UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE TRES NUEVAS CLASES DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS Y SUS PROPIEDADES DE PERMANENCIA

POR:

ENRIQUE G. WILLIAMSON D.

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA

T.M.

Aprobado por:

Director de Tesis ______________________
Jorge Rojo Ph.D.

Miembro del Jurado: ______________________
Oscar Valdivia G., Ph.D.

Miembro del Jurado: ______________________
Augusto Arriagada, M.Sc.

Fecha: 10 de Sept. de 1982.

Obs. del autor

DEDICATORIAS

A Lidia, Indira, Desiree y Anabelle, con
mucho amor por sus constantes estímulos
e infinita paciencia y sacrificio, que me
sirvieron como fuente de inspiración en
la realización de esta obra.

Esta tesis está dedicada con mucho cariño a todos mis compañeros de la Maestría, a todos mis colegas del Departamento de Matemática y de manera muy especial, a todo aquél a quien este humilde trabajo pudiera serle útil.

AGRADECIMIENTO

Quiero dejar constancia de mi más profundo
agradecimiento al Prof. Dr. Jorge Rojo M.
quien en todo momento supo estimularme,
orientarme y aconsejarme para que esta obra
se hiciera una realidad.

Agradezco a las autoridades universitarias y muy en especial, a las autoridades y profesores de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, quienes por sus constantes desvelos hicieron posible que esta primera etapa de la Maestría culminara con todo éxito.

INDICE

INTRODUCCION

La necesidad de describir la complejidad de las situaciones encontradas en Análisis Funcional ha motivado a varios matemáticos a generalizar las nociones clásicas de espacios tonelados (t), de espacios infratonelados (i) y la de espacios de Mackey (M).

Así por ejemplo, la noción de espacio de tipo (DF) introducida por Grothendieck [3] , inició el estudio de una nueva clase de espacios localmente convexos no necesariamente infratonelados.

Posteriormente, Husain [6] , Rojo [14] , M. de Wilde-C. Houet [2] y otros, realizaron investigaciones con el objeto de obtener una nueva clase de espacios localmente convexos empleando esta vez conceptos de numerabilidad.

Esta tesis tiene como objetivo fundamental el estudio de tres nuevas clases de espacios localmente convexos: los espacios d-tonelados (dt) y d-infratonelados (di) que fueron introducidos por Husain [6] , y los espacios d-Mackey (dM) que fueron introducidos por Rojo [14] .

Estos espacios serán generalizaciones de los espacios tonelados, infratonelados y de Mackey respectivamente, y, como veremos posteriormente, mantienen relaciones con los espacios que generalizan.

En esta forma, por ejemplo, el completamiento de un espacio di será un espacio dt.

Con la introducción de estos nuevos espacios se obtiene una nueva clasificación de los espacios localmente convexos, los cuales se conectan entre si por el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & dt \arrow[d, Rightarrow] \\ i \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & di \arrow[d, Rightarrow] \\ M \arrow[r, Rightarrow] & dM \end{tikzcd}$$

A continuación damos una breve descripción de la forma como hemos organizado nuestro trabajo.

El capítulo 1 tiene como finalidad el clarificar la terminología utilizada y presentar las definiciones básicas, proposiciones y teoremas fundamentales. Hemos omitido la demostración de la mayoría de estos teoremas ya que las mismas se localizan fácilmente en las referencias dadas en la bibliografía (ver [4] y [13]).

El capítulo 2 inicia el estudio de los espacios d-tonelados, d-infratonelados y d-Mackey presentando sus definiciones y algunas caracterizaciones de estos espacios por medio del concepto fundamental de d-tonel. Los resultados demostrados en este capítulo muestran como están conectados entre si estos espacios.

En el capítulo siguiente se analizan algunas propiedades hereditarias (subespacios, productos, cocientes,etc.). Además se prueba que el completamiento de un espacio d-infratonelado es un espacio d-tonelado.

En el capítulo 4 presentamos una versión del famoso teorema de Banach-Steinhaus para los espacios d-tonelados. Se demuestra también que el dual topológico de un espacio d-tonelado provisto de la topología débil es semi-completo.

El capítulo 5 contiene algunos ejemplos y contraejemplos los cuales tienen la finalidad de mostrar que las recíprocas de las implicaciones del cuadro anterior no se verifican en general. Por otra parte, también demostramos que la propiedad de ser un espacio d-tonelado o d-infratonelado no se mantiene para los subespacios cerrados de los mismos.

En el capítulo final se analizan condiciones mediante las cuales un subespacio preserva la propiedad de ser también un espacio d-tonelado o d-infratonelado. Más específicamente, se estudian los subespacios de codimensión finita o numerable y los límites inductivos estrictos de sucesiones de subespacios de d-tonelados y d-infratonelados.

Para concluir esta introducción, haremos algunos comentarios adicionales con respecto a la forma como hemos organizado nuestro trabajo.

Cada capítulo está dividido en secciones. En cada sección las definiciones, proposiciones, teoremas y ejemplos están indicados por un número (por ejemplo, Definición 2). En un mismo capítulo, serán referidos por el número de la sección y su número correspondiente (por ejemplo, Proposición 3.2), y, en cada capítulo distinto, por el número del capítulo, de la sección y su propio número (por ejemplo, Teorema 3.2.3).

Las referencias correspondientes a la bibliografía aparecen en corchetes [ ] .

CAPITULO 1

GENERALIDADES

1. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

DEFINICION 1. Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y τ una topología sobre E. Se dice que el par (E, τ) es un espacio vectorial topológico (e.v.t) si las aplicaciones

1) $$E \times E \longrightarrow E$$
$$(x,y) \longmapsto x + y$$

2) $$\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

son ambas continuas.

EJEMPLO 1. Todo espacio normado $(E, \| \|)$ es un espacio vectorial topológico.

OBSERVACIONES. En lo que sigue, todo espacio vectorial E se supondrá sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$.

Si F es un subespacio vectorial de E lo anotaremos por $F \trianglelefteq E$. En el caso de que (E, τ) sea un e.v.t y $F \trianglelefteq E$, asumiremos que F es también un espacio vectorial topológico munido de la topología inducida por τ y lo indicaremos por (F, τ_F) o $(F, \tau/F)$.

Finalmente, en el contexto quedará claro cuando $\mathbb{K}$ se considera como un cuerpo o como un espacio normado ($\mathbb{K}$, $| \ |$) siendo $| \ |$ la norma del valor absoluto.

DEFINICION 2. Sea E un espacio vectorial y A una parte de E. Entonces,

1) A es equilibrado si

$$\forall \lambda \in K, \quad |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda A \subseteq A$$

2) A es convexo si

$$\forall x,y \in A, \forall \alpha,\beta \in R_+ : \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A$$

3) A es un disco si A es equilibrado y convexo a la vez.

PROPOSICION 1. En un espacio vectorial se tiene que

1) La intersección o la unión de cualquier familia de partes equilibradas es equilibrada

2) La intersección de cualquier familia de partes convexas es convexa

3) La intersección de cualquier familia de partes disqueadas es disqueada.

DEFINICION 3. Sea E un espacio vectorial y $A \subseteq E$. Entonces,

1) La cápsula equilibrada de A es el conjunto

$$e(A) = \bigcap \left\{ B \subseteq E / A \subseteq B, \ B \text{ equilibrado} \right\} .$$

2) La cápsula convexa de A es el conjunto

$$c(A) = \bigcap \left\{ B \subseteq E / A \subseteq B, \ B \text{ convexo} \right\} .$$

3) La cápsula disqueada de A es el conjunto

$$\Gamma(A) = \bigcap \left\{ B \subseteq E / A \subseteq B,\ B \text{ disco} \right\}$$

Dado un vector x de un e.v.t $(E, \mathcal{T})$, el conjunto $V \subseteq E$ se dice que es una vecindad de x si existe un abierto $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Denotaremos con $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ al filtro de vecindades de x.

Una parte $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ se dice que es una base (o un sistema fundamental) de vecindades de x si dado $V \in \mathcal{V}(x, \mathcal{T})$ $\exists\, U \in \mathcal{B} : U \subseteq V$.

En todo e.v.t $(E, \mathcal{T})$, su estructura topológica queda completamente determinada por una base del filtro de vecindades $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ del origen 0.

Un e.v.t $(E, \mathcal{T})$ es Hausdorff o T_2 si la topología $\mathcal{T}$ es Hausdorff. Esto equivale a decir que el conjunto unitario $\{0\}$ es cerrado.

Un e.v.t $(E, \mathcal{T})$ es metrizable si es T_2 y si el filtro $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ admite una base contable. Una parte A de E se dice que es completa si todo filtro de Cauchy en A converge a un vector (o punto) de A.

PROPOSICION 2. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t T_2 . Entonces existe un e.v.t Hausdorff y completo $\hat{E}$ que contiene a E como un subespacio denso. Este espacio $\hat{E}$ es único salvo isomorfismos. Además, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$, entonces la familia $\hat{\mathcal{B}} = \left\{ \overline{V}^{\hat{E}} : V \in \mathcal{B} \right\}$ es una base del filtro de vecindades de

0 en $\hat{E}$.

2. ABSORCION. CONJUNTOS ACOTADOS.

DEFINICION 1. Sean E un e. v, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se dice que A absorbe x si $\exists \lambda > 0$: $|\alpha| \geq \lambda \Longrightarrow x \in \alpha A$. El conjunto A se llama absorbente si absorbe cada vector x de E.

DEFINICION 2. Sean A y B subconjuntos de un espacio vectorial E. Se dice que A absorbe B si

$$\exists \alpha > 0 : |\lambda| \geq \alpha \Longrightarrow B \subseteq \lambda A.$$

DEFINICION 3. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t. Una parte A de E se dice acotada si $\forall V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ se tiene que V absorbe A. En particular, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ formada por conjuntos equilibrados, entonces A es acotado si

$\forall U \in \mathcal{B}$, $\exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha U$. La familia de todas las partes acotadas del e.v.t $(E, \mathcal{T})$ se indicará por $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

PROPOSICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t. Entonces

1) Toda parte finita de E es acotada

2) La reunión de cualquier familia finita de partes acotadas es acotada

3) Todo subconjunto de una parte acotada es acotado.

4) La cápsula equilibrada de una parte acotada es acotada.

5) La adherencia y el interior de una parte acotada es acotada.

6) Toda sucesión de Cauchy es acotada.

7) Toda sucesión convergente es acotada.

8) Toda parte precompacta (o compacta) es acotada.

9) Cualquier combinación lineal de partes acotadas es acotada.

10) Si $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ admite una base de vecindades convexas, entonces la cápsula convexa y la cápsula disqueada de toda parte acotada son también acotadas.

Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos acotados de un e.v.t $(E, \mathcal{T})$ se dice que constituye un sistema fundamental de conjuntos acotados si toda parte acotada de E está contenida en algún miembro de $\mathcal{A}$.

DEFINICION 4. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t.

a) Un subconjunto T de E se dice que es un tonel en E si T es un disco cerrado y absorbente.

b) Una parte S de E se dice bornívora si S absorbe cada conjunto acotado de E.

Es inmediato de la definición anterior que toda vecindad del origen es una parte bornívora de E.

Un e.v.t $(E, \mathcal{T})$ se dice casi-completo si todo subconjunto acotado y cerrado de E es completo.

PROPOSICION 2. Sean E un espacio vectorial y A un disco no vacío de E. Denotemos con $\langle A \rangle$ al subespacio de E generado por A. Entonces

1) $\langle A \rangle = \bigcup_{n \geq 1} nA$

2) Si A es absorbente, $E = \langle A \rangle$.

3. ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

DEFINICION 1. Un e.v.t $(E, \mathcal{T})$ se dice localmente convexo (e.l.c.) si y solo si el origen 0 admite una base de vecindades convexas.

En todo e.l.c $(E, \mathcal{T})$, el filtro de vecindades $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ · admite como base a :

i) Las vecindades disqueadas y cerradas

ii) Las vecindades disqueadas y abiertas.

PROPOSICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. Entonces, existe una base $\mathcal{B}$ del filtro de vecindades $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ tal que

a) Cada V en $\mathcal{B}$ es absorbente.

b) Cada V en $\mathcal{B}$ es equilibrada.

c) Cada V en $\mathcal{B}$ es convexa.

d) $\forall V \in \mathcal{B}, \exists U \in \mathcal{B} : U + U \subseteq V$.

Recíprocamente, Si E es un e.v y $\mathcal{B}$ una base de filtro en E que verifica las condiciones (a),(b),(c) y (d) anteriores, entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre E tal que $(E, \mathcal{T})$ es un e.l.c y para la cual $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

DEFINICION 2. Sea E un e.v. Una seminorma p sobre E es una aplicación $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que :

1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

para cada x, y en E y λ en $\mathbb{K}$.

Los espacios localmente convexos se caracterizan por estar determinados por familias de seminormas.

PROPOSICION 2. a) Sea p una seminorma en un e.l.c. $(E, \mathcal{T})$. Entonces, $\forall \alpha > 0$, los conjuntos $\{x \in E \,/\, p(x) < \alpha\}$ y $\{x \in E \,/\, p(x) \leqslant \alpha\}$ son discos absorbentes.

b) A cada disco absorbente A de E le corresponde una seminorma p definida por

$$p(x) = \inf \{ \lambda \,/\, \lambda > 0,\ x \in \lambda A \}$$

y con la propiedad de que

$$\{x \in E \,/\, p(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in E \,/\, p(x) \leqslant 1\} .$$

La seminorma p correspondiente al disco absorbente A se llama la gauge de A la cual indicaremos por g_A .

PROPOSICION 3. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. Entonces,

a) una seminorma p sobre E es continua si y solo si p es continua en 0.

b) Sea $U \subseteq E$ disco absorbente. Entonces g_U es continua si y solo si $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

PROPOSICION 4. Dada una familia $\mathcal{S}$ de seminormas definidas en un espacio vectorial E, existe una topología $\mathcal{T}$ sobre E la menos fina para la cual (E, τ) es un e.l.c y tal que cada seminorma $p \in \mathcal{S}$ es continua. Además, los conjuntos de la forma

$$\left\{ x \in E \,/\, \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon \right\} \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ , } p_i \in \mathcal{S} \text{ ,}$$

constituyen una base de vecindades cerradas del filtro de vecindades del origen $\mathcal{V}(0, \tau)$.

DEFINICION 3. Un espacio localmente convexo E se dice que es un espacio de Fréchet si E es completo y metrizable.

Es claro de la definición anterior que todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet.

4. ESPACIOS TONELADOS, BORNOLOGICOS e INFRATONELADOS.

DEFINICION 1. Un e.l.c (E, τ) se dice tonelado (o espacio t)si todo tonel en E es una vecindad de 0.

EJEMPLO 1. Todo espacio de Fréchet es un espacio tonelado.

DEFINICION 2. Un e.l.c (E, τ) se dice bornológico si todo disco bornívoro de E es vecindad de 0.

EJEMPLO 2. Todo espacio localmente convexo (E, τ) para el cual el filtro $\mathcal{V}(0, \tau)$ admite una base numerable es un espacio bornológico. En particular, todo e.l.c metrizable es bornológico.

DEFINICION 3. Un e.l.c (E, τ) se dice infratonelado (o espacio i) si todo tonel bornívoro de E es vecindad de 0.

EJEMPLO 3. Todo espacio bornológico es infratonelado.

EJEMPLO 4. Todo espacio tonelado es infratonelado.

5. APLICACIONES LINEALES Y EL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

Sean E y F dos e.v.t sobre $\mathbb{K}$ y $f: E \longrightarrow F$ lineal. Entonces f es continua si y solo si f es continua en 0. Por otra parte, si $A \subseteq E$ es acotado y f continua entonces f(A) es también una parte acotada de F.

Denotaremos con $\mathcal{L}(E,F)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

Una forma lineal sobre E es una aplicación lineal f de E en $\mathbb{K}$. Al espacio vectorial de todas las formas lineales sobre E lo llamaremos dual algebraico de E y lo anotaremos por E^*. Al espacio vectorial de todas las formas lineales y continuas sobre E lo llamaremos dual topológico (o simplemente dual) de E y lo anotaremos por E .

Una forma lineal f sobre E es continua si y solo si f es acotada en una vecindad del 0 en E.

Un subespacio propio maximal H de un e.v E se llama hiperplano de E. Si H es un hiperplano de E y a un vector de E tal que $a \notin H$, entonces todo vector x de E puede expresarse en forma única como $x = h + \lambda a$, donde $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sea $M \triangleq E$. Por co-dimensión de M en E entenderemos a la dimensión de cualquier subespacio complementario de M en E y lo denotaremos por $\operatorname{cod}_E M$.

TEOREMA 1. (HAHN-BANACH). Sea E un espacio vectorial y $p: E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Sean $M \trianglelefteq E$ y f una forma lineal sobre M tal que $|f(x)| \leqslant p(x)$, $\forall x \in M$. Entonces existe una extensión lineal g de f tal que $|g(x)| \leqslant p(x)$ $\forall x \in E$.

Muchas son las consecuencias del teorema de Hahn-Banach. Indicaremos a continuación algunos corolarios de interés en la teoría que sigue.

COROLARIO 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. Entonces toda forma lineal y continua sobre $M \trianglelefteq E$ admite al menos una extensión lineal y continua sobre E.

COROLARIO 2. Si B es un subconjunto disqueado de un e.l.c. E y $a \notin \bar{B}$, entonces existe una forma lineal y continua f sobre E tal que $|f(x)| \leqslant 1$ $\forall x \in B$ y $f(a) > 1$.

6. ESPACIOS DE APLICACIONES LINEALES.

Sean E y F dos e.l.c. En $\mathcal{L}(E,F)$ definimos una topología localmente convexa de la siguiente manera:

Sea $\mathfrak{S}$ una familia arbitraria de partes acotadas de E y $\mathcal{B}$ una base de vecindades disqueadas del 0 en F. Para cada $A \in \mathfrak{S}$ y cada $V \in \mathcal{B}$ llamemos

$$W_{A,V} = \{ t \in \mathcal{L}(E,F) \ / \ t(A) \subseteq V \}$$

Resulta entonces que cada conjunto $W_{A,V}$ es un disco de $\mathcal{L}(E,F)$ y además es absorbente ya que si $t \in \mathcal{L}(E,F)$, $t(A)$ es una parte acotada de F y luego $\exists \lambda > 0$ tal que $t(A) \subseteq \lambda V$ lo que implica entonces que $t \in \lambda W_{A,V}$.

Por tanto, la familia $\left\{ W_{A,V} \ / \ A \in \mathfrak{S}, V \in \mathcal{B} \right\}$ define una topología localmente convexa sobre $\mathcal{L}(E,F)$ llamada la $\mathfrak{S}$-topología o la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}$ y la cual denotaremos $\mathfrak{S}$-top.

EJEMPLO 1. Sean E y F dos e.l.c. Entonces las $\mathfrak{S}$-topologías siguientes sobre $\mathcal{L}(E,F)$ serán de gran utilidad más adelante

a) La topología de la convergencia simple (o puntual): en la que $\mathfrak{S}$ denota la familia de todos los conjuntos finitos de E.

b) La topología de la convergencia precompacta: en donde $\mathfrak{S}$ denota la familia de todos los subconjuntos precompactos de E.

c) La topología de la convergencia fuerte: en la que $\mathfrak{S}$ denota la familia de todas las partes acotadas de E.

PROPOSICION 1. Sean E y F dos e.l.c y $T \subseteq \mathcal{L}(E,F)$. Entonces los enunciados siguientes son equivalentes:

1) T es acotado en la $\mathfrak{S}$-top.

2) Para cada vecindad V de 0 en F, $\bigcap_{t \in T} t^{-1}(V)$ absorbe cada $A \in \mathfrak{S}$

3) $\forall A \in \mathcal{G}$, $\bigcup_{t \in T} t(A)$ es acotado en F.

DEFINICION 1. Sean $(E, \mathcal{T}_E)$ y $(F, \mathcal{T}_F)$ dos e.v.t. Entonces,

a) Una parte T de $\mathcal{L}(E,F)$ se dice simplemente acotada si para cada x de E, el conjunto $T(x) = \{ t(x) \ / \ t \in T \}$ es acotado en F.

b) Una parte H de $\mathcal{L}(E,F)$ se dice equicontinua si $\forall V \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_F)$ $\exists U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$ tal que $h(U) \subseteq V$, $\forall h \in H$.

7. DUALIDAD

DEFINICION 1. Dos espacios vectoriales E y F están en dualidad si existe una forma bilineal B sobre ExF :

$$B: E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \longmapsto B(x,y) \ .$$

Se dice que el triple (E,F;B) o simplemente el par (E,F), si no hay ambiguedad posible, constituye una dualidad.

La dualidad es separante en E si $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $\exists y \in F$: $B(x,y) \neq 0$. En forma análoga se define la dualidad separante en F. Una dualidad separante en E y F se llamará un sistema dual.

EJEMPLO 1. a) Sea E un e.v. no trivial y sea E^* su dual algebraico. Sea $\langle , \rangle : E \times E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma bilineal canónica, esto es, tal que

$$\langle x,f \rangle = f(x) \ , \ \forall x \in E, \ \forall f \in E^* \ .$$

Entonces $(E,E^*;<\ >)$ es un sistema dual.

b) Sean (E,τ) un e.l.c. T_2 y E' su dual topológico. Entonces $(E, E'; <\ >)$ es un sistema dual.

Sea $(E,F;B)$ una dualidad. Para cada $y \in F$, la aplicación

$$\begin{aligned} p_y : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p_y(x) = |B(x,y)| \end{aligned}$$

es una seminorma sobre E.

Por tanto, la familia $\{ p_y \ / \ y \in F \}$ de seminormas determinan una única topología localmente convexa sobre E, que indicaremos por $\sigma(E,F)$, la cual es la topología la menos fina que hace continuas cada seminorma p_y, $y \in F$. Una base del filtro de vecindades $\mathcal{V}(0, \sigma(E,F))$ la constituyen los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{p_{y_i}} = \left\{ x \in E \ / \ p_{y_i}(x) \leqslant \varepsilon_i, \ \forall i = 1,\dots,n \right\}$$

en donde $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n > 0$, $y_1,\dots y_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$.

Si para cada conjunto finito $A = \{ y_1, \dots, y_n \}$ de F consideramos la seminorma

$$p_A(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{y_i}(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x,y_i)|$$

entonces la familia $\{ p_A \ / \ A \subseteq F, \ A \text{ finito} \}$ de seminormas determinan la topología $\sigma(E,F)$ y en este caso, los conjuntos de la forma $\varepsilon V_{p_A} = \{ x \in E \ / \ p_A(x) \leqslant \varepsilon \}$

$$= \left\{ x \in E \ / \ \sup_{1 \leq i \leq n} |B(x,y_i)| \leq \varepsilon \right\}$$

con $\varepsilon > 0$, constituyen una base de $\mathcal{V}(0, \sigma(E,F))$.

La topología $\sigma(E,F)$ se denomina la topología débil sobre E. Análogamente se define la topología débil $\sigma(F,E)$ sobre F.

PROPOSICION 1. Sean $(E,F;B)$ una dualidad y $\sigma(E,F)$, $\sigma(F,E)$ las topologías débiles sobre E y F respectivamente. Entonces

1) Si la dualidad es separante en F (resp. en E), $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$) es la topología localmente convexa la menos fina sobre E (resp. sobre F) para la cual F (resp. E) es el dual topológico de $(E, \sigma(E,F))$ (resp. $(F, \sigma(F,E))$).

2) $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$) es $T_2 \Longleftrightarrow$ la dualidad es separante en E (resp. en F).

DEFINICION 2. Sea $(E,F;B)$ una dualidad separante en F y τ una topología localmente convexa sobre E. Se dice que τ es compatible con la dualidad si F es el dual topológico de E provisto de la topología τ . Es decir, si

$$E' = (E, \tau)' = F.$$

PROPOSICION 2. Sea $(E,F;B)$ una dualidad separante en F. Entonces los conjuntos convexos y cerrados de E son los mismos para todas las topologías compatibles sobre E.

DEFINICION 3. Sean $(E,F;B)$ una dualidad y A un subconjunto de F. Entonces el polar de A es el subconjunto de E definido por

$$A^\circ = \left\{ x \in E \;/\; |B(x,y)| \leqslant 1, \quad \forall y \in A \right\}$$
$$= \left\{ x \in E \;/\; \sup_{y \in A} |B(x,y)| \leqslant 1 \right\} .$$

En forma análoga se define el polar de un subconjunto de E.

PROPOSICION 3. Sea $(E,F;B)$ una dualidad. Entonces,

1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq F \Longrightarrow A_2^\circ \subseteq A_1^\circ$

2) $A \subseteq F$, $D = e(A) \Longrightarrow A^\circ = D^\circ$

3) $A \subseteq (A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$

4) $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$

5) $A \subseteq F \Longrightarrow A^\circ$ es un disco $\sigma(E,F)$ cerrado

6) $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ, \quad \forall \lambda \in K, \quad \lambda \neq 0$

7) A° es absorbente $\Longleftrightarrow$ A es $\sigma(F,E)$ acotado

8) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de F,

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$$

TEOREMA 1 (DE LOS BIPOLARES). Sea $(E,F;B)$ una dualidad separante en F y A una parte de E no vacía. Entonces,

$$\overline{\Gamma(A)}^{\sigma(E,F)} = A^{\circ\circ} ,$$

es decir, $A^{\circ\circ}$ es el menor disco $\sigma(E,F)$ cerrado de E que contiene a A.

COROLARIO 1. Sean $(E,F;B)$ una dualidad separante en F y

$\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de discos $\sigma(E,F)$ cerrados. Entonces,

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ = \overline{\Gamma\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)}^{\sigma(F,E)}$$

Sea $(E,F;B)$ una dualidad y sea $\mathcal{A}(\sigma(F,E))$ la familia de todas las partes $\sigma(F,E)$ acotadas de F. Sea $\mathfrak{S}$ una subfamilia no vacía de $\mathcal{A}(\sigma(F,E))$. Por la proposición 3, los conjuntos polares de los elementos de $\mathfrak{S}$ son todos discos absorbentes y en consecuencia, por la proposición 3.1, existe una única topología localmente convexa τ sobre E tal que las intersecciones finitas de los conjuntos de la forma

$$\lambda A^\circ, \quad \lambda > 0 , \quad A \in \mathfrak{S}$$

constituyen una base para $\mathcal{V}(0, \tau)$. Esta topología también la llamaremos $\mathfrak{S}$-topología o la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}$.

PROPOSICION 4. Sea $(E,F;B)$ una dualidad separante en F y sea $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{A}(\sigma(F,E))$ no vacía. Entonces existe una familia $\mathfrak{S}' \subseteq \mathcal{A}(\sigma(F,E))$ tal que $\mathfrak{S}$-top = $\mathfrak{S}'$-top y además :

1) Sus elementos son equilibrados
2) Sus elementos son convexos
3) Sus elementos son $\sigma(F,E)$ cerrados
4) $A \in \mathfrak{S}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda A \in \mathfrak{S}'$
5) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S}'$ entonces,

$$\overline{\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}^{\sigma(F,E)} = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^{\circ\circ} \in \mathfrak{S}'$$

PROPOSICION 5. Sean $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t. y E' su dual. Sea

$\mathcal{E}q(\mathcal{T}) = \{ H \subseteq E' / H$ es equicontinua $\}$. Entonces,

1) $\forall H \subseteq E',\ H \in \mathcal{E}q(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}) : H \subseteq V^\circ$

2) $\mathcal{E}q(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A}(\sigma(E';E))$. Los polares se consideran con respecto a la dualidad canónica $(E,E'; < >)$.

Toda topología localmente convexa puede obtenerse como una $\mathfrak{S}$-top para una colección apropiada de $\mathfrak{S}$. En ese sentido tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICION 6. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c y sea E'su dual topológico. Entonces,

$$\mathcal{T} = \mathcal{E}q(\mathcal{T})\text{-top}$$

es decir, $\mathcal{T}$ es la $\mathfrak{S}$-top donde $\mathfrak{S}$ es la colección de todas las partes equicontinuas de E'.

TEOREMA 2 (ALAOGLU-BOURBAKI). Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.v.t. y sea E' su dual. Entonces cualquier parte equicontinua de E'es $\sigma(E';E)$ relativamente compacta.

DEFINICION 4. Sea $(E,F;B)$ una dualidad y sea $\mathfrak{S}_M$ la familia de partes de F definida por

$$\mathfrak{S}_M = \{ A \subseteq F \ / \ A \text{ es disco } \sigma(F,E) \text{compacto} \}$$

Es claro que $\mathfrak{S}_M \subseteq \mathcal{A}(\sigma(F,E))$ pues toda parte $\sigma(F,E)$ compacta es $\sigma(F,E)$ acotada.

La $\mathfrak{S}_M$-top sobre E se llamará topología de Mackey y la denotaremos por $\mathcal{T}(E,F)$.

DEFINICION 5. Sea (E, τ) un e.l.c. T_2 y sea E´su dual. Se dice que E es un espacio de Mackey (o espacio M) si se verifica que $\tau = \mathcal{T}(E,E')$.

EJEMPLO 2. Todo espacio (E, τ) infratonelado y Hausdorff es un espacio de Mackey.

TEOREMA 3 (MACKEY-ARENS). Sean (E,F;B)un sistema dual y τ una topología localmente convexa sobre E. Entonces,

$$(E, \tau)' = F \Leftrightarrow \exists \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_M : \tau = \mathfrak{S}\text{-top y } F = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A .$$

COROLARIO 2. Sea (E,F;B) un sistema dual y τ una topología localmente convexa sobre E. Entonces,

$$(E, \tau)' = F \Longleftrightarrow \sigma(E,F) \leqslant \tau \leqslant \mathcal{T}(E,F) .$$

TEOREMA 4.(BANACH-MACKEY). Sean (E, τ) un e.l.c.T_2 y T un tonel en E. Sea A una parte disqueada,acotada y completa de E. Entonces T absorbe A, es decir,

$$\exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha T.$$

TEOREMA 5. Sea (E,F;B) un sistema dual. Entonces los conjuntos acotados de E para cualquier topología localmente convexa compatible con la dualidad son los mismos.

DEFINICION 6. Sea (E,F;B) una dualidad. Se llama topología fuerte sobre E, la cual anotaremos $\beta(E,F)$, a la $\mathfrak{S}$-top sobre E en donde $\mathfrak{S} = \mathcal{A}(\sigma(F,E))$.

En forma análoga se define la topología fuerte $\beta(F,E)$ sobre F.

EJEMPLO 3. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado y E´su dual provisto de la norma

$$\| f \|_{\infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|, \ \forall f \in E' .$$

Entonces, $(E', \| \ \|_{\infty})$ es un espacio de Banach en donde la topología inducida por la norma $\| \ \|_{\infty}$ coincide con la topología fuerte $\beta(E', E)$. Es decir, tal que

$$\tau_{\| \|_{\infty}} = \beta(E',E).$$

PROPOSICION 7. Sean (E, τ) un e.l.c y E´su dual. Sea M un subconjunto de E´. Entonces,

1) M es $\sigma(E',E)$ acotado $\Longleftrightarrow \exists T \subseteq E$ tonel : $M \subseteq T^{\circ}$

2) M es $\beta(E',E)$ acotado $\Longleftrightarrow \exists T \subseteq E$ tonel bornívoro : $M \subseteq T^{\circ}$

PROPOSICION 8. Sea (E, τ) un e.l.c. T_2 casi-completo y sea E´su dual. Entonces

$$\mathcal{A}(\sigma(E',E)) = \mathcal{A}(\beta (E',E)).$$

PROPOSICION 9. Sean (E, τ) un e.l.c. y E´su dual. Entonces,

1) E tonelado $\Longleftrightarrow [\forall M \subseteq E'$: M es $\sigma(E',E)$ acotado $\Longrightarrow$ M equicontinuo.]

2) E infratonelado. $\Longleftrightarrow [\forall M \subseteq E'$: M es $\beta(E',E)$ acotado $\Longrightarrow$ M equicontinuo.]

PROPOSICION 10. Sean (E, τ) un e.l.c metrizable, E´su dual y $\mathcal{B} = \{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ una base de $\mathcal{V}(0, \tau)$. Entonces , la sucesión $\{ U^\circ_n : n \in \mathbb{N} \}$ constituye una familia fundamental de conjuntos $\beta(E', E)$ acotados.

PRUEBA : Para cada $n \geqslant 1$, el conjunto U°_n es una parte equicontinua de E'y por tanto es $\beta(E',E)$ acotado. Sea H un subconjunto $\beta(E',E)$ acotado de E'. Por la proposición 7, $\exists T \subseteq E$ tonel bornívoro tal que $H \subseteq T^\circ$.

Siendo E por hipótesis un espacio i (ya que es metrizable), $T \in \mathcal{V}(0, \tau)$ y luego $\exists U_n \in \mathcal{B} : U_n \subseteq T$. Por tanto, $T^\circ \subseteq U^\circ_n$ y luego $H \subseteq T^\circ \subseteq U^\circ_n$. Concluímos entonces que la familia $\{ U^\circ_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una familia fundamental numerable de conjuntos $\beta(E', E)$ acotados.

DEFINICION 7. Se dice que un e.l.c Hausdorff (E, τ) es un espacio de tipo (DF), si E admite un sistema fundamental numerable de conjuntos acotados y si toda parte de su dual topológico E'que sea fuertemente acotada y tal que sea la reunión de una sucesión de partes equicontinuas es también equicontinua.

8. APLICACION TRANSPUESTA.

DEFINICION 1. Sean E y F dos espacios vectoriales y sean E^*, F^* sus respectivos duales algebraicos. Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces, la aplicación lineal $t_f : F^* \longrightarrow E^*$

definida por

$$<x, t_f(y')> = <f(x), y'> , \forall x \in E, \forall y' \in F^*$$

se llama transpuesta de f.

PROPOSICION 1. Sean (E_1, F_1) y (E_2, F_2) sistemas duales y sea $f : E_1 \longrightarrow E_2$ lineal y $\sigma(E_1, F_1) - \sigma(E_2, F_2)$ continua. Sea $t_f : E_2^* \longrightarrow E_1^*$ la transpuesta de f. Entonces,

1) $\forall A \subseteq E_1$, $(f(A))^\circ = t_f^{-1}(A^\circ)$.

2) $\forall H \subseteq E_2^*$, $(t_f(H))^\circ = f^{-1}(H^\circ)$.

PROPOSICION 2. Sean (E, τ_E) y (F, τ_F) dos e.l.c. T_2 con duales E' y F' respectivamente. Sea $f: E \longrightarrow F$ lineal. Entonces

1) f es $\tau_E - \tau_F$ continua $\Longrightarrow$ f es $\sigma(E,E') - \sigma(F,F')$ continua.

2) f es $\tau_E - \tau_F$ continua $\Longrightarrow t_f$ es $\sigma(F',F) - \sigma(E',E)$ continua y también $\beta(F', F) - \beta(E', E)$ continua.

CAPITULO 2

ESPACIOS d-TONELADOS, d-INFRATONELADOS Y d-MACKEY

En este capítulo introduciremos tres nuevas clases de espacios vectoriales topológicos, los cuales serán extensiones de espacios conocidos.

En lo que sigue, todo espacio vectorial topológico E se supondrá localmente convexo y Hausdorff.

1. ESPACIOS d-TONELADOS.

DEFINICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. y sea E' su dual. Se dice que E es un espacio d-tonelado (o contablemente tonelado), si toda parte B de E' y $\sigma(E', E)$ acotada que sea reunión de una sucesión de partes equicontinuas de E' es también equicontinua.

Anotaremos un espacio d-tonelado por dt.

DEFINICION 2. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. LLamaremos d-tonel en E a todo tonel $T \subseteq E$ tal que

$$T = \bigcap_{n \geq 1} U_n \text{ , donde } \forall n \geq 1, \ U_n \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$$

disqueada y cerrada.

El teorema que sigue caracteriza los espacios dt.

TEOREMA 1. Sean $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. y E' su dual. Entonces,

$$(E,\tau) \text{ dt} \Longleftrightarrow [\forall T \subseteq E \text{ d-tonel} \Longrightarrow T \in \mathcal{V}(0,\tau)] \quad .$$

PRUEBA: $\Longrightarrow$ Sea $T = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ un d-tonel en E. Por el corolario 1.6.1 tenemos que $\bigcup_{n\geq 1} U_n^\circ \subseteq (\bigcup_{n\geq 1} U_n^\circ)^{\circ\circ} \subseteq T^\circ$.
Dado que T° es una parte $\sigma(E', E)$ acotada de E', $\bigcup_{n\geq 1} U_n^\circ$ es también $\sigma(E', E)$ acotada. Ahora, $\forall\, n\geq 1$ U_n° es una parte equicontinua de E' y por tanto $\bigcup_{n\geq 1} U_n^\circ$ es equicontinua.

Tomando polares nuevamente obtenemos :

$$(\bigcup_{n\geq 1} U_n^\circ)^\circ = \bigcap_{n\geq 1} U_n^{\circ\circ} = \bigcap_{n\geq 1} U_n = T \quad ,$$

de donde concluimos que $T \in \mathcal{V}(0, \tau)$.

$\Longleftarrow$ Sea $\{H_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes equicontinuas de E' y tal que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es $\sigma(E', E)$ acotada. Hagamos

$$T = (\bigcup_{n\geq 1} H_n)^\circ = \bigcap_{n\geq 1} H_n^\circ \; .$$

Ahora, $\forall\, n\geq 1$, $H_n^\circ \in \mathcal{V}(0,\tau)$ disqueada y cerrada, por tanto T es un d-tonel en E y luego $T \in \mathcal{V}(0, \tau)$. Siendo $T^\circ = (\bigcup_{n\geq 1} H_n)^{\circ\circ}$ una parte equicontinua de E' tenemos que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es también equicontinua, lo que prueba que el espacio (E, τ) es d-tonelado.

COROLARIO 1. Todo espacio tonelado Hausdorff es un espacio d-tonelado.

PRUEBA: Consecuencia inmediata de la definición de espacio tonelado.

2. ESPACIOS d-INFRATONELADOS.

DEFINICION 1. Sean (E,τ) un e.l.c y E' su dual. Se dice que E es un espacio d-infratonelado (o contablemente infratonelado), si toda parte B de E' y $\beta(E',E)$ acotada que sea reunión de una sucesión de partes equicontinuas de E' es también equicontinua.

Anotaremos un espacio d-infratonelado por di .

DEFINICION 2. Sea (E,τ) un e.l.c. Llamaremos d-tonel bornívoro en E a todo tonel bornívoro $T \subseteq E$ tal que

$$T = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n \text{ , donde } \forall\, n \geqslant 1,\ U_n \in \mathcal{V}(0,\tau)$$

disqueada y cerrada.

El teorema que sigue caracteriza los espacios di .

TEOREMA 1. Sean (E,τ) un e.l.c. y E' su dual. Entonces,

$$(E,\tau) \text{ di} \Longleftrightarrow [\forall T \subseteq E \text{ d-tonel bornívoro} \Longrightarrow T \in \mathcal{V}(0,\tau)]$$

PRUEBA: $\Longrightarrow$ Supongamos que (E,τ) es di. Sea $T = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ un d-tonel bornívoro en E. Por el corolario 1.6.1 tenemos :

$$\bigcup_{n\geqslant 1} U_n^\circ \subseteq \Big(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n^\circ\Big)^{\circ\circ} \subseteq T^\circ .$$

Siendo T° una parte $\beta(E',E)$ acotada , $\bigcup_{n\geqslant 1} U_n^\circ$ es también $\beta(E',E)$ acotada. Ahora, $\forall\, n \geqslant 1$, U_n° es equicontinua y dado que por hipótesis E es un espacio di, tenemos que el conjunto $\bigcup_{n\geqslant 1} U_n^\circ$ es equicontinuo.

Tomando polares obtenemos:

$$\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n^\circ\Big)^\circ = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n^{\circ\circ} = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n = T \in \mathcal{V}(0,\tau).$$

$\Longleftarrow$ Sea $\{H_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de partes equicontinuas de

E' tal que $\bigcup_{n \geq 1} H_n$ es $\beta(E', E)$ acotada. Hagamos

$$T = \left(\bigcup_{n\geq 1} H_n\right)^{\circ} = \bigcap_{n\geq 1} H_n^{\circ} \quad .$$

Observando que $\forall n \geq 1$, $H_n^{\circ} \in \mathcal{V}(0, \tau)$ disqueada y cerrada, resulta entonces que T es un d-tonel bornívoro de E y luego $T \in \mathcal{V}(0, \tau)$. Siendo $T^{\circ} = \left(\bigcup_{n \geq 1} H_n\right)^{\circ\circ}$ una parte equicontinua de E', tenemos que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es equicontinua. Esto prueba que (E, τ) es un espacio di.

COROLARIO 1. Todo espacio infratonelado Hausdorff es un espacio d-infratonelado.

PRUEBA: Consecuencia inmediata de la definición de espacio infratonelado.

COROLARIO 2. Todo espacio bornológico Hausdorff es un espacio d-infratonelado.

PROPOSICION 1. Sea (E, τ) un espacio de tipo (DF). Entonces (E, τ) es un espacio di.

PRUEBA: Resulta inmediato de la definición de espacio (DF).

PROPOSICION 2. Sea (E, τ) dt. Entonces (E, τ) di .

PRUEBA: Basta observar que todo d-tonel en E (y en particular todo d-tonel bornívoro) es vecindad del 0.

PROPOSICION 3. Sea (E, τ) un e.l.c casi-completo. Entonces,

$$(E, \tau) \text{ dt} \Longleftrightarrow (E, \tau) \text{ di} \; .$$

PRUEBA: $\Longrightarrow$ Ver proposición 2.

$\Longleftarrow$ Sea $T = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ un d-tonel en E. Ahora, T° es un disco

$\sigma(E'', E)$ acotado de E´y por tanto es $\beta(E', E)$ acotado ya que por hipótesis (E,τ) es casi-completo.

Dado que $T^{\circ\circ} = T$, tenemos que T es un d-tonel bornívoro de E y por tanto es una vecindad de 0 en E. Esto prueba que (E,τ) es un espacio dt.

COROLARIO 3. Sea (E, τ) un e.l.c completo. Entonces,

$$(E, \tau) \text{ dt} \Longleftrightarrow (E, \tau) \text{ di} .$$

3. ESPACIOS d-MACKEY.

DEFINICION 1. Sea (E, τ) un e.l.c y sea E´su dual. Se dice que E es un espacio d-Mackey si toda parte B de E´que sea reunión de una sucesión de partes equicontinuas de E´y tal que su cápsula disqueada $\Gamma(B)$ sea $\sigma(E',E)$ relativamente compacta se tiene que B es también equicontinua.

PROPOSICION 1. Sea (E,τ) un espacio M. Entonces (E,τ) es d-Mackey.

PRUEBA: Sean $B \subseteq E'$ y $\{H_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes equicontinuas de E´ tales que $B = \bigcup_{n\geq 1} H_n$ y $\Gamma(B)$ es $\sigma(E',E)$ - relativamente compacta. Probaremos que B es equicontinua.

En efecto, $\overline{\Gamma(B)}^{\sigma(E',E)}$ es un disco compacto de E´y por tanto su polar $\left(\overline{\Gamma(B)}^{\sigma(E',E)}\right)^{\circ} \in \mathcal{V}(0,\tau)$ (puesto que E es por hipótesis un espacio M). Siendo $B \subseteq \overline{\Gamma(B)}^{\sigma(E',E)}$, tenemos que $B^{\circ} \in \mathcal{V}(0,\tau)$ y luego B es una parte equicontinua de E'. Esto prueba que $(E,\mathcal{T})$ es un espacio d-Mackey.

COROLARIO 1. Todo espacio infratonelado Hausdorff es un espacio d-Mackey.

PRUEBA: Resulta inmediato ya que todo espacio infratonelado Hausdorff es un espacio M.

NOTACION. En lo que sigue, todo espacio $(E,\mathcal{T})$ d-Mackey será denotado por dM.

PROPOSICION 2. Sean $(E,\mathcal{T})$ di y E' su dual. Entonces $(E,\mathcal{T})$ es un espacio dM.

PRUEBA: Sean $B \subseteq E'$ y $\{H_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes equicontinuas de E' tales que $B = \bigcup_{n\geq 1} H_n$ y $\Gamma(B)$ es $\sigma(E',E)$-relativamente compacta. Probaremos que B es equicontinua.

En efecto, $\Gamma(B)$ es $\beta(E',E)$ acotada (ver [4], Capítulo 3, § 6, Proposición 7). Luego, B es $\beta(E',E)$ acotada y dado que E es por hipótesis un espacio di, se tiene que B es equicontinua. Esto prueba que $(E,\mathcal{T})$ es un espacio dM.

Los resultados demostrados en este capítulo nos permiten construir el cuadro siguiente :

CUADRO 1

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & dt \arrow[d, Rightarrow] \\
i \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & di \arrow[d, Rightarrow] \\
M \arrow[r, Rightarrow] & dM
\end{tikzcd}$$

Mostraremos en un capítulo posterior, que las implicaciones recíprocas no se verifican en general.

CAPITULO 3

PROPIEDADES HEREDITARIAS

1. SUBESPACIOS DENSOS.

LEMA 1. Sean $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. y $L \trianglelefteq E$ denso. Si E' y L' son los duales de E y L respectivamente, entonces la aplicación

$$\psi : E' \longrightarrow L'$$
$$f \longmapsto \psi(f) = f/L \text{ (restricción de } f \text{ a } L \text{)},$$

satisface las propiedades siguientes:

1) ψ es lineal y biyectiva.

2) $\forall\, H \subseteq E'$, H equicontinua $\Longleftrightarrow$ $\psi(H)$ equicontinua.

3) ψ es $\sigma(E',E)-\sigma(L',L)$ continua y también $\beta(E', E)-\beta(L', L)$ continua.

PRUEBA: 1) ψ así definida es claramente lineal. Probemos que es biyectiva. Sean $f,g \in E'$ tales que $\psi(f) = \psi(g)$. Luego de $f/L = g/L$ se concluye que $f = g$ por ser L denso en E. Por tanto ψ es inyectiva.

Sea $h \in L'$. Designemos con $\bar{h}$ a la única extensión lineal y continua de h a E ([4] , Capítulo 2, §9, Proposición 5). Se tiene entonces que $\psi(\bar{h}) = h$ y luego ψ es suryectiva.

2) Resulta inmediato observando que $H \subseteq E'$ equicontinua $\Longleftrightarrow$ $\exists\, q: E \longrightarrow \mathbb{R}$ seminorma continua tal que $|f(x)| \leqslant q(x), \forall x \in E$

y $\forall f \in H$ ([4] ,Capítulo 3, § 4 página 200).

3) Mostremos que ψ es $\sigma(E',E)-\sigma(L',L)$ continua. Sea W una $\sigma(L',L)$ vecindad de 0 definida por

$$W = \left\{ g' \in L' : \sup |\langle g', y_i\rangle| \leq \varepsilon \right\}$$, en donde $y_i \in L$

$1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Ahora, si V designa la $\sigma(E',E)$ vecindad de 0 dada por $V = \left\{ h \in E' : \sup |\langle h, y_i\rangle| \leq \varepsilon \right\}$, tenemos que, para $f \in V$,

$$|\langle f, y_i\rangle| \leq \varepsilon \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad |\langle f/L , y_i\rangle| \leq \varepsilon \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad |\langle \psi(f), y_i\rangle| \leq \varepsilon \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\Longrightarrow \quad \psi(f) \in W .$$

Es decir, $\psi(V) \subseteq W$. Esto prueba que ψ es $\sigma(E', E)-\sigma(L',L)$ continua.

PROPOSICION 1. Sean (E, τ) un e.l.c. y $L \triangleq E$ denso. Entonces,

$$(L, \tau_L) \left\{ \begin{array}{c} dt \\ di \\ dM \end{array} \right\} \Longrightarrow (E, \tau) \left\{ \begin{array}{c} dt \\ di \\ dM \end{array} \right\}$$

PRUEBA: Mostremos que

1) (L, τ_L) dt $\Longrightarrow$ (E, τ) dt

2) (L, τ_L) di $\Longrightarrow$ (E, τ) di

3) (L, τ_L) dM $\Longrightarrow$ (E, τ) dM .

En efecto. 1) Sea $H = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ una parte $\sigma(E', E)$ acotada de E' reunión de una sucesión $\{H_n\}_{n \geq 1}$ de partes equicontinuas de E'. Por el lema 1 anterior, la aplicación $\psi : E' \longrightarrow L'$ es $\sigma(E',E)$- $\sigma(L',L)$ continua, luego $\psi(H) = \bigcup_{n \geq 1} \psi(H_n)$ es una parte $\sigma(L',L)$ acotada de L' y además se tiene que $\psi(H_n) \subseteq L'$ equicontinua para todo $n \geq 1$.

Siendo por hipótesis (L, τ_L) un espacio dt, concluimos que $\psi(H)$ es equicontinua y luego H también lo es. Esto prueba que (E, τ) es un espacio dt.

2) Se procede igual que en 1) observando que ψ es $\beta(E',E)$- $\beta(L',L)$ continua.

3) Sea $H = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ una parte de E' reunión de una sucesión $\{H_n\}_{n \geq 1}$ de partes equicontinuas de E' y tal que $\Gamma(H)$ es $\sigma(E',E)$ relativamente compacta. Ahora, $\psi(H) = \bigcup_{n \geq 1} \psi(H_n)$, donde, $\forall n \geq 1$, $\psi(H_n) \subseteq L'$ equicontinua.

Dado que $\Gamma(\psi(H)) = \psi(\Gamma(H))$ es $\sigma(L',L)$ relativamente compacta (por ser ψ lineal y continua), y , siendo por hipótesis (L, τ_L) un espacio dM, tenemos que $\psi(H)$ es equicontinua y por tanto H también lo es. Esto prueba que (E, τ) es un espacio dM.

COROLARIO 1. Sean (E, τ) un e.l.c. , $L \trianglelefteq E$ denso y $F \trianglelefteq E$ tal que $L \subseteq F$. Entonces,

$$(L,\mathcal{T}_L)\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (F,\mathcal{T}_F)\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix}$$

PRUEBA: Se deduce inmediatamente de la proposición 1 por ser L denso en F .

COROLARIO 2. Sea $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c y sea $(\hat{E},\hat{\mathcal{T}})$ el completamiento de E. Entonces,

$$(E,\mathcal{T})\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (\hat{E},\hat{\mathcal{T}})\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix}$$

PROPOSICION 2. Sean $(E,\mathcal{T})$ un e.l.c y $(\hat{E},\hat{\mathcal{T}})$ su completamiento. Entonces,

$$(E,\mathcal{T}) \text{ di} \Longrightarrow (\hat{E},\hat{\mathcal{T}}) \text{ dt} .$$

PRUEBA: Sea $T = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ un d-tonel en $\hat{E}$. Es claro que el conjunto $T\cap E$ es un tonel en E. Sea M una parte acotada de E. Entonces, $\Gamma(M)$ es también acotada en E y luego $\overline{\Gamma(M)}^{(\hat{E},\hat{\mathcal{T}})}$ es un disco cerrado, acotado y completo de $\hat{E}$.

Siendo T un tonel en $\hat{E}$, T absorbe a $\overline{\Gamma(M)}^{(\hat{E},\hat{\mathcal{T}})}$, y por tanto $T\cap E$ absorbe a M. Como M se escogió arbitrariamente, concluimos que el conjunto $T\cap E$ es un tonel bornívoro de E. Ahora,

$$T\cap E = (\bigcap_{n\geq 1} U_n)\cap E = \bigcap_{n\geq 1} (U_n\cap E)$$

y siendo para cada $n \geq 1$, $U_n \cap E$ una vecindad disqueada y cerrada de E, tenemos que $T \cap E$ es un d-tonel bornívoro de E y luego es una vecindad de 0 en E. De ahí que $\overline{T \cap E}^{(\hat{E},\hat{\tau})} \in \mathcal{V}(0,\hat{\tau})$.

Ahora, $\overline{T \cap E}^{(\hat{E},\hat{\tau})} \subseteq T$ por ser T cerrado. Resulta entonces que $T \in \mathcal{V}(0, \hat{\tau})$ y luego el espacio $(\hat{E}, \hat{\tau})$ es d-tonelado.

2. IMAGEN POR UNA APLICACION CONTINUA.

DEFINICION 1. Sean (E,τ_1) y (F,τ_2) dos e.l.c. y sea la aplicación $f: E \longrightarrow F$ lineal. Se dice que f es casi-abierta si $\forall\, V \in \mathcal{V}(0,\tau_1)$, $\overline{f(V)}$ es una vecindad de 0 en el subespacio $f(E)$ de F.

LEMA 1. Sean (E,τ_1), (F,τ_2) dos e.l.c con duales E' y F' respectivamente. Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua y sea $t_f: F' \longrightarrow E'$ la transpuesta de f. Sea $H \subseteq F'$. Entonces,

1) H equicontinua $\Longrightarrow$ $t_f(H)$ equicontinua

2) Si f es casi-abierta y suryectiva ,

$$H \text{ equicontinua} \Longleftrightarrow t_f(H) \text{ equicontinua.}$$

PRUEBA:

1) Probaremos que $(t_f(H))^\circ \in \mathcal{V}(0,\tau_1)$. En efecto, siendo $(t_f(H))^\circ = f^{-1}(H^\circ)$, y dado que $H^\circ \in \mathcal{V}(0,\tau_2)$, tenemos entonces que $(t_f(H))^\circ \in \mathcal{V}(0,\tau_1)$ por ser f continua.

2) Por (1) será suficiente con mostrar que :

$$t_f(H) \text{ equicontinua} \Longrightarrow H \text{ equicontinua.}$$

Sea entonces $t_f(H)$ una parte equicontinua de E'. Luego, $(t_f(H))^\circ \in \mathcal{V}(0,\tau_1)$ y dado que $(t_f(H))^\circ = f^{-1}(H^\circ)$, tenemos entonces $f^{-1}(H^\circ) \in \mathcal{V}(0,\tau_1)$. Siendo por hipótesis f una aplicación casi-abierta y suryectiva,

$$H^\circ = \overline{f(f^{-1}(H^\circ))} \in \mathcal{V}(0,\tau_2)$$

de donde concluimos que H es equicontinua.

PROPOSICION 1. Sean (E,τ_1), (F,τ_2) dos e.l.c., E' y F' sus duales respectivos y $f: E \longrightarrow F$ lineal, continua, casi-abierta y suryectiva. Entonces,

$$(E,\tau_1)\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (F,\tau_2)\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix}$$

PRUEBA:

1) $(E,\tau_1)dt \Longrightarrow (F,\tau_2)dt$.

Sea $H = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ una parte $\sigma(F',F)$ acotada de F' donde, para cada $n \geq 1$, $H_n \subseteq F'$ equicontinua. Entonces, si t_f es la transpuesta de f, t_f es $\sigma(F',F)$- $\sigma(E',E)$ continua (por ser f continua).

Ahora, $t_f(H) = \bigcup_{n \geq 1} t_f(H_n)$ es $\sigma(E', E)$ acotada y siendo por hipótesis (E,τ_1) un espacio dt, tenemos que $t_f(H)$ es equicontinua. Por el lema 1 concluimos que H es equicontinua y por tanto (F,τ_2) es un espacio dt.

2) $(E,\tau_1)di \Longrightarrow (F,\tau_2)di$.

En efecto, basta observar que t_f es $\beta(F',F)$- $\beta(E',E)$ continua y luego procedemos en forma similar a la parte (1).

3) $(E,\tau_1)dM \Longrightarrow (F,\tau_2)dM$.

Sea $H = \bigcup\limits_{n\geq 1} H_n$ una parte de F' reunión de una sucesión $\{H_n\}_{n\geq 1}$ de partes equicontinuas de F'y tal que $\Gamma(H)$ es $\sigma(F',F)$ relativamente compacta. Siendo t_f lineal y $\sigma(F',F)$- $\sigma(E',E)$ continua, tenemos que $t_f(\Gamma(H)) = \Gamma(t_f(H))$ es $\sigma(E',E)$ relativamente compacta.

Ahora, $t_f(H) = \bigcup\limits_{n\geq 1} t_f(H_n)$ y como por hipótesis, (E,τ_1) es un espacio dM, tenemos que $t_f(H)$ es equicontinua. Por el lema 1 concluimos que H es equicontinua. Esto prueba que (F,τ_2) es un espacio dM.

COROLARIO 1. Sea (E,τ) un e.l.c. y $L \trianglelefteq E$ cerrado. Sea E/L el espacio cociente de E por L. Entonces, si τ' designa la topología cociente sobre E/L ,

$$(E,\tau)\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (E/L,\tau')\begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} .$$

PRUEBA: Es consecuencia inmediata de la proposición 1 observando que la aplicación canónica

$$f:\ (E,\tau) \longrightarrow (E/L\ ,\tau')$$
$$x \longmapsto \bar{x}$$

es lineal, continua, abierta y suryectiva. (Ver [13], Capítulo VII, Página 106).

3. TOPOLOGIA FINAL

PROPOSICION 1. Sean $\{(E_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de e.l.c y F un espacio vectorial. Para cada $i \in I$, sea $f_i: E_i \longrightarrow F$ una aplicación lineal tal que $\bigcup_{i \in I} f_i(E_i)$ genera F. Sea τ la topología localmente convexa más fina sobre F tal que $\forall\, i \in I$, f_i es $\tau_i - \tau$ continua. Entonces

$$\forall\, i \in I, \quad (E_i, \tau_i) \begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (F, \tau) \begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} .$$

PRUEBA: Mostremos por ejemplo que si

$$\forall\, i \in I, \ (E_i, \tau_i) \text{ dt} \Longrightarrow (F, \tau) \text{ dt}.$$

En efecto, si observamos que:

a) $\forall\, i \in I$, f_i continua $\Longrightarrow$ t_{f_i} es $\sigma(F', F) - \sigma(E_i', E_i)$ continua y también $\beta(F', F) - \beta(E_i', E_i)$ continua

b) Una parte H de F' es equicontinua $\Longleftrightarrow$ $\forall\, i \in I$, $H \circ f_i = \{ h \circ f_i \ / \ h \in H \}$ es equicontinua ([4] , Capítulo 3, § 4, Proposición 5), entonces,

Si $\mathbb{H} = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ es una parte $\sigma(F', F)$ acotada de F', donde $\forall\, n \geq 1$, H_n es equicontinua, tenemos que para cada $i \in I$, $t_{f_i}(\mathbb{H}) = \bigcup_{n \geq 1} t_{f_i}(H_n)$ es una parte $\sigma(E_i', E_i)$ acotada de E_i'

y además $t_{f_i}(H_n)$ equicontinua para cada $n \geqslant 1$. Siendo por hipótesis $(E_i, \mathcal{T}_i)$ un espacio dt, tenemos que $t_{f_i}(H)$ es equicontinua, $\forall i \in I$.

Dado que $\forall i \in I$,

$$
\begin{aligned}
t_{f_i}(\mathcal{H}) &= \{ t_{f_i}(h) \,/\, h \in \mathcal{H} \} \\
&= \{ h o f_i \,/\, h \in \mathcal{H} \} \\
&= \mathcal{H} o f_i
\end{aligned}
$$

vemos que $\mathcal{H} o f_i$ es equicontinua y luego $\mathcal{H}$ también. Esto prueba que $(F, \mathcal{T})$ es un espacio dt.

COROLARIO 1. Sea $\{(E_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia de e.l.c y sea $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$ la suma directa de los $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Entonces,

$$
\forall i \in I, \quad (E_i, \mathcal{T}_i) \begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} \Longrightarrow (F, \mathcal{T}) \begin{Bmatrix} dt \\ di \\ dM \end{Bmatrix} .
$$

PRUEBA: Es consecuencia inmediata de la proposición 1 observando que la topología suma directa $\mathcal{T} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{T}_i$ es un caso particular de topología final (Ver [13], Capítulo VII, Página 112).

4. PRODUCTOS.

PROPOSICION 1. Sea $\{(E_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia de e.l.c. y sea $E = \prod_{i \in I} E_i$ munido de la topología producto $\mathcal{T}$. Entonces,

$$(E,\mathcal{T})\begin{Bmatrix}dt\\ di\\ dM\end{Bmatrix}\Longleftrightarrow(E_i,\mathcal{T}_i)\begin{Bmatrix}dt\\ di\\ dM\end{Bmatrix},\ \forall i\in I.$$

PRUEBA: Mostremos por ejemplo que

$$(E,\mathcal{T})\ di \Longleftrightarrow (E_i,\mathcal{T}_i)\ di\quad \forall i\in I.$$

$\Longrightarrow$ / Sea $(E,\mathcal{T})$ di. Dado que $\forall i\in I$, la i-ésima proyección canónica $p_i: E \longrightarrow E_i$ es una aplicación lineal, continua, abierta y suryectiva ([13] ,Capítulo VII,Página 96),se sigue de la proposición 2.1 que $\forall i\in I$, $(E_i,\mathcal{T}_i)$ di.

$\Longleftarrow$ / Sea $H = \bigcup\limits_{n\geq 1} H_n$ una parte $\beta(E',E)$ acotada de E' reunión de una sucesión $\{H_n\}_{n\geq 1}$ de partes equicontinuas de E'. Siendo H acotada, $\exists\ \Delta\subseteq I$ finito tal que

$$H = \bigoplus_{i\in\Delta} p_i'(H) = \bigoplus_{i\in\Delta} p_i'(\bigcup_{n\geq 1} H_n)$$ (en donde p_i' = proyección de $E' = \bigoplus\limits_{i\in I} E_i'$ sobre E_i' , $\forall i\in I$).

Como p_i' es $\beta(E',E)$- $\beta(E_i',E_i)$ continua, resulta que para cada $i\in\Delta$, $p_i'(\bigcup\limits_{n\geq 1} H_n) = \bigcup\limits_{n\geq 1} p_i'(H_n)$ es una parte $\beta(E_i',E_i)$ acotada de E_i' y además $p_i'(H_n)$ equicontinua para cada $n\geq 1$. Siendo $(E_i,\mathcal{T}_i)$ di, $\forall i\in I$, se tiene que $p_i'(H)$ es equicontinua $\forall i\in\Delta$ y por tanto H es equicontinua. Esto prueba que $(E,\mathcal{T})$ es un espacio di.

CAPITULO 4

TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS EN ESPACIOS d-TONELADOS

En este capítulo presentamos una versión del famoso teorema de Banach-Steinhaus para los espacios dt. Además se demuestra aquí que para un espacio d-tonelado E, su dual topológico E´ provisto de la topología débil $\sigma(E', E)$ es semi-completo.

1. TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS EN ESPACIOS d-TONELADOS.

En la demostración del teorema de Banach-Steinhaus haremos uso de las proposiciones siguientes:

PROPOSICION 1. Sean (E, τ) un e.l.c. y E´su dual. Entonces,

$$\forall H \subseteq E' \text{equicontinua} \Longrightarrow \overline{H}^{\sigma(E',E)} \text{ equicontinua.}$$

PRUEBA: Por el teorema de los bipolares, tenemos que:

$$\overline{\Gamma(H)}^{\sigma(E',E)} = H^{\circ\circ}$$

Luego,

$$\left(\overline{\Gamma(H)}^{\sigma(E',E)}\right)^{\circ} = H^{\circ\circ\circ} = H^{\circ} \in \mathcal{V}(0, \tau).$$

Por lo tanto, $\overline{\Gamma(H)}^{\sigma(E',E)}$ es equicontinua.

Siendo, $\overline{H}^{\sigma(E',E)} \subseteq \overline{\Gamma(H)}^{\sigma(E',E)}$, concluimos entonces que $\overline{H}^{\sigma(E',E)}$ es equicontinua.

PROPOSICION 2. Sean E y F dos e.l.c. y Hausdorff y sea H u-una parte equicontinua de $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces, la restricción a H de cada una de las siguientes topologías son idénticas:

1) La topología de la convergencia simple en un conjunto total de E.

2) La topología de la convergencia simple sobre E.

3) L a topología de la convergencia precompacta.

PRUEBA: (Ver [17] , Capítulo III, § 4, Proposición 4.5)

PROPOSICION 3. Sean E y F dos e.l.c. Hausdorff y sea H una parte equicontinua de $\mathcal{L}(E,F)$. Supongamos además que E es separable y F metrizable. Entonces la restricción a H de la topología de la convergencia simple es metrizable.

PRUEBA: (Ver [17] , Capítulo III, § 4, Proposición 4.7.)

TEOREMA 1 (BANACH-STEINHAUS). Sean $(E, \mathcal{T})$ un espacio d-tonelado, E´su dual topológico y $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión $\sigma(E',E)$ acotada de E'. Si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge puntualmente a una forma lineal f_o , entonces $f_o \in E'$ y la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f_o en cada subconjunto precompacto de E.

PRUEBA: Para cada $n \geq 1$ tenemos que,

$$\{f_n\} \subseteq E' \Longrightarrow \{f_n\} \text{ equicontinuo.}$$

Ahora, $\bigcup_{n \geq 1} \{f_n\} = \{f_n\}_{n \geq 1}$ es $\sigma(E', E)$ acotada (por hipótesis). Luego, siendo E un espacio dt, tenemos que la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinua. Siendo f_o el $\sigma(E',E)$

límite de la sucesión $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, tenemos que $f_o \in E'$ (proposición 1).

Por la proposición 2, concluimos que $f_n \longrightarrow f_o$ uniformemente en cada subconjunto precompacto de E.

PROPOSICION 4. Sean $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt separable y E' su dual. Entonces toda parte $\sigma(E';E)$ acotada de E' es $\sigma(E'; E)$ secuencialmente relativamente compacta.

PRUEBA: Sea $M \subseteq E'$ una parte $\sigma(E';E)$acotada, y sea $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión en M. Es claro que $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ es $\sigma(E';E)$ acotada y siendo E un espacio dt, utilizando un razonamiento similar al empleado en el Teorema 1 , concluimos que $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ es equicontinua.

Por otro lado, $\overline{\{f_n\}_{n\geqslant 1}}^{\sigma(E',E)}$ está contenida en E' y además es equicontinua (proposición 1). Siendo E separable, tenemos que $\overline{\{f_n\}_{n\geqslant 1}}^{\sigma(E',E)}$ es metrizable (proposición 3) y además $\sigma(E';E)$ compacta (teorema de Alaoglu-Bourbaki).

Como es bien sabido que en un espacio métrico, la compacidad secuencial equivale a la compacidad, concluimos que la sucesión $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ contiene una subsucesión convergente y cuyo límite pertenece al conjunto $\overline{\{f_n\}_{n\geqslant 1}}^{\sigma(E',E)} \subseteq \overline{M}^{\sigma(E',E)}$.
Esto prueba que M es $\sigma(E',E)$ secuencialmente relativamente compacto.

El corolario que sigue es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

COROLARIO 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt separable y sea E' su dual. Entonces toda parte $\sigma(E';E)$ acotada y cerrada de E'es $\sigma(E'; E)$ secuencialmente compacta.

2. APLICACIONES DE ESPACIOS dt Y di EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS.

PROPOSICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt (resp. di) y sea F un e.l.c. Sea $\{H_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos equicontinuos de aplicaciones lineales de E en F tal que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es simplemente (resp. fuertemente) acotada. Entonces , el conjunto $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es equicontinuo.

PRUEBA: Notemos en primer lugar que si V es una vecindad disqueada y cerrada de 0 en F, entonces

$$\bigcap_{h\in \bigcup_{n\geq 1} H_n} h^{-1}(V) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{h\in H_n} h^{-1}(V) \quad \text{es un conjunto}$$

disqueado y cerrado en E.

Sea $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{h\in H_n} h^{-1}(V)$. Consideremos ahora los casos siguientes:

CASO 1. Supongamos que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es simplemente acotado. Vamos a probar que W es absorbente en E.

Sea $x \in E$. Luego $\bigcup_{n\geq 1} H_n(x)$ es acotado en F. Por tanto,

$\exists \alpha > 0 : \bigcup_{n\geq 1} H_n(x) \subseteq \alpha V \Longrightarrow x \in \alpha \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{h \in H_n} h^{-1}(V) = \alpha W \Longrightarrow W$ es absorbente en E.

El resultado anterior muestra que el conjunto $W = \bigcap_{h \in \bigcup_{n\geq 1} H_n} h^{-1}(V)$ es un d-tonel en E y luego es una vecindad de 0 por ser E un espacio dt. Concluimos entonces que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es equicontinuo.

CASO 2. Supongamos que $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es fuertemente acotado. Sea $A \subseteq E$ acotado. Entonces $\bigcup_{n \geq 1} H_n(A)$ es acotado en F. Vamos a mostrar que W es un d-tonel bornívoro en E.

En efecto, es claro que W es un d-tonel en E (ver Caso 1). Probemos entonces que W es bornívoro en E.

Siendo $A \subseteq E$ acotado, como $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es fuertemente acotado,

$$\exists \lambda > 0 : \bigcup_{n \geq 1} H_n(A) \subseteq \lambda V \Longrightarrow A \subseteq \lambda \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{h \in H_n} h^{-1}(V) = \lambda W.$$

Por tanto, W absorbe a A. Esto prueba que W es un d-tonel bornívoro de E.

Ahora, dado que por hipótesis E es un espacio di, tenemos que $W \in \mathcal{V}(0, \tau)$ y luego $\bigcup_{n\geq 1} H_n$ es equicontinuo.

COROLARIO 1. Sea (E, τ) un espacio dt (resp. di) y sea F un e.l.c. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de E en F simplemente (resp. fuertemente) acotada. Entonces $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua.

PRUEBA: Haciendo $H_n = \{f_n\}$, $\forall\, n \geq 1$, el resultado se sigue inmediatamente de la proposición 1 anterior.

COROLARIO 2. Sea (E,τ_E) un espacio dt y sea (F,τ_F) un e. l.c. Supongamos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de E en F tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una aplicación $f_o: E \longrightarrow F$. Entonces f_o es lineal y continua.

PRUEBA: Es claro que la función

$$\begin{aligned} f_o: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f_o(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

es lineal . Por otra parte, la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión simplemente acotada. Luego por el corolario 1, la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua.

Vamos a probar entonces que f_o es una aplicación continua.

Sean $V, U \in \mathcal{V}(0,\tau_F)$ disqueadas y cerradas tales que $U + U \subseteq V$. Dado que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua, tenemos $W = \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(U) \in \mathcal{V}(0,\tau_E)$. Sea ahora $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ una red en E, y tal que $x_\alpha \longrightarrow 0$. Mostraremos que $f_o(x_\alpha) \longrightarrow 0$, lo cual será suficiente para probar que f_o es continua en 0 y por lo tanto, continua en todo E .

Como $x_\alpha \longrightarrow 0$, $\exists \beta \in \Delta : \alpha > \beta \Longrightarrow x_\alpha \in W$. Es decir, $\forall \alpha \geq \beta$, $\forall n \geq 1$: $f_n(x_\alpha) \in U$. Por otro lado, para cada $n \geq 1$,

$f_n(x) \longrightarrow f_o(x)$, $\forall x \in E$. Sea $\alpha \geq \beta$, entonces $f_n(x_\alpha) \longrightarrow f_o(x_\alpha)$ Luego, $\exists\ m \geq 1$: $f_o(x_\alpha) - f_n(x_\alpha) \in U$, $\forall\ n \geq m$. Por tanto, si $n \geq m$ y $\alpha \geq \beta$ se tendrá que:

$$f_o(x_\alpha) = f_o(x_\alpha) - f_n(x_\alpha) + f_n(x_\alpha) \in U + U \subseteq V .$$

En esta forma vemos que $f_o(x_\alpha) \longrightarrow 0$.

DEFINICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio lineal topológico. Se dice que E es semi-completo si toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

PROPOSICION 2. Sea $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt y sea E' su dual. Entonces $(E', \sigma(E',E))$ es semi-completo.

PRUEBA: Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(E', \sigma(E',E))$. Entonces $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es $\sigma(E',E)$ acotada y por tanto es simplemente acotada. Por el corolario 1, la sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinua.

Ahora, para cada x de E, $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Sea $f_o : E \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$f_o(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) .$$

Luego por el corolario 2, tenemos que $f_o \in E'$. Finalmente, dado que $f_n \longrightarrow f_o$ simplemente, tenemos también que $f_n \longrightarrow f_o$ en la topología débil $\sigma(E',E)$. Esto prueba que $(E', \sigma(E',E))$ es semi-completo.

CAPITULO 5

EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

Los ejemplos que presentamos a continuación tienen la finalidad de mostrar que las recíprocas de las implicaciones que aparecen en el cuadro 1 del capítulo segundo, no son válidas.

DEFINICION 1. Sean E un e.l.c. y E´su dual. Se llama bidual de E y lo anotaremos por E´´, al dual de E´ provisto de la topología fuerte $\beta(E', E)$. Es decir,

$$E'' = (E', \beta(E',E))'.$$

EJEMPLO 1. (En el que se demuestra que el dual fuerte de un espacio localmente convexo metrizable es un espacio del tipo (DF)).

Sea (E, τ) un e.l.c. metrizable y E´ su dual provisto de la topología fuerte $\beta(E',E)$. Sea $\{M_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes equicontinuas del bidual E´´. Si $M = \bigcup_{n\geq 1} M_n$ es acotado para la topología $\sigma(E'',E')$, entonces M es equicontinuo.

PRUEBA:

1) Notemos en primer lugar que un sistema fundamental de vecindades del 0 en $(E', \beta(E',E)$ está dado por la colección de todos los conjuntos disqueados, absorbentes y $\sigma(E',E)$ cerra-

dos de E´ debido a que tales conjuntos son los polares de los conjuntos acotados de E. (Proposición 1.7.3).

2) Sea $U_n = M_n^{\bullet}$ y $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n = (\bigcup_{n\geq 1} M_n)^{\bullet}$ (donde $^{\bullet}$ denota el polar con respecto a la dualidad entre E´y E´´). Cada conjunto U_n es una vecindad β(E´,E) disqueada y cerrada de 0 en E´ (proposición 1.7.5), y U es un disco absorbente y β(E´,E) cerrado de E´.(Proposición 1.7.7).

Luego, para probar que M es equicontinuo, bastará encontrar un disco absorbente y σ(E´,E) cerrado $V \subseteq E'$ tal que $V \subseteq U$, dado que en este caso, V sería el polar de un conjunto acotado de E y por tanto una vecindad de 0 en (E´, β(E´,E)).

3) Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un sistema fundamental numerable de conjuntos β(E´,E) acotados de E´, el cual se obtiene tomando los polares de los conjuntos pertenecientes a un sistema fundamental numerable de vecindades del 0 en E. (Proposición 1.7.10)

Es claro que cada A_n es un disco σ(E´, E) compacto (teorema de Alaoglu-Bourbaki), Supongamos entonces que se tengan construídos una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de números positivos y una sucesión $\{V_n\}_{n\geq 1}$ de vecindades del 0 en (E´, β(E´,E) tales que cada V_n sea un disco σ(E´,E) cerrado, satisfaciendo además las siguientes condiciones:

i) $\lambda_i A_i \subseteq \left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) U \quad , \quad \forall\, i$

ii) $\lambda_i A_i \subseteq V_j$, $\forall$ i,j

iii) $V_i \subseteq U_i$, $\forall$ i .

Entonces, el conjunto $V = \bigcap_{i \geq 1} V_i$ es un disco absorbente y $\sigma(E',E)$ cerrado tal que $V \subseteq U$. En efecto, es claro que V es un disco $\sigma(E',E)$ cerrado (puesto que cada V_i lo es) y además $V \subseteq U$. Probemos entonces que V es absorbente.

Sea $x \in E'$. Siendo $\{x\}$ una parte $\beta(E',E)$ acotada de E', $\exists A_i$ tal que $\{x\} \subseteq A_i$. Luego, $\lambda_i\{x\} \subseteq \lambda_i A_i$ ($\lambda_i > 0$). Utilizando (ii), tenemos que:

$$\lambda_i A_i \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j = V .$$

Por tanto,

$$\lambda_i\{x\} \subseteq V \Longrightarrow V \text{ es absorbente.}$$

4) Construiremos ahora las sucesiones $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ y $\{V_n\}_{n \geq 1}$ por inducción. Supongamos que λ_i y V_i satisfacen (i),(ii) y (iii) para $1 \leq i \leq n$. Por el teorema de Banach-Mackey,

$$\exists \lambda_{n+1} > 0 \text{ tal que } \lambda_{n+1} A_{n+1} \subseteq \frac{1}{2^{n+2}} U \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right), \quad (*)$$

ya que A_{n+1} es $\beta(E',E)$ completo. (Ver [4], Capítulo III, §7, Proposición 6), y el miembro derecho de (*) es un $\beta(E',E)$ tonel.

Ahora, el conjunto

$$B_{n+1} = \lambda_1 A_1 + \ . \ . \ . + \lambda_{n+1} A_{n+1}$$

es un disco $\sigma(E',E)$ compacto ([4] ,Capítulo III, § 5, Proposición 2) y además tenemos que:

$$B_{n+1} \subseteq \frac{1}{4} U + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n+2}}\right) U \subseteq \frac{1}{2} U \subseteq \frac{1}{2} U_{n+1}$$

Si W_{n+1} es una $\beta(E',E)$ vecindad disqueada de 0 y además $\sigma(E',E)$ cerrada , contenida en $\frac{1}{2} U_{n+1}$, entonces el disco $V_{n+1} = B_{n+1} + W_{n+1}$ es una $\beta(E',E)$ vecindad de 0 en E' pues V_{n+1} contiene a W_{n+1} . Además, V_{n+1} es un conjunto $\sigma(E',E)$ cerrado. Finalmente, por (*) tenemos que:

$$\lambda_{n+1} A_{n+1} \subseteq V_j \quad \text{para } 1 \leqslant j \leqslant n \ ,$$

y,

$$\lambda_i A_i \subseteq B_{n+1} \subseteq V_{n+1} \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

OBSERVACIONES. a) Resulta claro del ejemplo anterior que si $M = \bigcup_{n \geqslant 1} M_n$ fuera $\beta(E'',E')$ acotado, entonces M sería equicontinuo puesto que $\mathcal{A}(\beta(E'',E')) \subseteq \mathcal{A}(\sigma(E'',E'))$.

b) De la parte (3) concluimos que $(E', \beta(E',E))$ admite un sistema fundamental numerable de conjuntos acotados. Luego, hemos probado aquí que el dual fuerte $(E', \beta(E',E))$ de un espacio localmente convexo metrizable $(E, \mathcal{T})$ es del tipo (DF).

c) Se ha probado también que el dual fuerte de un e.l.c. metrizable es un espacio di (por ser un espacio (DF)), y luego también es un espacio dt ya que $(E', \beta(E',E))$ es completo. (Ver [4] ,Capítulo III, § 7, Proposición 6).

d) M.G. Kothe construyó el ejemplo siguiente de un espacio localmente convexo metrizable y cuyo dual fuerte no es tonelado.

Sea E el espacio vectorial de todas las sucesiones dobles $x = (x_{ij})$ tales que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(x) = \sum |a_{ij}^{(n)} x_{ij}| < \infty$$

en donde,

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} j \ , \text{ si } \ i \leqslant n \ , & \forall j \\ 1 \ , \text{ si } \ i > n \ , & \forall j \end{cases}$$

Las seminormas p_n $(n \in \mathbb{N})$ generan una topología localmente convexa mediante la cual E es un espacio de Fréchet y tal que $(E', \beta(E',E))$ no es tonelado. (Ver [3] , Capítulo II , § 1, Página 88).

Se concluye de esto, que existen espacios d-tonelados que no son tonelados.

EJEMPLO 2. (En donde mostramos que un espacio di no es necesariamente un espacio dt).

Sea c el espacio de Banach de todas las sucesiones convergentes $x = (x_1 , x_2 , \ldots)$ donde $x_i \in \mathbb{K}$, con la norma del supremo

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

Sea c_o el subespacio cerrado de c formado por todas las sucesiones que convergen a 0 y denotemos con ϕ al subespacio vectorial de c formado por todas las sucesiones que tienen un número finito de componentes no nulas. Es claro que ϕ es un espacio normado con la norma inducida de c, la cual denotaremos por $\| \|_{\phi}$.

Para cada $n \geq 1$, definimos la aplicación

$$f_n : (\phi , \| \|_{\phi}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = nx_n$$

Entonces, f_n es una forma lineal y continua.

En efecto, para cada $n \geq 1$, la aplicación f_n es claramente lineal. Mostremos que es también continua, para lo cual será suficiente probar que f_n está acotada en una vecindad de 0 en ϕ .

Sean entonces $n \in \mathbb{N}$ fijo, y $\varepsilon > 0$. Consideremos la vecindad del 0 en ϕ dada por el conjunto

$$V = \left\{ y \in \phi \ : \ \|y\|_{\phi} \leq \varepsilon \right\}$$

Por tanto, para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in V$, se tiene que $\|x\|_{\phi} \leq \varepsilon$ y luego $|x_m| \leq \varepsilon \ \forall m \geq 1$. Ahora, $f_n(x) = nx_n$ y luego, $|f_n(x)| = |nx_n| \leq n\varepsilon$. Vemos entonces que $\forall x \in V$,

$$|f_n(x)| \leq n\varepsilon ,$$

lo cual nos dice que f_n está acotada en V.

La sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión simplemente acotada de formas lineales continuas que no es equicontinua.

En efecto, mostremos en primer lugar que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión simplemente acotada, para lo cual bastará probar que $\bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0,1])$ absorbe cada punto de ϕ. (Donde $B_{\mathbb{K}}[0,1]$ denota al conjunto $\{ z \in \mathbb{K} \ / \ |z| \leq 1 \}$).

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \phi$. Entonces, $\exists\, m_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 0 \ \forall\, m > m_o$. Sea $\lambda = \|x\|$. Haciendo $\alpha = \lambda m_o > 0$, tenemos que

$$x \in \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0,\alpha]) = \alpha \bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0,1])$$

Luego el conjunto $\bigcap_{n\geq 1} f_n^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0,1])$ absorbe a x.

Probaremos ahora que la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no es equicontinua. Supongamos lo contrario. Como $B_{\mathbb{K}}[0,1] \in \mathcal{V}(0,\mathbb{K})$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(0, \|\ \|_\phi)$ tal que $f_n(U) \subseteq B_{\mathbb{K}}[0,1]$, $\forall\, n \geq 1$. Esto último es equivalente a que, $\forall\, n\geq 1$ y $\forall\, x \in U$,

$$|f_n(x)| \leq 1 . \qquad (1)$$

Por otra parte, la vecindad $U \in \mathcal{V}(0, \|\ \|_\phi)$ podemos considerarla como el conjunto $U = \{ y \in \phi \ / \ \|y\|_\phi \leq \varepsilon \}$ para algún $\varepsilon > 0$.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in U$ con $x \neq 0$. Entonces, $|x_n| \leq \varepsilon$ $\forall\, n \geq 1$. Ahora, si algún x_i es tal que $|x_i| > 1$, tenemos que $|f_i(x)| = |ix_i| > 1$, lo que contradice (1). Supongamos entonces que $|x_n| \leq 1$, $\forall\, n \geq 1$. Dado que $x \neq 0$, $\exists\, k \geq 1$ tal que $|x_k| \neq 0$. Luego,

$$|x_k| \leqslant 1 \Longrightarrow \varepsilon |x_k| \leqslant \varepsilon$$

Como $\varepsilon \leqslant 1$, tenemos que

$$|x_k| \leqslant \varepsilon \leqslant 1 .$$

Utilizando la propiedad arquimediana de los números reales, $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $m\ |\varepsilon x_k| > 1$. Consideremos ahora la sucesión $y = (0,\dots,y_m,0,0,\dots)$ cuya e-mésima componente es $y_m = \varepsilon x_k$ y el resto de las demás son nulas.

Es evidente que $y \in U$. Por otra parte,

$$|f_m(y)| = |m \varepsilon x_k| > 1 ,$$

lo que también contradice (1). Concluimos entonces que la sucesión $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ no es equicontinua.

Finalmente, por el corolario 4.2.1, deducimos que el espacio $(\Phi , \|\ \|_{\phi})$ no es d-tonelado, pero si es d-infratonelado por ser un espacio bornológico.

Todo espacio localmente convexo Hausdorff puede considerarse como un subespacio cerrado de algun espacio tonelado. (Ver [10], Teorema 1.1). Luego, si queremos demostrar que un subespacio cerrado de un espacio dt (resp. di) no es necesariamente de la misma clase, bastará con exhibir un ejemplo de un e.l.c.T_2 que no sea un espacio d-infratonelado.

Tal es el propósito del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 3. Designemos con (E, τ) el espacio de Banach c_o del ejemplo anterior con la norma del supremo y sea (E, τ') el espacio c_o con la topología débil asociada, es decir, tal que $\tau' = \sigma(c_o, \ell^1)$ (donde $\ell^1 = (c_o)'$).

Para cada $n \geqslant 1$, definimos la aplicación

$$g_n: (E, \tau') \longrightarrow (E, \tau)$$
$$x \longmapsto g_n(x) = (x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$$

en donde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ y $x_i \in \mathbb{K}$.

Es evidente que cada g_n es una aplicación lineal. Probemos que es también continua. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Para cada $p \geqslant 1$, consideremos ahora la aplicación

$$f_p: (E, \tau') \longrightarrow (E, \tau)$$

definida por

$$f_p(x) = (0, \ldots, 0, x_p, 0, 0, \ldots), \quad \text{para cada } x = ($$
$x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots) \in E$.

Es claro que cada f_p es lineal y continua. Además,

$$g_n(x) = \sum_{p=1}^{n} f_p(x) \quad , \quad \forall x \in E.$$

Resulta entonces que cada g_n se escribe como una suma finita de funciones continuas y es por tanto una aplicación continua.

La sucesión $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ es una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de (E, τ') en (E, τ) con la propiedad de que $\forall x \in E$, $g_n(x) \longrightarrow x$. Veamos que esto es así.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in E$. Entonces,

$$\| g_n(x) - x \| = \| (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) - (x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}, \ldots) \|$$

$$= \| (0, 0, \ldots, 0, -x_{n+1}, -x_{n+2}, \ldots) \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_{n+i}|$$

Ahora, como $x \in E = c_o$, entonces $x \longrightarrow 0$ en $\mathbb{K}$ y luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m| \leqslant \varepsilon \quad , \quad \forall\, m \geqslant p.$$

POR tanto, si $n \geqslant p$,

$$\| g_n(x) - x \| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_{n+i}| \leqslant \varepsilon$$

y luego $g_n(x) \longrightarrow x$ en $(E, \mathcal{T})$.

Sea $B = \left\{ x \in E \,/\, \| x \| \leqslant 1 \right\}$. Entonces la sucesión $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ es uniformemente (o fuertemente) acotada sobre los conjuntos acotados de $(E, \mathcal{T}')$.

En efecto, dado que los conjuntos acotados de $(E, \mathcal{T}')$ son los mismos que los acotados de $(E, \mathcal{T})$,(teorema de Mackey) será suficiente con probar que $\bigcup_{n \geqslant 1} g_n(B) \subseteq B$. Sean entonces, $n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_1, x_2, \ldots) \in B$. Luego $\| x \| \leqslant 1$. Pero ,

$$\| g_n(x) \| = \| (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = \| x \|$$

$$\Longrightarrow g_n(x) \in B \quad .$$

Vemos entonces que $g_n(B) \subseteq B$, $\forall\, n \geqslant 1$, es decir, que

$\bigcup_{n \geqslant 1} g_n(B) \subseteq B$. Por último, dado que c_o no es un espacio reflexivo, tenemos que $\mathcal{T}' \lneqq \mathcal{T}$ y luego la sucesión $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$

no es equicontinua (puesto que $\bigcap_{n\geq 1} g_n^{-1}(B) \subseteq B$).

Se deduce del corolario 4.2.1 que el espacio (E, τ') no es d-infratonelado.

EJEMPLO 4. (Un espacio dM que no es M).

Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio normado no separable. En E' consideremos la familia $\mathcal{G}$ dada por

$$\mathcal{G} = \{ A \subseteq E' / A \text{ es } \beta(E',E) \text{ acotado y separable.} \}$$

Sea $\tau_{\mathcal{G}}$ la topología en E de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{G}$. Se tiene entonces que :

$$\sigma(E,E') \lneq \tau_{\mathcal{G}} \lneq \mathcal{T}(E, E') = \beta^*(E,E')$$

(donde $\beta^*(E,E')$ denota la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\beta(E',E)$ acotados).

Notemos que $\mathcal{T}(E,E') = \beta^*(E, E')$ por ser $(E, \|\ \|)$ un espacio bornológico. Ahora,

1) $(E, \tau_{\mathcal{G}})$ es di. En efecto, sea $H = \bigcup_{n\geq 1} H_n$ una parte acotada de $(E', \beta(E', E))$, y tal que, $\forall\, n \geq 1$, $H_n \subseteq E'$ es $\tau_{\mathcal{G}}$ equicontinua. Siendo H_n una parte $\beta(E', E)$-separable , tenemos que H también es $\beta(E', E)$-separable (por ser reunión numerable de partes separables). Concluimos entonces que $H \in \mathcal{G}$ y luego H es equicontinua.

2) $(E, \tau_{\mathcal{G}})$ es un espacio dM ya que todo espacio di lo es.

3) La topología $\tau_{\mathcal{G}}$ es estrictamente menos fina que la

topología $\mathcal{T}(E,E')$.

En efecto, en caso contrario se tendría que

$$\tau_{\mathcal{G}} = \beta^{*}(E, E')$$

lo que equivale a decir que toda parte $\beta(E', E)$ acotada de E' es separable. Ahora, el espacio $(E', \beta(E',E))$ es normado y por tanto admite una sucesión $\{B_n\}_{n \geqslant 1}$ fundamental de conjuntos $\beta(E',E)$ acotados, los cuales son también separables.

Siendo $E' = \bigcup_{n \geqslant 1} B_n$, resulta ser E' separable y luego también E es separable (ver [11], Capítulo 4, § 4.6, Teorema 4.6-8). Esto contradice nuestra hipótesis de que el espacio $(E, \tau_{\|\cdot\|})$ no era separable.

Hemos encontrado entonces un espacio dM que no es M.

CAPITULO 6

SUBESPACIOS DE CO-DIMENSION CONTABLE EN ESPACIOS dt Y di

En el capítulo anterior mostramos que la propiedad de un espacio localmente convexo de ser d-tonelado o d-infratonelado no se mantenía generalmente para los subespacios de los mismos.

Es nuestra intención en este capítulo analizar bajo qué condiciones un subespacio preserva la propiedad de ser un espacio dt o di.

1. SUBESPACIOS DE ESPACIOS d-TONELADOS.

LEMA 1. Sean (E, τ) un espacio dt y $\{A_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión de partes de E tales que:

a) A_m es un disco, $\forall\, m \geq 1$

b) $A_m \subseteq A_{m+1}$, $\forall\, m \geq 1$

c) $\forall\, x \in E$, $\exists\, m$: A_m absorbe a x.

Sea $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tales que $\lambda_n \nearrow \infty$ y supongamos que U es un disco en E tal que $\forall\, m \geq 1$: $U \cap \lambda_m A_m \in \mathcal{V}(0, \tau/\lambda_m A_m)$. Entonces, se tiene que $U \in \mathcal{V}(0, \tau)$.

PRUEBA: Notemos en primer lugar que la condición (c) de la hipótesis equivale a decir que $\bigcup_{m\geq 1} A_m$ es absorbente en E.

Para probar el lema 1, construiremos un d-tonel Θ en E tal que $\frac{1}{3}\Theta \subseteq U$. Por hipótesis,

$$U \cap \lambda_m A_m \in \mathcal{V}(0, \tau/\lambda_m A_m), \qquad \forall m \geq 1,$$

luego,

$$\forall m \geq 1, \ \exists U_m \in \mathcal{V}(0, \tau) \text{ disqueada tal que:}$$

$$U_m \cap \lambda_m A_m \subseteq U \cap \lambda_m A_m \subseteq U.$$

Sea $\Theta = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m}$. Entonces Θ es un d-tonel en E. En efecto, es fácil ver que:

1) Θ es un disco.

2) Θ es cerrado en E .

3) $\forall m \geq 1 : \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m} \in \mathcal{V}(0, \tau)$. Probemos entonces que

4) Θ es absorbente. En efecto, sea $x \in E$. Como $\bigcup_{m\geq 1} A_m$ es absorbente y $\lambda_n \nearrow \infty$, tenemos que $\bigcup_{m\geq 1}\lambda_m A_m$ es también absorbente . Luego,

$$\exists \alpha > 0: x \in \alpha \bigcup_{m\geq 1} \lambda_m A_m = \bigcup_{m\geq 1} (\alpha \lambda_m) A_m$$

$$\Longrightarrow \quad \exists m_o \geq 1 : x \in \alpha \lambda_{m_o} A_{m_o}.$$ Es decir, $\exists m_o \geq 1$ tal que $\lambda_{m_o} A_{m_o}$ absorbe a x. Ahora, U_{m_o} absorbe x , luego $\exists \mu > 0 : x \in \mu U_{m_o}$. En esta forma ,

$$x \in \sup(\alpha, \mu)(U_{m_o} \cap \lambda_{m_o} A_{m_o}) \subseteq \sup(\alpha, \mu)(U \cap \lambda_{m_o} A_{m_o}) \subseteq$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu)(U \cap \lambda_m A_m)$$ para toda $m \geq m_o$. Por tanto,

$$x \in \sup(\alpha, \mu) \bigcap_{m \geq m_o} (U \cap \lambda_m A_m).$$

Por otra parte, sabemos que el conjunto

$$\bigcap_{m=1}^{m_o -1} U_m$$

es absorbente en E, luego $\exists \delta > 0$ tal que $x \in \delta \bigcap_{m=1}^{m_o-1} U_m$.

Así tenemos que,

$$x \in \sup(\alpha, \mu, \delta) \left[\bigcap_{m \geq m_o} (U \cap \lambda_m A_m) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{m_o-1} U_m \right) \subseteq \right.$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta) \left[\bigcap_{m \geq m_o} (U \cap \lambda_m A_m) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{m_o-1} (U \cap \lambda_m A_m) \right) \right.$$

O sea que:

$$x \in \sup(\alpha, \mu, \delta) \bigcap_{m=1}^{\infty} (U \cap \lambda_m A_m) \subseteq$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta) \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m} =$$

$= \sup(\alpha, \mu, \delta) \Theta$. Esto prueba que Θ

es absorbente.

Siendo Θ un d-tonel en E, concluimos que $\Theta \in \mathcal{V}(0, \tau)$ y luego $\frac{1}{3} \Theta \in \mathcal{V}(0, \tau)$. Probemos ahora que $\frac{1}{3} \Theta \subseteq U$.

En efecto, sea $x \in \Theta$. Dado que $\bigcup_{m \geq 1} \lambda_m A_m$ absorbe x , $\exists \alpha > 0$ y $\exists m_o' \geq 1$ tal que $x \in \alpha \lambda_{m_o'} A_{m_o'}$. Como $\lambda_m \uparrow \infty$, $\exists m_o \geq m_o' :$ $\alpha \lambda_{m_o'} \leq \lambda_{m_o} \Longrightarrow x \in \lambda_{m_o} A_{m_o}$.

Dado que:

$$\Theta = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m} \subseteq U \cap \lambda_m A_m + 2 U_m \text{ , para}$$

toda $m \geq 1$, se tiene que

$$x \in \Theta \subseteq U \cap \lambda_{m_o} A_{m_o} + 2 U_{m_o} \text{ . Esto es,}$$

$x = g + h$ con $g \in U \cap \lambda_{m_o} A_{m_o}$ y $h \in 2\,U_{m_o}$. Luego,

$$x = g + h \in \lambda_{m_o} A_{m_o} \Longrightarrow h \in \lambda_{m_o} A_{m_o} - g$$

$$\Longrightarrow h \in \lambda_{m_o} A_{m_o} - g \Longrightarrow h \in \lambda_{m_o} A_{m_o} - \lambda_{m_o} A_{m_o} \subseteq$$

$$\subseteq 2\,\lambda_{m_o} A_{m_o} \text{ (puesto que } \lambda_{m_o} A_{m_o} \text{ es un disco).}$$

Vemos entonces que,

$$h \in (2\,\lambda_{m_o} A_{m_o}) \cap 2\,U_{m_o} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h \in 2(U_{m_o} \cap \lambda_{m_o} A_{m_o}) \subseteq 2U. \text{ Luego,}$$

$$x = g + h \in U + 2U = 3U .$$

Concluimos entonces que $\Theta \subseteq 3U$, es decir, que $\frac{\Theta}{3} \subseteq U$, lo cual completa la demostración del lema 1.

La prueba del teorema siguiente puede consultarse en la referencia [4], Capítulo 2, § 12, Teorema 1.

TEOREMA 1. (DIEUDONNE-SCHWARTZ). Sea F un espacio vectorial y sea $\{E_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de subespacios vectoriales de F tales que $E_n \subseteq E_{n+1}$ $\forall\, n \geq 1$ y $F = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Supongamos que cada espacio En está provisto de una topología localmente convexa $\mathcal{T}_n$ y que además, $\forall\, n \geq 1$, la topología inducida por $\mathcal{T}_{n+1}$ sobre E_n es $\mathcal{T}_n$

Sea $\mathcal{T}$ la topología localmente convexa la más fina sobre F tales que cada inyección canónica $j_n : E_n \hookrightarrow F$ es $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}$ continua. Entonces, $\mathcal{T}$ induce $\mathcal{T}_n$ sobre E_n para cada $n \geq 1$.

OBSERVACION. Bajo las condiciones del teorema 1 anterior, se dice que F es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$.

PROPOSICION 1. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. d-tonelado y sea $\{E_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión creciente de subespacios vectoriales de E tales que $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Entonces E es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$

PRUEBA: $\forall\, n \geq 1$, sea $(E_n, \mathcal{T}_n)$ el subespacio de $(E, \mathcal{T})$ en donde $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}/_{E_n}$ y $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}/E_{n+1}$. Mostraremos en primer lugar que $\mathcal{T}_{n+1/E_n} = \mathcal{T}_n$.

En efecto, sea $\Theta \in \mathcal{T}_n \Longrightarrow \exists\, \Theta' \in \mathcal{T} : \Theta = E_n \cap \Theta'$
Siendo por hipótesis $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, tenemos que:

$$\Theta = E_n \cap (E_{n+1} \cap \Theta') = E_n \cap \Theta'' \quad \text{, donde}$$

$\Theta'' \in \mathcal{T}_{n+1}$. Luego $\Theta \in \mathcal{T}_{n+1/E_n}$ y es $\mathcal{T}_n \leq \mathcal{T}_{n+1/E_n}$.

Sea ahora $\Theta \in \mathcal{T}_{n+1/E_n}$. Entonces $\exists\, \Theta'' \in \mathcal{T}_{n+1}$ tal que $\Theta = \Theta'' \cap E_n$. Pero $\Theta'' = \Theta' \cap E_{n+1}$, donde $\Theta' \in \mathcal{T}$

Por lo tanto,

$$\Theta = (\Theta' \cap E_{n+1}) \cap E_n = \Theta' \cap E_n \in \mathcal{T}_n$$

Luego, $\mathcal{T}_{n+1}/E_n \leq \mathcal{T}_n$. Esto prueba que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n+1}/E_n$.

Sea $\mathcal{T}'$ la topología localmente convexa la más fina sobre E tal que, $\forall\ n \geq 1$ la inyección canónica $j_n: E_n \hookrightarrow E$ es $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}'$ continua. Por el teorema 1, $\mathcal{T}'$ induce $\mathcal{T}_n$ sobre E_n para cada $n \geq 1$ y $(E, \mathcal{T}')$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$.

Vamos a probar ahora que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, con lo cual quedará demostrada la proposición 1.

Sea $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ disqueada. Ahora, $\forall\ n \geq 1$,

$$j_n^{-1}(U) = U \cap E_n \in \mathcal{T}_n \quad (\text{ definición de } \mathcal{T}_n) .$$

Luego, cada j_n es $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}$ continua y por tanto $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$.

Recíprocamente, sea $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}')$ disqueada. Entonces, si $\lambda_n = n$ para cada $n \geq 1$, tenemos que $\lambda_n \nearrow \infty$ y además:

a) $U \cap \lambda_n E_n = U \cap E_n \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}/E_n)$, $\forall\ n \geq 1$.

b) $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\ n \geq 1$.

c) E_n es un disco, $\forall\ n \geq 1$.

d) $\bigcup_{n \geq 1} E_n = E$ es absorbente.

Siendo por hipotesis $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt, por el lema 1 resulta que $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ y entonces, $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$. Esto prueba que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

PROPOSICION 2. Sean $(E, \mathcal{T})$ un espacio dt y F un subespacio cerrado de E, de codimensión contable. Entonces F es d-tonelado.

PRUEBA: Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de vectores de E formando una base para un subespacio G complementario de F. Sea $E_1 = F$ y $E_n = \langle\{E_{n-1}, x_{n-1}\}\rangle$ para $n > 1$. Entonces, $\{E_n\}$ es una sucesión creciente de subespacios de E tales que E = $= \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

Por la proposición 1, E es el límite inductivo estricto de los subespacios $\{E_n\}$, $n \geq 1$. Siendo F cerrado, cada E_n es también cerrado en E. (Ver [4], Capítulo 3, § 12, Corolario 2).

Sea $p : E \longrightarrow F$ la proyección paralela a G. Entonces, para cada $n \geq 1$, la restricción $p_n : E_n \longrightarrow F$ de p a E_n es continua por ser F cerrado y de codimensión finita en E_n. (Ver [4], Capítulo 2, § 10, Proposición 4). Siendo E el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$, concluimos entonces que p es una aplicación continua. Por tanto, F tiene un complementario cerrado G en E y además $F \simeq E/G$.

Como la propiedad de ser un espacio d-tonelado se mantiene cuando se pasa al cociente (corolario 3.2.1), concluimos que F es un espacio d-tonelado.

En caso de que F fuera un subespacio cerrado de E de codimensión finita, es claro que F también sería un espacio dt puesto que, todo complementario algebraico G de F sería también un complementario topológico, y luego tendríamos que $F \simeq E/G$. (Ver [4], Capítulo 2, §10, Proposición 4).

LEMA 2. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c tal que su dual E´es $\sigma(E';E)$ secuencialmente completo. Si A es una parte disqueada y cerrada de E tal que $\langle A\rangle$ es de codimensión contable en E, entonces $\langle A \rangle$ es cerrado.

PRUEBA: Sea $E = \langle A \rangle \oplus \langle \{x_n\}_{n\geq 1} \rangle$, donde $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión linealmente independiente en E. Construiremos $g_k \in E'$ tal que:

$$g_k(x_i) = \delta_{ki}$$

$$g_k(a) = 0, \quad \forall a \in A.$$

Sea $B_r = \overline{\Gamma(\{A, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r\})}$, $(r > k)$

Entonces, B_r es un disco cerrado de E y $x_k \notin r B_r$. Por el teorema de Hahn-Banach, $\exists f_r \in E'$ tal que

$$f_r(x_k) = 1 \text{ y } |f_r(x)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall x \in B_r.$$

Consideremos la sucesión $\{f_r\}_{r>k}$. Mostraremos que es una sucesión $\sigma(E',E)$ de Cauchy. En efecto, sea

$$y \in \langle A \rangle \oplus \langle \{x_n\}_{n\geq 1} \rangle.$$

Entonces,

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_{n_j}, \quad \text{donde } a_i \in A,$$

$x_{n_j} \in \{x_n\}_{n\geq 1}$, λ_i, $\mu_j \in \mathbb{K}$. Sean f_q y $f_p \in \{f_r\}_{r>k}$.

Tenemos que:

$$f_q(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_q(a_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_q(x_{n_j})$$

$$f_p(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_p(a_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_p(x_{n_j}) .$$

Luego,

$$|f_q(y) - f_p(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_q(a_i) - f_p(a_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (f_q(x_{n_j} - f_p(x_{n_j})\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| (| f_q(a_i)| + | f_p(a_i)|) + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j| (| f_q(x_{n_j})| + | f_p(x_{n_j})|)$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{m} |\mu_j|)(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}) .$$

Por tanto, cuando p y $q \longrightarrow \infty$, $|f_q(y) - f_p(y)| \longrightarrow 0$ y luego la sucesión $\{f_r\}_{r>k}$ es $\sigma(E', E)$ de Cauchy, para toda $k \geq 1$.

Dado que por hipótesis, E' es $\sigma(E', E)$ secuencialmente completo, entonces, para cada $k \geq 1$, la sucesión $\{f_r\}_{r>k}$ converge a una única $g_k \in E'$. Es decir,

$$g_k = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} f_r \quad \text{en } (E', \sigma(E', E)), \text{ para cada } k \geq 1.$$

Probaremos ahora que:

1) $g_k(x_i) = \delta_{ki}$

2) $g_k(a) = 0$, $\forall a \in A$.

En efecto,

1) Si $i = k$,

$g_k(x_i) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} f_r(x_i) = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} f_r(x_k) = 1$, puesto que $f_r(x_k) = 1$, $\forall\, r > k$.

Sea $i \neq k$. Como

$$0 \leqslant |g_k(x_i)| = \left|\lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} f_r(x_i)\right| = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} |f_r(x_i)| \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0$$

tenemos que $g_k(x_i) = 0$.

2) Sea $a \in A$. Entonces,

$$0 \leqslant |g_k(a)| = \left|\lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} f_r(a)\right| = \lim_{\substack{r\to\infty \\ r>k}} |f_r(a)| \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0$$

Luego, $g_k(a) = 0$.

Finalmente, si probamos que $\langle A \rangle = \bigcap_{k\geqslant 1} g_k^{-1}(0)$

entonces $\langle A \rangle$ es cerrado y el lema 2 quedará demostrado.

Sea $x \in \langle A \rangle$. Entonces se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad ,$$

con $a_i \in A$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Ahora, para $k \geqslant 1$,

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_k(a_i) = 0 \, .$$

Luego, $x \in g_k^{-1}(0)$, $\forall\, k \geqslant 1 \implies x \in \bigcap_{k\geqslant 1} g_k^{-1}(0)$. Por consiguiente, $\langle A \rangle \subseteq \bigcap_{k\geqslant 1} g_k^{-1}(0)$.

Recíprocamente, sea $y \in E$ tal que $g_k(y) = 0$, $\forall\, k \geqslant 1$.

Supongamos que $y \notin \langle A \rangle$. Entonces,

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_{n_j}$$

donde $a_i \in A$, $x_{n_j} \in \{x_n\}_{n \geq 1}$, λ_i, $\mu_j \in \mathbb{K}$ y algún $\mu_j \neq 0$. Siendo $g_k(y) = 0$, $\forall\, k \geqslant 1$, tenemos que para $k \geqslant 1$,

$$g_k(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_k(a_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_k(x_{n_j}) = 0$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \,\delta_{kn_j} = 0 .$$

Por lo tanto, de la igualdad

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \,\delta_{kn_j} = 0 \quad , \text{ para toda } k \geqslant 1,$$

tenemos que $\mu_j = 0$, $\forall\, j = 1,2,\ldots,n$, lo que contradice la forma en que hemos elegido los u_j . Concluimos entonces que $y \in \langle A \rangle$, de donde $\bigcap_{k \geqslant 1} g_k^{-1}(0) \subseteq \langle A \rangle$.

PROPOSICION 3. Sean (E, τ) dt y $F \trianglelefteq E$ de codimensión contable. Entonces F es un espacio dt.

PRUEBA: Por la proposición 2 anterior tenemos que $\overline{F}$ es d-tonelado. Luego será suficiente en considerar el caso en que F sea denso en E.

Sea $U = \bigcap_{n \geqslant 1} U_n$ un d-tonel en F. Entonces,

$$\overline{U} = \overline{\bigcap_{n \geqslant 1} U_n} \subseteq \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{U_n} = V \quad \text{(donde la clausura se}$$

considera con respecto a E) . Siendo F denso en E, $\overline{U}_n \in \mathcal{V}(0,\tau)$ $\forall\, n \geqslant 1$.

Dado que el dual E' de un espacio E d-tonelado es $\sigma(E',E)$ secuencialmente completo (proposición 4.2.2), $\langle \bar{U} \rangle$ es cerrado (lema 2) . Probemos ahora que $\bar{U}$ es absorbente.

En efecto, siendo U un tonel en F, tenemos que $F = \langle U \rangle$ Ahora,

$$\bar{F} = \overline{\langle U \rangle} \subseteq \overline{\langle \bar{U} \rangle} = \langle \bar{U} \rangle$$

pero, $\bar{F} = E$, luego, $E \subseteq \langle \bar{U} \rangle$.

Siendo $\bar{U}$ absorbente, el conjunto $V = \bigcap_{n \geq 1} \bar{U}_n$ es un d-tonel en E y por tanto $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$. Finalmente, dado que $V \cap F = U$, tenemos que U es una vecindad de 0 en F . Esto prueba que F es un espacio d-tonelado .

2. SUBESPACIOS DE ESPACIOS d-INFRATONELADOS.

LEMA 1. Sea (E, τ) un espacio di y sea $\{A_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión de partes de E tales que:

a) A_m es un disco, $\forall m \geq 1$.

b) $A_m \subseteq A_{m+1}$, $\forall m \geq 1$.

c) $\forall B \subseteq E$ acotado, $\exists\, m \geq 1$ tal que A_m absorbe a B.

Sea $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tales que $\lambda_n \nearrow \infty$ y supongamos que U es un disco en E tal que $\forall m \geq 1$, $U \cap \lambda_m A_m \in \mathcal{V}(0, \tau / \lambda_m A_m)$. Entonces, $U \in \mathcal{V}(0, \tau)$.

PRUEBA: Para probar el lema 1, construiremos un d-tonel bornívoro Θ en E tal que $\frac{1}{3}\Theta \subseteq U$.

Por hipótesis, $U \cap \lambda_m A_m \in \mathcal{V}(0, \tau/\lambda_m A_m)$, luego, $\forall m \geq 1$, $\exists U_m \in \mathcal{V}(0, \tau)$ disqueada tal que

$$U_m \cap \lambda_m A_m \subseteq U \cap \lambda_m A_m \subseteq U .$$

Sea $\Theta = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m}$. Sabemos por el lema 1.1 que Θ es un d-tonel en E. Probemos entonces Θ es bornívoro.

Sea $B \subseteq E$ acotado Utilizando la condición (c) de la hipótesis tenemos que $\bigcup_{m\geq 1} A_m$ absorbe a B y como $\lambda_n \nearrow \infty$, $\bigcup_{m\geq 1} \lambda_m A_m$ también absorbe a B. Luego, $\exists \alpha > 0$ tal que

$$B \subseteq \alpha \bigcup_{m\geq 1} \lambda_m A_m = \bigcup_{m\geq 1} (\alpha \lambda_m) A_m$$

pero $\alpha \lambda_m \nearrow \infty$ y siendo $\{A_m\}_{m\geq 1}$ una sucesión creciente, $\exists m_o \geq 1$ tal que $B \subseteq \alpha \lambda_{m_o} A_{m_o}$.

Por otra parte, $\exists \mu > 0$: $B \subseteq \mu U_{m_o}$ de donde tenemos que

$$B \subseteq \sup(\alpha, \mu)\,(U_{m_o} \cap \lambda_{m_o} A_{m_o}) \subseteq \sup(\alpha, \mu)(U \cap \lambda_{m_o} A_{m_o})$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu)(U \cap \lambda_m A_m), \qquad \forall m \geq m_o .$$

El conjunto $\bigcap_{m=1}^{m_o-1} U_m \in \mathcal{V}(0, \tau)$, luego $\exists \delta > 0$ tal que $B \subseteq \delta \bigcap_{m=1}^{m_o-1} U_m$. Así tenemos que:

$$B \subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta)\left[\bigcap_{m\geq m_o} (U \cap \lambda_m A_m) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{m_o-1} U_m\right)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta)\left[\bigcap_{m\geq m_o} (U \cap \lambda_m A_m) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{m_o-1} (U \cap \lambda_m A_m)\right)\right] .$$

Por lo tanto,

$$B \subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta)\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} (U \cap \lambda_m A_m)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \sup(\alpha, \mu, \delta)\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(U \cap \lambda_m A_m) + U_m}\right] =$$

$$= \sup(\alpha, \mu, \delta)\,\Theta$$. Concluimos entonces que Θ es un d-tonel bornívoro.

Dado que por hipótesis, E es un espacio d-infratonelado tenemos que $\Theta \in \mathcal{V}(0, \tau)$. La demostración de que $\frac{1}{3}\Theta \subseteq U$ es similar a la que aparece en el lema 1.1 y por tanto la omitiremos. Luego, $U \in \mathcal{V}(0, \tau)$ lo que prueba el lema 1 .

PROPOSICION 1. Sean (E, τ) un e.l.c. di y $\{E_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión creciente de subespacios vectoriales de E tales que $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Supongamos que $\forall\, B \subseteq E$ acotado, $\exists\, E_n$ tal que $B \subseteq E_n$. Entonces, E es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$

PRUEBA: $\forall\, n \geq 1$, sea (E_n, τ_n) el subespacio de E tal que $\tau_n = \tau/E_n$ y hagamos también $\tau_{n+1} = \tau/E_{n+1}$. Por un razonamiento similar al empleado en la demostración de la proposición 1.1 tenemos que $\tau_{n+1}/E_n = \tau_n$.

Sea entonces τ' la topología localmente convexa la más fina sobre E tal que $\forall\, n \geq 1$, la inyección canónica $j_n : E_n \hookrightarrow E$ es $\tau_n - \tau'$ continua. Por el teorema 1.1, τ' induce τ_n sobre E_n , $\forall\, n \geq 1$ y (E, τ') es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_{n\geq 1}$.

Vamos a probar que $\tau = \tau'$, con lo cual quedará demostrada la proposición 1.

Sea $U \in \mathcal{V}(0, \tau)$ disqueada. Entonces,

$\forall\, n \geq 1$, $j_n^{-1}(U) = U \cap E_n \in \tau_n$. Luego, cada j_n es $\tau_n - \tau$ continua y tenemos que $\tau \leq \tau'$

Recíprocamente, sea $U \in \mathcal{V}(0, \tau')$ disqueada y $\lambda_n = n$ $\forall\, n \geq 1$. Luego, $\lambda_n \nearrow \infty$ y además:

a) $U \cap \lambda_n E_n = U \cap E_n \in \mathcal{V}(0, \tau/E_n)$

b) $E_n \subseteq E_{n+1}$

c) E_n es un disco

d) $\forall\, B \subseteq E$ acotado, $\exists\, E_n$ tal que E_n absorbe B .

Dado que (E, τ) es un espacio di, por el lema 1 concluimos que $U \in \mathcal{V}(0, \tau)$ y luego $\tau' \leq \tau$. Por lo tanto, $\tau = \tau'$.

COROLARIO 1. Sea (E, τ) un espacio di y sea F un subespacio cerrado de E de codimensión contable tal que, $\forall\, B \subseteq E$ acotado se tiene que $\operatorname{cod}_{\langle F \cup B\rangle} F < \infty$. Entonces, F es también un espacio di.

Prueba: Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en E formando una base para un subespacio complementario de F en E. Hagamos $E_1 = F$, $E_n = \langle\{E_{n-1}, x_{n-1}\}\rangle$ $(n \geq 1)$. Es claro que $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, y además $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.

Sea $B \subseteq E$ acotado. Vamos a mostrar que $\exists\, k \geq 1$ tal que $B \subseteq E_k$.

En efecto, por hipótesis $\mathrm{cod}_{<F \cup B>} F = m \in \mathbb{N}$. Luego existen $b_1, \ldots, b_m$ vectores linealmente independientes de B tales que $b_i \notin F$, $\forall\, i = i, \ldots, m$ y $<F \cup B> = F \oplus <\{b_1, \ldots, b_m\}>$ Por otra parte, $b_i \in E_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Sea entonces $k = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$. Como la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$ es creciente, tenemos que $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq E_k$. Por lo tanto,

$$B \subseteq <F \cup B> \subseteq E_k .$$

Por la proposición 1, E es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}$ y luego, por un razonamiento similar al utilizado en la proposición 1.2 y teniendo en cuenta de que la propiedad de ser un espacio contablemente infratonelado se mantiene cuando pasamos al cociente, concluimos que F es un espacio contablemente infratonelado (o di).

Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. y sea E' su dual topológico. Designemos con E^+ al conjunto $\{ f: E \longrightarrow \mathbb{K} \,/\, f$ es lineal y secuencialmente continua $\}$. Notemos entonces que los elementos de E^+ están dados por hiperplanos secuencialmente cerrados de E.

LEMA 2. Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. tal que $E' = E^+$. Sea $F \trianglelefteq E$ secuencialmente cerrado tal que $\forall\, B \subseteq E$ acotado, F es de codimesión finita en $\langle F \cup B \rangle$. Entonces F es cerrado.

PRUEBA: Sea $\{ x_\alpha : \alpha \in A \}$ un conjunto de vectores de E los cuales son linealmente independientes y además, conjuntamente con F generan a E. Para cada $\alpha \in A$, definimos

$$H_\alpha = F \oplus \langle \{ x_\beta : \beta \in A , \beta \neq \alpha \} \rangle .$$

Es claro que H_α es un hiperplano en E. Sea $\{ a_n \}_{n \geq 1}$ una sucesión en H_α convergiendo a un elemento a_o de E. Luego, existen un número finito de vectores $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_m}$ (con $\beta_m \in A$) tales que

$$\{ a_n \}_{n \geq 1} \subseteq F + \langle \{ x_{\beta_1} , \ldots, x_{\beta_m} \} \rangle \subseteq H_\alpha .$$

Siendo $F + \langle \{ x_{\beta_1} , \ldots, x_{\beta_m} \} \rangle$ secuencialmente cerrado, $a_o \in H_\alpha$ lo que prueba que H_α es secuencialmente cerrado. Ahora, dado que por hipotesis $E' = E^+$, tenemos que H_α es un hiperplano cerrado de E.

Finalmente, en vista de que $F = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$, concluimos que F es cerrado.

COROLARIO 2. Sea (E, τ) un e.l.c. tal que $E' = E^+$. Sea F un subespacio vectorial de E tal que $\forall B \subseteq E$ disco cerrado y acotado, $F \cap B$ es cerrado y además F es de codimensión finita en $\langle F \cup B \rangle$. Entonces, F es cerrado.

PRUEBA: Mostremos en primer lugar que F es un subespacio secuencialmente cerrado.

Sea $\{ y_n \}_{n \geq 1}$ una sucesión en F convergiendo a un vector y de E. Sea $C = \overline{\Gamma(\{y_n\}_{n\geq 1} \cup \{y\})}$. Entonces, C es un disco cerrado y acotado de E y luego $F \cap C$ es cerrado por hipótesis. Dado que $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq F \cap C$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, se tiene que $y \in \overline{F \cap C} = F \cap C \subseteq F$. Por lo tanto, F es secuencialmente cerrado.

Sea $A \subseteq E$ acotado. Entonces, $\mathrm{cod}_{<F \cup A>} F < \infty$. En efecto, sabemos que

$$F \trianglelefteq <F \cup A> \trianglelefteq <F \cup \overline{\Gamma(A)}> .$$

Ahora, por hipótesis F es de codimensión finita en $<F \cup \overline{\Gamma(A)}>$ y luego con mayor razón en $<F \cup A>$. Se deduce del lema 2 que F es cerrado.

LEMA 3. (VALDIVIA). Sea $(E, \mathcal{T}_E)$ un e.l.c y sea $G \trianglelefteq E$ tal que $\mathrm{cod}_E G = 1$. Designemos con $\mathcal{T}_G$ la topología relativa de G, esto es, $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_E/G$, y sea U un disco cerrado y bornívoro en $(G, \mathcal{T}_E/G)$ tal que $\overline{U}^{\mathcal{T}_E}$ es absorbente en E. Entonces, $\overline{U}^{\mathcal{T}_E}$ es bornívoro en $(E, \mathcal{T}_E)$.

PRUEBA: Consideremos la colección $\mathcal{B} = \{B \subseteq E \,/\, B$ es un disco cerrado y acotado$\}$. $\forall B \in \mathcal{B}$, sea $E_B = <B>$ provisto de la gauge g_B, la cual es una norma. Sea también para cada $B \in \mathcal{B}$, $j_B : E_B \hookrightarrow E$ la inyección canónica y denotemos con $\mathcal{T}$ la topología final sobre E con respecto a la familia de aplicaciones j_B $(B \in \mathcal{B})$. Entonces,

1) $\mathcal{T}_E \leqslant \mathcal{T}$.

En efecto, sea $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_E)$ disqueada. Luego, $\forall B \in \mathcal{B}$ $\exists \alpha > 0 : B \subseteq \alpha W$, o sea que, $\exists \alpha > 0 : \frac{1}{\alpha} B \subseteq W$. Ahora, siendo $\frac{1}{\alpha} B \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{g_B})$ tenemos que $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{g_B})$. Por lo tanto, $j_B^{-1}(W) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{g_B})$, $\forall B \in \mathcal{B} \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$.

2) $(E, \mathcal{T})$ es bornológico puesto que cada espacio $(E_B, \mathcal{T}_{g_B})$ es bornológico (por ser normado) y $(E, \mathcal{T})$ es el límite inductivo de tales espacios.

3) $\mathcal{A}(\mathcal{T}_E) = \mathcal{A}(\mathcal{T})$.

En efecto, $\mathcal{T}_E \leqslant \mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}_E)$. Sea $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_E)$, entonces $B = \overline{\Gamma(A)}^{\mathcal{T}_E} \in \mathcal{B}$. Sea $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ disqueada. Luego, $E_B \cap V = j_B^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}_{g_B})$. Por lo tanto,

$$\exists \alpha > 0 : \alpha B \subseteq V \cap E_B \Rightarrow \exists \alpha > 0 : B \subseteq \frac{1}{\alpha} V \Longrightarrow B \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$$
$$\Longrightarrow A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}).$$

4) Siendo $(E, \mathcal{T})$ bornológico y G de codimensión finita en E, tenemos que el espacio $(G, \mathcal{T}/G)$ es también bornológico. (Ver [5], Teorema 3.5, Página 53).

5) $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}/G)$.

En efecto, $\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_E) \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}/G) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_E/G)$ pues los acotados en G para $\mathcal{T}/G$ y $\mathcal{T}_E/G$ son las trazas de los acotados de E. Luego, como U es por hipótesis un $\mathcal{T}_E/G$ bornívoro, U es también un $\mathcal{T}/G$ bornívoro y por tanto, $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}/G)$.

6) Consideremos los conjuntos $\overline{U}^{\tau_E}$ y $\overline{U}^{\tau}$. Siendo $\tau_E \leqslant \tau \Longrightarrow \overline{U}^{\tau} \subseteq \overline{U}^{\tau_E}$. Ahora,

i) Si $\overline{U}^{\tau}$ es absorbente, vamos a probar entonces que $\overline{U}^{\tau}$ es un elemento del filtro $\mathcal{V}(0, \tau)$.

En efecto, sea $B \in \mathcal{B}$. Ahora, $j_B^{-1}(\overline{U}^{\tau}) = \overline{U}^{\tau} \cap E_B$ y luego $\overline{U}^{\tau} \cap E_B$ absorbe a B. Para ver esto, sea $\{b_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión contenida en B. Entonces, como $\operatorname{cod}_E G = 1$, tenemos que $E = G \oplus \mathbb{K}x_o$, donde $x_o \notin G$ y $b_n = g_n + \lambda x_o$ con $g_n \in G$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$, $\forall n \geq 1$.

Dado que la suma directa $G \oplus \mathbb{K}x_o$ es topológica (por ser $\operatorname{cod}_E G = 1$) , las proyecciones

$$p_1 : E \longrightarrow G \quad \text{y} \quad p_2 : E \longrightarrow \mathbb{K}x_o$$

son ambas continuas. Luego, $p_1(\{b_n\}_{n \geq 1}) = \{g_n\}_{n \geq 1}$ es acotado en (G, τ_E/G) y U absorbe la sucesión $\{g_n\}$, o sea que $\exists \alpha > 0 : g_n \in \alpha U$, $\forall n \geq 1 \Longrightarrow g_n \in \alpha \overline{U}^{\tau}$, $\forall n \geq 1$.

Por otra parte, $p_2(\{b_n\}_{n \geq 1}) = \{\lambda_n x_o\}_{n \geq 1}$ es acotado en $\mathbb{K}x_o$, luego, $\exists \mu > 0 : |\lambda_n| \leq \mu$, $\forall n \geq 1$.

Siendo $\overline{U}^{\tau}$ absorbente, $\exists \beta > 0$ tal que $\mu x_o \in \beta \overline{U}^{\tau}$.

Pero entonces, $\forall n \geq 1$

$$\lambda_n x_o = \frac{\lambda_n}{\mu} \mu x_o \in \frac{\lambda_n}{\mu} \beta \overline{U}^{\tau} \subseteq \beta \overline{U}^{\tau}$$

luego, $\lambda_n x_o \in \beta \overline{U}^{\tau}$, $\forall n \geq 1$. Así tenemos que :

$$b_n = g_n + \lambda_n x_o \in \alpha \overline{U}^{\tau} + \beta \overline{U}^{\tau} = (\alpha + \beta) \overline{U}^{\tau}$$

para cada $n \geq 1$. Es decir,

$$\{b_n\}_{n \geq 1} \subseteq (\alpha + \beta)\, \overline{U}^{\tau} \quad .$$

Vemos entonces que toda sucesión $\{b_n\}$ contenida en B es absorbida por $\overline{U}^{\tau}$. Luego $\overline{U}^{\tau}$ absorbe a B, y por tanto, $\exists\, \delta > 0$: $\delta B \subseteq \overline{U}^{\tau} \cap E_B$. Como $\delta B \in \mathcal{V}(0, \tau g_B)$ tenemos que $\overline{U}^{\tau} \in \mathcal{V}(0, \tau)$.

El resultado anterior nos indica que $\overline{U}^{\tau}$ es un conjunto τ - bornívoro y luego también un τ_E - bornívoro (pues $\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(\tau_E)$). Finalmente, dado que $\overline{U}^{\tau_E} \supseteq \overline{U}^{\tau}$ concluimos que $\overline{U}^{\tau_E}$ es un conjunto τ_E- bornívoro.

ii) Supongamos ahora que $\overline{U}^{\tau}$ no es absorbente. Sea x_o un elemento de $\overline{U}^{\tau_E}$ con $x_o \in E \setminus G$ y sea $C = \Gamma(x_o)$. Entonces, $U + C \in \mathcal{V}(0, \tau)$.

En efecto, sean $B \in \mathcal{B}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1} \subseteq B$, donde $\forall\, n \geq 1$ $b_n = g_n + \lambda_n x_o$. Como $E = G \oplus \mathbb{K}x_o$ y las proyecciones p_1 y p_2 son continuas (ver caso (i)), la sucesión $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es acotada en G y también la sucesión $\{\lambda_n x_o\}$ es acotada en $\mathbb{K}x_o$.

Ahora, U absorbe $\{g_n\}_{n \geq 1}$, es decir, $\exists\, \alpha > 0$ tal que $\{g_n\}_{n \geq 1} \subseteq \alpha U$. También, C absorbe la sucesión $\{\lambda_n x_o\}_{n \geq 1}$ y luego $\exists\, \mu > 0$: $|\lambda_n| \leq \mu$, $\forall\, n \geq 1$. Por otra parte, $x_o \in C$ $\Longrightarrow \lambda_n x_o \in \lambda_n C \subseteq \mu C$, $\forall\, n \geq 1$. Así tenemos que:

$$\{\lambda_n x_o\}_{n\geq 1} \subseteq \mu C \Longrightarrow \{b_n\}_{n\geq 1} \subseteq \alpha U + \mu C \subseteq$$

$\subseteq \sup(\alpha, \mu)(U + C)$. Por lo tanto, $U + C$ absorbe B y entonces $U + C \in \mathcal{V}(0, \tau)$. En esta forma tenemos que $U + C$ es un conjunto τ- bornívoro y luego un τ_E - bornívoro.

Ahora, dado que $\overline{U}^{\tau_E} \supseteq U \Longrightarrow \overline{U}^{\tau_E} \supseteq C$ (puesto que $x_o \in \overline{U}^{\tau_E}$).Entonces,

$$U + C \subseteq \overline{U}^{\tau_E} + \overline{U}^{\tau_E} = 2\,\overline{U}^{\tau_E}.$$

De esto se sigue que $2\,\overline{U}^{\tau_E}$ es un conjunto τ_E - bornívoro y luego $\overline{U}^{\tau_E}$ es también τ_E -bornívoro. Esto completa la demostración del lema 3.

PROPOSICION 2 . Sea (E, τ) un e.l.c di tal que $E' = E^+$. Si F es un subespacio de E tal que $\overline{F}$ es de codimensión contable en E y además F es de codimensión finita en $\langle F \cup B \rangle$ para toda parte acotada B de E, entonces F es d-infratonelado.

PRUEBA: Consideremos los casos siguientes:

CASO 1. F cerrado en E. Dado que $\operatorname{cod}_E \overline{F} = \operatorname{cod}_E F$ = contable, la conclusión de la proposición 2 es inmediata del corolario 1.

CASO 2. F denso en E. Sea $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ un d-tonel bornívoro en F. Entonces $\overline{U}^{E} \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \overline{U_n}^{E}$. Sea $G = \langle \overline{U}^{E} \rangle$. Mostraremos que:

a) $\overline{U}^{E}$ es bornívoro en G.

b) $G = E$.

En efecto,

a) Sea $B \subseteq G$ acotado. Es claro que $F \subseteq G$. Siendo B acotado en G, tenemos que B es acotado en E y luego por hipótesis, $\operatorname{cod}_{\langle F \cup B\rangle} F < \infty \Longrightarrow \exists M \triangle \langle F \cup B\rangle \triangle G$, en donde $\dim M < \infty$ y además $B \subseteq \langle F \cup B \rangle = F + M \triangle G$. Por lo tanto, existe un subespacio $L = F + M \triangle G$ tal que $B \subseteq L \subseteq G$.

Ahora, $\overline{U}^{L} = \overline{U}^{E} \cap L$, $\operatorname{cod}_L F < \infty$ y $U \subseteq F$ es bornívoro en F. Entonces, $\overline{U}^{L}$ es absorbente en L puesto que $\overline{U}^{E}$ es absorbente en $G = \langle \overline{U}^{E} \rangle \supseteq L$. Luego por el lema 3, el conjunto $\overline{U}^{L}$ es bornívoro en L.

Siendo $B \subseteq L$ un conjunto acotado en L, $\overline{U}^{L}$ absorbe a B y por tanto, $\overline{U}^{E}$ también absorbe a B.

b) Dado que $F \subseteq G$ y F es denso en E, será suficiente con probar que G es un conjunto cerrado.

Sea $B \subseteq E$ un disco cerrado y acotado. Siendo $\overline{U}^{E}$ bornívoro en $G = \langle \overline{U}^{E} \rangle$, $\exists \lambda > 0 : B \cap G \subseteq \lambda \overline{U}^{E}$. Ahora,

$$\begin{aligned} B \cap G &= B \cap G \cap \lambda \overline{U}^{E} \\ &= (B \cap \lambda \overline{U}^{E}) \cap G \\ &= (B \cap \lambda \overline{U}^{E}) \cap (B \cap G). \end{aligned}$$

Como $B \cap \lambda \overline{U}^{E}$ es cerrado en $\lambda \overline{U}^{E}$, tenemos que

$B \cap G$ es cerrado en $\lambda \overline{U}^{E}$ y luego es también cerrado en E. Por el corolario 2 concluimos que G es cerrado en E.

Sea $V = \bigcap_{n \geq 1} \overline{U_n}^{E}$. Siendo F denso en E y $\overline{U}^{E} \subseteq V$, resulta entonces que V es un d-tonel bornívoro de E y por tanto $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$ (puesto que E es un espacio di).

Por último, dado que:

$$V \cap F = (\bigcap_{n\geq 1} \overline{U_n}^{E}) \cap F = \bigcap_{n \geq 1} (\overline{U_n}^{E} \cap F)$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} U_n = U$$

tenemos $U \in \mathcal{V}(0, \tau_F)$ lo cual prueba que F es un espacio d-infratonelado.

CONCLUSION

Con la introducción de los espacios d-tonelados,d-infratonelados y d-Mackey se generalizan las nociones clásicas de espacios tonelados, infratonelados y de Mackey respectivamente, enriqueciendo en esta forma la clase de los espacios localmente convexos.

Al analizar las propiedades de permanencia de estos nuevos espacios y las relaciones que se establecen entre ellos, observamos que mantienen relaciones de los espacios que se generalizan. Por ejemplo,

1- Los productos, sumas directas y límites inductivos de familias arbitrarias de espacios dt, di y dM respectivamente, continuan siendo espacios de la misma clase.

2- Los completamientos de espacios dt y dM son espacios dt y dM respectivamente. Por otra parte, el completamiento de un espacio di resulta ser un espacio dt, situación que ocurre también con los espacios tonelados e infratonelados.

3- Los cocientes por subespacios cerrados de espacios dt, di y dM mantienen esa propiedad.

4- Hemos mostrado que un subespacio cerrado de un d-tonelado (resp. d-infratonelado) no es necesariamente un espacio dt (resp. di). Una situación similar se da con los espacios tonelados e infratonelados.

5- Para una sucesión creciente $\{E_n\}_{n \geqslant 1}$ de subespacios de un espacio d-tonelado E y tal que $E = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$, se tiene que E es el límite inductivo estricto de la sucesión . Un resultado análogo ocurre para los espacios tonelados.

Algunos teoremas fundamentales del Análisis Funcional se demuestran también para estos nuevos espacios localmente convexos. Así por ejemplo,

6- El teorema de Banach-Steinhaus, el cual se prueba en los espacios tonelados, también lo demostramos para los espacios d-tonelados.

7- Sea E un espacio d-tonelado. Entonces, su dual topológico E' provisto de la topología débil $\sigma(E', E)$ es un espacio semicompleto. Este resultado es válido también en los espacios tonelados.

8- Sea $(E, \mathcal{T})$ un e.l.c. casi-completo. Entonces,

$$(E, \mathcal{T})dt \Longleftrightarrow (E, \mathcal{T})di.$$

Un teorema similar se demuestra para los espacios tonelados e infratonelados.

No es nuestra intención destacar aquí todas las analogías que se verifican entre los espacios tonelados, infratonelados y de Mackey y sus respectivas generalizaciones, es decir, los espacios d-tonelados, d-infratonelados y d-Mackey.

Sin embargo, conviene señalar que en este trabajo quedan aún por resolverse varias cuestiones de interés, algunas de las cuales mencionaremos a continuación.

¿ Será un subespacio cerrado de un espacio dM un espacio dM?

Si la pregunta anterior no tuviera una respuesta afirmativa, entonces, ¿serán los subespacios de codimensión finita o numerable de espacios dM, también espacios dM ?

Sean E un e.l.c y E´su dual topológico. Se dice que

a) E posee la propiedad (C) si toda parte $\sigma(E',E)$ acotada de E´ es $\sigma(E',E)$ relativamente contablemente compacta.

b) E tiene la propiedad (S) si E´ es $\sigma(E',E)$ secuencialmente completo.

M. Levin y S. Saxon [16] , mostraron que si M es un subespacio de codimensión numerable de un espacio de Mackey E, entonces cualesquiera de las dos condiciones siguientes I o II son suficientes para que M provisto de la topología inducida sea un espacio de Mackey.

I) M es cerrado en E y E tiene la propiedad (S)

II) M es separable, es denso en E y E tiene la propiedad (C).

¿ Podrá demostrarse un teorema similar para los espacios dM ?'

Hemos visto que el teorema de Banach-Steinhaus continua siendo válido en los espacios d-tonelados. ¿ Podrá demostrarse el teorema de Banach-Steinhaus para los espacios d-infratonelados y d-Mackey ?

¿ El dual topológico E' de un espacio E di (o dM) provisto de la topología $\sigma(E', E)$ será semi-completo ?

Sea X un espacio localmente convexo y designemos por C(X) al espacio de todas las aplicaciones continuas sobre X y con valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, provisto de la topología compacta-abierta. Es bien sabido que C(X) es un espacio localmente convexo Hausdorff.

Con respecto al espacio C(X) nos planteamos las siguientes cuestiones:

a) ¿ C(X) es dM $\Longleftrightarrow$ X es dM ?

b) ¿ C(X) es di $\Longleftrightarrow$ X es di ?

Es probable que las soluciones de los problemas que aquí exponemos sean muy fáciles o resulten ser sumamente difíciles. Sin embargo, consideramos que constituyen un reto al que esperamos hacerle frente en un futuro no muy lejano y, para el cual queremos invitar a todos a que nos acompañen en las investigaciones de estos problemas que, sin duda alguna, serán de beneficio para la comunidad matemática de nuestro país y del Universo entero.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N., Elements de Mathematiques. Livre V. Espaces Vectoriels Topologiques. Actualités Scientifiques et Industrielles. Hermann, Paris, 1953.

[2] DE WILDE, M. HOUET, C. "On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces". Math Ann. 192 (1971).

[3] GROTHENDIECK, ALEXANDRE "Sur les Espaces (F) et (DF)". Summa Brasil Math, 3 (1954).

[4] HORVATH, JOHN Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. I. Addison-Wesley. Reading, Mass. 1966.

[5] HORVATH, JOHN "Locally convex spaces". Lectures notes in Math. 331. Summer School on Topol. Vector Spaces. Springer-Verlog.

[6] HUSAIN, TAQDIR "Two new classes of locally convex spaces" Math Ann. 166 (1966).

[7] HUSAIN, TAQDIR Topology and Maps. Plenum Press, New York and London, 1977.

[8] IYAHEN, S.O., "Some remarks on countably barrelled and countably quasibarrelled spaces". Proc. Edinburgh Math. Soc. (Series II), 15 (1967).

[9] KELLEY, JOHN, NAMIOKA, ISAAC AND CO-AUTHORS, Linear Topological Spaces. Springer-Verlag. New York, 1963.

[10] KOMURA, Y., "On linear topological spaces". Kumamoto J. Sci. Sev. A5 (1962).

[11] KREYSZIG, ERWIN, Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons Inc. New York, 1978.

[12] ROBERTSON, A.P. ROBERTSON, W.J., Topological Vector Spaces. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1964.

[13] ROJO, JORGE, Apuntes de Análisis Funcional. Universidad de Panamá. División de Investigaciones y Post-Grado. 1981.

[14] ROJO, JORGE, "Notions de tonnelage et propriétés héréditaires". Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T.90.IV (1976).

[15] RUDIN, WALTER, Functional Analysis. Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd. New Delhi, 1974.

[16] SAXON, S. LEVIN, M. "A note on the inheritance of properties of locally convex spaces by subspaces of countable co-dimension". Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 29. (1971).

[17] SCHAEFER, HELMUT H. Topological vector spaces. Springer-Verlag, New York, 1970.

[18] TAYLOR, A.E. Introduction to Functional Analysis. New York, 1958.

[19] VALDIVIA, MANUEL, "On DF Spaces". Math. Ann. 191 (1971).

[20] WEBB, J.H., "Countable-Codimensional subspaces of locally convex spaces". Proc. Edinburgh Math. Soc., 18 (1973).