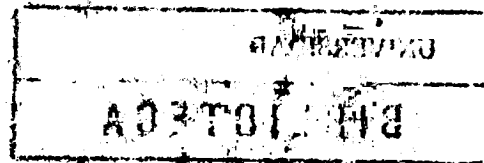


UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POST-GRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA



"EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ
PARA ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES"

Por:

Josué Ortíz Gutiérrez

Tesis presentada como uno de los requisitos para
optar por el grado de Maestro en Ciencias con
Especialización en Matemática.

Panamá

1985

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

22 ABR. 1986

Aprobado por:

Director de Tesis:

Jorge Rojo M.

Jorge Rojo M., Ph. D.

Miembro del Jurado:

José del A. Garrido

José del A. Garrido, Ph. D.

Miembro del Jurado:

Jorge E. Hernández

Jorge E. Hernández, M. Sc.

Fecha:

20 de Diciembre de 1985

del autor
del
del

16375-

Cincuentenario de la Universidad

1935 - 1985

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira

ESTAMPETA UNIVERSITARIA

DEDICATORIA

A mi madre, Silvia Gutiérrez y a todos mis hermanos por todo el apoyo que me brindaron; en especial a mi esposa, Visitación, por la paciencia, comprensión y amor con que me ha alentado durante estos años; también a mis hijos Ana Rebeca y Josué dedico mi trabajo de graduación.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a todas las autoridades Universitarias panameñas, que han impulsado políticas de desarrollo que han hecho posible la continuación del programa de maestría en matemática en nuestro país.

Mi sincero agradecimiento al doctor Jorge Rojo, por su atinada dirección y asesoría.

Deseo de manera particular, extender mi gratitud al amigo, profesor Jorge Hernández, por el apoyo brindado durante la realización de este trabajo.

Finalmente, a todos mis amigos, que de una forma u otra han contribuido a la culminación de este trabajo de graduación.

Al Padre Eterno por sus muchas bondades y dones, a El sea la gloria por siempre.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION	xi
CAPITULO I. PRELIMINARES.....	2
1.1 Medidas Signadas.....	2
1.2 Conjuntos Positivos. Conjuntos Negativos.....	6
1.3 La Descomposición de Hanh.....	7
1.4 Las Variaciones de una medida Signada.....	9
1.5 La Descomposición de Jordan....	10
1.6 El Reticulado de Banach de las Medidas Signadas Finitas.....	12
CAPITULO II. MEDIDAS EN ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS.	20
2.1 Espacios Localmente Compactos..	20
2.2 Conjuntos de Baire. Conjuntos de Borel.....	27
2.3 Medidas Regulares.....	35
2.4 Contents.....	50
2.5 Contents Regulares.....	60
2.6 Generación de Medidas de Borel Regulares.....	62
2.7 El Teorema de Representación de Riesz para Espacios Compactos..	69
CAPITULO III. EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ PARA ESPACIOS TOPOLOGICOS COMPLETAMENTE REGULARES.....	84

3.1	Completación de una Medida.....	84
3.2	Topologías sobre $\mathcal{C}^b(X)$	87
3.2.1	Las Topologías τ_c y τ_s	88
3.2.2	La Topología τ_{st} o Topología estricta sobre $\mathcal{C}^b(X)$	89
3.3	El Teorema de Riesz para espacios Topológicos Completamente Regulares.....	98
3.4	El Teorema de Representación de Riesz para espacios localmente Compactos.....	103
	CONCLUSIONES.....	121
	BIBLIOGRAFIA.....	125

INTRODUCCION

El propósito principal del presente trabajo es el estudio del "Teorema de Representación de Riesz" de la manera más general posible. Para ello, en el primer capítulo se presentan las generalidades necesarias sobre la teoría de la medida, medidas signadas, la descomposición de Hahn, las variaciones de una medida signada, la descomposición de Jordán y el conjunto de las medidas signadas finitas con su estructura de reticulado de Banach.

En el segundo capítulo, se presentan aquellos resultados topológicos sobre los espacios localmente compactos que nos permiten estudiar las medidas de Baire y de Borel así como el importante concepto de la regularidad, estableciéndose que toda medida de Baire es regular y que dada una medida de Baire siempre existe una medida regular de Borel que la extiende. Para ello se definen los contents y se presentan sus propiedades y luego en términos de los contents se define la medida regular de Borel que extiende a la medida de Baire dada. Pero para poder seguir la demostración de Jarcov 8 sobre el Teorema de Riesz, para espacios compactos es necesaria la noción topológica de la desconexidad extremal, por lo cual también a inicios del segundo capítulo definimos este concepto y demostramos que: "Un espacio topológico es extremalmente desconexo si y sólo si su compactificado de Stone-Cech lo es". Ya con este fundamento trazado damos la demostración del Teorema de Riesz para espacios topológicos compactos.

Siguiendo la idea de obtener el teorema de representa-

ción de Riesz para espacios topológicos más generales, en el tercer capítulo se presenta el importante concepto de la completación de una medida. Se definen y se detallan las relaciones que existen entre las topologías τ_c , τ_{st} y τ_∞ definidas sobre $\mathcal{C}^b(X)$ con (X, τ) un espacio topológico completamente regular. Después de estos resultados se presenta la demostración del teorema de Riesz para espacios completamente regulares al igual que dos corolarios que de la misma se desprenden. Finalmente, para concluir el capítulo se obtiene la clásica demostración del teorema de Riesz para espacios topológicos localmente compactos, como consecuencia de la demostración dada para los espacios completamente regulares.

CAPITULO I

I PRELIMINARES

En lo que sigue \mathcal{A} indicará una σ -álgebra fija de partes de un conjunto X y las medidas se supondrán definidas sobre \mathcal{A} . Por simplicidad y costumbre a los elementos de \mathcal{A} se les denomina sub-conjuntos medibles de X .

1.1 Medidas Signadas

Recordemos que por $M(X)$ o simplemente por M se indica al conjunto

$$M = \{ \mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty] / \mu \text{ es medida} \}$$

y que M posee las siguientes propiedades:

1. Para toda $\mu, \nu \in M : (\mu + \nu) \in M$.

2. Para toda $\mu \in M$ y para todo $\alpha \geq 0 : \alpha\mu \in M$

es decir, M es estable por adición y multiplicación por escalares no negativos. Además,

3. M no es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , pues la multiplicación por -1 nos da funciones de conjuntos a valores negativos.

Definición 1.1: Definamos en M la relación \leq de la siguiente manera: $\mu \leq \nu$, si y sólo si, $\mu(A) \leq \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Se prueba sin dificultad que \leq es una relación de orden en M , es decir que (M, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Enunciaremos en forma de proposición otras propiedades que tiene la relación de orden \leq sobre M .

Proposición 1.1: (M, \leq) es un reticulado; es decir, para toda $\mu, \nu \in M$ existen $\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$ en M , más aún para todo $A \in \mathcal{A}$.

1. $(\mu \vee \nu)(A) = \sup \{ \mu(B) + \nu(A-B) / B \in \mathcal{A}, B \subseteq A \}$
2. $(\mu \wedge \nu)(A) = \inf \{ \mu(B) + \nu(A-B) / B \in \mathcal{A}, B \subseteq A \}$
3. $(\mu \wedge \nu) + (\mu \vee \nu) = \mu + \nu$

A continuación presentaremos un resultado que describe una propiedad de completitud del orden del reticulado (M, \leq) .

Proposición 1.2: Sea $(\mu_n)_{n \geq 1} \subseteq M$ tal que $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, entonces la función de conjunto:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{definida por:}$$
$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$$

es una medida. . Más aún $\mu = \sup_{n \geq 1} \mu_n$.

Como mencionáramos antes, al multiplicar medidas por -1 , obtenemos funciones de conjuntos a valores negativos. Por esta razón es deseable considerar funciones de conjuntos σ -aditivas que también toman valores reales extendidos negativos.

Para distinguir de una medida una tal función de con-

juntos σ -aditiva, usualmente se le refiere por "Medida Signada". En forma precisa.

Definición 1.2: Una función de conjunto

$$\mu : \mathcal{G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

es una medida signada si:

- a. Toma a lo más uno de los valores $+\infty$ y $-\infty$
- b. $\mu(\emptyset) = 0$
- c. μ es σ -aditiva, esto es;

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión disjunta de \mathcal{G} ,

entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Observemos que si μ es una medida signada y $(A_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión disjunta de \mathcal{G} tal que:

$$\left| \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \right| < \infty$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)|$ es convergente en \mathbb{R} .

Observemos también que:

1. Cada medida es una medida signada.
2. Cada medida signada es finitamente aditiva.

Los siguientes resultados nos dicen que las medidas signadas se comportan como las medidas.

Proposición 1.3: Sean $\mu: \mathcal{G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada
y $A \in \mathcal{G}$ tal que $|\mu(A)| < \infty$. Sea
 $B \in \mathcal{G}$ tal que $B \subseteq A$, entonces

$$|\mu(B)| < \infty \text{ y } \mu(A-B) = \mu(A) - \mu(B),$$

es decir cada medida signada es sustractiva sobre conjuntos de medida finita.

Una inmediata y útil conclusión de la proposición anterior es la siguiente:

Si $A \in \mathcal{G}$ posee un subconjunto B de medida signada infinita entonces A posee medida signada infinita.

Por último, las propiedades usuales de continuidad de medidas son heredadas por las medidas signadas.

Proposición 1.4: Sea $\mu: \mathcal{G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada
y sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de \mathcal{G} .

Entonces:

a. $A_n \nearrow A$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

b. $A_n \searrow A$ y $\mu(A_k)$ es finito para al menos un k ,
entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

1.2 Conjuntos Positivos, Conjuntos Negativos

En esta sección introduciremos un nuevo tipo de conjunto medible, el cual tiene propiedades muy importantes y juega un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de la medida.

Definición 1.3: Sean $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una medida signada y $A \in \mathcal{A}$ entonces:

1. A es positivo ($A \geq 0$) si

$$\mu(A \cap E) \geq 0, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

2. A es negativo ($A \leq 0$) si

$$\mu(A \cap E) \leq 0, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

De la definición anterior se tienen las siguientes observaciones:

a. A es positivo si y sólo si, para todo sub-conjunto medible B de A se tiene que $\mu(B) \geq 0$.

b. A es negativo, si y sólo si, para todo subconjunto medible B de A se tiene que $\mu(B) \leq 0$.

Ejemplos y Propiedades

1. $\emptyset \geq 0$ y $\emptyset \leq 0$

En efecto

$$\mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

2. Si $A \geq 0$ y $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{G}$, entonces $B \geq 0$
3. Si $A \leq 0$ y $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{G}$, entonces $B \leq 0$
4. La unión de cualquiera sucesión de conjuntos positivos es positivo.
5. La unión de cualquiera sucesión de conjuntos negativos es negativo.

Proposición 1.5: Sea $\mu: \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada y $E \in \mathcal{G}$ tal que $\mu(E) > 0$. Entonces existe $A \in \mathcal{G}$ tal que

$$A \geq 0, A \subseteq E \text{ y } \mu(A) > 0$$

La demostración de la proposición anterior hace fuerte uso del Lema de Zorn.

Similarmente se puede enunciar una proposición para conjuntos negativos.

1.3 La Descomposición de Hahn

Procederemos ahora a dar la definición de lo que se entiende por una descomposición de Hahn utilizando fuertemente la noción de conjuntos positivos y negativos.

Definición 1.4: Sea $\mu: \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada. Una descomposición de Hahn para X , respecto de μ , es un par (A, B) , donde A, B son tales que:

1. $A \cap B = \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. $A \geq 0$ y $B \leq 0$

Podemos observar que si (A, B) es una descomposición de Hahn de X con respecto a μ entonces (B, A) es descomposición de Hahn de X con respecto a $-\mu$.

Una descomposición de Hahn con respecto a una medida signada siempre existe y es esencialmente única, como lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.6: Sea $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada.

Entonces X posee una descomposición de Hahn con respecto a μ , es decir existen A y B en \mathcal{A} tales que

- a. $A \cap B = \emptyset$
- b. $A \cup B = X$
- c. $A \geq 0$ y $B \leq 0$

más aún, si (A, B) y (A_1, B_1) son descomposiciones de Hahn para X , con respecto a μ , entonces

1. $\mu(A \Delta A_1) = \mu(B \Delta B_1) = 0$
2. $\mu(E \cap A) = \mu(E \cap A_1)$
3. $\mu(E \cap B) = \mu(E \cap B_1)$

para todo $E \in \mathcal{A}$

1.4 Las Variaciones de una Medida Signada

En esta sección presentaremos tres medidas sobre \mathcal{A} que se desprenden de una medida signada.

Proposición 1.7: Sea (A, B) una descomposición de Hahn de X con respecto a una medida signada $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Sean:

$$\mu^+ : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \mu^+(E) = \mu(A \cap E)$$

$$\mu^- : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$$

$$|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : |\mu|(E) = \mu(E \cap A) - \mu(E \cap B) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

Entonces μ^+, μ^- y $|\mu|$ son medidas sobre \mathcal{A} .

Las medidas μ^+, μ^- y $|\mu|$ se denominan la variación positiva, la variación negativa y la variación total respectivamente, de la medida signada μ .

Observemos que las medidas μ^+, μ^- , y $|\mu|$ son independientes de la descomposición de Hahn de X , respecto a μ .

En efecto, sea (A_1, B_1) otra descomposición de Hahn de X respecto a μ , y sean $\bar{\mu}^+, \bar{\mu}^-, |\bar{\mu}|$ las medidas correspondientes a la descomposición (A_1, B_1) , entonces para cada $E \in \mathcal{A}$:

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E) = \mu(A_1 \cap E) = \bar{\mu}^+(E)$$

$$\mu^-(E) = \mu(B \cap E) = -\mu(B_1 \cap E) = \bar{\mu}^-(E)$$

luego

$$\mu^+ = \bar{\mu}^+, \mu^- = \bar{\mu}^- \text{ y } |\mu| = |\bar{\mu}|$$

Definición 1.5: Una medida signada $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$
es una medida signada finita si

$$|\mu(E)| < \infty \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Observemos de inmediato que μ es una medida signada finita, si y sólo si, $|\mu(X)| < \infty$

Definición 1.6: Una medida signada $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es σ -finita si existe una sucesión disjunta $(E_n)_{n \geq 1}$ de \mathcal{A} , tal que:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ y } |\mu(E_n)| < \infty \text{ para todo } n \geq 1.$$

1.5 La Descomposición de Jordan.

Sean $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada y (A, B) una descomposición de Hahn respecto de μ , entonces para todo $E \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap X) \\ &= \mu(E \cap (A \cup B)) \\ &= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B) \\ &= \mu(E \cap A) - [-\mu(E \cap B)] \\ &= \mu^+(E) - \mu^-(E) \end{aligned}$$

luego

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

Esta identidad es conocida como la "Descomposición de Jordan" de la medida signada μ .

Propiedades: Para todo $E \in \mathcal{G}$:

$$1. \mu^+(E) \leq \mu(A)$$

$$2. \mu^-(E) \leq -\mu(B)$$

Supongamos que existen conjuntos medibles E_1 y E_2 tales que

$$\mu^+(E_1) = \mu^-(E_2) = \infty$$

entonces por las propiedades anteriores:

$$\mu(A) = \infty \quad \text{y} \quad -\mu(B) = \infty$$

es decir

$$\mu(A) = \infty \quad \text{y} \quad \mu(B) = -\infty$$

lo que no es posible pues μ es una medida signada; en consecuencia al menos una de las medidas μ^+ y μ^- debe ser finita. Es decir, la descomposición de Jordan:

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

nos dice que cada medida signada es la diferencia de dos medidas, al menos una de las cuales es una medida finita.

Las siguientes son útiles expresiones para una medida signada.

Proposición 1.8: Sea $\mu : \mathcal{G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una medida signada, entonces para cada $E \in \mathcal{G}$ se

tiene:

1. $\mu^+ (E) = \text{Sup} \{ \mu(F) / F \in \mathcal{G}, F \subseteq E \}$
2. $\mu^- (E) = \text{Sup} \{ -\mu(F) / F \in \mathcal{G}, F \subseteq E \}$
3. $\mu (E) = \text{Sup} \left\{ \sum |\mu(F_i)| / (F_i) \subseteq \mathcal{G} \text{ disjunta finita y } \bigcup F_i \subseteq E \right\}$
4. $\mu^+ \wedge \mu^- = 0.$

1.6 El Reticulado de Banach $M_s (X)$ de las medidas signadas finitas.

Se sabe que el conjunto de todas las medidas signadas sobre \mathcal{G} no forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} ; puesto que si μ_1 toma el valor $-\infty$ y μ_2 toma el valor $+\infty$, entonces $\mu_1 + \mu_2$ no tiene sentido. Pero lo que es cierto es que existe un subconjunto del conjunto de las medidas signadas que es un espacio vectorial, el cual es:

$$M_s (X) = \{ \mu : \mathcal{G} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} / \mu \text{ es una medida signada finita } \}$$

A continuación presentaremos las propiedades más importantes del conjunto $M_s (X)$.

Propiedades:

1. Si $\mu \in M_s(X)$, entonces $|\mu(A)| < \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
2. Sea $\mu \in M_s(X)$, entonces por la descomposición de Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$ donde al menos una de las medidas μ^+ y μ^- debe ser finita. Pero como μ es finita se tiene que μ^+ y μ^- son finitas. Así pues $\mu^+, \mu^- \in M_s(X)$.
3. Para cada $\mu \in M_s(X)$, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$

Así para cada $A \in \mathcal{A}$

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$$

por lo tanto

$$|\mu| \in M_s(X).$$

4. Si $\mu, \nu \in M_s(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $(\mu + \nu) \in M_s(X)$ y $\alpha\mu \in M_s(X)$

por consiguiente $M_s(X)$ con la suma y el producto escalar es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

5. La relación \leq dada por:

$$\mu \leq \nu, \text{ si y sólo si, } \mu(A) \leq \nu(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{A}$$

es una relación de orden parcial sobre $M_s(X)$, más aún

$M_s(X)$ es un reticulado vectorial, y

$$(\mu \vee \nu)(F) = \text{Sup} \{ \mu(B) + \nu(F-B) / B \in \mathcal{A}, B \subseteq F \}$$

$$(\mu \wedge \nu)(F) = \text{Inf} \{ \mu(B) + \nu(F-B) / B \in \mathcal{A}, B \subseteq F \}$$

6. Para cada $\mu \in M_S(X)$

$$(\mu \vee 0)(F) = \text{Sup} \{ \mu(B) / B \in \mathcal{Q}, B \subseteq F \} = \mu^+(F)$$

$$(-\mu \vee 0)(F) = \text{Sup} \{ -\mu(B) / B \in \mathcal{Q}, B \subseteq F \} = \mu^-(F)$$

por consiguiente

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- = (\mu \vee 0) + (-\mu \vee 0) = \mu \vee (-\mu)$$

En lo que sigue definiremos una norma sobre $M_S(X)$ y probaremos que $(M_S(X), \|\cdot\|)$ es un reticulado de Banach.

Proposición 1.9: La función

$$\|\cdot\| : M_S(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\|\mu\| = |\mu|(X).$$

es una norma sobre $M_S(X)$, es decir $(M_S(X), \|\cdot\|)$ es un espacio normado; más aún $M_S(X)$ es un reticulado normado.

Demostración:

i.) Como $|\mu|(X) \geq 0$ para cada $\mu \in M_S(X)$, se tiene que $\|\mu\| \geq 0$. Por otro lado, para cada $A \in \mathcal{Q}$:

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(X) = \|\mu\|$$

Por lo tanto $\|\mu\| = 0$, si y sólo si, $\mu = 0$

ii) Para cada $\mu \in M_S(X)$ y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha\mu\| = |\alpha\mu|(X) = |\alpha|(|\mu|(X))$$

iii) Sean $\mu, \gamma \in M_S(X)$.

$$\| \mu + \nu \| = | \mu + \nu | (X) \leq (| \mu | + | \nu |) (X).$$

O sea.

$$\begin{aligned} \| \mu + \nu \| &\leq (| \mu | + | \nu |) (X) \\ &= | \mu | (X) + | \nu | (X) \\ &= \| \mu \| + \| \nu \| . \end{aligned}$$

Así

$$\| \mu + \nu \| \leq \| \mu \| + \| \nu \|$$

iv) Sean $\mu, \nu \in M_S(X)$ tales que $| \mu | \leq | \nu |$ entonces

$$\| \mu \| = | \mu | (X) \leq | \nu | (X) = \| \nu \|$$

Proposición 1.10: $(M_S(X), \| \cdot \|, \leq)$ es un reticulado de Banach.

Demostración: Para ésta solo resta probar que $M_S(X)$ es un espacio completo para la norma definida anteriormente.

En efecto, sea $(\mu_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en

$M_S(X)$. Es necesario probar que existe $\mu \in M_S(X)$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \mu_n - \mu \| = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $(\mu_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy, existe un

$K > 0$ tal que para todo n, m mayores que K se cumple:

$$\| \mu_n - \mu_m \| < \varepsilon .$$

Luego para todo A perteneciente a \mathcal{A} se tendrá:

$$\begin{aligned} |\mu_n(A) - \mu_m(A)| &\leq |\mu_n - \mu_m|(A) \\ &\leq |\mu_n - \mu_m|(X) \\ &= \|\mu_n - \mu_m\| \quad (*) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Lo anterior nos muestra que para todo $A \in \mathcal{A}$
 $(\mu_n(A))_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Por la com-
pletitud de \mathbb{R} , existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$

Así pues podemos definir la siguiente función de conjun-
tos

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, \text{ dada por:} \\ \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A). \end{aligned}$$

Probamos a continuación que $\mu \in M_s(X)$.

1. Como $(\mu_n(A))_{n \geq 1}$ es de Cauchy entonces es aco-

tada, de donde $|\mu(A)| < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$

Por (*) si $n \rightarrow \infty$ tendremos que:

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| < \varepsilon \quad \forall n \geq K \quad (**)$$

2. $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = 0$

3. μ es σ -aditiva.

Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión disjunta de \mathcal{A} y sea

$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, entonces tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^p (\mu_k(A_i) - \mu_n(A_i)) \right| &\leq \sum_{i=1}^p |\mu_k(A_i) - \mu_n(A_i)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^p |\mu_k - \mu_n|(A_i) \\
 &= |\mu_k - \mu_n| \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \\
 &\leq |\mu_k - \mu_n|(A) \\
 &\leq \|\mu_k - \mu_n\| \\
 &< \varepsilon \quad \cdot \forall p \geq 1, \forall n \geq k.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left| \sum_{i=1}^p (\mu_k(A_i) - \mu(A_i)) \right| < \varepsilon \quad \forall p \geq 1 \quad (****)$$

$$\text{Como } \mu_k(A) = \mu_k \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu_k(A_n)$$

existe un n_1 tal que:

$$\left| \mu_k(A) - \sum_{i=1}^p \mu_k(A_i) \right| < \varepsilon, \quad \forall p \geq n_1 \quad (*****)$$

luego de (**), (***) y (*****) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \left| \mu(A) - \sum_{i=1}^p \mu(A_i) \right| &\leq \left| \mu(A) - \mu_k(A) \right| + \left| \mu_k(A) - \sum_{i=1}^p \mu_k(A_i) \right| + \\
 &\quad + \left| \sum_{i=1}^p (\mu_k(A_i) - \mu(A_i)) \right| \leq 3\varepsilon
 \end{aligned}$$

para todo $p \geq n_1$, por consiguiente:

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

Así pues $\mu \in M_S(X)$ por (1), (2) y (3).

4. De (***) y la caracterización de μ^+ tenemos:

$$(\mu_n - \mu)^+(X) = \text{Sup} \{ \mu_n(A) - \mu(A) / A \in \mathcal{A} \} \leq \varepsilon$$

y

$$(\mu_n - \mu)^-(X) < \varepsilon, \quad \forall n \geq K.$$

por lo tanto:

$$\| \mu_n - \mu \| = (\mu_n - \mu)^+(X) + (\mu_n - \mu)^-(X) \leq 2\varepsilon,$$

$$\forall n \geq K$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\| \mu_n - \mu \| \longrightarrow 0.$$

Concluimos así que $M_S(X)$ es completo.

CAPITULO II

II. MEDIDAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS LOCALMENTE COMPACTOS

2.1 Espacios Localmente Compactos

A través de este capítulo (X, \mathcal{T}) denotará un espacio topológico localmente compacto y T_2 . Sólo se presentará con cierto rigor aquellos resultados imprescindibles para el estudio del teorema de representación de Riesz.

K_X denotará la familia de los conjuntos compactos en X , mientras que C_0 denotará la sub-familia de K_X constituida por los conjuntos G_g , es decir aquellos conjuntos compactos que se pueden expresar como la intersección de una familia contable de abiertos de X .

Proposición 2.1: Si C es un conjunto compacto en X y U, V son abiertos tales que,
 $C \subseteq U \cup V$, entonces existen compactos D y E tales que:
 $D \subseteq U, E \subseteq V$ y $C = D \cup E$.

Demostración: Como U y V son conjuntos abiertos y C es un compacto entonces los conjuntos $C \setminus U$ y $C \setminus V$ son cerrados y por estar contenidos en C resultan compactos.

Ahora bien $C \setminus U$ y $C \setminus V$ son disjuntos ya que $C \subseteq U \cup V$ por hipótesis y como X es T_2 existen conjuntos abiertos disjuntos U_1 y V_1 que los contienen respectivamente.

Designemos $D = C \setminus U_1$ y $E = C \setminus V_1$. Es claro que E y D son conjuntos compactos. Probaremos que D es una parte

de U y que E está contenido en V . En efecto:

Si x es un elemento de D entonces x pertenece a C pero no a U_1 , luego x no pertenece a $C \setminus U$ de donde x pertenece a U y por ello $D \subseteq U$. Similarmente se verifica que $E \subseteq V$.

Por otro lado $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ nos permite escribir
 $D \cup E = (C \setminus U_1) \cup (C \setminus V_1) = C \setminus (U_1 \cap V_1) = C$
con lo cual concluimos la demostración.

Definición 2.1: Una parte A de X es acotada si existe un conjunto compacto C en X tal que A es una parte de C .

Observaciones: Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es localmente compacto si y sólo si cada punto de X tiene una vecindad compacta. Que (X, τ) es localmente compacto si y sólo si todo punto de X admite un sistema fundamental de vecindades compactas. Ahora bien, para todo elemento en X , el conjunto de vecindades abiertas es claramente un sistema fundamental de vecindades para dicho elemento y lo mismo sucede con las vecindades cerradas.

Sea

$$\mathfrak{f} = \{v / v \in \mathcal{V}(X, \tau), v \text{ cerrada}\} \text{ y designemos}$$

$$\mathfrak{f}^* = \{v \cap v_x / v \in \mathfrak{f}, v_x \in \mathcal{V}(x, \tau) \text{ compacta}\}.$$

Sea $U \in \mathcal{V}(x, \tau)$ entonces existe $v \in \mathfrak{f}$ tal que $x \in v \subseteq U$ pero también existe v_x una vecindad compacta de x en X . Luego $x \in v \cap v_x \subseteq v \subseteq U$, lo cual muestra que \mathfrak{f}^* también es un sistema fundamental de vecindades de X . Es

decir que un espacio topológico (X, \mathcal{C}) es localmente compacto si y sólo si todo punto de X admite un sistema fundamental de vecindades compactas.

Sea ahora K un sub-conjunto compacto de X , una vecindad de K es un conjunto V de X que tiene la propiedad de ser vecindad de cada punto de K .

Si K es un compacto en X , existe una vecindad V de K que es compacta. En efecto: Sea U una vecindad arbitraria de K , entonces para todo x de K , U es vecindad de x , es decir para todo x de K existe W_x , una vecindad compacta de x tal que: $x \in W_x \subseteq U$. Es claro que la familia $\{W_x\}_{x \in K}$ es un cubrimiento de K , el cual es compacto, de donde existen elementos x_1, x_2, \dots, x_n en K tal que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}^{\circ} \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \subseteq U, \text{ por lo cual si se designa a}$$

$$V = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \text{ se tiene que } V \text{ es una vecindad compacta de } K.$$

Lo anterior nos permite la siguiente afirmación:

Si C es un compacto de X y U es un abierto de X que contiene a C entonces U podemos asumirlo acotado, pues de no serlo razonamos de la siguiente manera:

C compacto implica que existe V una vecindad compacta de C , esto es $C \subseteq V$, pero por hipótesis $C \subseteq U$, luego $C \subseteq U \cap V^{\circ}$, donde V° denota el interior topológico de V . Ahora bien tenemos que:

$$C \subseteq U \cap V^{\circ} \subseteq V$$

Luego siempre se puede encontrar un abierto acotado que

contiene a C.

Definición 2.2: Un sub-conjunto A de X es σ -acotado si y sólo si A es una parte de la unión de una familia contable de compactos de X.

Definición 2.3: Un sub-conjunto A de X es σ -compacto si y sólo si A se puede expresar como la unión de una familia contable de conjuntos compactos de X.

Proposición 2.2: Sea C un compacto de X y U un abierto que lo contiene. Entonces existen conjuntos C_0 y U_0 en X tales que: C_0 es un compacto G_δ , U_0 es un abierto σ -compacto que verifican la relación:

$$C \subseteq U_0 \subseteq C_0 \subseteq U.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que U es un abierto acotado ya que X es localmente compacto.

Consideremos el cerrado $X \setminus U$ el cual es disjunto del compacto C. Entonces por el lema de Urysohn existe una función f continua sobre X con valores en $[0, 1]$ tal que: f es nula sobre C y vale 1 sobre $X \setminus U$.

Definamos $C_0 = \left\{ x \in X : f(x) \leq 1/2 \right\}$

$$U_0 = \left\{ x \in X : f(x) < 1/2 \right\}$$

Es claro que $C \subseteq U_0 \subseteq C_0 \subseteq U$. Como además

$C_0 = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ x \in X : f(x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right\}$ entonces C_0 es un conjunto G_δ ya que $\left\{ x \in X : f(x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right\}$ es abierto en X para todo valor de n en los naturales por ser f continua. Similarmente C_0 es cerrado por ser la pre-imagen por una función continua de un cerrado de (\mathbb{R}, τ_{us}) .

Por otro lado

$$U_0 = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ x \in X : f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right\}$$

significa que U_0 es un abierto σ -compacto pues

$$U_n = \left\{ x \in X : f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right\} \text{ es un cerrado contenido}$$

en U para todo número natural n . Como U es acotado también los U_n lo son, más aun los conjuntos U_n son compactos. Por la misma razón C_0 resulta ser un conjunto compacto.

Definición 2.4: Sea (X, τ) un espacio topológico. X es extremadamente desconexo si y solamente si todo abierto de X tiene clausura abierta.

Lema 2.1: Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto abierto de X y B un subconjunto cualquiera de X . Entonces la relación $A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ es válida.

Demostración: Sea x un elemento cualquiera de $A \cap \bar{B}$
entonces, x pertenece a A y también a \bar{B} ,
por lo cual toda vecindad W de x corta a B y existe una
vecindad V de x contenida en A ya que A es abierto. Tomemos
 $W \cap V$, entonces $W \cap V$ es una vecindad de x contenida en A y
que corta a B . Luego $W \cap V$ interseca a $A \cap B$ es decir
 $(W \cap V) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ de donde concluimos que $W \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.
Como W es cualquier vecindad de x entonces x pertenece a
 $\overline{A \cap B}$.

Proposición 2.3: Sea (X, τ) un espacio topológico com-
pletamente regular. Entonces son
equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) (X, τ) es extremalmente disconexo.

b) $(\beta X, \tau_\beta)$ es extremalmente disconexo.

donde βX denota el compactificado de Stone-Cech de X y τ_β
la correspondiente topología en βX .

Demostración: Supongamos que βX es extremalmente
disconexo y sea U un abierto de X , entonces existe
un abierto V en βX tal que $U = V \cap X$. Como βX es extremal-
mente disconexo \bar{V}^{τ_β} es un abierto de βX y como X es denso
en βX entonces $\bar{X}^{\tau_\beta} = \beta X$, por lo cual:

$\bar{V}^{\tau_\beta} = \bar{V}^{\tau_\beta} \cap \beta X = \bar{V}^{\tau_\beta} \cap \bar{X}^{\tau_\beta}$; por el lema 2.1 tendremos que:

$\bar{V}^{\tau_\beta} \cap \bar{X}^{\tau_\beta} \subseteq \overline{V \cap X}^{\tau_\beta} = \bar{U}^{\tau_\beta}$ de donde $\bar{V}^{\tau_\beta} \subseteq \bar{U}^{\tau_\beta}$ y así

$\bar{v}^{\tau\beta} \cap X \subseteq \bar{u}^{\tau\beta} \cap X = \bar{u}^{\tau}$ es decir $\bar{v}^{\tau\beta} \cap X \subseteq \bar{u}^{\tau}$. *

Por otro lado $\bar{v}^{\tau\beta} \cap X$ es cerrado en X y además

$U = V \cap X = \bar{v}^{\tau\beta} \cap X$, así que $\bar{u}^{\tau} \subseteq \bar{v}^{\tau\beta} \cap X$ **

De * y ** concluimos que $\bar{u}^{\tau} = \bar{v}^{\tau\beta} \cap X$ de donde \bar{u}^{τ} es abierto en X ya que $\bar{v}^{\tau\beta}$ es abierto en βX . Así pues (X, τ) es extremalmente desconexo si βX lo es.

Recíprocamente supongamos que X es extremalmente desconexo y sea A un abierto de βX , entonces $C = A \cap X$ es un abierto de X , que por hipótesis es extremalmente desconexo, luego \bar{C} es abierto y cerrado en X , más aún el complemento en X de \bar{C} también es abierto y cerrado.

Como $X = \bar{C} \cup C_X \bar{C}$ podemos definir una función f continua sobre X , con valores en $[0, 1]$ tal que:

$$f(\bar{C}) = \{0\} \quad \text{y} \quad f(C_X \bar{C}) = \{1\}$$

Así pues $\bar{C} = f^{-1}\{0\}$ y $C_X \bar{C} = (f - 1)^{-1}(0)$

esto es

\bar{C} y $C_X \bar{C}$ son núcleos de funciones continuas.

Ahora bien $\bar{C} \cap C_X \bar{C} = \emptyset$ entonces la clausura en βX de estos conjuntos también es disjunta, más aún como $X = \bar{C} \cup C_X \bar{C}$ y X es denso en βX entonces βX se puede escribir como la unión de las respectivas clausuras de \bar{C} y $C_X \bar{C}$ en βX , es decir:

$$\beta X = \overline{\bar{C} \cup C_X \bar{C}}^{\beta X} = \overline{\bar{C}}^{\beta X} \cup \overline{C_X \bar{C}}^{\beta X}, \text{ de donde concluimos que:}$$

$\overline{C}^{\beta X} = \bigcup_{\beta X} (\overline{C_x}^{\beta X})$ el cual es un abierto de βX .

Probaremos ahora que $\overline{A}^{\beta X} = \overline{C}^{\beta X}$

En efecto:

$$\overline{C} = \overline{A \cap X} \text{ entonces } \overline{C}^{\beta X} = \overline{A \cap X}^{\beta X} \subseteq \overline{A^{\beta X} \cap X}^{\beta X}$$

$$\text{pero } \overline{A^{\beta X} \cap X}^{\beta X} \subseteq \overline{A^{\beta X}}^{\beta X} \subseteq \overline{A}^{\beta X} = \overline{A}^{\beta X}$$

$$\text{luego } \overline{C} = \overline{A}^{\beta X}.$$

$$\text{Por otro lado } A = A \cap \beta X = A \cap \overline{X}^{\beta X} \subseteq \overline{A}^{\beta X} \cap \overline{X}^{\beta X}$$

$$\text{pero } \overline{A \cap X}^{\beta X} = \overline{C}^{\beta X} = \overline{C}^{\beta X}$$

Por lo tanto $\overline{A}^{\beta X} \subseteq \overline{C}^{\beta X}$ y así se obtiene la igualdad

$$\overline{A}^{\beta X} = \overline{C}^{\beta X} \text{ y por consiguiente } \overline{A}^{\beta X} \text{ es abierto y cerrado}$$

en βX es decir βX es extremadamente desconexo.

2.2 Conjuntos de Baire. Conjuntos de Borel.

Definición 2.5: Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto y T_2 . Los conjuntos de Baire en X son los elementos del σ -anillo generado por los compactos G_δ de X , en tanto que los conjuntos de Borel de X son los elementos del σ -anillo generado por la familia de los compactos de X . Denotaremos estos σ -anillos por S_0 y S respectivamente. En otros términos:

$$S_0 = \sigma\text{-anillo } (C_0); \quad S = \sigma\text{-anillo } (K_X).$$

Proposición 2.4: Sea $\Omega = \{f^{-1}([a, +\infty)) \mid a \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(X)\}$

donde $\mathcal{C}(X)$ o también $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ denota

el conjunto de las funciones continuas sobre X con valores en \mathbb{R} . Indiquemos B_0^a el σ -anillo generado en X por la familia Ω . Entonces S_0 está contenido en B_0^a .

Demostración: Bastará con probar que C_0 es una parte de B_0^a . En efecto:

Sea K un compacto G_δ en X . Existe una sucesión de abiertos $(\mathcal{O}_i)_{i \geq 1}$ en X tal que K es la intersección de dicha familia. Para todo $i \geq 1$ definamos $K_i = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_i$, es inmediato que para todo $i \geq 1$, $K \cap K_i = \emptyset$ y K_i es cerrado en X . Por el lema de Uryshon para todo $i \geq 1$ existe una función continua f_i y definida sobre todo X y con valores en el intervalo $[0, 1]$ tales que:

$$f_i(K_i) = \{1\} \text{ y } f_i(K) = \{0\}.$$

Definamos ahora las funciones $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g_i = f_i \wedge 2^{-i} \text{ con lo cual tendremos:}$$

$$\forall x \in X : \|g_i(x)\| \leq 2^{-i} \text{ y como } \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \text{ es una serie numé-}$$

rica, positiva y convergente entonces por el M-test de

Waierstrass $\sum_{i \geq 1} g_i(x)$ converge uniformemente a una función

continua g .

Probaremos ahora que $g^{-1}(0) = K$. En efecto, si $x \in K$ entonces para todo $i \geq 1$ $g_i(x) = 0$ pues $f_i(x) = 0$ por lo cual $g(x) = 0$ y por ello K está contenido en $g^{-1}(\{0\})$.

Por otro lado tomemos x en $g^{-1}(\{0\})$ entonces $g(x) = 0$ de donde $g_i(x) = 0 \quad \forall i \geq 1$ y así $f_i(x) = 0 \quad \forall i \geq 1$, y por ello $x \in K$, esta última afirmación queda confirmada por el siguiente hecho:

$$X = K \cup K^c = K \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} \mathcal{O}_i^c \right) = K \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} K_i \right)$$

siendo todos los K_i disjuntos con K y como además las f_i toman el valor 1 sobre cada K_i y cero sobre K , entonces si $g(x) = 0$, $x \in K$.

Por lo tanto queda probado que todo subconjunto compacto y G_σ en X es el cero de una función continua, esto es $C_0 \subseteq B_0^a$ y por ello $S_0 \subseteq B_0^a$.

Definición 2.6: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y A una parte de X . A es un conjunto F_σ si y sólo si existe una sucesión de cerrados en X cuya unión es igual con A .

Proposición 2.5: Sea A un subconjunto de X abierto, σ -acotado y F_σ entonces A pertenece a S_0 .

Demostración: Como A es σ -acotado, existe

$$\{K_n\}_{n \geq 1} \subseteq K_X : A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} K_n$$

Siendo A un F_σ , $\exists \{F_m\}_{m \geq 1} \subseteq C_0 \mathcal{T} : A = \bigcup_{m \geq 1} F_m$

así pues $A = \bigcup_{n, m \geq 1} (K_n \cap F_m)$. Sea $C_{m, n} = K_n \cap F_m$.

Como $A = \bigcup_{n,m \geq 1} (C_{n,m})$ entonces $C_{n,m} \subseteq A$ y siendo $C_{n,m}$ compactos para todo m y n existen compactos G_δ $D_{n,m}$ tales que $C_{n,m} \subseteq D_{n,m}$ y $D_{n,m} \subseteq A$, es decir existe un conjunto de Baire $D_{n,m}$ que verifica la propiedad $C_{n,m} \subseteq D_{n,m}$ $D_{n,m} \subseteq A$. Ya que la familia $\{C_{n,m}\}_{n,m \geq 1}$ cubre a A , también la familia $\{D_{n,m}\}_{n,m \geq 1}$ es tal que $\bigcup_{n,m \geq 1} D_{n,m} = A$ y así A es un conjunto de Baire.

Proposición 2.6: Sea (X, τ) espacio topológico localmente compacto, T_2 y σ -acotado entonces si f es continua en X , f es Baire medible y en consecuencia $S_0 = B_0^a$.

Demostración: Sea f continua de X en \mathbb{R} , sea $c \in \mathbb{R}$ consideramos el conjunto A dado por:

$$A = \left\{ x \in X : f(x) > c \right\} = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1} \left(\left[c + \frac{1}{n}, \infty \right) \right).$$

Tenemos lo siguiente: A es abierto, F_σ y además σ -acotado pues el espacio X lo es; por el teorema anterior A es un conjunto de Baire y así concluimos que f es S_0 - medible.

Corolario 2.1: Si (X, τ) es compacto entonces $S_0 = B_0^a$.

Observación: Hemos introducido el concepto de conjuntos de Baire como los elementos del σ -anillo, generado por los compactos G_δ del espacio topológico X , pero parece concebible que existan conjuntos compactos en la clase de Baire que no sean G_δ . Probaremos a continuación que esto no es posible, por lo tanto:

Proposición 2.7: Todo Compacto de Baire es un G_δ .

Demostración: Sea C un compacto de Baire. Existe una sucesión de compactos G_δ , digamos

$\{C_n\}_{n \geq 1}$, tal que C pertenece al σ -anillo generado por dicha sucesión. Como todo compacto es el núcleo de una aplicación continua, ver proposición 2.4, entonces para todo $n \geq 1$, existe una función $f_n \in \mathcal{C}(X) : \forall x \in X, 0 \leq f_n(x) \leq 1$ y tal que $f_n^{-1} \{0\} = C_n$. A partir de esto último construimos una pseudo-métrica en X como sigue:

Si x e y son puntos arbitrarios de X definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|. \text{ Entonces es evidente}$$

que:

- i) $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$
- ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- iii) $0 \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$

Definimos ahora una relación de equivalencia en X por:

$x \equiv y$ si y sólo si $d(x, y) = 0$.

Sea Z el conjunto cociente así construido y T la suryección canónica de X sobre Z , por lo cual $T(x)$ denotará la única clase en Z que contiene a x .

Ahora bien si $T(x_1) = T(y_1)$ y $T(x_2) = T(y_2)$

entonces:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) \\ &= d(y_1, y_2) \quad * \end{aligned}$$

Por la simetría de la aplicación d resulta también que $d(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2)$ por lo cual $*$ nos dice que si $x_1 \equiv y_1$, $x_2 \equiv y_2$ entonces $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$. Por lo anterior si $\mathcal{E}_1 = T(x_1)$ y $\mathcal{E}_2 = T(x_2)$ no habrá ambigüedad al definir $\rho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = d(x_1, x_2)$ con lo cual obtenemos una métrica en Z .

Además si $r \in \mathbb{R}^+$ y $E = \{\mathcal{E} / \rho(\mathcal{E}, \mathcal{E}_0) < r\}$

entonces si $\mathcal{E}_0 = T(x_0)$, $T^{-1}(E) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ lo que significa que T es continua.

Probaremos ahora que si un conjunto de X es la imagen inversa por T de algún conjunto de Z debe contener a todos los elementos relacionados, más precisamente:

Si $A \subseteq X$, $A = T^{-1}(B)$ con $B \subseteq Z$ entonces

$x \in A$, $y \equiv x \implies y \in A$. En efecto: $x \in A$ implica que $T(x) \in B$, pero $y \equiv x$ implica que $T(x) = T(y)$ luego $T(y) \in B$ esto es $y \in T^{-1}(B)$ o sea y pertenece a A . Más aún los conjuntos $C_n = f_n^{-1}(\{0\})$ tienen dicha propiedad, es decir:

si $x_1 \in C_n$, $x_2 \equiv x_1$ entonces $x_2 \in C_n$. En efecto:

$d(x_1, x_2) = 0$ implica que $f_n(x_1) = f_n(x_2) = 0$ de donde

x_2 pertenece a C_n . (α)

Además la familia de las imágenes inversas bajo T de conjuntos de Z es un σ -anillo en X pues si:

$$\mathcal{J} = \{ T^{-1}(B) / B \subseteq Z \} \quad \text{entonces:}$$

i) Si $\{B_n\}_{n \geq 1}$ es una colección numerable de partes

$$\text{de } Z \text{ entonces } \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(B_n) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right)$$

$$\text{ii) } T^{-1}(B_1) \setminus T^{-1}(B_2) = T^{-1}(B_1 \setminus B_2) \quad , \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Z)$$

Como además C pertenece al σ -anillo generado por los compactos C_n , se sigue entonces que existe Γ un sub-conjunto de Z tal que $T^{-1}(\Gamma) = C$ de acuerdo con (α). Así que $T(T^{-1}(\Gamma)) = \Gamma = T(C)$ es un compacto en Z pues C es compacto y T es continua. Γ es además cerrado pues en todo espacio métrico los compactos son cerrados, pero más que eso es un conjunto G_δ , propiedad esta propia de los cerrados en espacios métricos, por lo cual existe una sucesión

$$\{\Delta_n\}_{n \geq 1} \text{ de abierto de } Z \text{ tales que } \Gamma = \bigcap_{n \geq 1} \Delta_n.$$

$$\text{Definamos } \forall n \geq 1, U_n = T^{-1}(\Delta_n).$$

entonces $C = \bigcap_{n \geq 1} U_n$. En efecto:

$$\bigcap_{n \geq 1} U_n = \bigcap_{n \geq 1} (T^{-1}(\Delta_n)) = T^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} \Delta_n\right) = T^{-1}(\Gamma) = C.$$

Luego C es un conjunto G_δ en X . Concluimos así pues que todo compacto perteneciente a la clase de Baire es un conjunto G_δ .

Definición 2.7: Sea (X, τ) un espacio topológico y \mathcal{A} un σ -anillo de partes de X . Una medida sobre \mathcal{A} es una función μ definida de la siguiente manera:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{tal que:}$$

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de elementos de \mathcal{A} tal que $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ pertenece a \mathcal{A} entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n), \text{ es decir } \mu \text{ es conta-}$$

blemente aditiva.

Observaciones:

1. Cuando $\mathcal{A} = \mathcal{S}_0$ y $\mu(K) < \infty$ para todo K perteneciente a \mathcal{C}_0 se dice que μ es una medida de Baire.
2. Cuando $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ y para $K \in \mathcal{K}_X$, $\mu(K) < \infty$ diremos que μ es una medida de Borel y a los elementos de \mathcal{A} se le llamará conjuntos de Borel.
3. A la terna (X, \mathcal{A}, μ) se le llama espacio de medida.

2.3 Medidas Regulares

Trabajaremos a continuación con un σ -anillo genérico \bar{S} y una medida $\bar{\mu}$, la cual será una medida de Borel en el caso en que $\bar{S} = S$ o una medida de Baire en el caso en que $\bar{S} = S_0$.

Con $\bar{\square}$ indicamos a C_0 o a K_X .

Definición 2.8: Un conjunto E en \bar{S} es exteriormente regular con respecto a la medida $\bar{\mu}$ si se verifica que:

$$\bar{\mu}(E) = \text{Inf} \{ \bar{\mu}(U) / E \subseteq U \in \bar{S} \}. \quad (a)$$

Análogamente, el conjunto $E \in \bar{S}$ es interiormente regular si se cumple:

$$\bar{\mu}(E) = \text{Sup} \{ \bar{\mu}(C) / C \subseteq E, C \in \bar{\square} \} \quad (b)$$

Un conjunto $E \in \bar{S}$ es regular si se verifican simultáneamente las condiciones (a) y (b).

Observaciones: En lo que sigue usaremos la notación siguiente:

$$\mathcal{U} = \{ \mathcal{O} \in \tau / \mathcal{O} \in S \}. \quad \mathcal{U}_0 = \{ \mathcal{O} \in \tau / \mathcal{O} \in S_0 \}$$

Fácilmente se verifica que:

a) Si $E \in \bar{S} \wedge \bar{\mu}(E) = \infty \Rightarrow E$ es ext-regular.

b) Si $E = \bigcup_{n \geq 1} A_n, \bar{\mu}(A_n) < \infty \quad A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow E$ es ext-

regular, por proposición 1.4.

UNIVERSIDAD DE PANAMA

BIBLIOTECA

Dualmente se tienen las propiedades siguientes:

a¹) Si $E \in \bar{S} \wedge \bar{\mu}(E) = 0 \Rightarrow E$ es interiormente regular.

b¹) Si $E = \bigcup_{n \geq 1} (B_n)$, $B_n \in K_X \Rightarrow E$ es interiormente regular por proposición 1.4.

Proposición 2.8: La clase de todas las uniones disjuntas y finitas de diferencias propias de K_X (resp. de C_0) es un anillo.

El σ -anillo generado por esta clase coincide con la clase de Borel (resp. con la clase de Baire).

Proposición 2.9:

- a) Si cada conjunto en K_X es exteriormente regular entonces también es exteriormente regular la diferencia propia de cualquier par de conjuntos de K_X .
- b) Si todo conjunto acotado en \bar{U} es interiormente regular, también lo será la diferencia de dos conjuntos cualquiera en K_X . Donde \bar{U} denota U o bien U_0

Demostración: Sean C y D dos conjuntos cualesquiera en K_X tales que $D \subseteq C$. Siendo C exteriormente regular entonces $\forall \varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto U tal que: $\bar{\mu}(U) < \bar{\mu}(C) + \varepsilon$, $C \subseteq U$. Puesto que $C \subseteq U$

entonces $C \setminus D \subseteq U \setminus D$ pero $U \setminus D$ pertenece a \bar{U} y se tiene por otro lado que:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(U \setminus D) - \bar{\mu}(C \setminus D) &= \bar{\mu}[(U \setminus D) \setminus (C \setminus D)] \\ &= \bar{\mu}(U \setminus C) \\ &= \bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(C) \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

y así $C \setminus D$ es un conjunto exteriormente regular.

Para la segunda parte del teorema, sea U un conjunto acotado en \bar{U} tal que $C \subseteq U$.

$U \setminus D$ pertenece a \bar{U} y es acotado y por hipótesis es interiormente regular, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto E en la clase de los compactos tal que: $E \subseteq U \setminus D$ y $\bar{\mu}(U \setminus D) - \varepsilon \leq \bar{\mu}(E)$.

Como $C \setminus D = C \cap (U \setminus D) \supseteq C \cap E$ y $C \cap E \in K_X$.

Tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(C \setminus D) - \bar{\mu}(C \cap E) &= \bar{\mu}[(C \setminus D) \setminus (C \cap E)] \\ &= \bar{\mu}[(C \setminus D) \setminus E] \\ &\leq \bar{\mu}[(U \setminus D) \setminus E] \\ &= \bar{\mu}(U \setminus D) - \bar{\mu}(E) \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto $C \setminus D$ es interiormente regular.

Proposición 2.10: La unión finita y disjunta de conjuntos interiormente regulares de medida finita es un conjunto interiormente regular.

Demostración: Si $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una clase finita y disjunta de conjuntos interiormente regulares, entonces para $\varepsilon > 0$ y para todo $i=1, \dots, n$ existe un conjunto C_i perteneciente a \bar{C} tal que:

$$\bar{\mu}(E_i) \leq \bar{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad C_i \subseteq E_i$$

$$\text{Sea } C = \bigcup_{i=1}^n C_i \quad \text{y} \quad E = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

Entonces $C \subseteq E$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(E_i) \leq \sum_{i=1}^n \left(\bar{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(C_i) + \varepsilon \\ &= \bar{\mu}(C) + \varepsilon \end{aligned}$$

de donde $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ es un conjunto interiormente regular.

Proposición 2.11:

- a) La unión de una sucesión de conjuntos exteriormente regulares es ext-regular.
- b) La unión de una sucesión creciente de conjuntos interiormente regulares es un conjunto interiormente regular.

Demostración: Sea $\{E_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión cualquiera de conjuntos ext-regulares entonces $\forall \varepsilon > 0$ y para todo $i = 1, 2, \dots$ existe un conjunto $U_i \in \bar{U}$ tal que:

$$\bar{\mu}(U_i) - \bar{\mu}(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad E_i \subseteq U_i$$

$$\text{Sea } E = \bigcup_{i \geq 1} E_i, \quad U = \bigcup_{i \geq 1} U_i$$

Si $\bar{\mu}(E) = \infty \Rightarrow E$ es ext-regular.

Supongamos $\bar{\mu}(E) < \infty$ entonces $\forall i \geq 1 \quad \bar{\mu}(E_i) < \infty$ y en consecuencia $\bar{\mu}(U_i) < \infty$. Así pues:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(E) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i \geq 1} (U_i - E_i)\right) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \bar{\mu}(U_i \setminus E_i) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} [\bar{\mu}(U_i) - \bar{\mu}(E_i)] < \varepsilon \end{aligned}$$

Para la parte (b) sea $\{E_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos interiormente regulares y sea $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$, entonces: $\bar{\mu}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}(E_i)$. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\bar{\mu}(E) > \varepsilon$. Sea $i \geq 1$ tal que $\varepsilon < \bar{\mu}(E_i)$; siendo E_i int-regular $\exists C_i \in \bar{C}$ tal que $C_i \subseteq E_i \subseteq E$ luego $\varepsilon < \bar{\mu}(C_i) \leq \bar{\mu}(E)$, por lo cual concluimos que E es interiormente regular.

Proposición 2.12:

- a) La intersección de una sucesión de conjuntos int-regular de medida finita es interior-regular.
- b) La intersección de una sucesión decreciente de conjuntos ext-regular es un conjunto exterior-regular.

Demostración:

- a) Sea $(E_i)_{i \geq 1}$ una sucesión de conjuntos int-regular

de medida finita. Sea $E = \bigcap_{i \geq 1} E_i$.

$\forall \varepsilon > 0, \forall i \geq 1$, existe $C_i \in \bar{C}$: $C_i \subseteq E_i$ y

$\bar{\mu}(E_i) - \bar{\mu}(C_i) \leq \varepsilon/2^i$, sea $C = \bigcap_{i \geq 1} C_i$ entonces $C \subseteq E$.

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E) - \bar{\mu}(C) &= \bar{\mu}(E \setminus C) \\ &= \bar{\mu} \left(\bigcap_{i \geq 1} E_i \setminus \bigcap_{i \geq 1} C_i \right) \\ &= \bar{\mu} \left[\bigcap_{i \geq 1} E_i \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} C_i^c \right) \right] \\ &= \bar{\mu} \left(\bigcup_{i \geq 1} (E_i \setminus C_i) \right) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} (\bar{\mu}(E_i) - \bar{\mu}(C_i)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

y así $E = \bigcap_{i \geq 1} E_i$ es int-regular.

- b) Si $\{E_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos

exterior-regular de medida finita y $E = \bigcap_{i \geq 1} E_i$

entonces $\bar{\mu}(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mu}(E_i)$. Sea $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$\bar{\mu}(E) < c$ entonces existe una $i \geq 1$ tal

$\bar{\mu}(E) < \bar{\mu}(E_i) < c$; como E_i es exterior-regular, existe $U \in \bar{\mathcal{U}}$ tal que $E_i \subseteq U$ y $\bar{\mu}(U) < c$. Así pues existe $U \in \bar{\mathcal{U}}$: $E \subseteq U$ y $\bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(E) < c$ y por ello E es exterior-regular.

Proposición 2.13: Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a) Todo conjunto $C \in \bar{\mathcal{C}}$ es exterior-regular.
- b) Todo conjunto acotado en $\bar{\mathcal{U}}$ es interior-regular.

Demostración: (a \Rightarrow b).

Sea $U \in \bar{\mathcal{U}}$ un conjunto acotado, es decir tal que existe $C \in \bar{\mathcal{C}}$ tal que $U \subseteq C$.

$C \setminus U$ es un compacto que pertenece a $\bar{\mathcal{S}}$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathcal{U} : C \setminus U \subseteq v \text{ y } \bar{\mu}(v) - \bar{\mu}(C \setminus U) \leq \varepsilon$$

Como $U = C \setminus (C \setminus U) \supseteq C \setminus v$ y $C \setminus v$ es compacto entonces la relación:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(C \setminus v) &= \bar{\mu}[(U \setminus (C \setminus v))] \\ &= \bar{\mu}[U \cap (C^c \cup v)] \\ &= \bar{\mu}[(U \cap C^c) \cup (U \cap v)] \\ &= \bar{\mu}(U \cap v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \bar{\mu}[v \setminus (c \setminus u)] \\
 &= \bar{\mu}[(v \cap c^c) \cup (v \cap u)] \\
 &= \bar{\mu}(v) - \bar{\mu}(c - v) \leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

muestra que $U \in \bar{U}$ acotado es interior-regular.

Probaremos ahora que : $(b \Rightarrow a)$. Esto es, suponemos que todo abierto perteneciente a S que sea acotado es interiormente regular y probaremos que todo $C \in \bar{C}$ es exteriormente regular.

Sea $C \in \bar{C}$ y $\varepsilon > 0$. Sea U un acotado en \bar{U} tal que $C \subseteq U$.

Ahora bien $U \setminus C$ es un acotado perteneciente a \bar{U} .

Por la hipótesis (b) existe un $D \in \bar{C}$ tal que:

$$D \subseteq (U \setminus C) \quad \text{y} \quad \bar{\mu}(U \setminus C) - \bar{\mu}(D) \leq \varepsilon$$

Como $C = U \setminus (U \setminus C) \subseteq (U \setminus D) \in \bar{U}$, las relaciones:

$$\bar{\mu}[(U \setminus D) \setminus C] = \bar{\mu}[(U \setminus C) \setminus D] = \bar{\mu}(U \setminus C) - \bar{\mu}(D) \leq \varepsilon$$

muestran que C es exterior-regular.

Proposición 2.14: Cualquiera de las condiciones (a) y (b) del Teorema anterior es equivalente a la regularidad de $\bar{\mu}$.

Demostración: Supongamos que tenemos la condición (a), por ende (b) pues son equivalentes, verificaremos que $\bar{\mu}$ es regular, seguiremos los siguientes pasos:

- i) Si $E_0 \in \bar{S}$ y es acotado entonces E_0 es regular.
- ii) $\forall S \in \bar{S}$, S es la unión de una familia creciente de

acotados contenidos en \bar{S} . En efecto:

(i) Sea $E_0 \in \bar{S}$, E_0 acotado. Existe $C_0 \in \bar{C}$ tal que $E_0 \subseteq C_0$. Denotemos por Dif al conjunto siguiente:

Dif = $\{ E/E \text{ es unión finita de diferencias propias disjuntas de elementos de } \bar{C} \}$.

Sabemos que $\bar{S} = \sigma$ -anillo $(\bar{C}) = \sigma$ -anillo (Dif).

Ahora bien $E_0 \in (\bar{S} \wedge C_0) = \sigma$ -anillo (Dif) $\wedge C_0$ que denotaremos por σ -anillo (Dif $\wedge C_0$) donde

$$\sigma\text{-anillo (Dif) } \wedge C_0 = \{ A \cap C_0 / A \in \sigma\text{-anillo (Dif)} \}$$

Dif $\wedge C_0$ es un anillo, y además si H pertenece a

Dif $\wedge C_0$, $H = \left[\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus B_i) \cap C_0 \right]$ que equivale a

$\bigcup_{i=1}^n [(A_i \cap C_0) \setminus B_i]$ donde $A_i, B_i \in \bar{C}$ tales que

$\{A_i \setminus B_i\}_{i \geq 1}$ es disjunta y $C_0 \in \bar{C}$.

Las hipótesis implican que $A_i \setminus B_i$ es regular así como también $\{(A_i \cap C_0) \setminus B_i\}_{i \leq n}$ es una sucesión finita de conjuntos regulares, luego su unión es regular, luego H es regular.

Por otro lado la familia de los compactos es exteriormente regular así como la familia de los compactos es interiormente regular y constituyen clases monótonas; es decir, son familias estables por uniones crecientes y respectivamente intersecciones decrecientes.

Consideramos ahora la clase monótona generada por

$\text{Dif} \wedge C_0$, esta clase coincide con el σ -anillo generado por $\text{Dif} \wedge C_0$, ya que $\text{Dif} \wedge C_0$ es un anillo.

Por las proposiciones 2.8 y 2.9 los elementos del σ -anillo $(\text{Dif} \wedge C_0)$ son todos regulares; en particular E_0 es regular.

Consideramos ahora la familia B siguiente:

$$B = \left\{ \bigcup_{n \geq 1} A_n / A_n \text{ acotado perteneciente a } \bar{S} \right\}$$

B es un σ -anillo (estable por uniones numerables y por diferencias, con la propiedad de que $\bar{C} \subseteq B$ y por ello $S = \sigma$ -anillo $(\bar{C}) \subseteq B$ y así todo elemento de S es la unión de una familia numerable de acotados crecientes de \bar{S} .

Probemos ahora que $\bar{\mu}$ es regular.

Sea $E \in \bar{S}$ entonces $E = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ con A_n acotado de

\bar{S} y $A_n \subseteq A_{n+1}$. Por (i) A_n es regular para todo $n \geq 1$.

La proposición 2.13 implica que E es regular o sea $\bar{\mu}$ es regular.

Proposición 2.15: "Toda medida de Baire es regular".

Demostración: Bastará con probar que los compactos son interiormente regulares respecto a μ .

Sea C un compacto en X, μ una medida de Baire sobre X. Existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $C = f^{-1}(\{0\})$. Además existe un abierto acotado U_1 en X que contiene a C. Consideremos el cerrado $X \setminus U_1$, por el lema de Urysohn existe $g \in \mathcal{C}(X)$ tal que $0 \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ y además

$$g (X \setminus U_1) = \{1\}, g (C) = \{0\}.$$

$$\text{Sea } h = f \vee g, h \in \mathcal{C}(X) \text{ y } C = h^{-1} (\{0\})$$

$$\text{Sean } U_2 = \{x \in X : h(x) < 1/2\}$$

$$U_n = \{x \in X : h(x) < 1/n\}$$

$$\text{entonces } C = \bigcap_{n \geq 1} U_n.$$

Por lo tanto todo compacto se puede escribir como intersección de abiertos de medida finita, ya que todos los $U_n \subseteq U_1$ y U_1 es acotado y por ello de medida finita.

Así pues, $\mu(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n)$, pero en general

$$\begin{aligned} \mu(C) &\leq \text{Inf} \{ \mu(U_0) : C \subseteq U_0 \in \mathcal{U} \} \\ &\leq \text{Inf} \{ \mu(U_n) : n \in \mathbb{N} \} = \mu(C) \end{aligned}$$

pues los compactos son interiormente regulares; por el teorema anterior μ es regular.

Proposición 2.16: Sea μ una medida de Baire en X , entonces:

- i) $\forall C \in \mathcal{K}_X : \mu^*(C) = \text{Inf} \{ \mu(U_0) : C \subseteq U_0 \in \mathcal{U}_0 \}$
- ii) $\forall U \in \mathcal{U}, U$ acotado :
$$\mu^*(U) = \text{Sup} \{ \mu(C_0) : U \supseteq C_0 \in \mathcal{S}_0 \}$$

Demostración: Verificamos la proposición (i).

Se sabe que:

$$\mu^*(C) = \text{Inf} \{ \mu(E) : C \subseteq E \in \mathcal{S}_0 \}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$, existe $E_0 \in S_0$ tal que $C \subseteq E_0$ y $\mu(E_0) - \mu^*(C) \leq \varepsilon/2$. Siendo $E_0 \in S_0$, E_0 es regular respecto a la medida μ , pues μ es medida de Baire. Así pues existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $E_0 \subseteq U_0$ y se cumple que:

$$\mu(U_0) - \mu(E_0) \leq \varepsilon/2.$$

Como $C \subseteq E_0 \subseteq U_0$ entonces $C \subseteq U_0$ y además:

$$\mu(U_0) - \mu^*(C) = \mu(U_0) - \mu(E_0) + \mu(E_0) - \mu^*(C) \leq \varepsilon,$$

con lo cual queda probada la proposición (i).

Veamos ahora la segunda afirmación de la proposición.

Sea $U \in \mathcal{U}$, acotado. Existe un compacto C en X que contiene a U , y como $C \setminus U$ es un compacto, por lo probado en (i) para todo número real positivo ε , existe V en \mathcal{U}_0 tal que $C \setminus U \subseteq V$ y $\mu(V) - \mu^*(C \setminus U) \leq \varepsilon$.

Por otro lado existe K un compacto G_δ en X tal que $C \setminus V \subseteq K \subseteq U$, pues $C \setminus V$ es un compacto contenido en U , además $\mu^*(U) - \mu^*(C \setminus V) \leq \varepsilon$ y $\mu^*(U) - \mu^*(K) \leq \varepsilon$ luego $\mu^*(U) = \sup \{ \mu(K) : K \in \mathcal{C}_0, K \subseteq U \}$.

Proposición 2.17: Sea μ una medida de Borel y ν su restricción a S_0 , entonces cualquiera de las siguientes condiciones implica la regularidad de μ .

(a) $\mu(C) = \nu^*(C), \quad \forall C \in \mathcal{K}_X.$

(b) $\mu(U) = \nu^*(U), \quad \forall U \in \mathcal{U}, U \text{ acotado.}$

Además si dos medidas regulares de Borel coinciden sobre S_0 entonces ellas son iguales.

Demostración: Probaremos que todo compacto es exteriormente regular y por ende μ resulta ser regular.

Sea $C \in K_X$ y asumamos que $\mu(C) = \gamma^*(C)$. $\forall \varepsilon > 0$, existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $\gamma(U_0) - \gamma^*(C) < \varepsilon$, donde $C \subseteq U_0$.

Como $U_0 \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ entonces: $\mu(U_0) - \mu(C) < \varepsilon$ con $C \subseteq U_0$, por lo cual C es exteriormente regular.

Por otro lado si U es un abierto y acotado de \mathcal{U} y admitimos que $\mu(U) = \gamma^*(U)$, entonces: $\forall \varepsilon > 0$, existe $C \in \mathcal{C}_0$, $C \subseteq U$ y $\gamma^*(U) - \mu(C) < \varepsilon$. Así pues $\mu(U) - \mu(C) < \varepsilon$ pues $C \in \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$, por lo tanto todo abierto y acotado U es interiormente regular y esto significa que μ es regular.

Recíprocamente, supongamos que μ es regular y sea $C \in K_X$ y $\varepsilon > 0$, como μ es regular entonces C es exteriormente regular, de donde existe $U \in \mathcal{U}$ acotado tal que: $C \subseteq U$ y $\mu(U) - \mu(C) < \varepsilon$. Ahora bien $C \subseteq U$ implica que existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $C \subseteq U_0 \subseteq U$ con la condición $\mu(U_0) - \mu(C) < \varepsilon$ por lo cual:

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \text{Inf} \{ \mu(U_0) : C \subseteq U_0 \in \mathcal{U}_0 \} = \text{Inf} \{ \gamma(U_0) : C \subseteq U_0 \} \\ &= \gamma^*(C). \end{aligned}$$

Ahora bien si U es un abierto acotado, siendo μ regular

U es interiormente regular, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $C \in \mathcal{K}_X$ tal que $C \subseteq U$ y $\mu(U) - \mu(C) < \varepsilon$. Pero $C \subseteq U$ implica que existe un compacto G_δ C_0 , tal que: $C \subseteq C_0 \subseteq U$ y $\mu(U) - \mu(C_0) < \varepsilon$, de donde se concluye que

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \sup \{ \mu(C_0) : C_0 \subseteq U \} \\ &= \sup \{ \nu(C_0) : C_0 \subseteq U \} \\ &= \nu^*(U) \end{aligned}$$

Finalmente, si μ_1 y μ_2 son dos medidas regulares de Borel en X tales que $\mu_1/s_0 = \nu = \mu_2/s_0$ tendremos lo siguiente: Para todo compacto C : $\mu_1(C) = \nu^*(C) = \mu_2(C)$ y también, para todo abierto y acotado U :

$\mu_1(U) = \nu^*(U) = \mu_2(U)$. Luego si E pertenece a \mathcal{S} se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \sup \{ \mu_1(C) : C \subseteq E \text{ y } C \text{ compacto} \} \\ &= \sup \{ \mu_2(C) : C \subseteq E \text{ y } C \text{ compacto} \} \\ &= \mu_2(E). \end{aligned}$$

Proposición 2.18: Sea μ una medida de Borel en X y sea $\mu_0 = \mu/s_0$. Son equivalentes los enunciados siguientes:

- (α) Para todo compacto C , $C \in \mathcal{L}_{\mu_0^*}$
 (β) $\forall U \in \mathcal{U}$, U acotado, $U \in \mathcal{L}_{\mu_0^*}$

$$(\delta) \quad \forall s \in S, s \in \bigwedge \mu_0^*$$

Demostración:

1) $(\alpha \implies \delta)$. Como $S = \sigma(K_X)$ y siendo $\bigwedge \mu_0^*$ una σ -álgebra entonces $K_X \subseteq S \subseteq \bigwedge \mu_0^*$

2) $(\beta \implies \alpha)$. Sea $C \in K_X$ y $E \in S_0$.

Como $\mu_0^*(C) = \text{Inf} \{ \mu_0(U) : C \subseteq U \in \mathcal{U}_0 \}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ acotado tal que:

$$C \subseteq U_0 \text{ y } \mu(U_0) - \mu_0^*(C) < \varepsilon$$

Como U_0 es medible por hipótesis, entonces:

$$\begin{aligned} \mu_0^*(E) &\geq \mu_0^*(E \cap U_0) + \mu_0^*(E \cap U_0^c) \\ &\geq \mu_0^*(E \cap C) + \mu_0^*(E \cap U_0^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{luego } \mu_0^*(E) + \varepsilon &\geq \mu_0^*(E \cap C) + \mu_0^*(E \cap U_0^c) + \\ &\mu_0^*(E \cap (U_0 \setminus C)) \end{aligned}$$

$$\text{ya que } \varepsilon \geq \mu_0^*(U_0 \setminus C) \geq \mu_0^*(E \cap (U_0 \setminus C))$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \mu_0^*(E) + \varepsilon &\geq \mu_0^*(E \cap C) + \mu_0^* \left[E \cap \{ U_0^c \cup (U_0 \cap C^c) \} \right] \\ &= \mu_0^*(E \cap C) + \mu_0^*(E \cap C^c) \end{aligned}$$

$\therefore \mu_0^*(E) \geq \mu_0^*(E \cap C) + \mu_0^*(E \cap C^c)$ lo cual significa que cualquier $C \in K_X$ pertenece a $\bigwedge \mu_0^*$.

2.4 Contents

El propósito de esta sección es probar cómo a partir de funciones más primitivas se pueden obtener medidas de Borel regulares.

Definición 2.9: Definimos un content como una función de conjuntos definida sobre la clase K_X de todos los compactos de X , la cual es:

- a) no negativa y finita
- b) monótona
- c) aditiva
- d) sub-aditiva: esto es $\lambda : K_X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ será content si:
 - a) $\forall c \in K_X : 0 \leq \lambda(c) < \infty$
 - b) Si $c_1 \subseteq c_2$ entonces $\lambda(c_1) \leq \lambda(c_2)$, $c_1, c_2 \in K_X$
 - c) Si $c_1, c_2 \in K_X : c_1 \cap c_2 = \emptyset$ entonces:
$$\lambda(c_1 \cup c_2) = \lambda(c_1) + \lambda(c_2)$$
 - d) Si $c_1, c_2 \in K_X$, $\lambda(c_1 \cup c_2) \leq \lambda(c_1) + \lambda(c_2)$

Obsérvese que: $\lambda(\emptyset) = \lambda(\emptyset \cup \emptyset) = \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset)$
entonces $\lambda(\emptyset) = 0$, lo cual significa que todo content se anula en \emptyset .

El lineamiento general de nuestro objetivo será el siguiente:

En términos de un content λ dado definiremos una función de conjuntos $\lambda_{\#}$ sobre la clase de los borelianos abiertos y luego en términos de $\lambda_{\#}$ definiremos una medida exterior $\mu^{\#}$ sobre la clase de los conjuntos σ -acotados. Después de esto, usando los conocimientos previamente establecidos sobre la $\mu^{\#}$ -mesurabilidad obtendremos de la medida exterior $\mu^{\#}$ una medida μ la cual resultará ser una medida regular de Borel.

Definición 2.10: El inner-content $\lambda_{\#}$ inducido por un content λ es la función de conjuntos definida para $U \in \mathcal{U}$ por:

$$\lambda_{\#}(U) = \text{Sup} \left\{ \lambda(C) : U \supseteq C \in K_X \right\}$$

Proposición 2.19: El inner-content $\lambda_{\#}$ inducido por un content λ tiene las siguientes propiedades:

1. $\lambda_{\#}(\emptyset) = 0$
2. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y $U_1 \subseteq U_2$: $\lambda_{\#}(U_1) \leq \lambda_{\#}(U_2)$
3. Si $\{U_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{U}$, disjunta: $\lambda_{\#}\left(\bigcup_{n \geq 1} U_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda_{\#}(U_n)$
4. Si $\{U_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{U}$: $\lambda_{\#}\left(\bigcup_{n \geq 1} U_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_{\#}(U_n)$

Demostración:

1. Es obvio que $\lambda_{\#}(\emptyset) = 0$
2. Sea $U_1, U_2 \in \mathcal{U} : U_1 \subseteq U_2$, si C es un compacto contenido en U_1 , $C \subseteq U_2$ y como $\lambda(C) \leq \lambda_{\#}(U_2)$, se sigue que: $\lambda_{\#}(U_1) = \sup \{ \lambda(C) : C \subseteq U_1 \} \leq \lambda_{\#}(U_2)$
3. Si U_1, U_2 son borelianos abiertos y C es un compacto contenido en $U_1 \cup U_2$ entonces por la proposición 2.1 existen compactos $E_1 \subseteq U_1; E_2 \subseteq U_2$ tales que:

$$C = E_1 \cup E_2.$$

$$\text{Como } \lambda(C) \leq \lambda(E_1) + \lambda(E_2) \leq \lambda_{\#}(U_1) + \lambda_{\#}(U_2)$$

se sigue que:

$$\lambda_{\#}(U_1 \cup U_2) = \sup \{ \lambda(C) \} \leq \lambda_{\#}(U_1) + \lambda_{\#}(U_2)$$

por lo cual $\lambda_{\#}$ es sub-aditiva, por inducción matemática se prueba que $\lambda_{\#}$ es finitivamente sub-aditiva.

Si $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos en \mathcal{U} y C

es un compacto tal $C \subseteq \bigcup_{i \geq 1} U_i$, entonces por la compacidad de

C existe un entero positivo n tal que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, se sigue

entonces que:

$$\lambda(C) \leq \lambda_{\#}\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{\#}(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\#}(U_i) \text{ y por}$$

cuanto

$$\lambda_{*} \left(\bigcup_{i \geq 1} U_i \right) = \text{Sup} \{ \lambda(C) \} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{*} (U_i).$$

Se sigue que λ_{*} es contablemente sub-aditiva.

Supongamos ahora que U y V son dos abiertos disjuntos de \bar{U} y sean C y D dos compactos tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$, como C y D son disjuntos y además $C \cup D \subseteq U \cup V$ se tiene que:

$$\lambda(C) + \lambda(D) = \lambda(C \cup D) \leq \lambda_{*} (U \cup V) \text{ y en consecuencia:}$$

$$\lambda_{*} (U) + \lambda_{*} (V) = \text{Sup} \{ \lambda(C) \} + \text{Sup} \{ \lambda(D) \} \leq \lambda_{*} (U \cup V).$$

La sub-aditividad de λ_{*} implicará ahora la aditividad y así por inducción matemática, se prueba que λ_{*} es finitamente aditiva.

Si $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión disjunta de \bar{U} entonces

$$\lambda_{*} \left(\bigcup_{i \geq 1} U_i \right) \geq \lambda_{*} \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_{*} (U_i) \text{ y como esto es}$$

válido para cualquier n entonces:

$$\lambda_{*} \left(\bigcup_{i \geq 1} U_i \right) \geq \sum_{i \geq 1} \lambda_{*} (U_i).$$

Como ya se probó que λ_{*} es contablemente sub-aditiva entonces se concluye que $\lambda_{*} \left(\bigcup_{i \geq 1} U_i \right) = \sum_{i \geq 1} \lambda_{*} (U_i)$, donde

$$U_j \cap U_i = \emptyset, i \neq j.$$

Definición 2.11: Sea λ un content y $\lambda_{\#}$ el inner-content inducido por λ .

Se puede definir una función de conjuntos $\mu^{\#}$ sobre el σ -anillo de todos los conjuntos σ -acotados por:

$$\mu^{\#}(E) = \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(U) / E \subseteq U \in \bar{U} \}.$$
 Esta función es llamada la medida exterior inducida por el content λ . El dominio de definición de las medidas exteriores es todo parte de X , pero en el siguiente teorema esta terminología es justificada, puesto que $\mu^{\#}$ satisface todas las propiedades de una medida exterior.

Proposición 2.20: $\mu^{\#}$ es una medida exterior.

Demostración:

1. $\mu^{\#}(\emptyset) = 0$, en efecto $\emptyset \subseteq \emptyset \in \bar{U}$ y $\lambda_{\#}(\emptyset) = 0$

de allí que:

$$\mu^{\#}(\emptyset) = \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(U) / \emptyset \subseteq U \in \bar{U} \} = 0$$

2. Sean E y F dos conjuntos σ -acotados tales que $E \subseteq F$. Si $U \in \bar{U}$ es tal que $F \subseteq U$ entonces $E \subseteq F \subseteq U$ y como $\mu^{\#}(E) \leq \lambda_{\#}(U)$ se sigue que

$$\mu^{\#}(E) \leq \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(U) \} = \mu^{\#}(F).$$

3. Si $\{E_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de conjuntos σ -acotados.

Si $\exists i / \mu^{\#}(E_i) = \infty$ es inmediato que

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \geq 1} E_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^* (E_i).$$

si $\forall i, \mu^* (E_i) < \infty$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_i \in \bar{U} : E_i \subseteq U_i \quad \text{y}$$

$$\lambda_*(U_i) - \mu^* (E_i) < \varepsilon/2^i, \text{ de donde se sigue que:}$$

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \geq 1} E_i \right) \leq \lambda_* \left(\bigcup_{i \geq 1} E_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda_*(U_i) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^*(E_i) + \varepsilon$$

Por lo cual:

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \geq 1} E_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^* (E_i).$$

Observación: Sea (X, τ) espacio topológico, S un σ -anillo de partes de X y μ una medida sobre S entonces:

$$\text{si } \mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty] \text{ dada por } \mu^*(A) = \text{Inf} \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \right\}$$

$$\text{si } A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n \text{ donde } A_n \in S.$$

Ahora, $\mu^*(A) = \infty$ si no existen tales cubrimientos.

$$w : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty] \text{ dado por}$$

$w(A) = \text{Inf} \{ \mu(B) : A \subseteq B \in S \}$, si no existen tales super conjuntos entonces $w(A) = \infty$.

Se puede verificar fácilmente que $\mu^* = w$.

Sea λ un content en X . Definamos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$

por $\mu^*(E) = \text{Inf} \{ \lambda_*(U) : E \subseteq U \in \bar{U} \}$, ∞ en otro caso.

Entonces μ^* es la llamada medida exterior generada por el content λ . Probaremos que en efecto μ^* es una medida exterior.

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ pues $\emptyset \subseteq \emptyset \in \mathcal{U}$ y $\lambda_{\#}(\emptyset) = 0$

ii) Sean $E, F \in \mathcal{P}(X)$ tales que $E \subseteq F$.

Si $\mu^*(F) = \infty$ entonces es inmediato que $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. Supongamos que $\mu^*(F) < \infty$ y sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq U$ entonces $E \subseteq U$, por lo cual $\mu^*(E) \leq \lambda_{\#}(U)$ y de esto se deduce que:

$$\mu^*(E) \leq \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(U) : F \subseteq U \} = \mu^*(F).$$

iii) Sea $\{A_n\} \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\forall n \geq 1 \mu^*(A_n) < \infty$
y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces $\forall n \geq 1$, existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $A_n \subseteq U_n$ y además $\lambda_{\#}(U_n) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Como $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n \in \mathcal{U}$, $\mu^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \lambda_{\#}(\bigcup_{n \geq 1} U_n)$
pero $\lambda_{\#}(\bigcup_{n \geq 1} U_n) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_{\#}(U_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \varepsilon$ por lo cual μ^* es sub-aditiva.

Proposición 2.21: Si $\lambda_{\#}$ es un inner-content y μ^* es la medida exterior inducida por el content λ , entonces $\mu^*(U) = \lambda_{\#}(U)$ para todo $U \in \mathcal{U}$ y además: $\mu^*(C^0) \leq \lambda(C) \leq \mu^*(C)$, $\forall C \in \mathcal{K}_X$ (donde C^0 denota el interior topológico de C).

Demostración: Si $U \in \mathcal{U}$, entonces la relación

$$U \subseteq V \in \mathcal{U} \text{ implica que } \mu^{\#}(U) \leq \lambda_{\#}(U).$$

Si $V \in \bar{\mathcal{U}}$ y $U \subseteq V$ entonces $\lambda_{\#}(U) \leq \lambda_{\#}(V)$ y así:

$$\lambda_{\#}(U) \leq \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(V) / U \subseteq V \in \bar{\mathcal{U}} \} \text{ que es igual a } \mu^{\#}(U),$$

por lo tanto:

$$\forall U \in \mathcal{U} : \mu^{\#}(U) = \lambda_{\#}(U).$$

*** Si $C \in K_X$ y $U \in \bar{\mathcal{U}}$ y $C \subseteq U$, entonces $\lambda(C) \leq \lambda_{\#}(U)$

por definición y por lo tanto:

$$\lambda(C) \leq \text{Inf} \{ \lambda_{\#}(U) \} = \mu^{\#}(C).$$

Ahora si $C \in K_X$ y $D \in K_X : D \subseteq C^0 \subseteq C$ entonces

$$\lambda(D) \leq \lambda(C) \text{ por la monotomía de } \lambda. \text{ Luego } \mu^{\#}(C^0) = \lambda_{\#}(C^0)$$

$$\lambda_{\#}(C^0) = \text{Sup} \{ \lambda(D) / D \subseteq C^0 \} \leq \lambda(C).$$

Concluimos así que: $\mu^{\#}(C^0) \leq \lambda(C) \leq \mu^{\#}(C).$

Proposición 2.22: Si $\mu^{\#}$ es la medida exterior inducida por un content λ , entonces un conjunto σ -acotado E es $\mu^{\#}$ -medible si y solamente si:

$$\forall U \in \bar{\mathcal{U}} : \mu^{\#}(U) \geq \mu^{\#}(U \cap E) + \mu^{\#}(U \cap E^c)$$

Demostración: Si E es un conjunto $\mu^{\#}$ -medible entonces la tesis es inmediata.

Supongamos que: $\forall U \in \bar{\mathcal{U}} : \mu^{\#}(U) \geq \mu^{\#}(U \cap E) + \mu^{\#}(U \cap E^c)$

y verifiquemos que E es $\mu^{\#}$ -medible.

Sea $A \in \mathcal{P}(X)$, probaremos que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Si $\mu^*(A) = \infty$ se cumple la desigualdad trivialmente.

Supongamos que $\mu^*(A) < \infty$.

Sea $U \in \bar{\mathcal{U}}$ tal que $A \subseteq U$, entonces de las relaciones:

$$\begin{aligned} \lambda^*(U) = \mu^*(U) &\geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

se deduce que: $\mu^*(A) = \text{Inf} \{ \lambda^*(U) : A \subseteq U \in \bar{\mathcal{U}} \} \geq$
 $\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$

Luego E es μ^* -medible.

Proposición 2.23: Si μ^* es la medida exterior inducida por un content λ , entonces la función de conjuntos μ definida para todo Boreliano E por $\mu(E) = \mu^*(E)$ es una medida regular de Borel, llamada la medida de Borel inducida por λ .

Demostración: Probaremos primeramente que cada conjunto compacto (y por lo tanto cada Boreliano) es μ^* -medible, de lo cual se desprenderá inmediatamente que μ es una medida sobre la clase de los Borelianos.

Por la proposición 2.22, será suficiente con probar que:

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C^c), \forall U \in \mathcal{U}, C \in \mathcal{K}_X.$$

Sea D un subconjunto compacto de $U \cap C^c$ y sea E un subconjunto compacto de $U \cap D^c$, observemos que estos conjuntos $U \cap C^c$ y $U \cap D^c$ pertenecen a \mathcal{U} .

Como $D \cap E = \emptyset$ y $D \cup E \subseteq U$ se sigue que:

$$\begin{aligned}\mu^*(U) &= \lambda_*(U) \geq \lambda(D \cup E) = \lambda(D) + \lambda(E) \text{ más aún:} \\ \mu^*(U) &\geq \lambda(D) + \sup \{ \lambda(E) \} = \lambda(D) + \lambda_*(U \cap D^c) \\ &= \lambda(D) + \mu^*(U \cap D^c) \\ &\geq \lambda(D) + \mu^*(U \cap C)\end{aligned}$$

De esto último se deduce que:

$$\begin{aligned}\mu^*(U) &\geq \mu^*(U \cap C) + \sup \{ \lambda(D) \} \\ &\geq \mu^*(U \cap C) + \lambda_*(U \cap C^c) \\ &= \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C^c), \text{ por lo tanto,} \\ C \text{ es } \mu^* \text{-medible y así } K_X \subseteq S &\subseteq \bigwedge \mu^*, \text{ por lo cual:}\end{aligned}$$

μ^*/S es una medida.

Para probar que $\mu(C) < \infty \forall C$, observemos que existe un compacto F_0 tal que $C \subseteq F_0$ (por proposición 2.2).

Por lo cual $\mu(C) = \mu^*(C) < \mu^*(F_0) \leq \lambda(F_0) < \infty$

Luego μ es una medida de Borel.

Ahora la regularidad de μ se obtiene de las relaciones:

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \mu^*(C) = \inf \{ \lambda_*(U) / C \subseteq U \in \mathcal{U} \} \\ &= \inf \{ \mu^*(U) / C \subseteq U \in \mathcal{U} \} \\ &= \inf \{ \mu(U) / C \subseteq U \in \mathcal{U} \}\end{aligned}$$

2.5 Contents Regulares

Definición 2.12: Un content λ es regular si para todo compacto C .

$$\lambda(C) = \text{Inf} \left\{ \lambda(D) : C \subseteq D^0 \subseteq D \in \mathcal{K}_X \right\}$$

Proposición 2.24: Si μ es la medida de Borel inducida por un content regular λ , entonces $\mu(C) = \lambda(C)$ para todo compacto C .

Demostración: Si $C \in \mathcal{K}_X$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists D \in \mathcal{K}_X : C \subseteq D^0$
y $\lambda(D) - \lambda(C) < \varepsilon$, por la regularidad de λ .

Se sigue de la proposición 2.21 que:

$$\lambda(C) \leq \mu(C) \leq \mu^*(D^0) \leq \lambda(D) \leq \varepsilon + \lambda(C) \text{ y así:}$$

$$\lambda(C) = \mu(C) \quad \forall C \in \mathcal{K}_X.$$

Proposición 2.25: Si μ es una medida regular de Borel y si para todo compacto C definimos $\lambda(C) = \mu(C)$; entonces λ es un content regular y la medida inducida por λ coincide con μ .

Demostración: Es claro que λ es un content.

Siendo μ regular, $\forall C \in \mathcal{K}_X$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $C \subseteq U$ y $\mu(U) - \mu(C) < \varepsilon$

Sea $D \in \mathcal{K}_X : C \subseteq D^0 \subseteq D \subseteq U$ entonces:

$\lambda(D) = \mu(D) \leq \mu(U) \leq \mu(C) + \varepsilon = \lambda(C) + \varepsilon$,
por lo tanto: $\lambda(D) - \lambda(C) \leq \varepsilon$ y así:

$\lambda(C) = \text{Inf} \{ \lambda(D) : C \subseteq D^0 \subseteq D \subseteq U \}$ lo que prueba la regularidad de λ .

Si $\hat{\mu}$ es la medida de Borel inducida por λ entonces
 $\hat{\mu}(C) = \lambda(C) = \mu(C) \quad \forall C \in K_X$.

$\therefore \hat{\mu} = \mu$, por proposición 2.17.

Proposición 2.26: Si μ_0 es una medida de Baire y si
para todo compacto C definimos:

$$\lambda(C) = \text{Inf} \{ \mu_0(U_0) / C \subseteq U_0 \in \mathcal{U}_0 \}$$

Entonces λ es un content regular.

Demostración: Es fácil verificar que λ es no negativo, finito y monótona.

Sean C y D conjuntos compactos y U_0 y V_0 abiertos de S_0 , tales que: $C \subseteq U_0$, $D \subseteq V_0$, entonces:

$C \cup D \subseteq (U_0 \cup V_0) \in \mathcal{U}_0$ y así:

$$\lambda(C \cup D) \leq \mu_0(U_0 \cup V_0) \leq \mu_0(U_0) + \mu_0(V_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \lambda(C \cup D) &\leq \text{Inf} \{ \mu_0(U_0) \} + \text{Inf} \{ \mu_0(V_0) \} \\ &= \lambda(C) + \lambda(D). \end{aligned}$$

Así pues λ es sub-aditiva.

Supongamos ahora que C y D son compactos disjuntos entonces existen conjuntos disjuntos $U_0 \in \mathcal{U}_0$, $V_0 \in \mathcal{U}_0$,

tales que: $C \subseteq U_0, D \subseteq V_0$.

Si $C \cup D \subseteq W_0 \in \mathcal{U}_0$ entonces :

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leq \mu_0(U_0 \cap W_0) + \mu_0(V_0 \cap W_0) \leq \mu_0(W_0),$$

asi pues

$\lambda(C) + \lambda(D) \leq \text{Inf} \{ \mu_0(W_0) \} = \lambda(C \cup D)$ y como se probó la sub-aditividad, entonces se tiene que λ es finitamente aditiva. *

Para probar la regularidad de λ , sea $C \in K_X$ y $\varepsilon > 0$, de la definición de λ , existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$:

$$C \subseteq U_0 \text{ y } \mu(U_0) = \lambda(C) < \varepsilon$$

Si D es un compacto tal que $C \subseteq D^0 \subseteq D \subseteq U_0$ entonces $\lambda(D) \leq \mu_0(U_0) \leq \lambda(C) + \varepsilon$.

$\therefore \lambda(C) = \text{Inf} \{ \lambda(D) : C \subseteq D^0 \subseteq D, D \in K_X \}$ esto es λ es regular.

2.6 Generación de Medidas de Borel.

Proposición 2.27: Si μ_0 es una medida de Baire, existe una única medida regular de Borel

μ tal que: $\mu / S_0 = \mu_0$.

Demostración: Sea $\lambda(C) = \text{Inf} \{ \mu_0(U_0) : C \subseteq U_0 \in \mathcal{U}_0 \}$ entonces λ es un content regular.

Sea μ la medida regular de Borel inducida por λ .

Entonces $\mu(C) = \lambda(C) \forall C \in \mathcal{K}_X$, por la proposición 2.24.

Como μ_0 es regular por ser Baire, entonces

$\lambda(C) = \mu_0(C)$ y por ello $\mu(C) = \mu_0(C)$ lo que prueba la existencia de μ .

La unicidad de μ es consecuencia de la proposición 2.17.

Proposición 2.28: Sean (X, \mathcal{T}_1) y (Y, \mathcal{T}_2) espacios topológicos, T un homeomorfismo de X en Y , μ una medida regular de Borel en X . Entonces:

1. Si A es un boreliano de Y entonces $T^{-1}(A)$ es un boreliano de X .
2. Si definimos $\hat{\mu}(A) = \mu(T^{-1}(A))$ entonces $\hat{\mu}$ es una medida regular de Borel en Y .

Demostración: Indicaremos S_X y S_Y las clases de Borel en X e Y respectivamente. Probaremos en primer lugar que: $T^{-1}(S_Y) = S_X$.

Como T es un homeomorfismo las inclusiones $\mathcal{K}_X \subseteq T^{-1}(S_Y)$ y $\mathcal{K}_Y \subseteq T(S_X)$ nos proporciona que: $S_X \subseteq T^{-1}(S_Y)$ y también $S_Y \subseteq T(S_X)$. Luego efectivamente $T^{-1}(S_Y) = S_X$.

Veamos ahora que $T^{-1}(S_Y)$ es un σ -anillo.

- a. Evidentemente \emptyset pertenece a $T^{-1}(S_Y)$
- b. Si B_1, B_2 pertenecen a $T^{-1}(S_Y)$ entonces $T(B_1)$ y $T(B_2)$ pertenecen a S_Y . Siendo T un homeomorfismo

$T(B_1) \cup T(B_2) = T(B_1 \cup B_2)$ y como S_Y es σ -anillo $T(B_1 \cup B_2)$ pertenece a S_Y es decir $B_1 \cup B_2 \in T^{-1}(S_Y)$.
Similarmente se prueba que $T^{-1}(S_Y)$ es estable por diferencias y por uniones contables.

Consideremos ahora, $\hat{\mu}: S_Y \longrightarrow [0, \infty]$ dada por:
 $\forall A \in S_Y : \hat{\mu}(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Probaremos que $\hat{\mu}$ es una medida regular. En efecto

$$\hat{\mu}(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de elementos de S_Y

tal que su unión es un elemento de S_Y , tendremos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)\right) \text{ por definición de } \hat{\mu} \\ &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} (T^{-1}(A_n))\right) \text{ por propiedad de } T^{-1} \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(T^{-1}(A_n)) \text{ pues } \mu \text{ es medida} \\ &= \sum_{n \geq 1} \hat{\mu}(A_n) \text{ por la definición de } \hat{\mu}. \end{aligned}$$

Luego $\hat{\mu}$ es una medida en Y . Probaremos a continuación que $\hat{\mu}$ es regular, es decir que:

$$a) \mu(A) = \sup \{ \mu(C) / A \supseteq C \in \mathcal{K}_Y \} \quad \forall A \in S_Y$$

$$b) \mu(A) = \inf \{ \mu(\mathcal{O}) / A \subseteq \mathcal{O} \in \mathcal{T}_2 \cap S_Y \}, \quad \forall A \in S_Y$$

Sea $A \in S_Y$ entonces $T^{-1}(A) \in S_X$ y como μ es una medida regular en X tendremos que:

$$\mu(T^{-1}(A)) = \text{Sup} \left\{ \mu(K) / T^{-1}(A) \supseteq K \in K_X \right\} \quad \text{o sea}$$

$$\hat{\mu}(A) = \text{Sup} \left\{ \mu(T^{-1}(C)) / A \supseteq C \in K_Y \right\}$$

pues para todo $K \in K_X$: $K = T^{-1}(C)$ con $C \in K_Y$ por ser T un homeomorfismo.

De modo similar se prueba (b) lo que es consecuencia de la regularidad de μ y de que T es un homeomorfismo de X a Y .

Proposición 2.29: Sean (X, τ_1) , (Y, τ_2) espacios topológicos y T un homeomorfismo de

X en Y . Consideremos además λ un content en X .

Si definimos $\bar{\lambda} : K_Y \longrightarrow [0, \infty[$ por:

$\forall C \in K_Y$: $\bar{\lambda}(C) = \lambda(T^{-1}(C))$ entonces $\bar{\lambda}$ es un content en Y llamado el content inducido por λ y por T .

Además si μ^* es la medida exterior en X asociada a λ y definimos $W : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow [0, \infty]$ por

$\forall A \in \mathcal{P}(Y)$: $W(A) = \mu^*(T^{-1}(A))$ entonces W es una medida exterior y si V^* es la medida exterior inducida por $\bar{\lambda}$ entonces $V^* = W$.

Demostración: Sea $C \in K_Y$ entonces $T^{-1}(C)$ es un compacto en X y como λ es un content en X se

tiene que:

$$\bar{\lambda}(C) = \lambda(T^{-1}(C)) < \infty \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}(C) \geq 0.$$

Tomemos C_1 y C_2 dos compactos disjuntos de Y entonces también son disjuntos los compactos $T^{-1}(C_1)$ y $T^{-1}(C_2)$ por lo cual

$$\bar{\lambda}(C_1 \cup C_2) = \lambda(T^{-1}(C_1 \cup C_2)) = \lambda(T^{-1}(C_1) \cup T^{-1}(C_2))$$

y como λ es aditiva entonces:

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}(C_1) \cup T^{-1}(C_2)) &= \lambda(T^{-1}(C_1)) + \lambda(T^{-1}(C_2)) \\ &= \bar{\lambda}(C_1) + \bar{\lambda}(C_2). \end{aligned}$$

es decir $\bar{\lambda}$ es aditiva.

Por otro lado si C_1 y C_2 son compactos en Y tales que $C_1 \subseteq C_2$ entonces: $T^{-1}(C_1) \subseteq T^{-1}(C_2)$ de donde

$$\bar{\lambda}(C_1) = \lambda(T^{-1}(C_1)) \leq \lambda(T^{-1}(C_2)) = \bar{\lambda}(C_2).$$

Analogamente se prueba que si C_1 y C_2 son compactos de Y no necesariamente disjuntos entonces:

$\bar{\lambda}(C_1 \cup C_2) \leq \bar{\lambda}(C_1) + \bar{\lambda}(C_2)$, con lo que terminamos de verificar que $\bar{\lambda}$ es un content en Y .

Sea μ^* la medida exterior generada por λ y $W : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow [0, \infty]$ dada por $W(A) = \mu^*(T^{-1}(A))$ para parte A de Y . Probaremos que W es una medida exterior en Y .

En efecto:

$$1. \quad W(\emptyset) = \mu^*(T^{-1}(\emptyset)) = \mu^*(\emptyset) = 0$$

2. Si A y B son sub-conjuntos de Y tales que $A \subseteq B$ entonces $T^{-1}(A) \subseteq T^{-1}(B)$ y así:

$$\mu^*(T^{-1}(A)) \leq \mu^*(T^{-1}(B)) \text{ de donde por definición}$$

$$W(A) \leq W(B).$$

3. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de partes de Y .

$$\text{Sabemos que } T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n)$$

y como μ^* es medida exterior tendremos:

$$\begin{aligned} W\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mu^*(T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)) = \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(A_n)\right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(T^{-1}(A_n)) \\ &= \sum_{n \geq 1} W(A_n) \end{aligned}$$

Luego W es σ -sub-aditiva.

Por (1), (2) y (3) tenemos que W es una medida exterior tal como deseabamos probar.

Finalmente verificaremos que si V^* es la medida exterior inducida por el content $\bar{\lambda}$ entonces $V^* = W$. En efecto, probaremos en primera instancia que:

$$\bar{\lambda}_*(U) = \lambda_*(T^{-1}(U)), \quad \forall U \in \mathcal{P}(Y), \quad U \text{ } \sigma\text{-acotado}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_*(U) &= \sup \left\{ \bar{\lambda}(C) : C \subseteq U, \quad C \in \mathcal{K}_Y \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda(T^{-1}(C)) : C \subseteq U, \quad C \in \mathcal{K}_Y \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda(T^{-1}(C)) : T^{-1}(C) \subseteq T^{-1}(U) \right\} \\ &= \lambda_*(T^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Estamos listos ahora para verificar que $W = V^*$.

$$V^*(A) = \begin{cases} \inf \left\{ \lambda_*(U) : A \subseteq U \in \mathcal{U} \right\} \\ \infty \text{ si no existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } A \subseteq U. \end{cases}$$

Si $V^*(A) = \infty$, no existe $U \in \mathcal{U}_Y$ tal que $A \subseteq U$.

Luego tampoco existe un conjunto U_1 en \mathcal{U}_X tal que

$T^{-1}(A) \subseteq U_1$, por lo cual $\mu^{\#}(T^{-1}(A)) = \infty$ y así $v^{\#}(A) = W(A)$.

Supongamos que

$$\begin{aligned} v^{\#}(A) &= \text{Inf} \left\{ \bar{\lambda}_{\#}(U) : A \subseteq U \in \mathcal{U}_Y \right\} \\ &= \text{Inf} \left\{ \bar{\lambda}_{\#}(T^{-1}(U)) : T^{-1}(A) \subseteq T^{-1}(U) \right\} \\ &= \mu^{\#}(T^{-1}(A)) \\ &= W(A) \end{aligned}$$

con lo cual terminamos la demostración.

Proposición 2.30: Sea $T : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre los espacios topológicos

(X, \mathcal{T}_1) y (Y, \mathcal{T}_2) . Consideremos también un content λ en X y por consiguiente debido a la proposición 2.29 consideremos el content $\bar{\lambda}$ inducido sobre Y por T en términos de λ . Si μ y v son las medidas regulares de Borel generadas por λ y $\bar{\lambda}$ respectivamente entonces:

$$\forall B \in \mathcal{S}_Y : v(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

La demostración es consecuencia directa de las proposiciones 2.28 y 2.29 respectivamente.

2.7 El Teorema de Representación de Riesz para Espacios Topológicos Compactos.

Proposición 2.31: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida.

Entonces existe una función h en

$L_1(|\mu|)$ tal que:

$$\mu(E) = \int_E h \, d|\mu|, \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$$|h(x)| = 1 \quad \forall x \in X.$$

Demostración: Aceptaremos la versión general del Teorema de Radon-Nikodín en la demostración

que a continuación presentamos.

Sabemos que μ es absolutamente continua respecto a $|\mu|$, luego por el teorema general de Radon-Nikodín, existe $g \in L_1(|\mu|)$ tal que:

$$\mu(E) = \int_E g \, d|\mu| \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Definamos

$$\forall |\mu|(E) > 0 : A_E(g) = \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E g \, d|\mu|$$

Sea $r > 0$ y consideremos $A_r = \{x \in X : |g(x)| < r\} \in \mathcal{A}$

Sea $(E_j) \subseteq \mathcal{A}$ una partición de A_r , entonces:

$$A_r = \bigcup_j E_j$$

$$\begin{aligned} \sum_j \mu(E_j) &\leq \sum_j \int_{E_j} g \, d|\mu| \leq \sum_j r \int_{E_j} d|\mu| \\ &= \sum_j r |\mu|(E_j) \\ &\leq r |\mu|(A_r) \end{aligned}$$

entonces $|\mu|(A_r) \leq r |\mu|(A_r)$.

Si $r \leq 1$ entonces $|\mu|(A_r) = 0$.

Luego $|\mu|(A_1) = |\mu|\{x \in X : |g(x)| < 1\} = 0$

de donde

$|g(x)| \geq 1$ $|\mu|$ - casi en todas partes.

Observemos ahora que:

$$|A_E(g)| = \frac{1}{|\mu|(E)} \left| \int_E g \, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

Luego

$\forall |\mu|(E) > 0, A_E(g) \in [-1, 1] = S$

Demostraremos a continuación que $g(x) \in S$ $|\mu|$ - casi en todas partes, lo cual indicaremos

$g(x) \in S, |\mu|$ - c.t.p.

$\mathbb{C}S$ es un abierto de \mathbb{R} y más aun $\mathbb{C}S = \bigcup_{n \geq 1} \Delta_n$

donde $\Delta_n = B[\alpha_n, r_n]$, bola cerrada de centro $\alpha_n \in \mathbb{C}S$ y radio r_n

Sea $E_n = g^{-1}(\Delta_n) = \{x \in X : |g(x) - \alpha_n| \leq r_n\}$

probaremos que $|\mu|(E_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$.

Supongamos que existe $n \geq 1$ tal que $|\mu|(E_n) > 0$.

Entonces por lo probado en la primera parte

$A_{E_n}(g) \in S$ pero:

$$\begin{aligned} |E_n(g) - \alpha_n| &= \left| \frac{1}{|\mu|(E_n)} \int_{E_n} g \, d|\mu| - \frac{1}{|\mu|(E_n)} \int_{E_n} \alpha_n \, d|\mu| \right| \\ &= \frac{1}{|\mu|(E_n)} \left| \int_{E_n} (g - \alpha_n) \, d|\mu| \right| \\ &\leq \frac{r_n |\mu|(E_n)}{|\mu|(E_n)} = r_n \end{aligned}$$

Luego $\Delta_{E_n}(g) \in \Delta_n \subseteq \bigcap S$, lo cual contradice lo de-

mostrado anteriormente. Por lo tanto:

$$|\mu|(E_n) = 0, \forall n \text{ y por ello:}$$

$$|\mu|\left(\bigcup E_n\right) = 0$$

$$\text{Ahora } \bigcup_{n \geq 1} E_n = \{x \in X : |g(x)| > 1\}$$

$$\text{es decir } |\mu|(\{x \in X : g(x) \neq 1\}) = 0$$

$$\text{Llamemos } B = \{x \in X : g(x) \neq 1\}$$

y definamos

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in X \setminus B \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

entonces $h = g \, |\mu| - \text{c.t.p.}$

y claramente $|h(x)| = 1 \quad \forall x \in X.$

Teorema 2.1: "Sea (X, τ) un espacio topológico compacto.

Si F es una forma lineal continua sobre $\mathcal{C}(X)$, entonces existe una única medida regular de Borel μ sobre X tal que:

$$F(f) = \int_X f \, d\mu \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$$

Además μ es una medida positiva si y sólo si $F \geq 0$.
Más aun la aplicación que a cada forma lineal continua sobre $\mathcal{C}(X)$ asocia la medida regular de Borel μ , establece un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{C}(X)'$ y $\mathcal{M}_s(X)$ donde $\mathcal{C}(X)'$ es el norma dual de $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{M}_s(X)$ es el conjunto de las medidas reg. de Borel, signadas, finitas sobre X , provisto de la norma de la variación total."

Demostración: Establecemos en primer lugar, el requerido isomorfismo isométrico, para ello definimos:

$\forall \mu \in \mathcal{M}_s(X) : F_\mu : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_\mu(f) = \int_X f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$$

Verificamos a continuación que: $\forall \mu \in \mathcal{M}_s(X)$, F_μ es lineal y continua.

- i) Es claro que $f \in \mathcal{C}(X) \implies f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, es decir que toda función continua sobre X es μ -integrable, luego: F está bien definida y además

$$\begin{aligned} F_{\mu}(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \int_X (\alpha f_1 + \beta f_2) d\mu \\ &= \int_X \alpha f_1 d\mu + \int_X \beta f_2 d\mu \\ &= \alpha \int_X f_1 d\mu + \beta \int_X f_2 d\mu \\ &= F(f_1) + F(f_2) \end{aligned}$$

ii) $\forall \mu \in \mathcal{M}_s(X) : F_{\mu}$ es continua pues:

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{C}(X) : \left| F_{\mu}(f) \right| &= \left| \int_X f d\mu \right| \leq \left| \int_X \|f\|_{\infty} d\mu \right| = \\ &= \|f\|_{\infty} |\mu|(X) < \infty \end{aligned}$$

Luego F_{μ} es acotada. Siendo F_{μ} lineal y acotada entonces F_{μ} es continua.

Estamos en condiciones ahora de definir la aplicación

$J : \mathcal{M}_s(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ dada por

$\forall \mu \in \mathcal{M}_s(X) : J(\mu) = F_{\mu}$ la cual afirmamos que es un isomorfismo isométrico.

1. J es lineal

En efecto, sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}_s(X); f \in \mathcal{C}(X)$.

Si $f = \chi_A$ donde A es un conjunto $\mu + \nu$ - medible entonces

$$\begin{aligned} \int_X f d(\mu + \nu) &= \int_X \chi_A d(\mu + \nu) = \int_A d(\mu + \nu) \\ &= (\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A) = \int_A d\mu + \int_A d\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_X \chi_A \, d\mu + \int_X \chi_A \, d\nu \\
 &= \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\nu \\
 &= F_\mu(f) + F_\nu(f) = J(\mu)(f) + J(\nu)(f)
 \end{aligned}$$

En consecuencia si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, donde los A_i son

conjuntos $\mu + \nu$ - medibles, se tendrá también que:

$$\forall f \in \mathcal{C}(X) : J(\mu + \nu)(f) = J(\mu)(f) + J(\nu)(f).$$

Siendo el resultado válido para funciones escaleras lo será evidentemente para funciones integrables, luego J es un homomorfismo.

De modo similar se verifica que:

$$\forall f \in \mathcal{C}(X) : J(\lambda\mu)(f) = \lambda J(\mu)(f) \text{ de donde}$$

$\forall \mu \in \mathcal{M}_f(X), \forall \lambda \in \mathbb{R} : J(\lambda\mu) = \lambda J(\mu)$. Hemos verificado así que J es lineal de $\mathcal{M}_f(X)$ en $\mathcal{C}(X)$.

Ahora bien, dada $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ podemos elegir $m \in L_1(|\mu|)$ tal que $|m(x)| = 1 \quad \forall x \in X$ y $\mu(B) = \int_B m d|\mu|$

para todo boreliano B , de acuerdo al teorema de Radón-Nikodim, luego:

$$\begin{aligned}
 \|J(\mu)\| &= \|F_\mu\| = \text{Sup} \left\{ F_\mu(f) / f \in B \mathcal{C}(X) \right\} \\
 &= |\mu|(X) = \|\mu\|
 \end{aligned}$$

Luego J preserva las normas. Siendo J lineal e isome-

tría se deduce inmediatamente que J es inyectiva. Además como J es acotada resulta ser continua.

Sean $\mu \in \mathcal{M}_S^+(X)$, $\mu \geq 0$ y $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \geq 0$, entonces $J(\mu)(f) = F_\mu(f) = \int_X f d\mu \geq 0$, luego $J \geq 0$.

Recíprocamente si $J \geq 0$ entonces $\forall \mu \in \mathcal{M}_S^+(X)$, $\mu \geq 0$, $J(\mu) \geq 0$ esto es $\forall f \in \mathcal{C}(X) : f \geq 0$ implica $J(\mu)(f) \geq 0$. Sea $A \in \mathcal{L}_\mu^*$ como $\chi_A \geq 0$ entonces $J(\mu)(\chi_A) = \int_A d\mu = \mu(A) \geq 0$, por lo cual $\mu \geq 0$.

Resta demostrar que J es un operador sobreyectivo, lo cual quedará probado si se muestra que para cada forma lineal positiva $F_1 \in \mathcal{C}(X)'$, existe una medida regular de Borel μ en $\mathcal{M}_S^+(X)$ tal que $J(\mu) = F_1 = F_\mu$.

Consideremos ahora el espacio topológico discreto $S = (X, \mathcal{P}(X))$ y pasemos al compactificado de Stone-Cech de S , $\beta S = (X, \mathcal{P}(X))$, el cual es extremadamente desconexo, esto es, cada subconjunto abierto de βS tiene clausura abierta.

La identidad $i : S \longrightarrow X$ es continua, luego puede extenderse continuamente a una aplicación $\vartheta : \beta S \longrightarrow X$ la cual nos permite definir la aplicación lineal:

$$T : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(\beta S) \text{ dada por:}$$

$$T(f) = f \circ \vartheta, \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$$

T es una inmersión isométrica.

En efecto: Es inmediato que T es lineal, además:

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \|f \circ \vartheta\| = \text{Sup} \{ |f(\vartheta(s))| : s \in \beta S \} \\ &= \text{Sup} \{ |f(x)| / x \in X \} \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Así pues T es un embebimiento isométrico para la correspondiente norma del supremo y tal que: $T(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, en efecto:

$$\forall s \in \beta S; T(\mathbb{1})(s) = \mathbb{1}(\vartheta(s)) = 1 = \mathbb{1}(s).$$

Por otro lado como F_1 es una forma lineal y continua sobre $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(X)$ es un sub-espacio de $\mathcal{C}(\beta S)$, de acuerdo con el teorema de Han-Banach se puede extender F_1 a una forma F_2 sobre $\mathcal{C}(\beta S)$ tal que:

$$\|F_2\| = \|F_1\| \quad \wedge \quad F_2(T(f)) = F_1(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$$

pues se está identificando a $\mathcal{C}(X)$ como sub-espacio de $\mathcal{C}(\beta S)$ a través de la inmersión T .

$$\text{Además } F_2(\mathbb{1}) = F_2(T(\mathbb{1})) = F_1(\mathbb{1}) = \|F_1\| = \|F_2\|$$

de donde se sigue que $F_2 \geq 0$.

Consideremos ahora \mathcal{R} la clase de todos los sub-conjuntos de βS que son abiertos y cerrados, esto es:

$$\mathcal{R} = \left\{ A \subseteq \beta S / A \in \tau_{\beta S} \cap c_o \tau_{\beta S} \right\}$$

\mathcal{R} es un álgebra de conjuntos; en efecto, \mathcal{R} es estable por diferencias y por uniones y contiene a βS .

Veamos:

- i) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$. Entonces A_1 y A_2 son abiertos y cerrados.

$$A_1 \setminus A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \in \tau_{\beta S} \quad \text{pues } A_1 \in \tau_{\beta S} \text{ y } A_2^c \in \tau_{\beta S}$$

$$A_2^c \in \tau_{\beta S} \quad \text{además } (A_1 \cap A_2^c) \in c_o \tau_{\beta S} \quad \text{pues } A_1 \in c_o \tau_{\beta S} \text{ y } A_2^c \in \tau_{\beta S}$$

$A_2^c \in \mathcal{C}_0 \mathcal{T}_{\beta S}$. Similarmente se prueba que:

$$\text{ii) } \forall A_1, A_2 \in \mathcal{R}; (A_1 \cup A_2) \in \mathcal{R}$$

Luego efectivamente \mathcal{R} es estable por uniones y diferencias. Por lo tanto \mathcal{R} es un álgebra definida sobre βS pues es un anillo que contiene al espacio βS .

Además:

$\forall A \in \mathcal{R}: \chi_A \in \mathcal{C}(\beta S)$, en efecto, se tiene lo siguiente:

$$\chi_A : \beta S \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Sea } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_{us}, \text{ entonces } \chi_A^{-1}(\mathcal{O}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{1, 0\} \subseteq \mathcal{O}^c \\ A & \text{si } 1 \in \mathcal{O} \wedge 0 \notin \mathcal{O} \\ A^c & \text{si } 1 \notin \mathcal{O} \wedge 0 \in \mathcal{O} \\ \beta S & \text{si } \{0, 1\} \subseteq \mathcal{O} \end{cases}$$

luego efectivamente $\chi_A \in \mathcal{C}(\beta S)$, $\forall A \in \mathcal{R}$, por lo cual podemos definir correctamente la aplicación:

$$\eta : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty) \text{ dada por } \eta(A) = F_2(\chi_A)$$

Se verificará a continuación que η es una medida.

1. $\eta(\emptyset) = F_2(\chi_{\emptyset}) = F_2(\emptyset) = 0$
2. Si A_1, A_2, \dots, A_n es una sucesión de elementos de \mathcal{R} mutuamente disjuntos, entonces:

$$\begin{aligned} \eta\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= F_2\left(\chi_{\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i}\right) = F_2\left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n F_2(\chi_{A_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta(A_i) \end{aligned}$$

Sea ahora la sucesión $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{R}$ tal que: los A_i son disjuntos y además $\bigcup_{i \geq 1} A_i = A \in \mathcal{R}$

Siendo $A \in \mathcal{R}$, entonces por la definición de \mathcal{R} ; A es cerrado, y siendo βS compacto resulta que A es compacto, luego: Por ser $\{A_i\}_{i \geq 1}$ un cubrimiento abierto de A .

$\exists i_1, i_2, \dots, i_n$ tales que $A = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$ y por ello:

$$\eta(A) = \eta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \eta\left(\bigcup_{j=1}^n A_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^n \eta(A_{i_j}), \text{ y además}$$

$\forall i \neq i_j, A_i = \emptyset$; por lo cual $\eta\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \eta(A_i)$ así

pues η es σ -aditiva.

Como βS pertenece a \mathcal{R} y $\eta(\beta S) = F_2(X_{\beta S}) = F_2(\mathbb{1}) = \|F_2\|$ resulta que η es una medida finita tal como se definió. Sea $U(\mathcal{R})$ la σ -álgebra generada por \mathcal{R} y consideremos la restricción de la medida exterior η^* a $U(\mathcal{R})$, dada por:

$$\forall M \in U(\mathcal{R}) : \eta^*(M) = \text{Inf} \left\{ \sum_{i \geq 1} \eta(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, M \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i \right\}$$

η^* es finita por serlo η evidentemente y por el teorema de Carathéodory, η^* es una medida sobre $U(\mathcal{R})$.

Probaremos a continuación que η^* es una medida de Baire.

$$i) \quad U(\mathcal{R}) = \beta_0(\beta S)$$

Sea $A \in \mathcal{R}$ entonces $A \in \mathcal{C}_{\beta S} \cap \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_{\beta S}$, entonces $\chi_A \in \mathcal{C}(\beta S)$ y por ello χ_A es $\beta_0(\beta S)$ -medible.

Sea $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{us}$: $1 \in \mathcal{O}$, $0 \notin \mathcal{O}$

$x_A^{-1}(\mathcal{O}) = A \in \beta_0(\beta S)$; luego $\mathcal{R} \subseteq \beta_0(\beta S)$ y en consecuencia $U(\mathcal{R}) \subseteq \beta_0(\beta S)$.

Por otro lado sea $f \in \mathcal{C}(\beta S, \mathbb{R})$ y sea $c \in \mathbb{R}$ y definamos

$$\square_n = \left\{ s \in \beta S / f(s) < c + \frac{1}{n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\square_n \in \mathcal{T}_{\beta S}$ y siendo βS extremadamente desconexo

$\bar{\square}_n \in \mathcal{T}_{\beta S} \cap c_0 \mathcal{T}_{\beta S}$ y por ende $\bar{\square}_n \in \mathcal{R}$ luego

$\bigcap_{n \geq 1} \bar{\square}_n \in U(\mathcal{R})$; pero se tiene lo siguiente:

$\bigcap_{n \geq 1} \bar{\square}_n = \left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c \right\}$ en efecto:

$$\left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ s \in \beta S / f(s) < c + \frac{1}{n} \right\} \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \bar{\square}_n$$

por otro lado:

$$\square_n = \left\{ s \in \beta S / f(s) < c + \frac{1}{n} \right\} \subseteq \left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c + \frac{1}{n} \right\}$$

así pues $\bar{\square}_n \subseteq \left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c + \frac{1}{n} \right\}$ luego

$$\bigcap_{n \geq 1} \bar{\square}_n \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c + \frac{1}{n} \right\} = \left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c \right\}$$

Por lo tanto: $\left\{ s \in \beta S / f(s) \leq c \right\}$ es $U(\mathcal{R})$ - medible,

luego $\beta_0(\beta S) \subseteq U(\mathcal{R})$ pues $\beta_0(\beta S)$ es la menor álgebra sobre βS que hace que $\mathcal{C}(\beta S) \subseteq \mathcal{M}$. Donde \mathcal{M} indica el conjunto de las funciones de βS en \mathbb{R} que son medibles.

Así pues queda demostrado que: $U(\mathcal{R}) = \beta_0(\beta S)$ y en consecuencia η^* es una medida de Baire. De acuerdo con la proposición 2.15, η^* es regular.

Probaremos ahora que:

$$\forall f \in \mathcal{C}(\beta S) : F_2(f) = \int_{\beta S} f d\eta^*$$

Puesto que si f fuera a valores complejos tendríamos

$$f = f_1 + i f_2 \quad \text{y por ello} \quad \int_{\beta S} f d\eta^* = \int_{\beta S} f_1 d\eta^* + i \int_{\beta S} f_2 d\eta^*$$

nos basta considerar sólo funciones a valores reales, esto es $f \in \mathcal{C}(\beta S, \mathbb{R})$.

Sea $[a, b]$ un intervalo en \mathbb{R} que contiene a $f(\beta S)$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos la partición de $[a, b]$ dada por:

$$y_0 = a < y_1 < \dots < y_n = b \quad \text{tal que} \quad y_i - y_{i-1} \leq \varepsilon \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

y definamos los conjuntos

$$B_i = f^{-1}((y_{i-1}, y_i]), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Los conjuntos B_i son disjuntos y pertenecen a $U(\mathbb{R})$ y además cubren a βS .

Como η^* es una medida regular:

$$\forall i=1, 2, \dots, n \exists v_i \in \mathcal{C}_{\beta S} \cap U(\mathbb{R}) / B_i \subseteq v_i, \eta^*(v_i) \leq \eta^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}$$

y además $f(s) \leq y_i + \varepsilon \quad \forall s \in v_i$ ya que $\beta S \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, también

$\beta S \subseteq \bigcup_{i=1}^n v_i$ pues $B_i \subseteq v_i$ y siendo βS compacto, por el teo-

rema de partición de la unidad:

$$\forall i=1, 2, \dots, n \exists h_i \in \mathcal{C}(\beta S) / h_i < v_i \quad \sum_{1 \leq i \leq n} h_i = \mathbb{1} \quad \text{esto es}$$

$$\text{Sop}(h_i) \subseteq v_i; \quad 0 \leq h_i(s) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n h_i(s) = 1 \quad \forall s \in \beta S.$$

Como βS es compacto y $\text{Sop}(h_i)$ es un cerrado resulta que $\text{Sop}(h_i)$ es compacto y de $\text{Sop}(h_i) \subseteq V_i$ con V_i abierto tendremos que: V_i contiene una vecindad del $\text{Sop}(h_i)$ que pertenece a \mathcal{R} . Así que $F_2(h_i) \leq \eta^{\#}(V_i)$. En efecto:

Siendo $(\beta S, \tau_{\beta S})$ compacto, es loc. compacto y como $\text{Sop}(h_i) \subseteq V_i$, existen un abierto σ -compacto U_0 y un compacto G_0, \square_0 tales que: $\text{Sop}(h_i) \subseteq U_0 \subseteq \square_0 \subseteq V_i$, de acuerdo a la proposición 2.2.

Por otro lado U_0 es abierto en βS , el cual es extremalmente desconexo, entonces \bar{U}_0 es abierto en βS . Además se verifican las relaciones:

$$\text{Sop}(h_i) \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq \square_0 \subseteq V_i$$

Así pues \bar{U}_0 es una vecindad del $\text{Sop}(h_i)$ perteneciente a \mathcal{R} .

Ahora bien $\eta(\bar{U}_0) = F_2(X_{\bar{U}_0})$ y como $h_i \leq X_{\bar{U}_0}$ entonces

siendo $F_2 \geq 0$ se tiene que $F_2(h_i) \leq F_2(X_{\bar{U}_0})$. Concluimos

pues que:

$$F_2(h_i) \leq F_2(X_{\bar{U}_0}) = \eta(\bar{U}_0) = \eta^{\#}(\bar{U}_0) \leq \eta^{\#}(V_i)$$

tal como deseábamos verificar.

Veamos ahora que $F_2(f) = \int_{\beta S} f d\eta^{\#}$, $\forall f \in \mathcal{C}(\beta S)$.

$$F_2(f) = F_2\left(\sum_{i=1}^n h_i \cdot f\right) = F_2\left(\sum_{i=1}^n h_i f\right) = \sum_{i=1}^n F_2(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n F_2(y_i + \epsilon) h_i$$

ahora bien:

$$\sum_{i=1}^n F_2((y_i + \varepsilon)h_i) = \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)F_2(h_i) = \sum_{i=1}^n ((|a| + y_i + \varepsilon)F_2(h_i)) - |a| \|F_2\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \eta^*(v_i) - \|F_2\| |a|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left[(|a| + y_i - \varepsilon + 2\varepsilon) (\eta^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}) \right] - \|F_2\| |a|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon) \eta^*(B_i) + 2\varepsilon \sum_{i \leq n} \eta^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i \leq n} (|a| + y_i + \varepsilon)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} (y_i - \varepsilon) d\eta^* + 2\varepsilon \|F_2\| + \varepsilon |a| + \varepsilon^2 + \varepsilon |b|$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{B_i} (y_i - \varepsilon) d\eta^* + \varepsilon (2 \|F_2\| + |a| + |b| + \varepsilon)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f d\eta^* + \varepsilon (2 \|F_2\| + |a| + |b| + \varepsilon)$$

$$= \int_{\beta_S} f d\eta^* + \varepsilon (2 \|F_2\| + |a| + |b| + \varepsilon)$$

Así pues $F_2(f) \leq \int_{\beta_S} f d\eta^*$, $\forall f \in \mathcal{C}(\beta_S)$ (α)

por lo tanto $F_2(-f) \leq \int_{\beta_S} -f d\eta^*$

$$-F_2(f) \leq - \int_{\beta_S} f d\eta^*$$

$$F_2(f) \geq \int_{\beta_S} f d\eta^* \quad (\beta)$$

$$\text{De } (\alpha) \text{ y } (\beta) \quad F_2(f) = \int_{\beta S} f \, d\eta^* \quad \forall f \in \mathcal{C}(\beta S)$$

Corolario 2.1: $\forall F \in (\mathcal{C}^b(X), \tau_\infty)'$, $\exists! \mu \in \mathcal{M}_s(\beta X)$

tal que:

$$F(f) = \int_{\beta X} \bar{f} \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X).$$

Sea $\bar{F} : \mathcal{C}(\beta X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la manera siguiente:

$$\forall g \in \mathcal{C}(\beta X) : \bar{F}(g) = F(g / X)$$

entonces \bar{F} es lineal y continua y por el teorema de Riesz para compactos.

$$\exists! \mu \in \mathcal{M}_s(\beta X). \quad \bar{F}(f) = \int_{\beta X} f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}(\beta X)$$

$$\text{entonces } F(f) = \int_{\beta X} f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X)$$

En efecto: sea $f \in \mathcal{C}^b(X)$ y \bar{f} su extensión a βX .

$$\bar{F}(\bar{f}) = F(\bar{f} / X) = F(f), \text{ pero } \bar{F}(\bar{f}) = \int_{\beta X} \bar{f} \, d\mu$$

$$\text{Luego } \forall f \in \mathcal{C}^b(X) : F(f) = \int_{\beta X} \bar{f} \, d\mu.$$

CAPITULO III

III. EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ PARA ESPACIOS TOPOLOGICOS COMPLETAMENTE REGULARES.

Desarrollaremos en este capítulo el Teorema de Representación de Riesz tomando como base un espacio topológico, (X, \mathcal{C}) , completamente regular. Las medidas serán definidas sobre las σ -álgebras de Baire y de Borel, las cuales son generadas por los compactos G_δ y los compactos, respectivamente.

Como una aplicación de este teorema se deducirá el conocido teorema de representación de Riesz para espacios topológicos localmente compactos.

3.1 Completación de una Medida.

Proposición 3.1: Si μ es una medida sobre un σ -anillo \mathcal{A} , entonces:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{ E \Delta N / E \in \mathcal{A}, N \subseteq A, \mu(A) = 0 \}$$

es un σ -anillo, y la función $\mu(E \Delta N) = \mu(E)$ es una medida completa sobre $\bar{\mathcal{A}}$.

Demostración: Probaremos en primer lugar las relaciones siguientes:

Si $E \in \bar{\mathcal{A}}$, $N \subseteq A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$ entonces

a) $E \cap N = (E \setminus A) \cap [A \cap (E \cap N)] = M$

b) $E \Delta N = (E \setminus A) \cup [A \cap (E \Delta N)] = B$

$$M = \{(E \setminus A) \cap [A \cap (EUN)]\}^c \cup \{(E \cap A^c) \cup [A \cap (EUN)]\}$$

$$M = \{E^c UA \cup A^c \cup (EUN)^c\} \cap \{[(E \cap A^c) UA] \cap [(E \cap A^c) \cup (EUN)]\}$$

$$M = X \cap \{[(EUA) \cap (A^c UA)] \cap (EUN)\}$$

$$M = (EUA) \cap (EUN)$$

$$M = EUN$$

Similarmente se verifica (b).

Las relaciones (a) y (b) nos dicen que la clase $\overline{\mathcal{A}}$, puede describirse también como sigue:

$\overline{\mathcal{A}} = \{EUN / E \in \mathcal{A}, N \subseteq A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0\}$, además (a) y (b) implican que $\overline{\mathcal{A}}$ es estable por uniones contables y por diferencias simétricas, luego $\overline{\mathcal{A}}$ es un σ -anillo.

Si $E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2$ con $E_i \in \mathcal{A}$, $N_i \subseteq A_i$ para $i = 1, 2$, entonces $E_1 \Delta E_2 = N_1 \Delta N_2$, en efecto.

Sea $x \in (E_1 \Delta E_2)$ entonces $x \in (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$

Si $x \in (E_1 \setminus E_2)$ entonces $x \in E_1 \wedge x \notin E_2$ y como

$E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2$ se tendrá lo siguiente:

Si $x \in (E_1 \Delta N_2)$ entonces $x \in (E_1 \setminus N_2) \cup (N_1 \setminus E_1)$ por lo cual $x \in (E_1 \setminus N_1)$ implica $x \notin N_1$.

Por otro lado $x \in (E_2 \Delta N_2)$ implica $x \in (E_2 \setminus N_2) \cup (N_2 \setminus E_2)$. $x \notin E_2$ nos dá $x \in (N_2 \setminus E_2)$ de donde $x \in N_2$.

Así $x \in (N_2 \setminus N_1)$ es decir $x \in (N_1 \Delta N_2)^*$.

Ahora si $x \notin (E_1 \Delta N_1)$ entonces $x \in E_1$ implica $x \in N_1$ puesto que $x \notin (E_1 \Delta N_1)$ entonces $x \in (E_2 \Delta N_2)$ de donde $x \in N_2$ y así $x \in (N_2 \Delta N_1)$ ***

De * y *** se obtiene $E_1 \Delta E_2 \subseteq N_1 \Delta N_2$.

Similarmente se verifica la inclusión recíproca.

De todo lo anterior se deduce también que

$$\mu(E_1 \Delta E_2) = \mu(N_1 \Delta N_2) = 0$$

por lo cual $\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_2 \setminus E_1) = 0$

por lo tanto $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1 \cap E_2)$ y como

$E_1 \cap E_2 \subseteq E_1 \subseteq E_1 \cup E_2$ entonces

$$\mu(E_2) = \mu(E_1) = \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1 \cup E_2)$$

Resulta entonces sin ambigüedad la definición de $\bar{\mu}$ por: $\mu(E \cup N) = \mu(E \Delta N) = \mu(E)$.

$\bar{\mu}$ resulta ser así una medida que extiende a μ . La completitud de $\bar{\mu}$ se sigue del hecho de que $\bar{\mathcal{A}}$ contiene todos los conjuntos nulos respecto de μ .

Además $\bar{\mu}$ es regular de Borel si μ lo es.

3.2 Topologías sobre $\mathcal{C}^b(X)$

Definición 3.1: Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. f es nula al infinito si para todo $\epsilon > 0$

existe un compacto K tal que:

$|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo x perteneciente a $X \setminus K$.

Denotaremos con \mathcal{M}_0 al conjunto de todas las funciones acotadas de X en \mathbb{R} que son nulas al infinito.

\mathcal{M}_{00} representará en lo sucesivo a la colección de funciones de \mathcal{M}_0 que tienen soporte compacto.

Como en lo anterior K_x denota la colección de los compactos de X .

3.2.1 Las Topologías τ_c y τ_s :

Para cada compacto K de X definamos la aplicación $P_K : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : P_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$

Afirmamos que P_K es una semi-norma, en efecto:

a. $P_K(\Theta) = 0$

b. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(X)$:

$$P_K(\alpha f) = \sup_{x \in K} |\alpha f(x)| = \sup_{x \in K} |\alpha| |f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in K} |f(x)| = |\alpha| P_K(f).$$

c. Si $f, g \in \mathcal{C}(X)$

$$\begin{aligned} P_K(f + g) &= \sup_{x \in K} |f(x) + g(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{x \in K} |g(x)| \\ &= P_K(f) + P_K(g) \end{aligned}$$

Por (a), (b) y (c) concluimos que para cada compacto K de X , la P_K correspondiente es una seminorma.

La familia de seminormas $\{P_K\}_{K \in K_x}$ define una única

topología lineal localmente convexa sobre $\mathcal{C}(X)$ que llamaremos τ_c . τ_c es la topología de la convergencia compacta o la topología compacta abierta sobre $\mathcal{C}(X)$.

Si en lugar de la colección de los compactos de X consideramos la familia de los sub-conjuntos finitos B de X , y de igual forma definimos:

$$P_B : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : \forall f \in \mathcal{C}(X), P_B(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|$$

Resulta que P_B es una seminorma.

La familia de seminormas $\{P_B\}_{B \subseteq X, B \text{ finito}}$ induce

una topología sobre $\mathcal{C}(X)$ llamada τ_s que es la topología de la convergencia puntual.

Evidentemente, todo conjunto finito de X es compacto, luego $\tau_s \subseteq \tau_c$.

3.2.2 La Topología τ_{st}

Probaremos a continuación que $\tau_c / \mathcal{C}^b(X)$ está generada por otra familia de seminormas, como sigue:

Denotemos con $\mathcal{L}_\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$

$\forall \varphi \in \mathcal{L}_\infty(X)$, $P_\varphi : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\forall f \in \mathcal{C}^b(X), P_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) \cdot \varphi(x)|$$

nos provee de una familia de seminormas. De dicha familia seleccionaremos la siguiente parte: $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{M}_0}$

la cual resulta ser dirigida a derecha, en efecto:

Sean φ_1, φ_2 pertenecientes a \mathcal{M}_0 entonces $\varphi_1 \vee \varphi_2$ pertenece también a \mathcal{M}_0 y además:

$$P_{\varphi_1}(f) = \sup_{x \in X} |f(x) \cdot \varphi_1(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) \cdot (\varphi_1 \vee \varphi_2)(x)| =$$

$$P_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(f)$$

$$\text{Por lo tanto } P_{\varphi_1} \leq P_{\varphi_1 \vee \varphi_2}, \quad P_{\varphi_2} \leq P_{\varphi_1 \vee \varphi_2}$$

Llamaremos τ_{st} a la topología lineal localmente convexa determinada sobre $\mathcal{C}^b(X)$ por la familia $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{M}_0}$

Debemos observar que $\|\cdot\|_\infty: \mathcal{L}_\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\forall f \in \mathcal{L}_\infty(X) : \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \text{ define una norma, denotamos con } \tau_\infty$$

la correspondiente topología lineal metrizable sobre $\mathcal{L}_\infty(X)$.

Nota: Por simplicidad de notación seguiremos escribiendo

$\tau_s, \tau_c, \tau_{st}$ y τ_∞ para referirnos también a las topologías inducidas sobre $\mathcal{C}^b(X)$.

Probaremos a continuación que τ_c y τ_∞ son generadas por las familias de seminormas $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{M}_0}$ y $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X)}$ respectivamente.

En cada caso denotemos por τ la topología generada por la respectiva familia de seminormas.

$\forall k \in K_X, \chi_k: X \longrightarrow \mathbb{R}$, la función característica de K pertenece a \mathcal{M}_0 y así $\tau_c \leq \tau$

Por otro lado, cada φ perteneciente a \mathcal{M}_{oo} tiene soporte compacto, luego podemos asociarle la seminorma $P_{\text{sup}(\varphi)}$ y por ello $\tau \leq \tau_c$. Así pues queda probado que τ_c es definida por la familia $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{M}_{oo}}$

Notemos ahora que $\mathbb{1} : X \longrightarrow \mathbb{R} : \mathbb{1}(x) = 1$ es una función acotada y que : para toda f en $\mathcal{C}^b(X)$:

$$P_{\mathbb{1}}(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty \quad \text{luego } P_{\mathbb{1}} = \|\cdot\|_\infty$$

Así pues $\tau_\infty \leq \tau$

Recíprocamente, todas las seminormas P_φ con $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X)$ son τ_∞ -continuas, entonces $\tau \leq \tau_\infty$, por lo tanto queda verificado que τ_∞ está definida por la familia $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X)}$.

Proposición 3.2: Sea (X, τ) un espacio topológico completamente regular, entonces:

- a. $\tau_c \leq \tau_{st} \leq \tau_\infty$, en especial τ_{st} es Hausdorff.
- b. $\tau_c = \tau_{st}$ si y solamente si la unión de toda sucesión de compacto en X es relativamente compacto.
- c. τ_{st} y τ_∞ definen los mismos conjuntos acotados sobre $\mathcal{C}^b(X)$.
- d. τ_c y τ_{st} coinciden sobre todo τ_{st} -acotado de $\mathcal{C}^b(X)$.
- e. $\tau_{st} = \tau_\infty$ si y solamente si X es compacto.

Demostración:

a. Como $\mathcal{M}_{oo} \subseteq \mathcal{M}_o \subseteq \mathcal{L}_{\infty}(X)$ y además τ_c es generada por $\{P_{\varphi}\}_{\varphi \in \mathcal{M}_{oo}}$, τ_{st} es generado por $\{P_{\varphi}\}_{\varphi \in \mathcal{M}_o}$ y τ_{∞} es generada por $\{P_{\varphi}\}_{\varphi \in \mathcal{L}_{\infty}(X)}$, entonces se verifica $\tau_c \leq \tau_{st} \leq \tau_{\infty}$. Como además la familia $\{P_{\varphi}\}_{\varphi \in \mathcal{M}_o}$ es separante, entonces τ_{st} es Hausdorff.

b. Supongamos primero que toda unión contable de compactos de X es relativamente compacto.

Sea

$$\varphi \in \mathcal{M}_o, \text{ sop}(\varphi) = \overline{\{x \in X : |\varphi(x)| \neq 0\}} \subseteq \overline{\bigcup_{n \geq 1} \{x \in X : |\varphi(x)| \geq \frac{1}{n}\}}$$

y como $\overline{\bigcup_{n \geq 1} \{x \in X : |\varphi(x)| \geq \frac{1}{n}\}}$ es un compacto por

hipótesis entonces $\text{sop}(\varphi)$ es compacto y así

$\mathcal{M}_o \subseteq \mathcal{M}_{oo}$ por lo cual $\tau_c \geq \tau_{st}$, pero por (a) se concluye que $\tau_c = \tau_{st}$.

Supongamos ahora que existe una sucesión de compactos en X cuya unión no es relativamente compacto y que dicha sucesión $\{K_n\}_{n \geq 1} \subseteq K_X$ es creciente.

El hecho de que $\overline{\bigcup_{n \geq 1} K_n}$ no es un compacto implica que

ningún compacto de X cubre a $\bigcup_{n \geq 1} K_n$, por lo cual para cada

compacto L de X, existe un elemento $x_L \in (\bigcup_{n \geq 1} K_n) \setminus L$.

Sea N_L el menor natural tal que $x_L \in K_{N_L}$.

Por el lema de Urysohn, existe una función $f_L \in \mathcal{C}^b(X)$ nula sobre L y tal que $f_L(x_L) = N_L$. Se ha encontrado así una red $\{f_L\}_{L \in K_X}$, la cual converge a cero según \mathcal{T}_c .

En efecto, dada una vecindad V de cero respecto de \mathcal{T}_c , existe un compacto K en X tal que si $\varepsilon > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} V &\supseteq V_{\varepsilon, P_K} = \{f \in \mathcal{C}^b(X) : P_K(f) \leq \varepsilon\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^b(X) : \sup_{x \in K} |f(x)| \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

pero entonces para todo compacto L en X que contenga a K tendremos lo siguiente:

$$P_K(f_L) = \sup_{x \in K} |f_L(x)| \leq \sup_{x \in L} |f_L(x)| = 0 < \varepsilon \quad \text{luego}$$

$\forall L \in K_X : K \subseteq L, f_L \in V_{\varepsilon, P_K}$ lo cual significa que

$\{f_L\}_{L \in K_X}$ es residual en toda vecindad de cero o sea:

$$f_L \xrightarrow{\mathcal{T}_c} \mathcal{O}$$

Definamos $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\forall x \in X : \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_1 \\ 1/n & \text{si } x \in K_n \setminus K_{n-1}, n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus \bigcup_{n \geq 1} K_n \end{cases}$$

Entonces φ es una función nula al infinito, pues para todo $\varepsilon > 0$, existe un natural n tal que $1/n < \varepsilon$ y por ello nos bastará con elegir el compacto $K = K_n$ para que

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ perteneciente a } X \setminus K_n.$$

Consideramos ahora

$$P_{\varphi}(f_L) = \sup_{x \in X} |f_L(x) \varphi(x)| \geq |\varphi(x_L) f_L(x_L)| = 1$$

lo cual vale para todo compacto L en X , así pues $\{f_L\}$ es una red en $\mathcal{C}^b(X)$ que no converge a cero con respecto a la topología τ_{st} , pero esto contradice la hipótesis inicial en la que aceptamos que $\tau_c = \tau_{st}$, luego es falso suponer que la unión de cualquier sucesión de compactos en X no sea relativamente compacto si $\tau_c = \tau_{st}$.

c. Probaremos que τ_{st} y τ_{∞} definen los mismos acotados sobre $\mathcal{C}^b(X)$.

Puesto que $\tau_{st} \leq \tau_{\infty}$ es inmediato que todo τ_{∞} -acotado es τ_{st} -acotado, así que sólo resta verificar la relación recíproca.

Supongamos que $B \subseteq \mathcal{C}^b(X)$ no es τ_{∞} -acotado, entonces existe $f_n \in B$ tal que $\|f_n\|_{\infty} > n^2$ para todo natural n .

Sea $(K_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de compactos en X , creciente tal que $\sup_{x \in K_n} |f_n(x)| > n^2$ y tomemos φ tal como se definió en (b), entonces:

$$P_{\varphi}(f_n) = \sup_{x \in X} |f_n(x) \varphi(x)| \geq \frac{1}{n} \sup_{x \in X} |f_n(x)| > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo cual B no puede ser τ_{st} -acotado.

d. Probaremos en esta sección que τ_c y τ_{st} son topologías que coinciden sobre cualquier parte de $\mathcal{C}^b(X)$ τ_{st} -acotada. Haremos la prueba en tres pasos.

1. Probaremos que toda red τ_{∞} -acotado y τ_c -convergente a cero es también τ_{st} -convergente a cero. En efecto, sea $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in D} \subseteq \mathcal{C}^b(X)$, una red τ_{∞} -acotada y τ_{st} -convergente a cero.

Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|f_{\alpha}\|_{\infty} \leq \beta \quad \forall \alpha \in D$.

Sea $0 \neq \varphi \in \mathcal{M}_0$ tal que $\|\varphi\|_{\infty} \leq \delta, \delta \in \mathbb{R}^+$

Siendo φ nula al infinito, para todo natural n existe un compacto K_n en X tal que:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para cualquier } x \text{ que pertenece a } X \setminus K_n.$$

Por hipótesis $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$ converge a cero según τ_c , luego

para todo natural n , existe α_n en D tal que si: $\alpha \geq \alpha_n$ entonces $P_{K_n}(f_{\alpha}) < \frac{1}{n}$ es decir:

$$\sup_{x \in K_n} |f_{\alpha}(x)| < \frac{1}{n}.$$

Así pues, para cada natural n tendremos:

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(f_{\alpha}) &= \|f_{\alpha}\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f_{\alpha}(x)\varphi(x)| \\ &= \text{Máx} \left\{ \sup_{x \in K_n} f_{\alpha}(x)\varphi(x), \sup_{x \in X \setminus K_n} f_{\alpha}(x)\varphi(x) \right\} \\ &\leq \text{Máx} \{ \delta/n, \beta/n \} = t/n \end{aligned}$$

donde $t = \text{Máx} \{ \delta, \beta \}$

Luego $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$ converge a cero según τ_{st} .

2. Toda red τ_c -convergente y τ_{∞} -acotado converge según τ_{st} y al mismo límite.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red τ_∞ -acotada tal que existe f en $\mathcal{C}^b(X)$ de modo que: $f \xrightarrow{\tau_c} f$
 Entonces $\{f_\alpha - f\}$ es τ_∞ -acotada y $f_\alpha - f \xrightarrow{\tau_c} 0$ por
 (1) $f_\alpha - f \xrightarrow{\tau_{st}} 0$ y así $f_\alpha \xrightarrow{\tau_{st}} f$.

3. Como $\tau_c \leq \tau_{st}$ se tiene que $\tau_c / B \leq \tau_{st} / B$,
 sólo resta verificar que $\tau_{st} / B \leq \tau_c / B$.

Sea $x \in B$ y $U = V \cap B$ una vecindad de x según τ_{st} / B
 y aceptemos simultáneamente que U no es vecindad de x según
 τ_c / B . Entonces para toda vecindad W de x según τ_c ,
 $W \cap B \neq U$, por lo cual para cada τ_c -vecindad W de x ,
 existe $x_w \in W \cap B$ tal que $x_w \notin U$, esto es el punto x_w no per-
 tenece a V , $\forall W \in \mathcal{V}(x, \tau_c)$.

Pero $(x_w)_{w \in \mathcal{V}(x, \tau_c)}$ es una red contenida en B y por

ello acotada que converge a x según τ_c , por (2) dicha red
 es también τ_{st} -convergente a x . Pero esto último signi-
 fica que $\{x_w\}$ es residual en cada τ_{st} -vecindad de x ,
 por lo cual debe ser residual en V , hecho este contradictorio
 con la construcción de dicha red. Luego es falso suponer
 que U no sea vecindad de x según τ_c / B . Esto nos permite
 que $\mathcal{V}(x, \tau_{st} / B) \leq \mathcal{V}(x, \tau_c / B)$ y así $\tau_{st} / B \leq \tau_c / B$.

e. Habiendo verificado (a), (b), (c) y (d), estamos
 listos para verificar que:

$$\tau_{st} = \tau_\infty \text{ si y solamente si } X \text{ es compacto.}$$

En efecto:

Si X es compacto no solamente se cumple la igualdad $\tau_{st} = \tau_{\infty}$ sino que se verifica $\tau_c = \tau_{st} = \tau_{\infty}$, pues $\chi_x = \|\cdot\|_{\infty}$ sería una función con soporte compacto y como $P_1 = \|\cdot\|_{\infty}$ genera a τ_{∞} , entonces $\tau_{\infty} \leq \tau_c$, pero por (a) $\tau_c \leq \tau_{st} \leq \tau_{\infty}$. Luego concluimos que $\tau_c = \tau_{st} = \tau_{\infty}$ si X es compacto.

Recíprocamente, supongamos $\tau_{st} = \tau_{\infty}$. En estas condiciones por (d) τ_c y τ_{∞} coinciden sobre B , donde:

$$B = \{ f \in \mathcal{C}^b(X) : \|f\|_{\infty} \leq 1 \}.$$

Como B es τ_{∞} -acotado y $\tau_c \leq \tau_{\infty}$ entonces B es τ_c -acotado, por lo cual B se puede absorber por cualquier vecindad de 0 en la topología τ_c , esto es:

$$\exists K \in \mathcal{K}_X ; \exists \begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon < 1 \end{matrix} : \varepsilon V_{P_K} \cap B \subseteq B$$

Por otra parte, V absorbe B , luego existe $\beta > 0$, $B \subseteq \beta V_{P_K}$ es decir $\|f\|_{\infty} \leq \beta P_K(f) \quad \forall f \in B$.

Probaremos que $X = K$.

Supongamos que $K \subsetneq X$ y sea $x_0 \in X \setminus K$, entonces como K es un compacto en un espacio completamente regular, por el Lema de Urysohn, existe $g \in \mathcal{C}^b(X) : g(K) = \{0\}$, $g(x_0) = 1$, y además:

$$\forall x \in X : 0 \leq g(x) \leq 1.$$

Luego $g \in (\varepsilon V_{P_K}) \cap B$, pero entonces:

$1 = \|g\| \leq \beta P_K(g) = 0$, lo cual es contradictorio, de donde necesariamente $X = K$, luego X es compacto.

3.3 El Teorema de Riesz para Espacios Topológicos Completamente Regulares.

Teorema 3.1: "Sea (X, τ) un espacio topológico c.r. y sea τ_{st} la topología estricta sobre $\mathcal{C}^b(X)$. Entonces para cada forma lineal continua F sobre $\mathcal{C}^b(X)$ existe una única medida regular de Borel μ tal que:

$$F(f) = \int_X f \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X).$$

Además la aplicación $J : [\mathcal{C}^b(X), \tau_{st}]' \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ tal que $J(F) = \mu$, es un isomorfismo".

Demostración: Sea μ una medida regular de Borel en X .

La aplicación F definida por:

$$F_\mu : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que:}$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^b(X) : F_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

es lineal y τ_{st} -continua, en efecto, para demostrar la continuidad podemos suponer que $\mu(X) = 1$ y que $\mu \geq 0$, pues de no ser se puede siempre considerar la descomposición de Jordán $\mu = \mu^+ - \mu^-$ donde claro $\mu^+ \geq 0$ y $\mu^- \geq 0$.

Por la regularidad de μ , existe una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n \geq 1}$ en X tal que:

$$\forall n \geq 1 \quad \mu(K_n) \geq \mu(X) - \frac{1}{4^{n+1}}, \quad \text{o sea } \mu(K_n) \geq 1 - \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Definamos ahora la función φ como sigue:

$$\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } x \in K_n \setminus K_{n-1} \\ 0 & \text{si } x \notin A = \bigcup_{n \geq 1} K_n \end{cases}$$

Tenemos lo siguiente:

φ es nula al infinito y además medible respecto de μ .

En efecto, es inmediato que φ es nula al infinito, por otro lado, escojamos $\mathcal{O} = (-\infty, a) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, entonces:

$$\varphi^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < 0 \\ A^c & \text{si } a = 0 \\ A \setminus K_n & \text{si } \frac{1}{2^n} \leq a \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ X & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

donde suponemos $K_0 = \emptyset$, así pues φ es medible.

Estamos ahora listos para verificar que F_μ es \mathcal{T}_{st} -continua, veamos primero que $\mu(X \setminus A) = 0$.

$$\begin{aligned} \mu(X \setminus A) &= \mu(X) - \mu(A) \leq \mu(X) - \mu(K_n) \quad \forall n \geq 1 \\ &\leq \mu(X) - 1 + \frac{1}{4^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

es decir que: $\forall n \geq 1, \mu(X \setminus A) \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

por lo tanto, $\mu(X \setminus A) = 0$.

Ahora bien; para toda función f perteneciente a $\mathcal{C}^b(X)$

$$\begin{aligned} |F_\mu(f)| &= \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_A |f\varphi| \cdot \frac{1}{\varphi} \, d\mu \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \int_{K_n \setminus K_{n-1}} |f \cdot \varphi| \frac{1}{\varphi} \, d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_{\varphi}(f) \sum_{n \geq 1} \int_{K_n \setminus K_{n-1}} \frac{1}{\varphi} d\mu \\
 &= P_{\varphi}(f) \sum_{n \geq 1} 2^n \mu(K_n \setminus K_{n-1}) \\
 &\leq P_{\varphi}(f) \sum_{n \geq 1} 2^n (2^{-2n-n}) \\
 &= P_{\varphi}(f)
 \end{aligned}$$

Hemos obtenido así la desigualdad $|F_{\mu}| \leq P_{\varphi}$ donde P_{φ} es una de las seminormas que definen la topología τ_{st} lo que significa que F_{μ} es τ_{st} -continua como queríamos verificar.

Siendo F_{μ} una forma lineal y continua definida sobre $\mathcal{C}^b(X)$ podemos considerar la aplicación:

$$J : \mathcal{M}(X) \longrightarrow [\mathcal{C}^b(X), \tau_{st}] \quad \text{dada por:}$$

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(X) : J(\mu) = F_{\mu}.$$

J es evidentemente lineal, probaremos que es también biyectiva.

Sea $F \in [\mathcal{C}^b(X), \tau_{st}]$. Como $\tau_{st} \leq \tau_{\infty}$ existe una única $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\beta X)$ tal que:

$$F(f) = \int_{\beta X} \bar{f} d\bar{\mu} \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}^b(X) \text{ de acuerdo con el}$$

corolario del teorema de Riesz para espacios compactos.

$$\text{Afirmamos que } |\bar{\mu}|(\beta X) = \sup \left\{ |\bar{\mu}|(K) : K \in \mathcal{K}_X \right\}$$

Por reducción al absurdo, supongamos que tal igualdad no es cierta.

Existe entonces un $\varepsilon > 0$ tal que $|\bar{\mu}|(\beta X \setminus K) > 4\varepsilon$

para todo compacto K en X .

Dado un compacto K_0 en X , podemos asumir por la regularidad de $\bar{\mu}$ que existe un compacto L en $\beta X \setminus K_0$ tal que $|\bar{\mu}|(L) > \varepsilon$ y también que existe un abierto V en $\beta X \setminus K_0$ que contiene a L tal que: $|\bar{\mu}|(V \setminus L) \leq |\bar{\mu}|(L) - \varepsilon$.

Cómo βX es normal, existe una aplicación g continua sobre βX , con valores en $[0, 1]$ tal que:

$$g(L) = \{1\} \quad \text{y} \quad g(\beta X \setminus L) = \{0\}$$

denotemos $f_k \equiv g / X$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{a) } |F(f_k)| &= \left| \int_{\beta X} g \, d\bar{\mu} \right| = \left| \int_L d\bar{\mu} + \int_{V \setminus L} g \, d\bar{\mu} \right| \\ &\geq |\bar{\mu}(L)| - |\bar{\mu}(V \setminus L)| \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

La red $\{f_k\}_{k \in K_X}$ obtenida así converge a cero según

la topología \mathcal{T}_c pues, $f_k(x) = 0, \quad \forall x \in K$.

En efecto:

Sea K_0 un compacto en X , y sea V_{K_0} una vecindad sub-

básica de \mathcal{T}_c dada por:

$$V_{K_0} = \left\{ f \in \mathcal{C}^b(X) \mid P_{K_0}(f) < 1 \right\}$$

Para todo compacto K en X que contenga a K_0 se tiene lo siguiente:

$$P_{K_0}(f_k) = \sup_{x \in K_0} |f_k(x)| = 0 < 1, \quad \text{entonces } f_k \in V_{K_0}.$$

Por otro lado cómo $0 \leq f_k \leq 1$ entonces f_k es \mathcal{T}_∞ -acotada

y converge a cero según la topología \mathcal{T}_c , entonces por el teorema (2.10.4) Jarcov, resulta que $\{f_k\}_{k \in K_x}$ converge a cero según \mathcal{T}_{st} .

Como $F \in [\mathcal{C}^b(X), \mathcal{T}_{st}]'$ entonces $\{F(f_k)\}_{k \in K_x}$ converge

a cero en \mathbb{R} , lo cual contradice la conclusión (a) anterior, luego sólo puede ocurrir que:

$|\bar{\mu}|(\beta X) = \text{Sup} \{ |\bar{\mu}(k)| : k \in K_x \}$ de acuerdo con lo cual existe una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n \geq 1}$ en X tales que si

$A = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ entonces $|\bar{\mu}|(\beta X \setminus A) = 0$ y así:

$$\bar{\mu}(\beta X \setminus A) = 0.$$

Sea $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$ la descomposición de Jordán de $\bar{\mu}$.

Sean $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ las completaciones de $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2$ respectivamente.

Entonces todos los conjuntos Borelianos sobre X son $\hat{\mu}_j$ -medibles para $j = 1, 2$.

Entonces $\mu_j = \hat{\mu}_j / X$ está bien definida.

Notemos ahora que $\mu = \mu_1 - \mu_2$ es una medida regular de Borel sobre X tal que:

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{\beta X} \hat{f} d\bar{\mu} = \int_{\beta X \setminus A} \hat{f} d\bar{\mu} + \int_A \hat{f} d\bar{\mu}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X). \\ &= \int_A \hat{f} d\bar{\mu} \\ &= \int_X f d\mu \end{aligned}$$

Así pues J es suryectiva.

Para verificar la inyectividad de J sean F y μ como están considerados anteriormente y sea η una medida regular de Borel en X tal que:

$$F(f) = \int_X f \, d\eta \quad \forall f \in \mathcal{C}^b(X), \text{ entonces:}$$

$\bar{\eta} : \beta(\beta X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por: $\bar{\eta}(B) = \eta(B \cap X)$ es una medida regular de Borel.

$$\text{Como } \int_{\beta X} \bar{g} \, d\bar{\mu} = \int_{\beta X} \bar{g} \, d\bar{\eta}, \quad \forall g \in \mathcal{C}^b(X) \text{ entonces } \bar{\mu} = \bar{\eta}$$

y en particular $\mu(K) = \eta(K)$ para todo compacto K en X , pues todo compacto de X lo es también en βX , por lo cual $\mu = \eta$ de acuerdo con la proposición 2.17.

Concluimos así que $J : \mathcal{M}(X) \longrightarrow [\mathcal{C}^b(X), \mathcal{T}_{st}]$ es un isomorfismo.

3.4 Teorema de Representación de Riesz para Espacios Topológicos localmente compactados.

El propósito de esta sección es obtener el teorema de representación de Riesz para espacios topológicos localmente compactos como consecuencia de la demostración presentada para espacios completamente regulares.

Proposición 3.3: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico localmente compacto y designemos por $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ su compactificado de Alexandroff, entonces:

1. $\forall K \in K_X, \forall v \in \mathcal{V}(K, \mathcal{T}) : \exists U \in \mathcal{V}(K, \mathcal{T})$ compacta tal que $U \subseteq v$.
2. Si $k \in K_X, \mathcal{O} \in \mathcal{T}, k \subseteq \mathcal{O}$, entonces existe una función f continua sobre X y con valores en $[0, 1]$ tal que $f(K) = \{1\}$ y $f(\mathcal{O}^c) = \{0\}$.
3. Si $k \in K_X$ entonces existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tal que $f(K) = \{1\}$.

Demostración:

1. Sea K un compacto en X y V una vecindad de K .

Tomemos un punto "a" perteneciente a K , entonces V es una vecindad de a . Como (X, \mathcal{T}) es localmente compacto, existe una vecindad de a que designamos por W_a la cual es compacta y está contenida en V .

Consideremos así la colección $\mathcal{I} = \{W_a^i / a \in K\}$ donde W_a^i denota el interior topológico de W_a . Es claro que \mathcal{I} constituye un cubrimiento abierto de K , que es un conjunto compacto, luego existe una cantidad finita de puntos de K , digamos a_1, a_2, \dots, a_n tales que:

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_{a_j}^i \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_{a_j} \subseteq V.$$

Para concluir la primera afirmación del teorema basta con tomar $U = \bigcup_{j=1}^n W_{a_j}$ el cual es un conjunto compacto por ser unión finita de conjuntos compactos.

2. Sea K un compacto en X , entonces K es también un

compacto en X_∞ , por lo cual K es un conjunto cerrado según \mathcal{T}_∞ . Por otro lado como $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ implica que $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_\infty$, por lo tanto \mathcal{U}^c es un cerrado de X_∞ . Como $K \subseteq \mathcal{U}$ entonces $K \cap \mathcal{U}^c = \emptyset$. Siendo X_∞ compacto es también normal, luego existe, de acuerdo con el lema de Urysohn, una función f continua sobre X_∞ y valores en $[0, 1]$ tal que $f(K) = \{1\}$, $f(\mathcal{U}^c) = \{0\}$.

Tomemos finalmente $f / X = g : X \longrightarrow [0, 1]$ es claro que $g(K) = \{1\}$ y $g(\bigcup_X \mathcal{U}) = \{0\}$.

3. Sea K un compacto en X , $K \neq X$. Sea a un punto de $X \setminus K$ entonces K y $\{a\}$ son cerrados disjuntos de X_∞ , el cual es normal; por lo tanto existen abiertos \mathcal{U}_1^* y \mathcal{U}_2^* en X_∞ tales que:

$$\mathcal{U}_1^* \cap \mathcal{U}_2^* = \emptyset, \quad K \subseteq \mathcal{U}_1^* \quad a \in \mathcal{U}_2^* .$$

En estas condiciones $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^* \cap X$ pertenece a \mathcal{T} y es un abierto propio, además \mathcal{U}_1 es una vecindad de K en X . Por (1) existe una vecindad U de K que es compacta y está contenida en \mathcal{U}_1 y en consecuencia existe un abierto \mathcal{U} en X tal que:

$K \subseteq \mathcal{U} \subseteq U \subseteq \mathcal{U}_1$ donde \mathcal{U} es un abierto propio de X .

Aplicando (2) existe una función continua f definida sobre X y con valores en $[0, 1]$ tal que:

$$f(K) = \{1\} \text{ y } f(\bigcup_X \mathcal{U}) = \{0\}$$

Afirmamos que $\text{sop}(f)$ es compacto. En efecto:

$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subseteq \mathcal{U} \subseteq U$ luego $\text{sop}(f)$ es compacto.

Proposición 3.4: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico completamente regular, entonces el conjunto de las funciones continuas sobre X de soporte compacto constituyen un ideal del Conjunto de las funciones continuas y acotadas definidas sobre X , esto es $\mathcal{C}_c(X)$ es un ideal de $\mathcal{C}^b(X)$.

Demostración: Es claro que la función nula tiene soporte compacto pues \emptyset es compacto, y que si f, g son funciones continuas y de soporte compacto entonces $f \cdot g$ también es continua y tiene soporte compacto.

Sea $f \in \mathcal{C}^b(X)$ y $g \in \mathcal{C}_c(X)$, demostraremos que $f \cdot g \in \mathcal{C}_c(X)$. En efecto: $f \cdot g \in \mathcal{C}^b(X)$, sea $S = \text{sop}(g)$ entonces:

$$T = \{x \in X : f(x) \cdot g(x) \neq 0\} \subseteq S$$

Luego $\bar{T} = \text{sop}(f \cdot g) \subseteq S$ y por ello es compacto.

Así pues $f \cdot g \in \mathcal{C}_c(X)$ y por lo tanto $\mathcal{C}_c(X)$ es un ideal de $\mathcal{C}^b(X)$.

Proposición 3.5: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico completamente regular. Entonces una función φ definida sobre X y con valores en \mathbb{R} es nula al infinito si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$ es relativamente compacto, es decir:

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \in \mathcal{M}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 : \overline{\{x \in X : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}} \in K_X$$

Demostración: Sea $\varphi \in \mathcal{M}_0$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $K_\varepsilon \in K_X : |\varphi(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \setminus K$, luego $M = \overline{\{x \in X : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}} \subseteq K$ y por ello es compacto.

Recíprocamente si $\forall \varepsilon > 0, \overline{\{x \in X : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}} \in K_X$ entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists K : \overline{\{x \in X : |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}} \in K_X$ tal que: $\forall x \in X \setminus K : |\varphi(x)| < \varepsilon$ y por ello $\varphi \in \mathcal{M}_0$.

Proposición 3.6: Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto. Entonces $\mathcal{C}_c(X)$ es τ_{st} - denso en $\mathcal{C}^b(X)$.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{C}^b(X)$, entonces existe un número real positivo d tal que:

$$\sup \{ |f(x)| : x \in X \} \leq d.$$

Sean φ una función nula al infinito definida sobre X y δ un número real positivo, entonces existe un compacto K' en X tal que: $|\varphi(x)| \leq \frac{\delta}{d}, \forall x \in X \setminus K'$. Luego tendremos: $|f(x) \cdot \varphi(x)| = |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \leq d \cdot \frac{\delta}{d} = \delta, \forall x \in X \setminus K'$ por lo cual también $f \cdot \varphi$ es nula al infinito.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $K = \overline{\{x \in X : |f(x) \varphi(x)| \geq \varepsilon\}}$, entonces por el teorema anterior, K es compacto. Como (X, τ) es localmente compacto existe de acuerdo al teorema de Uryshon una función g a soporte compacto y valores en $[0, 1]$ tal que $g(K) = \{1\}$. Sea $h = f \cdot g$, entonces h es continua. Afirmamos que h pertenece a $B_{P_\varphi}(f, \varepsilon)$. En efecto, calculemos $P_\varphi(f - h)$.

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(f - h) &= \sup_{x \in X} \left\{ |f(x) - h(x)| \cdot |\varphi(x)| \right\} \\ &= \sup_{x \in X} \left\{ |\varphi(x)| \cdot |f(x)| \cdot (|1 - g(x)|) \right\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego h pertenece a $B_{P_{\varphi}}(f, \varepsilon)$.

Además siendo $\mathcal{C}_c(X)$ un ideal de $\mathcal{C}^b(X)$, $g \in \mathcal{C}_c(X)$ y $f \in \mathcal{C}^b(X)$ entonces $f \cdot g \in \mathcal{C}_c(X)$. Así pues h pertenece a $B_{P_{\varphi}}(f, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_c(X)$; es decir, todo disco con centro perteneciente a $\mathcal{C}^b(X)$ corta a $\mathcal{C}_c(X)$, lo que significa precisamente que $\mathcal{C}_c(X)$ es τ_{st} -denso en $\mathcal{C}^b(X)$.

Proposición 3.7: Sea (E, τ) un espacio lineal topológico Hausdorff. Sea F un sub-espacio τ -denso de E y sean E' y F' los espacios duales respectivamente, entonces para f perteneciente a F' definimos la aplicación lineal \bar{f} por: $\bar{f} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que:

$$\forall x \in E : \bar{f}(x) = \lim_{\alpha} f(x_{\alpha}) \text{ donde } \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$$

es una red en F convergente a x .

Luego $\psi : E' \longrightarrow F'$ definida por:

$$\forall f \in E' : \psi(f) = \bar{f} / F \text{ es un isomorfismo lineal.}$$

Demostración: Verificaremos en primera instancia que \bar{f} está bien definida, en efecto:

Sean $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$ y $\{y_{\beta}\}_{\beta \in D}$, dos redes en F que convergen

a un punto x en E . Probaremos que $\lim_{\alpha} f(x_{\alpha}) = \lim_{\beta} f(y_{\beta})$.

Como $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ y $y_\beta \xrightarrow{\tau} x$ entonces $x_\alpha - y_\beta \xrightarrow{\tau} 0$.

Como f es lineal $f(x_\alpha - y_\beta) = f(x_\alpha) - f(y_\beta)$, además:

$\lim_{\alpha, \beta} f(x_\alpha - y_\beta) = 0$ pues f es continua sobre F . Pero

$$\lim_{\alpha, \beta} f(x_\alpha - y_\beta) = \lim_{\alpha, \beta} (f(x_\alpha) - f(y_\beta)) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha) - \lim_{\beta} f(y_\beta)$$

$$\text{Luego } \lim_{\alpha, \beta} f(x_\alpha - y_\beta) = 0$$

es decir:

$$\lim_{\alpha} f(x_\alpha) = \lim_{\beta} f(y_\beta).$$

Probaremos ahora que \bar{f} es lineal.

Sean x e y pertenecientes a E , $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$, $\{y_\beta\}_{\beta \in D'}$

redes en F convergentes a x e y , respectivamente.

$\{x_\alpha + y_\beta\}_{(\alpha, \beta) \in D \times D'}$ es una red en F τ -convergente a $x + y$, por lo cual:

$$\bar{f}(x+y) = \lim_{\alpha, \beta} f(x_\alpha + y_\beta) = \lim_{\alpha, \beta} [f(x_\alpha) + f(y_\beta)]$$

$$\lim_{\alpha, \beta} [f(x_\alpha) + f(y_\beta)] = \lim_{\alpha} f(x_\alpha) + \lim_{\beta} f(y_\beta) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y).$$

Similarmente se verifica que si λ es un escalar y x es cualquier vector en E , entonces:

$$\bar{f}(\lambda x) = \lambda \bar{f}(x).$$

Veamos ahora que \bar{f} es continua, para lo cual basta con probar la continuidad en cero.

Consideremos ahora $\psi: E' \longrightarrow F'$ dada por:

$\forall f \in E' : \psi(f) = f / F$, entonces:

i) ψ es inyectiva.

En efecto, sea $f \in E'$ tal que $\psi(f) = \Theta$.

Como $\bar{\Theta} = \Theta$, entonces $\psi(f) = \Theta$ implica que $f / F = \Theta$ de donde $f = \Theta$ y así ψ es inyectiva.

ii) Sea $f \in F'$ entonces $\bar{f} \in E'$.

$\psi(\bar{f}) = \bar{f} / F = f$ luego ψ es suryectiva.

De i) y ii) se concluye que ψ es un isomorfismo.

Observación: Probaremos que si $f : F \longrightarrow \mathbb{K}$ es una aplicación lineal, F es un sub-espacio de E y \bar{f} como anteriormente se ha definido entonces $\bar{f} / F = f$.

En efecto, $\bar{f} / F : F \longrightarrow \mathbb{K}$ es la restricción de \bar{f} a F .

Sea $x \in F$ entonces $(\bar{f} / F)(x) = f_F(x) = f(x)$.

Sea $x \in E$, existe $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$,

$f(x_\alpha) = \bar{f}_F(x_\alpha) \xrightarrow{\tau} \bar{f}_F(x)$ pero $\bar{f}_F(x_\alpha) = f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau} f(x)$

entonces $\bar{f}_F(x) = f(x)$ pues el espacio es un T_2 .

Corolario 3.1: Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, entonces:

$$\left[\mathcal{C}_c(X), \tau_{st} / \mathcal{C}_c(X) \right]' \cong \left[\mathcal{C}^b(X), \tau_{st} \right]'$$

La demostración es consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores.

Teorema 3.3: Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, entonces:

$$[\mathcal{C}_c(X), \tau_{st} / \mathcal{C}_c(X)]' = [\mathcal{C}_c(X), \tau_\infty]'$$

Demostración: Sabemos que $\tau_c \leq \tau_{st} \leq \tau_\infty$ sobre $\mathcal{C}_c^b(X)$.

Además, como $\mathcal{C}_c(X) \subseteq \mathcal{C}_c^b(X)$ podemos considerar sobre $\mathcal{C}_c(X)$ la topología inducida por τ_{st} , esto es:

$\tau_{st} / \mathcal{C}_c(X)$ y pasemos al dual $[\mathcal{C}_c(X), \tau_{st} / \mathcal{C}_c(X)]'$.

Puesto que $\tau_{st} \leq \tau_\infty$ entonces $\tau_{st} / \mathcal{C}_c(X) \leq \tau_\infty / \mathcal{C}_c(X)$, por lo cual $[\mathcal{C}_c(X), \tau_{st} / \mathcal{C}_c(X)]' \subseteq [\mathcal{C}_c(X), \tau_\infty / \mathcal{C}_c(X)]'$

Probaremos la inclusión recíproca, sea $F \in [\mathcal{C}_c(X), \tau_\infty / \mathcal{C}_c(X)]'$. Como F es τ_∞ -continua sobre $\mathcal{C}_c(X)$, existe $c_0 > 0$ tal que: $|F(f)| \leq c_0 \|f\|_\infty$ para toda $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Sea K un compacto en X , definimos $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_0 & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus K \end{cases}$$

evidentemente φ es nula al infinito. Sea $f \in \mathcal{C}_c(X)$ y sea \square el soporte de f . Consideremos $H = \square \cup K$ entonces H es un compacto, como X es localmente compacto existe una función g continua sobre X con valores en $[0, 1]$ tal que $g(H) = 1, g(H^c) = 0$, es claro que $f = f \cdot g$

Ahora:

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi}(f) &= P_{\varphi}(f \cdot g) = \sup_{x \in X} \left\{ |f(x) \cdot g(x) \cdot \varphi(x)| \right\} \\
 &= \sup_{x \in X} \left\{ |\varphi(x)| \right\} \sup_{x \in X} |f(x) \cdot g(x)| \\
 &= \sup_{x \in X} \left\{ |\varphi(x)| \right\} \sup_{x \in \mathbb{C}} |f(x) \cdot g(x)| \\
 &= C_0 \sup_{x \in \mathbb{C}} |f(x) \cdot g(x)| \\
 &= C_0 \|f\|_{\infty}, \quad \forall f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X) \\
 &\geq |F(f)|
 \end{aligned}$$

Luego F es $\tau_{st}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ -continua. Así pues se obtiene que:

$$[\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\infty}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]' \subseteq [\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{st}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]'$$

y en conclusión que:

$$[\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{st}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]' = [\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\infty}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]'$$

Corolario 3.2: Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, entonces:

$$[\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\infty}]' \cong \mathcal{M}(X).$$

Demostración: $[\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\infty}]' \cong [\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{st}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]'$

por el teorema 3.3, además, de acuerdo al

corolario 3.1 se tiene que:

$$[\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X), \tau_{st}/\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)]' \cong [\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^b(X), \tau_{st}]', \text{ por el teorema 3.1}$$

se tiene demostrado que: $[\mathcal{C}^b(X), \tau_{st}]' \cong \mathcal{M}(X)$. Luego finalmente $[\mathcal{C}_c(X), \tau_\infty] \cong \mathcal{M}(X)$.

Sea (X, τ) un espacio topológico completamente regular y \mathfrak{t} una familia de compactos en X dirigida en forma creciente por inclusión y tal que dicha familia cubre a X . Sea además $\tau_{\mathfrak{t}}$ la \mathfrak{t} -topología localmente convexa y T_2 sobre $\mathcal{C}(X)$ determinada por la familia de seminormas provenientes de la familia de compactos \mathfrak{t} .

Sea $S \in \mathfrak{t}$ y definamos la aplicación R_S por:

$$R_S : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(S) : R_S(f) = f / S.$$

R_S es $\tau_{\mathfrak{t}} - \tau_\infty$ continua y lineal y tal que

$$N(R_S) = N(P_S). \text{ En efecto:}$$

si $B_1 = \{g \in \mathcal{C}(S) : \|g\|_\infty \leq 1\}$ entonces:

$$\begin{aligned} R_S^{-1}(B_1) &= \{f \in \mathcal{C}(X) : \|R_S(f)\|_\infty \leq 1\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}(X) : \sup_{x \in S} |f(x)| \leq 1\} \\ &= B_1, P_S \in \sqrt{(0, \tau_{\mathfrak{t}})} \end{aligned}$$

donde B_1, P_S denota la bola unitaria en $\mathcal{C}(X)$ respecto a la seminorma P_S luego R_S es continua. Obviamente R_S es lineal, verifiquemos que el núcleo de R_S coincide con el núcleo de P_S .

$$f \in N(R_S) \iff R_S(f) = 0 \iff f / S = 0$$

$$f / S = 0 \iff \sup_{x \in S} f(x) = 0 \iff P_S(f) = 0$$

$$P_S(f) = 0 \iff f \in N(P_S).$$

Además R_S es suryectiva pues si $g \in \mathcal{C}(S)$ entonces por el teorema de extensión de Titzze, existe $\bar{g} \in \mathcal{C}(\beta X)$ tal que $\bar{g} / S = g$ con $\|\bar{g}\|_\infty = \|g\|_\infty$. Como $R_S(\bar{g} / X) = g$ se concluye que efectivamente R_S es suryectiva.

Siendo R_S lineal, $N(R_S)$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{C}(X)$ y podemos así considerar el espacio vectorial cociente $\mathcal{C}(X) / N(R_S)$, y definamos

$$\|\cdot\| : \mathcal{C}(X) / N(R_S) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por:}$$

$\forall f + N(R_S) : \|f + N(R_S)\| = P_S(f)$, entonces $\|\cdot\|$ es una norma. En efecto:

i) $\|\cdot\|$ está bien definida pues si $f \equiv g$ entonces $f - g \in N(R_S) = N(P_S)$ de donde $P_S(f - g) = 0$, luego:

$$0 \leq |P_S(f) - P_S(g)| \leq P_S(f - g) = 0$$

de donde $P_S(f) = P_S(g)$.

ii) Si $\|f + N(P_S)\| = 0 \iff P_S(f) = 0 \iff f \in N(P_S)$

iii) $\|\lambda(f + N(P_S))\| = \|\lambda f + N(P_S)\| = P_S(\lambda f)$

$$= |\lambda| \|f\|$$

iv) $\|(f + N(P_S)) + (g + N(P_S))\| = \|f + g + N(P_S)\|$

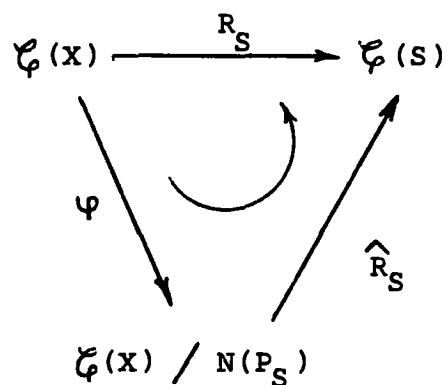
$$= P_S(f + g)$$

$$\leq P_S(f) + P_S(g)$$

$$= \|f + N(P_S)\| + \|g + N(P_S)\|$$

Luego $\|\cdot\|$ es norma en $\mathcal{C}(X) / N(P_S) = \mathcal{C}(X) / N(R_S)$.

Consideremos ahora el diagrama:



donde $\varphi(f) = f + N(P_S)$ es la suryección canónica.

$$\hat{R}_S(f + N(P_S)) = R_S(f).$$

Probemos ahora que φ es $\mathcal{C}_f - \mathcal{C}_{\|\cdot\|}$ continua.

Consideremos $B_{1, \|\cdot\|} = \{f + N(P_S) / P_S(f) \leq 1\}$

$$\begin{aligned}
 \varphi^{-1}(B_{1, \|\cdot\|}) &= \{f \in \mathcal{C}(X) / \varphi(f) \in B_{1, \|\cdot\|}\} \\
 &= \{f \in \mathcal{C}(X) / f + N(P_S) \in B_{1, \|\cdot\|}\} \\
 &= \{f \in \mathcal{C}(X) / P_S(f) \leq 1\}
 \end{aligned}$$

es decir que $\varphi^{-1}(B_{1, \|\cdot\|}) = B_{1, P_S}$, luego φ es continua.

Verificaremos ahora que R_S es una isometría.

$$\begin{aligned}
 \|\hat{R}_S(f + N(P_S))\|_{\infty} &= \|R_S(f)\|_{\infty} = \|f / S\| \\
 &= \sup_{x \in S} |f(x)| \\
 &= P_S(f) \\
 &= \|f + N(P_S)\|
 \end{aligned}$$

\hat{R}_S es también suryectiva; en efecto:

Sea $f \in \mathcal{C}(S)$ como R_S es suryectiva existe $\bar{f} \in \mathcal{C}(X)$ tal que $\bar{f} / S = f$, así que:

$$\hat{R}_S (\bar{f} + N(P_S)) = R_S (\bar{f}) = \bar{f} / S = f.$$

Observemos ahora que $N(P_S)$ es un sub-espacio cerrado de $(\mathcal{C}(X), \tau_f)$. En estas condiciones el dual de $(\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau'_f)$ se identifica con el polar de $N(P_S)$ donde τ'_f es la topología cociente inducida por τ_f sobre $\mathcal{C}(X) / N(P_S)$; es decir:

$$(\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau'_f)' \cong N(P_S)^\circ.$$

Por otro lado $N(P_S)^\circ \subseteq (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$ por lo cual:

$$(\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau'_f)' \cong N(P_S)^\circ \subseteq (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$$

Pero $\tau_{\parallel\parallel}$ definida sobre $\mathcal{C}(X) / N(P_S)$ es menos fina que τ'_f luego:

$$(\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau_{\parallel\parallel})' \subseteq (\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau'_f)'$$

$$\cong N(P_S)^\circ$$

$$\subseteq (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$$

$$\text{Como } (\mathcal{C}(X) / N(P_S), \tau_{\parallel\parallel})' \cong (\mathcal{C}(S), \tau_{P_S})'$$

Podemos suponer que $(\mathcal{C}(S), \tau_{P_S})'$ es un sub-espacio de $(\mathcal{C}(X), \tau_f)'$ via los isomorfismos.

Probemos ahora que:

$$(\mathcal{C}(X), \tau_f)' = \bigcup_{S \in \mathcal{I}} (\mathcal{C}(S), \tau_{P_S})' \quad \text{para esto es suficien-}$$

te probar que para cada $h \in (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$ existe un S elemento de \mathcal{I} tal que h pertenece a $(\mathcal{C}(S), \tau_{P_S})'$. En efecto:

Sea $h \in (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$ entonces: $h^{-1}(B_{\mathbb{K}} [0, 1]) \in \mathcal{V}(0, \tau_f)$

por consiguiente existe $V \in \mathcal{V}(0, \tau_f)$ tal que:

$$V \subseteq h^{-1}(B_{\mathbb{K}} [0, 1]).$$

Como \mathcal{I} es una familia creciente existen $S \in \mathcal{I}$ y $\lambda > 0$ tales que:

$$T = \lambda B_{P_S} [0, 1] \subseteq V \subseteq h^{-1}(B_{\mathbb{K}} [0, 1])$$

Luego:

$$h \in [h^{-1}(B_{\mathbb{K}} [0, 1])]^0 \subseteq V^0 \subseteq T^0 \subseteq \mathcal{C}(S)'$$

Asi pues $h \in (\mathcal{C}(S), \tau_{P_S})'$.

Teorema 3.4: $(\mathcal{C}(X), \tau_f)'$ puede identificarse con el subespacio de $\mathcal{M}(\beta X)$ de todas las medidas que tienen su soporte contenido en algún $S \in \mathcal{I}$.

Demostración: Sea $F \in (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$. Como

$$(\mathcal{C}(X), \tau_f)' = \bigcup_{S \in \mathcal{I}} \mathcal{C}(S)' \quad \text{existe}$$

$S_F \in \mathcal{I}$ tal que $F \in \mathcal{C}(S_F)'$. Por el teorema de representación de Riesz para espacios compactos podemos considerar la medida regular de Borel μ_F que representa a F , por medio de la cual definimos la aplicación \mathcal{R}_F como sigue:

$$\theta_F : B(\beta X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow \theta_F(A) = \mu_F(A \cap S_F)$$

θ_F resulta ser así una medida regular de Borel sobre βX pues μ_F es medida regular de Borel.

Ahora bien el soporte de θ_F está contenido en S_F , en efecto:

$$\theta_F(\complement S_F) = \mu_F(\emptyset) = 0, \text{ por lo cual:}$$

$$\complement S_F \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau_f} \mathcal{O} \quad \text{tales que } \theta_F(\mathcal{O}) = 0, \text{ luego}$$

$$\text{Sop}(\theta_F) = \bigcap_{\mathcal{O} \in \tau_f} \{ \mathcal{O}^c / \theta_F(\mathcal{O}) = 0 \} \subseteq S_F.$$

Definamos ahora θ de la siguiente manera:

$$\theta : (\mathcal{C}(X), \tau_f)' \longrightarrow \mathcal{M}(\beta X)$$

$$F \longrightarrow \theta(F) = \theta_F$$

entonces θ es lineal e inyectiva, en efecto:

Sean $F_1, F_2 \in (\mathcal{C}(X), \tau_f)'$, existen S_{F_1} y S_{F_2} en

tales que:

$F_1 \in \mathcal{C}(S_{F_1})'$ y $F_2 \in \mathcal{C}(S_{F_2})'$, y como \mathcal{t} es dirigida

podemos asumir que $S_{F_1} \subseteq S_{F_2}$ de donde $\mathcal{C}(S_{F_1})' \subseteq \mathcal{C}(S_{F_2})'$

por lo cual $(F_1 + F_2) \in \mathcal{C}(S_{F_2})'$.

Por el Teorema de representación de Riesz para espacios compactos existe una única medida regular de Borel

$\mu \in \mathcal{M}(S_{F_2})$ que representa a $F_1 + F_2$. Pero si μ_1

representa a F_1 y μ_2 representa F_2 entonces por la unicidad

$$\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Luego $\emptyset (F_1 + F_2) = \emptyset (F_1) + \emptyset (F_2)$, y similarmente se verifica la homogeneidad de \emptyset , y así \emptyset es lineal.

Por la forma como se ha definido \emptyset ella resulta inyectiva.

Veamos que \emptyset es suryectiva.

Consideremos $W = \{ \mu \in \mathcal{M}(\beta X) / \exists s \in \mathcal{t}, \text{Sopp}(\mu) \subseteq s \}$

sea $\mu \in W$ y S_μ un elemento de \mathcal{t} que contiene al soporte de μ . Existe F_μ en el dual de $\mathcal{C}(\beta X)$ tal que:

$$F_\mu(f) = \int_{\beta X} f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}(\beta X)$$

Sea $g \in \mathcal{C}(X)$ y $\hat{g} \in \mathcal{C}(\beta X)$ una extensión de g / S_μ . Definamos F como sigue:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \int_{\beta X} \hat{f} d\mu = F_\mu(f) \end{aligned}$$

Así $F \in (\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{t}})'$, $F \in \mathcal{C}(S_\mu)'$ y $\emptyset(F) = \mu$.

CONCLUSIONES

Entre los resultados más importantes que obtuvimos en este trabajo podemos mencionar los siguientes:

1. Haciendo uso de la compactificación de Stone-Cech para espacios discretos, la consecuente propiedad de desconexidad extremal y el teorema de Hahn-Banach se obtuvo una demostración del teorema de representación de Riesz para espacios topológicos compactos; esto es, se probó que si (X, τ) es un compacto entonces el dual $(\mathcal{C}(X), \tau_\infty)'$ de $\mathcal{C}(X)$ es isométricamente isomorfo al espacio $\mathcal{M}_s(X)$ de las medidas signadas finitas y regulares de Borel sobre X .
2. Como consecuencia de lo anterior se obtuvo una identificación entre el dual $(\mathcal{C}^b(X), \tau_\infty)'$ de $\mathcal{C}^b(X)$ con $\mathcal{M}_s(\beta X)$ donde X es un espacio topológico completamente regular y βX es su compactificado de Stone-Cech.
3. Estudiadas las topologías compacta abierta τ_c , la estricta τ_{st} y la topología τ_∞ o de la convergencia uniforme sobre $\mathcal{C}^b(X)$, con X un completamente regular, y las relaciones existentes entre ellas; se probó el teorema de Riesz para espacios completamente regulares; esto es, si (X, τ) es un espacio topológico completamente regular, existe un isomorfismo entre $(\mathcal{C}^b(X), \tau_{st})'$ y $\mathcal{M}_s(X)$ dada por la ecuación:

$$F(f) = \int_X f d\mu$$

4. Tomando en consideración el hecho de que en un espacio topológico localmente compacto el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto es \mathcal{C}_{st} - denso en el conjunto de las funciones continuas y acotadas se probó que:

$$(\mathcal{C}_c(X), \tau_\infty)' \cong \mathcal{M}_s(X)$$

o sea el clásico teorema de representación de Riesz para espacios topológicos localmente compactos.

5. Haciendo uso de algunos aspectos de la teoría de la dualidad se probó si (X, τ) es completamente regular y \mathcal{K} es un sistema de sub-conjuntos compactos de X dirigido en forma creciente por inclusión y si sobre $\mathcal{C}(X)$ se considera la correspondiente \mathcal{K} - topología entonces:

$$(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{K}})' = \bigcup_{s \in \mathcal{K}} (\mathcal{C}(s), \tau_\infty)'$$

6. Basados en la descomposición anterior se probó que para espacios completamente regulares $(\mathcal{C}(X), \tau_{\mathcal{K}})'$ se puede identificar con el subespacio de $\mathcal{M}_s(\beta X)$ constituido por aquellas medidas que tienen su soporte contenido en algún elemento de \mathcal{K} .

Como producto de nuestro trabajo planteamos las siguientes posibles líneas de continuación del mismo:

1. Estudiar en que otros tipos de espacios topológicos es válido el teorema de representación de Riesz.
2. Estudiar el teorema de representación de Riesz para medida producto.
3. Estudiar el teorema de representación de Riesz para medidas de Radón.
4. Estudiar el problema de la categorización del teorema de representación de Riesz.

BIBLIOGRAFIA

- [1.] ALIPRANTIS, C.D. y
BURKINSHAW, O. Principles of Real Analysis.
North Holland Publishing Company.
1981.
- [2.] BOURBAKI, NICOLAS Elements of Mathematics. General
Topology. A translation of
"Elements de Mathematique, Topolo-
gie Generale" by Hermann, Paris.
Addison-Wesley Publishing Company.
- [3.] FREMLIN, D. H. Bounded Measures on Topological
GARLING, D. J. H. y Spaces. Proc. Condor Math. Society
HAYDON, R. G. (3). 1972, páginas 115-136.
- [4.] GILLMAN, LEONARD Rings of Continius funtions.
JERISON, MEYER Editorial Springer-Verlag. New
York, 1960.
- [5.] GOULD, G. y Measures on Completely Regular
MAHOWALD, M. Spaces. J. London Math. Society
(37) 1962, págs. 103-111.
- [6.] HALMOS R., PAUL Measure Theory. Editorial
Springer-Verlag. New York, 1978.
- [7.] HEWITT, EDWIN Real and Abstract Analysis.
STROMBERG, KARL Editorial Springer-Verlag. New
York, 1965.

- [8.] JARCHOW, HANS Locally Convex Spaces. Editorial
B. G. Teubner Stuttgar. Alemania,
1981.
- [9.] NACHBIN, LEOPOLDO Elements of Aproximation Theory.
Editorial Van Nostrand; Mathema-
tical Studies # 14, 1967.
- [10.] ROJO, JORGE Notas del "Curso de Teoría de la
Medida". Maestría, Universidad
de Panamá, 1983.
- [11.] ————— Notas del "Seminario de Análisis
Funcional". Maestría, Universidad
de Panamá, 1984.
- [12.] RUDIN, WALTER Real and Complex Analysis. Edito-
rial McGraw Hill, Inc. 1974.
- [13.] SCHAEFER, HELMUT H. Espacios Vectoriales Topológicos.
Editorial Teide. Barcelona, 1974.
- [14.] SENTILLES, F. DENNIS Bounded Continuos funtions on a
Completely Regular Spaces.
Transaction of the American Mate-
mathical Society. Volumen 168,
junio de 1972. Págs. 311-336.

- [15.] TAYLOR, ANGUST E. Introduction to funtional Analysis.
Editorial John-Wiley and Sons, Inc.
New York, 1967.
- [16.] WALKER, RUSSELL C. The Stone-Cech Compactification.
Editorial Springer-Verlag. New
York, 1974.