UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

# APLICACIÓN DE UN TEOREMA DE PUNTO FIJO, EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ELÍPTICO DE FRONTERA

POR:

MARITZA GONZÁLEZ O.

*TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA PURA.*

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

1990

UNIVERSIDAD DE PANAMA

ULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, ______________________



Aprobado por:

Director de Tesis Mario Zuluaga U.
Mario Zuluaga U., Ph. D.

Miembro del Jurado Silverio R. Vergara B.
Silverio Vergara, M. Sc.

Miembro del Jurado Álvaro Pino N.
Alvaro Pino, M. Sc.

Fecha 25/marzo/1991

**DEDICATORIA**

*A mis queridos padres, Abelardo y Victoria, quienes siempre me han animado a seguir adelante.*

*MARITZA*

**AGRADECIMIENTO**

*Al Doctor Mario Zuluaga, quien en todo momento me orientó en la realización de este trabajo.*

*Al Doctor Rogelio Rosas por su valiosa colaboración, y a todas las personas que de una manera u otra hicieron posible la culminación de este trabajo.*

*LA AUTORA*

# ÍNDICE GENERAL

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se dan condiciones suficientes para la existencia de soluciones del problema de frontera:

$$\begin{aligned} \Delta u + g(x,u) &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad (\, I \,)$$

$$|\, g(x,u) \,| \leqslant a(x) + b \,|\, u \,|^s \,, \; a(x) \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega),$$

$$b > 0 \quad y \quad 0 \leqslant s < \frac{n+2}{n-2} \;, \; n > 2$$

Se hace uso de tres ideas importantes del análisis funcional no lineal, a saber: Teoría de Operadores de Nemytskii, Teoría de Inmersión de Sobolev y Teoría de puntos fijos.

Los problemas de tipo *( I )* son en la actualidad motivo de intensas investigaciones entre los matemáticos que se interesan en las ecuaciones diferenciales de tipo elíptico. Las técnicas más empleadas para atacar dichos problemas son el cálculo variacional, la teoría de grado topológico, la teoría general de puntos fijos, la teoría de operadores maximales monótonos y la teoría de continuación analítica.

La importancia del estudio de los problemas de tipo *( I )* radica en que es el modelo matemático de un sin número de problemas de la física matemática y la ingeniería actual.

En el primer capítulo, que hemos llamado preliminares, se da un resumen de la teoría de operadores de Nemystskii, teoría de inmersión de Sobolev y teoría de puntos fijos.

En el segundo capítulo, se resuelve el problema *( I )* . Inicialmente se muestra que éste tiene solución si y solo sí un adecuado operador entre el espacio de Sobolev $H_o^1(\Omega)$ tiene un punto fijo. Luego se hace uso de un bien conocido teorema de punto fijo debido a Krasnosel'skii en el cual se dan condiciones para que un operador tenga un punto fijo en una región dada. Lo innovador en nuestro trabajo consiste en que usamos el teorema de Krasnosel'skii en otra dirección; dado el operador nos preguntamos, ¿que tamaño debe tener la región para que el operador tenga un punto fijo? Esto nos conduce a establecer estimativas sobre la región $\Omega$ para que el problema *( I )* tenga solución.

Finalmente damos algunas aplicaciones en donde resolvemos casos particulares del problema *( I )*.

Esperamos con este trabajo, contribuir al estudio de las ecuaciones diferenciales en nuestro medio para la formación de investigadores en éstas disciplinas.

# CAPÍTULO PRIMERO

## PRELIMINARES

Con el uso de la teoría de los operadores de Nemytskii y un teorema de punto fijo de Krasnosel'skii se dan condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones del problema de frontera:

$$\Delta u + g(x,u) = 0 \quad en \quad \Omega$$
$$u(x) = 0 \quad en \quad \partial\Omega \qquad (I)$$

donde $\Omega$ denota una región acotada de $R^n$ y $\partial\Omega$ su frontera. Con $\Delta$ representamos el operador diferencial $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

La función $g: \Omega \times R \to R$ estará sometida a las siguientes restricciones:

$$|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^s$$
$$0 \leqslant s < \frac{n+2}{n-2}, \quad n > 2$$

Se muestra como las soluciones dependen del tamaño de la región $\Omega$ y se da una estimativa del tamaño de la solución en términos de la norma del espacio $H_0^1(\Omega)$.

A continuación damos un resumen de la teoría y los resultados que nos permitirán abordar este problema.

## 1. EL OPERADOR DE NEMYTSKII.

En adelante $\Omega$ denotará una región acotada de $R^n$, medible tal que $\mu(\Omega) < \infty$.

Consideramos $g: \Omega \times R \to R$ una función que satisface la siguiente propiedad: " $g(x,u)$ es continua en $u$ para casi todo $x$ y medible en $x$ para todo valor $u$". Esta propiedad es conocida como **propiedad de Caratheodory.**

Con respecto a esta propiedad es importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

**a.** *Si* $u: \Omega \to \mathbb{R}$ *es medible en* $\Omega$ *y* $|u(x)| < \infty$ *para casi todo* $x \in \Omega$, *entonces* $g(x,u(x))$ *es medible en* $\Omega$ .

**b.** *La función* $f_k(x) = \max\limits_{-k \leq u \leq k} g(x,u)$ *es medible en* $\Omega$ .

c. *Existe* $u_k(x)$ *medible en* $\Omega$ *tal que* $g(x,u_k(x)) = f_k(x)$ $-k \leq u_k(x) \leq k$.

La prueba de éstas observaciones la omitimos y referimos al lector a [9].

**Definición 1.1**

Sea $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la propiedad de Caratheodory. Diremos que $G : H_1 \to H_2$ es un operador de Nemytskii si $G(u)(x) = g(x,u(x))$ donde $H_1$ y $H_2$ son espacios de funciones a valor real.

En nuestro estudio $H_1 = L^{p_1}(\Omega)$ y $H_2 = L^{p_2}(\Omega)$, $p_1, p_2 \geq 1$. En general, $L^p(\Omega) = \{ f : \int_\Omega |f|^p < \infty \}$ y $\| f \|_p = [\int_\Omega | f |^p]^{1/p}$ es la norma en $L^p(\Omega)$ .

Con respecto a éstos espacios nos será de utilidad el siguiente resultado.

**Teorema 1.2**

$L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ para $p \geqslant r \geqslant 1$, además $\| f \|_r \leqslant \mu(\Omega)^s \| f \|_p$ donde $s = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$ .

**Demostración**

Sea $f \in L^p(\Omega) \Longrightarrow \int_\Omega | f |^p < \infty$ . Es claro que $|f|^r \in L^{p/r}(\Omega)$ y como $\mu(\Omega) < \infty$ , $g(x) = 1 \in L^q(\Omega)$ con $\dfrac{1}{p/r} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Aplicando la desigualdad de Hölder a $|f|^r$ y $g$ se tiene:

$$\int_\Omega |f|^r \leqslant \left[ \int_\Omega (|f|^r)^{p/r} \right]^{r/p} \mu(\Omega)^{1/q} < \infty$$

de donde $f \in L^r(\Omega)$ y así $L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega)$.

Además, $\| f \|_r = \left[ \int_\Omega | f |^r \right]^{1/r} \leqslant \left[ \int_\Omega | f |^p \right]^{1/p} [\mu(\Omega)]^{1/rp}$

es decir $\| f \|_r \leqslant \| f \|_p \, \mu(\Omega)^s$ donde $s = 1/rq$. Sabiendo que $\dfrac{1}{p/r} + \dfrac{1}{q} = 1$ se verifica que $s = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$ como queríamos.

Pasamos ahora a estudiar propiedades importantes del operador $G$ .

**Teorema 1.3**

Si $G(L^{p_1}(\Omega)) \subset L^{p_2}(\Omega)$ entonces $G$ es continuo.

**Demostración**

Suponiendo que $G(0) = 0$ se prueba que $G$ es continua en cero, pues de no serlo, existiría $(\phi_n) \subset L^{p_1}(\Omega)$ tal que $\phi_n \to 0$ y existiría $\alpha > 0$ tal que

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \int_\Omega |G(\phi_n)|^{p_2} > \alpha$$

Dado que $\phi_n \to 0$ existe una subsucesión $(\psi_n) \subset (\phi_n)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |\psi_n|^{p_1} < \infty$ $(1)$

Utilizando un proceso inductivo es posible construir una secuencia $(\varepsilon_k, \psi_{n_k}, \Omega_k)$ donde $\varepsilon_k > 0$, $\psi_{n_k} \in (\psi_n)$, $\Omega_k \subset \Omega$ y tal que satisfaga

a) $\varepsilon_{k+1} < \frac{\varepsilon_k}{2}$

b) $\mu(\Omega_k) \leqslant \varepsilon_k$

c) $\int_{\Omega_k} |G(\psi_{n_k})|^{p_2} > \frac{2}{3}\alpha$

d) *Si* $D \subset \Omega$ *es tal que* $\mu(D) < 2\varepsilon_{k+1}$ *entonces* $\int_D |G(\psi_{n_k})|^{p_2} < \frac{\alpha}{3}$

Consideremos los conjuntos disjuntos $D_k = \Omega_k - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i$ y definamos

$$\psi(s) = \begin{cases} \psi_{n_k}(s) & si \quad s \in D_k \\ 0 & si \quad s \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \end{cases}$$

De $(1)$ se obtiene que $\psi \in L^{p_1}(\Omega)$ y por lo tanto $G(\psi) \in L^{p_2}(\Omega)$

Utilizando las condiciones *a)*, *b)*, *c)* y *d)* se prueba que $\int_{D_k} |G(\psi)|^{p_2} > \frac{\alpha}{3}$ de allí que $\int_\Omega |G(\psi)|^{p_2} = \infty$ lo cual es una contradicción. Así $G$ es continuo en cero.

Para probar la continuidad en un punto arbitrario $u_o \in L^{p_1}(\Omega)$ basta considerar el operador de Nemytskii

$$F(u)(s) = G(u_o + u)(s) - G(u_o)(s)$$

**Teorema 1.4**

Si $G(L^{p_1}(\Omega)) \subset L^{p_2}(\Omega)$ entonces $G$ es acotado.

**Demostración**

Supongamos que $G(0) = 0$ por el teorema *1.3* $G$ es continuo en cero, esto es, existe $\gamma > 0$ tal que si $\int_\Omega |\psi|^{p_1} \leqslant \gamma^{p_1}$ entonces

$$\int_\Omega |G(\psi)|^{p_2} \leqslant 1 \tag{2}$$

tomando $u \in L^{p_1}(\Omega)$, se tiene que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\gamma^{p_1} \leqslant \| u \|^{p_1} \leqslant (n+1)\gamma^{p_1} \tag{3}$$

luego podemos dividir $\Omega$ en $n+1$ subconjuntos disjuntos $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n+1}$ tales que $\int_{\Omega_i} |u|^{p_1} \leqslant \gamma^{p_1}$, $i = 1, \ldots, n+1$

Usando *(2)* y *(3)* se tiene que:

$$\| G(u) \|_{p_2} \leqslant \left[ \left(\frac{\| u \|_{p_1}}{\gamma}\right)^{p_1} + 1 \right]^{1/p_2} \tag{4}$$

Si $G(0) \neq 0$ basta considerar el operador de Nemytskii $H(u) = G(u) - G(0)$, $H(0) = 0$ luego por *(4)*

$$\| G(u) \|_{p_2} \leqslant \left[ \left(\frac{\| u \|_{p_1}}{\gamma}\right)^{p_1} + 1 \right]^{1/p_2} + \| G(0) \|_{p_2} \tag{5}$$

Así, $G$ es acotado.

El siguiente teorema enlaza el teorema 1.3 y el teorema 1.4 en el sentido que, da una condición necesaria y suficiente para que $G(L^{p_1}(\Omega)) \subset L^{p_2}(\Omega)$.

**Teorema 1.5**

$G(L^{p_1}(\Omega)) \subset L^{p_2}(\Omega)$ si y solo sí existen $a(x) \in L^{p_2}(\Omega)$ y $b > 0$ tales que

$$|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^{p_1/p_2}$$

**Demostración**

La condición suficiente es inmediata, basta observar que $a(x) + b|u|^{p_1/p_2} \in L^{p_2}(\Omega)$, $\forall\ u \in L^{p_1}(\Omega)$

Veamos la condición necesaria:

Por el teorema 1.4, $G$ es acotado, esto es existe $b > 0$:

$$\int_\Omega |G(u)|^{p_2} \leqslant b^{p_2} \qquad si \qquad \int_\Omega |u|^{p_1} \leqslant 1$$

Consideremos la función $\Phi(x,u) = max\{|g(x,u)| - b|u|^{p_1/p_2}, 0\}$

Para cada $u \in L^{p_1}(\Omega)$ fija, es posible probar que

$$\int_\Omega |\Phi(x,u)|^{p_2} \leqslant b^{p_2} \qquad (6)$$

Sean $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$, subconjuntos de $\Omega$ tales que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ y $\mu(\Omega_i) < \infty$

Como $\Phi(x,u)$ satisface la propiedad de Caratheodory, existen funciones medibles $u_k$, tales que $u_k(x) = 0 \ \forall x \notin \Omega_k$ y $\Phi(x,u_k(x)) = \max\limits_{-k \leqslant u \leqslant k} \Phi(x,u(x))$ , $|u_k(x)| \leqslant k \quad \forall\, x \in \Omega_k$

Es fácil verificar que $u_k \in L^{p_1}(\Omega)$ y $\sup\limits_{-\infty<u<\infty} \Phi(x,u) = \lim\limits_{k \to \infty} \Phi(x,u_k(x))$

Tomando $a(x) = \sup\limits_{-\infty<u<\infty} \Phi(x,u)$ , usando el lema de Fatou y $(6)$ se prueba que $a(x) \in L^{p_2}(\Omega)$

Como $\sup \Phi(x,u(x)) \geqslant \sup \{ |g(x,u)| - b|u|^{p_1/p_2} \}$ se tiene que $|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^{p_1/p_2}$

## 2. DESCRIPCIÓN DE $H_0^1(\Omega)$.

Volvamos al problema $(I)$ enunciado anteriormente.

Denotemos con $C_0^1(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones $u : \bar{\Omega} \to R$ de clase $C^1$ tales que la adherencia de:

$$\{ x \in \Omega : u(x) \neq 0 \}$$

está contenida en $\Omega$ . Estas funciones cumplen que $u(x) = 0$ en $\partial\Omega$ .

Dotamos a $C_0^1(\Omega)$ del siguiente producto interno

$$< u, v >_1 = \int_\Omega u \cdot v + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (7)$$

El espacio de Hilbert resultante al completar $(C_0^1(\Omega), < >_1)$ lo denotaremos con $H_0^1(\Omega)$ y se conoce con el nombre de **espacio de Sobolev.**

Para una descripción más completa de éste y otros espacios más generales referimos al lector a [8] .

En lo que sigue $\| \ \|_1$ , $< , >_1$ denotarán la norma y el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ y $\| \ \|_0$ , $< , >_0$ denotarán la norma y el producto interno en $L^2(\Omega)$.

**Definición 2.1**

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de *(I)* si para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ se satisface:

$$\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} - g(x,u).v \right) dx = 0$$

**Comentario**

En nuestro estudio solamente consideramos el problema de hallar soluciones débiles de *(I)*. El problema de cuando una solución débil de *(I)* es una solución clásica está ligado con el problema de las inclusiones de los espacios $H_0^{m,p}$ en $H_0^{n,p}$ y no lo trataremos aquí, en [8] puede leerse con detalles.

Por ahora solo usaremos los siguientes resultados:

## 3. OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS, LEMA DE RELLICH Y TEOREMA DE INMERSIÓN DE SOBOLEV.

**Definición 3.1**

Sea $H$ un espacio de Hilbert real. Un operador $N: H \to H$

continuo, se dice completamente continuo si para cada $E \subset H$, acotado, $\overline{N(E)}$ es compacto.

**Teorema 3.2 (Lema de Rellich)**

$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y la inclusión $i: H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es completamente continua. (Teorema de Sobolev). Si $1 \leqslant t < \frac{2n}{n-2}$ entonces $H_0^1(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ y la inclusión es completamente continua. Si $t = \frac{2n}{n-2}$ la inclusión solo es continua.

**Demostración** (véase [3], Teorema 5.4 y 6.2)

**Teorema 3.3 (Desigualdad de Poincaré)**

Si $\Omega$ es una región acotada de $R^n$, entonces existe $c > 0$ tal que $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u^2 \leqslant c \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \qquad (8)$$

**Demostración**

Como $C_0^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ basta probar $(8)$ para $u \in C_0^1(\Omega)$.

Siendo $\Omega$ acotada, existe $a > 0$ tal que:

$$\Omega \subset Q = [-a,a] \times \ldots \times [-a,a]$$

Sea $u \in C_0^1(\Omega)$ y extendamos $u$ a $Q$ definiendo:

$$u(x) = 0 \qquad \forall\, x \in Q - \Omega$$

Sea $(x_1,\ldots,x_n) \in Q$ se tiene entonces que,

$$u^2(x_1,\ldots,x_n) = \left( \int_{-a}^{x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) (t, x_2,\ldots,x_n)\, dt\right)^2$$

$$\leqslant 2a \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 (t, x_2,\ldots,x_n)\, dt \,.\, dx_1 \ldots dx_n$$

integrando a ambos lados se tiene

$$\int_Q u^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant 2a \int_Q \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 (t, x_2,\ldots,x_n)\, dt \,.\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$\leqslant 4a^2 \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 (t, x_2,\ldots,x_n)\, dt \,.\, dx_1 \ldots dx_n$$

o sea

$$\int_Q u^2 \leqslant 4a^2 \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2$$

En forma análoga se prueba que

$$\int_Q u^2 \leqslant 4a^2 \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

y así

$$\int_\Omega u^2 \leqslant \frac{4a^2}{n} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

luego, tomando $c = \dfrac{4a^2}{n}$ la desigualdad *(8)* queda probada.

De acuerdo con *(7)* , la norma de $H_0^1(\Omega)$ será

$$\| u \|_1^2 = \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

y por la desigualdad de Poincaré se obtiene:

$$\| u \|_1^2 \leqslant (1 + c) \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \qquad (9)$$

De *(7)* y *(9)* se deduce que la norma de $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma dada por

$$\| u \| = \left[ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \right]^{1/2}$$

En adelante, el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ estará dado por:

$$< u , v >_1 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (10)$$

debido a que es equivalente al dado en *(7)*.

Con el uso de *(10)* podemos reformular la definición 2.1 así:

**Definición 3.4**

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de *(I)* si para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$< u , v >_1 = \int_\Omega g(x,u)v \qquad (11)$$

Utilizando el teorema espectral para operadores autoadjuntos y completamente continuos (Ver [3] , Teorema 4.3) se prueba el siguiente.

**Teorema 3.5**

Existe un conjunto ortonormal completo $(\Phi_n)$ $n = 1,2,...$en $L^2(\Omega)$ y $(\lambda_n) \subset R$ tal que $\Phi_n$ es solución débil del problema

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_n u &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \qquad (12)$$

La sucesión $(\lambda_n)\ n = 1,2,\ldots$ es tal que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$

**Demostración** (Veáse [ 3 ] , Teorema 4.8)

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ y $(\Phi_n)\ n=1,\ldots$ como en el teorema anterior. Como $u \in L^2(\Omega)$, entonces $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k$. Sea

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} c_k \Phi_k$$

como $\Phi_n$ es solución débil de *(12)* se tiene

$$\| u_N \|_1^2 = \int_\Omega < \nabla u_N , \nabla u_N > = \sum_{k,j}^{N} c_k c_j \int_\Omega < \nabla \Phi_k , \nabla \Phi_j >$$

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2$$

Luego, $\| u \|_1^2 \geq \| u_N \|_1^2 \geq \lambda_1 \| u_N \|_0^2$ como $u_N \to u$ en $L^2(\Omega)$ se tiene

$$\| u \|_1^2 \geq \lambda_1 \| u \|_1^2 \qquad (13)$$

Obsérvese que poniendo $u = \Phi_1$ se tiene igualdad en *(13)* por lo tanto la relación *(13)* es la forma óptima de la desigualdad de Poincaré.

**Teorema 3.6**

$H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ y la inclusión es continua, además,

$$\| u \|_{\frac{2n}{n-2}} \leq \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}} \| u \|_1 \qquad (14)$$

**Demostración** (Véase [ 1 ] página 50)

## 4. TEOREMA DE KRASNOSEL'SKII.

En esta sección se prueba un teorema de punto fijo que nos conducirá a establecer las condiciones para que el problema *(I)* tenga solución.

**Preliminares**

Sea $X$ un espacio de Banach, un teorema (Mazur) asegura que la clausura convexa de todo compacto:

$$A \subset X \quad (\text{co }(A) = \overline{\text{cov }(A)})$$

es compacta; pues bien no es necesario suponer que $A$ es compacto, en efecto la sola hipótesis de que $A$ es relativamente compacto basta para asegurar que $co(A)$ es compacto; es decir que subsiste la siguiente:

**Proposición 4.1 (Mazur)**

Sea $X$ un espacio de Banach y $A$ un subconjunto de $X$ relativamente compacto, entonces $co(A)$ es compacto.

**Demostración**

Como $A \subset co(A)$ y $co(A)$ es cerrado, $\bar{A} \subset co(A)$, así $co(\bar{A}) \subset co(A)$. Por otra parte, $A \subset \bar{A}$ y $co(A) \subset co(\bar{A})$ por tanto $co(A) = co(\bar{A})$, pero el teorema de Mazur asegura que $co(\bar{A})$ es compacto.

Se debe a Tychonov el siguiente resultado.

**Teorema 4.2 (TYCHONOV)**

Sea $X$ un espacio vectorial topológico, localmente convexo y Hausdorff, $D \subset X$, convexo y compacto, $f : D \to D$ completamente continua; entonces $f$ tiene puntos fijos.

De este teorema puede darse una versión en espacios de Banach, suavizando las hipótesis sobre $D$, apoyándose en la proposición 4.1.

**Proposición 4.3**

Sea $X$ un espacio de Banach, $D$ un subconjunto cerrado acotado y convexo de $X$ y $f : D \to D$ completamente continua; entonces $f$ tiene puntos fijos.

**Demostración**

Como $f$ es completamente continua y $D$ es acotado, $f(D)$ es relativamente compacto. Por la proposición 4.1, $S_o = co\,[f(D)]$ es convexo y compacto. Ahora bien:

$$f : S_o \to S_o$$

En efecto si $x \in S_o$, como $S_o \subset D$ entonces $f(x) \in f(D)$ y por tanto $f(x) \in co(f(D))$. El teorema de Tychonov garantiza la existencia de puntos fijos de $f$ en $D$ (precisamente en $S_o$).

**Teorema 4.4. (Krasnosel'skii)**

Sea $H$ un espacio de Hilbert y $f: H \to H$ completamente continua tal que $< f(u), u > \leqslant \| u \|^2 \quad \forall\, u \in H$, entonces $f$ tiene puntos fijos.

Un hecho sorprendente es que los puntos fijos pueden siempre encontrarse en la bola unitaria del espacio.

**Demostración**

Como $f$ es completamente continua, la imagen de la bola unitaria $S$ , de $H$ es relativamente compacta y por tanto acotada. Sea $k = \sup\limits_{\| u \| \leqslant 1} \| f(u) \|$ . Si $k = 0$ , $u = 0$ es un punto fijo de $f$ . Si $k > 0$ consideramos $\hat{f} = f/k$ . $\hat{f}$ es completamente continua y como para todo $u : \| u \| \leqslant 1$ resulta $\| \hat{f}(u) \| = \dfrac{\| f(u) \|}{k} \leqslant 1$ , $\hat{f} : S \to S$ y por la proposición 4.3 $\hat{f}$ tiene puntos fijos en $S$ . Sea $u_o$ un punto fijo de $\hat{f}$ . Si $u_o = 0$ , $u_o$ también es punto fijo de $S$ . Si $u_o \neq 0$ es:

$$\hat{f}(u_o) = u_o \qquad o \qquad \frac{f(u_o)}{k} = u_o$$

o sea $f(u_o) = ku_o$ .

Ahora bien,

$$< f(u_o), u_o > \; = \; < ku_o, u_o > \; \leqslant \| u_o \|^2$$

ahí que $k \leqslant 1$ pero entonces $f : S \to S$ y por la proposición 4.3 $f$ tiene puntos fijos en $S$.

**Observaciones**

1. *Es suficiente que* $< f(u), u > \leqslant \| u \|^2$ *subsista en* $S$.

2. *El teorema vale para regiones* $D \subset H$ *tales que* $0 \notin \partial D$ *y* $< f(u), u > \leqslant \| u \|^2$ *con* $u \in \partial D$. *En este caso los puntos fijos de* $f$ *se encuentran en* $\bar{D}$.

# CAPÍTULO SEGUNDO

## APLICACIÓN DE UN TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KRASNOSEL'SKII EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ELÍPTICO DE FRONTERA

## TEOREMA PRINCIPAL

En este capítulo, estudiaremos la existencia de soluciones del problema $(I)$ enunciado en el primer capítulo así:

$$\begin{aligned} \Delta u + g(x,u) &= 0 \text{ en } \Omega \\ u(x) &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \qquad (I)$$

donde $|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^s$, $a(x) \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$ $b > 0$ y $0 \leqslant s < \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$.

Primeramente demostraremos que el problema $(I)$ tiene solución si y solo sí un adecuado operador entre el espacio de Sobolev $H_o^1(\Omega)$ tiene un punto fijo.

En efecto, como $|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^s$ y $s = {}^{s+1}/\frac{s+1}{s}$ entonces por el teorema 1.5 el operador de Nemytskii $G$, definido por $g(x,u)$ es tal que

$$G(L^{s+1}(\Omega) \subset L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$$

Por otro lado, como $0 \leqslant s < \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$ entonces $1 \leqslant s+1 < \frac{2n}{n-2}$ y por el teorema 3.2 $H_o^1(\Omega) \subset L^{s+1}(\Omega)$.

Consideremos el funcional $F : H_o^1(\Omega) \to R$ definido por: $\forall\, v \in H_o^1(\Omega)$.

$$F(v) = \int_\Omega g(x,u)v \qquad (1)$$

$F$ es un funcional lineal, además, es continuo ya que:

$$|\ F(v)\ | \leqslant \|\ g(x,u)\ \|_{\frac{s+1}{s}} \quad \|\ v\ \|_{s+1}$$

$$\leqslant \|\ g(x,u)\ \|_{\frac{s+1}{s}} \quad k\|\ v\ \|_1$$

y por el teorema de representación de Riez y $(1)$, existe un único $u \in H^1_o(\Omega)$ tal que:

$$\forall\ v \in H^1_o(\Omega), \quad \int_\Omega g(x,u)v \quad = \quad < f(u),\ v >_1 \quad (2)$$

donde $f : H^1_o(\Omega) \rightarrow H^1_o(\Omega)$

Tenemos entonces el siguiente teorema

**Teorema 1**

$u \in H^1_o(\Omega)$ es una solución débil de $(I)$ si y solo sí $f(u) = u$.

**Demostración**

Si $u \in H^1_o(\Omega)$ una solución débil de $(I)$, entonces por definición 3.4

$$< u\ ,\ v >_1 = \int_\Omega g(x,u)v \quad , \quad \forall\ v \in H^1_o(\Omega)$$

luego, por (2)

$$< f(u)\ ,\ v >_1 = < u\ ,\ v >_1 \quad , \quad \forall\ v \in H^1_o(\Omega)$$

lo cual equivale a decir que:

$$f(u) = u.$$

**Observación**

El operador $f$ es completamente continuo.

En el siguiente teorema veremos bajo que condiciones el operador $f: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tiene un punto fijo, solución de $(I)$.

**Teorema 2 (Teorema Principal)**

Sea $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición de Caratheodory y tal que

$$|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^s$$

donde $a(x) \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$, $b > 0$ y $0 \leqslant s < \frac{n+2}{n-2}$, $n > 2$.

Entonces:

*a)* *Si $0 \leqslant s < 1$; el problema $(I)$ siempre tiene solución.*

*b)* *Si $s = 1$; el problema $(I)$ tiene solución si se cumple que*

$$\frac{1}{\lambda_1} < \gamma$$

*donde $\gamma$ es la constante del teorema 1.4 y $\lambda_1$ el primer valor propio de $-\Delta$.*

*c)* *Si $s > 1$; el problema $(I)$ tiene solución si*

$$\| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant \frac{1}{s^{\frac{s}{s^2-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s}{s-1}} - \left[ \frac{1}{s^{\frac{s}{s-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s+1}{s-1}} + 1 \cdot \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

**Demostración**

Según el Teorema 1, el problema *(I)* tiene solución si y solo sí $f$ tiene un punto fijo.

De *(2)* tenemos que:

$$< f(u),v>_1 = \int_\Omega g(x,u)v \quad , \qquad \forall\ v \in H_o^1\ (\Omega)$$

en particular,

$$< f(u),u >_1 \ = \ \int_\Omega g(x,u)u \qquad\qquad y$$

$$< f(u),u >_1 \ \leqslant \ \| g(x,u) \|_{\frac{s+1}{s}} \ \| u \|_{s+1}$$

$$\leqslant \ \| g(x,u) \|_{\frac{s+1}{s}} \ k \| u \|_1$$

como $G(L^{s+1}(\Omega)) \subset L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$, por *(5)* del Teorema 1.4 se tiene que:

$$<f(u),u>_1 \ \leqslant \ \{ [ (\frac{\| u \|_{s+1}}{\gamma})^{s+1} + 1 \ ]^{\frac{s}{s+1}} + \ \| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} \} \ k \ \| u \|_1$$

$$\leqslant \{ [ (\frac{\| u \|_1}{\gamma})^{s+1} \ + 1 \ ]^{\frac{s}{s+1}} + \ \| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} \} \ k \| u \|_1 \qquad (3)$$

dado que el operador $f$ es completamente continuo, el teorema de Krasnosel'skii afirma que $f$ tiene puntos fijos si $< f(u),u >_1 \leqslant \| u \|_1^2 \quad \forall\ u \in \partial D,\ D \subset H_o^1(\Omega)$.

En la desigualdad *(3)* hagamos

$$\| u \|_1 = y \quad , \quad \| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} = \alpha$$

y veamos si existen valores " y " que satisfagan la desigualdad $< f(u), u >_1 \leqslant \| u \|_1^2$ es decir,

$$\{ [ (\frac{ky}{\gamma})^{s+1} + 1 ]^{\frac{s}{s+1}} + \alpha \} ky \leqslant y^2 , \quad y > 0$$

o bien,

$$[ (\frac{ky}{\gamma})^{s+1} + 1]^{\frac{s}{s+1}} \leqslant \frac{y}{k} - \alpha , \quad y > k\alpha \qquad (4)$$

*a)* Sea $0 \leqslant s < 1$.

Si $s = 0$, tenemos que $y \geqslant k\alpha + k$ ; luegò

$$< f(u),u >_1 \leqslant \| u \|_1^2 \qquad \forall\, u \in \partial B(0, k\alpha + k)$$

y por el teorema de Krasnosel'skii $f$ tiene un punto fijo en la bola cerrada $\bar{B}(0, k\alpha + k)$, solución de *(I)*.

Si $0 < s < 1$ , la desigualdad *(4)* o

$$\frac{[ ( \frac{ky}{\gamma} )^{s+1} + 1 ]^{\frac{s}{s+1}}}{y/k - \alpha} \leqslant 1 , \quad y > k\alpha$$

se satisface para valores "y" suficientemente grandes; luego *(I)* siempre tiene solución en este caso.

*b)* Si $s = 1$, tenemos la desigualdad

$$[ (\frac{ky}{\gamma})^2 + 1 ]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{y}{k} - \alpha , \qquad y > k\alpha$$

$$\text{o} \quad \frac{k^2 y^2}{\gamma^2} + 1 \leqslant \frac{y^2}{k^2} - 2\frac{\alpha}{k} y + \alpha^2 \ , \quad y > k\alpha$$

$$\text{o} \quad \left(\frac{1}{k^2} - \frac{k^2}{\gamma^2}\right) y^2 - 2\frac{\alpha}{k} y + \alpha^2 - 1 \geqslant 0 \ , \quad y > k\alpha$$

existen valores " $y$ " que satisfacen esta desigualdad si $\frac{1}{k^2} - \frac{k^2}{\gamma^2} > 0$ , o sea , $k^2 < \gamma$ . Por el teorema 3.5 , $k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ luego, el problema (I) tiene solución si:

$$\frac{1}{\lambda_1} < \gamma$$

c) Si $s > 1$, tenemos la desigualdad (4),

$$\left[ \left(\frac{k}{\gamma}\right)^{s+1} y^{s+1} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}} \leqslant \frac{y}{k} - \alpha \ , \quad y > k\alpha$$

Si suponemos $\alpha = 0$ , obtenemos

$$\left[ \left(\frac{k}{\gamma}\right)^{s+1} y^{s+1} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}} \leqslant \frac{y}{k} \ , \quad y > 0 \qquad (5)$$

$$\left[ \left(\frac{k}{\gamma}\right)^{s+1} y^{s+1} + 1 \right]^{s} \leqslant \frac{y^{s+1}}{k^{s+1}} \ , \quad y > 0$$

Haciendo $u = y^{s+1}$

$$a = \left(\frac{k}{\gamma}\right)^{s+1}$$

$$b = \frac{1}{k^{s+1}}$$

se obtiene la desigualdad

$$au + 1 \leqslant b^{1/s} u^{1/s} \qquad (6)$$

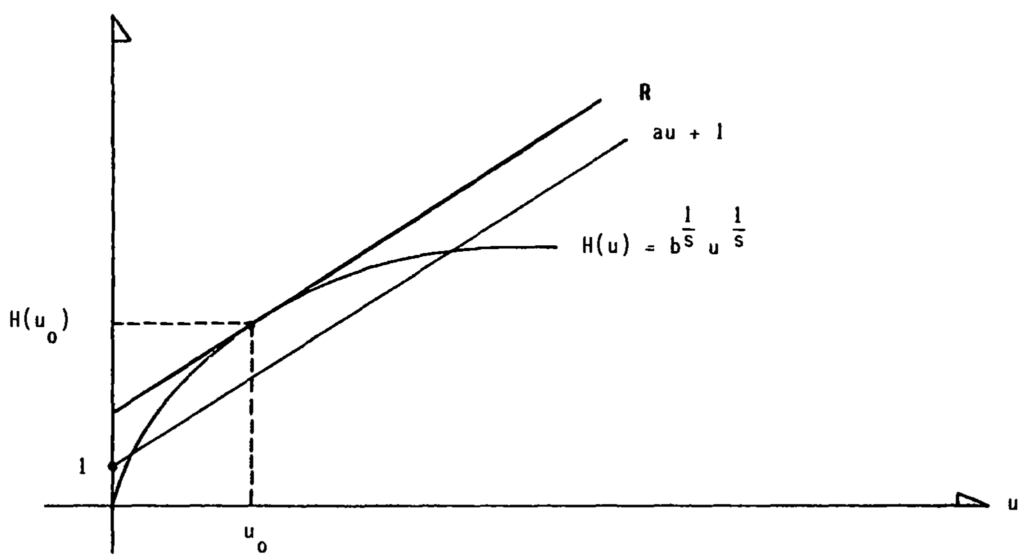
consideremos la función

$$H(u) = b^{1/s} u^{1/s}$$

como $\quad H'(u) = \frac{1}{s} b^{\frac{1}{s}} u^{\frac{1-s}{s}} \geqslant 0$

y $\quad H''(u) = \frac{1-s}{s^2} b^{1/s} u^{\frac{1-2s}{s}} \leqslant 0$

entonces la desigualdad (6) se satisface si se presenta la siguiente situación gráfica




Consideremos la recta tangente a $H(u) = b^{\frac{1}{s}} u^{\frac{1}{s}}$ con pendiente a. Veamos para que valor $u$ , $H'(u) = a$

$$\frac{1}{s} b^{\frac{1}{s}} u^{\frac{1-s}{s}} = a$$

$$\Rightarrow \quad u^{\frac{1-s}{s}} = \frac{sa}{b^{1/s}}$$

$$\Rightarrow \quad u_0 = \left(\frac{sa}{b^{1/s}}\right)^{\frac{s}{1-s}} = \left(\frac{b^{\frac{1}{s}}}{sa}\right)^{\frac{s}{s-1}}$$

$$H(u_o) = b^{1/s}\left(\frac{b^{1/s}}{sa}\right)^{1/s-1} = \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

La recta tangente $a$ $H(u) = b^{1/s}\, u^{1/s}$ en el punto $(u_o, H(u_o))$ es

$$R = au + (H(u_o) - au_o)$$

de donde concluimos que la desigualdad *(6)* se satisface si

$$H(u_o) - au_o > 1$$

es decir,

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}} - a\left(\frac{b^{\frac{1}{s}}}{sa}\right)^{\frac{s}{s-1}} > 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}} - \frac{1}{s}\left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}} > 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}} \left[\, 1 - \frac{1}{s} \,\right] > 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{\frac{1}{k^{s+1}}}{s\,\frac{k^{s+1}}{\gamma^{s+1}}}\right)^{\frac{1}{s-1}} > \frac{s}{s-1}$$

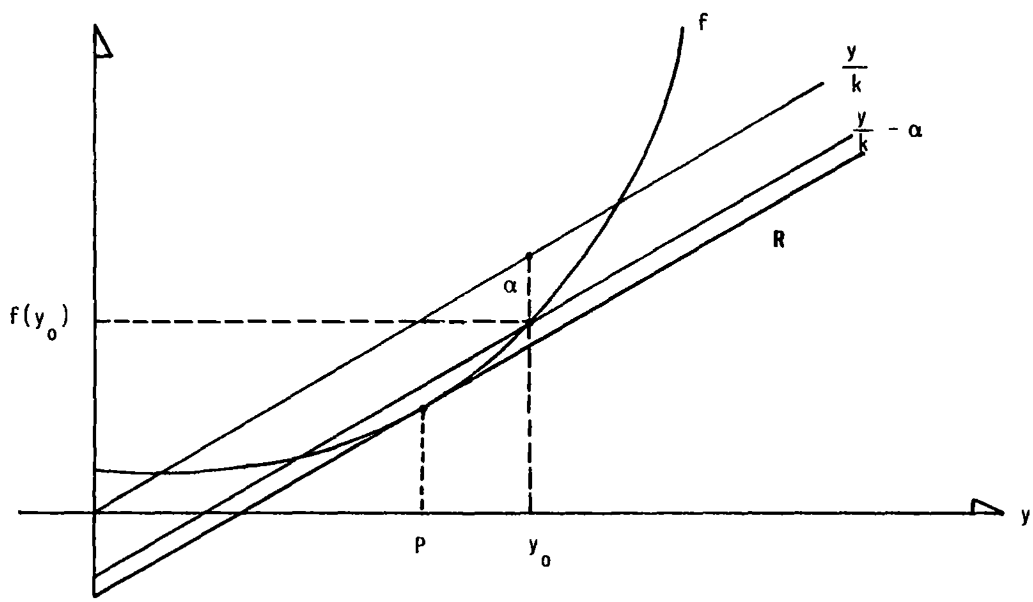
$$\Longrightarrow \qquad \frac{\gamma^{\frac{s+1}{s-1}}}{s^{\frac{1}{s-1}}\; k^{\frac{2(s+1)}{s-1}}} > \frac{s}{s-1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\gamma^{\frac{s+1}{s-1}}}{k^{\frac{2(s+1)}{s-1}}} > \frac{s^{\frac{s}{s-1}}}{s-1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\gamma}{k^2} > \left(\frac{s^{\frac{s}{s+1}}}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{s+1}}$$

Si la condición anterior se verifica entonces la desigualdad *(5)* se satisface.

Volvamos a la desigualdad *(4)* . Si consideramos función $f(y) = [\, (\frac{k}{\gamma})^{s+1} \quad y^{s+1} + 1\,]^{s/s+1}$ y las rectas $y/k$ y $y/k - \alpha$ se presenta la siguiente situación gráfica:




$$u_o = y_o^{s+1} = \left(\frac{b}{sa}^{1/s}\right)^{\frac{s}{s-1}} \text{ entonces,}$$

$$y_o = \left(\frac{b}{sa}^{1/s}\right)^{\frac{s}{s^2-1}}$$

$$f(y_o) = \left[\, a \left(\frac{b}{sa}^{1/s}\right)^{\frac{s}{s-1}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

$$\frac{1}{k}\, y_o = b^{\frac{1}{s+1}} \left(\frac{b}{sa}^{1/s}\right)^{\frac{s}{s^2-1}}$$

En vista de que no es fácil determinar el punto $P$, de la recta tangente a $f$ con pendiente $\frac{1}{k}$ , considera-mos la recta que pasa por $(y_o , f(y_o))$ y tiene pendiente $\frac{1}{k}$

Luego, $\alpha \leqslant \frac{1}{k} y_o - f(y_o)$ es la condición para que la desigualdad *(4)* se satisfaga, es decir,

$$\alpha \leqslant \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{s}{s^2-1}} - \left[ a\left(\frac{b^{1/s}}{sa}\right)^{\frac{s}{s-1}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

$$\alpha \leqslant \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{s}{s^2-1}} - \left[ \frac{1}{s} \left(\frac{b}{sa}\right)^{\frac{1}{s-1}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

$$\alpha \leqslant \left(\frac{\frac{1}{k^{s+1}}}{s\frac{k^{s+1}}{\gamma^{s+1}}}\right)^{\frac{s}{s^2-1}} - \left[\frac{1}{s}\left(\frac{\frac{1}{k^{s+1}}}{s\frac{k^{s+1}}{\gamma^{s+1}}}\right)^{\frac{1}{s-1}} + 1\right]^{\frac{s}{s+1}}$$

$$\alpha \leqslant \frac{1}{s^{\frac{s}{s^2-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s}{s-1}} - \left[ \frac{1}{s^{\frac{s}{s-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s+1}{s-1}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

es decir, el problema *(I)* tiene solución si

$$\| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant \frac{1}{s^{\frac{s}{s^2-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s}{s-1}} - \left[ \frac{1}{s^{\frac{s}{s-1}}} \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)^{\frac{s+1}{s-1}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

**Corolario 3.**

Si $\mu(\Omega)$ es suficientemente pequeña el problema *(I)* tiene solución en todos los casos.

**Demostración**

Como $1 \leqslant s + 1 < \frac{2n}{n-2}$ entonces por el teorema *1.2*

$$L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \subset L^{s+1}(\Omega) \text{ y}$$

$$\| u \|_{s+1} \leqslant [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{s+1} - \frac{n-2}{2n}} \| u \|_{\frac{2n}{n-2}} \qquad (1)$$

Además, por el teorema 3.6

$$H_o^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \text{ y}$$

$$\| u \|_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}} \| u \|_1 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\| u \|_{s+1} \leqslant [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{s+1} - \frac{n-2}{2n}} \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}} \| u \|_1$$

de donde,

$$k = [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{s+1} - \frac{n-2}{2n}} \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}}$$

y de allí que

$$\mu(\Omega) \to 0 \iff k \to 0$$

Si $k \to 0$ , las condiciones del teorema 2 para el caso $s = 1$ y $s > 1$ se satisfacen por lo tanto si $\mu(\Omega) \to 0$ el problema $(I)$ siempre tiene solución

**APLICACIONES**

Daremos ahora algunas aplicaciones interesantes del teorema 2.

**Ejemplo 1.**

$$\Delta u + u + f(x) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \qquad (II)$$

donde $f(x) \in L^2(\Omega)$.

El problema *(II)* tiene solución si $\lambda_1 > 1$.

**Demostración**

En este problema, $g(x,u) = u + f(x)$, luego:

$$| g(x,u) | \leqslant f(x) + | u |$$

de donde, s = 1

El operador de Nemytskii $G$, determinado por $g(x,u)$ está definido de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

$g(x,u) - g(x,0) = G(u) = u$ por lo tanto, si $\| G(u) \|_0 \leqslant 1$ entonces $\| u \|_0 \leqslant 1$ lo que indica que $\gamma = 1$.

Luego, por la parte *b)* del teorema 2 *(II)* tiene solución si $\lambda_1 > 1$.

**Nota:**

Podemos construir muchos ejemplos en los que $\lambda_1 > 1$, así:

En $R^3$, consideremos

$$\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi] \quad , \quad \lambda_1 = 3$$

y la función propia

$$\psi_1(x,y,z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$$

satisfacen

$$\Delta\psi_1 + 3\psi_1 = 0 \quad en \quad \Omega$$

$$\psi_1(x,y,z) = 0 \quad en \quad \partial\Omega$$

**Ejemplo 2.**

$$\Delta u + |u|^s + f(x) = 0 \quad en \quad \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad en \quad \partial\Omega \qquad (III)$$

donde $f \in L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$ y $1 < s < \dfrac{n+2}{n-2}$ , $n > 2$.

El problema $(III)$ tiene solución si

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant s^{\frac{s}{1-s}} k^{\frac{2s}{1-s}} - [ s^{\frac{s}{1-s}} k^{\frac{2(s+1)}{1-s}} + 1 ]^{\frac{s}{s+1}}$$

**Demostración**

En este problema $g(x,u) = |u|^s + f(x)$ , luego $|g(x,u)| \leqslant f(x) + |u|^s$ .

El operador de Nemytskii determinado por $g(x,u)$ es tal que $G(L^{s+1}(\Omega)) \subset L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$ .

$g(x,u) - g(x,0) = G(u) = |u|^s$ por lo tanto si

$$\| G(u) \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant 1 \implies \| u^s \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \left[ \int_\Omega | u^s |^{\frac{s+1}{s}} \right]^{\frac{s}{s+1}} \leqslant 1 \Rightarrow \left[ \int_\Omega | u |^{s+1} \right]^{\frac{s}{s+1}} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \left[ \int_\Omega | u |^{s+1} \right]^{\frac{1}{s+1}} \leqslant 1 \Rightarrow \| u \|_{s+1} \leqslant 1,$$ de donde

$\gamma = 1$ . Por otro lado, $\| g(x,0) \|_{\frac{s+1}{s}} = \| f \|_{\frac{s+1}{s}}$ luego el problema *(III)* tiene solución si

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant s^{\frac{s}{1-s^2}} k^{\frac{2s}{1-s}} - \left[ s^{\frac{s}{1-s}} k^{\frac{2(s+1)}{1-s}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}}$$

Este ejemplo es muy interesante porque permite estudiar el problema:

$$\begin{aligned} \Delta u + | u |^{\frac{n+2}{n-2}} + f &= 0 \text{ en } \Omega \\ u(x) &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \qquad (IV)$$

consideremos el caso $f \in L^\infty(\Omega)$.

El problema *(IV)* es conocido como el problema de **Yamabe**. Ha sido resuelto en [ 2 ] por Brezis-Niremberg para $f = 0$ .

Con nuestro método no lo podemos resolver porque para $s = \dfrac{n+2}{n-2}$ el operador $F : H^1_o(\Omega) \to H^1_o(\Omega)$ no es completamente continuo y no vale el teorema de Krasnosel'skii, no obstante podemos proceder así: Supongamos,

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant s^{\frac{s}{1-s}} k^{\frac{2s}{1-s}} - \left[ s^{\frac{s}{1-s}} k^{\frac{2(s+1)}{1-s}} + 1 \right]^{\frac{s}{s+1}} \quad (1)$$

con $f \in L^\infty(\Omega)$.

Llamamos $B(n)$ el miembro derecho de $(1)$ cuando $s \to n$.

Note que

$$k(s) = |\Omega|^{\frac{1}{s+1} - \frac{n-2}{2n}} \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}} \qquad (|\Omega| = \mu(\Omega))$$

y por lo tanto cuando $s \to n$, tenemos que

$$k(s) \to \frac{n-1}{(n-2)\sqrt{n}}$$

Entonces tenemos el siguiente teorema

**Teorema 3.**

Supongamos que $\| f \|_\infty$ satisface una de las siguientes desigualdades

a) $\| f \|_\infty < \dfrac{B(n)}{|\Omega|^{\frac{n+2}{2n}}}$ si $|\Omega| > 1$

b) $\| f \|_\infty < B(n)$ si $|\Omega| \leqslant 1$

Entonces el problema $(IV)$ tiene solución si $\partial\Omega$ es suave.

**Demostración**

Como $1 < s < \dfrac{n+2}{n-2}$ tenemos:

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant \| f \|_\infty \, |\Omega|^{\frac{s}{s+1}}$$

Si $|\Omega| > 1$ de a) se tiene:

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant \| f \|_\infty \, . \, |\Omega|^{\frac{s}{s+1}} < \| f \|_\infty \, |\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} < B(n) \qquad (2)$$

Si $|\Omega| \leqslant 1$ de $b)$ se tiene:

$$\| f \|_{\frac{s+1}{s}} \leqslant \| f \|_{\infty} < B(n) \qquad (3)$$

De $(2)$ ó $(3)$ según el caso se deduce que existe $s_o < \frac{n+2}{n-2}$ tal que si $s \in (s_o, \frac{n+2}{n-2})$ se tiene la desigualdad $(1)'$ y según el teorema $2$ el problema

$$\begin{aligned} \Delta u + |u|^s + f &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{aligned} \qquad (V)$$

tiene solución ; llamémosla $u_s$, $s \in (s_o, \frac{n+2}{n-2})$. Estas

$$\{ u_s \}\, s \in (s_o, \tfrac{n+2}{n-2})$$

son acotadas en $H_o^1(\Omega)$ por lo tanto existe $\{ u_k \} \subset \{ u_s \}$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u_{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{cuando} \quad k \to \frac{n+2}{n-2}$$

$\rightharpoonup$(convergencia débil).

Sea $u_{\frac{n+2}{n-2}} = u_N$. Por un conocido argumento de la teoría de la regularidad cada $u_s \in H_o^1(\Omega)$ solución de $(V)$ cumple que $u_s \in C(\bar{\Omega})$. Las soluciones débiles de $(V)$ son los puntos fijos de $F_s : H_o^1(\Omega) \to H_o^1(\Omega)$

$$< F_s(u), v >_1 = < |u|^s + f, v >_0$$

o sea $F_s(u_s) = u_s$. Entonces, si $\{ u_k \} \subset \{ u_s \}$ es tal que $u_k \rightharpoonup u_N$ cuando $k \to N$, tenemos

$$< F_k(u_k),\ v >_1 \ = \ < u_k\ ,\ v >_1 \ = \ < |\ u_k|^k + f\ ,\ v >_0 \qquad (4)$$

$\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces,

$$\lim_{k \to N} < |\ u_k|^k + f\ ,\ v >_0 \ = \ < u_N\ ,\ v >_1 \qquad (5)$$

Por otro lado, como $u_k \in C(\bar{\Omega})$

$$\lim_{\gamma \to N} \left|\ |\ u_k|^\gamma - |\ u_k|^N \right|^{\frac{2n}{n+2}} = 0$$

y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$|\ u_k|^\gamma \to |\ u_k|^N \quad en \quad L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \quad si \quad \gamma \to N.$$

Ahora para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ fijo, $< v\ ,\ .\ >_0$ define un funcional lineal y continuo en $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ entonces $\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lim_{\gamma \to N} < |\ u_k|^\gamma + f\ ,\ v >_0 \ = \ < |\ u_k|^N + f\ ,\ v >_0 \qquad (6)$$

Como $\{ u_k \} \subset H_0^1(\Omega)$ es acotada y como $H_0^1(\Omega)$ está encajado en $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, $\{ u_k \}$ está acotada en $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$. Es más el operador de Nemytskii definido por $|\ u\ |^N$ es acotado así que $\{ |\ u_k\ |^N \}$ es acotada en $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, por lo tanto existe $h \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ y una subsecuencia de $\{ u_k \}$ notada en la misma forma tal que $\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{k \to N} < |\ u_k|^N + f\ ,\ v >_0 \ = \ < h + f\ ,\ v >_0 \qquad (7)$$

De (6) y (7) tenemos,

$$\lim_{\gamma,\, k \to N} < |\ u_k|^\gamma + f\ ,\ v >_0 \ = \ < h + f\ ,\ v >_0 \qquad (8)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$.

De *(5)* y *(8)* se tiene

$$< h + f\ ,\ v >_0 \ = \ < u_N\ ,\ v >_1 \qquad (9)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$

También, como $u_k \rightharpoonup u_N$ en $H^1_o(\Omega)$ , entonces

$$\lim_{k \to N} <|\ u_k|^{\gamma} + f\ ,\ v >_0 \ = \ <|\ u_N|^{\gamma} + f\ ,\ v >_1 \quad (10)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$

De *(4)* , *(8)* , *(9)* y *(10)* se tiene

$$\lim_{\gamma \to N} <|\ u_N|^{\gamma} + f\ ,\ v >_1 \ = \ < h + f\ ,\ v >_0 \qquad (11)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$

Como $|\ u_N|^{\gamma} .\ v \leqslant (\,|\ u_N|^{N} + 1\,)\ |\ v\ |$, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos asegura que

$$\lim_{\gamma \to N} <|\ u_N|^{\gamma} + f\ ,\ v >_0 \ = \ <|\ u_N|^{N} + f\ ,\ v >_0 \quad (12)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$

De *(11)* y *(12)* se sigue que

$$<|\ u_N|^{N} + f\ ,\ v >_0 \ = \ < u_N\ ,\ v >_1 \qquad (13)$$

$\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$.

Es claro de *(13)* que $u_N$ es solución débil de

$$\Delta u + |u|^N + f = 0 \quad en \quad \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad en \quad \partial\Omega$$

**CONCLUSIONES**

- Los resultados obtenidos anteriormente nos permiten dar una estimativa del tamaño de la región $\Omega$ para que el problema *( I )* tenga solución.

- Más aún, podemos concluir que el problema *( I )* siempre tendrá solución en una región de medida suficientemente pequeña.

**BIBLIOGRAFÍA**

[ 1 ] Berger, M.S. **Nonlinearity and Functional Analysi.** Academic Press. New York. 1977.

[ 2 ] Brezis H. and Niremberg L. **Positive Solutions on Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents.** Conmunications on Pure and Applied Math. Vol XXXVI 437-477. 1983.

[ 3 ] Caṣtro, Alfonso. **Métodos Variacionales y Análisis Funcional no Lineal.** Sociedad Colombiana de Matemática. 1980.

[ 4 ] De Figueiredo, Djairo G. **Equacoes Elipticas nao Lineares.** Impa. Río de Janeiro. 1969.

[ 5 ] Friedman, Avner. **Partial Diffential Equations.** Holt. New York. 1969.

[ 6 ] Krasnosel'skii, M.A. **Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations.** Pergamon. Oxford. 1965.

[ 7 ] Lloyd, N.G. **Degree Theory.** Cambridge University Press. Cambridge. 1978.

[ 8 ] Pini, B. **Lezioni di Analisi Matematica di Secondo Livello.** Cooperativa Libraria Editrice Dell'Universita di Bologna. Bologna. 1982.

[ 9 ] Vainberg, M. **Variational Methods for the Study of Nonlinearity Operator.** Holden Day. San Francisco. 1964.

[ 10 ] Zuluaga, Mario. **On a fixed point theorem and aplications to a two point boundary value problem.** Comentationes Mathematicas. Universitatis Carolinae. 27, 4. 1986.