

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA



SOBRE INDICES PARA RETICULADOS DE BANACH

POR

Teresita González de Avila

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización
en Matemática

22 ABR. 1986

TH

espacho del Vicerrector

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Obs. del autor

216380

Director de Tesis

[Signature]
Dr. JORGE ROJO

Miembro del Jurado

[Signature]
Dr. CARLOS SANCHEZ

Miembro del Jurado

[Signature]
Dr. ROGELIO ROSAS

Fecha

12 de marzo de 1986

Dedicado a mi esposo e hijos.

Quiero expresar mi más profunda gratitud a mi director de tesis: el Dr. Jorge Rojo, quien a pesar de todas mis debilidades me alentaba a proseguir hasta encontrarme ahora en esta etapa final del Programa de Maestría.

Agradezco muy especialmente al Profesor José Fernández por su valiosa colaboración en la escritura de toda la simbología de este trabajo.

Deseo también agradecer al Profesor Rogelio Rosas por su siempre efectiva ayuda académica.

CONTENIDO

Introducción	vi
CAPITULO I:	
Espacios de Riesz. Generalidades	1
CAPITULO II:	
Espacios de Riesz Normados	12
CAPITULO III:	
Operadores Lineales Orden Acotados	24
CAPITULO IV:	
Funcionales Lineales sobre Espacios de Riesz	38
CAPITULO V:	
Indices para Reticulados de Banach	51
Conclusiones	74
Bibliografía	77

INTRODUCCION

Los índices para Reticulados de Banach fueron definidos por P. Dodds [2] en 1977, inspirado en la teoría de índices para Espacios de Funciones Banach desarrollada por J. J. Grobler [4] en 1975.

Nuestro objetivo fundamental es el estudio de estos índices tal como los presentó Dodds.

Empezamos nuestro estudio con los Espacios de Riesz Normados o Reticulados de Banach, prestando especial atención a las condiciones necesarias y suficientes para continuidad de la norma con respecto al orden, resultados que presentamos en el Capítulo II.

Para facilitar la escritura, denotamos con "p" la norma de Riesz y con " L_p " los reticulados normados.

Para cumplir nuestro objetivo, es de suma importancia el estudio de los operadores lineales sobre un Espacio de Riesz. Interesados más que nada en aquellos operadores que constituyen en conjunto un Espacio de Riesz, dirigimos nuestra atención al espacio de los operadores lineales orden acotados sobre un espacio de Riesz L que toman valores en un espacio de Riesz Dedekind completo M . Este conjunto lo denotamos con $\mathcal{L}_b(L, M)$ y constituye un espacio de Riesz Dedekind completo. Este resultado y otros se encuentran demostrados en el Capítulo III, y nos permiten describir lo que sucede en el espacio de las funcionales lineales orden acotadas sobre un espacio de Riesz,

tema que se desarrolla en el Capítulo IV. Además, se definen aquí los espacios norma dual y norma bidual de un espacio de Riesz Normado, y se concluye que éstos constituyen reticulados de Banach Dedekind completos.

En el Capítulo V presentamos los índices para Reticulados de Banach como fueron definidos por Dodds [2]. Nuestra exposición sigue los lineamientos descritos por W. K. Vietsh en su tesis doctoral [8], y abarca la mayoría de las propiedades de estos índices. Concluimos con los espacios L_q -abstractos, los espacios M -abstractos y algunos casos particulares de éstos, como ejemplos para establecer sus índices.

El Capítulo I es de carácter preliminar, en el que hemos resumido las definiciones y propiedades de los espacios de Riesz que se utilizan en el desarrollo del trabajo. Fundamentalmente adoptaremos la notación utilizada en [8], y la mayoría de sus resultados pueden encontrarse en [1] y [6].

La teoría de los índices tiene gran incidencia en el estudio de los operadores compactos. Después de finalizado este trabajo, estamos en la disposición de continuar nuestras investigaciones en el tema antes mencionado.

CAPITULO I
ESPACIOS DE RIESZ. GENERALIDADES.

DEFINICIÓN I.1: (Espacio de Riesz)

Un espacio vectorial real ordenado (L, \leq) es llamado Espacio de Riesz o Reticulado Vectorial si para todo par (f, g) de elementos de L , el supremo $\sup(f, g)$ con respecto al orden parcial, es un elemento de L .

Notación: $\sup(f, g) =: f \vee g$
 $\inf(f, g) =: f \wedge g$

En adelante consideraremos a L como un espacio de Riesz.

DEFINICIÓN I.2: (Conjunto Orden Acotado)

Sean f, g elementos de L tales que $f \leq g$. Entonces el conjunto:

$$[f, g] = \{ h \in L: f \leq h \leq g \}$$

es llamado intervalo respecto al orden, que en adelante llamaremos simplemente intervalo.

Un subconjunto A de L se dice Orden Acotado si A está contenido en algún intervalo de L .

DEFINICIÓN I.3: (Elemento Positivo y Cono Positivo)

Un elemento f de L se dice Positivo si $f \geq 0$. Denotaremos por L^+ el conjunto de todos los elementos positivos de L , y lo llamaremos el Cono Positivo de L .

DEFINICIÓN I.4: (Parte Positiva, Parte Negativa y Módulo)

Sea f un elemento de L . Llamaremos la Parte Positiva de f al elemento $f \vee 0$ de L ; la Parte Negativa de f al elemento $(-f) \vee 0$ de L ; y Módulo de f al elemento $f \vee (-f)$ de L .

Notación: $f^+ =: f \vee 0$
 $f^- =: (-f) \vee 0$
 $|f| =: f \vee (-f)$

En el siguiente teorema enunciaremos algunas de las identidades y desigualdades más utilizadas en los Espacios de Riesz.

TEOREMA I.4: Sean f, g, h elementos de L . Entonces:

- a) $(f \vee g) + h = (f + h) \vee (g + h)$
- b) $(f \wedge g) + h = (f + h) \wedge (g + h)$
- c) $-(f \wedge g) = (-f) \vee (-g)$
- d) $kf \vee kg = k(f \vee g)$ para k en \mathbb{R}^+
- e) $kf \wedge kg = k(f \wedge g)$ para k en \mathbb{R}^+
- f) $f + g = (f \vee g) + (f \wedge g)$
- g) $|f - g| = (f \vee g) - (f \wedge g)$
- h) $|(f \vee h) - (g \vee h)| \leq |f - g|$
- i) $|(f \wedge h) - (g \wedge h)| \leq |f - g|$

- j) $||f| - |g|| \leq |f \pm g| \leq |f| + |g|$
 k) $f \wedge (g + h) \leq (f \wedge g) + (f \wedge h)$ para f, g, h en L^+
 l) $|f| \leq |f + g| + (|f| \wedge |g|)$.

DEFINICION I.6: (Elementos Disjuntos y Complemento Disjunto)

Dos elementos f, g de L se dicen Disjuntos si $|f| \wedge |g| = 0$, propiedad que denotaremos: $f \perp g$.

Una sucesión $\{f_n: n \geq 1\}$ en L se dice disjunta si para todo $m \neq n$ se tiene $f_m \perp f_n$.

El Complemento Disjunto de un subconjunto no vacío A de L es el conjunto:

$$A^d = \{f \in L: f \perp g \text{ para todo } g \in A\}.$$

TEOREMA I.7: (Propiedad de la Descomposición Dominada)

Sea u en L tal que $0 \leq u \leq \sum_{i=1}^n v_i$ con v_i en L^+ para $i=1, \dots, n$; entonces existe u_i en L^+ para $i=1, \dots, n$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{y} \quad u_i \leq v_i \quad \text{para todo } i=1, \dots, n.$$

TEOREMA I.8: (Propiedad de la Interpolación de Riesz)

Sean u_i, v_j en L^+ para $i=1, \dots, n$ y $j=1, \dots, m$ tales que

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^m v_j.$$

Entonces existe una doble sucesión finita $\{w_{ij}: i=1, \dots, n \text{ y } j=1, \dots, m\}$ en L^+ tales que

$$u_i = \sum_{j=1}^m w_{ij} \quad \text{para } i=1, \dots, n$$

$$v_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} \quad \text{para } j=1, \dots, m.$$

DEFINICION I.9: (Homomorfismo de Riesz y Aplicación Lineal Positiva) Sean L, M dos espacios de Riesz. La aplicación lineal T de L en M es llamada Homomorfismo de Riesz si

$$T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg \quad \text{para todo } f, g \text{ en } L.$$

La aplicación lineal T de L en M se dice Positiva si $Tu \geq 0$ en M para todo u en L^+ .

Claramente todo homomorfismo de Riesz es positivo.

DEFINICION I.10: (Sucesión Creciente y Sucesión Decreciente)

La sucesión $\{f_n: n=1, 2, \dots\}$ en L se dice Creciente si $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ y se denota $f_n \uparrow$, y Decreciente si $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ que denotaremos $f_n \downarrow$.

Si la sucesión $f_n \uparrow$ tiene supremo f en L , escribiremos $f_n \uparrow f$. Análogamente, si $f_n \downarrow$ tiene infimo f en L , escribiremos $f_n \downarrow f$.

DEFINICION I.11: (Red Dirigida a la Derecha y Red Dirigida a

la Izquierda) La red $\{f_t: t \in \{t\}\}$ de L se dice Dirigida a la Derecha si para cada par de índices t_1, t_2 existe un índice t_3 tal que $f_{t_1} \vee f_{t_2} \leq f_{t_3}$ (y se denota $f_t \uparrow$), y Dirigida a la Izquierda si para cada par de índices t_1 y t_2 existe un índice t_3 tal que $f_{t_3} \leq f_{t_1} \wedge f_{t_2}$ (y se denota $f_t \downarrow$).

Si la red $f_t \uparrow$ tiene supremo f en L escribiremos $f_t \uparrow f$. Análogamente, si $f_t \downarrow$ tiene infimo f en L escribiremos $f_t \downarrow f$.

DEFINICION I.12: (Espacio de Riesz Arquimediano)

El espacio de Riesz L es llamado Arquimediano si para todo elemento u en L^+ y para todo natural n se tiene:

$$nu \leq 0 \implies u = 0.$$

DEFINICION I.13: (Sucesión Orden Convergente)

La sucesión $\{f_n: n=1,2,\dots\}$ en L se dice Orden Convergente a f en L (y se denota $f_n \rightarrow f$), si existe una sucesión $u_n \downarrow 0$ en L tal que $|f - f_n| \leq u_n$ para todo natural n .

DEFINICION I.14: (Subespacio de Riesz)

El subespacio lineal L_1 de L se llama Subespacio de Riesz de L si para todo par de elementos f, g en L_1 se tiene que $f \vee g$ pertenece a L_1 .

DEFINICION I.15: (Ideal)

El subespacio lineal I de L se dice que es un Ideal en L si para todo elemento f de L y para todo elemento g de I que verifiquen $|f| \leq |g|$ se tiene que f pertenece a I .

DEFINICION I.16: (Banda)

El ideal K en L se dice que es una Banda en L si para todo subconjunto A de K con supremo en L , se tiene que $\sup A$ pertenece a K .

En el siguiente teorema se da una caracterización de banda, muy útil para trabajar con redes.

TEOREMA I.17: Un ideal K en L es una banda si y solo si para toda red $0 \leq f_t \uparrow f$ en L con f_t elemento de K para todo t , se tiene que f pertenece a K .

DEFINICION I.18: (Ideal y Banda Generados por un Subconjunto)

Si D es un subconjunto no vacío de L , denotaremos por I_D el menor ideal que contiene a D . El ideal I_D recibe el nombre de Ideal Generado por D . Si D es un subconjunto de L con un único elemento f , entonces I_D recibe el nombre de Ideal Principal Generado por f .

Análogamente, denotaremos por K_D la menor banda que contiene a D que llamaremos Banda Generada por D . Y si $D = \{f\}$ entonces K_D recibe el nombre de Banda Principal Generada por f .

Ejemplo: Se prueba fácilmente que $K_{I_D} = K_D$ para todo subconjunto no vacío D en L .

DEFINICION I.19: (Orden Base y Orden Base Disjunta)

El conjunto $D = \{f_t : t \in \{t\}\}$ se dice que es una Orden Base de L si $K_D = L$.

Una orden base $\{f_t : t \in \{t\}\}$ de L se dice que es una Orden Base Disjunta si todos sus elementos f_t son mutuamente disjuntos.

DEFINICION I.20: (Sistema Disjunto Maximal)

Una orden base disjunta de L , $\{f_t : t \in \{t\}\}$, recibe el nombre de Sistema Disjunto Maximal de L si verifica la siguien-

te propiedad: $f \perp f_t \quad \forall t \in \{t\} \implies f = 0.$

TEOREMA I.21: Todo espacio de Riesz L que contiene por lo menos un elemento no nulo, tiene un sistema disjunto maximal.

DEFINICION I.22: (Banda de Proyección)

La banda K en L recibe el nombre de Banda de Proyección si L es suma directa de K y K^d .

DEFINICION I.23: (Propiedad de Proyección y Propiedad de Proyección Principal) El espacio de Riesz L se dice que tiene la Propiedad de Proyección si toda banda en L es banda de proyección. Y se dice que L tiene la Propiedad de Proyección Principal si toda banda principal en L es una banda de proyección.

Observación: Dada una banda de proyección K en L , cada elemento f en L puede ser escrito de una única manera como $f = f_1 + f_2$ con f_1 en K y f_2 en K^d . Los elementos f_1 y f_2 reciben el nombre de componentes de f en K y K^d respectivamente.

TEOREMA I.24: La banda K en L es una banda de proyección si y solo si para cada elemento u de L^+ se tiene que

$$u_1 = \sup\{v: v \in K, 0 \leq v \leq u\}$$

$$u_2 = \sup\{w: w \in K^d, 0 \leq w \leq u\}$$

existen y son las componentes de u en K y K^d respectivamente.

DEFINICION I.25: (Orden Proyección)

Sea K una banda de proyección. Definiremos la aplicación $P_K : L \rightarrow K$ por $P_K f = f_1$ para todo elemento f de L , donde f_1 es la componente de f en K .

La aplicación lineal P_K recibe el nombre de Orden Proyección de L sobre K .

Se tienen entonces para P_K las siguientes propiedades:

- a) $P_K \circ P_K = P_K$
- b) $0 \leq P_K u \leq u$ para todo u en L^+
- c) $P_K/K = \text{Id}$ (aplicación identidad)
- d) $P_{\{0\}} = \theta$ (aplicación nula).

Revisemos ahora una clasificación de los espacios de Riesz en relación a la existencia del supremo de distintos tipos de conjuntos.

DEFINICION I.26: (Espacio Dedekind Completo)

El espacio de Riesz L se dice que es Dedekind Completo si todo subconjunto no vacío de L acotado superiormente tiene supremo, o equivalentemente, si toda red dirigida a la derecha y orden acotada de L tiene supremo.

DEFINICION I.27: (Espacio Dedekind σ -completo)

El espacio de Riesz L se dice que es Dedekind σ -completo si todo subconjunto no vacío y contable de L acotado superiormente tiene supremo, o equivalentemente, si toda sucesión creciente y orden acotada de L tiene supremo.

DEFINICION I.28: (Espacio Orden Separable)

El espacio de Riesz L se dice que es Orden Separable si todo subconjunto no vacío de L que posea supremo, contiene por lo menos un subconjunto contable con el mismo supremo.

DEFINICION I.29: (Espacio Super Dedekind Completo)

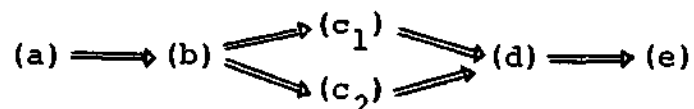
El espacio de Riesz L se dice que es Super Dedekind Completo si es Dedekind Completo y Orden Separable.

Teniendo en cuenta todas estas definiciones se tiene la siguiente cadena de implicaciones (cuya demostración no presentaremos por no ser parte de nuestro objetivo).

TEOREMA I.30: Sea L un espacio de Riesz. Dadas las condiciones:

- (a) L es Super Dedekind Completo
- (b) L es Dedekind Completo
- (c₁) L es Dedekind σ -completo
- (c₂) L tiene la propiedad de proyección
- (d) L tiene la propiedad de proyección principal
- (e) L es Arquimediano

se tienen las siguientes implicaciones:



DEFINICION I.31: (Límite Superior y Límite Inferior de una Sucesión en un Espacio de Riesz) Sea $\{f_n\}$ una sucesión en el es-

espacio de Riesz L , tal que $g_n = \sup\{f_k: k \geq n\}$ existe para todo natural n . Obviamente $g_n \downarrow$, y en el caso que $\text{Inf } g_n$ exista se definirá éste como el Límite Superior de $\{f_n\}$ y se denotará:

$$\text{Inf } g_n = \lim \sup f_n.$$

Análogamente, si $\{f_n\}$ es una sucesión en el espacio de Riesz L tal que $h_n = \inf\{f_k: k \geq n\}$ existe para todo natural n , se tiene $h_n \uparrow$. Y en el caso en que $\text{Sup } h_n$ exista se definirá éste como el Límite Inferior de $\{f_n\}$, y se denotará:

$$\text{Sup } h_n = \lim \inf f_n.$$

TEOREMA I.32: Sea L un espacio de Riesz Dedekind σ -completo y $\{f_n\}$ una sucesión orden acotada en L . Entonces $\lim \sup f_n$ y $\lim \inf f_n$ existen en L .

DEMOSTRACION:

Siendo $\{f_n\}$ orden acotada, $\{g_n\}$ también lo es. (Donde $\{g_n\}$ es la sucesión definida anteriormente). Así, $\{g_n\}$ es una sucesión decreciente y orden acotada en un espacio de Riesz Dedekind σ -completo. Entonces existe el infimo de $\{g_n\}$, es decir, existe $\lim \sup f_n$.

Análogamente, $\{h_n\}$ es una sucesión creciente y orden acotada en un espacio de Riesz Dedekind σ -completo. Luego existe el supremo de $\{h_n\}$, es decir, existe $\lim \inf f_n$.

TEOREMA I.33: Sea L un espacio de Riesz y f_n una sucesión en L . Si existe f en L tal que $f = \lim \sup f_n = \lim \inf f_n$, entonces $f_n \rightarrow f$.

DEMOSTRACION:

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores para $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$ se tiene que

$$h_n \uparrow f \implies 0 \leq f - h_n \downarrow 0$$

$$g_n \downarrow f \implies 0 \leq g_n - f \downarrow 0.$$

Por otro lado, para todo natural n se tiene:

$$f_n \leq g_n \implies (f - f_n)^- = (f_n - f)^+ \leq g_n - f$$

$$h_n \leq f_n \implies (f - f_n)^+ \leq f - h_n.$$

Así,

$$|f - f_n| = (f - f_n)^+ + (f - f_n)^- \leq (f - h_n) + (g_n - f) \downarrow 0.$$

Lo que demuestra que $f_n \rightarrow f$.

TEOREMA I.34: Recíprocamente al teorema anterior, si el espacio de Riesz L es Dedekind σ -completo y $\{f_n\}$ es una sucesión en L tal que $f_n \rightarrow f$ entonces $f = \limsup f_n = \liminf f_n$.

DEMOSTRACION:

Como $f_n \rightarrow f$, existe una sucesión $\{u_n\}$ contenida en L tal que $u_n \downarrow 0$ y $|f - f_n| \leq u_n \leq u_1$ para todo natural n . De donde $f - u_1 \leq f_n \leq f + u_1$.

Así, $\{f_n\}$ es una sucesión orden acotada en un espacio Dedekind σ -completo, y por teorema I.32 se tiene que $\limsup f_n$ y $\liminf f_n$ existen en L .

Además, notemos que:

$$h_n \leq g_n \leq u_n + f \downarrow f$$

$$g_n \geq h_n \geq f - u_n \uparrow f.$$

De donde se obtiene: $g_n \downarrow f$ y $h_n \uparrow f$.

Por lo tanto, $f = \limsup f_n = \liminf f_n$.

CAPITULO II
ESPACIOS DE RIESZ NORMADOS

DEFINICION II.1: (Norma de Riesz y Espacio de Riesz Normado)

Si p es una norma sobre el espacio de Riesz L tal que $p(f) \leq p(g)$ siempre que $|f| \leq |g|$, entonces p es llamada una Norma de Riesz sobre L .

El espacio de Riesz L , provisto de una norma de Riesz p es llamado Espacio de Riesz Normado y lo denotaremos por L_p .

DEFINICION II.2: (Reticulado de Banach)

El espacio de Riesz normado L_p es llamado un Reticulado de Banach si L_p es norma completo; esto es, si toda sucesión norma Cauchy en L_p tiene norma límite.

TEOREMA II.3: Sea L_p un espacio de Riesz normado. Entonces para todo elemento f en L_p , se tiene: $p(f) = p(|f|)$.

DEMOSTRACION: Inmediata. Se deduce de: $|f| = ||f||$.

TEOREMA II.4: Todo espacio de Riesz normado es Arquimediano.

DEMOSTRACION:

Sean x, y en L_p^+ tales que para todo natural n se tiene: $ny \leq x$. Entonces $np(y) \leq p(x)$, para todo natural n . Siendo R espacio de Riesz Arquimediano, $p(y) = 0$, de donde $y = 0$.

DEFINICION II.5: (Norma σ' -orden Continua y Norma Orden Continua) La norma p se dice que es σ' -orden Continua si para toda sucesión $\{u_n\}$ en L_p se tiene que $p(u_n) \downarrow 0$ siempre que $u_n \downarrow 0$; y se dice que es Orden Continua si para toda red $\{u_t\}$ en L_p se tiene que $p(u_t) \downarrow 0$ siempre que $u_t \downarrow 0$.

TEOREMA II.6: Sea L_p un espacio de Riesz normado. Si $f_n \uparrow$ en L_p y $p(f - f_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $f = \sup f_n$.

DEMOSTRACION:

Fijado n , para $m > n$, como $f_n \uparrow$ se tiene que $f_m > f_n$ y $f_m \wedge f_n = f_n$. Así, de la desigualdad:

$$0 \leq f_n - f \wedge f_n = |f_m \wedge f_n - f \wedge f_n| \leq |f_m - f|,$$

se obtiene: $p(f_n - f \wedge f_n) \leq p(f_m - f) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Luego, $p(f_n - f \wedge f_n) = 0 \implies f_n \leq f$.

Por otro lado, si g es otra cota superior de $\{f_n\}$, entonces $f_n \vee g = g$ para todo natural n . Y de la desigualdad:

$$0 \leq f \vee g - g = |f \vee g - f_n \vee g| \leq |f - f_n|,$$

obtenemos: $p(f \vee g - g) = 0 \implies f \leq g$.

DEFINICION II.7: (Red p -Cauchy)

Una red $\{f_t\}$ en L_p (espacio de Riesz normado), dirigida

a la derecha es llamada Red p -Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un índice t_0 tal que $p(f_t - f_{t_0}) < \varepsilon$ siempre que $f_t \geq f_{t_0}$.

LEMA II.8:

(a) Si $\{f_t\}$ es una red p -Cauchy en el espacio de Riesz normado L_p y $0 \leq \varepsilon_n \downarrow 0$ en \mathbb{R} , entonces existe una sucesión $\{f_{t_n}\}$ en $\{f_t\}$ creciente, tal que $p(f_t \vee f_{t_n} - f_{t_n}) < \varepsilon_n$ para todo n y todo t . Y además, cualquier cota superior de $\{f_{t_n}\}$ es cota superior de $\{f_t\}$.

(b) Si toda sucesión creciente orden acotada y p -Cauchy en el espacio de Riesz normado L_p , tiene norma límite, entonces toda red dirigida a la derecha, orden acotada y p -Cauchy $\{f_t\}$ tiene un supremo f , y en este caso $\{f_t\}$ contiene una sucesión $\{f_{t_n}\}$ tal que $f_{t_n} \uparrow f$; y finalmente, $p(f - f_{t_n}) \downarrow 0$.

DEMOSTRACION:

(a) Sea $\{f_t\}$ p -Cauchy y $\varepsilon_n \downarrow 0$. Entonces para todo natural n existe f'_{t_n} en $\{f_t\}$ tal que $p(f_t - f'_{t_n}) < \varepsilon_n$ siempre que $f_t \geq f'_{t_n}$.

Sean $f_{t_1} \geq f'_{t_1}$, $f_{t_2} \geq f'_{t_2} \vee f_{t_1}$, \dots , $f_{t_n} \geq f'_{t_n} \vee f_{t_{n-1}}$, con f_{t_n} en $\{f_t\}$ para todo natural n . Entonces:

$$p(f_t - f_{t_n}) < \varepsilon_n \text{ siempre que } f_t \geq f_{t_n}.$$

Luego, para n, t arbitrarios existe t_0 tal que:

$$f_{t_0} \geq f_t \vee f_{t_n} \geq f_{t_n},$$

y así: $p(f_t \vee f_{t_n} - f_{t_n}) \leq p(f_{t_0} - f_{t_n}) < \varepsilon_n$.

Además, $f_{t_n} \uparrow$ por construcción.

Sea ahora f una cota superior de $\{f_{t_n}\}$. De la desigualdad:

$$0 \leq f_t \vee f - f = f_t \vee f_{t_n} \vee f - f_{t_n} \vee f \leq f_t \vee f_{t_n} - f_{t_n},$$

se obtiene:

$$p(f_t \vee f - f) = 0, \text{ de donde } f_t \leq f.$$

(b) Sea $f_t \uparrow$ orden acotada y p-Cauchy, y sea $\xi_n \downarrow 0$ una sucesión de números positivos. Entonces por (a), existe $\{f_{t_n}\}$ en $\{f_t\}$ creciente tal que $p(f_t \vee f_{t_n} - f_{t_n}) < \xi_n$ para todo n, t . Así, para $m \geq n$ siendo $f_{t_n} \uparrow$, se tiene:

$$p(f_{t_m} - f_{t_n}) = p(f_{t_m} \vee f_{t_n} - f_{t_n}) < \xi_n.$$

Tomando $\xi > 0$, como $\xi_n \downarrow 0$ existe N tal que para todo $m \geq N$, $p(f_{t_m} - f_{t_N}) < \xi_N < \xi$. Con lo que se prueba que $\{f_{t_n}\}$ es norma Cauchy, además de ser creciente y orden acotada. Luego, por hipótesis, existe f en L_p tal que:

$$p(f - f_{t_n}) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Aplicando el teorema II.6, $f = \sup f_{t_n}$; y por (a), $f = \sup f_t$.

Finalmente, de $p(f - f_{t_n}) \downarrow 0$ se deduce que $p(f - f_t) \downarrow 0$.

TEOREMA II.9: Sea L_p un espacio de Riesz normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) L_p es super Dedekind completo y p es orden continua.
- (b) L_p es Dedekind σ -completo y p es σ -orden continua.
- (c) Cada sucesión creciente orden acotada en L_p tiene

norma límite.

DEMOSTRACION:

(a) \implies (b) Inmediata por definición.

(b) \implies (c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión orden acotada y creciente en L_p . Por ser L_p Dedekind σ -completo, existe f en L_p tal

que $f_n \uparrow f$. Siendo p σ -orden continua se tiene entonces de $(f - f_n) \downarrow 0$ que $p(f - f_n) \downarrow 0$. Así, $\{f_n\}$ tiene norma límite.

(c) \implies (a) Sea $f_t \uparrow$ orden acotada en L_p . Entonces $\{f_t\}$ es una red p -Cauchy. De lo contrario existiera una sucesión en $\{f_t\}$ creciente sin norma límite. En efecto: supongamos que $\{f_t\}$ no es p -Cauchy. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo t se tiene $p(f_t - f_{t'}) > \epsilon$ siempre que $f_{t'} \geq f_t$. Escogiendo cualquier sucesión creciente en $\{f_t\}$, por ejemplo $\{f_{t_n}\}$, se tiene para todo natural n :

$$p(f_{t_n} - f_{t_m}) > \epsilon \quad \text{siempre que } m \geq n.$$

Es decir, $\{f_{t_n}\}$ no es norma Cauchy y por lo tanto no tiene norma límite. Lo que contradice la hipótesis.

Tenemos entonces que $\{f_t\}$ es orden acotada, dirigida a la derecha y p -Cauchy. Por lema II.8(b), existe $f = \sup f_t$ en L_p y además, existe $\{f_{t_n}\}$ en $\{f_t\}$ tal que $f_{t_n} \uparrow f$. Así, L_p es super Dedekind completo.

Probaremos ahora que p es orden continua. Sea $u_t \downarrow 0$ en L_p y fijemos u_{t_0} en $\{u_t\}$. Entonces existe v_t en $\{u_t\}$ tal que

$$v_t \leq u_t \wedge u_{t_0} \leq u_{t_0}.$$

Claramente $u_{t_0} \geq v_t \downarrow 0$ en L_p , con $\{v_t\}$ en $\{u_t\}$. Definamos para todo t : $w_t = u_{t_0} - v_t$. Entonces, $0 \leq w_t \uparrow u_{t_0}$ en L_p .

Siendo L_p super Dedekind completo, existe una sucesión $\{w_{t_n}\}$ en $\{w_t\}$ tal que $w_{t_n} \uparrow u_{t_0}$. Así, por hipótesis y aplicando teorema II.6, $p(u_{t_0} - w_{t_n}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir, $p(v_{t_n}) \downarrow 0$ de donde se obtiene $p(u_t) \downarrow 0$.

TEOREMA II.10: Sea L_p un reticulado de Banach. Si p es orden continua entonces L_p es super Dedekind completo.

DEMOSTRACION:

Sea $\{f_t\}$ una red dirigida a la derecha y orden acotada en L_p . Demostraremos que existe el supremo de $\{f_t\}$, y además que $\{f_t\}$ contiene una sucesión con el mismo supremo.

$$\text{Sean: } G = \{g \in L_p: f_t \leq g, \forall t\}$$

$$G_0 = \{g - f_t: g \in G, f_t \in \{f_t\}\}.$$

Veamos que $G_0 \downarrow 0$:

i) Si $g_1 - f_{t_1}, g_2 - f_{t_2}$ pertenecen a G_0 , siendo $f_t \uparrow$, existe f_{t_0} en $\{f_t\}$ tal que $f_{t_0} \geq f_{t_1} \vee f_{t_2}$. Así, tomando $g = g_1 \wedge g_2$ en L_p , se tiene que g pertenece a G y además:

$$g - f_{t_0} \leq (g - f_{t_1}) \wedge (g - f_{t_2}).$$

Luego $G_0 \downarrow$.

ii) Sea u en L_p una cota inferior de G_0 . Entonces, para todo t y todo elemento g en G , $u \leq g - f_t$, de donde $(g - u)$ pertenece a G . Fijemos g_0 en G . Siendo $(g_0 - u)$ elemento de G , $u \leq g_0 - u - f_t$ para todo t , de donde $(g_0 - 2u)$ pertenece a G . Continuando la inducción obtenemos que $(g_0 - nu)$ pertenece a G para todo natural n . Así, $nu \leq g_0 - f_t$ para todo t, n . Luego, fijando t_0 : $nu \leq g_0 - f_{t_0}$ para todo natural n . Como L_p es Arquimediano, $u \leq 0$.

Probado así que $G_0 \downarrow 0$, por ser p orden continua se tiene que $p(g - f_t) \downarrow 0$. Esto prueba que $\{f_t\}$ es p -Cauchy. En efecto: sea $\varepsilon > 0$, como $p(g - f_t) \downarrow 0$, existen g_0, t_0 tales que $p(g_0 - f_{t_0}) < \varepsilon$. Siendo $0 \leq f_t - f_{t_0} \leq g_0 - f_{t_0}$ siempre que

$f_t > f_{t_0}$, se tiene que $p(f_t - f_{t_0}) < \varepsilon$ siempre que $f_t \geq f_{t_0}$. Es decir, $\{f_t\}$ es p -Cauchy.

Por ser L_p un reticulado de Banach y por lema II.8(b), existe f en L_p tal que $f = \sup f_t$. Y además, existe $\{f_{t_n}\}$ en $\{f_t\}$ con el mismo supremo.

Hemos probado así que L_p es super Dedekind completo.

TEOREMA II.11: Sea L_p un espacio de Riesz normado. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) Toda sucesión creciente orden acotada en L_p es una sucesión norma Cauchy.

(b) Toda sucesión disjunta orden acotada en L_p^+ converge a cero en norma.

(c) Sea $\{u_n\}$ una sucesión orden acotada en L_p^+ y sea k un número natural. Si $\inf \{u_n : n \in I\} = 0$ para todo conjunto I de k números naturales, entonces $\{u_n\}$ converge a cero en norma.

DEMOSTRACION:

(a) \implies (b) Sea $\{u_n\}$ una sucesión disjunta y orden acotada en L_p^+ . Definamos $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$. Claramente $s_n \uparrow$, y además $\{s_n\}$ es orden acotada. En efecto: sea n un natural arbitrario, entonces $s_n = \sum_{i=1}^n u_i \leq \bigvee_{i=1}^n u_i$; y siendo $\{u_n\}$ orden acotada, existe u en L_p^+ tal que $s_n \leq u$.

Así, por la condición (a), $\{s_n\}$ es una sucesión p -Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que para $n \geq N$ se tiene que $p(s_n - s_{n-1}) < \varepsilon$. Es decir, $p(u_n) < \varepsilon$. Lo que

prueba que $p(u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(b) \implies (c) Sea $\{u_n\}$ una sucesión orden acotada en L_p^+ .

Inducción sobre k :

Para $k=1$. Supongamos $\text{Inf} \{u_n: n \in I\} = 0$ para todo conjunto unitario I de N . Entonces, para todo n $u_n = 0$ y trivialmente $p(u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para $k=2$. Supongamos $\text{Inf} \{u_n: n \in I\} = 0$ para todo subconjunto I de N de cardinal dos. Entonces $\{u_n\}$ es una sucesión disjunta y por la condición (b), $p(u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Supongamos ahora que si $\text{Inf} \{u_n: n \in I\} = 0$ para todo conjunto I de k números naturales, entonces $p(u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Probaremos que se obtiene lo mismo para $k+1$.

Supongamos entonces $\text{Inf} \{u_n: n \in I\} = 0$ para todo conjunto I de $k+1$ números naturales. Como $\{u_n\}$ es orden acotada, existe u en L_p^+ tal que $u_n \leq u$ para todo n . Consideremos la sucesión $\{v_n\}$ definida de la siguiente manera:

$$v_1 = 0$$

$$v_n = (u_n - n \sum_{i=1}^{n-1} u_i - u/n)^+$$

Claramente $\{v_n\}$ es orden acotada. Veamos que es disjunta:

sean m, n números naturales y supongamos $m < n$. Entonces obtenemos las siguientes desigualdades:

$$v_n \leq (u_n - nu_m)^+$$

$$v_m \leq (u_m - u/m)^+ \leq (u_m - u_n/m)^+$$

$$\leq (u_m - u_n/n)^+$$

$$= n^{-1} (nu_m - u_n)^+$$

$$\leq (nu_m - u_n)^+.$$

De donde:
$$0 \leq v_n \wedge v_m \leq (u_n - nu_m)^+ \wedge (nu_m - u_n)^+ \\ = (u_n - nu_m)^+ \wedge (u_n - nu_m)^- = 0.$$

Así, por la condición (b), siendo $\{v_n\}$ sucesión orden acotada y disjunta en L_p^+ , $p(v_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. (1)

Definimos ahora:

$$w_1 = 0 \\ w_n = u_n \wedge n \sum_{i=1}^{n-1} u_i$$

Entonces $\{w_n\}$ es una sucesión orden acotada en L_p^+ . Sea:

$$I = \{n(1), n(2), \dots, n(k)\}$$

un conjunto de k números naturales y supongamos $n(1)$ el elemento más pequeño de I . Si $n(1)=1$, $w_1 \in \{w_n: n \in I\}$, luego:

$$\text{Inf} \{w_n: n \in I\} = 0.$$

Si $n(1) \neq 1$,

$$0 \leq \text{Inf} \{w_n: n \in I\} = \bigwedge_{i=1}^k w_{n(i)} \\ \leq \bigwedge_{i=1}^k u_{n(i)} \wedge n(1) \sum_{j=1}^{n(i)-1} u_j \\ \leq n(1) \sum_{j=1}^{n(i)-1} (\bigwedge_{j=1}^k u_{n(j)} \wedge u_j) = 0;$$

pues $\text{Inf} \{u_n: n \in I\} = 0$ para todo conjunto I de $k+1$ números naturales. Por hipótesis de inducción, siendo $\{w_n\}$ sucesión orden acotada en L_p^+ tal que $\text{Inf} \{w_n: n \in I\} = 0$ para cualquier conjunto I de k números naturales, se tiene que:

$$p(w_n) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Observemos ahora lo siguiente:

$$0 \leq u_n = u_n - [(n \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u/n) \wedge u_n] + [u_n \wedge (n \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u/n)] \\ = [(u_n - n \sum_{i=1}^{n-1} u_i - u/n) \vee 0] + [u_n \wedge (n \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u/n)] \\ \leq v_n + u_n \wedge n \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u_n \wedge u/n \\ \leq v_n + w_n + u/n$$

De donde obtenemos: $p(u_n) \leq p(v_n) + p(w_n) + p(u)/n$; y apli-

cando (1) y (2), $p(u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(c) \implies (a) Demostración por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión $\{u_n\}$ orden acotada y creciente en L_p tal que no es norma Cauchy. Entonces existe $\xi > 0$ tal que para todo natural n , $p(u_{n+1} - u_n) > \xi$. Como $\{u_n\}$ es orden acotada, existen f, g en L_p tales que $f \leq u_n \leq g$ para todo n .

Pongamos $u = g - f \geq 0$, y escojamos k en \mathbb{N} tal que:

$$p(u/k) < \frac{1}{2} \xi.$$

Sea $v_n = (u_{n+1} - u_n - u/k)^+$ para todo n . Nótese que $\{v_n\}$ es una sucesión orden acotada en L_p^+ .

Consideremos ahora el conjunto $I = \{n(1), n(2), \dots, n(k)\}$ de k números naturales, y supongamos $n(1) \leq n(2) \leq \dots \leq n(k)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^k (u_{n(i)+1} - u_{n(i)}) \\ &= u_{n(1)+1} - u_{n(1)} + u_{n(2)+1} - u_{n(2)} + \dots + u_{n(k)+1} - u_{n(k)} \\ &= u_{n(k)+1} - u_{n(1)} + [(u_{n(1)+1} - u_{n(2)}) + (u_{n(2)+1} - u_{n(3)}) + \\ &\quad \dots + (u_{n(k-1)+1} - u_{n(k)})] \end{aligned}$$

donde para todo $i=1, \dots, k-1$ se tiene $u_{n(i)+1} - u_{n(i+1)} \leq 0$, pues $n(i)+1 \leq n(i+1)$. Así,

$$0 \leq \sum_{i=1}^k (u_{n(i)+1} - u_{n(i)}) \leq u_{n(k)+1} - u_{n(1)} \leq u.$$

Luego, $k \inf \{u_{n(i)+1} - u_{n(i)} : i=1, \dots, k\} \leq u$.

Tenemos entonces que existe $n(i_0)$ en I tal que

$$u_{n(i_0)+1} - u_{n(i_0)} - u/k \leq 0.$$

Es decir, existe $n(i_0)$ en I tal que $v_{n(i_0)} = 0$. Lo que implica que $\inf \{v_n : n \in I\} = 0$. Y por la condición (c), se concluye que $p(v_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Observemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 0 \leq u_{n+1} - u_n &= (u_{n+1} - u_n + u/k) - u/k \\
 &= (u_{n+1} - u_n) \vee u/k - u/k + (u_{n+1} - u_n) \wedge u/k \\
 &= v_n + (u_{n+1} - u_n) \wedge u/k \\
 &\leq v_n + u/k.
 \end{aligned}$$

Luego, $p(u_{n+1} - u_n) \leq p(v_n) + p(u/k)$

de donde $p(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Lo que contradice que $\{u_n\}$ no es norma Cauchy.

TEOREMA II.12: Sea L_p un reticulado de Banach. Entonces la norma p es orden continua si y solo si cada sucesión orden acotada y disjunta en L_p^+ converge a cero en norma.

DEMOSTRACION:

Se deduce de los resultados anteriores. Consideremos las siguientes condiciones:

- (a) p es orden continua.
- (b) p es orden continua y L_p es super Dedekind completo.
- (c) Toda sucesión creciente orden acotada en L_p tiene norma límite.
- (d) Toda sucesión creciente orden acotada es sucesión norma Cauchy.
- (é) Toda sucesión orden acotada y disjunta en L_p^+ converge a cero en norma.

Entonces se tienen las siguientes equivalencias:

$$(a) \iff (b) \quad \text{por teorema II.10}$$

$$(b) \iff (c) \quad \text{por teorema II.9}$$

(c) \iff (d) por ser L_p un reticulado de Banach

(d) \iff (e) por teorema II.11

Lo que demuestra el teorema.

CAPITULO III

OPERADORES LINEALES ORDEN ACOTADOS

DEFINICION III.1: (Operador Lineal Orden Acotado)

Sean L, M espacios de Riesz. El operador lineal T de L en M se llamará Orden Acotado si la imagen por T de cualquier subconjunto orden acotado de L es un subconjunto orden acotado de M . El operador T se dirá positivo si $Tu \geq 0$ para todo u en el cono positivo de L .

LEMA III.2: Sean L, M espacios de Riesz, y sea T una aplicación de L^+ en M tal que:

$$(a) \quad T(u + v) = Tu + Tv \quad \text{para todo } u, v \text{ en } L^+.$$

$$(b) \quad T(ku) = kTu \quad \text{para todo } u \text{ en } L^+ \text{ y todo número real } k \geq 0.$$

Entonces T se extiende a un operador lineal T^* de L en M . Más aún, si para todo u en L^+ , Tu pertenece a M^+ entonces T se extiende a un operador lineal positivo.

DEMOSTRACION:

Definamos T^* de L en M por:

$$T^*f = Tf^+ - Tf^-.$$

(i) Primeramente veamos que T^* está bien definida. Es decir, T^* no depende de la representación de f por diferencia de dos funciones positivas. En efecto: sean $f_1, f_2 \geq 0$ en L tales que $f = f_1 - f_2$. Entonces, siendo $f_1 - f_2 = f^+ - f^-$ se tiene que $f_1 + f^- = f^+ + f_2$. Luego:

$$Tf_1 + Tf^- = T(f_1 + f^-) = T(f^+ + f_2) = Tf^+ + Tf_2,$$

de donde: $Tf_1 - Tf_2 = Tf^+ - Tf^- = T^*f$.

(ii) $T^*/L^+ = T$. En efecto: sea u en L^+ , entonces $u^+ = u$ y $u^- = 0$. Y claramente, $T^*u = Tu$.

(iii) T^* es un operador lineal:

Aditividad: sean f, g en L ; entonces

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

con $(f^+ + g^+), (f^- + g^-) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Luego: } T^*(f + g) &= T(f^+ + g^+) - T(f^- + g^-) \\ &= Tf^+ - Tf^- + Tg^+ - Tg^- = T^*f + T^*g. \end{aligned}$$

Homogeneidad: sean f en L y k en \mathbb{R} .

$$\text{Para } k \geq 0: T^*(kf) = T(kf)^+ - T(kf)^- = k(Tf^+ - Tf^-) = kT^*f.$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k < 0: T^*(kf) &= T^*[-(-kf)] = T[-(-kf)]^+ - T[-(-kf)]^- \\ &= T(-kf)^- - T(-kf)^+ = -[T^*(-kf)] \\ &= -(-k)T^*f = kT^*f. \end{aligned}$$

Además, si T es positivo, como $T^*/L^+ = T$, evidentemente T^* es positivo.

TEOREMA III.3: (Descomposición de Jordan)

Sea M un espacio de Riesz Dedekind completo, y consideremos un operador lineal T del espacio de Riesz L en M . Entonces

las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existen operadores lineales positivos T_1, T_2 de L en M tales que $T = T_1 - T_2$.

(b) T es orden acotada.

(c) Para todo u en L^+ , el conjunto $\{Tv: 0 \leq v \leq u\}$ es acotado superiormente en M .

DEMOSTRACION:

(a) \implies (b) Sean T_1, T_2 operadores lineales positivos de L en M tales que $T = T_1 - T_2$, y sean f, g en L tales que $f \leq g$. Para todo h en $[f, g]$, se tiene lo siguiente:

$$T_1 f - T_2 g \leq Th = T_1 h - T_2 h \leq T_1 g - T_2 f.$$

Luego, T es orden acotada.

(b) \implies (c) Trivial.

(c) \implies (a) Supongamos que para todo u en L^+ , el conjunto $\{Tv: 0 \leq v \leq u\}$ es acotado superiormente en M . Como M es Dedekind completo, existe $\sup\{Tv: 0 \leq v \leq u\}$ para todo u en L^+ . Definamos entonces la aplicación S de L^+ en M por:

$$Su = \sup\{Tv: 0 \leq v \leq u\}.$$

Veamos que S verifica las condiciones del Lema III.2:

(a) Sean u_1, u_2 en L^+ . Entonces:

$$Su_1 = \sup\{Tw_1: 0 \leq w_1 \leq u_1\}$$

$$Su_2 = \sup\{Tw_2: 0 \leq w_2 \leq u_2\}.$$

$$S(u_1 + u_2) = \sup\{Tw: 0 \leq w \leq u_1 + u_2\}$$

Tomando $v_1 = w \wedge u_1$ y $v_2 = w - v_1$, se tiene $0 \leq v_1 \leq u_1$ y $0 \leq v_2 \leq u_2$. En efecto:

$$0 \leq w \wedge u_1 \leq (u_1 + u_2) \wedge u_1 \leq u_1, \text{ de donde } 0 \leq v_1 \leq u_1;$$

$0 \leq w - w \wedge u_1 = w + (-w) \vee (-u_1) = 0 \vee (w - u_1) \leq 0 \vee u_2 = u_2$, de donde $0 \leq v_2 \leq u_2$. Así, para todo $0 \leq w \leq u_1 + u_2$ se tiene:

$$\begin{aligned} Tw &= T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 \quad \text{con } 0 \leq v_1 \leq u_1, 0 \leq v_2 \leq u_2 \\ &\leq \sup\{Tw_1: 0 \leq w_1 \leq u_1\} + \sup\{Tw_2: 0 \leq w_2 \leq u_2\} \\ &= Su_1 + Su_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(u_1 + u_2) \leq Su_1 + Su_2$. (*)

Por otro lado, sean $0 \leq w_1 \leq u_1, 0 \leq w_2 \leq u_2$. Entonces

$$0 \leq w_1 + w_2 \leq u_1 + u_2 \quad \text{y} \quad Tw_1 + Tw_2 = T(w_1 + w_2) \leq S(u_1 + u_2).$$

Por lo tanto, $Su_1 + Su_2 \leq S(u_1 + u_2)$. (**)

De (*) y (**), $S(u_1 + u_2) = Su_1 + Su_2$.

(b) Sean u en L^+ y $k \geq 0$. Claramente $S(ku) = kSu$.

Luego por Lema III.2, existe el operador lineal T_1 extensión de S a todo L , y además positivo por serlo S .

Definiendo $T_2 = T_1 - T$ es claro que T_2 es un operador lineal. Veamos que es positivo. En efecto: para todo u en L^+ , $T_1 u = Su \geq Tu$. Luego: $T_2 u = (T_1 - T)u \geq 0$. Lo que concluye la demostración.

Notación: El espacio vectorial real de todos los operadores lineales orden acotados del espacio de Riesz L en el espacio de Riesz Dedekind completo M , lo denotaremos $\mathcal{L}_b(L, M)$.

Y el espacio $\mathcal{L}_b(L, \mathbb{R})$ de todas las funcionales lineales orden acotadas sobre L , lo denotaremos L^{\sim} .

El operador nulo de L en M lo denotaremos por 0 , y escribiremos $T \geq 0$ si T en $\mathcal{L}_b(L, M)$ es positivo.

Si para S, T en $\mathcal{L}_b(L, M)$ definimos: $S \leq T$ si y solo si $T - S \geq 0$, entonces " \leq " es un orden parcial y $\mathcal{L}_b(L, M)$ es un

espacio vectorial ordenado.

TEOREMA III.4: (Riesz-Kantorovitch)

Sea L un espacio de Riesz y M un espacio de Riesz Dedekind completo. Entonces el espacio vectorial ordenado $\mathcal{L}_D(L, M)$ de todos los operadores lineales orden acotados de L en M , es un espacio de Riesz Dedekind completo.

DEMOSTRACION:

Para probar que el espacio vectorial ordenado $\mathcal{L}_D(L, M)$ es un espacio de Riesz, es suficiente probar que $T^+ = T \vee 0$ pertenece a $\mathcal{L}_D(L, M)$ siempre que T pertenece a $\mathcal{L}_D(L, M)$.

Sea T un operador en $\mathcal{L}_D(L, M)$. De la demostración del teorema III.3, existe un operador lineal S_u de L^+ en M tal que:

$$S_u = \sup \{ Tv : 0 \leq v \leq u \}$$

para todo u en L^+ y que puede ser extendido al operador lineal positivo T_1 de L en M . Demostraremos que $T_1 = T^+$.

(i) T_1 es cota superior de $\{T, 0\}$. En efecto, es claro que $T_1 \geq 0$; y además, para todo u en L^+ : $T_1 u \geq Tu$.

(ii) T_1 es la mínima cota superior de $\{T, 0\}$. En efecto, sea T^* otra cota superior de $\{T, 0\}$ y sea u en L^+ . Para todo v en L^+ con $0 \leq v \leq u$, $Tv \leq T^*v \leq T^*u$, pues $T^* \geq 0$. Luego, $T_1 u \leq T^*u$.

Ahora, para probar que $\mathcal{L}_D(L, M)$ es Dedekind completo, sea $\{T_s\}$ una red dirigida a la derecha y orden acotada en $\mathcal{L}_D(L, M)$. Demostraremos que existe $\sup T_s$. Como $\{T_s\}$ es orden acotada, existe X en $\mathcal{L}_D(L, M)$ tal que $T_s \leq X$ para todo s . Entonces,

para todo u en L^+ , $T_s u \leq X u$ para todo s . Así, por ser M un espacio Dedekind completo, para todo u en L^+ existe:

$$\sup \{ T_s u : s \in \{s\} \}$$

Definimos la aplicación $T^* : L^+ \rightarrow M$ por:

$$T^* u = \sup \{ T_s u : s \in \{s\} \}$$

Veamos que T^* verifica las condiciones del lema III.2:

(a) Sean u, v elementos de L^+ .

$$T^*(u + v) = \sup \{ T_s(u + v) : s \in \{s\} \}$$

$$T^* u = \sup \{ T_s u : s \in \{s\} \}$$

$$T^* v = \sup \{ T_s v : s \in \{s\} \}$$

Como $T_s \uparrow$, para todo s, t en $\{s\}$, existe x en $\{s\}$ tal que:

$$T_x \geq T_s \vee T_t .$$

Luego,

$$T_s u \leq T_x u$$

$$T_t v \leq T_x v ,$$

de donde:

$$T_s u + T_t v \leq T_x(u + v) .$$

Y por lo tanto:

$$T^* u + T^* v \leq T^*(u + v) .$$

Por otro lado, para todo s en $\{s\}$,

$$\begin{aligned} T_s(u + v) &= T_s u + T_s v \\ &\leq T^* u + T^* v . \end{aligned}$$

Luego,

$$T^*(u + v) \leq T^* u + T^* v .$$

(b) Sea u en L^+ y $k \geq 0$. Claramente, $T^*(ku) = kT^*u$.

Luego por el lema III.2, existe un operador lineal T de L en M tal que $T/L^+ = T^*$. Es decir, $Tu = \sup \{ T_s u : s \in \{s\} \}$ para todo u en L^+ .

Probaremos ahora que $T = \sup T_s$.

(i) T es cota superior de $\{T_s\}$. En efecto: para todo

u en L^+ , $Tu \geq T_s u$ para todo s . Luego, $(T - T_s)u \geq 0$ para todo s . Es decir, $T \geq T_s$ para todo s .

(ii) Sea T_0 otra cota superior de $\{T_s\}$, entonces $T_s u \leq T_0 u$ para todo s y todo u en L^+ . Luego, $Tu \leq T_0 u$ para todo u en L^+ , lo que prueba que $T \leq T_0$.

Por lo tanto, existe $\sup T_s$, lo que concluye la demostración.

TEOREMA III.5: Sea L un espacio de Riesz y sea M un espacio de Riesz Dedekind completo. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones para todo u en L^+ :

- (a) $|T|(u) = \sup \{ Tf : |f| \leq u \}$ para todo T en $\mathcal{L}_b(L, M)$.
- (b) $(T_1 \vee T_2)(u) = \sup \{ T_1 v + T_2(u - v) : 0 \leq v \leq u \}$ para todo T_1, T_2 en $\mathcal{L}_b(L, M)$.
- (c) $(T_1 \wedge T_2)(u) = \inf \{ T_1 v + T_2(u - v) : 0 \leq v \leq u \}$ para todo T_1, T_2 en $\mathcal{L}_b(L, M)$.
- (d) Si $\{T_s\}$ es una red dirigida a la derecha y orden acotada en $\mathcal{L}_b(L, M)$, entonces $(\sup T_s)(u) = \sup \{ T_s u : s \in \{s\} \}$.
- (e) Si $\{T_s\}$ es una red dirigida a la izquierda y orden acotada en $\mathcal{L}_b(L, M)$, entonces $(\inf T_s)(u) = \inf \{ T_s u : s \in \{s\} \}$.

DEMOSTRACION:

(a) Sea T en $\mathcal{L}_b(L, M)$; por propiedades de espacio de Riesz, $|T| = 2T^+ - T$. Aplicando un resultado obtenido en la demostración del teorema III.4,

$$T^+ u = \sup \{ Tv : 0 \leq v \leq u \} .$$

Luego: .

$$\begin{aligned}
|T|(u) &= 2\sup \{ Tv: 0 \leq v \leq u \} - Tu = \sup \{ 2Tv: 0 \leq v \leq u \} - Tu \\
&= \sup \{ T(2v - u): 0 \leq v \leq u \} \\
&= \sup \{ Tw: -u \leq w \leq u \} \\
&= \sup \{ Tw: |w| \leq u \} .
\end{aligned}$$

(b) Sean T_1, T_2 en $\mathcal{L}_b(L, M)$; por propiedades de espacio de Riesz, $T_1 \vee T_2 = T_2 + (T_1 - T_2)^+$. Y aplicando la identidad:

$$T^+u = \sup \{ Tv: 0 \leq v \leq u \} ,$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
(T_1 \vee T_2)u &= T_2u + \sup \{ (T_1 - T_2)v: 0 \leq v \leq u \} \\
&= \sup \{ T_2u + (T_1 - T_2)v: 0 \leq v \leq u \} \\
&= \sup \{ T_1v + T_2(u - v): 0 \leq v \leq u \} .
\end{aligned}$$

(c) Análogo a (b), utilizando:

$$T_1 \wedge T_2 = T_1 + T_2 - (T_1 \vee T_2) .$$

(d) En la demostración del teorema III.4 obtuvimos

$$\sup \{ T_s u: s \in \{s\} \} = (\sup T_s)u ,$$

para toda red $\{T_s\}$ dirigida a la derecha y orden acotada en $\mathcal{L}_b(L, M)$.

(e) Sea $\{T_s\}$ una red dirigida a la izquierda y orden acotada en $\mathcal{L}_b(L, M)$. Entonces $\{-T_s\}$ es una red dirigida a la derecha y orden acotada en $\mathcal{L}_b(L, M)$. Luego por (d):

$$[\sup(-T_s)]u = \sup \{ (-T_s)u: s \in \{s\} \} .$$

De donde utilizando propiedades de supremo e infimo, se obtiene:

$$(\inf T_s)u = \inf \{ T_s u: s \in \{s\} \} .$$

COROLARIO III.6: Bajo las mismas condiciones del teorema III.5,

resulta: $|Tu| \leq |T|u$, para todo $u \in L^+$.

DEMOSTRACION:

$$\text{Evidentemente, } Tu \leq \sup \{ Tv : -u \leq v \leq u \} = |T|u$$

$$T(-u) \leq \sup \{ Tv : -u \leq v \leq u \} = |T|u .$$

$$\text{Luego, } |Tu| = (Tu) \vee (-Tu) = (Tu) \vee [T(-u)] \leq |T|u .$$

TEOREMA III.7: Sea L un espacio de Riesz y sea M un espacio de Riesz Dedekind completo. Entonces para cada u en L^+ , se tienen las siguientes afirmaciones:

$$(a) \left\{ \sum_{i=1}^n |Tu_i| : n \in \mathbb{N}, u = \sum_{i=1}^n u_i, u_i \in L^+ \forall i=1, \dots, n \right\} \uparrow |T|u ,$$

para todo T en $\mathfrak{L}_b(L, M)$.

$$(b) \left\{ \sum_{i=1}^n |T_1|u_i \wedge |T_2|u_i : n \in \mathbb{N}, u = \sum_{i=1}^n u_i, u_i \in L^+ \forall i=1, \dots, n \right\}$$

$$\downarrow (|T_1| \wedge |T_2|)u ,$$

para todo T_1, T_2 en $\mathfrak{L}_b(L, M)$.

DEMOSTRACION:

(a) Sean T en $\mathfrak{L}_b(L, M)$ y u en L^+ , y pongamos:

$$Au = \left\{ \sum_{i=1}^n |Tu_i| : n \in \mathbb{N}, u = \sum_{i=1}^n u_i, u_i \in L^+ \forall i=1, \dots, n \right\} .$$

(i) Primeramente veamos que Au es una red dirigida a la derecha: en efecto, sean $\sum_{i=1}^n |Tu_i|, \sum_{j=1}^m |Tv_j|$ en Au . Entonces, $u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^m v_j$; y por el teorema de la Interpolación de Riesz, existe una doble sucesión $\{w_{ij}\}$ en L^+ :

$$u_i = \sum_{j=1}^m w_{ij} \quad \text{y} \quad v_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} .$$

De las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^n |Tu_i| = \sum_{i=1}^n \left| T \left(\sum_{j=1}^m w_{ij} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |Tw_{ij}|$$

$$\sum_{j=1}^m |Tv_j| = \sum_{j=1}^m \left| T \left(\sum_{i=1}^n w_{ij} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |Tw_{ij}| ,$$

se sigue que Au es dirigida a la derecha.

(ii) $|T|u$ es cota superior de Au . En efecto, sea

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{con } u_i \text{ en } L^+ \text{ para todo } i=1, \dots, n. \quad \text{Entonces:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |Tu_i| &\leq \sum_{i=1}^n |T|u_i && \text{(corolario III.6)} \\ &= |T|(\sum_{i=1}^n u_i) \\ &= |T|u . \end{aligned}$$

(iii) $|T|u$ es la mínima cota superior de Au . En efecto: siendo Au un conjunto dirigido a la derecha y acotado superiormente en el espacio de Riesz Dedekind completo M , existe el supremo de Au . Probaremos que $|T|u = \sup Au$. Sea s otra cota superior de Au ; entonces $\sum_{i=1}^n |Tu_i| \leq s$ para todo conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ en L^+ con $u = \sum_{i=1}^n u_i$.

Ahora bien, sea v en L tal que $|v| \leq u$. Entonces:

$$Tv = T(v^+ - v^-) = Tv^+ - Tv^- \leq |Tv^+| + |Tv^-| \leq |Tv^+| + |Tv^-| + |T(u - |v|)| .$$

De donde:

$$Tv = \sum_{i=1}^3 |Tw_i| \quad \text{con } \begin{aligned} w_1 &= v^+ \in L^+ \\ w_2 &= v^- \in L^+ \\ w_3 &= (u - |v|) \in L^+, \end{aligned}$$

pues $|v| \leq u$. Además, $w_1 + w_2 + w_3 = u$. Luego $\sum_{i=1}^3 Tw_i$ pertenece a Au , y por lo tanto:

$$Tv \leq \sum_{i=1}^3 |Tw_i| \leq s .$$

Y esto es para todo Tv con $|v| \leq u$, luego:

$$\sup \{ Tv : |v| \leq u \} = |T|u \leq s .$$

(b) Sean u en L^+ , T_1, T_2 en $\mathcal{L}_D(L, M)$ y pongamos:

$$Bu = \left\{ \sum_{i=1}^n [|T_1|u_i \wedge |T_2|u_i] : n \in \mathbb{N}, u = \sum_{i=1}^n u_i, u_i \in L^+ \forall i \right\}$$

(i) Veamos que Bu es dirigida a la izquierda. Sean

$\{u_i : i=1, \dots, n\}, \{v_j : j=1, \dots, m\}$ sucesiones en L^+ tales que

$$u = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^m v_j .$$

Pongamos $T = |T_1| - |T_2|$. Entonces T pertenece a $\mathcal{L}_b(L, M)$.

Por (a) existe $\{w_k: k=1, \dots, p\}$ en L^+ tal que $u = \sum_{k=1}^p w_k$, y

$$\sum_{i=1}^n |Tu_i| \vee \sum_{j=1}^m |Tv_j| \leq \sum_{k=1}^p |Tw_k|.$$

Así, $-\sum_{k=1}^p |Tw_k| \leq (-\sum_{i=1}^n |Tu_i|) \wedge (-\sum_{j=1}^m |Tv_j|)$

$$\begin{aligned} \implies |T_1|u + |T_2|u - \sum_{k=1}^p |Tw_k| &\leq (|T_1|u + |T_2|u - \sum_{i=1}^n |Tu_i|) \\ &\quad \wedge (|T_1|u + |T_2|u - \sum_{j=1}^m |Tv_j|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2}(|T_1|u + |T_2|u - \sum_{k=1}^p |Tw_k|) &\leq \frac{1}{2}(|T_1|u + |T_2|u - \sum_{i=1}^n |Tu_i|) \\ &\quad \wedge \frac{1}{2}(|T_1|u + |T_2|u - \sum_{j=1}^m |Tv_j|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{k=1}^p \frac{1}{2}(|T_1|w_k + |T_2|w_k - |Tw_k|) &\leq [\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(|T_1|u_i + |T_2|u_i - \\ &\quad - |Tu_i|)] \wedge [\sum_{j=1}^m \frac{1}{2}(|T_1|v_j + |T_2|v_j - |Tv_j|)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{k=1}^p |T_1|w_k \wedge |T_2|w_k &\leq \sum_{i=1}^n |T_1|u_i \wedge |T_2|u_i \wedge (\sum_{j=1}^m |T_1|v_j \wedge \\ &\quad |T_2|v_j). \end{aligned}$$

Así, hemos encontrado una sucesión finita $\{w_k\}$ en L^+ tal que

$u = \sum_{k=1}^p w_k$ y verificando la desigualdad anterior; es decir,

Bu es dirigida a la izquierda.

$$\begin{aligned} &\text{(ii) Veamos ahora que } \inf Bu = (|T_1| \wedge |T_2|)u. \text{ En} \\ &\text{efecto: } \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |T_1|u_i \wedge |T_2|u_i : n \in \mathbb{N}, u_i \in L^+, \sum_{i=1}^n u_i = u \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |T_1|u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |T_2|u_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ||T_1|u_i - |T_2|u_i| : n \in \mathbb{N}, \right. \\ &\quad \left. u_i \in L^+, \sum_{i=1}^n u_i = u \right\} \\ &= \frac{1}{2}|T_1|u + \frac{1}{2}|T_2|u - \sup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ||T_1|u_i - |T_2|u_i| : n \in \mathbb{N}, u_i \in L^+, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n u_i = u \right\} \\ &= \frac{1}{2}|T_1|u + \frac{1}{2}|T_2|u - \frac{1}{2}||T_1| - |T_2||u \quad \text{por (a)} \\ &= (|T_1| \wedge |T_2|)u. \end{aligned}$$

DEFINICION III.8: (Operador Lineal σ -orden Continuo)

El operador lineal orden acotado T del espacio de Riesz

L en el espacio de Riesz Dedekind completo M se dice que es \mathcal{O} -orden Continuo si $u_n \downarrow 0$ en L, implica $Tu_n \rightarrow 0$ en M.

Notación: El conjunto de todos los operadores lineales orden acotados \mathcal{O} -orden continuos del espacio de Riesz L en el espacio de Riesz Dedekind completo M se denotará por $\mathcal{L}_C(L, M)$, y el conjunto $\mathcal{L}_C(L, \mathbb{R})$ de todas las funcionales lineales \mathcal{O} -orden continuas sobre L se denotará por L_C^\sim .

TEOREMA III.9: Sea L un espacio de Riesz y sea M un espacio de Riesz Dedekind completo. Entonces $\mathcal{L}_C(L, M)$ es una banda en $\mathcal{L}_b(L, M)$.

DEMOSTRACION:

(i) $\mathcal{L}_C(L, M)$ es subespacio de Riesz de $\mathcal{L}_b(L, M)$. Sea T un elemento de $\mathcal{L}_C(L, M)$; basta verificar que T^+ pertenece a $\mathcal{L}_C(L, M)$. En efecto, consideremos la sucesión $u_n \downarrow 0$ en L. Claramente, $\{T^+u_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0. Así, por ser M un espacio Dedekind completo, existe $\inf\{T^+u_n\}$ en M. Veamos que $\inf\{T^+u_n\} = 0$: para todo natural n y todo elemento v de L tal que $0 \leq v \leq u_1$, se

$$\begin{array}{l} \text{tiene: } \quad v - u_n \leq u_1 - u_n \\ \quad \quad \quad 0 \leq u_1 - u_n \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \longrightarrow 0 \leq (v - u_n) \vee 0 \leq u_1 - u_n \\ \longrightarrow 0 \leq v + [(-u_n) \vee (-v)] \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \leq u_1 - u_n \\ \longrightarrow 0 \leq v - u_n \wedge v \leq u_1 - u_n \end{array} \right.$$

Luego, $T(v - u_n \wedge v) \leq \sup\{Tw: 0 \leq w \leq u_1 - u_n\} = T^+(u_1 - u_n)$

$$\implies Tv - T(u_n \wedge v) \leq T^+u_1 - T^+u_n$$

UNIVERSIDAD DE PANAMA

BIBLIOTECA

$$\implies T^+u_n \leq T^+u_1 - Tv + T(u_n \wedge v) .$$

Siendo $u_n \downarrow 0$ se tiene: $v \wedge u_n \downarrow v \wedge 0 = 0 \implies T(u_n \wedge v) \longrightarrow 0$.

Luego,
$$0 \leq \inf \{ T^+u_n \} \leq T^+u_1 - Tv .$$

Y esto es para todo v en L tal que $0 \leq v \leq u_1$; luego:

$$0 \leq \inf \{ T^+u_n \} \leq T^+u_1 - \sup \{ Tv : 0 \leq v \leq u_1 \} = 0 .$$

Hemos probado así que T^+ pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$.

(ii) $\mathfrak{L}_c(L, M)$ es un ideal en $\mathfrak{L}_b(L, M)$. Sean T en $\mathfrak{L}_c(L, M)$ y S en $\mathfrak{L}_b(L, M)$ tales que $|S| \leq |T|$. Demostraremos que S pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$. Para esto, consideremos $u_n \downarrow 0$. Por (i), $|T|$ pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$ lo que implica que $|T|u_n \longrightarrow 0$; y de las desigualdades:

$$0 \leq S^+u_n \leq |S|u_n \leq |T|u_n$$

$$0 \leq S^-u_n \leq |S|u_n \leq |T|u_n,$$

se sigue que $S^+u_n \longrightarrow 0$ y $S^-u_n \longrightarrow 0$. Es decir, S^+ y S^- pertenecen a $\mathfrak{L}_c(L, M)$, luego $S = S^+ - S^-$ es un elemento de $\mathfrak{L}_c(L, M)$.

(iii) $\mathfrak{L}_c(L, M)$ es una banda en $\mathfrak{L}_b(L, M)$. Sea $\{T_s\}$ una red en $\mathfrak{L}_c(L, M)$ tal que $0 \leq T_s \uparrow T$ en $\mathfrak{L}_b(L, M)$. Demostraremos que T pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$. Sea entonces $u_n \downarrow 0$: Siendo $T \geq 0$, se tiene que $\{Tu_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por cero en M , espacio de Riesz Dedekind completo. Entonces existe $\inf \{Tu_n\}$ en M . Veamos que $\inf \{Tu_n\} = 0$. Nótese que para todo natural n y todo $s \in \{s\}$ se tiene que $T_s(u_1 - u_n) \leq T(u_1 - u_n)$ pues $0 \leq T_s \leq T$ para todo s , y además $u_1 - u_n \geq 0$ para todo natural n . Luego:

$$0 \leq Tu_n \leq Tu_1 - T_s u_1 + T_s u_n .$$

Pero T_s pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$, de donde se obtiene:

$$0 \leq \inf \{ Tu_n \} \leq Tu_1 - T_s u_1 \text{ para todo } s \in \{s\} .$$

Lo que implica:

$$0 \leq \inf \{ Tu_n \} \leq Tu_1 - \sup \{ T_s u_1 : s \in \{s\} \} = 0 \quad (\text{por teorema III.5(d)})$$

De esta forma probamos que T pertenece a $\mathfrak{L}_c(L, M)$.

CAPITULO IV

FUNCIONALES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE RIESZ

En el capitulo anterior vimos entre otras cosas que para toda funcional ϕ en L^{\sim} , y para todo elemento u en L^+ :

$$\phi^+ u = \sup \{ \phi v : 0 \leq v \leq u \}$$

$$|\phi| u = \sup \{ \phi v : |v| \leq u \} .$$

Nos interesa ahora caracterizar $\phi(u^+)$ y $\phi(|u|)$ con ϕ en $L^{\sim+}$ y u en L .

LEMA IV.1: Sea L un espacio de Riesz. Entonces para todo elemento u en L^+ y toda funcional positiva ϕ en L^{\sim} , existe ϕ_u en L^{\sim} tal que:

(a) $0 \leq \phi_u \leq \phi$ y $\phi_u(u) = \phi u$.

(b) $\phi_u(v) = 0$ siempre que $u \perp v$.

DEMOSTRACION:

Sean u en L^+ y ϕ en $L^{\sim+}$. Consideremos la aplicación $T : L^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $Tv = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(v \wedge nu)$.

Claramente T está bien definida pues $\phi \geq 0$ y $v \wedge nu \leq v$, implican $\phi(v \wedge nu) \leq \phi v$ para todo natural n . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(v \wedge nu) \leq \phi v .$$

Veamos que se cumplen las condiciones del lema III.2.

Sean v, w elementos de L^+ y k una constante no negativa.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad T(v + w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi[(v + w) \wedge nu] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi[(v \wedge nu) + (w \wedge nu)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(v \wedge nu) + \phi(w \wedge nu)] = Tv + Tw . \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Tv + Tw &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(v \wedge nu) + \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(w \wedge nu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi[(v \wedge nu) + (w \wedge nu)] \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \phi[(v \wedge nu) + (w \wedge mu)] \\ &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \phi[(v + w) \wedge (n + m)u] = T(v + w) . \\ \text{(ii)} \quad T(kv) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(kv \wedge nu) = k \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(v \wedge nk^{-1}u) \\ &= k \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(v \wedge mu) = kTv . \end{aligned}$$

Luego por el teorema III.4, existe una funcional $\phi_u : L \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\phi_u/L^+ = T$. Además:

$$\text{(a)} \quad 0 \leq \phi_u(v) = Tv \leq \phi v \quad \text{para todo } v \text{ en } L^+, \text{ y}$$

$$\phi_u(u) = Tu = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u \wedge nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi u = \phi u \quad (\text{pues } u \wedge nu = u).$$

Por lo tanto, $0 \leq \phi_u \leq \phi$ y $\phi_u(u) = \phi u$.

(b) Sea v un elemento de L tal que $v \perp u$. Entonces:

$$\begin{aligned} |v| \wedge u = 0 &\longrightarrow \begin{cases} v^+ \wedge u = 0 \\ v^- \wedge u = 0 \end{cases} \\ &\longrightarrow \begin{cases} n^{-1}v^+ \wedge u = 0 \\ n^{-1}v^- \wedge u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \phi_u v &= \phi_u v^+ - \phi_u v^- = Tv^+ - Tv^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (v^+ \wedge nu) - \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} (v^- \wedge nu) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi [n(n^{-1}v^+ \wedge u) - n(n^{-1}v^- \wedge u)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(0) = 0 . \end{aligned}$$

TEOREMA IV.2: (Fórmulas de Namioka)

Sea L un espacio de Riesz. Entonces para todo elemento u de L y toda funcional positiva ϕ de L se tienen las siguientes identidades:

$$(a) \quad \phi(u^+) = \max \{ \psi u : 0 \leq \psi \leq \phi \}$$

$$(b) \quad \phi(|u|) = \max \{ |\psi u| : |\psi| \leq \phi \}$$

DEMOSTRACION:

Sean u en L y ϕ en L^* tal que $\phi \geq 0$.

(a) Para u^+ en L^+ , consideremos la aplicación ϕ_{u^+} definida en el lema IV.2. Entonces:

$$\phi_{u^+}(u) = \phi_{u^+}(u^+) - \phi_{u^+}(u^-) = \phi u^+, \text{ pues } u^+ \perp u^-.$$

Así, siendo $0 \leq \phi_{u^+} \leq \phi$, se tiene $\phi_{u^+}(u) = \phi u^+$ como elemento de $\{ \psi u : 0 \leq \psi \leq \phi \}$. Por otro lado, para toda funcional de L tal que $0 \leq \psi \leq \phi$, $\psi u \leq \phi u^+$. Por lo tanto,

$$\phi u^+ = \max \{ \psi u : 0 \leq \psi \leq \phi \}.$$

(b) Para u^+, u^- en L^+ , consideremos ϕ_{u^+}, ϕ_{u^-} definidas en el lema IV.2. Sea $\psi_0 = \phi_{u^+} - \phi_{u^-}$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\psi_0 u| &= |\psi_0(u^+ - u^-)| = |\phi_{u^+} u^+ - \phi_{u^+} u^- - \phi_{u^-} u^+ + \phi_{u^-} u^-| \\ &= |\phi u^+ + \phi u^-| = |\phi(|u|)| = \phi(|u|). \end{aligned}$$

Veamos que $|\psi_0| \leq \phi$. En efecto: sea v en L^+ ; demostraremos que $|\psi_0|v \leq \phi v$. Para este fin, escojamos w en L tal que $|w| \leq v$. Entonces:

$$\begin{aligned} \psi_0 w &= \phi_{u^+} w - \phi_{u^-} w = \phi_{u^+} w^+ - \phi_{u^+} w^- - \phi_{u^-} w^+ + \phi_{u^-} w^- \\ &= \phi_{u^+} w^+ + \phi_{u^-} w^- - (\phi_{u^+} w^- + \phi_{u^-} w^+) \\ &\leq \phi w^+ + \phi w^- - (\phi_{u^+} w^- + \phi_{u^-} w^+) \\ &\leq \phi(|w|) \leq \phi v. \end{aligned}$$

Luego, $\sup \{ |\psi_0 w| : |w| \leq v \} \leq \phi v$. Lo que implica $|\psi_0|v \leq \phi v$.
 Por lo tanto, siendo $|\psi_0| \leq \phi$, se tiene que:

$$|\psi_0 u| = \phi(|u|) \in \{ |\psi u| : |\psi| \leq \phi \}$$

Por otro lado, como para toda funcional ψ en L^* tal que $|\psi| \leq \phi$, se tiene $|\psi u| \leq |\psi|u \leq |\psi|(|u|) \leq \phi(|u|)$, se concluye que

$$\phi(|u|) = \max \{ |\psi u| : |\psi| \leq \phi \}$$

DEFINICION IV.3: (Funcional Lineal Orden Continua)

La funcional lineal orden acotada ϕ en el espacio de Riesz L se llamará Orden Continua si $\inf | \phi(u_t) | = 0$ siempre que $u_t \downarrow 0$.

El conjunto de todas las funcionales orden acotadas y orden continuas sobre L lo denotaremos por L_n^* . Claramente L_n^* está contenido en L_c^* . Más aún, se puede probar que L_n^* es una banda en L^* . (Análogamente a la demostración del teorema III.9)

DEFINICION IV.4: (Ideal Nulo y Banda de Soporte)

Para cada funcional ϕ de L , definimos el conjunto:

$$N_\phi = \{ f \in L : |\phi|(|f|) = 0 \}.$$

Entonces:

- (i) N_ϕ es un ideal en L .
- (ii) Para el caso en que ϕ es orden continua, se sigue fácilmente que N_ϕ es una banda en L .
- (iii) $N_\phi = N_{|\phi|} = N_{\phi^+} \cap N_{\phi^-}$.

El ideal N_ϕ es llamado Ideal Nulo de ϕ . El complemento disjuntó $C_\phi = (N_\phi)^d$ del ideal nulo de ϕ , es llamado la Ban-

da de Soporte de ϕ . Es decir,

$$C_\phi = \{g \in L: f \perp g, \forall f \in N_\phi\}.$$

TEOREMA IV.5: Sea L un espacio de Riesz Dedekind completo y sean $\phi, \psi \in L_n^*$. Entonces $\phi \perp \psi$ si y solo si $C_\phi \cap C_\psi = \{0\}$.

DEMOSTRACION:

Sea $u \in C_\phi \cap C_\psi$ y supongamos que $\phi \perp \psi$. Entonces,

$$|\phi| \wedge |\psi| u^+ = \inf \{ |\phi|v + |\psi|(u^+ - v) : 0 \leq v \leq u^+ \} = 0.$$

Luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe v_ε tal que $0 \leq v_\varepsilon \leq u^+$, y adem

ás: $|\phi|v_\varepsilon + |\psi|(u^+ - v_\varepsilon) < \varepsilon$. Así, para todo natural n

existe $0 \leq v_n \leq u^+$: $|\phi|v_n + |\psi|(u^+ - v_n) < 1/2^n$. (*)

Como L es Dedekind completo, existe $v = \lim \sup v_n$. Sea

$g_n = \sup \{v_k : k \geq n\}$. Entonces $g_n \downarrow v$, de donde $|\phi|g_n \downarrow |\phi|v$.

Por otro lado, sea $G_N = \sup \{v_k : n \leq k \leq N\}$. Entonces

$G_N \uparrow g_n$, de donde $|\phi|G_N \uparrow |\phi|g_n$. Luego:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\phi|g_n &= \lim |\phi|G_N \leq \lim |\phi| \sum_{k=n}^N v_k = \lim \sum_{k=n}^N |\phi|v_k \\ &\leq \lim \sum_{k=n}^N 1/2^k = 1/2^{n-1}. \quad (\text{por } (*)) \end{aligned}$$

De donde, $|\phi|g_n \downarrow 0$; y por lo tanto, $|\phi|v = 0$. Lo que prueba que v pertenece a N_ϕ .

Ahora bien, $0 \leq v \leq u^+$ con $u^+ \leq |u|$ y u elemento del ideal $C_\phi \cap C_\psi$; lo que implica que u^+ pertenece a $C_\phi \cap C_\psi$, y por lo tanto v también. Luego siendo v elemento de N_ϕ , se tiene que $0 \leq \lim \inf v_n \leq \lim \sup v_n = v = 0$. Es decir, $v_n \rightarrow v = 0$; de donde: $|\psi|(u^+ - v_n) \rightarrow |\psi|u^+$. Pero $|\psi|(u^+ - v_n) \rightarrow 0$ por (*) luego $|\psi|u^+ = 0$. Así, se deduce que u^+ pertenece a $N_\psi \cap C_\psi$, y obtenemos $u^+ = 0$.

De la misma forma se demuestra que $u^- = 0$; concluyendo entonces que $u = 0$ para todo elemento u de $C_\phi \cap C_\psi$. Es decir, $C_\phi \cap C_\psi = \{0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $C_\phi \cap C_\psi = \{0\}$ y sea u elemento de L^+ . Como L es Dedekind completo y ϕ, ψ pertenecen a L_n^\sim , se tiene que N_ψ y N_ϕ son bandas. Más aún, N_ϕ y N_ψ son bandas de proyección. Luego:

$$L = N_\phi \oplus C_\phi \quad (1)$$

Y

$$L = N_\psi \oplus C_\psi \quad (2)$$

Por (1) y teorema I.24, existen $u_1, u_2 \geq 0$ tales que:

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 \in N_\phi \quad \text{y} \quad u_2 \in C_\phi.$$

Veamos ahora que C_ϕ está contenido en N_ψ . En efecto, sea f elemento de C_ϕ . Entonces, existen f_1 en N_ψ y f_2 en C_ψ tales que $f = f_1 + f_2$. De la desigualdad,

$$|f_2| \leq |f| + |f_1| \wedge |f_2|,$$

como $f_1 \perp f_2$ se obtiene que $|f_2| \leq |f|$ con $f \in C_\phi$ que es ideal. Luego, $f_2 \in C_\phi$; y así, $f_2 = 0$. Por lo tanto, $f = f_1 \in N_\psi$.

Análogamente se demuestra que C_ψ está contenido en N_ϕ .

Tenemos entonces: $0 \leq u_1 \leq u$ con $u_1 \in N_\phi$ y $u_2 = (u - u_1)$, en N_ψ . Así, para todo elemento u en L^+ se tiene:

$$0 \leq |\phi| \wedge |\psi| u = \inf \{ |\phi| v + |\psi| |u - v| : 0 \leq v \leq u \} \leq |\phi| u_1 + |\psi| (u - u_1) = 0.$$

Sea ahora f un elemento de L . Considerando:

$$|\phi| \wedge |\psi| f = |\phi| \wedge |\psi| (f^+ - f^-) = |\phi| \wedge |\psi| f^+ - |\phi| \wedge |\psi| f^-,$$

se concluye que $|\phi| \wedge |\psi| = 0$; es decir,

DEFINICION IV.6: (Funcional Lineal Estrictamente Positiva)

Una funcional lineal ϕ sobre el espacio de Riesz L se dirá que es Estrictamente Positiva si $\phi u > 0$ siempre que $u > 0$. En otras palabras, ϕ es estrictamente positiva si y solo si $N_\phi = \{0\}$.

DEFINICION IV.7: (Propiedad de Egoroff)

El espacio de Riesz L se dice que tiene la Propiedad de Egoroff si para todo elemento u de L^+ y toda doble sucesión $\{u_{n,k} : n, k=1, 2, \dots\}$ en L^+ tal que $u \geq u_{n,k} \downarrow 0$, existe una sucesión $\{v_n\}$ tal que:

- (i) $v_n \downarrow 0$ en L
- (ii) Para todo natural n , existe $k(n)$ en \mathbb{N} tal que:

$$v_n \geq u_{n, k(n)}.$$

TEOREMA IV.8: Sea L un espacio de Riesz Dedekind completo y sea ϕ una funcional lineal estrictamente positiva sobre L . Entonces L es super Dedekind completo. Si además ϕ es σ -orden continua, entonces L tiene la propiedad de Egoroff y ϕ es orden continua.

DEMOSTRACION:

Primeramente, veamos que L es Dedekind completo. Supongamos entonces que $\{u_t\}$ es una red en L^+ dirigida a la derecha y orden acotada. Consideremos la red $\{\phi(u_t)\}$ en \mathbb{R} . Entonces, siendo $\{\phi(u_t)\}$ dirigida a la derecha y orden acotada, existe $\gamma = \sup \{\phi(u_t)\}$. Por definición de supremo, podemos escoger entonces una sucesión $\{\phi(u_{t_n})\}$ contenida en $\{\phi(u_t)\}$ tal que:

$$\phi(u_{t_n}) > \gamma - 1/n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sean ahora $u_{t_1} \geq u_{t'_1}$, $u_{t_2} \geq u_{t'_2} \vee u_{t_1}$, \dots , $u_{t_n} \geq u_{t'_n} \vee u_{t_{n-1}}$ con $u_{t_n} \in \{u_t\}$, para todo natural n . Entonces $\{u_{t_n}\}$ es una sucesión creciente contenida en $\{u_t\}$ (que es orden acotada), y además $\{\phi(u_{t_n})\} \uparrow \gamma$. En efecto,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \geq 1: \phi(u_{t_m}) > \phi(u_{t_m}) > \gamma - 1/m > \gamma - \varepsilon.$$

Por ser L un espacio Dedekind σ -completo y $\{u_{t_n}\}$ sucesión creciente y orden acotada en L^+ , existe u en L tal que $u_{t_n} \uparrow u$.

Probaremos que $u_t \uparrow u$, con lo cual concluimos la demostración de ser L super Dedekind completo. Como $u_{t_n} \uparrow u$, basta mostrar que $u_t \leq u$ para todo t . Supongamos que $u_t \not\leq u$; entonces existe t^* tal que $u_{t^*} \vee u > u$, de donde $v = u_{t^*} \vee u - u > 0$.

Como $u_{t_n} \leq u$ para todo n ,

$$\begin{aligned} u_{t^*} - u_{t_n} \geq u_{t^*} - u &\implies u_{t^*} \vee u_{t_n} - u_{t_n} \geq v > 0 \\ &\implies \phi(u_{t^*} \vee u_{t_n}) - \phi(u_{t_n}) \geq \phi(v) > 0, \end{aligned}$$

para todo natural n . Así, por ser $\gamma = \sup \{\phi(u_{t_n})\}$, existe n^* en \mathbb{N} tal que $\phi(u_{t_{n^*}}) > \gamma - [\phi(u_{t^*} \vee u_{t_{n^*}}) - \phi(u_{t_{n^*}})]$. De donde, $\phi(u_{t^*} \vee u_{t_{n^*}}) > \gamma$.

Siendo $\{u_t\}$ una red dirigida a la derecha, existe u_t , tal que $u_t \geq u_{t^*} \vee u_{t_{n^*}}$, de donde: $\phi(u_t) > \gamma$, lo cual es una contradicción. Luego, $u_t \leq u$ para todo t .

Supongamos ahora que ϕ es una funcional lineal estrictamente positiva y σ -orden continua. Veamos primero que ϕ es orden continua. Sea entonces $\{u_t\}$ una red tal que $u_t \downarrow 0$. Por ser L super Dedekind completo, existe $\{-u_{t_n}\}$ contenida en $\{-u_t\}$ tal que $(-u_{t_n}) \uparrow 0$. Pero ϕ es σ -orden continua, luego

$\phi(u_{t_n}) \downarrow 0$, lo que implica que $\phi u_t \downarrow 0$.

Para probar que L tiene la propiedad de Egoroff, sean u en L^+ y $\{u_{n,k}\}$ una doble sucesión en L^+ tal que $u \geq u_{n,k} \downarrow_k 0$. Como $u_{n,k} \downarrow_k 0$ y ϕ es σ -orden continua, se tiene $\phi(u_{n,k}) \downarrow_k 0$. Luego, para todo natural n existe $k(n)$ tal que $\phi(u_{n,k(n)}) < 2^{-n}$.

Sea $v_n = \sup \{u_{m,k(m)} : m \geq n\}$, entonces $v_n \downarrow$ y por ser L super Dedekind completo, existe $v = \lim \sup u_{n,k(n)}$. (Teorema I.32). Luego $v_n \downarrow v$, de donde $\phi v_n \downarrow \phi v$.

Sea $V_N = \sup \{u_{m,k(m)} : n \leq m \leq N\}$. Entonces $V_N \uparrow v_n$, y $\phi V_N \uparrow \phi v_n$. Luego:

$$0 \leq \phi v_n = \lim \phi V_N \leq \lim \phi \left(\sum_{m=n}^N u_{m,k(m)} \right) \leq \lim \sum_{m=n}^N 2^{-m} = 2^{-n+1}.$$

Así, $\phi v_n \downarrow 0 \implies \phi v = 0 \implies v = 0$ pues $N_\phi = \{0\}$. Por lo tanto, $v_n \downarrow 0$ con $v_n \geq u_{n,k(n)}$ para todo n , lo que concluye la demostración.

DEFINICION IV.9:

El espacio $L_n^{\mathcal{N}}$ se dice que Separa los Puntos del espacio de Riesz L si para todo elemento f de L no nulo, existe una funcional ϕ de $L_n^{\mathcal{N}}$ tal que $\phi f \neq 0$.

TEOREMA IV.10: Sea L un espacio de Riesz Dedekind completo y supongamos que $L_n^{\mathcal{N}}$ separa los puntos de L . Entonces existe una colección de bandas $\{K_s\}$ en L tal que L es la banda generada por $\bigcup \{K_s\}$ y $K_{s_1} \cap K_{s_2} = \{0\}$ para todo $s_1 \neq s_2$. Más aún, cada K_s es un espacio de Riesz super Dedekind completo con la propiedad de Egoroff y cada K_s posee una funcional lineal estricta-

tamente positiva y orden continua.

DEMOSTRACION:

Como L_n^{\sim} contiene al menos un elemento no nulo (pues L_n^{\sim} separa los puntos de L), L_n^{\sim} tiene un sistema disjunto maximal; esto es, existe una colección $\{\phi_s\}$ en L_n^{\sim} tal que $\phi_{s_1} \perp \phi_{s_2}$ para $s_1 \neq s_2$, y además si ϕ es tal que $\phi \perp \phi_s$ para todo s , se tiene que $\phi = 0$.

Denotemos la banda de soporte de ϕ_s por K_s . Es decir,

$$K_s = N_{\phi_s}^d.$$

(1) Para todo s se tiene que $|\phi_s|$ es una funcional lineal estrictamente positiva sobre K_s . En efecto, sea u en K_s $u > 0$. Es claro que $|\phi_s|u \geq 0$. Supongamos $|\phi_s|u = 0$, entonces u pertenece a N_{ϕ_s} . Pero N_{ϕ_s} es banda de proyección, luego $L = N_{\phi_s} \oplus K_s$. De aquí que $u = 0$, lo que contradice que $u > 0$. Por lo tanto, $|\phi_s|u > 0$.

(2) K_s es un espacio de Riesz Dedekind completo (pues K_s es banda de L), y $|\phi_s|$ es una funcional lineal estrictamente positiva y orden continua sobre K_s . Aplicando el teorema IV.8, se tiene que K_s es un espacio de Riesz super Dedekind completo con la propiedad de Egoroff.

(3) Como $\{\phi_s\}$ es un sistema disjunto en L_n^{\sim} , por teorema IV.5, $\{K_s\}$ es una colección de conjuntos tales que $K_{s_1} \cap K_{s_2} = \{0\}$ para $s_1 \neq s_2$.

(4) Veamos por último que $L = K$ donde K es la banda generada por $\bigcup \{K_s\}$. Siendo K banda de proyección, $L = K \oplus K^d$. Supongamos $L \neq K$, lo que implica $K^d \neq \{0\}$. Luego, existe f_0

en K^d tal que $f_0 \neq 0$. Como L_n^\sim separa los puntos de L , existe una funcional ϕ en L_n^\sim tal que $\phi f_0 \neq 0$. Definamos

$$\begin{aligned}\psi &: L \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por} \\ \psi f &= \phi(P_{K^d} f)\end{aligned}$$

donde P_{K^d} es la proyección de orden de L en K^d . Claramente, ψ está bien definida y es lineal. Además, como L_n^\sim es una banda en L^\sim , $0 \leq P_{K^d} f \leq f \implies 0 \leq |\phi(P_{K^d} f)| \leq |\phi|(P_{K^d} f) \leq |\phi|f \implies |\phi P_{K^d}| \leq |\phi|$.

Así, $\psi \in L_n^\sim$. Observemos que:

(i) $\psi \neq 0$, pues existe $f_0 \neq 0$ tal que $\psi f_0 = \phi f_0 \neq 0$.

(ii) $\psi \perp \phi_s$, para todo s . En efecto: sean $s \in \{s\}$ y u en L^+ . Entonces:

$$\begin{aligned}(|\psi| \wedge |\phi_s|)u &= \inf \{ |\psi|v + |\phi_s|(u - v) : 0 \leq v \leq u \} \\ &\leq |\psi|(P_K u) + |\phi_s|(P_{K^d} u)\end{aligned}$$

pues $u \in L = K \oplus K^d \implies u = P_K u + P_{K^d} u$ con $0 \leq P_K u \leq u$ y

$$P_{K^d} u = u - P_K u.$$

Probaremos que $K \subseteq N_\psi$ y $K^d \subseteq N_{\phi_s}$. Sea f en K tal que $f \neq 0$. Entonces f no pertenece a K^d y por lo tanto $\psi f = 0$. Ahora, para todo $g: |g| \leq |f|$, como K es ideal, g pertenece a K y $\psi g = 0$. Es decir, $|\psi||f| = 0$. Lo que implica que f pertenece a N_ψ .

Por otro lado, sea h no nulo de K^d . Como $L = K \oplus K^d = N_{\phi_s} \oplus K_s$ y K_s está contenido en K , se tiene que h pertenece a N_{ϕ_s} .

De esta forma, se concluye que $|\psi|(P_K u) + |\phi_s|(P_{K^d} u) = 0$. De allí que $\psi \perp \phi_s$ para todo $s \in \{s\}$; y así, $\psi = 0$ por ser

$\{\mathcal{P}_s\}$ un sistema disjunto maximal. Pero $\psi \neq 0$, luego no es posible $L \neq K$.

Hemos probado así que existe una colección $\{K_s\}$ de bandas en L tales que $K_{s_1} \cap K_{s_2} = \{0\}$ con $s_1 \neq s_2$, cada una espacio de Riesz super Dedekind completo y con la propiedad de Egoroff y conteniendo una funcional lineal orden continua estrictamente positiva. Además, L es la banda generada por $\cup\{K_s\}$.

DEFINICION IV.11: (Espacio Norma Dual de L_p)

Sea L_p un espacio de Riesz normado. El espacio L_p^* de todas las funcionales lineales norma acotadas sobre L_p es llamado el Espacio Norma Dual de L_p . El espacio L_p^* es Banach con la norma $p^* : L_p^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$p^*(\phi) = \sup\{|\phi f| : p(f) \leq 1\}.$$

TEOREMA IV.12: Sea L_p un espacio de Riesz normado. Entonces L_p^* es un reticulado de Banach Dedekind completo.

DEMOSTRACION:

(i) Veamos que p^* es una norma de Riesz sobre L_p^* . En efecto, sean $\psi, \phi \in L_p^*$ tales que $|\psi| \leq |\phi|$. Entonces para todo elemento f de L_p se tiene:

$$|\psi(f)| \leq |\psi|(|f|) \leq |\phi|(|f|) = \sup\{\phi g : |g| \leq |f|\} = p^*(\phi)p(f),$$

de donde: $\sup\{|\psi f| : p(f) \leq 1\} \leq p^*(\phi)$. Así, $p^*(\psi) \leq p^*(\phi)$.

(ii) Probemos ahora que L_p^* está contenido en L_p^{\sim} . Sea entonces ϕ un elemento de L_p^* y sean $u, v \in L^+$ tales que $v \leq u$.

(Utilizaremos el teorema III.3)

Notemos que $|\phi v| = p(v)|\phi[v/p(v)]| \leq p(v)p^*(\phi)$
 $\leq p(u)p^*(\phi)$.

Luego el conjunto $\{\phi v: 0 \leq v \leq u\}$ es acotado superiormente, lo que implica que ϕ es orden acotada.

(iii) Por último demostraremos que L_p^* es un ideal en L_p^{\sim} . Sean $\phi \in L_p^*$, $\psi \in L_p^{\sim}$ tales que $|\psi| \leq |\phi|$. De la desigualdad:

$$|\psi f| \leq p^*(\phi)p(f)$$

para todo elemento f de L_p , se tiene que $p^*(\psi)$ es acotada.

Así, siendo L_p^* ideal en un espacio de Riesz Dedekind completo, se sigue que L_p^* es un espacio de Riesz Dedekind completo y más aún, L_p^* es un reticulado de Banach con la norma de Riesz p^* . Lo que concluye la demostración.

DEFINICION IV.13: (Espacio Norma Bidual de L_p)

Sea L_p un espacio de Riesz normado. El espacio L_p^{**} de todas las funcionales lineales norma acotadas sobre L_p^* es llamado el 'Espacio Norma Bidual de L_p '.

Como resultado directo del teorema IV.12, se sigue que L_p^{**} es un reticulado de Banach Dedekind completo.

Observación: Sea f un elemento de L_p y definamos la funcional $f'' : L_p^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $f''(\phi) = \phi(f)$. Considerando la aplicación que a cada f le asocia f'' , se tiene que L_p está contenido algebraica e isométricamente en L_p^{**} .

CAPITULO V

INDICES PARA RETICULADOS DE BANACH

En el capítulo II, probamos que dado un reticulado de Banach L_p con norma orden continua y una sucesión $\{u_n\}$ orden acotada y disjunta en L_p^+ , se tiene que $\{pu_n\}$ es convergente a cero en \mathbb{R} . Considerando lo anterior, veamos las siguientes definiciones para reticulados de Banach.

DEFINICION V.1: (Propiedad de la \mathcal{l}_q -descomposición)

El reticulado de Banach L_p se dice que tiene la Propiedad de la \mathcal{l}_q -descomposición ($1 \leq q < \infty$) si para toda sucesión $\{u_n\}$ orden acotada y disjunta de L_p^+ se tiene que $\{pu_n\}$ es un elemento de \mathcal{l}_q . (Recordemos que \mathcal{l}_q se define como sigue:

$$\mathcal{l}_q = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty \right\}, \quad 1 \leq q < \infty$$

$$\mathcal{l}_\infty = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R} : (x_n) \text{ es acotada} \right\}$$

Observación: Todo reticulado de Banach tiene la propiedad de la \mathcal{l}_∞ -descomposición. (Ver teorema II.11)

TEOREMA V.2: Sea L_p un reticulado de Banach con la propiedad

de la \mathcal{L}_q -descomposición. Si $r \geq q$ entonces L_p también posee la propiedad de la \mathcal{L}_r -descomposición.

DEMOSTRACION:

Siendo $r \geq q$ se tiene que $\mathcal{L}_q \subseteq \mathcal{L}_r$, luego si $\{u_n\}$ es una sucesión disjunta y orden acotada en L_p^+ , $\{pu_n\} \in \mathcal{L}_r$. Y por lo tanto, L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -descomposición.

TEOREMA V.3: Sea L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición para algún $q < \infty$. Entonces la norma p es orden continua.

DEMOSTRACION:

Sea $q < \infty$ tal que L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición. Entonces $\{pu_n\}$ pertenece a \mathcal{L}_q para toda sucesión $\{u_n\}$ orden acotada y disjunta en L_p^+ . Probaremos que $pu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En efecto, como $\sum_{n=1}^{\infty} |pu_n|^q < \infty$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |pu_n|^q = 0$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} pu_n = 0$.

Por lo tanto, $\{u_n\}$ converge a cero en norma que equivale a decir que la norma p es orden continua.

DEFINICION V.4: (Propiedad de la \mathcal{L}_q -composición)

El reticulado de Banach L_p se dice que tiene la Propiedad de la \mathcal{L}_q -composición ($1 \leq q \leq \infty$), si se tiene que

$$\sup \left\{ p \left(\sum_{n=1}^m a_n u_n \right) : m=1, 2, \dots \right\} < \infty,$$

siempre que $\{a_n\}$ es una sucesión en \mathcal{L}_q^+ y $\{u_n\}$ es una sucesión disjunta en L_p^+ con $pu_n \leq 1$ para todo n .

Observación: Todo reticulado de Banach tiene la propie-

dad de la \mathcal{L}_1 -composición. En efecto, sean $\{a_n\} \in \mathcal{L}_1^+$ y $\{u_n\}$ una sucesión disjunta en L_p^+ tal que $pu_n \leq 1$ para todo n . Así, de la desigualdad: $p(\sum_{n=1}^m a_n u_n) \leq \sum_{n=1}^m a_n pu_n \leq \sum_{n=1}^m a_n$, se obtiene que $\sup\{p(\sum_{n=1}^m a_n u_n)\} \leq \sup\{\sum_{n=1}^m a_n\} < \infty$.

TEOREMA V.5: Sea L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición. Si $r \leq q$ entonces L_p también tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición.

DEMOSTRACION:

Siendo $r \leq q$ se tiene que $\mathcal{L}_r \subseteq \mathcal{L}_q$, luego para toda sucesión de números $\{a_n\}$ en \mathcal{L}_r^+ y toda sucesión disjunta $\{u_n\}$ en L_p^+ con $pu_n \leq 1$, se tiene que $\sup_{m \geq 1}\{p(\sum_{n=1}^m a_n u_n)\} < \infty$ por tener L_p la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición. Así, L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición.

TEOREMA V.6: Sea L_p un reticulado de Banach y sean $1 \leq q, r \leq \infty$ tales que $1/q + 1/r = 1$ (admitiendo $1/\infty = 0$). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición.
- (b) L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición.

(Donde L_p^* es el espacio norma dual de L_p .)

DEMOSTRACION:

Caso 1: $q = \infty$. Entonces $r = 1$, y como todo reticulado de Banach tiene la propiedad de la \mathcal{L}_∞ -descomposición y la propiedad de la \mathcal{L}_1 -composición, se tiene que L_p y L_p^* tienen ambas propiedades.

Caso 2: $q < \infty$.

(a) \implies (b) Escojamos $q < \infty$ arbitrario, y supongamos que L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición. Entonces la norma p es orden continua y por el teorema II.10 L_p es super-Dedekind completo.

Sea $\{a_n\} \in \mathcal{L}_r^+$ y sea $\{\phi_n\}$ sucesión de elementos positivos y disjuntos de L_p^* con $p^*(\phi_n) \leq 1$ para todo n . Entonces ϕ_n es una funcional orden continua para todo n . En efecto: sea m fijo y $\phi = \phi_m$. Además, tomemos $u_t \downarrow 0$ en L_p y $\varepsilon > 0$. Como p es orden continua, $pu_t \downarrow 0$ y luego existe t' tal que $pu_{t'} < \varepsilon$. Observemos que siendo $p^*(\phi) \leq 1$ se tiene que:

$\varepsilon p^*(\phi) = \varepsilon \sup\{|\phi v| : pv \leq 1\} = \sup\{|\phi w| : pw \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon$. Así, existe t' tal que $\phi u_{t'} \in \{|\phi w| : pw \leq \varepsilon\}$. De donde existe t' tal que $\phi u_{t'} \leq \varepsilon$. Por lo tanto $\inf\{\phi u_t\} = 0$.

Con L_p Dedekind completo y $\{\phi_n\}$ sucesión disjunta de funcionales orden continuas de L_p^* , podemos aplicar el teorema IV.5 que afirma que la sucesión de las bandas de soporte $\{C_{\phi_n}\}$ asociadas a la sucesión $\{\phi_n\}$ es tal que $C_{\phi_n} \cap C_{\phi_m} = \{0\}$ para $n \neq m$. Y en estas condiciones se tiene además que $C_{\phi_n} \subseteq N_{\phi_m}$ para $n \neq m$.

Sea $0 \leq u \in L_p = C_{\phi_n} \oplus N_{\phi_n}$ y sea u_n la componente de u en C_{ϕ_n} para todo n . Claramente $\{u_n\}$ es una sucesión de elementos positivos de L_p (por teorema I.24) y además orden acotada por u . Veamos que $\{u_n\}$ es disjunta: sean $n \neq m$; como C_{ϕ_n} está contenido en N_{ϕ_m} se tiene que $u_n \in N_{\phi_m}$ y por lo tanto, $u_n \perp u_m$. (Recordar que $C_{\phi_m} = (N_{\phi_m})^d$).

Así, $\{u_n\}$ es una sucesión orden acotada y disjunta en L_p^+ . Como por hipótesis L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición, $\{pu_n\}$ es un elemento de \mathcal{L}_q .

Observemos ahora lo siguiente:

$$0 \leq p^*(a_n \phi_n) = a_n p^*(\phi_n) \leq a_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p^*(a_n \phi_n)^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q < \infty \\ \rightarrow \{p^*(a_n \phi_n)\} \in \mathcal{L}_r.$$

Siendo $\{pu_n\} \in \mathcal{L}_q$, $\{p^*(a_n \phi_n)\} \in \mathcal{L}_r$ con $1/q + 1/r = 1$, $1 < q < \infty$, se tiene que $\{pu_n p^*(a_n \phi_n)\} \in \mathcal{L}_1$; lo que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} pu_n p^*(a_n \phi_n) = \gamma < \infty$.

$$\text{Para cada } m \geq 1 \text{ tenemos } \left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n \right) u = \sum_{n=1}^m a_n \phi_n u \\ = \sum_{n=1}^m a_n \phi_n u_n$$

(por ser u_n la componente de la banda de soporte de ϕ_n).

Por otro lado, para todo natural n : $\phi_n(u_n/pu_n) \leq p^*(\phi_n)$.

Luego se obtiene:

$$\left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n \right) u \leq \sum_{n=1}^m p^*(a_n \phi_n) pu_n \leq \gamma.$$

Y esto para un elemento u de L_p^+ arbitrario.

Podemos entonces concluir que para todo $f \in L_p$ existe

$\gamma_f \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m \geq 1$ se tiene:

$$\left| \left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n \right) f \right| \leq \gamma_f.$$

Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus del acotamiento uniforme, se tiene que existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m \geq 1$ y para todo $f \in L_p$: $\left| \left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n \right) f \right| \leq \gamma_0$. Luego, existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $m \geq 1$: $p^*\left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n\right) \leq \gamma_0$.

Por lo tanto, $\sup\{p^*\left(\sum_{n=1}^m a_n \phi_n\right)\} \leq \gamma_0 < \infty$. Así, L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición.

(b) \implies (a) Supongamos que L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición para algún $r > 1$. Sea $\{u_n\}$ una sucesión ordenada acotada de elementos positivos y disjuntos en L_p y sea $u \in L_p$ tal que para todo natural n , $0 \leq u_n \leq u$. Demostraremos que $\{pu_n\}$ pertenece a \mathcal{L}_q .

Sea $\{a_n\} \in \mathcal{L}_r^+$ y escojamos una sucesión $\{\phi_n\}$ en L_p^{*+} tal que $p^*(\phi_n) \leq 1$ para todo n , y tal que $\phi_n(u_n) \geq pu_n - 1/2^n a_n$ también para cada n .

Recordemos que cada elemento de L_p se identifica con un elemento de L_p^{**} . Luego, $\{u_n\}$ es una sucesión disjunta de elementos de L_p^{**} y además cada u_n resulta ser una funcional ordenada continua sobre L_p^* . Como L_p^* es Dedekind completo, por teorema IV.5 se tiene que las bandas de soporte $\{C_{u_n}\}$ en L_p^* son tales que $C_{u_n} \cap C_{u_m} = \{0\}$ para $m \neq n$.

Para cada n , sea ψ_n la componente de ϕ_n en C_{u_n} . Entonces $\{\psi_n\}$ es una sucesión de elementos positivos y disjuntos de L_p^* y tal que $p^*(\psi_n) \leq p^*(\phi_n) \leq 1$, para todo n . Y además:

$$\psi_n(u_n) = \phi_n(u_n) \geq pu_n - 1/2^n a_n$$

para todo natural n .

Veamos ahora las siguientes desigualdades:

$$a_n \psi_n(u_n) \geq a_n pu_n - 1/2^n \quad \text{para todo } n,$$

de donde se obtiene para cada $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n pu_n &\leq \sum_{n=1}^m a_n \psi_n(u_n) + \sum_{n=1}^m 1/2^n \\ &\leq \sum_{n=1}^m a_n \psi_n(u) + 1 \\ &\leq \sum_{n=1}^m a_n \psi_n(u) + 1 \\ &\leq p(u) p^*\left(\sum_{n=1}^m a_n \psi_n\right) + 1. \end{aligned}$$

Però recordemos que L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición y siendo $\{a_n\} \in \mathcal{L}_r^+$ y $\{\psi_n\}$ sucesión disjunta en L_p^* con $p^*(\psi_n) \leq 1$ para todo n , se tiene:

$$\sup p^*\left(\sum_{n=1}^m a_n \psi_n\right) = \gamma < \infty .$$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p u_n \leq 1 + \gamma p u < \infty$,

obteniendo así que $\{a_n p u_n\}$ pertenece a \mathcal{L}_1 , donde $\{a_n\} \in \mathcal{L}_r^+$ con $1/r + 1/q = 1$ y $r > 1$; lo que implica que $\{p u_n\} \in \mathcal{L}_q$, concluyendo la demostración.

LEMA V.7: Sea L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición, $1 \leq q \leq \infty$. Entonces existe una constante positiva M tal que para cualquier sucesión finita y disjunta $\{u_i: i=1, \dots, n\}$ en L_p^+ se tiene

$$p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq \begin{cases} M \left[\sum_{i=1}^n (p u_i)^q \right]^{1/q} & \text{si } q \neq \infty \\ M \max\{p u_i: i=1, \dots, n\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Escojamos q arbitrario ($1 \leq q \leq \infty$), y sea L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición.

Caso 1: $q \neq \infty$. Definamos:

$$M_q = \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) : n \in \mathbb{N}, \{u_i: i=1, \dots, n\} \text{ es una sucesión disjunta en } L_p^+ \text{ con } \left[\sum_{i=1}^n (p u_i)^q \right]^{1/q} \leq 1 \right\}$$

Probaremos que M_q está acotado superiormente y que $M = \sup M_q$ resuelve el problema.

En primer lugar, consideremos la aplicación

$$s_q: L_p^+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida por:

$s_q(v) = \sup \left\{ p \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) : n \in \mathbb{N}, \{u_i : i=1, \dots, n\} \text{ es una sucesión disjunta en } I_v^+ \text{ con } \left[\sum_{i=1}^n (pu_i)^q \right]^{1/q} \leq 1 \right\}$
 (recordando que I_v es el ideal principal generado por v en L_p).

Se sigue entonces, por propiedad de ideales y teorema I.7, las siguientes afirmaciones:

- (i) $0 \leq s_q(v) \leq s_q(w)$ siempre que $0 \leq v \leq w$.
- (ii) $s_q(v+w) \leq s_q(v) + s_q(w)$ para todo v, w en L_p^+ .

Supongamos ahora que M_q no está acotado superiormente.

Entonces para cualquier natural $n \geq 1$, existe una sucesión finita y disjunta $\{u_i^n : 1 \leq i \leq m\}$ en L_p^+ tal que:

$$\left[\sum_{i=1}^m (pu_i^n)^q \right]^{1/q} \leq 1 \quad \text{y} \quad p \left(\sum_{i=1}^m u_i^n \right) > n.$$

Sean $t_n = \sum_{i=1}^m u_i^n$ y $v_n = t_n / 2^{n+1} p t_n$ para cada $n \geq 1$. Entonces la sucesión $\{v_n\}$ en L_p^+ es tal que para todo n :

(a) u_i^n pertenece a I_{v_n} , $i=1, \dots, m$; y $p \left(\sum_{i=1}^m u_i^n \right) > n$, de donde se obtiene que $s_q(v_n) > n$.

$$(b) \quad pv_n = 1/2^{n+1} < 1/2^n.$$

Considerando la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$, como $p(S_n - S_{n-1}) = pv_n < 1/2^n$, se tiene que $\{S_n\}$ es una sucesión norma Cauchy en el reticulado de Banach L_p ; luego $\{S_n\}$ tiene norma límite. Sea v_0 tal norma límite.

Entonces $v_0 = \sup S_n$ por teorema II.6. Veamos que $s_q(v_0) = \infty$. En efecto siendo $v_0 \geq v_n$ para todo n , si suponemos que $s_q(v_0) = k \neq \infty$, se tendría $k = s_q(v_0) \geq s_q(v_n) > n$ para todo natural n , lo cual es absurdo. Así, de $s_q(v_0) = \infty$, se obtiene una sucesión disjunta $\{w_i : i=1, \dots, r(1)\}$ en $I_{v_0}^+$ tal que

$$\left[\sum_{i=1}^{r(1)} (pw_i)^q \right]^{1/q} < 1/2 \quad \text{y} \quad p \left(\sum_{i=1}^{r(1)} w_i \right) > 2.$$

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que:

$$\left[\sum_{i=1}^{r(1)} (pw_i)^q + (\delta pv_0)^q \right]^{1/q} < 1/2 \quad (*)$$

$$p \left[\sum_{i=1}^{r(1)} (w_i - \delta v_0)^+ \right] > 2 \quad (**)$$

Considerando la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{r(1)} (w_i - \frac{1}{2}\delta v_0)^+ + (\delta v_0 - w_0)^+ \geq \frac{1}{2}\delta v_0, \text{ donde } w_0 = \sup\{w_i : 1 \leq i \leq r(1)\},$$

se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{r(1)} s_q(w_i - \frac{1}{2}\delta v_0)^+ + s_q(\delta v_0 - w_0)^+ \geq s_q \left[\sum_{i=1}^{r(1)} (w_i - \frac{1}{2}\delta v_0)^+ + (\delta v_0 - w_0)^+ \right] = \infty.$$

De donde; $s_q(w_i - \frac{1}{2}\delta v_0)^+ = \infty$ para algún $i \in \{1, \dots, r(1)\}$, o $s_q(\delta v_0 - w_0)^+ = \infty$.

Es decir; $s_q(w_i) = \infty$ para algún $i \in \{1, \dots, r(1)\}$, o bien

$$s_q(\delta v_0 - w_0)^+ = \infty.$$

Si se tiene que $s_q(w_i) = \infty$ para algún $i \in \{1, \dots, r(1)\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer $i=r(1)$. Luego, se obtiene

una sucesión disjunta $\{w_i : i=r(1)+1, \dots, r(2)\}$ en $I_{w_{r(1)}}^+$ tal que $\left[\sum_{i=r(1)+1}^{r(2)} (pw_i)^q \right]^{1/q} < 1/2^2$ y $p \left(\sum_{i=r(1)+1}^{r(2)} w_i \right) > 2$. Por otro lado, si $s_q(w_i) < \infty$ para todo $i=1, \dots, r(1)$, entonces $s_q(\delta v_0 - w_0)^+ = \infty$;

y en este caso, redefinimos la sucesión $\{w_i : i=1, \dots, r(1)\}$ de

la siguiente manera: $\bar{w}_i = (w_i - \delta v_0)^+$ para $i=1, \dots, r(1)-1$

$$\bar{w}_{r(1)} = (\delta v_0 - w_0)^+.$$

Claramente, $\{\bar{w}_i : i=1, \dots, r(1)\}$ es una sucesión disjunta en $I_{v_0}^+$;

y utilizando las condiciones (*) y (**), se obtiene:

$$\left[\sum_{i=1}^{r(1)} (p\bar{w}_i)^q \right]^{1/q} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad p \left(\sum_{i=1}^{r(1)} \bar{w}_i \right) > 1.$$

(Esta última desigualdad se obtiene de lo siguiente:

$$p \left(\sum_{i=1}^{r(1)} \bar{w}_i \right) > p \left(\sum_{i=1}^{r(1)-1} \bar{w}_i \right) > 2 - p(w_{r(1)} - \delta v_0)^+ > 1.)$$

Además, $\{\bar{w}_i : i=1, \dots, r(1)\}$ es tal que $s_q(\bar{w}_{r(1)}) = \infty$, lo que

permite continuar el proceso anterior.

Hemos construido entonces una sucesión $\{w_i: i=1, 2, \dots\}$ en L_p^+ tal que para $n=0, 1, \dots$ se tiene:

(i) $w_{r(n)+1}, w_{r(n)+2}, \dots, w_{r(n+1)}$ son elementos disjuntos del cono positivo del ideal principal generado por $w_{r(n)}$.

(ii) $s_q(w_{r(n+1)}) = \infty$.

(iii) $[\sum_{i=r(n)+1}^{r(n+1)} (pw_i)^q]^{1/q} < 1/2^{n+1}$.

(iv) $p(\sum_{i=r(n)+1}^{r(n+1)} w_i) > n+1$.

(Nota: se entenderá $r(0) = 0$).

Definamos ahora la sucesión $\{u_i: i=1, 2, \dots\}$ en L_p^+ de la siguiente manera: $u_i = w_i$ para $i \neq r(n)$, $n=1, 2, \dots$

$$u_{r(n)} = 0 \quad \text{para } n=1, 2, \dots$$

Entonces:

(a) $\{u_i\}$ es una sucesión disjunta. En efecto, basta observar que siendo $w_{r(n)+1}, \dots, w_{r(n+1)}$ elementos disjuntos de $I_{w_{r(n)}}^+$ para $n=0, 1, \dots$, se tiene que $w_{r(n-1)+i} \wedge w_{r(n)+j} = 0$ para $n=1, 2, \dots$, $r(n-1)+1 \leq r(n-1)+i \leq r(n)$, $r(n)+1 \leq r(n)+j \leq r(n+1)$.

(b) $\{u_i\}$ es tal que $[\sum_{i=1}^{\infty} (pu_i)^q]^{1/q} < 1$. En efecto; observemos que para n fijo, se obtiene de la condición (iii) inmediatamente anterior,

$$[\sum_{i=1}^{n+1} (pu_i)^q]^{1/q} < 1/2 + 1/2^2 + \dots + 1/2^n.$$

Luego, cuando $n \rightarrow \infty$, resulta:

$$[\sum_{i=1}^{\infty} (pu_i)^q]^{1/q} < \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^n < 1.$$

Por último, consideremos la sucesión $\{u_i/pu_i: i=1, 2, \dots\}$ en L_p^+ . Como $pu_i < 1$ para $i=1, 2, \dots$, se tiene que $u_i/pu_i \wedge u_j/pu_j = [(pu_i)(pu_j)]^{-1} [u_i pu_j \wedge u_j pu_i] <$

$$\langle [(pu_i)(pu_j)]^{-1}(u_i \wedge u_j) = 0 \text{ para todo } i \neq j;$$

y además, $p(u_i/pu_i) = 1$ para todo $i=1,2,\dots$.

Resumiendo los dos últimos resultados, $\{pu_i:i=1,2,\dots\}$ es una sucesión en \mathcal{L}_q^+ y $\{u_i/pu_i:i=1,2,\dots\}$ es una sucesión disjunta en L_p^+ con $p(u_i/pu_i) = 1$ para todo i . Por ser L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición, existe una constante K tal que

$$p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq K < \infty,$$

para todo natural n . Luego, para todo n se tiene:

$K \geq p\left(\sum_{i=1}^{r(n)+1} u_i\right) = p\left(\sum_{i=1}^{r(n)+1} w_i\right) \geq p\left(\sum_{i=1}^{r(n)} w_i\right) - p(w_{r(n)+1}) > n$; obteniendo una contradicción. Por lo tanto, M_q está acotado superiormente.

Sea $M = \sup M_q$, y consideremos una sucesión $\{u_i:i=1,\dots,n\}$ en L_p^+ disjunta arbitraria. Pongamos $S = \left[\sum_{i=1}^n (pu_i)^q\right]^{1/q}$. Entonces $\left[\sum_{i=1}^n [p(u_i/S)]^q\right]^{1/q} = 1$, con $\{u_i/S:i=1,\dots,n\}$ sucesión disjunta en L_p^+ . Por definición de M_q , se tiene que $p\left[\sum_{i=1}^n (u_i/S)\right] \leq M$, es decir, $p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq MS = M\left[\sum_{i=1}^n (pu_i)^q\right]^{1/q}$, lo cual concluye la demostración en el caso $q \neq \infty$.

Caso 2: $q = \infty$. Se definen ahora:

$$M_q = \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) : n \in \mathbb{N}, \{u_i:i=1,\dots,n\} \text{ es una sucesión disjunta en } L_p^+ \text{ con } \max\{pu_i:i=1,\dots,n\} \leq 1 \right\}, \text{ y}$$

$$s_q(v) = \sup\left\{ p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) : n \in \mathbb{N}, \{u_i:i=1,\dots,n\} \text{ es una sucesión disjunta en } I_v^+ \text{ con } \max\{pu_i:i=1,\dots,n\} \leq 1 \right\}.$$

En forma análoga al caso anterior, se concluye que existe una constante M tal que $M = \sup M_q$ y que:

$$p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \leq M \max\{pu_i : i=1, \dots, n\}$$

para toda sucesión finita y disjunta $\{u_i : i=1, \dots, n\}$ en L_p^+ .

LEMA V.8: Sea L_p un reticulado de Banach y sea $\{\phi_i : i=1, \dots, n\}$ una sucesión disjunta en L_p^{*+} . Entonces existe una sucesión disjunta $\{u_i : i=1, \dots, n\}$ en L_p^+ tal que $pu_i \leq 1$ para todo i , y
$$\sum_{i=1}^n p^* \phi_i \leq 1 + \sum_{i=1}^n \phi_i u_i .$$

DEMOSTRACION:

Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$p^* \phi_i = \sup\{|\phi_i f| : pf \leq 1\}.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe f_ε en L_p tal que $pf_\varepsilon \leq 1$ y $p^* \phi_i - \varepsilon < |\phi_i f_\varepsilon|$. Luego para $\varepsilon = 2^{-(i+1)}$, existe v_i en L_p^+ tal que $pv_i \leq 1$ y

$$p^* \phi_i - 2^{-(i+1)} < \phi_i v_i. \quad (1)$$

Como $\{\phi_i : i=1, \dots, n\}$ es una sucesión disjunta, para cualquier $j \neq i$ se tiene $(\phi_j \wedge \phi_i)v_i = 0$. Es decir,

$$\inf\{\phi_j v + \phi_i(v_i - v) : 0 \leq v \leq v_i\} = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Lo que implica que para cualquier $j \neq i$, existe $0 \leq w_i \leq v_i$ en L_p tal que

$$\phi_j w_i + \phi_i(v_i - w_i) < n^{-2} 2^{-(n+2)} < 2^{-(i+2)}. \quad (2)$$

De donde, para cualquier $j \neq i$:

$$\phi_j w_i \leq \sum_{j \neq i} \phi_j w_i < n^{-1} 2^{-(n+2)}. \quad (3)$$

Definamos ahora los vectores:

$$u_i = (w_i - \sup\{w_j : j \neq i\})^+ \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Entonces la sucesión $\{u_i : i=1, \dots, n\}$ en L_p^+ verifica las siguientes propiedades:

(i) $u_i \perp u_j$ para todo $j \neq i$. En efecto; sea $j \neq i$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces:} & \begin{cases} \sup\{w_j: i \neq j\} \geq w_j \\ \sup\{w_i: i \neq j\} \geq w_i \end{cases} \\ \longrightarrow & \begin{cases} (w_i - \sup\{w_j: i \neq j\})^+ \leq (w_i - w_j)^+ \\ (w_j - \sup\{w_i: i \neq j\})^+ \leq (w_j - w_i)^+ \end{cases} \\ \longrightarrow & \begin{cases} u_i \leq (w_i - w_j)^+ \\ u_j \leq (w_j - w_i)^+ = (w_i - w_j)^- \end{cases} \\ \longrightarrow & 0 \leq u_i \wedge u_j \leq (w_i - w_j)^+ \wedge (w_i - w_j)^- = 0. \end{aligned}$$

(ii) $pu_i \leq 1$ para todo $i=1, \dots, n$. En efecto; sea i un elemento de $\{1, \dots, n\}$. Entonces para todo $j \neq i$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq w_j & \longrightarrow w_i - \sup\{w_j: j \neq i\} \leq w_i \leq v_i \\ & \longrightarrow u_i \leq v_i \\ & \longrightarrow pu_i \leq pv_i \leq 1. \end{aligned}$$

(iii) $\sum_{i=1}^n p^* \phi_i \leq 1 + \sum_{i=1}^n \phi_i u_i$. En efecto; para $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} u_i &= (w_i - \sup\{w_j: j \neq i\})^+ \\ &= (w_i - \sup\{w_j: j \neq i\}) \vee 0 = w_i + (-\sup\{w_j: j \neq i\}) \vee (-w_i) \\ &= w_i - \sup\{w_j: j \neq i\} \wedge w_i \\ &\geq w_i - \sup\{w_j: j \neq i\} \geq w_i - \sum_{j \neq i} w_j. \end{aligned}$$

Y aplicando la funcional ϕ_i , se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_i u_i &\geq \phi_i w_i - \sum_{j \neq i} \phi_i w_j \\ &\geq (\phi_i v_i - 2^{-(i+2)}) - \sum_{j \neq i} n^{-1} 2^{-(n+2)} && \text{(por 2 y 3)} \\ &\geq \phi_i v_i - 2^{-(i+2)} - 2^{-(n+2)} \\ &\geq p^* \phi_i - 2^{-(i+1)} - 2^{-(i+2)} - 2^{-(n+2)} && \text{(por 1)} \\ &\geq p^* \phi_i - 2^{-i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto,} \quad \sum_{i=1}^n \phi_i u_i &\geq \sum_{i=1}^n p^* \phi_i - \sum_{i=1}^n 2^{-i} \\ &\geq \sum_{i=1}^n p^* \phi_i - 1. \end{aligned}$$

Hemos obtenido entonces una sucesión $\{u_i: i=1, \dots, n\}$ disjunta en L_p^+ tal que $pu_i \leq 1$ para todo i , y que verifica la desigualdad: $\sum_{i=1}^n p^* \phi_i \leq 1 + \sum_{i=1}^n \phi_i u_i$. Lo que concluye la demostración.

TEOREMA V.9: Sea L_p un reticulado de Banach y sean $1 \leq q, r \leq \infty$ tales que $1/q + 1/r = 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición.
- (b) L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -descomposición.

DEMOSTRACION:

Caso 1: $q = 1$. Entonces $r = \infty$, y como todo reticulado de Banach tiene la propiedad de la \mathcal{L}_1 -composición y la propiedad de la \mathcal{L}_∞ -descomposición, se tiene que L_p y L_p^* tienen ambas propiedades.

Caso 2: $q > 1$.

(a) \implies (b) Escojamos $q > 1$ arbitrario, y supongamos que L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición. Sea $\{\phi_i: i \geq 1\}$ una sucesión disjunta y orden acotada en L_p^{*+} . Probaremos que $\{p^* \phi_i\}$ es un elemento de \mathcal{L}_r , demostrando que $\{a_i p^* \phi_i\}$ es un elemento de \mathcal{L}_1 para toda sucesión $\{a_i\}$ en \mathcal{L}_q^+ .

Sea entonces $\{a_i\}$ una sucesión en \mathcal{L}_q^+ y sea

$$K = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{\infty} a_i^q)^{1/q} & \text{si } q \neq \infty \\ \sup\{a_i: i=1, 2, \dots\} & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Fijemos el natural n , y consideremos la sucesión disjunta $\{a_i \phi_i: i=1, \dots, n\}$ en L_p^{*+} . Por el lema V.8, existe una suce-

sión disjunta $\{u_i: i=1, \dots, n\}$ en L_p^+ tal que $pu_i \leq 1$ para todo $i=1, \dots, n$, y

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i p^* \phi_i &\leq 1 + \sum_{i=1}^n (a_i \phi_i) u_i \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^n (a_i \phi) u_i \\ &= 1 + \phi \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) \end{aligned} \quad (*)$$

donde $\phi_i \leq \phi$ para todo $i=1, \dots, n$.

Por otro lado, siendo L_p un reticulado de Banach con la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición, aplicando el lema V.7, existe una constante M tal que para cualquier sucesión finita y disjunta en L_p^+ , en particular para $\{a_i u_i: i=1, \dots, n\}$, se tiene:

$$p\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \leq \begin{cases} M \left[\sum_{i=1}^n [p(a_i u_i)]^q \right]^{1/q} & \text{si } q \neq \infty \\ M \max\{p(a_i u_i): i=1, \dots, n\} & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Regresando a la desigualdad (*),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i p^* \phi_i &\leq 1 + \phi \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) \\ &\leq 1 + (p^* \phi) p \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right) \\ &\leq \begin{cases} 1 + (p^* \phi) M \left[\sum_{i=1}^n [p(a_i u_i)]^q \right]^{1/q} & \text{si } q \neq \infty \\ 1 + (p^* \phi) M \max\{p(a_i u_i): i=1, \dots, n\} & \text{si } q = \infty \end{cases} \\ &\leq 1 + (p^* \phi) MK. \end{aligned}$$

Luego, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p^* \phi_i < \infty$.

(b) \implies (a) Sea ahora $r < \infty$, y supongamos que L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -descomposición. Sean $\{a_i\}$ una sucesión en \mathcal{L}_q^+ y $\{u_i\}$ una sucesión disjunta en L_p^+ con $pu_i \leq 1$ para todo $i=1, 2, \dots$. Como cada elemento de L_p se identifica con una funcional lineal orden continua de L_p^{**} , consideremos la sucesión disjunta $\{u_i\}$ ahora en $(L_p^*)^{\mathcal{N}}$. Siendo L_p^* Dedekind completo, del teorema IV.5 podemos concluir que la sucesión de las bandas de soporte $\{C_i\}$ asociada a la sucesión $\{u_i\}$ es tal que

$C_i \cap C_j = \{0\}$ para $i \neq j$. Sea ϕ un elemento de L^{*+} y denotemos por ϕ_i la componente de ϕ en la banda de soporte de u_i . Entonces $\{\phi_i: i=1,2,\dots\}$ es una sucesión disjunta y orden acotada de L_p^{*+} . Como por hipótesis, L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -descomposición, $\{p^*\phi_i\}$ pertenece a \mathcal{L}_r .

Por otro lado, como $\{a_i\}$ pertenece a \mathcal{L}_q^+ y $pu_i \leq 1$ para todo i , se tiene que $\{p(a_i u_i)\}$ también pertenece a \mathcal{L}_q^+ . Luego, $\{(p^*\phi_i)p(a_i u_i)\}$ es un elemento de \mathcal{L}_1^+ . Sea entonces:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (p^*\phi_i)p(a_i u_i) = R < \infty.$$

Para un natural m arbitrario tenemos,

$$\phi\left(\sum_{i=1}^m a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^m \phi_i(a_i u_i) \leq \sum_{i=1}^m (p^*\phi_i)p(a_i u_i) \leq R.$$

Notemos que el resultado anterior, se ha obtenido para un elemento ϕ de L_p^{*+} arbitrario. Se sigue entonces que para cada funcional ψ de L_p^{*+} , existe una constante positiva R_ψ tal que

$$\left|\psi\left(\sum_{i=1}^m a_i u_i\right)\right| \leq R_\psi.$$

Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus, existe una constante \bar{R} tal que

$$p\left(\sum_{i=1}^m a_i u_i\right) \leq \bar{R}$$

para todo natural m ; lo que prueba que L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -composición.

DEFINICION V.10: (Índice Superior e Índice Inferior de un Reticulado de Banach). El Índice Superior σ_p del Reticulado de Banach L_p , es definido por:

$$\sigma_p = \inf\{q: L_p \text{ tiene la propiedad de la } \mathcal{L}_q\text{-descomposición}\}.$$

El Índice Inferior S_p del Reticulado de Banach L_p , es de-

finido por:

$$S_p = \sup\{q: L_p \text{ tiene la propiedad de la } \mathcal{L}_q\text{-composición}\}.$$

TEOREMA V.11: Sea L_p un reticulado de Banach. Entonces:

(a) Si $\dim(L_p) < \infty$, se tiene $\sigma_p^j = 1$ y $S_p = \infty$.

(b) Si $\dim(L_p) = \infty$, se tiene $1 \leq S_p \leq \sigma_p^j \leq \infty$.

DEMOSTRACION:

(a) Si $\dim(L_p) < \infty$, entonces L_p tiene las propiedades de la \mathcal{L}_q -descomposición y de la \mathcal{L}_q -composición para todo $1 \leq q \leq \infty$. (Basta observar que dada una sucesión disjunta en L_p , ésta tiene un número finito de términos no nulos.) En estas condiciones, $\sigma_p^j = 1$ y $S_p = \infty$.

(b) Supongamos ahora que $\dim(L_p) = \infty$ y que $\sigma_p^j < S_p$. Entonces existen números reales q, r tales que

$$1 \leq \sigma_p^j < q < r < S_p \leq \infty.$$

De los teoremas V.2 y V.5, se sigue que L_p tiene las propiedades de la \mathcal{L}_q -descomposición y de la \mathcal{L}_r -composición.

Sea $s = q/(q-1)$; entonces $1/q + 1/s = 1$, y existen sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ en \mathcal{L}_r^+ y \mathcal{L}_s^+ respectivamente, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \infty$. (Obsérvese que $\mathcal{L}_q \not\subseteq \mathcal{L}_r$).

Siendo $\dim(L_p^*) = \dim(L_p) = \infty$, se puede escoger una sucesión disjunta $\{\phi_n\}$ en L_p^{*+} con $p^* \phi_n = 1$ para todo n . (Ver [6], teorema 26.10).

Como L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición, aplicando el teorema V.6, se tiene que L_p^* tiene la propiedad de la \mathcal{L}_s -composición. Así, para cada natural m se tiene que

$$p^*\left(\sum_{n=1}^m y_n \phi_n\right) \leq K_1$$

donde $K_1 = \sup\{p^*\left(\sum_{n=1}^m y_n \phi_n\right) : m=1,2,\dots\}$.

Puesto que para cada n , $p^*\phi_n = 1$, podemos escoger una sucesión $\{u_n\}$ en L_p^+ tal que $pu_n \leq 1$ y $\phi_n u_n > \frac{1}{2}$ para todo n .

Por los teoremas V.3 y II.10, L_p es un reticulado de Banach Dedekind completo. Además, cada ϕ_n es orden continua por serlo p (ver demostración del teorema V.6); y aplicando el teorema IV.5, existe una sucesión $\{C_n\}$ en L_p de bandas de soporte asociada a $\{\phi_n\}$ tal que $C_n \cap C_m = \{0\}$ para $n \neq m$. Denotemos por v_n la componente de u_n en C_n . Asimismo como vimos en la demostración del teorema IV.5, se tiene que $\{v_n\}$ es una sucesión disjunta en L_p^+ . Además, $\{v_n\}$ es tal que $\phi_n v_n > \frac{1}{2}$ y $pv_n \leq 1$ para todo n .

Como L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_r -composición, existe una constante K_2 tal que para cada natural m se tiene:

$$p\left(\sum_{n=1}^m x_n v_n\right) \leq K_2.$$

Considerando la desigualdad:

$$\phi v \leq (p^*\phi)(pv),$$

para toda funcional ϕ de L_p^{*+} y todo elemento v de L_p^+ , se tiene que para todo natural m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m x_n y_n &< \sum_{n=1}^m x_n y_n \phi_n(v_n) = \sum_{n=1}^m y_n \phi_n(x_n v_n) \\ &\leq p^*\left(\sum_{n=1}^m y_n \phi_n\right) p\left(\sum_{n=1}^m x_n v_n\right) \\ &\leq K_1 K_2. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^m x_n y_n < 2K_1 K_2,$$

lo que no es posible. Concluyendo entonces que

$$1 \leq s_p \leq \sigma_p \leq \infty.$$

Observación: La propiedad anterior de los índices S_p, σ_p es la que da los nombres de índice inferior e índice superior respectivamente.

TEOREMA V.12: Sea L_p un reticulado de Banach, y denotemos su norma dual por L_{p^*} ; es decir, $L_{p^*} = L_p^*$. Entonces:

- (i) $1/S_p + 1/\sigma_{p^*} = 1$
- (ii) $1/\sigma_p + 1/S_{p^*} = 1$.

DEMOSTRACION:

(i) Caso 1: $S_p = 1$. Trivial.

Caso 2: $S_p > 1$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión creciente de números reales tal que $1 \leq x_n \uparrow S_p$. De esta forma, L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_{x_n} -composición para todo n . Consideremos la sucesión $\{y_n\}$ en \mathbb{R}^+ tal que $1/x_n + 1/y_n = 1$ para todo n . Entonces, L_{p^*} tiene la propiedad de la \mathcal{L}_{y_n} -descomposición para todo n . Probemos que $y_n \downarrow \sigma_{p^*}$. Para tal fin, supongamos que $\inf\{y_n: n=1,2,\dots\} > \sigma_{p^*}$. Entonces existen números reales r_1, r_2 tales que $y_n \geq r_1 > r_2 > \sigma_{p^*}$ para todo n ; de donde, L_{p^*} tiene la propiedad de la \mathcal{L}_{r_i} -descomposición para $i=1,2$. Sea $s_i = r_i/(r_i-1)$ para $i=1,2$. Así, L_p tiene la propiedad de la \mathcal{L}_{s_i} -composición para $i=1,2$; y además, se obtiene $s_2 > s_1 \geq x_n$ para todo n . Esto implica que $s_2 > S_p$, lo cual es una contradicción. Luego, $y_n \downarrow \sigma_{p^*}$; y aplicando límite a la igualdad $1/x_n + 1/y_n = 1$, se concluye que

$$1/S_p + 1/\sigma_{p^*} = 1.$$

(ii) Se demuestra en forma análoga.

Para concluir, analicemos ahora algunos ejemplos:

EJEMPLO V.13: (Los Espacios L_q -abstractos)

Un reticulado de Banach L_p de dimensión infinita es un espacio L_q -abstracto, $1 \leq q < \infty$, si

$$[p(u + v)]^q = (pu)^q + (pv)^q$$

para cualesquiera elementos disjuntos u, v en L_p^+ .

Se sigue de esta definición que para toda sucesión finita y disjunta $\{u_i: i=1, \dots, n\}$ en el cono positivo de un espacio L_q -abstracto, se tiene

$$[p(\sum_{i=1}^n u_i)]^q = \sum_{i=1}^n (pu_i)^q.$$

Los espacios L_q -abstractos tienen la propiedad de la \mathcal{l}_q -descomposición y de la \mathcal{l}_q -composición. En efecto, sea L_p un espacio L_q -abstracto y consideremos una sucesión disjunta y orden acotada $\{u_n\}$ en L_p^+ . Sea $u \in L_p$ tal que $u_n \leq u$ para todo natural n . Entonces para m fijo tenemos

$$\sum_{n=1}^m (pu_n)^q = [p(\sum_{n=1}^m u_n)]^q \leq (pu)^q.$$

De donde se obtiene que $\{pu_n\} \in \mathcal{l}_q$.

Por otro lado, consideremos $\{u_n\}$ una sucesión disjunta en L_p^+ tal que $pu_n \leq 1$ para todo n , y $\{a_n\}$ una sucesión en \mathcal{l}_q^+ .

Sea $K = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q$. Fijando m se tiene

$$[p(\sum_{n=1}^m a_n u_n)]^q = \sum_{n=1}^m [p(a_n u_n)]^q \leq \sum_{n=1}^m a_n^q \leq K.$$

Luego, $\sup\{p(\sum_{n=1}^m a_n u_n): m=1, 2, \dots\} < \infty$.

Hemos probado de esta manera que L_p tiene las propiedades de la \mathcal{l}_q -descomposición y de la \mathcal{l}_q -composición. Luego, $\sigma_p \leq q \leq S_p$. Pero $S_p \leq \sigma_p$, por lo tanto $\sigma_p = S_p = q$.

Observación: Un espacio L_q -abstracto no puede ser un L_r -abstracto para $q \neq r$.

EJEMPLO V.14: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida σ -finita donde el proceso de extensión de Carathéodory ha sido aplicado a μ . Denotaremos por $\mathcal{L}_q(X, \mu)$ para $1 \leq q < \infty$, el conjunto de las funciones μ -medibles f sobre X a valor real μ -casi en todas partes (donde las funciones que son iguales μ -casi en todas partes han sido identificadas), tales que $|f|^q$ es una función Lebesgue integrable.

Si definimos la función

$$\| \cdot \|_q : \mathcal{L}_q(X, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\|f\|_q = \left(\int |f|^q d\mu \right)^{1/q},$$

se tiene que $\| \cdot \|_q$ es una norma de Riesz sobre $\mathcal{L}_q(X, \mu)$ considerando el orden usual:

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

De esta forma, $\mathcal{L}_q(X, \mu)$ resulta ser un reticulado de Banach.

(Ver [7], proposición V.1.6).

Probaremos que el reticulado de Banach $\mathcal{L}_q(X, \mu)$ es un espacio L_q -abstracto. En efecto, sean $f, g \in L_q^+(X, \mu)$ tales que $f \wedge g$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \in X : f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \} = \emptyset$$

$$B = \{ x \in X : f(x) > 0 \wedge g(x) = 0 \}$$

$$C = \{ x \in X : f(x) = 0 \wedge g(x) > 0 \}$$

$$D = \{ x \in X : f(x) = 0 \wedge g(x) = 0 \}.$$

Así, $X = A \cup B \cup C \cup D$ siendo A, B, C, D conjuntos medibles disjuntos.

tos. Además,

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^q &= \int_A (f+g)^q + \int_B (f+g)^q + \int_C (f+g)^q + \int_D (f+g)^q \\ &= \int_B f^q + \int_C g^q = \int_X f^q + \int_X g^q. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|f+g\|_q^q = \|f\|_q^q + \|g\|_q^q$.

Concluimos entonces que $\mathcal{L}_q(X, \mu)$ es un espacio L_q -abstracto, y por consiguiente, sus índices son $\sigma_{\|\cdot\|_q} = s_{\|\cdot\|_q} = q$.

EJEMPLO V.15: (Los Espacios M-abstractos)

Un reticulado de Banach L_p de dimensión infinita es un espacio M-abstracto si

$$p(u \vee v) = \max\{pu, pv\}$$

para todo $u, v \in L_p^+$.

Se obtiene de la definición que

$$p\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) = \max\{pu_i : i=1, \dots, n\}$$

para toda sucesión finita y disjunta $\{u_i : i=1, \dots, n\}$ en el cono positivo de un espacio M-abstracto.

Los espacios M-abstractos tienen la propiedad de la l_q -composición para cualquier $1 \leq q < \infty$. En efecto, sean $\{u_n\}$ una sucesión disjunta en L_p^+ tal que $pu_n \leq 1$ para todo n , y $\{a_n\}$ una sucesión en l_∞^+ . Consideremos el número K tal que $a_n \leq K$ para todo n . Para un natural m fijo,

$$p\left(\sum_{n=1}^m a_n u_n\right) = \max\{p(a_n u_n) : n=1, \dots, m\} \leq \max\{a_n : n=1, \dots, m\} \leq K.$$

De allí que $\sup\{p\left(\sum_{n=1}^m a_n u_n\right) : m=1, 2, \dots\} < \infty$.

Se tiene entonces que $s_p = \infty$ y por lo tanto, $\sigma_p = \infty$.

EJEMPLO V.16: Sea (X, Δ, μ) un espacio de medida como en el ejemplo V.14. Denotaremos por $\mathcal{L}_\infty(X, \mu)$ el conjunto de las funciones μ -medibles sobre X a valor real μ -c.t.p (donde las funciones que son iguales μ -c.t.p. han sido identificadas), que son esencialmente acotadas.

$\mathcal{L}_\infty(X, \mu)$ provisto con el orden usual y con la norma

$$\| \cdot \|_\infty: \mathcal{L}_\infty(X, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|f\|_\infty = \inf\{M: |f(x)| \leq M \mu\text{-c.t.p.}\}$$

es un reticulado de Banach. (Ver [7], proposición V.2.2).

El reticulado de Banach $\mathcal{L}_\infty(X, \mu)$ es un espacio M-abstracto. En efecto, sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty^+(X, \mu)$. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \|f\|_\infty \leq \|f \vee g\|_\infty \\ \|g\|_\infty \leq \|f \vee g\|_\infty \end{array} \right\} \implies \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\} \leq \|f \vee g\|_\infty.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (f \vee g)x = \max\{f(x), g(x)\} &\leq \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\} \\ &\implies \|f \vee g\|_\infty \leq \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Luego, $S_{\|\cdot\|_\infty} = \tilde{\sigma}_{\|\cdot\|_\infty} = \infty$.

EJEMPLO V.17: Consideremos el conjunto $C[0,1]$ de todas las funciones continuas a valor real sobre el intervalo $[0,1]$.

El espacio $C[0,1]$ con el orden usual y la norma

$$\| \cdot \|_\infty: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}$,

constituye un reticulado de Banach. Más aún, se prueba fácilmente que $C[0,1]$ es un espacio M-abstracto.

CONCLUSIONES

No podemos dejar de resaltar resultados que han constituido los eslabones para alcanzar el estudio de los índices para Reticulados de Banach.

En primer lugar, una condición necesaria para que un Reticulado de Banach sea Super Dedekind completo, es la continuidad de su norma (teorema II.10). De manera inmediata, se deduce que si un reticulado de Banach tiene la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición para algún $q < \infty$, entonces es Super Dedekind completo. Notemos que dentro de la clasificación que existe en los espacios de Riesz, los espacios Super Dedekind completos son los que inician la cadena de implicaciones presentadas en el teorema 1.30.

El teorema II.12 nos da una caracterización en los reticulados de Banach con norma orden continua, la cual sirve de base para definir la propiedad de la \mathcal{L}_q -descomposición (definición V.1).

El concepto de banda (definición I.16) resulta ser muy valioso, y en este sentido se prueba en el teorema III.9 que el conjunto \mathcal{L}_c^∞ de todas las funcionales lineales orden acotadas y σ -orden continuas sobre el espacio de Riesz L , es una banda en \mathcal{L}^∞ (el espacio de todas las funcionales lineales orden acotadas sobre L). Análogamente se deduce que \mathcal{L}_n^∞ , el conjunto de las funcionales lineales orden acotadas y orden continuas sobre L también es una banda en \mathcal{L}^∞ .

El teorema IV.5 brinda una condición necesaria y suficiente para que dos funcionales lineales orden acotadas y orden continuas sean disjuntas en un espacio de Riesz Dedekind completo. Este resultado ha sido clave en repetidas demostraciones posteriores.

Vale también mencionar el teorema IV.8, rico en resultados, que entre otras cosas afirma que para que un espacio de Riesz Dedekind completo sea orden separable, basta la existencia de una funcional estrictamente positiva sobre él.

Al desarrollar la teoría de índices para un reticulado de Banach L_p , nos interesamos en encontrar la relación que existe entre éstos y los de su espacio norma dual L_p^* (que establecimos en el teorema IV.12 como un reticulado de Banach Dedekind completo). Así, se obtienen los teoremas V.6 y V.9 en relación a las propiedades de la \mathcal{L}_q -descomposición y de la \mathcal{L}_r -composición (donde $1/q + 1/r = 1$) en un reticulado de Banach y su norma dual. Estos dos resultados son los que establecen

las fórmulas de los índices: $1/\sigma_p + 1/s_{p^*} = 1$

$$1/s_p + 1/\sigma_{p^*} = 1$$

demostradas en el teorema V.12.

En los ejemplos vistos al final del Capítulo V, resalta el hecho de que los índices para los espacios L_q -abstractos coinciden con el número q ($1 \leq q \leq \infty$). Y es que en efecto, los índices en los reticulados de Banach están desempeñando un rol parecido al de los números q en los espacios L_q -abstractos. De modo que los resultados que se conocen en estos espacios,

sujetos a condiciones del número q , pueden ser generalizados a reticulados de Banach utilizando los índices.

Por ejemplo, un clásico teorema de H.R. Pitt, que establece que cualquier operador lineal acotado de ℓ_p en ℓ_r es compacto si $1 \leq r < p < \infty$, motivó las investigaciones de los índices en relación a los operadores compactos. (Ver [8], sección 12).

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALIPRANTIS, CHARALAMBOS Y BURKINSHAW, O. "Locally Solid Riesz Spaces", Academic Press, New York, 1978.
- [2] DODDS, PETER. "Indices for Banach Lattices", Indag. Math. 39 (Proc. Netherl. Acad. S.C. A80), 73-86, 1977.
- [3] DUHOUX, M. Y ROJO, JORGE. "Espacios de Riesz", Notas de Seminario, Universidad Técnica del Estado, Chile, 1980.
- [4] GROBLER, JACOBUS J. "Indices for Banach Function Spaces", Math. Zeitschr. 145, 99-109, 1975.
- [5] HORVATH, JOHN. "Topological Vector Spaces and Distributions", Volume I, Addison-Wesley, U.S.A., 1966.
- [6] LUXEMBURG, W.A.J. Y ZAANEN, A.C. "Riesz Spaces I", North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.
- [7] ROJO, JORGE. "Teoría de la Medida", Notas del curso de Teoría de la Medida, Universidad de Panamá, 1983.
- [8] VIETSH, W.K. "Abstract Kernel Operators and Compact Operators", Thesis, University of Leiden, 1979.