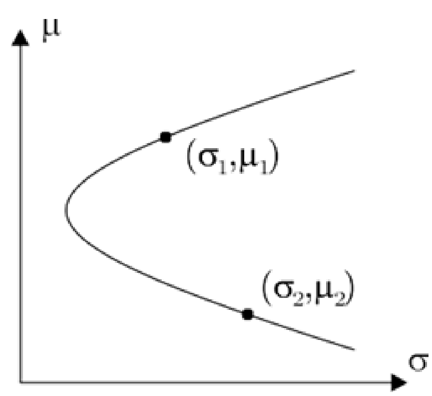


Figura 2.2

Fuente: Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering.

17… García, C. & Saéz, J. (2014). Selección de una cartera de inversión a través del Modelo de Markowitz. Universidad de Barcelona. España.

Los extremos de esta curva son tomados en base a la técnica de la cartera esquina, donde un extremo será el portafolio que contiene la mayor rentabilidad y el otro extremo es el portafolio de menor riesgo, μ representa la rentabilidad y σ representa el riesgo.

La frontera eficiente es representada como parte de una parábola y cada punto (σ, μ) representa un portafolio o cartera. Una cartera es llamada eficiente si no hay otra cartera, excepto a ella misma que la domine. El conjunto de portafolios eficientes entre todas las carteras alcanzables se denomina FRONTERA EFICIENTE.[28]

En la figura 2.2, es notoria la relación riesgo rendimiento y se observa una reducción del riesgo debido a un valor dominante.

2.6- LA RECTA DE MERCADO DE CAPITALES (LMC)

Encontrar la frontera de carteras eficiente determina los mejores títulos valores a los cuales pueda invertir un accionista, pero determinar el portafolio óptimo requiere de la inclusión de un activo libre de riesgo al modelo y formar la llamada Línea de Mercado de Capitales, de William Sharpe y James Tobin.

La recta de mínima varianza está compuesta por todas las carteras cuyos pesos son dados por una función lineal certera del retorno esperado μ sobre el portafolio.

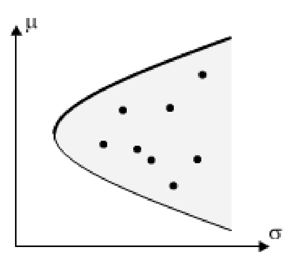


Figura 2.3

Fuente: Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering.

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 114 - 135

En la figura 2.3 se puede observar que, una vez comprendida la forma de la recta de mínima varianza, se puede distinguir fácilmente la frontera eficiente y de igual forma si se tratase de n- valores. La frontera eficiente está formada por todas las carteras sobre la línea de mínima varianza cuyo retorno esperado es mayor o igual que el retorno esperado sobre el portafolio o cartera de mínima varianza.[28]

Todos los activos que componen un portafolio son riesgosos. En el modelo LMC de Sharpe y Tobin (1964) el portafolio está conformado por las diferentes combinaciones de rentabilidad y riesgo obtenidas con la combinación de activos riesgosos y un activo que proporciona rentabilidad libre de riesgo R_f, suponiendo que el inversionista puede prestar o pedir prestado a una tasa libre de riesgo r_f, siendo la tasa de la letra del tesoro.

La Teoría de la Cartera o Portafolio de 1952 fue ampliada por Sharpe en 1964 con la publicación del artículo *"Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk" en "The Journal of Finance".*

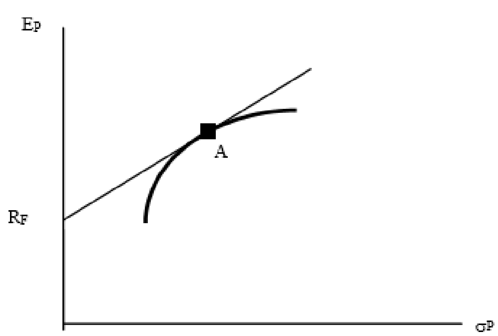


Figura 2.4

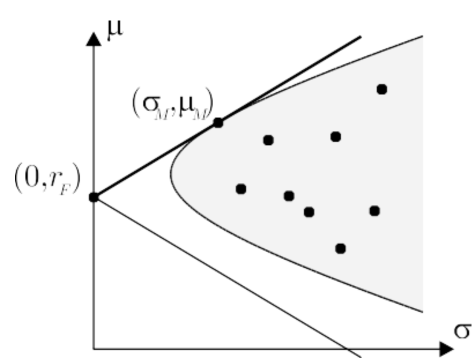


Figura 2.5

Fuente: Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering.

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 114 - 135

El activo libre de riesgo Rf es un valor emitido por el gobierno de cada país, cuyo vencimiento coincide con la duración del período de tendencia del inversionista, con una rentabilidad segura, que suele ser la letra del tesoro del estado.

La **figura 2.4** muestra la línea de mercado de capitales y cuyo punto de tangencia con la frontera eficiente de Markowitz, representa el portafolio óptimo en el cual se debería invertir. Por otro lado, la **figura 2.5**, indica que se puede construir cualquier cartera entre las dos mitades de líneas mostradas. La frontera eficiente de este nuevo conjunto de carteras, el cual puede contener el valor libre de riesgo, es la línea recta superior tangente a la curva de Markowitz (Frontera eficiente) y pasa por el punto de coordenada (0, r_f). Acorde a las suposiciones del CAPM (Capital Asset Pricing Model – Modelo de precios de activos de Capital), todo inversionista racional seleccionará su cartera o portafolio sobre la mitad de la recta, llamada Línea o Recta de Mercado de Capitales.[28]

El punto de tangencia con coordenadas (σ_M, μ_M) juega un rol importante, ya que todo portafolio sobre la línea o recta de mercado de capitales puede ser construido desde un activo libre de riesgo junto a la cartera con determinada desviación estándar y retorno esperado.

Según el Teorema de Separación planteado por Tobin (1958), el inversionista puede tomar dos decisiones: primero, escoger un portafolio conformado únicamente por activos riesgosos que independientemente de la aversión al riesgo de los inversionistas, será el mismo para todos y segundo, escoger el portafolio ompleto que para todos los inversionistas se ubica en el *punto de tangencia o intersección* entre la curva de la frontera

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 114 - 135 eficiente y la recta de mercado de capitales LMC, llamada por Sharpe (1964) Cartera de Mercado (A).

Se analiza cómo será el comportamiento del riesgo y el rendimiento esperado de la cartera combinada, tomando en cuenta que:[4]

Riesgo de la cartera combinada, $\boldsymbol{V_C = (1 - y_p)^2 V_L + (y_p)^2 V_p + 2\, y_L y_p \sigma_{LP}}$

Como el Rendimiento del activo libre de riesgo es constante, su desviación estándar y varianza son nulos, por lo que: $V_C = (y_p)^2 V_p \implies \sigma_C = y_p \sigma_p \Rightarrow y_p = \frac{\sigma_C}{\sigma_P}$

Rendimiento esperado de la cartera combinada,

$$E_C = (1 - y_p)R_L + L y_p \Rightarrow E_C = \left(1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_P}\right)R_L + L\frac{\sigma_C}{\sigma_P}$$

Luego: $E_C = R_L + \left(-\frac{\sigma_C}{\sigma_P}\right)R_L + L\frac{\sigma_C}{\sigma_P} \Rightarrow E_C = (L - R_L)\frac{\sigma_C}{\sigma_P} + R_L$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E_C = \left(\frac{L - R_L}{\sigma_P}\right)\sigma_C + R_L}$$

El rendimiento esperado de la cartera combinada es una función lineal del riesgo (desvío) de la cartera combinada.[4]

Así la ecuación de la línea o recta de mercado de capitales es:

$$\boldsymbol{E_C = \left(\frac{L - R_L}{\sigma_P}\right)\sigma_C + R_L}$$

Cuya pendiente es:

$$\boldsymbol{m = \frac{L - R_L}{\sigma_P}}$$

Ordenada al origen es: $\boldsymbol{b = R_L}$

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

Donde:

V_C: Es el riesgo de la cartera combinada con el activo libre de riesgo

V_L: Varianza del activo libre de riesgo

R_L: Rendimiento del activo libre de riesgo

$E_j = \mu_j$: Rendimiento esperado del Activo “j”.

V_p: Varianza del portafolio

y_p: Proporción a invertir en Cartera Eficiente formada por activos aleatorios.

y_L: Proporción a invertir en el Activo Libre de Riesgo

σ_{LP}: Covarianza entre el Activo Libre de Riesgo y la Cartera Eficiente.

E_C: Es el rendimiento de la cartera combinada con el activo libre de riesgo

L: Rendimiento esperado exigido a la cartera o portafolio formado por activos aleatorios.

σ_C: Desviación típica del rendimiento de la cartera combinada formada por una cartera eficiente y el activo libre de riesgo.

${\sigma_p}^2 = V(x)$: Varianza del portafolio

σ_p: Desviación típica del rendimiento de la cartera formada por activos aleatorios

x_j: Proporción a invertir en el Activo “j”.

La pendiente de la función de Rendimiento Esperado de la cartera combinada no posee un solo valor, ya que el mismo depende de la cartera eficiente con la cual se combine el activo libre de riesgo. De esta manera, la pendiente depende indirectamente de las proporciones a invertir en los activos aleatorios que conforman una cartera eficiente[4], por lo que se tiene:

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j E_j - \boldsymbol{R_L}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j V(x) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i>j}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}}}$$

El Criterio de la Media Varianza, asegura que un inversor racional preferirá, para un determinado riesgo, obtener el máximo rendimiento esperado. Por lo tanto, se debe determinar la composición de la cartera eficiente para $-n$ valores mobiliarios riesgosos que maximizan la pendiente[4].

Por lo que se tiene el siguiente problema:

$$\boldsymbol{Max} \quad \left[\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j (E_j - \boldsymbol{R_L})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j V(x) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i>j}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}}} \right]$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \qquad para\ j = 1, 2, \dots, n$$

La LMC es la recta de mayor pendiente tangente a la Curva de Mínima Varianza o "prima por el riesgo esperada por unidad de desviación estándar" (Dubova, 2005).

Se traza con origen en la tasa libre de riesgo, caso en el que se invertiría la totalidad del presupuesto y el riesgo sería cero, hasta la región factible de los portafolios de mercado, llamados así según el Criterio de Mínima Varianza que establece que todos los inversores racionales deben mantener sus activos de riesgo en esa proporción (Sharpe, 1964)[20].

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.
20… Melo, A. (2015). Conformación de portafolios óptimos de inversión a través de métodos de estimación robusta, un estudio comparativo. Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia

Es importante recordar en este punto que en la actualidad también se incluye al proceso de inversión el manejo de riesgo vía derivativos, lo cual es relativamente reciente, tal vez desde la década de los 80 o un poco antes.

En el problema de maximización se procede de forma igual que en el modelo de Markowitz, determinando el Lagrangiano e igualando a cero sus primeras derivadas, en este caso las derivadas de la función m:

$$\frac{\delta m}{\delta x_1} = 0 \quad , \frac{\delta m}{\delta x_2} = 0 \quad , \ldots \quad , \frac{\delta m}{\delta x_n} = 0$$

Algebraicamente se opera sobre el sistema de ecuaciones obtenido con las primeras derivadas y se generan las siguientes transformaciones:

Se considera[4]

$$Z_j = \frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}}} \cdot x_j$$

Aplicando sumatoria

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}}} \cdot x_j \qquad implica\ que \qquad \sum_{j=1}^{n} Z_j = \frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} x_j$$

Como

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}^{\mathbf{2}}}$$

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

Así pues, se llega a que:

$$Z_j = \frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}^2} \cdot x_j \qquad \textit{implica que} \qquad x_j = \frac{Z_j}{\sum_{j=1}^{n} Z_j} \quad *$$

Mediante el método matricial se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - \boldsymbol{R_L} \\ E_2 - \boldsymbol{R_L} \\ \vdots \\ E_n - \boldsymbol{R_L} \end{pmatrix}$$

Despejando el vector Z se tiene:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_1 - \boldsymbol{R_L} \\ E_2 - \boldsymbol{R_L} \\ \vdots \\ E_n - \boldsymbol{R_L} \end{pmatrix}$$

Luego las proporciones a invertir son los valores x_j, mediante * se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1}{\sum_{j=1}^{n} Z_j} \\ \frac{Z_2}{\sum_{j=1}^{n} Z_j} \\ \vdots \\ \frac{Z_n}{\sum_{j=1}^{n} Z_j} \end{pmatrix}$$

Las proporciones quedan dadas así: [4]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{Proporción a invertir en el activo } 1 \textit{ que maximiza la pendiente} \\ \textit{Proporción a invertir en el activo } 2 \textit{ que maximiza la pendiente} \\ \vdots \\ \textit{Proporción a invertir en el activo } n \textit{ que maximiza la pendiente} \end{pmatrix}$$

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

Luego de obtener las proporciones se calcula el valor de la varianza del portafolio (V(x)), con ello su raíz cuadrada que representa el desvío estándar (σ_p). También se calcula el rendimiento esperado del portafolio (E_c).[4]

$$\sigma_p{}^2 = V(x) = (x_1 \;\; x_2 \dots \;\; x_n)\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; implica\ que \quad \sqrt{\sigma_p{}^2} = \sigma_p$$

$$E_c = (x_1 \;\; x_2 \dots \;\; x_n)\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

Con estos resultados, reemplazando se encuentra el valor de la pendiente de la recta,

$$\boldsymbol{m = \frac{L - R_L}{\sigma_P}}$$

Una vez determinada la pendiente “m” de la recta y la ordenada al origen (el rendimiento libre de riesgo) se obtiene la nueva frontera eficiente al operar con un activo libre de riesgo; es decir, la Línea o Recta del Mercado de Capitales, que es tangente a la curva de la frontera eficiente de Markowitz.

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

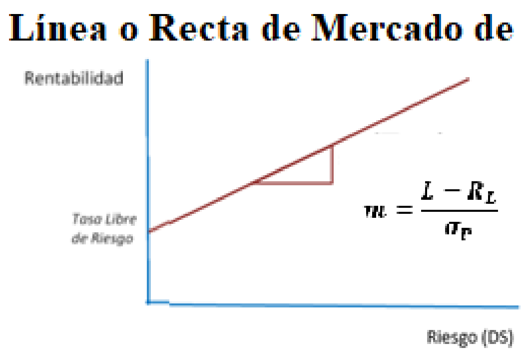


Figura 2.6

Fuente: Melo, A. (2015). Conformación de portafolios óptimos de inversión a través de métodos de estimación robusta, un estudio comparativo.

La figura 2.6 muestra la pendiente de la recta que contiene un activo libre de riesgo y es conocida como la Recta de Mercado de Capitales.

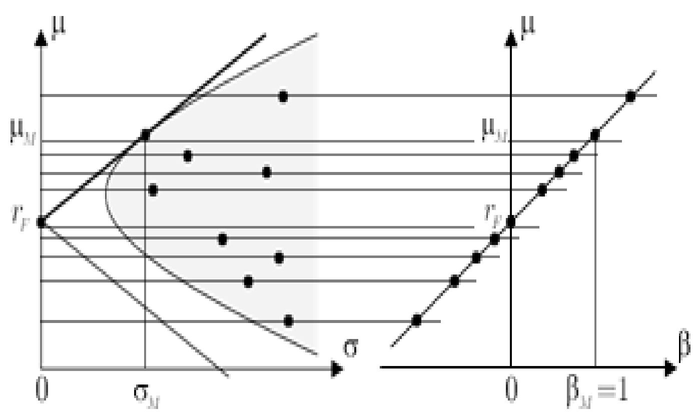


Figura 2.7

Fuente: Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering.

La figura 2.7 muestra como el retorno esperado sobre una cartera o un valor individual es una función lineal del coeficiente beta del portafolio dado por la ecuación[28]:

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

El retorno esperado trazado en contra del coeficiente beta de cualquier cartera o valor individual, formará una línea recta sobre el plano β, μ; llamada línea o recta de mercado de seguridad. La figura 2.7 indica que la línea de mercado de seguridad es marcada próxima

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 – 135.

a la línea de mercado de capitales por comparación. Un número de portafolios diferentes o valores individuales están representados por los puntos sobre ambas gráficas.[28]

2.7- LA CARTERA ÓPTIMA EN EL PUNTO DE TANGENCIA

En este punto se trata del objetivo o **la última parte del proceso de selección de cartera de acciones**, la cual especifica el portafolio en el que se debe invertir, al determinar el punto de tangencia entre la línea o recta de mercado de capitales de Sharpe y Tobin, y la frontera eficiente de Markowitz.

La cartera óptima es también conocida como la Cartera del Mercado, resulta de la igualación de la rentabilidad esperada de una cartera que está sobre la curva de la frontera eficiente y la rentabilidad esperada de una cartera que se sitúa sobre la Línea o Recta del Mercado de Capitales.[4]

Por lo anterior, se hace referencia a carteras con préstamos (Lending Portfolios) cuando una parte del presupuesto se invierte otorgando un préstamo al tipo de interés del activo sin riesgo, invirtiendo parte del capital disponible en la "Cartera de Mercado"; y también se puede referir a carteras con endeudamiento (Borrowing Portfolios) cuando se pide prestado fondos para invertir en la cartera de Mercado al mismo tipo de interés, con lo que se invierte el capital disponible más fondos recibidos a través de endeudamiento en la Cartera de Mercado.[28]

Sabiendo que: $$E_C = \left(\frac{L-R_L}{\sigma_P}\right)\sigma_C + R_L \qquad (1)$$

4… Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.
28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 – 135.

$$E_c = (x_1 \;\; x_2 \dots \;\; x_n)\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Al igualar $\boldsymbol{E_c}$ de (1) y (2), se tiene que:

$$\boldsymbol{E_c = E_c}$$

$$(x_1 \;\; x_2 \dots \;\; x_n)\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}}\right)\boldsymbol{\sigma_C} + \boldsymbol{R_L}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j E_j = \left(\frac{\boldsymbol{L - R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}}\right)\boldsymbol{\sigma_C} + \boldsymbol{R_L}$$

Gráficamente sería:

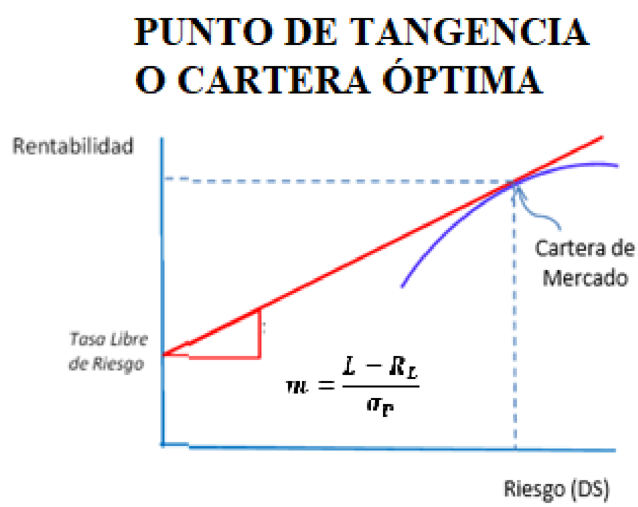


Figura 2.8

La figura 2.8 indica el punto de tangencia o cartera óptima de forma gráfica, localizado en la intersección entre la recta de mercado de capitales y la curva de la frontera de portafolios eficientes.

2.8- EL MÉTODO SIMPLEX, LAS CONDICIONES DE KARUSH KUNT TUCKER Y LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, COMO HERRAMIENTA ÚTIL EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA

Al tratarse el modelo de Markowitz como una programación cuadrática, además de la forma de solución "Matricial" antes mostrada en esta investigación, muchos otros autores hacen referencia al uso de las condiciones de Karush Kunt Tucker (KKT) como generalización de los multiplicadores de Lagrange, para resolver problemas de optimización matemática o en este caso el modelo de Markowitz. Dichas condiciones, permiten convertir el problema cuadrático a un problema de programación lineal, mediante condiciones de complementariedad y *cuya solución se encuentra en la primera fase del método simplex de las dos fases.*

Según Jaime Villamil en su investigación; "Diversificación y valor en riesgo de un portafolio de acciones", las primeras soluciones numéricas propuestas para encontrar la frontera eficiente son: el método de la línea crítica de Markowitz (1956), el de Wolfe (1959) y el de Sharpe (1963).

Philip Wolfe utilizó el método simplex para la programación cuadrática, pero tanto Markowitz como Wolfe no buscaron minimizar el riesgo, sino maximizar la rentabilidad, lo cual hacía que el problema se transformara en uno de programación lineal.

Markowitz utilizó el método de la recta crítica o cartera esquina ajustando los portafolios para verificar que cumplan las restricciones, entre uno de máximo y uno de mínimo rendimiento hasta llegar al de mínimo riesgo global. Mientras Wolfe usó el método simplex modificado para resolver el programa lineal. Ambos métodos no brindan la solución exacta y empleaban muchos cálculos cuando el número de activos era demasiado grande.

Sharpe utilizó por su parte, un método costoso por lo extenso y complicado en determinar las soluciones, si el conjunto de activos es relativamente grande.

Sin embargo, el método de Wolfe, utiliza el método del simplex modificado o de las dos fases partiendo con crear la función Lagrangiana y a estas aplicar las condiciones de KKT, mediante el siguiente teorema.

Teorema de KKT: *Suponga que* $f(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ *son funciones diferenciables que satisfacen ciertas condiciones de regularidad. Entonces,*

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Puede ser una solución óptima para el problema de programación No lineal, sólo si existen m números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *, llamados multiplicadores de Lagrange, que satisfagan las siguientes condiciones de KKT:*

1. $\boldsymbol{\frac{df}{dx_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{dg_i}{dx_j} = 0}$
2. $\boldsymbol{x_j^* \left(\frac{df}{dx_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{dg_i}{dx_j}\right) = 0}$
3. $\boldsymbol{g_i(x^*) - b_i \leq 0}$
4. $\boldsymbol{\lambda_i [g_i(x^*) - b_i] = 0}$
5. $\boldsymbol{x_j^* \geq 0}$
6. $\boldsymbol{\lambda_i \geq 0}$

Para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$ $\qquad$ $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$

8… Hillier, F. (2010). Introducción a la Investigación de operaciones. McGraw Hill. México. Pág. 496 – 562.

Aclaración: *Las funciones* $f(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$*al ser diferenciables son regulares.*

La clave de este enfoque es construir las condiciones KKT y después volver a expresarlas de una manera conveniente, de tal forma que se parezca a la programación lineal (Hillier).[8]

Para volver a expresar estas condiciones en una forma más conveniente, se mueven las constantes de las condiciones 1 y 3 al lado derecho y después se introducen variables de holgura no negativas para convertir estas desigualdades en ecuaciones, respectivamente. Luego, se forman las variables complementarias, las cuales son parejas de variables en donde sólo una de las dos puede ser diferente de cero y la suma de todas ellas forma la restricción de complementariedad.

Durante la resolución del método simplex de las dos fases se tienen descritas las variables básicas como las variables artificiales y el resto son variables no básicas, pero para ingresar una variable básica a la solución se debe considerar la siguiente regla:

Regla de entrada restringida: *"cuando se elige la variable básica entrante, se excluye de las posibilidades cualquier variable no básica cuya variable complementaria sea básica; la elección debe hacerse entre las otras variables no básicas, según el criterio normal del método simplex".*

Para la fase 1 del método, x* es la solución óptima deseada para el problema original de programación cuadrática y se verifica que se cumplan las condiciones de KKT, reemplazando la solución en dichas condiciones.[8]

8… Hillier, F. (2010). Introducción a la Investigación de operaciones. McGraw Hill. México. Pág. 496 – 562.

Se debe recordar que, para que la solución sea considerada óptima o factible en la fase 1 del método simplex, la solución x* debe ser cero o negativa.[8]

2.9- EJEMPLIFICACIÓN ELEMENTAL DE LA TEORÍA DE INVERSIÓN:

En esta sección se cita a algunos autores que han ejemplificado situaciones básicas relacionadas a la teoría de inversión.

Primeramente, en el libro titulado: Mathematics for finance: an introduction to financial engineering de Marek Capinski (2003), se plantea la siguiente situación:

Se consideran tres títulos o activos con retorno esperado, desviaciones estándar y correlaciones entre los retornos: [28]

$\mu 1 = 0.10$	$\sigma 1 = 0.28$	$\rho 12 = \rho 21 = -0.10$
$\mu 2 = 0.15$	$\sigma 2 = 0.24$	$\rho 23 = \rho 32 = 0.20$
$\mu 3 = 0.20$	$\sigma 3 = 0.25$	$\rho 31 = \rho 13 = 0.25$

Colocando los valores μi como una matriz fila m y en una matriz fila u los elementos 1, se tiene:

$m = (0.10 \quad 0.15 \quad 0.20) \quad u = (1 \quad 1 \quad 1)$

Seguidamente, calculamos los ingresos $C_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ de la matriz de covarianzas **C** y se determina la matriz inversa a C.[28] En este punto, se debe recordar que una matriz es inversible siempre que su determinante sea distinto a cero.

$$C = \begin{pmatrix} 0.0784 & -0.0067 & 0.0175 \\ -0.0067 & 0.0576 & 0.0120 \\ 0.0175 & 0.0120 & 0.0625 \end{pmatrix}$$

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 - 135

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 13.954 & 2.544 & -4.396 \\ 2.544 & 18.548 & -4.274 \\ -4.396 & -4.274 & 18.051 \end{pmatrix}$$

Según la proposición referente del portafolio de mínima varianza se obtiene la siguiente fórmula de los pesos:

$$w = \frac{uC^{-1}}{uC^{-1}u^T} \qquad (*)$$

Siempre que el denominador sea distinto de cero.

Esto se demuestra de la siguiente forma:

Se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange, suponiendo:

$$F(w, \lambda) = wCw^T - \lambda uw^T$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange. Igualando a cero la derivada parcial de F con respecto a los pesos wi, se obtiene:

$$2wC - \lambda u = 0$$

Lo que es:

$$w = \frac{\lambda}{2} uC^{-1}$$

Lo cual es una condición necesaria para un mínimo.[28]

Sustituyendo esto en la fórmula dada al momento de que se construye un portafolio o cartera con $-n$ diferentes valores se pueden escribir en término de sus pesos:

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)} \quad , i = 1, \ldots, n.,$$

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 - 135

Donde x_i es el número de acciones de tipo i en el portafolio, $S_i(0)$ es el precio inicial del valor i, y V (0) es la cantidad inicial invertida en el portafolio, esto demuestra la conveniencia de arreglar los pesos como una matriz fila $w = (w1 \quad w2 \ldots. \quad wn)$.

Al igual que para dos valores, las ponderaciones suman uno, lo cual puede ser escrito en forma matricial así: $1 = uw^T$, donde $u = (1 \quad 1 \ldots \quad 1)$ es una matriz fila con todos los valores $-n$ igual a 1, w^T es una matriz columna traspuesta de w y se aplica la usual multiplicación de matrices.

Así pues, se sustituye

$w = \frac{\lambda}{2} uC^{-1}$ en $1 = uw^T$

y se obtiene:

$$1 = \frac{\lambda}{2} uC^{-1}u^T$$

De esta forma concluye la demostración.

Sin embargo, el portafolio con la menor varianza entre los portafolios alcanzables con un retorno esperado μv tiene pesos:

$$w = \frac{uC^{-1}\begin{vmatrix} 1 & uC^{-1} & m^T \\ \mu v & mC^{-1} & m^T \end{vmatrix} + mC^{-1}\begin{vmatrix} uC^{-1} & u^T & 1 \\ mC^{-1} & u^T & \mu v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} uC^{-1} & u^T & uC^{-1}m^T \\ mC^{-1} & u^T & mC^{-1}m^T \end{vmatrix}} \qquad (**)$$

Retomando lo planteado, luego de obtener los valores de C y C^{-1} calculamos los pesos en el portafolio de mínima varianza.[28] Así:

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 - 135

$$uC^{-1} = (12.102 \quad 16.818 \quad 9.382)$$

$$uC^{-1}u^T = 38.302$$

Aplicando las condiciones anteriores, al reemplazar en (*), se obtiene:

$$w = \frac{uC^{-1}}{uC^{-1}u^T} = (0.316 \quad 0.439 \quad 0.245)$$

El retorno esperado y la desviación estándar de este portafolio son:

$$\mu v = mw^T = 0.146; \qquad \sigma v = \sqrt{wCw^T} = 0.162$$

La recta de mínima varianza puede ser calculada mediante (**), por lo que se calcula:

$$uC^{-1} = (12.102 \quad 16.818 \quad 9.382)$$

$$mC^{-1} = (0.898 \quad 2.182 \quad 2.530)$$

$$uC^{-1}u^T = 38.302 \qquad\qquad mC^{-1}m^T = 0.923$$

$$uC^{-1}m^T = mC^{-1}u^T = 5.609$$

Sustituyendo en (**), se obtienen los pesos en el portafolio o cartera con mínima varianza entre todos los portafolios con retorno esperado μv:

$$w = (1.578 - 8.614\mu v \quad 0.845 - 2.769\mu v \quad -1.422 + 11.384\mu v)$$

La desviación estándar de este portafolio es:[28]

$$\boldsymbol{\sigma v = \sqrt{wCw^T} = \sqrt{0.237 - 2.885\mu v + 9.850\mu^2 v}}$$

De esta forma, Marek ejemplifica los problemas sobre la obtención del portafolio de mínima varianza, y argumenta que es un trabajo laborioso si se realizan cálculos con muchos datos, en especial para la obtención de la matriz de covarianza; en tales casos será conveniente realizarlo computacionalmente.

28… Marek, C. (2003). Mathematics for finance : an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 - 135

Adicionalmente, se plantea un problema con una cantidad pequeña de activos, con lo cual se busca ejemplificar de forma básica el proceso de la teoría de inversión. El problema es tomado del trabajo realizado por Rodrigo Matarrita Venegas en 2002, titulado: "Selección de Carteras de Inversión, Teoría de Portafolios".

Se tienen tres activos: A, B y C ; los mismos son activos que se encuentran sujetos a consideración por parte de un inversionista. Se ha desarrollado las siguientes distribuciones de probabilidad de rendimientos esperados para tales activos, de acuerdo con la situación de la economía:

		Activo A	***Activo B***	***Activo C***
Evento	***Prob.***	***Rend.***	***Rend.***	***Ren8d.***
Auge	***10.0%***	***40%***	***10%***	***10%***
Estabilidad	***25.0%***	***25%***	***8%***	***12%***
Estancamiento	***40.0%***	***20%***	***6%***	***18%***
Recesión	***15.0%***	***-5%***	***4%***	***20%***
Crisis	***10.0%***	***-10%***	***-2%***	***25%***

CÁLCULO 1: *Calcular el valor del rendimiento esperado para cada uno de los tres activos.*[27]

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

Aplicando la fórmula vista, se tendría que:

$$E[R] = \sum_{i=1}^{n} p_i \times R_i$$

E[Ra]= (0,1 x 0,4) + (0,25 x 0,25) + (0,4 x 0,2) + (0,15 x –0,05) + (0,1 x – 0,1)

E[Ra] = 0,165 = 16,50%

Realizando los cálculos para los otros activos:

E[Rb] = 5,80%

E[Rc] = 16,74%

CÁLCULO 2: *Determinar la desviación estándar del rendimiento de cada uno de los tres activos y calcular el respectivo coeficiente de variación. ¿Cuál tiene mayor riesgo relativo?*

Aplicando la fórmula correspondiente:$\boldsymbol{Var\ [r] = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times [E(R) - Ri]^2}$

Para el activo A, se tendría que:[27]

Var [Ra] = (0,1 x (0,165-0,4)^2) + (0,25 x (0,165-0,25)^2) + (0,4 x (0,165-0.2)^2) +

(0,15 x (0,165 + 0,05)^2) + (0,1 x (0,165+0,1)^2)

VAR [Ra] = 0,00552 + 0,00181 + 0,00049 + 0,00693 + 0,00702

VAR[Ra] = σ^2 = 0,021775

DE[Ra] = σ = 0,14756 = 14,76%

CV[Ra] = σ/ E[Ra] = 0,14756 / 0,165 = 0,8943

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

En la siguiente tabla se resumen los resultados en términos de rentabilidad y riesgo:

	A	B	C
E(R)	16.50%	5.80%	16.74%
Varianza	2.18%	0.10%	0.19%
Desv. Est	**14.76%**	**3.09%**	**4.41%**
CV	0.894324519	0.53309051	0.263598

Los resultados muestran que el activo A es el más riesgoso, ya que por cada unidad de rendimiento agrega 0,89 unidades de riesgo. Mientras tanto el activo C es relativamente más seguro, debido a que por unidad de rentabilidad agrega 0,26 de riesgo. Debe observarse además que, comparando los activos por medio de la desviación estándar, la conclusión hubiese sido que el activo B es relativamente más seguro, lo que no es correcto en términos de la relación riesgo/rendimiento.[27]

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

CÁLCULO 3: *A los activos A, B y C, determinar el rendimiento de un portafolio que contenga una proporción igual a cada uno de dos activos.*

Fórmula : $E\ R{=}i{=}1Swi{\times}E(Ri)E\ R{=}i{=}1Swi{\times}E(Ri)$ Fórmula : $E\ [R] = \sum_{i=1}^{S} wi \times E(Ri)$

E[RP] = (E[Ra] + E[Rb]) x 0.5

E[RP] = (16,50% + 5,80%) x 0.5

E[RP] = 11,15%

CÁLCULO 4: *Calcular la covarianza correspondiente entre los activos A, B y C, en sus respectivas combinaciones.*

Fórmula:

$$COVA = \sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}[(R_{it} - E(R_i))]\left[(R_{jt} - E(R_j))\right]}{n} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

COVA A,B = (0,1 x 0,235 x 0,042) + (0,25 x 0,085 x 0,022) + (0,4 x 0,035 x 0,0020) + (0,15 x–0,215 x –0,018) + (0,1 x –0,265 x –0,078)

COVA A,B = 0,00413

Aplicando la fórmula respectiva para las otras combinaciones de activos posibles entre A, B y C se obtiene lo siguiente:[27]

COVA A,C = -0,005655

COVA B,C = -0,001266

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

Por lo tanto, se observa que existe una relación directa entre el rendimiento esperado del activo A y el del activo B lo cual significa que cuando el rendimiento del activo A varía su dirección se espera que el movimiento en activo B cambie en la misma dirección. Por otro lado, existe una covarianza negativa entre C y los otros activos (A y B), indicando que cuando el rendimiento del activo C aumenta, los rendimientos respectivos de A y B caen y viceversa.

Es importante tener presente que el signo de la covarianza indica la dirección de la relación entre los activos.[27]

CÁLCULO 5: *Conformar un portafolio de mínimo riesgo con los activos A y B, tal que su rendimiento esperado sea igual a un 20%, valor mínimo que se considera dentro de las inversiones para que las mismas sean líquidas en 5 años. Calcular también el riesgo del portafolio.*

Primeramente, se obtiene la ponderación del activo A y B

$$W_a = \frac{E(Rp) - E(Rb)}{E(Ra) - E(Rb)}$$

$$W_a = \frac{0.20 - 0.058}{0.165 - 0.058} = 1.3271$$

$$w_b = 1 - 1.3271 = -0.3271 = -32.71\%$$

Luego se calcula la varianza del portafolio y con la raíz cuadrada del mismo se determina la desviación estándar, o el riesgo del portafolio.

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

$$\boldsymbol{VAR\ (Rp) = w_a^2\sigma_a^2 + w_b^2\sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab}}$$

***VAR* [*R*]** = $(0.3025)^2$ (0.0218) + $(-0.3271)^2$ (0.0001) + 2(0.3925 * -0.3271 * **0.00413**) = 0.0009236623

***DESV.EST.* [$\boldsymbol{Rp}$]** = 0.030391813

CÁLCULO 6: *Determinar el coeficiente de asociación lineal para cada pareja de activos que se obtienen*

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$p_{A,B}$ = 0,00413 / (0,1476 x 0,0309) = 0,9055 =**90,55%**

El coeficiente de asociación lineal es de 0,9055, es decir, un 90,55% de la variabilidad de los rendimientos del activo **A** está asociada al comportamiento de los rendimientos del activo **B**. Lo que indica que existe un comportamiento muy similar entre los activos, están fuertemente relacionados. Realizando un cálculo similar para las otras parejas de activos se obtiene lo siguiente, con los datos marcados en color rojo de los cáculos 2 y 4, y reemplazando en la fórmula del coeficiente de asociación o correlación lineal y se tiene que:

p A,C = -93,42%

p B,C = -87,43%

El signo indica que los activos ofrecen un potencial de diversificación mayor. Por tanto, entre más cercana esté de -1 mayor es la eliminación del riesgo que se logra con la combinación de éstos activos en un portafolio.

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

CÁLCULO 7: *Conformar un portafolio con los activos A y C, hallar el punto de varianza mínima y graficar en el espacio de media - varianza la frontera de eficiencia. Realizar lo mismo para la combinación de activos B, C y A, B.*[27]

Para A y C

$$\min Wa = \frac{\sigma_c^2 - \sigma_{A,C}}{\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_{A,C}}$$

$$\min Wa = \frac{0.001921 - (-0.005655)}{0 - 021775 + 0.001921 - 2(-0.005655)} = 21.64\%$$

$$\min Wc = 1 - \min Wa = 78.36\%$$

Calculando el rendimiento y riesgo del portafolio:[27]

$E\ (R_P) = (0.7836) * (0.1674) + (0.2164) * (0.165) = 16.66\%$

$Var\ (p) = (0.2164)^2 + 0.021775 + (0.7836)^2\ (0.001921) + 2(0.7836)(0.2164)\ (0.005655) = 0.00028$

σ_P =1,68%

Realizando cálculos similares para los otros pares de activos se obtienen los siguientes datos:

Portafolio B y C: w_B =59.1% w_C = 40.9%

$E(R_p)$ = 10.27%

$Var(p)$ = 0.0044%

σ_P = 0.665%

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

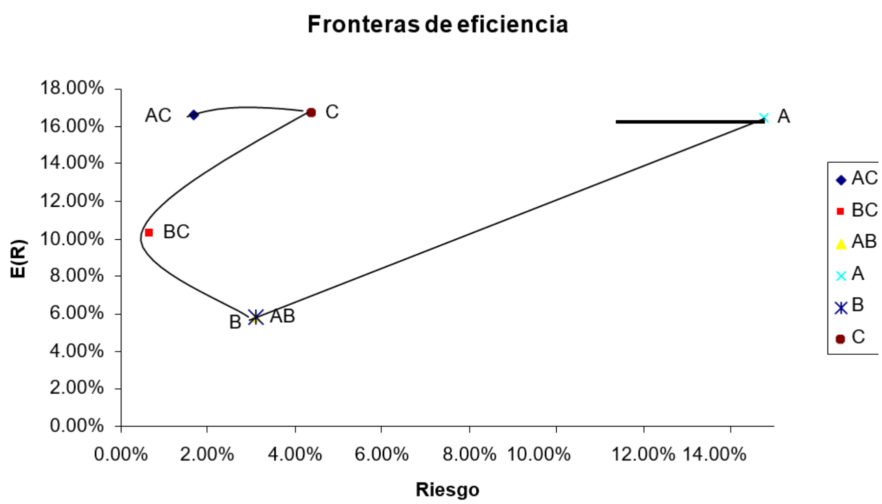
Portafolio A y B:

La proporción de mínima varianza entre los activos A y B sería la siguiente:

(Resultado obtenido al aplicar fórmula mencionada para portafolio de mínima varianza entre A y B).

wA = - 21.9%   wB = 121.9% $E(R_p) = 3.46\%$ $Var(p) = -0.21\%$

Desde el punto de vista financiero esta combinación no es posible en un mercado con ausencia de la posibilidad de realizar operaciones en corto. Este resultado responde a la alta correlación positiva entre los activos (90.55%), formando una frontera de eficiencia cercana a una línea recta, donde el punto mínimo de varianza se logra con un 100% del activo B y 0% en A. A partir de este punto el inversionista puede aumentar su rendimiento aumentando su riesgo. En este caso se alcanza lo que se denomina una solución de esquina. En la gráfica, se ubican los portafolios en los puntos de varianza mínima y la frontera de eficiencia para las combinaciones posibles de activos.



Fuente: Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión.

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

La decisión de inversión, como se verá más adelante, no depende únicamente de la ubicación del portafolio en términos de riesgo y rendimiento, sino también de los gustos y preferencias de los agentes económicos.[27]

CÁLCULO 8: *Conformar un portafolio con proporciones idénticas de cada uno de los activos comprendidos A, B, C. Calcular para dicho portafolio los riesgos absolutos y relativos para cada activo, los aportes relativos al rendimiento y los aportes marginales al riesgo por unidad de rendimiento.*

El rendimiento esperado del portafolio sería:[27]

E(Rp) = 1/3 (0.165+0.058+0.1674)=12.99%

$$Var\ (p) = \begin{pmatrix} w_a^2\sigma_a^2 & w_a w_b \sigma_{ab} & w_a w_c \sigma_{ac} \\ w_a w_b \sigma_{ab} & w_b^2\sigma_b^2 & w_b w_c \sigma_{bc} \\ w_a w_c \sigma_{ac} & w_b w_c \sigma_{bc} & w_c^2\sigma_c^2 \end{pmatrix}$$

Var(p_a)= 1/9(0.0218+0.00413-0.005655) =0.00225

Var(p_b)= 1/9(0.001+0.00413-0.001272) =0.00042

Var(p_c)= 1/9(0.0019-0.05655-0.001272) = - 0.000556

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

No obstante, el riesgo relativo por activo será:[27]

$$\beta_{a,p} = \frac{0.00225}{0.00212} = 1.06132$$

$$\beta_{b,p} = \frac{0.00042}{0.00212} = 0.19811$$

$$\beta_{c,p} = \frac{-0.000556}{0.00212} = -0.25226$$

Los aportes relativos al rendimiento son:

$$\gamma_{a,p} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) 0.165}{0.1299} = 42.34\%$$

$$\gamma_{b,p} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) 0.058}{0.1299} = 14.88\%$$

$$\gamma_{a,p} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) 0.1674}{0.1299} = 42.96\%$$

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

Los coeficientes de aporte marginal del riesgo por unidad de aporte marginal al rendimiento son:

$$\delta_{a,p} = \frac{\beta_{a,p}}{\gamma_{a,p}} = \frac{1.06132}{42.34\%} = 2.51$$

$$\delta_{b,p} = 1.35$$

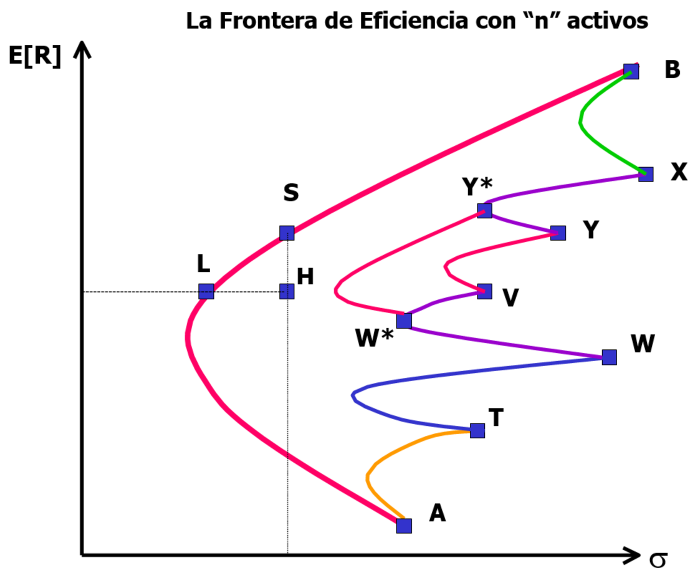
$$\delta_{c,p} = -0.6$$

Estos coeficientes de comparación de aportes marginales pueden resultar mayor que 1 y será indicativo de que el activo aporta marginalmente, más riesgo que rendimiento, por lo que es un activo riesgoso. En tanto, si es igual a 1 indica que hace una misma proporción de aporte al portafolio en riesgo y rendimiento. Sin embargo, si es menor que 1, el activo se considera relativamente seguro, ya que aporta más rendimiento que riesgo al agregarse al portafolio.[27]

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

OBSERVACIONES:

- Cuando la cantidad de activos se incrementa existe una serie de combinaciones para cada pareja de activos, relación definida por el coeficiente de asociación lineal entre cada par de activos.



Fuente: Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión.

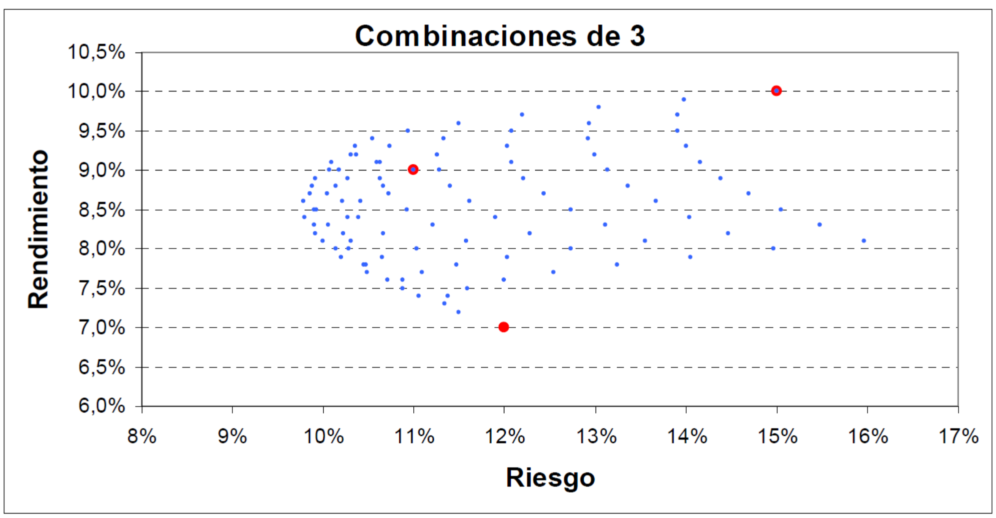
En la imagen se aprecia que cada pareja de activos, por ejemplo (A, T), (W, V), (V, Y) define una frontera de eficiencia, luego carteras compuestas como W* o Y* pueden combinarse entre sí, finalmente el proceso puede integrarse hasta generar una "envolvente" que sería la curva AB. Esta línea más las combinaciones individuales de los activos simples (A, B, X, T) definen un área que viene a ser el conjunto de combinaciones de activos riesgosos.[27]

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

- Las combinaciones que individualmente pueden hacerse entre cada pareja de activos definen distintas combinaciones posibles; en realidad lo que se tendrá es un conjunto denso de posibles combinaciones de activos y en lugar de pequeñas fronteras de eficiencia para cada pareja de activos se tendrá un mapa denso y completo.

A continuación se muestra, para tres activos, un conjunto de 100 iteraciones desarrollado por el profesor Kim Engelmajer.

Resultado de 100 iteraciones para combinaciones de tres activos

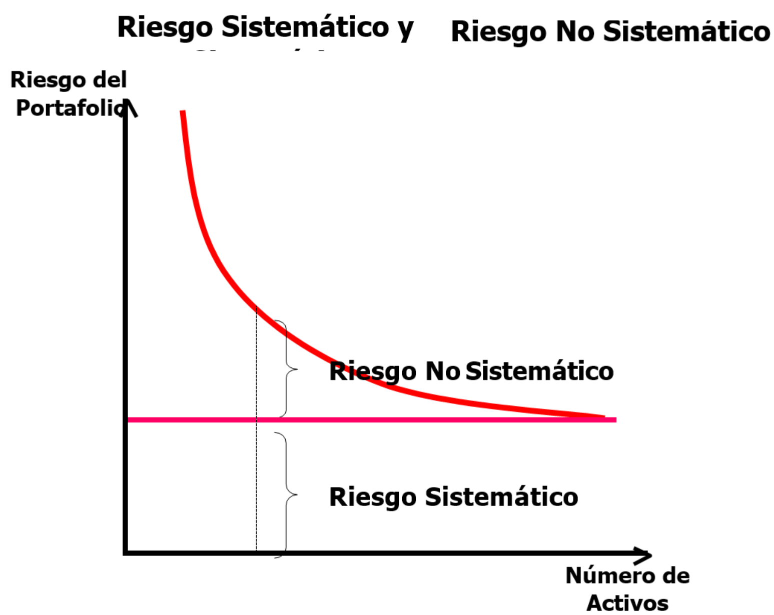


Fuente: Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión.

- El riesgo que se logra reducir mediante la diversificación recibe el nombre de riesgo diversificable, riesgo no sistemático o riesgo específico y es aquel riesgo propio de cada activo. Es independiente de lo que ocurra en el mercado.[27]

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

El riesgo que no se puede reducir mediante la diversificación se llama riesgo de mercado, riesgo sistemático, o riesgo no diversificable y proviene de incertidumbre propia del mercado que afecta a cualquier tipo de activo o instrumento financiero. Esto puede representarse mediante la siguiente gráfica:[27]



Fuente: Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión.

En resumen, Matarrita ejemplifica la teoría de inversión considerando los diversos elementos que intervienen en ella, haciendo los correspondientes cálculos de varianza, rendimiento, coeficiente de variabilidad, los riesgos de tipo: relativos, sistemáticos y no sistemáticos, necesarios para la obtención de un adecuado beneficio en una determinada inversión.

27…Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

2.10- LA BOLSA DE VALORES DE NUEVA YORK (NYSE): ÍNDICE DE INDUSTRIALES DOW JONES

Al invertir en Bolsas de Valores, las empresas como los gobiernos tienen la capacidad de financiar proyectos que sirvan de desarrollo que generen empleos y riquezas para un país. Los oferentes en la Bolsa de estos recursos reciben la oportunidad de invertir en una variedad de instrumentos que les permite diversificar su riesgo, optimizando sus rendimientos como la clave en una inversión.

En cada bolsa o mercado existen diferentes índices o promedios, los cuales en un complejo sistema financiero procuran indicar el comportamiento en el tiempo de los movimientos de los títulos y valores que están inscritos en el mercado[21].

El NYSE (New York Stock Exchange) como una bolsa de valores, no controla los precios de los valores, sino que asegura a los inversores la existencia de un mercado ordenado y justo, además, funciona mediante un sistema de subasta continua, llevado a cabo a voz propia en un lugar de contratación. Las órdenes de compra y venta de los inversores se envían a un lugar centralizado (el punto de operaciones), donde se igualan[21].

Por otro lado, los miembros de la NYSE pueden ser: *especialistas, agente de bolsa por comisión, agente de bolsa por contratación y operadores autorizados* cuyas funciones, según el caso, son:

- ***Especialistas:*** crean un mercado para los valores cotizados asignados al punto de realizar operaciones de forma justa y ordenada, cuyos ingresos provienen de

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.

comisiones que adquieren al actuar como bróker o bien la diferencia entre la compra y venta al ser agentes o dealers.

- ***Agente de bolsa por comisión:*** se encargan de realizar contrataciones y ejecutan las ordenes de los clientes.
- ***Agente de bolsa por contratación:*** operan solamente para sí mismos y ayudan a otros miembros a realizar su trabajo.
- ***Operadores autorizados:*** realizan operaciones por su cuenta, ahorrándose las comisiones por ser miembros[21].

Un punto sobresaliente es la tecnología, que hoy en día es frecuentemente utilizada por las empresas miembros de la bolsa, ya que envían sus órdenes electrónicamente desde cualquier parte del mundo a los especialistas, utilizando el sistema SuperDot; cuyas órdenes tienen el mismo tratamiento que si un operador estuviera físicamente presente. Es el caso específico de plataformas que cobran sus comisiones como TRADING 212.

Los índices bursátiles dan una referencia importante para los gestores de cartera. Se habla más de ellos que de los mercados a los que representan, porque logran medir el comportamiento de su propio mercado y así compararlo con la evolución de un valor o una cartera de valores determinada. Los índices financieros que conforman a la Bolsa de Valores de Nueva York varían cuando hay una adquisición de por medio o cuando hay cambios drásticos en el desempeño corporativo de una empresa, según el diario Wall Street Journal.

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.

El índice Dow Jones de valores industriales data del 26 de mayo de 1896 e incluye los valores más importantes de los Estados Unidos. Inicialmente comenzó con 12, luego pasó a 20 y en 1928 llegó a los 30 actuales. El último cambio en su constitución fue en marzo de 1997, cuando se dio la entrada a bancos y empresas de alta tecnología[21].

Además, la lista de las treinta empresas que cotizan en este índice adquirió un ligero cambio en 2019, donde sale la empresa General Electric y entra una nueva empresa llamada Dow o Wallgreens (cadena farmacéutica), la misma que no tiene relación con General Electric.

General Electric es una empresa que se financia a sí misma, pero la causa primordial de su salida fue la reducción en sus dividendos. Un anuncio del índice Dow Jones revela que el consorcio industrial General Electric bajo sus títulos un 55 % en los últimos doce meses dentro del índice, lo que hizo que perdiera peso en la composición del Dow Jones a menos del 0,5 %. Sin embargo, ahora con el peso de Walgreens es mayor, por lo que contribuirá de una forma significativa al índice, agregó la firma S&P Dow Jones Index en su comunicado.

Ante la entrada de Walgreens y la salida de General Electric se calculará de nuevo el divisor de los distintos integrantes del Dow Jones antes de que se aplique el cambio durante la sesión del 26 de junio de 2018.[30]

La capitalización de los valores que componen al índice Dow Jones (DJI), representa casi la cuarta parte de Wall Street y se comprende que sea una referencia obligada para conocer la tendencia de otras bolsas, entre ellas el Ibex 35 de España.

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.
30… https://www.efe.com/efe/espana/economia/general-electric-sale-del-dow-jones-de-industriales-y-lo-reemplaza-walgreens/10003-3655103

El Dow Jones no se le podrá dejar de considerar como el principal indicador económico del mundo, a pesar de que no es considerado representativo de la situación real del mercado bursátil estadounidense.

El mundo de las finanzas se mueve alrededor del Dow Jones, ya que tener un retorno a portafolio mayor que el retorno del indicador Dow Jones es considerado un éxito.

Por otro lado, el Promedio Industrial Dow Jones (DJIA por sus siglas en inglés), a diferencia del Promedio de Transportes Dow Jones (DJTA) y el Promedio de Utilidades Dow Jones (DJUA), no limita los títulos tradicionalmente definidos como industriales, sino que sus componentes pertenecen a todo tipo de industrias entre ellos: servicios financieros, tecnología, minoristas, entretenimiento y bienes de consumo.

El DJIA, es el más seguido y reconocido índice de acciones conformado por las treinta empresas industriales de mayor tamaño admitidas a cotización en la Bolsa de Nueva York, por lo que se le considera como un medidor del desempeño del mercado en general. Es más, se dice que el Dow Jones tiene la particularidad de que se calcula sobre la base del precio y no de la capitalización, lo que indica la media aritmética simple de los precios; por lo que el peso de los componentes varía de acuerdo con el precio de las acciones, a diferencia de otros índices que son afectados no sólo por el precio, sino también por el número de acciones en circulación[21].

Cuando los promedios fueron creados, su valor era calculado simplemente mediante la suma del precio de todos los componentes de cada índice y dividiéndolo por el número de componentes de éste. Luego, se inició la práctica de utilizar un divisor para suavizar los

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.

efectos de la división de acciones (stock Split) y otras estrategias corporativas, actualmente utilizadas en el índice DJIA, por lo que el divisor se ajusta teniendo en cuenta la división del Nominal (“Split”) [21]. Es importante señalar que hoy en día, los cálculos de los precios se ven también afectados por la volatilidad, teniendo que hacerse consideraciones estocásticas.

A pesar del reducido número de compañías que lo componen, el Dow Jones ha demostrado su utilidad como reflejo de la tendencia del mercado a corto plazo, mostrándose como guía poco fiable en el largo plazo en la medida en que sólo refleja la evolución de las compañías de mayor tamaño y sin tener en cuenta los dividendos.

Por último, la bolsa de valores de Nueva York posee un sector tecnológico que es recogido por un índice accionario conocido por NASDAQ. Fue el primer mercado de valores electrónico que se convirtió en el modelo para los mercados en desarrollo de todo el mundo. Es una estructura virtual que permite la compra – venta de acciones y activos financieros a través de computadores[21].

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.

2.11- TRADING 212: una herramienta o plataforma tecnológica efectiva, para el trading de acciones en mercados internacionales

TRADING 212, es una poderosa y manejable plataforma de negociación que proviene de la marca comercial de Avus Capital UK Ltd., Avus Capital CY Ltd. y Avus Capital Ltd.

TRADING 212, proporciona una excepcional experiencia al nivel del inversor, a través de la innovación tecnológica constante y un excelente servicio al cliente.

Los inversores se benefician de una gran variedad de materiales educativos, ejecución de órdenes en milisegundos, diferenciales rápidamente ajustados incluso durante la publicación de noticias, operación desde dispositivos móviles, gráficos en tiempo real y soporte 24 horas, 5 días a la semana, en vivo de la mejor calidad[22].

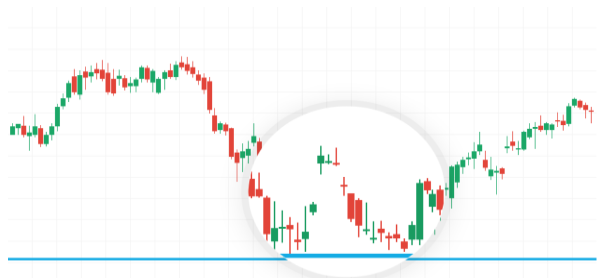
Trading 212 es un confiable agente de bolsa en el cual han creído más de 200 000 inversores para operar con más de 750 productos financieros, tales como divisas, artículos, acciones de diferentes compañías e índices mundiales.

El Análisis técnico en Trading 212 es uno de los instrumentos que utilizan los inversionistas para intentar prever las fluctuaciones del precio de las divisas. El mismo, ofrece a los inversores diferentes planteamientos para el comercio como el Análisis de Fibonacci y las Ondas de Elliott, que se basan en la teoría de DOW según la cual el mercado se mueve de manera previsible, siguiendo precisos esquemas. Además, dicho análisis se concentra en la lectura de los esquemas de los gráficos y se basa en el hecho de que las fluctuaciones de precio anteriores se repetirán.

21… Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.
22… https://www.trading212.com/es/An%C3%A1lisis-T%C3%A9cnica

No se tienen en cuenta las informaciones relativas al análisis fundamental y se concentra exclusivamente en los gráficos de los precios.

La plataforma asegura que los inversores normalmente compran, una vez que la línea del precio forma una W. Mientras que cuando la divisa forma una M, los inversores venden, a lo que se le llama doble máximo o doble mínimo respectivamente.



DOBLE MÁXIMO DOBLE MÍNIMO

Fuente: https://www.trading212.com/es/An%C3%A1lisis-T%C3%A9cnica

El doble máximo representa lo que se define como el nivel de resistencia, es decir el límite a partir del cual la divisa no debería subir. Mientras que el doble mínimo detecta el nivel de precio a partir del cual, la divisa no seguirá bajando y volverá a subir una vez alcanzado el nivel de soporte[22].

22… https://www.trading212.com/es/An%C3%A1lisis-T%C3%A9cnica

2.12- SOLVER DE EXCEL: su uso en la solución de un problema de programación no lineal para la selección de carteras.

Excel es un programa de uso cotidiano para el análisis y desarrollo de modelos matemáticos. Posee la herramienta SOLVER, que permite encontrar soluciones de un problema lineal o no lineal sujeto a ciertas restricciones. La activación de esta interfaz se realiza accediendo a la opción de herramientas y en los complementos de Excel es activada. Excel es una plataforma que provee recursos necesarios para resolver modelos como el de cartera de Markowitz, la cual puede ser representada sobre la hoja de cálculo de Excel siguiendo una modelización planteada por Konno y Yamazaki en 1991 sobre un modelo que estos aplicaron a la bolsa de Tokio, el cual minimiza las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de una cartera y está sujeta a las mismas restricciones que aparecen en dicha teoría[24].

Para realizar la modelización, se colocan en varias celdas las cotizaciones o precios históricos de las acciones de la bolsa desde una determinada fecha hasta otra, para el análisis. Luego se calculan todos los parámetros incluidos en el modelo, estudiando con detalle la teoría para poder adaptar toda la información recopilada y realizar los cálculos necesarios de forma adecuada entre ellos están: las rentabilidades diarias de las empresas que forman al índice, incluyendo al índice o mercado; las rentabilidades esperadas; la varianza a partir de las rentabilidades obtenidas; la desviación estándar; el coeficiente de variación y los betas de los activos que representa la relación de cada activo versus el mercado.

Posteriormente, se obtiene la matriz de correlaciones de todos los activos del mercado en

24… Fogués, P. (2012). Modelo de selección de cartera con Solver. Universidad Politécnica de Valencia. España.

estudio, tomando las combinaciones de activos con correlación negativa más pequeña posible. La combinación es elegida negativa, ya que permite que el problema de Markowitz se minimice sustanciosamente y luego, se crea una nueva matriz denominada de VARIANZA – COVARIANZA, que en el caso de esta investigación son seleccionados ocho activos creando una matriz cuadrada 8x8. El modelo no diversifica los activos por sí sólo, sino que es necesario restringir los pesos para imponer una mayor o menor diversificación, fijando una rentabilidad requerida[25].

El modelo implementado por Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaki propone convertir el problema de Markowitz de cuadrático a lineal, tomando de referencia la desviación estándar como la medida de riesgo y penalizando las desviaciones negativas respecto a la media, como se establece en la siguiente formulación:

$$Minimizar \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

Sujeta a

$$y_t + \sum_{i=1}^{n}(r_{it} - r_i) \geq 0 \qquad con\ t = 1, 2, \dots T$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq r$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Para i =1, 2,…, n.

$$-u_i \leq x_i \leq u_i$$

25… Diaz, M. (2016). Modelos de Gestión de Carteras: Comparación y Propuestas de Mejora. Universidad Pontificia ICADE Comillas, Business School. España.

Donde:

y_t es una variable auxiliar introducida para indicar que sólo afectan al modelo desviaciones negativas por debajo de la media.

r_{it} es la rentabilidad del activo i en el momento t.

u_i es la cantidad máxima por invertir (peso) del activo i.

r es la rentabilidad mínima exigida por el inversor.

Para este modelo no se requiere calcular la matriz de covarianzas que genera problemas computacionales, pero sí la matriz de correlaciones. Además, la solución al problema cuadrático se hace mucho más sencillo para resolver el problema en menos tiempo. La medida de las desviaciones consideradas son las más negativas posibles en la correlación para recibir rentabilidades adecuadas. Un problema de este modelo es que no considera expectativas del gestor o inversor y además, el modelo no diversifica por sí solo, sino que muestra una diversificación que impone el inversor en las restricciones, indicando su rentabilidad deseada.[25]

La modelización computacional del problema incluye establecer los pesos de los activos seleccionados de la correlación, junto con sus rentabilidades anuales promedio. A la tabla que incluye estos datos, se le considera las betas de cada activo seleccionado y se establece una beta del portafolio como la suma – producto de los pesos de cada activo con sus rentabilidades anuales. Además, se añaden al modelo las celdas de rentabilidad del portafolio y desviación del portafolio, la mismas que estarán variando durante la aplicación del Solver de Excel.

25… Diaz, M. (2016). Modelos de Gestión de Carteras: Comparación y Propuestas de Mejora. Universidad Pontificia ICADE Comillas, Business School. España.

Se añade el vector fila de los pesos y la matriz de varianza – covarianza de los activos seleccionados, los mismos que están inmóvil durante la ejecución del programa.

Otra tabla que se construye sobre la plantilla de Excel es aquella que contiene las celdas con la información correspondiente a cada portafolio resultante: la desviación estándar, el rendimiento esperado, el indice de Sharpe y las betas; resultados que se van obteniendo a medida que se ejecuta el Solver.

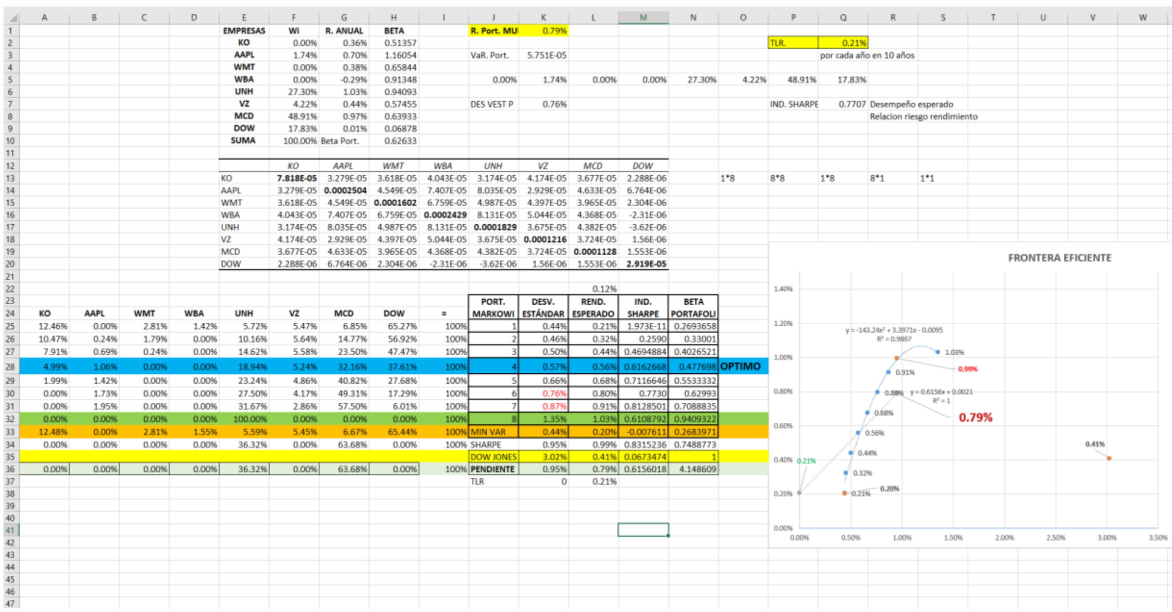


Figura 2.9

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 2.9 muestra la confección del modelo con los diversos valores anteriormente indicados, los valores de rentabilidad esperada de cada portafolio se establecen en un intervalo entre la rentabilidad libre de riesgo y la rentabilidad más alta obtenida entre los activos seleccionados para la confección de ocho portafolios eficientes que representan la frontera de carteras eficientes del modelo de Harry Markowitz.

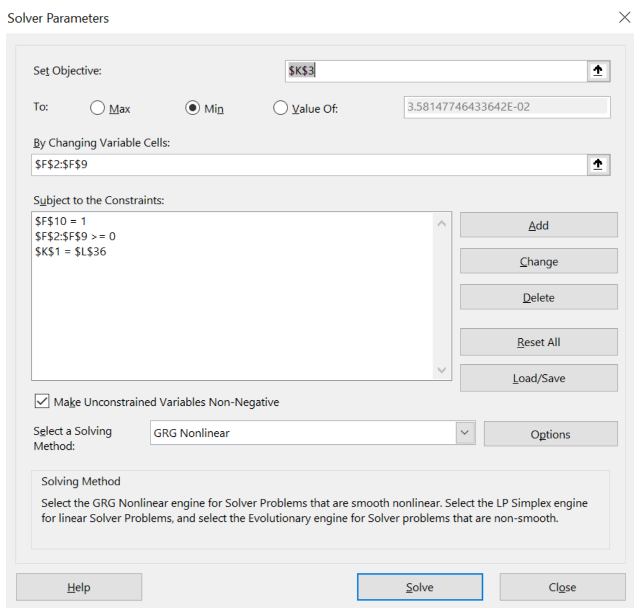


Figura 2.10

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

En la figura 2.10 se aprecia la ejecución del solver de Excel para cada valor de rentabilidad deseado, en el cual se busca minimizar la celda de desviación estándar (DESV EST), sujeta a las siguientes restricciones: la suma de los pesos debe ser igual a 1, la rentabilidad deseada debe ser mayor o igual que cero y además, la rentabilidad del portafolio parte del valor esperado de la celda en la tabla dada. Los cambios que realiza el Solver en base a esas restricciones serán los valores de los pesos minimizando la celda objetivo de la desviación estándar.

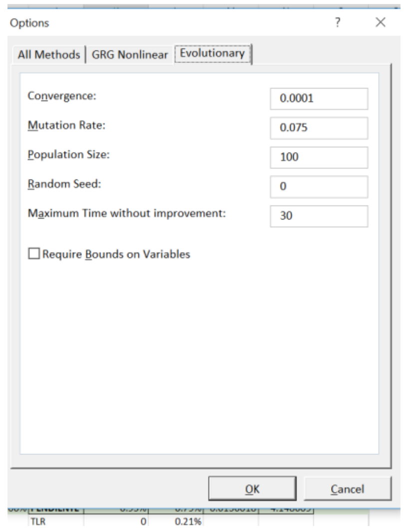


Figura 2.11

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

En la figura 2.11 la ventana indica que durante la ejecución del programa, es necesario considerar los parámetros que permiten seleccionar determinados criterios de convergencia a los métodos implementados para encontrar soluciones del problema que se pretende optimizar como: el tiempo de ejecución, el número de iteraciones, la precisión, el porcentaje de tolerancia, la convergencia mínima, la adopción de un modelo lineal y de valores no negativos, al igual que la solución mediante un problema No lineal.

El resultado de la celda de varianza esta dado por la multiplicación de las matrices columna y fila de los pesos (Matriz columna y su traspuesta), junto con la matriz de varianza – covarianza y dicha celda es la que se pretende minimizar para luego obtener su raíz cuadrada como la desviación estándar o el riesgo previsto para cada portafolio.

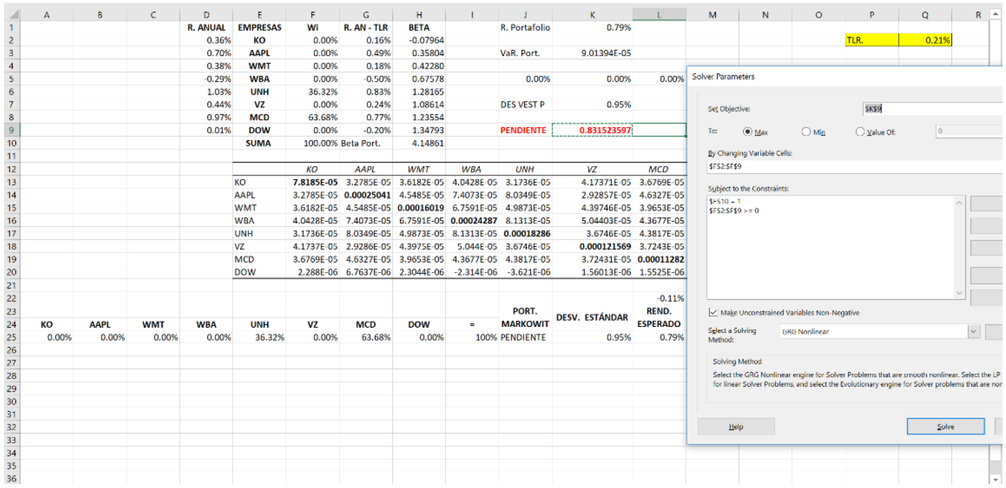


Figura 2.12

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja LMC2.

A un paso de concluir el modelado en Excel, como se muestra en la figura 2.12, lo que sigue es establecer el porcentaje de rentabilidad esperado para la pendiente de la línea de mercado de capitales. Este valor se obtiene restándole a las rentabilidades anuales de cada activo, el activo libre de riesgo; haciendo referencia al modelo CAMP.[25]

Se considera la pendiente como la división entre las celdas de rentabilidad del portafolio y la desviación estándar. Esta celda se maximiza cambiándole valores a las celdas de los pesos del activo con las restricciones de no negatividad y la suma de valores igual a 1. Con los mismos parámetros del problema de minimización se crea otro punto junto al de la intersección con el eje de las rentabilidades, donde se asume el activo libre de riesgo con una rentabilidad determinada por el tesoro del estado y con un riesgo igual a cero. Por esos puntos pasa la LÍNEA DE MERCADO DE CAPITALES y al hacer el gráfico de la frontera eficiente sobre Excel, junto con la línea de mercados de capitales, se encuentra la

25… Diaz, M. (2016). Modelos de Gestión de Carteras: Comparación y Propuestas de Mejora. Universidad Pontificia ICADE Comillas, Business School. España.

intersección entre las líneas, determinando el portafolio más conveniente para invertir, como se muestra en la imagen siguiente:

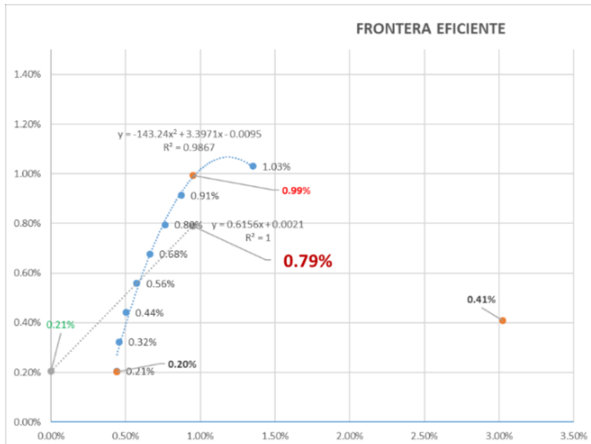


Figura 2.13

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 2.13, señala la línea de mercado de capitales (LMC) de color gris y en azul se muestra la frontera eficiente de la teoría de Markowitz. El valor 0.56% representa el punto de intersección entre las líneas y el porcentaje de rendimiento del portafolio de activos en el cual se debe invertir determinado según el modelo, así:

KO	AAPL	WMT	WBA	UNH	VZ	MCD	DOW	=	PORT. MARKOWITZ	DESV. ESTÁNDAR	REND. ESPERADO	IND. SHARPE	BETA PORTAFOLIO	
4.99%	1.06%	0.00%	0.00%	18.94%	5.24%	32.16%	37.61%	100%	4	0.57%	0.12%	0.61626677	0.47769799	**OPTIMO**

Figura 2.14

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

Finalmente, la figura 2.14 señala los valores indicados en porcentajes, los cuales representan el porcentaje a invertir del capital que se estipule utilizar para la inversión.

CAPÍTULO 3
MARCO OPERATIVO

En esta sección se definen los pasos para el desarrollo del modelo de Harry Markowitz y Sharpe estos son:

1) *Desarrollo del modelo utilizando Excel*

2) *Activos seleccionados para invertir*

3) *Planteamiento del Modelo de Harry Markowitz y la frontera eficiente*

4) *Planteamiento de la teoría de Sharpe y la recta de mercado de capitales*

5) *Ejecución del modelo mediante la teoría de Konno y Yamazaki*

6) *Establecimiento del portafolio óptimo*

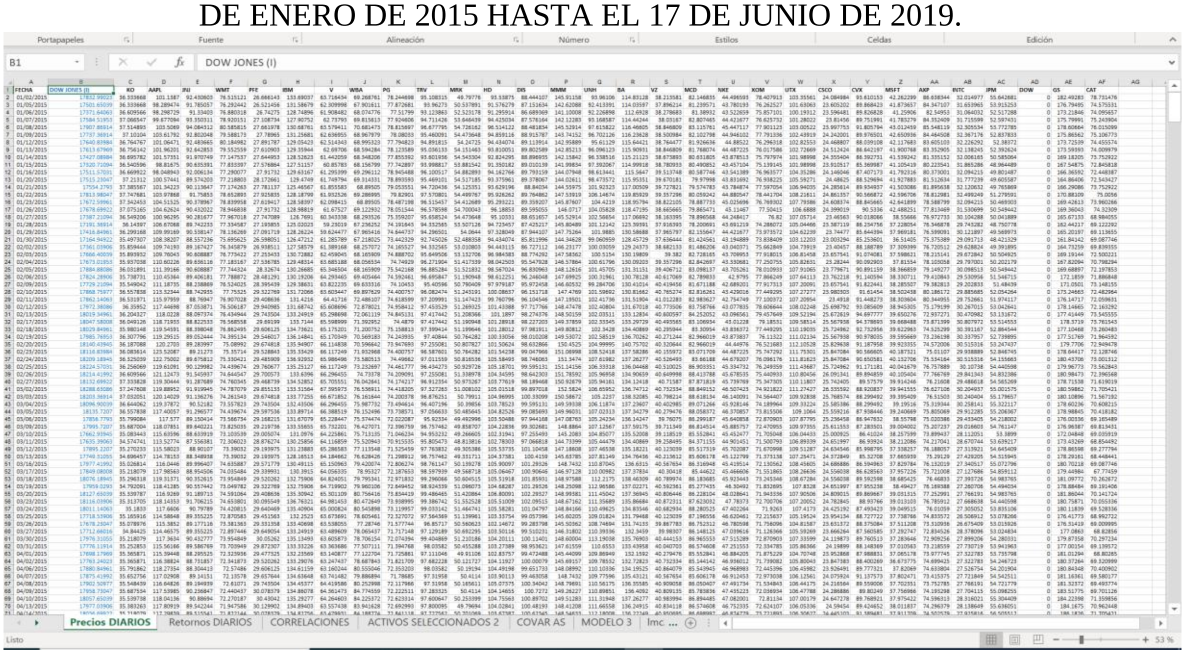
7) *Inversión en el portafolio óptimo dentro de la aplicación de Trading 212*

8) *Resultados de prueba de la inversión realizada*

3.1- Desarrollo del modelo utilizando Excel

Uso de Excel para la recopilación de los datos:

FIGURA 3.1. PRECIOS DE CIERRE DE LAS ACCIONES DE LAS TREINTA EMPRESAS QUE PERTENECEN AL INDICE DOW JONES POR DÍA: DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.



Fuente: La tabla completa puede encontrarse en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja PRECIOS DIARIOS.

En la figura 3.1 se muestran los precios de cierre diarios de cada uno de los activos que forman el índice DOW JONES desde el 8 de enero de 2015 al 17 de junio de 2019. Estos datos fueron recopilados de la página web YAHOO FINANCE. Se añade una columna de los precios de cierre diarios del Indice Dow Jones, estos datos permitirán realizar posteriormente el análisis estadístico necesario para el estudio.

Se utiliza Excel para determinar los retornos diarios dados por la fórmula de logaritmo natural con lo que se diferencia la rentabilidad diaria a partir de los precios diarios mostrados en la figura 3.1, por ejemplo: =LN('Precios DIARIOS'!B1122/'Precios DIARIOS'!B1121).

FIGURA 3.2. RETORNOS DE LAS ACCIONES DE LAS TREINTA EMPRESAS QUE PERTENECEN AL INDICE DOW JONES POR DÍA: DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.

1	FECHA	DOW JONES (	KO	AAPL	JNJ	WMT	PFE	IBM	V	WBA	PG	TRV	MRK	HD	DIS	MMM	UNH	BA	VZ
1096	05/09/2019	-0.54%	-0.94%	-1.08%	-0.76%	-0.23%	0.12%	-0.77%	-0.59%	0.11%	-0.79%	0.21%	0.19%	-0.30%	-1.04%	-1.87%	-0.49%	-1.00%	0.18%
1097	05/10/2019	0.44%	1.65%	-1.40%	0.23%	2.35%	0.20%	-0.01%	0.56%	-0.26%	1.68%	1.49%	-0.18%	0.00%	0.34%	0.33%	1.09%	0.15%	0.76%
1098	05/13/2019	-2.41%	-0.29%	-5.99%	-1.34%	-2.00%	-0.37%	-2.92%	-2.13%	-2.46%	0.09%	-0.38%	-1.31%	-2.20%	-2.03%	-1.02%	-0.43%	-5.00%	-0.28%
1099	05/14/2019	0.81%	1.32%	1.57%	-0.28%	0.40%	0.22%	1.43%	1.81%	0.88%	-0.48%	1.59%	0.32%	0.67%	1.41%	0.65%	-1.31%	1.67%	-0.35%
1100	05/15/2019	0.45%	1.00%	1.19%	0.07%	-0.41%	1.20%	0.81%	1.60%	0.30%	1.04%	0.55%	0.17%	0.07%	1.10%	-0.62%	-0.15%	0.76%	0.46%
1101	05/16/2019	0.83%	0.81%	-0.44%	0.95%	1.42%	1.18%	1.10%	1.42%	-0.46%	1.31%	0.61%	2.02%	0.32%	0.61%	-1.34%	0.30%	2.34%	1.00%
1102	05/17/2019	-0.38%	-0.77%	-0.57%	0.29%	-0.45%	-0.41%	-1.15%	-0.47%	0.40%	-0.61%	0.05%	-0.52%	0.10%	-0.34%	-1.60%	1.92%	0.34%	1.23%
1103	05/20/2019	-0.33%	-0.71%	-3.18%	-0.14%	0.65%	0.29%	0.59%	-0.38%	-0.02%	-0.11%	0.46%	0.20%	-0.85%	-0.84%	-1.69%	1.89%	-0.63%	1.57%
1104	05/21/2019	0.77%	-0.51%	1.90%	-0.22%	-0.39%	0.19%	0.98%	0.24%	0.95%	-0.90%	-0.47%	0.78%	0.26%	0.13%	0.63%	1.59%	1.68%	0.83%
1105	05/22/2019	-0.39%	2.14%	-2.07%	0.46%	1.09%	0.77%	-0.07%	0.23%	0.34%	0.33%	0.33%	1.84%	-1.34%	-0.18%	1.45%	-0.24%	-1.68%	-0.42%
1106	05/23/2019	-1.12%	0.40%	-1.72%	0.74%	-0.36%	-0.17%	-2.95%	-1.68%	-2.54%	0.04%	-0.69%	0.05%	1.62%	-0.84%	-1.45%	-1.15%	-0.63%	-0.64%
1107	05/24/2019	0.37%	-0.48%	-0.38%	0.01%	0.79%	0.07%	-0.08%	0.70%	0.31%	-0.07%	0.68%	0.18%	0.82%	0.05%	0.13%	0.46%	1.23%	0.76%
1108	05/28/2019	-0.93%	-1.03%	-0.41%	-1.29%	-0.24%	-0.12%	-1.39%	0.66%	-0.10%	-2.11%	-1.13%	-1.13%	-1.06%	-0.13%	-1.66%	-2.28%	-0.01%	-1.00%
1109	05/29/2019	-0.88%	-1.00%	-0.48%	-4.28%	-0.29%	-0.43%	-0.59%	-0.60%	-1.15%	-0.26%	-0.83%	-1.13%	-0.82%	-0.79%	-1.20%	0.14%	-1.73%	-0.94%
1110	05/30/2019	0.17%	1.31%	0.52%	0.59%	0.07%	0.43%	-0.09%	0.02%	-1.14%	1.09%	0.45%	0.40%	0.57%	0.48%	-0.51%	0.45%	0.31%	-2.35%
1111	05/31/2019	-1.42%	-0.24%	-1.83%	-0.73%	-0.74%	-0.91%	-2.01%	-0.88%	-2.42%	-2.32%	-0.11%	-0.59%	-0.65%	-0.12%	-0.52%	-0.70%	-2.39%	-4.46%
1112	06/03/2019	0.02%	1.72%	-1.02%	0.22%	0.51%	0.96%	1.00%	-1.71%	1.15%	0.86%	0.83%	1.32%	-0.15%	0.33%	0.18%	-2.19%	-0.80%	3.67%
1113	06/04/2019	2.04%	0.04%	3.59%	1.73%	0.59%	0.74%	3.39%	2.32%	3.14%	0.84%	0.52%	1.02%	2.95%	1.76%	2.62%	1.76%	1.68%	-0.28%
1114	06/05/2019	0.82%	1.55%	1.60%	0.48%	1.80%	0.59%	-0.91%	1.87%	-1.37%	1.94%	1.55%	0.75%	1.43%	0.83%	-0.27%	0.83%	1.19%	1.43%
1115	06/06/2019	0.71%	1.21%	1.46%	1.70%	0.66%	0.54%	0.55%	0.92%	0.35%	0.61%	-0.57%	-0.31%	0.24%	0.93%	0.53%	-0.39%	0.54%	0.89%
1116	06/07/2019	1.02%	0.17%	2.63%	1.36%	0.90%	0.49%	0.82%	1.86%	1.92%	1.29%	0.91%	1.24%	0.07%	0.60%	1.14%	2.03%	0.87%	-0.52%
1117	06/10/2019	0.30%	-0.21%	1.27%	0.34%	1.37%	0.35%	1.07%	0.45%	0.61%	-0.05%	-0.14%	0.02%	0.38%	-0.71%	1.00%	0.55%	0.03%	-1.92%
1118	06/11/2019	-0.05%	-0.10%	1.15%	0.55%	0.39%	-0.93%	0.89%	-0.30%	1.12%	0.61%	-0.09%	0.60%	-0.02%	-1.46%	0.37%	-0.92%	-1.27%	1.20%
1119	06/12/2019	-0.17%	0.60%	-0.32%	1.35%	0.81%	0.96%	-0.80%	0.75%	-1.45%	0.27%	0.36%	0.88%	0.47%	0.47%	0.06%	-0.56%	-0.66%	0.93%
1120	06/13/2019	0.39%	-0.21%	-0.02%	-0.69%	-0.16%	-1.36%	0.66%	-1.31%	1.47%	1.12%	-0.21%	-0.97%	1.70%	4.34%	-0.09%	0.19%	0.53%	0.45%
1121	06/14/2019	-0.07%	0.35%	-0.73%	-0.44%	0.39%	0.61%	-0.45%	0.18%	-0.61%	0.26%	0.47%	0.52%	1.68%	-0.06%	-1.29%	0.61%	-0.49%	1.14%
1122	06/17/2019	0.09%	-0.86%	0.59%	-0.47%	0.08%	0.28%	-0.15%	-0.06%	0.46%	-0.19%	-0.13%	0.63%	0.59%	-0.48%	0.05%	0.24%	2.21%	-1.12%
1123																			
1124	**RETORNO ESPERADO**	0.03%	0.03%	0.06%	0.04%	0.03%	0.04%	0.00%	0.09%	-0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.07%	0.04%	0.01194%	0.08592%	0.10075%	0.03668%
1125	VARIANZA	0.01%	0.01%	0.03%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01473%	0.01829%	0.02446%	0.01216%
1126	DESV. ESTÁNDAR	0.87%	0.88%	1.58%	1.02%	1.27%	1.12%	1.30%	1.30%	1.56%	0.97%	1.06%	1.23%	1.19%	1.24%	1.21381%	1.35226%	1.56389%	1.10258%
1127	COEF. DE VARIACIÓN	25.4108	29.4278	27.2330	27.7400	39.8942	26.4871	1556.9774	14.8516	-64.3376	31.0809	26.2082	26.7145	16.7263	29.8172	101.6996	15.7382	15.5229	30.0569
1128	DESEMPEÑO - SHARPE	0.039	0.034	0.037	0.036	0.025	0.038	0.001	0.067	-0.016	0.032	0.038	0.037	0.060	0.034	0.010	0.064	0.064	0.033
1129																			
1130	**RENDIMIENTO ANUAL**	0.41%	0.36%	0.70%	0.44%	0.38%	0.51%	0.01%	1.05%	-0.29%	0.37%	0.49%	0.55%	0.85%	0.50%	0.14%	1.03%	1.21%	0.44%
1131	**DESV. ESTÁNDAR ANUAL**	3.02%	3.25%	6.58%	4.01%	3.00%	2.17%	4.63%	4.00%	4.56%	3.45%	2.38%	2.93%	3.63%	4.09%	3.78%	3.95%	5.38%	5.18%
1132	**COEF. VARIACIÓN**	7.3989	9.0015	9.4303	9.1128	7.8924	4.2684	460.5804	3.8146	-15.6863	9.2213	4.8826	5.3140	4.2622	8.1980	26.3624	3.8318	4.4462	11.7689
1133																			
1134																			

Precios DIARIOS | Retornos DIARIOS | CORRELACIONES | ACTIVOS SELECCIONADOS 2 | COVAR AS | MODELO 3 | Imc ...

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja Retornos Diarios.

La figura 3.2 muestra en cada celda los retornos diarios para cada activo del indice Dow Jones y a su vez se obtienen los retornos esperados de cada empresa mediante la fórmula de Excel, por ejemplo: =PROMEDIO(C3:C1122) . Además, se calcula la varianza, desviación estándar, coeficiente de variación, rendimiento anual, desviación estándar anual y coeficiente de variación anual para cada empresa, dado por las siguientes fórmulas ejemplificadas para el primer caso de KO en el documento de Excel:

Varianza: =VAR.P(C3:C1122)

Desviación estándar: =DESVEST.P(C3:C1122)

Coeficiente de variación: =C1126/C1124 (Retorno/ DESV. ESTANDAR)

Rendimiento anual: =C1124*12 (Retorno * 12)

Desviación estándar anual: =DESVEST.P(C1096:C1122)*RAIZ(12)

Coeficiente de variación anual: =C1131/C1130 (Retorno ANUAL/ DESV. ESTANDAR ANUAL)

3.2- Activos seleccionados para invertir

En la selección de activos se desarrolla una matriz de correlaciones obtenida a partir de los retornos diarios de las treinta empresas del Indice Dow Jones. La correlación entre dos activos es una medida estadística que nos muestra el grado de relación entre ambos y cuyo valor se encuentra en el intervalo entre 1 y -1.

Cuando hablamos de valores o activos financieros, el coeficiente de correlación representa el grado de relación entre los movimientos de los precios de los diferentes activos incluidos en la cartera. Si su valor es 1, significa que los precios se mueven a la par (una modificación en el precio de un activo implica otra del mismo sentido en el precio del otro), una correlación de -1 significa que los precios se mueven en direcciones opuestas. Si su valor es cero significa que los precios se encuentran linealmente no correlacionados (aunque puede existir otro tipo de correlación entre ellas), es decir, el movimiento del precio de un activo no tiene efecto sobre el movimiento del precio de otro activo.

Mediante Excel se obtiene la matriz de correlaciones de las 30 empresas en el complemento análisis de datos se selecciona la matriz de retornos diarios del libro de Excel y luego automáticamente se obtienen los valores.

FIGURA 3.3. MATRIZ DE CORRELACIÓN DE LAS ACCIONES DE LAS TREINTA EMPRESAS QUE PERTENECEN AL INDICE DOW JONES POR RETORNO: DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL17 DE JUNIO DE 2019.

1		KO	AAPL	JNJ	WMT	PFE	IBM	V	WBA	PG	TRV
2	KO	1									
3	AAPL	0.234313	1								
4	JNJ	0.429984	0.316455	1							
5	WMT	0.323301	0.227105	0.327255	1						
6	PFE	0.326901	0.31752	0.53314	0.307468	1					
7	IBM	0.332595	0.390332	0.364105	0.281352	0.356569	1				
8	V	0.328818	0.537408	0.414532	0.274704	0.429151	0.471381	1			
9	WBA	0.293382	0.300365	0.387029	0.342676	0.378761	0.28591	0.370882	1		
10	PG	0.584367	0.27289	0.44817	0.353293	0.346386	0.366342	0.342832	0.31732	1	
11	TRV	0.470898	0.313897	0.453641	0.308632	0.408628	0.421234	0.427118	0.353889	0.406555	1
12	MRK	0.368355	0.28074	0.523193	0.307419	0.599371	0.388134	0.384182	0.342565	0.365972	0.394532
13	HD	0.363466	0.400605	0.400991	0.388913	0.409605	0.432438	0.541913	0.394995	0.354637	0.45769
14	DIS	0.298498	0.370209	0.318709	0.259741	0.344262	0.38212	0.430845	0.335085	0.316927	0.394614
15	MMM	0.418424	0.419035	0.494581	0.294701	0.410535	0.448908	0.491275	0.357144	0.384013	0.513667
16	UNH	0.26542	0.37549	0.392605	0.2914	0.472922	0.329057	0.426162	0.385844	0.277567	0.415159
17	BA	0.298022	0.439791	0.384213	0.277103	0.3281	0.421636	0.486908	0.298183	0.299877	0.414994
18	VZ	0.428103	0.16785	0.394062	0.315117	0.320192	0.330827	0.231488	0.293548	0.429723	0.396328
19	MCD	0.391504	0.275626	0.401824	0.294967	0.304192	0.287764	0.379731	0.263861	0.363223	0.405841
20	NKE	0.305559	0.34245	0.330757	0.280911	0.312974	0.335111	0.443545	0.311909	0.294535	0.34486
21	XOM	0.339396	0.350357	0.42155	0.260033	0.392186	0.422221	0.40449	0.293057	0.370051	0.419937
22	UTX	0.34705	0.419758	0.404971	0.325777	0.399591	0.50844	0.502204	0.352259	0.342621	0.474953
23	CSCO	0.337728	0.514074	0.447894	0.357103	0.427933	0.502903	0.569703	0.357946	0.371369	0.435483
24	CVX	0.318071	0.31738	0.35643	0.234701	0.338737	0.397612	0.392764	0.283144	0.334601	0.395885
25	MSFT	0.348501	0.5749	0.409546	0.270102	0.401185	0.478473	0.669072	0.373958	0.367514	0.426107
26	AXP	0.268034	0.333854	0.349534	0.231683	0.373953	0.412741	0.504771	0.337206	0.280682	0.404758
27	INTC	0.293417	0.471754	0.352804	0.24005	0.340866	0.420506	0.48623	0.306904	0.296211	0.369002
28	JPM	0.289554	0.418048	0.414963	0.265484	0.429412	0.471307	0.529087	0.366276	0.301552	0.57978
29	DOW	0.047895	0.079113	0.028405	0.0337	0.008637	0.090758	0.064547	-0.027478	0.039586	0.035076
30	GS	0.237525	0.443178	0.363482	0.230565	0.373309	0.433711	0.536391	0.372873	0.262271	0.512447
31	CAT	0.260192	0.42379	0.321513	0.22351	0.330585	0.426251	0.460936	0.269012	0.266845	0.396095

1		MRK	HD	DIS	MMM	UNH	BA	VZ	MCD	NKE	XOM
12	MRK	1									
13	HD	0.342149	1								
14	DIS	0.297555	0.417866	1							
15	MMM	0.37796	0.481741	0.379402	1						
16	UNH	0.383734	0.419815	0.306768	0.378912	1					
17	BA	0.32456	0.448283	0.391942	0.47267	0.36617	1				
18	VZ	0.372138	0.32188	0.301148	0.321564	0.246456	0.252778	1			
19	MCD	0.318618	0.397463	0.293031	0.338626	0.305064	0.296389	0.318014	1		
20	NKE	0.29324	0.489143	0.372277	0.386544	0.323744	0.380168	0.233131	0.2941	1	
21	XOM	0.393748	0.377897	0.379847	0.454176	0.318699	0.407981	0.326669	0.305708	0.287313	1
22	UTX	0.352176	0.465544	0.399599	0.541033	0.37982	0.545329	0.305993	0.304114	0.363231	0.422004
23	CSCO	0.41035	0.482537	0.448785	0.507046	0.368882	0.462546	0.315349	0.343497	0.415476	0.456008
24	CVX	0.348163	0.367017	0.3094	0.412169	0.315752	0.387522	0.330944	0.290021	0.270368	0.772044
25	MSFT	0.362062	0.474379	0.397187	0.461036	0.423264	0.441759	0.275626	0.384432	0.418776	0.383195
26	AXP	0.338054	0.428573	0.350943	0.39989	0.400321	0.414491	0.22551	0.252017	0.349649	0.329498
27	INTC	0.315546	0.429037	0.376384	0.470744	0.319311	0.410514	0.236215	0.271224	0.336725	0.403497
28	JPM	0.409756	0.495802	0.469919	0.51058	0.408103	0.508675	0.301835	0.352332	0.388687	0.514152
29	DOW	0.011834	0.04485	0.142047	0.115468	-0.049567	0.101196	0.02619	0.027054	0.082297	0.079346
30	GS	0.381514	0.469368	0.44027	0.479066	0.399699	0.495525	0.253845	0.300827	0.361057	0.467697
31	CAT	0.299803	0.426298	0.347011	0.55898	0.309012	0.531787	0.224485	0.256482	0.336026	0.526632

1		UTX	CSCO	CVX	MSFT	AXP	INTC	JPM	DOW	GS	CAT	
22	UTX	1										RO
23	CSCO	0.49724	1									AZ
24	CVX	0.396487	0.430731	1								AM
25	MSFT	0.473203	0.609348	0.398696	1							VE
26	AXP	0.449136	0.408167	0.339676	0.425916	1						
27	INTC	0.425919	0.547709	0.357047	0.566485	0.34347	1					
28	JPM	0.511688	0.530341	0.499084	0.48865	0.58627	0.439011	1				
29	DOW	0.124561	0.102182	0.037774	0.056508	0.057735	0.07796	0.121409	1			
30	GS	0.494796	0.487968	0.456569	0.489745	0.559887	0.434515	0.829128	0.112189	1		
31	CAT	0.516164	0.477292	0.529339	0.470853	0.452404	0.445518	0.551387	0.120877	0.559488	1	

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja Correlaciones.

En la figura 3.3, se muestra las correlaciones entre las acciones de las treinta empresas que conforman al índice Dow Jones. Dado a que los elementos de la correlación forman una matriz triangular y representan las desviaciones estándar entre los activos (valores que son considerados en el modelo de Harry Markowitz que busca minimizar el riesgo o varianza de los activos seleccionados), se buscan las correlaciones negativas más pequeña posibles (vistas con diferentes colores en la figura), ya que estas permitirán una mayor minimización del riesgo, de ahí se toman las decisiones correspondientes y las ocho empresas que se considerarán para confeccionar las carteras y ejecutar el modelo de Harry Markowitz. Los colores según la correlación siguen el siguiente patrón en esta figura:

COLOR	CORRELACIÓN MENORES QUE
ROJO	0.3
AZUL	0.2
AMARILLO	0.1
VERDE	0

Luego de realizar la correlación y la toma de decisión para seleccionar los activos de las empresas con correlación negativa más pequeña posible, se crea la matriz de varianza – covarianza de los activos seleccionados, así como se muestra en la figura 3.4.

FIGURA 3.4. MATRIZ DE VARIANZA - COVARIANZA DE LAS ACCIONES DE LAS OCHO EMPRESAS SELECCIONADAS QUE PERTENECEN AL INDICE DOW JONES, A PARTIR DE SUS RETORNOS DIARIOS: DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.

	KO	*AAPL*	*WMT*	*WBA*	*UNH*	*VZ*	*MCD*	*DOW*
KO	**7.8185E-05**	3.27854E-05	3.61816E-05	4.04279E-05	3.17363E-05	4.17371E-05	3.67694E-05	2.28804E-06
AAPL	3.27854E-05	**0.000250407**	4.54852E-05	7.40728E-05	8.03492E-05	2.92857E-05	4.63268E-05	6.7637E-06
WMT	3.61816E-05	4.54852E-05	**0.000160191**	6.7591E-05	4.98733E-05	4.39746E-05	3.96534E-05	2.30443E-06
WBA	4.04279E-05	7.40728E-05	6.7591E-05	**0.000242869**	8.13126E-05	5.04403E-05	4.36767E-05	-2.3136E-06
UNH	3.17363E-05	8.03492E-05	4.98733E-05	8.13126E-05	**0.00018286**	3.6746E-05	4.38167E-05	-3.6213E-06
VZ	4.17371E-05	2.92857E-05	4.39746E-05	5.04403E-05	3.6746E-05	**0.000121569**	3.72431E-05	1.56013E-06
MCD	3.67694E-05	4.63268E-05	3.96534E-05	4.36767E-05	4.38167E-05	3.72431E-05	**0.000112817**	1.55251E-06
DOW	2.28804E-06	6.7637E-06	2.30443E-06	-2.3136E-06	-3.6213E-06	1.56013E-06	1.55251E-06	**2.91892E-05**

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja COVARIANZA.

En la figura 3.4 se observa la matriz con las empresas KO, AAPL, WMT, WBA, UNH, VZ, MCD, y DOW.

3.3- Planteamiento del Modelo de Harry Markowitz y la frontera eficiente

Empresas que forman parte del índice Dow Jones, con sus respectivas abreviaturas:

	Símbolo	Nombre de la empresa
1	JPM	JPMorgan Chase & Co.
2	HD	The Home Depot, Inc.

3	UTX	United Technologies Corporation
4	INTC	Intel Corporation
5	MSFT	Microsoft Corporation
6	KO	The Coca-Cola Company
7	WMT	Walmart Inc.
8	AXP	American Express Company
9	PG	The Procter & Gamble Company
10	JNJ	Johnson & Johnson
11	DIS	The Walt Disney Company
12	CVX	Chevron Corporation
13	VZ	Verizon Communications Inc.
14	MCD	McDonald's Corporation
15	MMM	3M Company
16	BA	The Boeing Company
17	PFE	Pfizer Inc.
18	GS	The Goldman Sachs Group, Inc.
19	IBM	International Business Machines Corporation
20	DOW	Dow Inc.
21	TRV	The Travelers Companies, Inc.
22	XOM	Exxon Mobil Corporation
23	CSCO	Cisco Systems, Inc.
24	V	Visa Inc.
25	MRK	Merck & Co., Inc.

26 AAPL Apple Inc.

27 CAT Caterpillar Inc.

28 WBA Walgreens Boots Alliance, Inc.

29 NKE NIKE, Inc.

30 UNH UnitedHealth Group Incorporated

Para la ejecución del modelo de Harry Markowitz en esta investigación se consideran las empresas con abreviaturas: KO, AAPL, WMT, WBA, UNH, VZ, MCD, y DOW.

Primeramente, se hace uso de la interfaz Solver de Excel, para el desarrollo del modelo colocándose los datos en una tabla con los pesos de los activos seleccionados en forma de fila y columna. Se añade la rentabilidad anual obtenido para cada uno respectivamente y su valor Beta, el mismo que mide la volatilidad del activo con el mercado. Se adiciona la matriz de varianza – covarianza de la figura 3.4 y las casillas de rentabilidad de portafolio, desviaciones estándar y la tasa libre de riesgo.

FIGURA 3.5. EJECUCIÓN DEL MODELO DE HARRY MARKOWITZ MEDIANTE SOLVER DE EXCEL, EN BASE A LAS EMPRESAS SELECCIONADAS DEL INDICE DOW JONES Y SUS RENTABILIDADES ANUALES DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL17 DE JUNIO DE 2019.

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

En la figura 3.5 se detallan las funciones necesarias para la ejecución del modelo de Harry Markowitz incluyendo la Matriz de Varianza – Covarianza, la tasa libre de riesgo en base a diez años, la matriz fila y columna de los pesos de cada activo, sus correspondientes rentabilidades anuales esperadas y las celdas de salida resultantes de las rentabilidades, varianzas y desviaciones estándar para cada combinación.

- La celda rentabilidad del portafolio especifica la siguiente fórmula:

  =SUMAPRODUCTO(F2:F9;G2:G9)

- La celda varianza del portafolio especifica la fórmula:

  =MMULT((MMULT(J5:Q5;F13:M20));F2:F9)

- La celda desviación estándar especifica la fórmula: =RAIZ(K3)

Estas fórmulas están basadas en la programación del modelo de Markowitz expresado matricialmente:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1/2\,\mu_1 & 1/2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1/2\,\mu_2 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1/2\,\mu_n & 1/2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que la función objetivo y sus restricciones son :

$$Minimizar \qquad V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j$$

Sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq L$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq L$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

Para j=1, 2,…, n.

Posterior a la ejecución del modelo, se crea una cantidad específica de portafolios deseados. Para el caso de esta investigación, se tomó la decisión de confeccionar **ocho** portafolios de los ocho activos seleccionados.

Se inicia con el balance de los datos a programar sabiendo que el 100% a invertir es en el activo con mayor rendimiento anual, en este caso UNH. Para la confección de los portafolios se considera como valor mínimo la tasa libre de riesgo y como valor máximo el mayor rendimiento anual de los ocho activos seleccionados para confeccionarlos. Luego se añade un portafolio de mínima varianza, considerado como el resultado de minimizar la varianza sin importar la rentabilidad y tomando en cuenta pesos mayores que cero y cuya suma sea igual a 1. Además, se establece el portafolio de Sharpe como el que mejor paga en la relación riesgo – rendimiento y se maximiza el indice de Sharpe que es el resultado de dividir la resta de las rentabilidades y la tasa libre de riesgo con la desviación estándar.

Por último, el octavo portafolio es el que contiene el rendimiento del mercado (Índice Dow Jones).

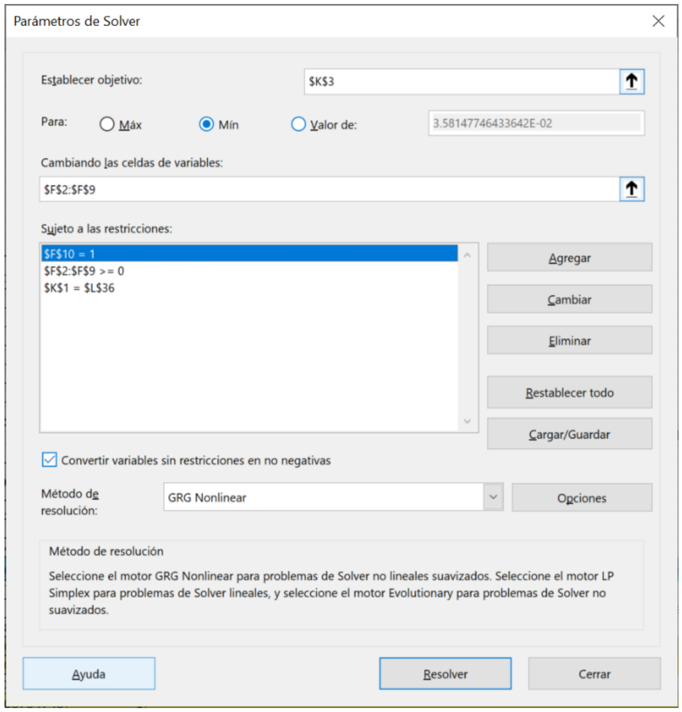
FIGURA 3.6. TABLA DE PORTAFOLIOS CON SU CORRESPONDIENTE DESVIACIÓN ESTÁNDAR, RENDIMIENTO ESPERADO, INDICE DE SHARPE Y BETA, EN BASE A LAS EMPRESAS DEL INDICE DOW JONES SELECCIONADAS PARA INVERTIR, A PARTIR DE PRECIOS DE CIERRE TOMADOS DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.

		0.12%		
PORT. MARKOWITZ	**DESV. ESTÁNDAR**	**REND. ESPERADO**	**IND. SHARPE**	**BETA PORTAFOLIO**
1	0.44%	0.21%	1.97293E-11	0.26936581
2	0.46%	0.32%	0.2590	0.33001
3	0.50%	0.44%	0.469488426	0.40265213
4	0.57%	0.56%	0.616266772	0.47769799
5	0.66%	0.68%	0.711664584	0.55333317
6	0.76%	0.80%	0.7730	0.62993
7	0.87%	0.91%	0.812850061	0.70888353
8	1.35%	1.03%	0.610879211	0.94093218
MIN VAR	0.44%	0.20%	-0.007611179	0.26839714
SHARPE	0.95%	0.99%	0.831523597	0.74887733
DOW JONES	3.02%	0.41%	0.067347432	1
PENDIENTE	0.95%	0.79%	0.615601817	4.14860899
TLR	0	0.21%		

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 3.6 muestra los diversos rendimientos considerados para confeccionar los ocho portafolios, tomando un rendimiento esperado entre la tasa libre de riesgo y el mayor rendimiento anual generado por la empresa UNH con aproximadamente 1.03%. Se toma una proporción de valores de los rendimientos establecidos en ese rango mediante la diferencia del rendimiento de 1.03% y la tasa libre de riesgo de un valor de 0.205% dividido entre los siete restantes portafolios para realizar una proporción equitativa entre cada rendimiento esperado de los portafolios confeccionados. Además, se muestran los portafolios de Mínima Varianza (menor desviación estándar), el de Sharpe (con mayor rendimiento), el del índice Dow Jones (tomado de sus precios de cierre) y finalmente se muestra el portafolio pendiente en la última fila (elemento esencial para trazar la línea o recta de mercado de capitales).

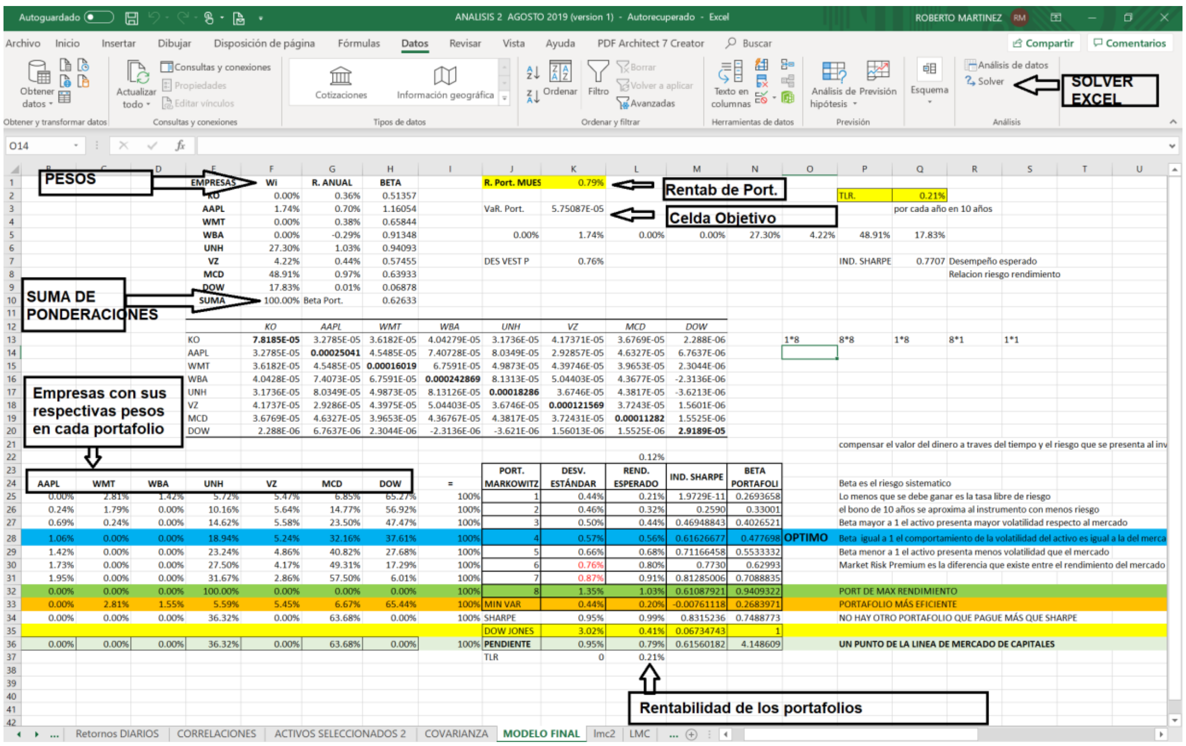
FIGURA 3.7. PARÁMETROS DE SOLVER DE EXCEL CONSIDERADOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL DE HARRY MARKOWITZ CON DATOS DE LOS ACTIVOS SELECCIONADOS EN LA TOMA DE DECISIONES DE CARTERA DE INVERSIÓN 2019



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 3.7 muestra los diferentes parámetros necesarios en la teoría de Harry Markowitz. Se incluyen datos tomados de celdas específicas mostradas en la figura 3.8. Como la celda objetivo (K3), que es la varianza o riesgo del estudio, realizando cambios en las celdas de las ponderaciones W (F2 a F9), el estudio está sujeto a las restricciones donde: la sumatoria de todas las ponderaciones sea igual a 1, las ponderaciones sean mayores o iguales que 0 y finalmente, la rentabilidad sea igual a la rentabilidad esperada (K1) considerada para un portafolio determinado (L25 A L36).

FIGURA 3.8. ESQUEMA DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DE HARRY MARKOWITZ SOBRE UNA HOJA DE EXCEL, CON DATOS DE LOS ACTIVOS SELECCIONADOS EN LA TOMA DE DECISIONES DE CARTERA DE INVERSIÓN 2019



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 3.8 muestra los datos de confección de los portafolios de inversión y detalla las celdas utilizadas por el programa Solver de EXCEL para establecer la curva de portafolios eficientes. En la esquina superior derecha se encuentra la interfaz para ingresar al Solver de Excel, además los pesos Wi de cada una de las empresas consideradas, la rentabilidad, la suma de dichas ponderaciones o pesos obtenidos para cada rentabilidad y cuya celda objetivo sea minimizada. Adicional, se encuentran los cuadros o matrices de varianza –

covarianza, la matriz fila de las ponderaciones y los resultados de inversión para cada uno de los portafolios considerados con las respectivas empresas.

El resultado total de los Betas en la celda M10, se representa como la suma producto de los pesos de los activos con sus respectivas betas.

FIGURA 3.9. RESULTADOS OBTENIDOS CON SOLVER DE EXCEL PARA CADA PORTAFOLIO DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DE HARRY MARKOWITZ SOBRE UNA HOJA DE EXCEL, CON DATOS DE LOS ACTIVOS SELECCIONADOS EN LA TOMA DE DECISIONES DE CARTERA DE INVERSIÓN 2019

AAPL	WMT	WBA	UNH	VZ	MCD	DOW	=	PORT. MARKOWITZ	DESV. ESTÁNDAR	REND. ESPERADO	IND. SHARPE	BETA PORTAFOLIO		Beta es el riesgo sistematico
0.00%	2.81%	1.42%	5.72%	5.47%	6.85%	65.27%	100%	1	0.44%	0.21%	1.97293E-11	0.26936581		Lo menos que se debe ganar es la tasa libre de riesgo
0.24%	1.79%	0.00%	10.16%	5.64%	14.77%	56.92%	100%	2	0.46%	0.32%	0.2590	0.33001		el bono de 10 años se aproxima al instrumento con menos riesgo
0.69%	0.24%	0.00%	14.62%	5.58%	23.50%	47.47%	100%	3	0.50%	0.44%	0.469488426	0.40265213		Beta mayor a 1 el activo presenta mayor volatilidad respecto al mercado
1.06%	0.00%	0.00%	18.94%	5.24%	32.16%	37.61%	100%	4	0.57%	0.56%	0.616266772	0.47769799	OPTIMO	Beta igual a 1 el comportamiento de la volatilidad del activo es igual a la del merca
1.42%	0.00%	0.00%	23.24%	4.86%	40.82%	27.68%	100%	5	0.66%	0.68%	0.711664584	0.55333317		Beta menor a 1 el activo presenta menos volatilidad que el mercado
1.73%	0.00%	0.00%	27.50%	4.17%	49.31%	17.29%	100%	6	0.76%	0.80%	0.7730	0.62993		Market Risk Premium es la diferencia que existe entre el rendimiento del mercado y
1.95%	0.00%	0.00%	31.67%	2.86%	57.50%	6.01%	100%	7	0.87%	0.91%	0.812850061	0.70888353		
0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100%	8	1.35%	1.03%	0.610879211	0.94093218		PORT DE MAX RENDIMIENTO
0.00%	2.81%	1.55%	5.59%	5.45%	6.67%	65.44%	100%	MIN VAR	0.44%	0.20%	-0.007611179	0.26839714		PORTAFOLIO MÁS EFICIENTE
0.00%	0.00%	0.00%	36.32%	0.00%	63.68%	0.00%	100%	SHARPE	0.95%	0.99%	0.831523597	0.74887733		NO HAY OTRO PORTAFOLIO QUE PAGUE MÁS QUE SHARPE
								DOW JONES	3.02%	0.41%	0.067347432	1		
0.00%	0.00%	0.00%	36.32%	0.00%	63.68%	0.00%	100%	**PENDIENTE**	0.95%	0.79%	0.615601817	4.14860899		**UN PUNTO DE LA LINEA DE MERCADO DE CAPITALES**

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 3.9 muestra los resultados para cada uno de los portafolios confeccionados uno a uno con el programa Solver de Excel, así:

- En color verde, se resalta el portafolio de máximo rendimiento, el cual contribuye a balancear el modelo reconociendo que el 100% es sobre UNH.
- En color naranja se muestra el portafolio más eficiente porque es el de mínima varianza de todos los considerados, pero no implica que es la mejor opción dado que su rendimiento es de solo 0.20% a diferencia de los demás.
- En color azul se muestra el Portafolio OPTIMO que especifica que se debe invertir un 1.06% en APPL, no invertir en WMT ni en WBA, utilizar el 18.94% en UNH, 5,24% en VZ , 32.16% en MCD y 37.61% en DOW.

Con este portafolio OPTIMO, se tiene un rendimiento de 0.56% con un riesgo de 0.57%. Más adelante, se mostrará porqué el portafolio ÓPTIMO es el antes mencionado.

Además, se pueden resaltar algunos conceptos importantes:

- La beta es el riesgo sistemático del portafolio, es decir, aquel no diversificable que depende del mercado en donde se cotiza y no se puede reducir.
- Lo menos que se debe ganar es la tasa libre de riesgo.
- El bono de 10 años se considera para la tasa libre de riesgo porque se aproxima a ser menos riesgoso por su duración, aunque se puede considerar de uno o cinco años, a decisión del inversor.
- Una Beta mayor que 1 indica que el activo presenta mayor volatilidad respecto al mercado, representando mayor incertidumbre o riesgo.
- Una Beta igual a 1 implica que el comportamiento de la volatilidad del activo es igual a la del mercado.
- Una Beta menor a 1 significa que el activo presenta menos volatilidad que el mercado.
- No hay un portafolio que pague más que el denominado de Sharpe.
- Market Risk Premium es la diferencia que existe entre el rendimiento del mercado y la Tasa Libre de Riesgo, dando como resultado el rendimiento que se paga para compensar el riesgo al que se está incurriendo.

En la figura 3.9, se adiciona en color verde claro un portafolio denominado PENDIENTE, el cual representa un punto de la línea de mercado de capitales y se detalla más adelante su forma de obtención.

3.4- Planteamiento de la teoría de Sharpe y la recta de mercado de capitales

La teoría de Sharpe añade al modelo de Markowitz la llamada Línea o Recta de Mercado de Capitales, la cual posee como uno de sus puntos la tasa libre de riesgo (porcentaje considerado para 10 años, pidiendo prestado al tesoro del estado en esta investigación). El valor de la tasa libre de riesgo es de 0.205%. En la gráfica se muestra sin riesgo. Esta tasa del tesoro de los Estados Unidos es considerada Libre de Riesgo, ya que al pedirle prestado al estado se tiene menos probabilidad de que los intereses en el tiempo aumenten y con ello no exista pérdida, por lo tanto, la varianza es igual a cero para la tasa libre de riesgo.

Con dicho punto y la pendiente de la recta, se puede trazar la Línea de mercado de capitales y su intersección con la frontera eficiente de Markowitz, lo cual representará el portafolio o cartera óptima para invertir. Es importante añadir que lo menos que se debe ganar es la tasa libre de riesgo.

Como se había indicado en el marco teórico, la pendiente de la función de rendimiento esperado de la cartera combinada no posee un único valor, ya que el mismo depende de la cartera eficiente con la cual se combine el activo libre de riesgo. De esta manera la pendiente depende indirectamente de las proporciones a invertir en los activos aleatorios que conforman una cartera eficiente, con lo que se tiene:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j E_j - \boldsymbol{R_L}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j V(x) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i>j}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}}}$$

El Criterio de la Media – Varianza, asegura que un inversor racional preferirá, para un determinado riesgo, obtener el máximo rendimiento esperado. Por lo tanto, se debe determinar la composición de la cartera eficiente para $-n$ valores mobiliarios riesgosos que maximizan la pendiente.[4](Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.).

Por lo que se tiene el siguiente problema:

$$\boldsymbol{Max} \quad \left[\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{L} - \boldsymbol{R_L}}{\boldsymbol{\sigma_P}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j (E_j - \boldsymbol{R_L})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j V(x) + \mathbf{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i>j}^{n} x_j x_i \sigma_{ij}}} \right]$$

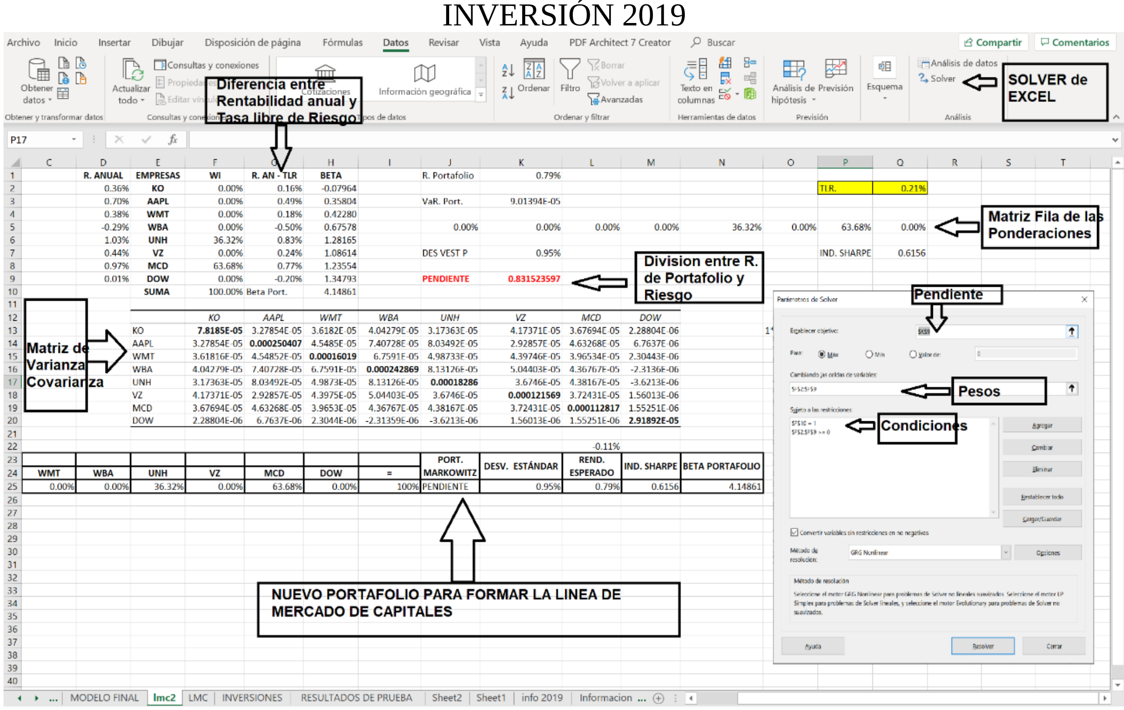
$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \qquad para\; j = 1, 2, \ldots, n$$

Así se especifica la programación de la pendiente de la recta LMC:

FIGURA 3.10. RESULTADOS OBTENIDOS CON SOLVER DE EXCEL PARA FORMAR LA RECTA DE MERCADO DE CAPITALES, CON DATOS DE LOS ACTIVOS SELECCIONADOS EN LA TOMA DE DECISIONES DE CARTERA DE INVERSIÓN 2019



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja LMC2.

La figura 3.10 muestra el portafolio denominado como PENDIENTE, que permite la construcción de la Línea o Recta de Mercado de Capitales junto a la gráfica de Frontera Eficiente.

Según la teoría, la pendiente se forma maximizando la celda pendiente como resultado de la división de la Rentabilidad (K1) y la Desviación Estándar (K7). Para este modelo se considera la diferencia entre la Rentabilidad Anual de cada activo con la Tasa Libre de Riesgo, la cual es utilizada junto a la fórmula de la rentabilidad como una suma-producto, descrita en EXCEL así: =SUMAPRODUCTO(F2:F9;G2:G9). De igual forma que el modelo inicial, se mantienen las matrices fila y columna de las ponderaciones junto a la matriz de varianza-covarianzas cuyos valores son considerados para obtener la varianza en la celda K3 con la fórmula =MMULT((MMULT(J5:Q5;F13:M20));F2:F9).

Además, en la celda K7 se obtiene la desviación estándar con la raíz cuadrada de la varianza. Al modelo se le añaden restricciones donde la suma de los pesos debe ser igual a 1 y no menores a 0, haciendo cambios en la columna de pesos Wi.

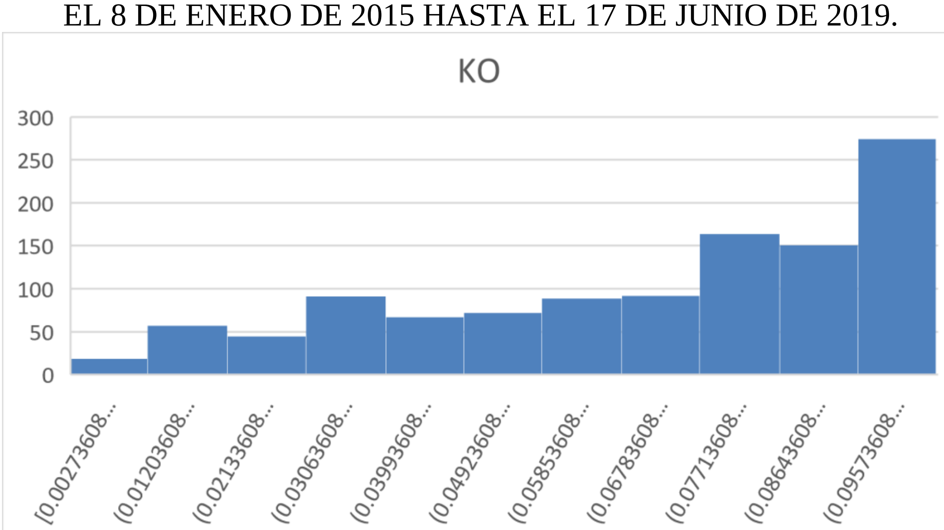
Es notorio que los resultados obtenidos a partir de Solver de EXCEL, indican que el portafolio pendiente de LMC recomienda una inversión únicamente en dos de las ocho empresas seleccionadas para invertir siendo el 36.32% en UNH y el 63.68% en MCD.

3.5- Ejecución del modelo mediante la teoría de Konno y Yamazaki

Daniel Villalba en su artículo titulado: **"Un modelo de selección de carteras con escenarios y función de riesgo asimétrica",** *señala que la teoría de Konno y Yamazaki es un* modelo planteado en 1991 por Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaki y fue aplicado a la Bolsa de Tokio, el cual se basa en la minimización de las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media de la cartera y sujeta a las mismas restricciones del modelo de Harry Markowitz. Este modelo verifica que, si las rentabilidades de los activos se comportan como una distribución normal, minimizar la varianza como una función cuadrática de la matriz varianza – covarianza; es equivalente a minimizar las desviaciones absolutas respecto a la media; permitiéndose resolver el problema mediante programacion lineal.

En la investigación realizada se consideró desde un principio las rentabilidades medias de los activos para la elección de las mejores relaciones riesgo rendimiento y la posterior confección de la matriz de varianza – covarianza. Además, para la construcción de la frontera eficiente se consideran valores de las rentabilidades esperadas con una diferencia entre el activo de mayor rentabilidad y la tasa libre de riesgo. Igualmente, se toma de referencia los resultados de las desviaciones estándar para cada una de las rentabilidades consideradas.

FIGURA 3.11. GRÁFICA DE DISTRIBUCIÓN DE LAS RENTABILIDADES DE LA EMPRESA COCA COLA, A PARTIR DE RENTABILIDADES HISTÓRICAS DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja NORMALIDAD2.

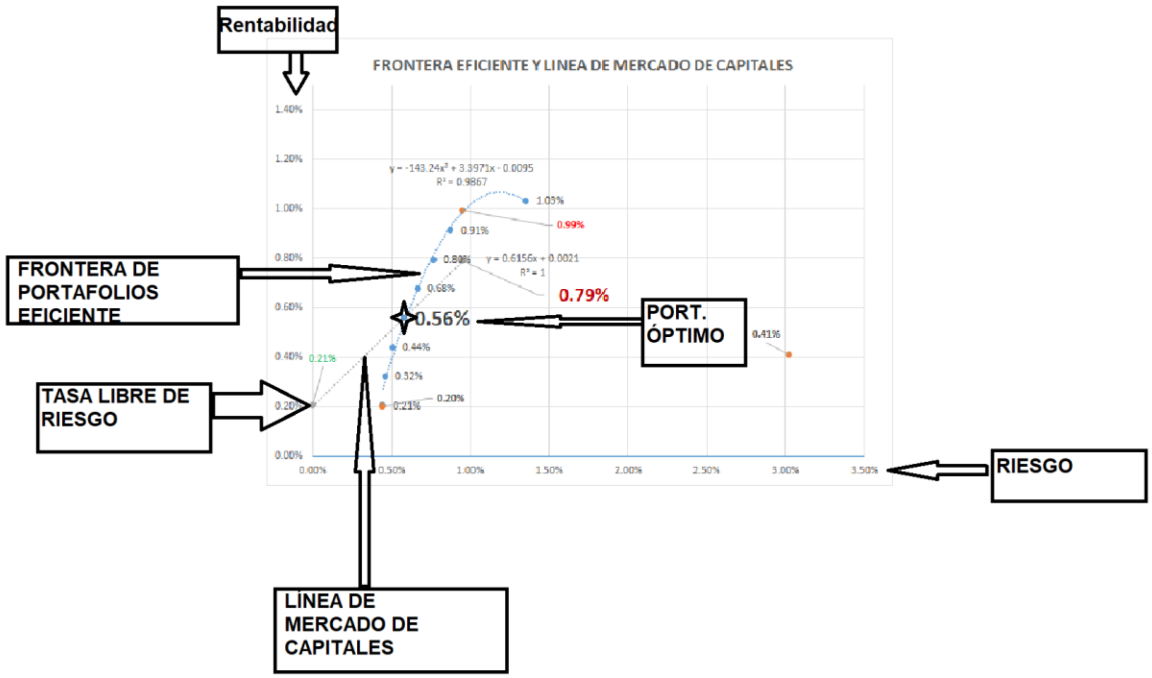
La figura 3.11. muestra como ejemplo una gráfica con distribución de datos sesgada a la izquierda (la media de los datos es menor que su mediana). Es notorio una distribución de datos no tanto normal, probablemente debido a la variación de los precios de cierre de las acciones de Coca Cola, durante el tiempo. Con esta gráfica se tiene una referencia para la aplicación del modelo de Konno y Yamazaki en la toma de decisiones de inversión de activos financieros.

3.6- Establecimiento del portafolio óptimo

Para hallar el portafolio óptimo, se traza la curva de la frontera de portafolios eficientes confeccionados a partir de rentabilidades esperadas: entre la máxima rentabilidad y la tasa libre de riesgo. Además, a la gráfica se añade la Línea o Recta de Mercado de Capitales (LMC) a partir de dos elementos: la tasa libre de riesgo y el portafolio Pendiente. La intersección entre ambas líneas es el PORTAFOLIO O CARTERA ÓPTIMA.

Se recuerda que la tasa libre de riesgo es el valor del tesoro del estado a diez años; dicho punto se considera como de riesgo nulo o cero y de 0.205% de rentabilidad en el caso de esta investigación.

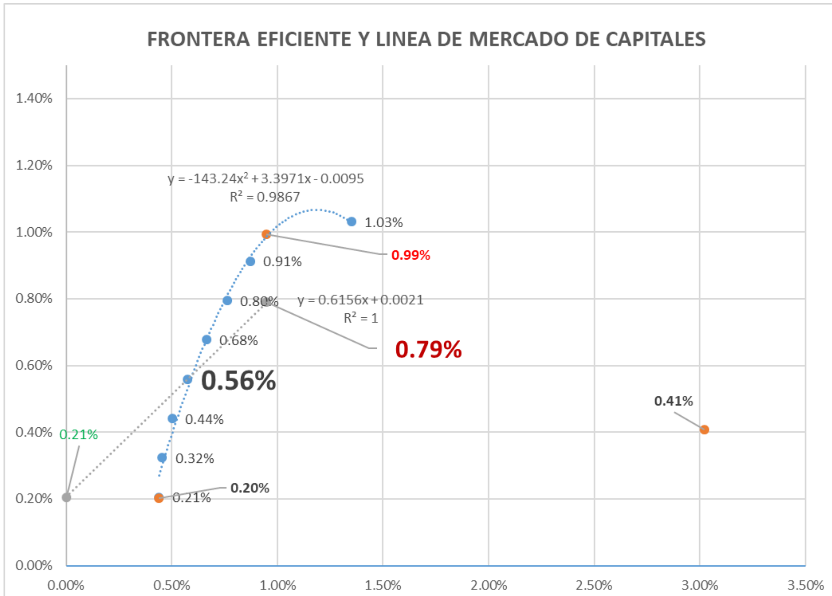
FIGURA 3.12. GRÁFICA DE LA FRONTERA EFICIENTE Y LA RECTA DE MERCADO DE CAPITALES DE LAS OCHO EMPRESAS SELECCIONADAS PARA INVERTIR A PARTIR DE SUS DATOS HISTÓRICOS CONSIDERADOS DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

En la figura 3.12 se muestra la gráfica con la intersección entre la frontera eficiente de Harry Markowitz y la Línea o Recta de Mercado de Capitales de Sharpe y Tobin, luego de realizar los respectivos análisis y aplicar a cada portafolio la programación no lineal respecto a ciertas condiciones, mediante Solver de EXCEL y cada punto de la gráfica representa un portafolio o cartera en la relación RIESGO – RENDIMIENTO. Como dato sobresaliente la intersección es el portafolio ÓPTIMO con un 0.56% de rentabilidad y 0.57% de riesgo.

FIGURA 3.12.1 GRÁFICA DE LA FRONTERA EFICIENTE Y LA RECTA DE MERCADO DE CAPITALES DE LAS OCHO EMPRESAS SELECCIONADAS PARA INVERTIR A PARTIR DE SUS DATOS HISTÓRICOS CONSIDERADOS DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

En la figura 3.12.1, se muestran los resultados del estudio realizado. (Esta imagen no tiene las especificaciones de la figura 3.12, para apreciar los resultados).

FIGURA 3.13. TABLA DE PONDERACIONES DEL PORTAFOLIO O CARTERA ÓPTIMA DE LAS OCHO EMPRESAS SELECCIONADAS PARA INVERTIR A PARTIR DE SUS DATOS HISTÓRICOS CONSIDERADOS DESDE EL 8 DE ENERO DE 2015 HASTA EL 17 DE JUNIO DE 2019.

KO	AAPL	WMT	WBA	UNH	VZ	MCD	DOW	=	PORT. MARKOWITZ	DESV. ESTÁNDAR	REND. ESPERADO	IND. SHARPE	BETA PORTAFOLIO	
4.99%	1.06%	0.00%	0.00%	18.94%	5.24%	32.16%	37.61%	100%	4	0.57%	0.56%	0.616266772	0.477697986	OPTIMO

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja MODELO FINAL.

La figura 3.13. muestra las ponderaciones para cada uno de los activos seleccionados del PORTAFOLIO ÓPTIMO.

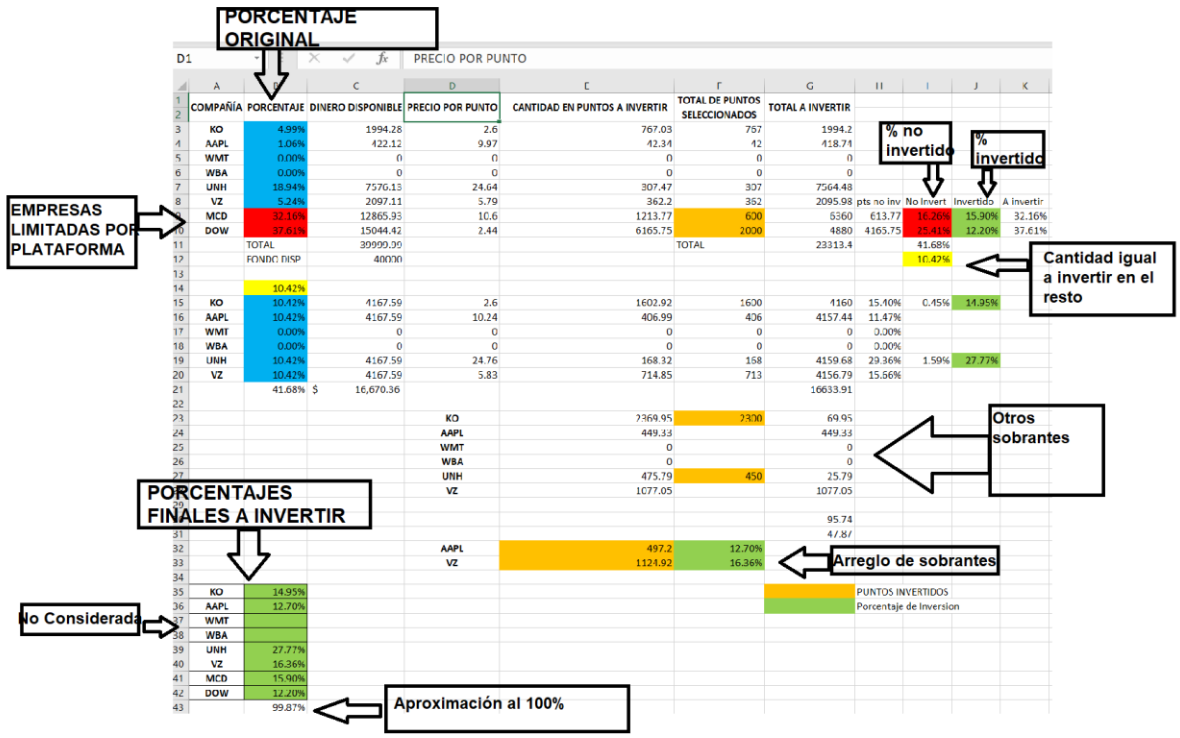
El resultado del modelo indica que el capital a invertir en el Índice DOW JONES, es necesario que sea distribuido de la siguiente forma: 4.99% en Coca Cola, 1.06% en Apple, 18.94% en United Health Group Incorporated, 5.24% en Verizon, 32.16% en McDonald's, y 37.61% en Dow, siendo el mayor porcentaje para la empresa Dow (una nueva empresa que entró a cotizar dentro de este mercado desde enero de 2019, lo cual puede causar sesgos en los resultados tomando en cuenta el resto de las empresas que invertían desde el 2015 hasta el 2019, fechas que se tomaron de referencia en los precios históricos . Dicho portafolio tiende a ser el ÓPTIMO con un riesgo de tan solo 0.57% y un rendimiento esperado de 0.56%.

3.7- Inversión en el portafolio óptimo dentro de la aplicación de Trading 212

Una vez determinado el PORTAFOLIO ÓPTIMO, se procede a realizar una inversión NO REAL de $40 000.00 con un fondo de $50 000.00 que proporciona de manera ficticia para la práctica y se asemeja a la realidad dentro de la aplicación TRADING 212. Se toma la decisión de invertir $40 000.00, para evitar deudas si llegase a ocurrir luego de realizar las inversiones correspondientes. La cuenta DEMO o FICTICIA en TRADING 212, es muy cercana a la realidad del mercado por lo cual se realiza la inversion según los porcentajes arrojados por el modelo matemático y la cantidad permitida para cada activo seleccionado, estos son: KO, APPL, UNH, VZ, MCD, DOW.

La plataforma TRADING 212, posee limitantes en cuanto a puntos máximos en los cuales un inversor (para una cuenta DEMO) pueda invertir, estos puntos tienen un precio especifico que pudieran ser traducidos como el valor de las acciones de una determinada empresa. Al tener esa dificultad, el modelo confeccionado no incluye estas restricciones propias del intermediador (TRADING 212), por lo que se realizaron algunos ajustes apropiados y justos, con tal de que no se afectara tanto nuestro modelo, así como se aprecia en la siguiente figura:

FIGURA 3.14. TABLA DE AJUSTE PORCENTUAL EN EL PORTAFOLIO O CARTERA ÓPTIMA DE LAS OCHO EMPRESAS SELECCIONADAS PARA INVERTIR DEBIDO A LAS RESTRICCIONES DE LA PLATAFORMA TRADING 212 Y LOS PRECIOS DE SUS PUNTOS O ACCIONES PARA CADA EMPRESA EN EL INDICE DOW JONES DESDE EL 8 DE JULIO DE 2019.



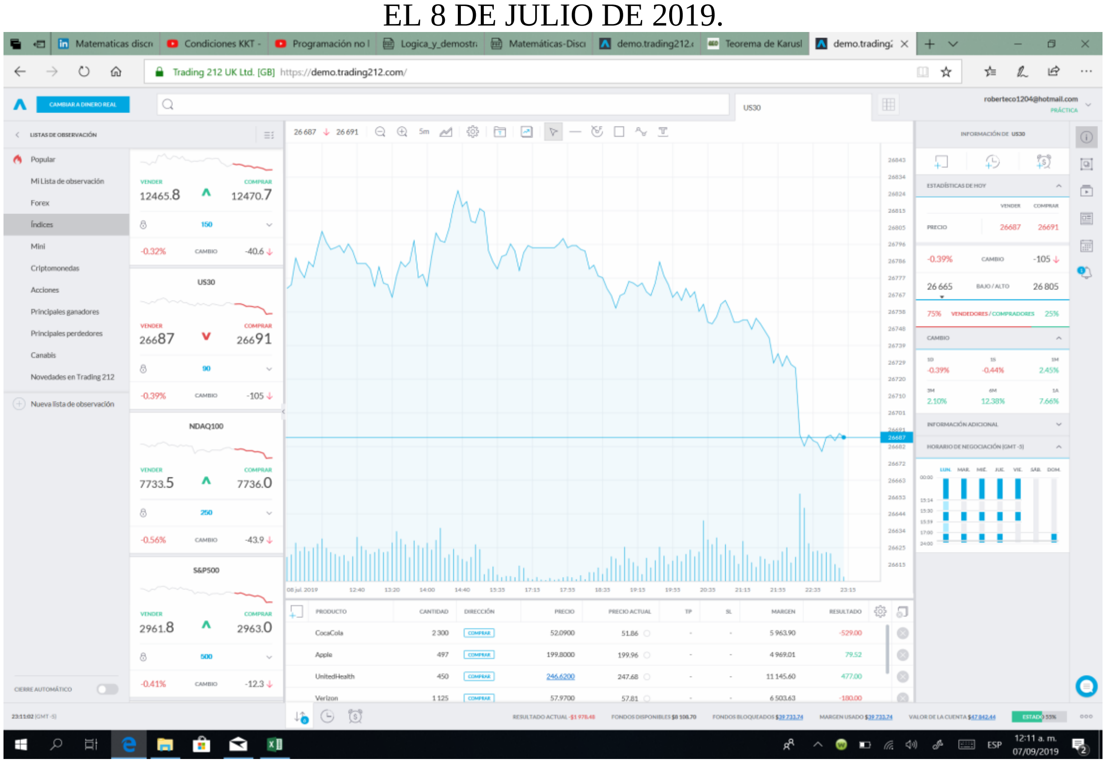
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1-2	COMPAÑÍA	PORCENTAJE	DINERO DISPONIBLE	PRECIO POR PUNTO	CANTIDAD EN PUNTOS A INVERTIR	TOTAL DE PUNTOS SELECCIONADOS	TOTAL A INVERTIR				
3	KO	4.99%	1994.28	2.6	767.03	767	1994.2				
4	AAPL	1.06%	422.12	9.97	42.34	42	418.74				
5	WMT	0.00%	0	0	0	0	0				
6	WBA	0.00%	0	0	0	0	0				
7	UNH	18.94%	7576.13	24.64	307.47	307	7564.48				
8	VZ	5.24%	2097.11	5.79	362.2	362	2095.98	pts no inv	No Invert	Invertido	A invertir
9	MCD	32.16%	12865.93	10.6	1213.77	600	6360	613.77	16.26%	15.90%	32.16%
10	DOW	37.61%	15044.42	2.44	6165.75	2000	4880	4165.75	25.41%	12.20%	37.61%
11		TOTAL	39999.99			TOTAL	23313.4		41.68%		
12		FONDO DISP	40000						10.42%		
13											
14		10.42%									
15	KO	10.42%	4167.59	2.6	1602.92	1600	4160	15.40%	0.45%	14.95%	
16	AAPL	10.42%	4167.59	10.24	406.99	406	4157.44	11.47%			
17	WMT	0.00%	0	0	0	0	0	0.00%			
18	WBA	0.00%	0	0	0	0	0	0.00%			
19	UNH	10.42%	4167.59	24.76	168.32	168	4159.68	29.36%	1.59%	27.77%	
20	VZ	10.42%	4167.59	5.83	714.85	713	4156.79	15.56%			
21		41.68%	$ 16,670.36				16633.91				
22											
23				KO	2369.95	2300	69.95				
24				AAPL	449.33		449.33				
25				WMT	0		0				
26				WBA	0		0				
27				UNH	475.79	450	25.79				
28				VZ	1077.05		1077.05				
29											
30							95.74				
31							47.87				
32				AAPL	497.2	12.70%					
33				VZ	1124.92	16.36%					
34											
35	KO	14.95%						PUNTOS INVERTIDOS			
36	AAPL	12.70%						Porcentaje de Inversion			
37	WMT										
38	WBA										
39	UNH	27.77%									
40	VZ	16.36%									
41	MCD	15.90%									
42	DOW	12.20%									
43		99.87%									

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja INVERSIONES.

La figura 3.14 muestra algunas adecuaciones que se le realizó a los porcentajes dados por el modelo matemático confeccionado. Es importante recordar, que estos cambios no estaban considerados en el modelo dado que la plataforma TRADING 212 establece restricciones en limitaciones al momento de comprar las acciones de las empresas.

En color azul, se observan los precios originales de todas las acciones y en rojo las dos empresas cuyo porcentaje excedía a la cantidad permitida por la plataforma y con ello los porcentajes que no se pudieron invertir entre MCD y DOW siendo un total de 41.68%. Este total se subdividió entre las cuatro empresas restantes dentro del portafolio, para que fuera equitativa la repartición a KO, APPL, UNH y VZ; siendo un 10.42% para cada una. De estas, se limitaron las empresas KO y UNH quedando un faltante de porcentaje que fue repartido al resto de las empresas que aún permitía la plataforma poder comprar, siendo estas: AAPL y VZ. En amarillo se pueden diferenciar los totales de puntos o acciones invertidos en cada empresa y en color verde se pueden apreciar los porcentajes de inversión finales siendo: 14.95% para Coca Cola, 12.70% en Apple, 27.77% en UNH, 16.36% en Verizon, 15.90% para McDonald's y un 12.20% en Dow totalizando casi un 100%.

FIGURA 3.15. GRÁFICO E INVERSIONES REALIZADAS DENTRO DE LA CUENTA DEMO DE TRADING 212 Y LOS RESULTADOS DE CIERRE DE LA PRIMERA FECHA A PARTIR DE LOS PORCENTAJES ESTABLECIDOS DESDE EL 8 DE JULIO DE 2019.



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

En la figura 3.15, se muestra el uso de la plataforma TRADING 212 en la primera fecha de cierre luego de la inversión en las diferentes empresas seleccionadas.

Se aprecia una gráfica de variaciones de precios por horas del Índice Dow Jones durante el día. En la parte inferior se observan las empresas seleccionadas y sus precios de cierre, indicando en color rojo las pérdidas y en verde las ganancias. Por ejemplo, ese día Coca Cola cerró con una pérdida para nuestra inversión de $ 529.00, mientras que UnitedHealth Group Incorporated cerró con una ganancia de $477.00.

Se puede apreciar el resultado de la sumatoria o resultado actual de los precios de cierre para las empresas seleccionadas, siendo una pérdida de $1 948.48. Además, se muestran los fondos disponibles con un total de $8 108.70 (no hay deudas); los fondos bloqueados, representan el valor que se invirtió exactamente: $39 733.74 y el valor de la cuenta que está en: $47 042.44.

Es importante aclarar que la plataforma TRADING 212 exige realizar un pago (ficticio) por comisiones que se cobran por utilizar esta plataforma para invertir, por lo que de los $50 000.00 de práctica, el valor de la cuenta se redujo a los mencionados $47 042.44.

3.8- Resultados de prueba de la inversión realizada

Los resultados de prueba de la inversión realizada dentro de la plataforma TRADING 212 se basan en los precios de cierre para cada empresa de la cartera al final del primer y último día de cada semana, observando si hubo ganancias en la inversión sobre los activos comprados (valores en verde) o pérdidas en la inversión (valores en rojo).

El estudio se realizó en las semanas que comprenden entre el 8 de julio y el 6 de septiembre de 2019, para cada uno de los activos seleccionados dado al modelo.

Durante el transcurso hubo bajas o pérdidas, esto debido a problemas de carácter económicos – tecnológicos entre Estados Unidos y China. El modelo confeccionado para esta investigación no considera los problemas que pudieran afectar y ocasionar pérdidas en la inversión.

Además, es importante aclarar que cuando ocurren pérdidas significativas lo recomendable es pasar al proceso de compra y venta de activos financieros buscando un beneficio, es decir, que es necesario crear un nuevo modelo con los últimos datos históricos haciendo una posible variación en la inversión de nuevos activos del índice, o bien arriesgarse a la normalización del mercado.

Por otro lado, al considerar una tasa libre de riesgo en la inversión como el tesoro del estado a 10 años, podría asegurar por ese lapso las inversiones.

La investigación realizada muestra únicamente el comportamiento en el tiempo de las inversiones realizadas a partir del modelo de Harry Markowitz y Sharpe, el cual no incluye realizar ventas en corto; es decir, que lo que se busca analizar es la eficiencia del modelo implementado en la actualidad al invertir dentro del Indice Dow Jones en la actualidad y utilizando herramientas tecnológicas como TRADING 212 y EXCEL.

FIGURA 3.16. TABLA DE PRECIOS DE CIERRE DE LAS EMPRESAS SELECCIONADAS EN LA CARTERA O PORTAFOLIO PARA INVERTIR DENTRO DE LA CUENTA DEMO DE TRADING 212 DESDE EL 8 DE JULIO HASTA EL 6 DE SEPTIEMBRE DE 2019

	Fecha	DÍA	GANANCIA	KO	AAPL	UNH	VZ	MDC	DOW
1	08/07/2019	**Lunes 8-7**	**-1978.48**	-529.00	79.52	477.00	-180.00	-1206.00	-620.00
2	12/07/2019	**Viernes 12-7**	**11219.84**	-69.00	1600.34	8676.00	-967.50	180.00	1800.00
3	15/07/2019	**Lunes 15-7**	**15461.67**	-230.00	2539.67	8604.00	-540.00	888.00	4200.00
4	19/07/2019	**Viernes 19-7**	**7997.46**	-2093.00	1207.71	4419.00	-1676.25	720.00	5420.00
5	23/07/2019	**Martes 23-7**	**18847.99**	5451.00	3936.24	3681.00	-2936.25	1056.00	7660.00
6	27/07/2019	**Sábado 27-7**	**11506.65**	4922.00	3081.40	2331.00	-1293.75	2106.00	360.00
7	29/07/2019	**Lunes 29 -7**	**11335.30**	4117.00	4796.05	3172.50	-776.25	1566.00	-1540.00
8	03/08/2019	**Sabado 3-8**	**-5345.12**	46.00	2132.13	958.50	-3093.75	1212.00	-6600.00
9	06/08/2019	**Martes 6-8**	**-14080.59**	-322.00	-1973.09	567.00	-3532.50	0.00	-8820.00
10	09/08/2019	**Viernes 9-8**	**-2400.57**	2737.00	636.16	873.00	-2486.25	219.52	-4380.00
11	12/08/2019	**Lunes 12-8**	**-8566.68**	2323.00	288.26	-1669.50	-2700.00	-488.44	-6320.00
12	16/8/2019	**Viernes 16-8**	**-2832.380**	5336.00	2485.00	-373.50	-1440.00	-299.88	-8540.00
13	19/8/2019	**Lunes 19-8**	**1763.35**	5566.00	5094.25	-1215.00	-967.50	-274.40	-6440.00
14	24/8/2019	**Viernes 24-8**	**-3764.98**	3220.00	1510.88	-7582.50	0.00	-913.36	0.00
15	26/8/2019	**Lunes 26-8**	**31.74**	4830.00	3031.70	-7191.00	0.00	-638.96	0.00
16	30/8/2019	**Viernes 30 -8**	**4706.65**	6900.00	4398.45	-5994.00	0.00	-597.80	0.00
17	03/09/2019	**Martes 3-9**	**1956.78**	7107.00	2842.84	-7285.50	0.00	-707.56	0.00
18	06/09/2019	**Viernes 6-9**	**5522.71**	6854.00	6664.77	-8023.50	0.00	27.44	0.00
		ACUMULADO	**51381.34**	**56166.00**	**44352.28**	**-5575.50**	**-22590.00**	**2848.56**	**-23820.00**

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

La tabla de la figura 3.16, muestra que del capital invertido el día 6 de agosto de 2019, se obtuvo una pérdida de 14 080.59, siendo la más alta. La observación que se ha realizado en este día fue la siguiente: "***Wall Street cerró este lunes con las mayores pérdidas porcentuales del año en sus tres indicadores, del 2.90% en el caso del Dow Jones de Industriales, en reacción a la escalada en la guerra comercial EE.UU.-China y a la depreciación del yuan a niveles de 2008".***

Sin embargo, la tabla muestra que la mayor ganancia que se obtuvo fue de $18 847.99 el día 23 de julio de 2019, la observación realizada para este día fue la siguiente: "***Esta semana el Dow Jones perdió un 0.46% cerrando el viernes con un incremento del 0.1%. El jueves 25 de julio 18 de los 30 componentes cerraron con valores en rojo".***

Además, se puede observar que la empresa que siempre se mantuvo aportando ganancias a la inversión con más valores verdes fue Apple; mientras que la empresa que arrojó mayores pérdidas al capital invertido fue Verizon que en las últimas fechas la plataforma eliminó de la cartera en estudio de esta investigación, desde el viernes 24 de agosto de 2019. Otra de las empresas que arrojó muchos valores negativos fue Dow seguida de McDonald’s.
Verizon y Dow, no se continuaron cotizando en esta investigación debido al elevado costo de sus acciones y el capital era casi nulo que impedía poder comprarlo. Es importante recordar que la investigación solo se basa en la compra de activos y su comportamiento en el tiempo, no así en la compra y venta que es lo recomendable realizar en la práctica.
Por otro lado, McDonald’s arrojo valores negativos pero el capital permitió poder mantenerlo hasta su mejora el viernes 6 de septiembre.

Por los resultados obtenidos, las acciones que se consideran dentro de la cartera pudieran ser una opción óptima, pero por sucesos que ocurren en el tiempo que afectan las ganancias tales como la guerra comercial China – Estados Unidos, pudiera ser un factor para desestimar las acciones consideradas.

Es importante resaltar el precio de las acciones de la cartera en estudio al inicio de la inversión:

COMPAÑÍA	PRECIO POR PUNTO
KO	2.60
AAPL	9.97
WMT	0
WBA	0
UNH	24.64
VZ	5.79
MCD	10.60
DOW	2.44

El precio es dado por la plataforma Trading 212, por puntaje. Comparando su precio unitario con lo obtenido en la tabla de la figura 3.16, se demuestra que las empresas que obtuvieron más valores positivos fueron: UNH, KO y APPL, mientras que las otras tres obtuvieron mayores números negativos o resultaron tener que salirse de la cartera (acción interpuesta por la misma plataforma de trading).

La acción más costosa fue UNH y generó ganancias en la mayor parte del estudio, pero KO y APPL tenían precios relativamente bajos y fueron las que aun más generaban ganancias, pero no las suficientes para que la inversión fuera exitosa.

Uno de los factores que pudieron influir dentro de la toma de decisiones fueron las restricciones en la posibilidad de inversión en un activo determinado, lo que quizás obliga a realizar un cambio en el monto inicial de inversión de una cantidad de $40 000.00 de inversión y disminuirla para experimentar la posibilidad de ajustarse a los requisitos de restricción que implica realizar compras en la plataforma de trading 212.

Otro de los efectos que pudieron intervenir en la adquisición de mejores resultados fue la ejecución de ventas en corto o apalancamiento, o bien realizar compras y ventas con un cambio o variación en el modelo.

Finalmente, la tabla 3.16 indica que se empezó con pérdidas a la inversión por $ 1 978.48, semanas más tarde mejoró con ganancias de $18 847.99, pero nuevamente volvió a caer con pérdidas de $14 080.59, lográndose recuperar semanas después con ganancias de $4 706.65 para que en la última fecha considerada para el estudio se obtuviera una ganancia de $5 522.71. Cerrándose el estudio con solo cuatro de las seis empresas consideras, dado que la empresa Verizon y Dow fueron eliminadas de la cartera por la propia plataforma desde el día 24 de agosto de 2019, al no tener los fondos suficientes para poder seguir invirtiendo en ellas, por lo que no se pudo observar las variaciones de cierre en ellas hasta el final del estudio.

Es importante saber que el estudio podía haberse realizado con mayor tiempo dado a la consideración de 10 años de la tasa libre de riesgo considerada. En el tiempo pudieron existir mejorías, así como caídas de la bolsa y con ellas pérdidas en las inversiones en donde el inversionista llega al límite de tomar las decisiones respectivas que contribuyan a la búsqueda de sus objetivos de inversión.

TABLA DE REPORTES CON LOS PRECIOS DE CIERRE DE LOS PRIMEROS Y ULTIMOS DÍAS DE LAS SEMANAS DE OBSERVACIÓN

La siguiente tabla muestra el reporte o noticia del día, dado por la página https://es.investing.com/indices/us-30-news, la misma indica reportes que pueden dar razones para los resultados de cierre en los días de observación. Como por ejemplo, el reporte del primer día de observación dice que el mercado cierra a la baja por problemas en Wall Street y es notorio porque se obtuvo una pérdida considerable de $1 978.48 en la inversión.

Fecha	**DÍA**	**TOTAL DE CIERRE**	**REPORTE DEL DÍA**
08/07/2019	**Lunes 8-7**	**-1978.48**	Mercado cierra a la baja, problemas en Wall Street. Por segundo día consecutivo, las compañías de salud y tecnología encabezaron las pérdidas como Apple con un 2.1%. El Dow Jones perdió 115 unidades representando 0.4%.
12/07/2019	**Viernes 12-7**	**11219.84**	Mercado cierra con subidas del 1% en la semana y máximos históricos. El Dow Jones cierra con un aumento del 0.9%. A pesar de que Jerome Powell presidente del Fed indicara que el mercado obtendría al 31 de julio una caída.
15/07/2019	**Lunes 15-7**	**15461.67**	Los tres principales índices estadounidenses cerraron una jornada tambaleante con ganancias LEVES, pero suficientes para registrar un nuevo récord. Las pérdidas opacaron las ganancias en tecnología, salud y otros sectores. El Dow Jones aumentó 27 unidades representando el 0.1%.
19/07/2019	**Viernes 19-7**	**7997.46**	El Wall Street inicia la jornada del viernes con números positivos, pero no logra salvar la semana. Inicia la semana al alza, pero en el cómputo semanal el índice registra un saldo negativo. La Fed anuncia una política monetaria más agresiva por parte del banco central estadounidense. El DJ obtiene +0.34% en la jornada. cerrando Microsoft con un alza del 2.3%.
23/07/2019	**Martes 23-7**	**18847.99**	*No se encontró reporte*

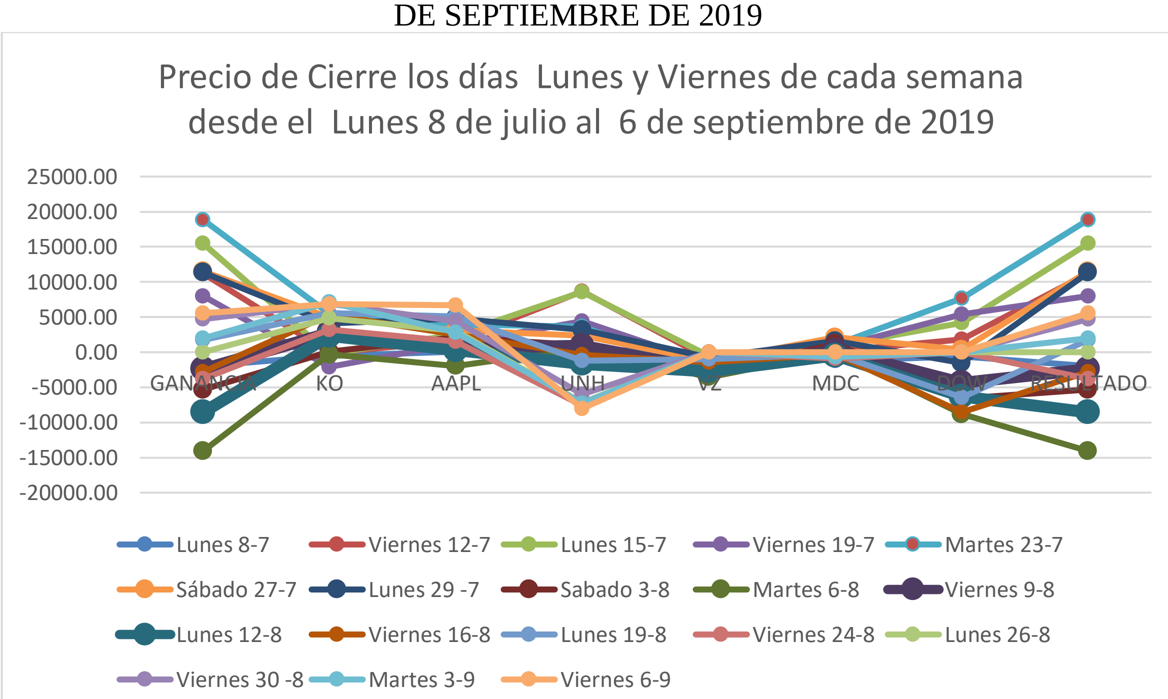
27/07/2019	**Sábado 27-7**	11506.65	Esta semana el Dow Jones perdió un 0.46% cerrando el viernes con un incremento del 0.1%. El jueves 25 de julio 18 de los 30 componentes cerraron con valores rojo.
29/07/2019	**Lunes 29 -7**	11335.30	El Dow Jones escala 0.1%. Ocho de las 30 acciones subieron 1% incluyendo a Apple
03/08/2019	**Sábado 3-8**	-5345.12	Debido a guerra comercial y los tweets emitidos por Donald Trump el DOW JONES cierra la semana a la baja y se sumergió bajando 334 puntos representando un 0.4% y la mayor parte de sus números en rojo.
06/08/2019	**Martes 6-8**	-14080.59	Wall Street cerró este lunes con las mayores pérdidas porcentuales del año en sus tres indicadores, del 2,90% en el caso del Dow Jones de Industriales, en reacción a la escalada en la guerra comercial EE.UU.-China y a la depreciación del yuan a niveles de 2008.
09/08/2019	**Viernes 9-8**	-2400.57	El índice Dow Jones de la Bolsa de Valores de Nueva York cerró este día con una pérdida de 90.75 puntos (0.34%) para ubicarse en 26 287.44 unidades.
12/08/2019	**Lunes 12-8**	-8566.68	La Bolsa de Estados Unidos cerró con descensos este lunes; los retrocesos de los sectores materiales básicos, finanzas, e industria, impulsaron a los índices a la baja. Al cierre de Nueva York, el Dow Jones Industrial Average retrocedió un 1,48%. Verizon tuvo un alza de 0.20%
16/8/2019	**Viernes 16-8**	-2832.380	La Bolsa de Estados Unidos cerró con avances este viernes; las ganancias de los sectores industria, materiales básicos, y tecnología impulsaron a los índices al alza. Al cierre de Nueva York, el Dow Jones Industrial Average avanzó un 1,20%.
19/8/2019	**Lunes 19-8**	1763.35	Las palabras del presidente de EEUU dan alas al mercado. Wall Street ha registrado subidas por encima del 1% este lunes.
24/8/2019	**Viernes 24-8**	-3764.98	El presidente de Estados Unidos, Donald Trump, confirmó hoy dos subidas arancelarias contra China tras desatar una crisis bursátil al instar a las empresas estadounidenses a abandonar sus operaciones en el gigante asiático. El Dow Jones de Industriales, el principal indicador, bajó un 2.37 %.
26/8/2019	**Lunes 26-8**	31.74	*No se encontró reporte*
30/8/2019	**Viernes 30 -8**	4706.65	La Bolsa de Estados Unidos cerró con signo mixto este viernes; las ganancias de los sectores materiales básicos, telecomunicaciones, e industria impulsaron a los índices al alza, mientras que los retrocesos de los sectores en el Dow Jones Industrial Average subió un

			0,16%. UnitedHealth Group Incorporated (NYSE:UNH), que avanzó un 1,47%, 3,38 puntos.
03/09/2019	**Martes 3-9**	**1956.78**	Wall Street empezó este martes la primera sesión de septiembre con pérdidas en sus tres indicadores, lastrado por la escalada en la guerra comercial entre Estados Unidos y China. El Dow Jones de Industriales, el principal indicador de la Bolsa de Nueva York, bajaba un 1,39 % o 365,84 puntos, hasta 26 037,44 enteros, con la fabricante de aviones Boeing.
06/09/2019	**Viernes 6-9**	***5522.71***	*No se encontró reporte*

Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

En algunos días no se encontró reporte por parte de la página web, haciendo referencia a la actividad del día.

FIGURA 3.17. GRÁFICA DE PRECIOS DE CIERRE DE LAS EMPRESAS SELECCIONADAS EN LA CARTERA O PORTAFOLIO PARA INVERTIR DENTRO DE LA CUENTA DEMO DE TRADING 212 DESDE EL 8 DE JULIO HASTA EL 6 DE SEPTIEMBRE DE 2019

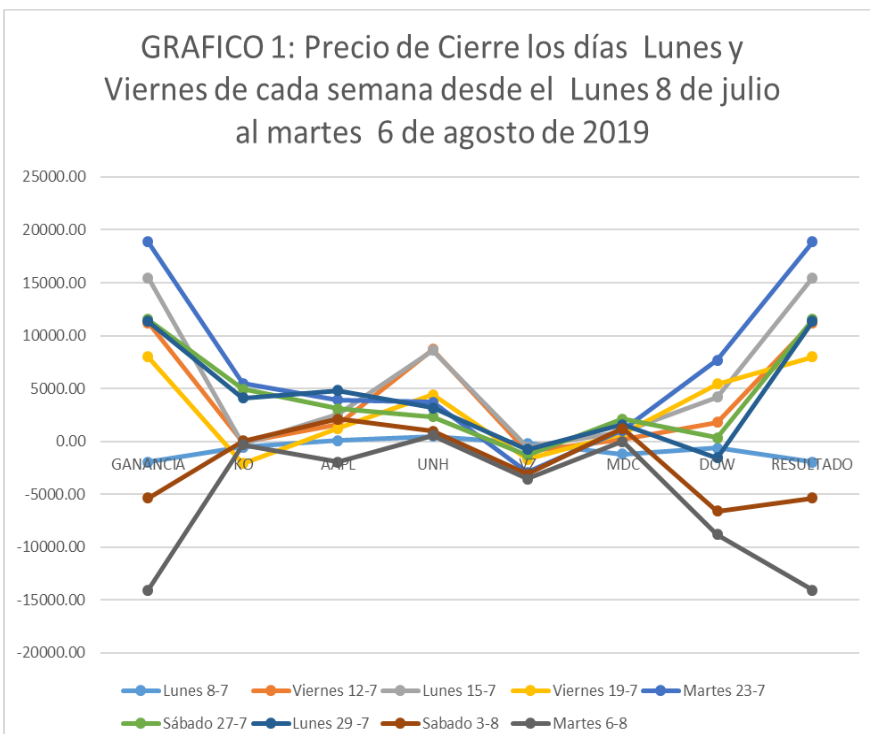


Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

La figura 3.17 muestra diversas gráficas de polígono, indicando con colores los días de observación y sus respectivos precios. En este gráfico es notorio que entre todos los datos recolectados se observa que: el martes 23 de julio (color celeste naranja) se obtuvo la mayor ganancia a la inversión total muy cercana a $20 000.00, mientras que su mayor pérdida fue el día Martes 6 de agosto (color verde oliva) con un valor cercano a los $15 000.00.

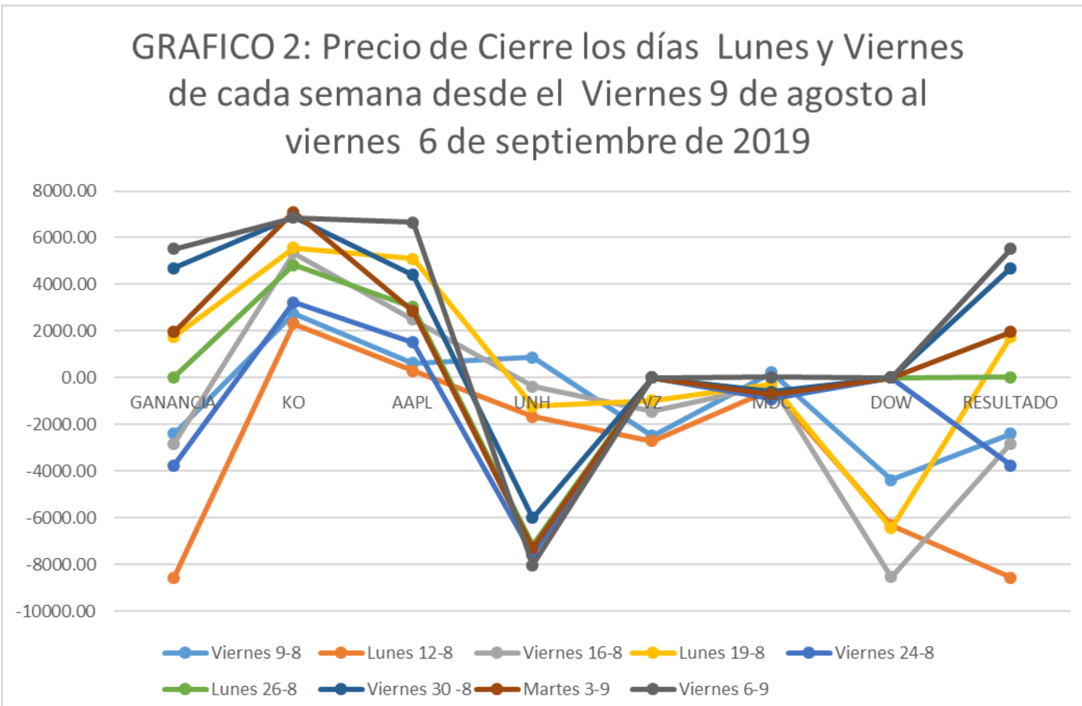
Por otro lado, la mayor ganancia obtenida fue con la empresa UNH y DOW con valores entre $5 000.00 y $10 000.00, la mayor pérdida fue con la empresa UNH y DOW con un valor entre $5 000.00 y $10 000.00. Es decir, que las mismas empresas con mayores ganancias, fueron las de mayores pérdidas durante el tiempo de observación.

A continuación, se subdividen en dos gráficos con la mitad de los datos recolectados, para que se puedan apreciar mejor las diferencias:



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

En el gráfico 1 se observa que del primer mes de observación: el lunes 8 de julio (azul) se obtuvo la mayor ganancia a la inversión total entre \$15 000.00 y \$20 000.00, mientras que su mayor pérdida fue el martes 6 de agosto (gris oscuro) con un valor cercano a los \$15 000.00. La mayor ganancia obtenida fue en la empresa UNH y DOW con valores entre \$5 000.00 y \$10 000.00; y la mayor pérdida fue con la empresa DOW con un valor entre \$5 000.00 y \$10 000.00.



Fuente: Estos datos se encuentran en el Anexo Digital, documento de Excel, Hoja RESULTADOS DE PRUEBA.

En el gráfico 2 se observa que del segundo mes de observación: el viernes 6 de septiembre (gris oscuro) se obtuvo la mayor ganancia a la inversión total entre \$4 000.00 y \$6 000.00, mientras que su mayor pérdida fue el lunes 12 de agosto (naranja) con un valor un poco mayor a los \$8 000.00. La mayor ganancia obtenida fue en la empresa KO y AAPL con valores entre $6 000.00 y $8 000.00, la mayor pérdida fue con las empresas UNH y DOW con un valor cercano a $8 000.00. Estas dos últimas obtuvieron las mayores ganancias en el primer mes, pero en el segundo mes obtuvieron las mayores pérdidas.

CONCLUSIONES

Al culminar esta investigación titulada: "*Toma de decisiones en inversión de Cartera de activos del Índice Dow Jones de la Bolsa de Valores de Nueva York, mediante la Teoría de Markowitz y Sharpe, utilizando Trading 212 y Microsoft Excel*", luego de observar resultados y cumplir con los objetivos planteados se concluye que:

- La teoría de Markowitz y Sharpe puede ser desarrollada mediante Solver de EXCEL y con una modelización detallada para su ejecución y veracidad.
- La teoría de Markowitz y Sharpe (estudiada) no incluye algunos parámetros necesarios al momento de realizar una inversión, por lo que su utilización puede generar algunos inconvenientes al invertir, pero sigue siendo el fundamento de las teorías modernas de inversión en carteras.
- El sistema matricial resulta ser el método más conveniente para desarrollar el modelo de Markowitz y Sharpe a diferencia del uso de procedimientos de programación, ya que al plantearlo sobre hojas de Excel resulta ser más eficiente y rápida llegar a sus soluciones.
- Las condiciones de Karush Kunt Tucker junto a los multiplicadores de Lagrange y la programación no lineal del problema cuadrático paramétrico de Harry Markowitz no resulta ser un método rápido para la ejecución del modelo, por lo que es mejor adaptarlo matricialmente y plasmarlo dentro de hojas de cálculo de EXCEL.
- El modelo de Konno y Yamazaki utilizado en 1991 en la bolsa de Tokio permite trabajar la programación cuadrática en un problema lineal considerando el

comportamiento o distribución normal de las rentabilidades esperadas de las empresas consideradas.

- El modelo de Harry Markowitz y Sharpe no permite y no considera las ventas en corto, es decir vender cuando suba el precio de la acción y comprar cuando este baja su precio; lo que significa que no incluye valores negativos.
- El modelo de Harry Markowitz y Sharpe utilizado en esta investigación aporta como fundamento un detalle mínimo de lo que pueda ocurrir en el mercado y cualquier persona que desee invertir puede aplicar el modelo y tener resultados satisfactorios durante un tiempo determinado obteniendo ganancias al reducir los riesgos.
- La tasa libre de riesgo es el valor del tesoro de Estados Unidos para dar seguridad a que si se realizan los préstamos con esta tasa, no variará durante un tiempo el pedir prestado al estado si hubiera alguna pérdida en la inversión. En el caso de la investigación se considera una tasa libre de riesgo a 10 años, la cual no variará durante ese tiempo.
- El modelo de Markowitz y Sharpe está basado en datos históricos, es decir precios de cierre de por lo menos cinco años antes a la fecha de inversión, considerando que si estos datos son diarios permite que el modelo tienda a una distribución cuasi normal y con ello tener confiabilidad en los resultados.
- El modelo de Markowitz y Sharpe confeccionado en esta investigación, dado a los resultados en su aplicación dentro de la plataforma TRADING 212 es efectivo, ya que permitió obtener considerables ganancias en pocas semanas, a pesar de los problemas económicos que atravesaron en ese momento dentro de la bolsa como

el caso de la guerra tecnológica entre Estados Unidos y China, que afecto considerablemente los resultados.

- El estudio realizado para la inversión en cartera al igual que cualquier otro no aseguran con exactitud los riesgos y las rentabilidades que se puedan obtener en la aplicación, pero a partir de comportamientos anteriores y futuros probables llegan a ser confiables.
- Factores como la diversificación de la cartera, la bursatilidad del mercado y las acciones de compra y venta de activos financieros en el mercado, permiten mayores ganancias al momento de una inversión.
- Minimizar el riesgo de invertir en una cartera permite obtener rentabilidades adecuadas durante un periodo determinado.
- Al momento de invertir no se puede asegurar que se obtengan resultados satisfactorios, dado a la incertidumbre del futuro, pero el modelo de cartera como el de Harry Markowitz y Sharpe sustentan una posibilidad confiable de lo que quizás pueda ocurrir dentro de la inversión en el mercado.
- El modelo de Harry Markowitz y Sharpe, a pesar de ser el fundamento de muchas teorías de inversión de cartera aún sigue siendo una herramienta factible con una probabilidad confiable de lo que pueda ocurrir en el mercado, por lo que sus recomendaciones pueden ser consideradas en la actualidad como una herramienta accesible para tener al menos un resultado probablemente satisfactorio al momento de invertir.

RECOMENDACIONES

- Para aplicar el modelo de Harry Markowitz y Sharpe es necesario tener claros conceptos financieros.
- Realizar el modelo de Markowitz y Sharpe mediante Solver de Excel, es un método factible para realizar el estudio y las correspondientes inversiones de forma rápida y lo más pronto posible.
- Hay que tomar en cuenta dentro de la modelización que las plataformas como TRADING 212, establecen un límite de inversión para los activos, cantidad que es variable entre una y otra empresa. Esto puede afectar significativamente los resultados de inversión dados originalmente por el modelo y no asegurar buenos resultados.
- Es necesario la compra y venta de activos financieros al momento de obtener muchas pérdidas e incluso buscar otras alternativas con una nueva modelización que incluya las afecciones que ha tenido el mercado hasta la actualidad.
- Para invertir en la bolsa de valores de Nueva York en el índice Dow Jones, cualquier persona puede hacerlo electrónicamente a través de muchas aplicaciones de computadora, páginas web y aplicaciones de celular que son gratuitas, así como TRADING 212, las mismas que cobrarán una comisión por su uso, pero con un modelo matemático adecuado se lograrán obtener buenas ganancias a pesar de que el futuro en los mercados no sea seguro.
- Realizar una inversión dentro de un mercado bursátil, permite la existencia de diversificación en las carteras, lo que ayuda a minimizar riesgos y obtener

rentabilidades adecuadas, lo mismo que se genera a partir de un análisis matemático como el modelo de Harry Markowitz.

- Al momento de invertir no es necesario tener una suma muy alta de dinero para hacerlo, ya que los precios de las acciones de las empresas son relativamente accesibles para invertir.
- Mientras más sean las activos que se seleccionan en la cartera o portafolio óptimo generado a partir de la teoría de Markowitz y Sharpe, con las mejores relaciones de riesgo rendimiento, se puede obtener ganancias apropiadas que satisfagan los objetivos de la inversión, a pesar de factores como los problemas que afectan a la bolsa y la economía mundial que hacen que las inversiones sean inservibles y se tenga la necesidad de nuevamente realizar transacciones de compra y venta de los activos financieros.

ANEXOS

Los anexos se muestran digitalmente en el documento de Excel donde está todo el modelo ejecutado.

En las diversas hojas del libro de Excel se encontrarán:

- Precios diarios
- Retornos diarios
- Correlaciones
- Activos seleccionados
- Covarianzas
- Modelo final
- Línea de mercado de capitales lmc2
- Normalidad
- Inversiones finales
- Resultados de prueba
- Información 2019
- Información general

Se adjunta un CD con la información y en la siguiente dirección o vínculo web se puede encontrar esta información de forma digital:

https://drive.google.com/file/d/1pEy8iphLGwUE1uO22uneK9fUkEQGojyw/view?usp=sharing

GLOSARIO

1.	**Activo Financiero:**	Es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor. Es decir, es un derecho sobre los activos reales del emisor y el efectivo que generen. Es cualquier activo que sea: dinero en efectivo, un instrumento de patrimonio de otra empresa, o suponga un derecho contractual a recibir efectivo u otro activo financiero, o a intercambiar activos o pasivos financieros con terceros en condiciones potencialmente favorables.
2.	**Activo Libre de Riesgo:**	es un activo cuya variabilidad de su rendimiento es cero. También es llamado Activo Arrow - Debreu.
3.	**Alfa (α):**	representa una medición del cambio en el precio de un instrumento (rendimiento) ante cambios en los precios del mercado (rendimiento del mercado); es denominado el “cambio vegetativo” en el precio del instrumento, pues se debe a consideraciones distintas de las consideradas en el modelo del cual forma parte.
4.	**Aversión al riesgo:**	es lo que determina cuán averso al riesgo es un inversionista, está asociado a la pendiente de la curva de indiferencia, es decir, la tasa marginal de sustitución subjetiva de riesgo por rendimiento.

5.	**Beta ($\boldsymbol{\beta}$):**	representa una medición del riesgo relativo, ya sea con respecto a un portafolio específico o al portafolio de mercado.
6.	**Bonos:**	los bonos son una forma en que las empresas o los gobiernos financian proyectos a corto plazo. Los bonos indican cuánto dinero se debe, el tipo de interés que se paga y la fecha de vencimiento del bono.
7.	**Cartera Riesgosa óptima:**	es la mejor de las carteras riesgosas, es también denominada la cartera de mercado o market point.
8.	**Coeficiente de asociación lineal ($\boldsymbol{\rho}$)**	es una medición de lo que representa la variabilidad simultánea entre la variabilidad global conjunta; es también llamado coeficiente de correlación muestral y asume valores que corresponden al rango entre –1 y 1, inclusive.
9.	**Coeficiente de determinación ($\boldsymbol{r^2}$):**	es una medida que representa la proporción de la variabilidad de una muestra de observaciones que es explicada por un modelo estadístico; es también llamado coeficiente de regresión y asume valores entre 0 y 1, inclusive.
10.	**Coeficiente de variación (CV):**	es una relación entre la desviación estándar y el promedio de una muestra o conjunto de observaciones. En una medida del riesgo relativo pues define cuántas unidades de riesgo hay por unidad de rendimiento.

11.	**Compra apalancada:**	es aquella situación de equilibrio individual en donde la temeridad del inversionista le lleva, como parte de su proceso optimizador, a ubicarse en situaciones en las que se endeuda en el activo libre de riesgo para adquirir más del activo riesgoso.
12.	**Covarianza ($\sigma_{x,y}$):**	es un estadígrafo que permite tener una medida de la forma en que dos series de datos varían en forma conjunta.
13.	**Derivados:**	Acuerdo financiero que establece un valor a través del valor de un activo subyacente. Esto quiere decir que no tienen un valor propio, sino que dependen del activo al que estén vinculados. El vendedor del contrato no tiene que poseer obligatoriamente el activo, sino que puede darle el dinero necesario al comprador para que éste lo adquiera o bien, darle al comprador otro contrato derivado. Ejemplos de los más populares derivativos: Futuros, opciones, CFD (contratos por diferencia debido al apalancamiento).
14.	**Desviación estándar (σ):**	es la raíz cuadrada de la varianza. Representa cuál es el desvío promedio de las observaciones con respecto a la medida de posición central.
15.	**Diversificación al Riesgo:**	es aquella estrategia de inversión que procura establecer la forma adecuada de inversión con el propósito de disminuir el riesgo de una cartera de inversiones.

16.	**Diversificación:**	Forma de reducir el riesgo de una inversión o un portafolio de inversión, al realizar una combinación de distintas clases de activos o instrumentos, con el propósito de compensar con activos poco correlacionados (Correlación negativa), para un posible descenso en el precio de alguno de ellos. Lo que contribuye en cierta medida a la búsqueda de la minimización del riesgo.
17.	**Equilibrio del Mercado:**	es aquella situación en la que los inversionistas se ubican a lo largo de la Línea o Recta de Mercado de Capitales, logrando, cada uno de ellos su equilibrio en forma individual.
18.	**Espacio de Media – Varianza:**	es un espacio cartesiano en donde se representan los activos financieros como el conjunto de dos características básicas: el rendimiento (asociado a la media muestral) y el riesgo (definido como la desviación estándar de la muestra).
19.	**Esperanza Matemática (E):**	es el promedio ponderado de los valores esperados del rendimiento por su respectiva probabilidad de ocurrencia. Representa el primer momento de la función de densidad.
20.	**Frontera de Eficiencia:**	es un arreglo geométrico que representa aquellas combinaciones de rendimiento y riesgo en donde se cumple la condición tecnológica de estar maximizando el rendimiento, sujeto a un nivel de riesgo dado; o, alternativamente, de estar minimizando el riesgo, sujeto a un nivel de rentabilidad dada.

21.	**Inversión:**	Es una actividad que consiste en dedicar recursos con el objetivo de obtener un beneficio de cualquier tipo.
22.	**Línea o Recta de Mercado de Capitales (LMC):**	se refiere al arreglo geométrico que representa la relación funcional entre la cantidad de riesgo asumida y el rendimiento correspondiente; representa "lo que el mercado está dispuesto a pagar por una respectiva cantidad de riesgo".
23.	**Liquidez:**	Es la capacidad de un activo de convertirse en dinero en el corto plazo sin necesidad de reducir el precio. Como por ejemplo el dinero es fácilmente intercambiable o activos de un mercado bursátil por las constantes negociaciones que se realizan en él.
24.	**Mercado bursátil:**	Aquel mercado donde existe constante movimiento de compra y venta de instrumentos financieros. Está formado por el conjunto de agentes económicos que negocian activos financieros cotizados desde distintas partes del mundo.
25.	**Modelo CAPM:**	es un modelo que procura definir una relación funcional entre el beta de un activo con respecto al mercado y el rendimiento, de manera que los cambios en el rendimiento serían provocados por sendos cambios en los precios de los activos.
26.	**Portafolio del Mercado:**	es aquel conjunto de activos financieros que representan la forma óptima de combinarlos para maximizar el rendimiento de la cartera de activos riesgosos, dado una tasa del activo libre de riesgo.

27.	**Portafolio:**	es un conjunto de activos financieros. También se le denomina Cartera.
28.	**Prima de Riesgo:**	es la compensación que recibe un inversionista por la cantidad de riesgo (absoluto o relativo) asociada a una inversión.
29.	**Punto de mínima varianza:**	es aquel punto de la frontera de eficiencia que registra el menor riesgo posible combinando activos riesgosos.
30.	**Rendimiento del Mercado:**	es el rendimiento ofrecido por el portafolio de mercado.
31.	**Rendimiento Relativo:**	es la proporción del rendimiento de un portafolio que es aportado por un activo cualquiera que forma parte de ese portafolio.
32.	**Rendimiento:**	el rendimiento de un activo o una operación financiera es entendido como el cambio de valor que registra en un periodo de tiempo con respecto a su valor inicial. Representa la media de un conjunto de datos. En resumen, es una característica de las inversiones financieras, es el retorno sobre la inversión que se realiza.
33.	**Riesgo de Liquidez:**	se refiere a la posibilidad de que una empresa no pueda cumplir cabalmente con sus compromisos como consecuencia de falta de recursos líquidos.

34.	**Riesgo de Mercado:**	hace referencia a la incertidumbre generada por el comportamiento de factores externos a la organización, ya que puede ser cambios en las variables macroeconómicas o factores de riesgo como tasas de interés, cotizaciones de acciones, entre otras.
35.	**Riesgo No Sistemático:**	aquel que abarca factores internos de una empresa o compañía, lo que afecta la rentabilidad de un activo o bono específico. Como por ejemplo, la mala gestión en la administración de la empresa, la firma de un gran contrato, el fraude dentro de la empresa, entre otros. En otras palabras, es el componente del riesgo que corresponde a las condiciones propias de un activo financiero, denominado también Riesgo Específico o Riesgo No Diversificable.
36.	**Riesgo relativo:**	es la proporción del riesgo total de un portafolio que es aportado por un activo cualquiera que forma parte de ese portafolio.
37.	**Riesgo sistemático:**	implica cambios en el rendimiento de un título valor, causado por factores que afectan al mercado en su totalidad y que son externos a la organización que emite el título. El mismo no es diversificable. Como por ejemplo variaciones causadas por una guerra, los cambios de interés de forma global. Dicho de otra forma, es el riesgo propio de invertir en el mercado financiero y que corresponde a la incertidumbre generalizada

		sobre la evolución de los macro precios de la economía: inflación, tipo de cambio, tipos de interés y el ciclo de la actividad productiva. Es también llamado riesgo de mercado.
38.	**Riesgo:**	proveniente del latín "risicare" que significa atreverse, del vocablo francés risque y del italiano risco. El significado original de risco es apuntar con una piedra. En finanzas, el concepto de riesgo se relaciona con las pérdidas potenciales que se pueden sufrir en un portafolio de inversión, debido a la volatilidad de los flujos financieros no esperados. Matemática o estadísticamente, representa la varianza de un conjunto de datos. Es una característica de las inversiones financieras en donde no existe una plena certeza de la verificación de los eventos posibles, aunque sí se tiene noción de un número finito de eventos y de sus probabilidades asociadas. Puede concebirse como la probabilidad de que ocurra un evento no deseado.
39.	**Short sales:**	es la venta de una acción que no es propiedad del vendedor. Por tanto, para poder venderla, el vendedor ha tenido que pedir “prestada” la acción a un tercero. El operador que la realiza cree que el precio del valor bajará en el futuro. De esta manera, si el precio de la acción realmente baja después de abrir la operación,

		el operador deberá a un precio menor que el precio por el que las vendió, ganando la diferencia.
40.	**Solución Esquina:**	es una situación en la que el inversionista es tan conservador que su tasa marginal de sustitución subjetiva de riesgo por rendimiento es más alta que el precio del riesgo ofrecido por el mercado y por tanto prefiere colocar toda su riqueza en el activo libre de riesgo.
41.	**Tasa libre de Riesgo (Risk Free):**	es el rendimiento pagado por el activo libre de riesgo, está asociado a la compensación correspondiente al riesgo sistemático; por lo general corresponde al menor rendimiento que se puede obtener en el mercado por una inversión financiera. Se considera como un tipo de interés libre de riesgo que representa a una cifra hipotética utilizada en muchos cálculos financieros. Es la tasa de retorno que un inversionista espera sin posibilidad de pérdida. El tipo de interés libre de riesgo no es un valor real, porque cada inversión tiene un riesgo. Dado que es teórico, la mayoría de los inversores hacen una estimación de la tasa libre de riesgo usando la tasa de los bonos del tesoro de Estados Unidos a tres meses. Esto se debe a que el país norteamericano es visto como una economía estable y tres meses es un tiempo lo suficientemente corto como para no tener tanto riesgo.

42.	**Valor esperado:**	se refiere al valor más probable de ocurrencia en una distribución determinada.
43.	**Varianza (σ^2):**	es una medida estadística de la dispersión de los datos; es el segundo momento de la función de densidad. Se obtiene de la suma de los cuadrados de los desvíos de las observaciones con respecto a la medida de posición central.
44.	**Volatilidad:**	indicador que pretende cuantificar las probabilidades de cambios en las diferentes variables económicas que afectan una operación. Representa la desviación estándar (raíz cuadrada de la varianza) de los rendimientos de un activo o portafolios. En el caso de esta investigación se trata de una volatilidad histórica al tomar precios de cierre durante el tiempo anterior al estudio. Es también una forma de cuantificar el riesgo de un instrumento financiero.

Referencias del glosario:

- https://economipedia.com/definiciones/mercado-bursatil.html
- Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

BIBLIOGRAFÍA

1 Begoña, V. (2010). Programa Matemática: Métodos de optimización. Universidad Complutense Madrid. España.

2 Betancourt, K. (2013). Teoría de Markowitz con metodología EWMA para la toma de decisiones sobre cómo invertir dinero. Revista Atlántica Económica. Colombia.

3 Calva, C. (2010). Algoritmos para abordar modelos de inversión afectados de incertidumbre. Universidad de Valencia. España.

4 Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la cartera. Perú.

5 Corrales, J. (2011). Optimización del modelo media-varianza-skewness para la selección de un portafolio de acciones y su aplicación en la bvl usando programación no lineal. Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Autónoma del Perú. Perú.

6 Cruz, E. (2013). Optimización de portafolio de acciones utilizando los multiplicadores de LaGrange. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia.

7 Galvez, P. Modelo de Carteras de inversión modelo de Markowitz y estimación de volatilidad con Garch.

8 Hillier, F. (2010). Introducción a la Investigación de operaciones. McGraw Hill. México. Pág. 496 – 562.

9 Jimenez, M. (2010). Selección óptima de portafolio de inversión basado en el sistema neurodifuso. Universidad Adolfo López. México.

10 Lasa, A. (2004). Construcción de la frontera eficiente de portafolio de inversión aplicación al caso de México. Universidad UAM. México.

11 Lopez, F. (1999). La historia temprana de la teoría del portafolio 1600 – 1960. UNAM. México.

12 Mendizahal, A. (2002). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras. Universidad del país Vasco. España.

13 Prieto, J. (2008). Aplicación de la programación lineal en la gestión de carteras. Universidad del este. Paraguay.

14 Rodríguez, A. (2013). Determinación de la cartera óptima de inversión bajo un enfoque de programación no lineal. Universidad de los Andes. Venezuela.

15 Vielma, J. (2008). Programación No lineal entera para problemas de optimización de portafolios. Universidad Adolfo Ibañez. Perú.

16 Willmer, J. (2014). Metodología para la toma de decisiones de inversión en portafolio de acciones utilizando la técnica multicriterio AHP. Universidad Javeriana. Colombia.

17 García, C. & Saéz, J. (2014). Selección de una cartera de inversión a través del Modelo de Markowitz. Universidad de Barcelona. España.

18 Romero, C. (1974). Modelos de selección de carteras de valores bursátiles, con aplicaciones a las bolsas españolas. Revista de Económica Política. Universidad Politécnica de Madrid. España.

19 Prada, C. (2011). Optimización con Restricciones. Universidad de Valladolid. España.

20 Melo, A. (2015). Conformación de portafolios óptimos de inversión a través de métodos de estimación robusta, un estudio comparativo. Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia.

21 Puga, M. (2016). Fundamentos Básicos de Finanzas. Universidad Arturo Prat. Chile.

22 https://www.trading212.com/es/An%C3%A1lisis-T%C3%A9cnica

23 https://www.interactivebrokers.com/es/index.php?f=6483

24 Fogues, P. (2012). Modelo de selección de cartera con Solver. Universidad Politécnica de Valencia. España.

25 Diaz, M. (2016). Modelos de Gestión de Carteras: Comparación y Propuestas de Mejora. Universidad Pontificia ICADE Comillas, Business School. España.

26 Rubeinstein, M. (2006). A History of The Theory of Investments: My Annotated Bibliography. Willey Finance Series. United States of America. Pág. 14 -167

27 Matarrita, R. (2002). Selección de Carteras de Inversión. Bolsa Nacional de Valores S.A. San José, Costa Rica.

28 Marek, C. (2003). Mathematics for finance: an introduction to financial engineering. Springer Undergraduate Mathematics Series. United States of America. Págs. 110 – 135.

29 https://economipedia.com/definiciones/mercado-bursatil.html

30 https://www.efe.com/efe/espana/economia/general-electric-sale-del-dow-jones-de-industriales-y-lo-reemplaza-walgreens/10003-3655103

31 Levišauskaite, K. (2010). Investment Analysis and Portfolio Management. Vytautas Magnus University. Kaunas, Lithuania. Págs. 51 – 70.