



UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE LA CONVERGENCIA BORNOLÓGICA  
Y  
ESPACIOS BORNOLÓGICOS COMPLETOS

por:

Moisés Paz Berdiales

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar  
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización  
en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Aprobado por:

Director de Tesis

Handwritten signature of Jorge Rojo in cursive script.

Jorge Rojo, Ph.D.

Miembro del Jurado

Handwritten signature of Dimas Quiel in cursive script.

Dimas Quiel, M.Sc.

Miembro del Jurado

Handwritten signature of Julio Vallarino in cursive script.

Julio Vallarino, M.Sc.

Fecha

6 de Enero de 1986

Cincuentenario de la Universidad

1935 - 1985

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira

ESTAFETA UNIVERSITARIA

PANAMA, R. DE P.

DEDICATORIA

A mi esposa Gloria y mis dos hijos, Moisesito y Rubensito con todo mi amor.

A mis padres, hermanos y todas mis amistades con todo cariño.

A los futuros estudiantes del Programa de Maestría en Matemática. Quiera Dios que este trabajo pueda servir de guía para alguno de ellos.

Moisés Paz

## AGRADECIMIENTO

Tengo una deuda de gratitud con el Dr. Jorge Rojo, profesor en la Universidad de Panamá, por sus valiosas sugerencias y recomendaciones para la realización de este trabajo. Igualmente, con las autoridades universitarias, por el apoyo brindado a todos los estudiantes del Programa, y con mi esposa Gloria por su eficiente trabajo secretarial.

## INDICE GENERAL

	Página
INTRODUCCION	i
CAPITULO I	
BORNOLOGIA, CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES Y EJEMPLOS NOTABLES	
1. NOCION DE BORNOLOGIA	1
2. APLICACIONES ACOTADAS	5
3. BORNOLOGIA LINEAL CONVEXA	6
4. APLICACION LINEAL ACOTADA	8
5. EJEMPLOS DE BORNOLOGIAS LINEALES Y CONVEXAS	9
6. CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES DE BORNOLOGIAS	22
7. ESPACIOS LINEALES BORNOLOGICOS SEPARADOS	36
8. ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS BORNOLOGICOS CONVEXOS, COMPARACION CON LAS ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS	38
CAPITULO II	
CONVERGENCIA BORNOLOGICA	
1. SUCESIONES M-CONVERGENTES	40
2. FILTROS M-CONVERGENTES	46
3. RELACION ENTRE CONVERGENCIA BORNOLOGICA Y TOPOLOGIA	50
4. BORNOLOGIAS TOPOLOGICAS Y TOPOLOGIAS BORNOLOGICAS	57
5. MACKEY-CONTINUIDAD	59

## CAPITULO III

## TOPOLOGIZACION DE LA CONVERGENCIA BORNOLÓGICA

1. TOPOLOGIZACION DE LA M-CONVERGENCIA	64
2. PARTES BORNOLÓGICAMENTE CERRADAS	68
3. ESPACIO LINEAL BORNOLÓGICO SEPARADO ASOCIADO A UN ESPACIO LINEAL BORNOLÓGICO	74
4. PROPIEDADES DE LA TOPOLOGIA DE LA b-CERRADURA	77

## CAPITULO IV

## ESPACIOS BORNOLÓGICOS COMPLETOS

1. DISCOS COMPLETANTES	90
2. ESPACIOS BORNOLÓGICOS CONVEXOS COMPLETOS	96
3. ESPACIOS LINEALES BORNOLÓGICOS SEPARADOS DE DIMENSION FINITA	104
4. BORNOLÓGIA COMPLETA ASOCIADA A UNA BORNOLÓGIA LINEAL SEPARADA	107
5. ESPACIOS LINEALES TOPOLÓGICOS MACKEY-COMPLETOS	110
6. ESPACIOS BORNOLÓGICOS p-CONVEXOS	116
7. ESPACIOS BORNOLÓGICOS p-CONVEXOS COMPLETOS Y BORNOLÓGIAS $\lambda^p$ -DISQUEADAS	123
CONCLUSION	142
BIBLIOGRAFIA	145

## INTRODUCCION

La teoría de bornología surge en el Análisis Funcional como un desarrollo sistemático del estudio del acotamiento de funcionales lineales. Su técnica consiste en estructurar la noción de parte acotada en un conjunto, axiomatizando las propiedades más comunes que poseen los ejemplos más remarcables ( por ejemplo las partes acotadas de un espacio métrico ). Esta teoría permite el desarrollo de numerosas propiedades de las funcionales lineales en un marco donde el concepto de acotamiento sustituye con éxito aquel de continuidad. Este es el caso, por ejemplo, de la teoría de Distribuciones.

Nuestro trabajo pretende entre otros, dar las bases de esta teoría y examinar con cierta minuciosidad la comparación entre convergencia bornológica y convergencia topológica, aplicando estos conceptos a los espacios bornológicos completos.

Numerosos ejemplos y contraejemplos son presentados.

El esquema que hemos seguido es el siguiente :

En el Capítulo I, introducimos los conceptos de bornología, espacio lineal bornológico y aplicación lineal acotada. Además presentamos varios ejemplos notables entre los cuales figuran : la bornología de Vonn Neumann de un espacio lineal topológico, la bornología compacta en los espacios lineales topológicos y otros.

Finalizamos este capítulo comparando la estructura de los espacios bornológicos convexos con la estructura topológica ( Proposición 1.8.1 ).

El Capítulo II lo hemos dedicado al estudio de la convergencia bornológica de sucesiones y filtro. Además, establecemos una relación entre la convergencia bornológica y la convergencia topológica. Seguidamente caracterizamos los espacios lineales bornológicos separados mediante la convergencia bornológica.

Finalmente, estudiamos los conceptos de Mackey-Continuidad y Mackey-Continuidad Secuencial e inmediatamente caracterizamos las funciones lineales acotadas mediante dichos conceptos.

El Capítulo III lo iniciamos mostrando que en general la convergencia bornológica no es topologizable. Luego, introducimos el concepto de parte bornológicamente cerrada en un espacio lineal bornológico y estudiamos ciertas propiedades de la topología de la b-cerradura  $\tau(E)$  de un e.l.b.  $E$ .

Concluimos este capítulo con una interesante caracterización de las sucesiones  $\tau(E)$ -convergentes, mediante el concepto de sucesiones Mackey-convergentes.

En el Capítulo IV nos proponemos estudiar los espacios bornológicos completos. Para esto, estudiamos primeramente los discos completantes en un espacio lineal bornológico para luego definir el concepto de espacio bornológico convexo completo. Se establece un isomorfismo bornológico entre  $\mathbb{K}^n$  y espacio lineal bornológico separado de dimensión  $n$ .

Además, asociamos a todo espacio lineal bornológico se-

parado un espacio bornológico convexo completo  $E_0$  algebraicamente idéntico a  $E$  y con la propiedad " toda aplicación lineal acotada de un e.b.c. completo  $F$  en  $E$  es lineal acotada de  $F$  en  $E_0$  .

Se muestra que la condición de completitud bornológica es una condición mucho más débil que la condición de completitud usual en los espacios lineales topológicos.

Finalmente, establecemos una relación entre la completitud y la Mackey-completitud en los espacios bornológicos  $p$ -convexos ( $0 < p \leq 1$  ).

CAPITULO I

BORNOLOGIA, CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES Y

EJEMPLOS NOTABLES

## 1. NOCION DE BORNOLÓGIA

Definición 1.1.1: Sea  $X$  un conjunto y  $\beta$  una familia de partes de  $X$ . Se dice que  $\beta$  es una bornología sobre  $X$ , si verifica los tres axiomas siguientes :

- (B-1)  $\beta$  es un recubrimiento de  $X$ .
- (B-2)  $\beta$  es hereditario por inclusión.
- (B-3)  $\beta$  es estable por reunión finita.

Un par  $(X, \beta)$  formado por un conjunto  $X$  y una bornología  $\beta$  sobre  $X$ , se denomina " Conjunto Bornológico ". Los elementos de  $\beta$  son entonces llamados los acotados de  $X$ .

Definición 1.1.2: Sean  $(X, \beta)$  un conjunto bornológico y  $\beta_0$  una sub-familia de  $\beta$ . Se dice que  $\beta_0$  es base de  $\beta$  si para todo  $A \in \beta$ , existe  $B \in \beta_0 : A \subseteq B$ .

Definición 1.1.3: Sea  $X$  un conjunto y  $\beta_0$  una familia de partes de  $X$ . Se dice que  $\beta_0$  es base de bornología sobre  $X$ , si :

- i)  $\beta_0$  es un recubrimiento de  $X$ .
- ii) Toda reunión finita de elementos de  $\beta_0$  está contenida en un elemento de  $\beta_0$ .

Proposición 1.1.1: Sean  $X$  un conjunto y  $\beta_0$  una base de bornología sobre  $X$ , entonces la familia

$$\beta = \{ A \subseteq X / \exists B \in \beta_0 : A \subseteq B \}$$

es una bornología sobre  $X$  de base  $\beta_0$ .

Demostración:  $\beta$  es una bornología sobre  $X$ . En efecto :

$$(B-1) \quad X = \bigcup_{B \in \beta_0} B \subseteq \bigcup_{A \in \beta} A \subseteq X$$

(B-2) Sean  $A, B \subseteq X : A \in \beta, B \subseteq A$ , entonces existe  $B' \in \beta_0$  tal que  $A \subseteq B' \Leftrightarrow \exists B' \in \beta_0 : B \subseteq B' \Leftrightarrow B \in \beta$

(B-3) Sean  $A_1, \dots, A_n \in \beta$ , entonces para todo  $i=1, \dots, n$ ; existe  $B_i \in \beta_0 : A_i \subseteq B_i$   
 $\Leftrightarrow \exists B' \in \beta_0 : \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq B' \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \beta$

Además es claro que  $\beta_0$  es base de  $\beta$ .

Proposición 1.1.2: Sean  $(X, \beta)$  y  $(Y, \beta')$  dos conjuntos bornológicos. Entonces la familia

$$\beta_{II}^{\circ} = \{ A \times B / A \in \beta \text{ y } B \in \beta' \}$$

es base de bornología sobre  $X \times Y$ .

Demostración:

$$X = \bigcup_{A \in \beta} A \quad \text{y} \quad Y = \bigcup_{B \in \beta'} B, \text{ luego}$$

$$X \times Y = \bigcup_{A \in \beta} A \times \bigcup_{B \in \beta'} B = \bigcup_{A \times B \in \beta_{II}^{\circ}} A \times B$$

ii) Sean  $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \beta_{II}^{\circ}$ , entonces

$$A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \times B_1 \cup B_2$$

Por lo tanto,  $\beta_{II}^{\circ}$  es base de bornología sobre  $X \times Y$  y en consecuencia  $\beta_{II} = \{ D \subseteq X \times Y / \exists A \times B \in \beta_{II}^{\circ} : D \subseteq A \times B \}$  es una bornología sobre  $X \times Y$ , llamada " La Bornología Producto ".

Proposición 1.1.3: Sea  $(X, \beta)$  un conjunto bornológico tal que

$\mathcal{B}$  admite una base contable  $\mathcal{B}_\circ = (B_n)$ . Sea  $\mathcal{B}'_\circ = (B'_n)$ ; donde para cada  $n \geq 1$ ,  $B'_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ ; entonces  $\mathcal{B}'_\circ$  también es base de  $\mathcal{B}$  y además es creciente.

Demostración: Sea  $A \in \mathcal{B}$ , entonces existe  $B_{n_0} \in \mathcal{B}_\circ : A \subseteq B_{n_0}$

$$\Rightarrow \exists B'_{n_0} \in \mathcal{B}'_\circ : A \subseteq B_{n_0} \subseteq B'_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i$$

$$\Rightarrow \exists B'_{n_0} \in \mathcal{B}'_\circ : A \subseteq B'_{n_0}$$

Luego,  $\mathcal{B}'_\circ$  es base de  $\mathcal{B}$  y además claramente creciente.

Definición 1.1.4: Sea  $(X, \mathcal{B})$  un conjunto bornológico. Se dice que  $\mathcal{B}$  es a base contable, si  $\mathcal{B}$  admite por base a una sucesión de acotados. Podemos entonces suponer esta sucesión creciente (Proposición 1.1.3).

Ejemplo 1.1.1: Sean  $E$  un e.l. sobre  $K$  y  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  una seminorma sobre  $E$ , entonces :

$$\mathcal{B}_\circ = \{ B_p[0, \varepsilon] / \varepsilon > 0 \} ; \text{ donde } B_p[0, \varepsilon] = \{ x \in E / p(x) \leq \varepsilon \}$$

es base de bornología sobre  $E$ . En efecto :

i) Sea  $x \in E$ , entonces

$$\text{si } p(x) = 0 ; x \in B_p[0, \varepsilon] , \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{si } p(x) > 0 ; x \in B_p[0, p(x) + \varepsilon] , \text{ con } \varepsilon > 0$$

Luego,  $x \in \bigcup_{\varepsilon > 0} B_p[0, \varepsilon]$  y en consecuencia  $E = \bigcup_{\varepsilon > 0} B_p[0, \varepsilon]$

$$\text{ii) } \bigcup_{i=1}^n B_p[0, \varepsilon_i] \subseteq B_p[0, \varepsilon] ; \text{ con } \varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_\circ$  es base de bornología sobre  $E$  y luego

$$\mathcal{B}_E = \{ A \subseteq E / \exists \varepsilon > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon] \} \text{ es la bornología sobre } E$$

generada por  $\beta_0$ .

Observemos además que la bornología  $\beta_E$  es tal que :

1)  $\forall A, B \in \beta_E : A + B \in \beta_E$ . En efecto :

$$\begin{aligned} A, B \in \beta_E &\Leftrightarrow \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon_1] \text{ y } B \subseteq B_p[0, \varepsilon_2] \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0 : A + B \subseteq B_p[0, \varepsilon] , \text{ es decir, } A+B \in \beta_E . \end{aligned}$$

2)  $\forall A \in \beta_E, \forall \lambda \in \mathbb{K}; \lambda A \in \beta_E$ . En efecto :

$$\begin{aligned} \text{Sean } A \in \beta_E \text{ y } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ entonces existe } \varepsilon_0 > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon_0] \\ \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : p(x) \leq \varepsilon_0, \forall x \in A \end{aligned}$$

Luego, si  $\lambda = 0$ ,  $p(\lambda x) = 0 \Leftrightarrow x \in B_p[0, \varepsilon]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  y si  $\lambda \neq 0$ ,  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \leq \varepsilon_0/|\lambda| \Leftrightarrow \lambda x \in B_p[0, \varepsilon_0/|\lambda|]$

Por lo tanto,  $\exists \varepsilon' = \varepsilon_0/|\lambda| : A \subseteq B_p[0, \varepsilon']$ , es decir,  $\lambda A \in \beta_E$

3)  $\forall A \in \beta_E ; e(A) \in \beta_E$ . En efecto :

$$A \in \beta_E \Leftrightarrow \varepsilon > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon] , \text{ luego}$$

$$y \in e(A) \Leftrightarrow y = \lambda x, \text{ con } |\lambda| \leq 1 \text{ y } x \in A$$

$$\Leftrightarrow p(y) = p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \leq \varepsilon \Leftrightarrow y \in B_p[0, \varepsilon] .$$

Por lo tanto,  $e(A) \in \beta_E$

4)  $\forall A \in \beta_E, c(A) \in \beta_E$ . En efecto :

$$A \in \beta_E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon] \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : c(A) \subseteq B_p[0, \varepsilon]$$

$$\Leftrightarrow c(A) \in \beta_E .$$

Observemos que en el caso particular  $E = \mathbb{K}$  y  $p = / /$  (valor absoluto), obtenemos la bornología

$$\beta_{\mathbb{K}} = \{A \subseteq \mathbb{K} / \exists \varepsilon > 0 : A \subseteq B_p[0, \varepsilon]\} ; \text{ denominada la borno-}$$

logía usual sobre  $\mathbb{K}$ . Además, es claro que podemos suponer  $\varepsilon$  racional y en consecuencia  $\beta_0$  resulta contable.

## 2. APLICACIONES ACOTADAS

Definición 1.2.1: Sean  $(X, \mathcal{B})$ ,  $(Y, \mathcal{B}')$  dos conjuntos bornológicos y  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación de  $X$  en  $Y$ . Se dice que  $f$  es acotada, si la imagen directa por  $f$  de todo acotado de  $X$  es un acotado de  $Y$ .

Ejemplo 1.2.1:

- i) Sea  $(X, \mathcal{B})$  un conjunto bornológico. La aplicación  $I_X : X \longrightarrow X$  (idéntica) es acotada.
- ii) Sean  $(X, \mathcal{B})$ ,  $(Y, \mathcal{B}')$  y  $(Z, \mathcal{B}')$  tres conjuntos bornológicos, y  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : Y \longrightarrow Z$  dos aplicaciones acotadas. Entonces la aplicación compuesta  $g \circ f : X \longrightarrow Z$  es acotada.

En efecto :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B} &\implies f(A) \in \mathcal{B}' \\ &\implies g(f(A)) \in \mathcal{B}'' \\ &\implies (g \circ f)(A) \in \mathcal{B}'' \\ &\implies g \circ f \text{ es acotada.} \end{aligned}$$

Definición 1.2.2: Sean  $X$  un conjunto,  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  dos bornologías sobre  $X$ . Se dice que  $\mathcal{B}_1$  es más fina que  $\mathcal{B}_2$  o que  $\mathcal{B}_2$  es menos fina que  $\mathcal{B}_1$ , si la aplicación  $I_X : (X, \mathcal{B}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{B}_2)$  es acotada, es decir, si  $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ .

Observación: La relación " es más fina que " sobre la familia de todas las bornologías sobre un conjunto  $X$  es una relación de orden.

Definición 1.2.3: Sean  $(X, \beta)$  y  $(Y, \beta')$  dos conjuntos bornológicos, y  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación de  $X$  en  $Y$ . Se dice que  $f$  es un isomorfismo bornológico si  $f$  es biyectiva y tanto  $f$  como su inversa  $f^{-1}$  son acotadas.

Ejemplo 1.2.2:

- i) Sean  $(X, \beta)$  y  $(Y, \beta')$  dos conjuntos bornológicos, y  $f : X \longrightarrow Y$  un isomorfismo bornológico; entonces  $f$  es también un isomorfismo bornológico evidentemente.
- ii) Sea  $(X, \beta)$  un conjunto bornológico. La aplicación idéntica de  $X$  en  $X$  es claramente un isomorfismo bornológico.

### 3. BORNOLOGIA LINEAL Y CONVEXA

Teorema 1.3.1: Sea  $E$  un e.l. sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\beta$  una bornología sobre  $E$  y  $\beta_{\mathbb{K}}$  la bornología usual sobre  $\mathbb{K}$  (Ejemplo 1.1.1).

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $\beta$  verifica
  - i)  $\forall A, B \in \beta : A + B \in \beta$
  - ii)  $\forall A \in \beta, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda A \in \beta$
  - iii)  $\forall A \in \beta : e(A) \in \beta$

- 2) Las aplicaciones  $\phi : E \times E \longrightarrow E$  y  $\psi : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$  definidas por :  $(x, y) \longmapsto x+y$  y  $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$  son acotadas.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 1) \Leftrightarrow 2) \quad A \times B \in \beta \times \beta &\Leftrightarrow A \in \beta \wedge B \in \beta \\
 &\Leftrightarrow A + B \in \beta
 \end{aligned}$$

$$\implies \emptyset (A \times B) \in \beta$$

$$\implies \emptyset \text{ es acotada.}$$

$$A \times B \in \beta_{\mathbb{K}} \times \beta \implies A \in \beta_{\mathbb{K}}, B \in \beta$$

$$\implies \exists \alpha > 0 : A \subseteq B_{\mathbb{K}}[0, \alpha] \wedge \alpha e(B) \in \beta$$

$$\text{Luego, } \psi(B_{\mathbb{K}}[0, \alpha] \times e(B)) = \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda e(B) \subseteq \alpha e(B) \quad (\text{pues } \lambda e(B) \subseteq \alpha e(B), \forall |\lambda| \leq \alpha)$$

Ahora, como  $\psi(A \times B) \subseteq \psi(B_{\mathbb{K}}[0, \alpha] \times e(B))$  resulta que

$$\psi(A \times B) \in \beta \text{ y en consecuencia } \psi \text{ es acotada.}$$

$$2) \implies 1)$$

$$\text{i) } A, B \in \beta \implies A \times B \in \beta \times \beta \implies \emptyset(A \times B) = A + B \in \beta$$

$$\text{ii) } A \in \beta, \lambda \in \mathbb{K} \implies A \in \beta, \{\lambda\} \in \beta_{\mathbb{K}} \text{ y como } \psi \text{ es acotada,} \\ \text{entonces } \psi(\{\lambda\} \times A) = \lambda A \in \beta.$$

$$\text{iii) } A \in \beta \text{ y } B_{\mathbb{K}}[0, 1] \in \beta_{\mathbb{K}}, \text{ luego siendo } \psi \text{ acotada resulta} \\ \text{que } \psi(B_{\mathbb{K}}[0, 1] \times A) = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A = e(A) \in \beta$$

**Definición 1.3.1:** Sea  $E$  un e.l. sobre  $\mathbb{K}$  y  $\beta$  una bornología sobre  $E$ .  $\beta$  se dice lineal si verifica (1) o (2) del Teorema 1.3.1. El par  $(E, \beta)$  se denomina "espacio linal bornológico" y se anota (e.l.b.).

**Observación:** Sea  $E$  un e.l. sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\beta$  una familia de partes equilibradas de  $E$  que verifica (i), (ii) y (iii) del Teorema 1.3.1 y que además es hereditario por inclusión, entonces  $\beta$  es necesariamente estable por reunión finita.

En efecto:

$A, B \in \beta \implies A$  y  $B$  son equilibrados y por consiguiente contienen al cero de  $E$ , luego  $A \cup B \subseteq A + B$  y en

consecuencia  $A \cup B \in \mathcal{B}$

**Definición 1.3.2:** Sea  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b.. Se dice que  $\mathcal{B}$  es una bornología convexa, si es estable por paso a la cápsula convexa, es decir si para todo  $A \in \mathcal{B} : c(A)$  es un elemento de  $\mathcal{B}$ . Es claro que  $\mathcal{B}$  es entonces estable por paso a la cápsula disqueada, pues  $\Gamma(A) = c(e(A))$ .

Llamaremos espacio lineal bornológico convexo o simplemente espacio bornológico convexo (e.b.c.) a todo e.l.b.  $(E, \mathcal{B})$ , donde la bornología lineal  $\mathcal{B}$  es convexa.

#### 4. APLICACION LINEAL ACOTADA

**Definición 1.4.1:** Sean  $(E, \mathcal{B})$  y  $(F, \mathcal{B}')$  dos e.l.b. y  $f$  una aplicación de  $E$  en  $F$ . Se dice que  $f$  es una aplicación lineal acotada si  $f$  es a la vez lineal y acotada.

**Ejemplo 1.4.1:** La aplicación compuesta de dos aplicaciones lineales acotadas es lineal acotada, y la aplicación idéntica de todo e.l.b. es lineal acotada.

**Definición 1.4.2:** Sean  $(E, \mathcal{B})$  y  $(F, \mathcal{B}')$  dos e.l.b. y  $f$  una aplicación de  $E$  en  $F$ . Se dice que  $f$  es un isomorfismo bornológico entre los espacios lineales bornológicos  $(E, \mathcal{B})$  y  $(F, \mathcal{B}')$  si  $f$  es un isomorfismo bornológico de conjuntos y lineal.

**Definición 1.4.3:** Sean  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b.. Llamaremos forma lineal acotada sobre  $E$  a toda apli-

cación lineal acotada  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , donde  $\mathbb{K}$  es el cuerpo de escalares provisto de su bornología usual definida por el valor absoluto.

## 5. EJEMPLOS DE BORNOLÓGICAS LINEALES Y CONVEXAS.

1.5.1: Bornología definida por una semi-norma (Ejemplo 1.1.1)

1.5.2: Bornología definida por una familia de semi-normas.

Sea  $E$  un e.l. sobre  $\mathbb{K}$  y  $\Gamma = (p_i)_{i \in I}$  una familia de semi-normas sobre  $E$ . Entonces la familia

$$\beta_0 = \{B_p[0, \varepsilon] / p = \max_{\substack{i \in J \subset I \\ J \text{ finito}}} p_i, \varepsilon > 0\}$$
 es base de una bornología convexa sobre  $E$ .

logía convexa sobre  $E$ .

En efecto:

i) Sea  $x \in E$ , entonces si  $p = \max_{\substack{i \in J \subset I \\ J \text{ finito}}} p_i$  y  $\varepsilon > 0$  se tiene que  $\{x\} \subseteq B_p[0, p(x) + \varepsilon] \in \beta_0$  y en consecuencia

$$E = \bigcup_{A \in \beta_0} A$$

ii) Sean  $B_{p_1}[0, \varepsilon_1]$ ,  $B_{p_2}[0, \varepsilon_2]$  donde  $p_i = \max_{i \in J_i} p_i$ ;  $p_2 = \max_{i \in J_2} p_i$ ;  $J_1, J_2 \subset I$  (finitos).

Sea  $p = \max_{i \in J_1 \cup J_2} p_i$  y  $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , entonces

$$B_{p_1}[0, \varepsilon_1] \cup B_{p_2}[0, \varepsilon_2] \subseteq B_p[0, \varepsilon], \text{ en efecto}$$

$$x \in B_{p_1}[0, \varepsilon_1] \cup B_{p_2}[0, \varepsilon_2]$$

$$\implies p_1(x) = \max_{i \in J_1} p_i(x) \leq \varepsilon_1 \text{ o } p_2(x) = \max_{i \in J_2} p_i(x) \leq \varepsilon_2$$

$$\implies p_i(x) \leq \varepsilon_1, \forall i \in J_1 \text{ o } p_i(x) \leq \varepsilon_2, \forall i \in J_2$$

$$\implies p_i(x) \leq \varepsilon, \forall i \in J_1 \cup J_2 \subset I \text{ (finito)}$$

$$\implies p(x) = \max_{i \in J_1 \cup J_2} p_i(x) < \varepsilon$$

$$\implies x \in B_p[0, \varepsilon]$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_0$  es base de bornología sobre  $E$  y en consecuencia la bornología generada por  $\mathcal{B}_0$  es

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq E / \exists \varepsilon > 0, J \subseteq I \text{ finito} : A \subseteq B_p[0, \varepsilon] ; p = \max_{i \in J} p_i\}$$

Se prueba sin dificultad que  $\mathcal{B}$  es lineal. Además,

$$A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists p_1 = \max_{\substack{i \in J \subseteq I \\ J \text{ finito}}} p_i, \varepsilon > 0 : A \subseteq B_{p_1}[0, \varepsilon]$$

$$\Leftrightarrow c(A) \subseteq B_{p_1}[0, \varepsilon] \quad (\text{pues } B_{p_1}[0, \varepsilon] \text{ es convexo})$$

$$\Leftrightarrow c(A) \in \mathcal{B}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}$  es una bornología convexa sobre  $E$ .

### 1.5.3: La bornología de Von Neumann.

Sea  $(E, \tau)$  un e.l.t.. Una parte  $A$  de  $E$  se dice  $\tau$ -acotada si para toda  $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$ ,  $V$  absorbe  $A$ , es decir, si  $\forall V \in \mathcal{V}(0, \tau), \exists \lambda > 0 : A \subseteq \lambda V, \forall |\lambda| \geq \alpha$ ; o aún si  $\forall U \in \mathcal{W}(\mathcal{W}$  base de  $\mathcal{V}(0, \tau))$ ,  $\exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha U, \forall |\lambda| \geq \alpha$ ; en particular, si los elementos de  $\mathcal{W}$  son todos equilibrados, entonces  $A$  es  $\tau$ -acotado si  $\forall U \in \mathcal{W}, \exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha U$ .

La familia  $\mathcal{B}(\tau) = \{A \subseteq E / A \text{ es } \tau\text{-acotado}\}$  es una bornología lineal sobre  $E$ . En efecto:

(B-1)  $\forall x \in E : \{x\} \in \mathcal{B}(\tau)$ , pues toda vecindad de 0 es absorbente. Luego  $\mathcal{B}(\tau)$  es un recubrimiento de  $E$ .

(B-2) Sean  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\tau)$  y  $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$  (equil.), entonces

$$V \text{ absorbe } A_1 \text{ y } A_2 \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : A_1 \subseteq \alpha_1 V \wedge A_2 \subseteq \alpha_2 V$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0 : A_1 \cup A_2 \subseteq \alpha V$$

$$\Leftrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}(\tau).$$

(B-3) Es evidente que  $\mathcal{B}(\tau)$  es hereditario por inclusión.

(L-1) Sean  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$  y  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  (equil.), entonces  
 $V$  absorbe  $A$  y  $B$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : A \subseteq \alpha_1 V \text{ y } B \subseteq \alpha_2 V$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : A + B \subseteq (\alpha_1 + \alpha_2) V$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) > 0 : A + B \subseteq \alpha V$$

$$\Leftrightarrow A + B \in \mathcal{B}(\mathcal{T}).$$

(L-2) Sean  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  equilibrada,  
entonces

$$V \text{ absorbe } A \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha V$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : \lambda A \subseteq (\lambda \alpha) V \subseteq / \lambda / \alpha V$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha' = / \lambda / \alpha > 0 : \lambda A \subseteq \alpha' V$$

$$\Leftrightarrow \lambda A \in \mathcal{B}(\mathcal{T}).$$

(L-3) Sea  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$  y  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  equilibrada, entonces

$$V \text{ absorbe } A \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : A \subseteq \alpha V \text{ (con } \alpha V \text{ equilibrada)}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : e(A) \subseteq \alpha V$$

$$\Leftrightarrow e(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{T}).$$

Además, si  $(E, \mathcal{T})$  es localmente convexo, entonces  $\mathcal{B}(\mathcal{T})$   
es una bornología convexa sobre  $E$ .

En efecto: Sean  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$  y  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  convexa, entonces

$$[\exists \alpha > 0 : / \lambda / \geq \alpha \Leftrightarrow A \subseteq \lambda V] \text{ (con } \lambda V \text{ convexa)}$$

$$\Leftrightarrow [\exists \alpha > 0 : / \lambda / \geq \alpha \Leftrightarrow c(A) \subseteq \lambda V]$$

$$\Leftrightarrow c(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{T}).$$

#### 1.5.4: La bornología equicontinua:

Sean  $(E, \mathcal{T})$ ,  $(F, \mathcal{T}')$  dos e.l.t. y consideremos el conjunto  $L(E, F) = \{f : E \longrightarrow F / f \text{ es lineal y continua}\}$ . Una parte  $H$  de  $L(E, F)$  se dice equicontinua si para toda vecindad

$$v \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}') : H^{-1}(v) = \bigcap_{f \in H} f^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$$

Podemos suponer evidentemente  $\forall v \in W$  ( $W$  base de  $\widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}')$ ).

La familia  $\mathcal{H} = \{H \subseteq L(E, F) / H \text{ es equicontinua}\}$  es una bornología lineal sobre  $L(E, F)$ , llamada "la bornología equicontinua de  $L(E, F)$ ". Además, si  $F$  es localmente convexo, entonces  $\mathcal{H}$  es convexa.

En efecto:

(B-1) Claramente  $\mathcal{H}$  es un recubrimiento de  $L(E, F)$ , pues todo elemento de  $L(E, F)$  es continua y luego equicontinua, es decir, para todo  $f \in L(E, F)$ ;  $\{f\} \in \mathcal{H}$  y en consecuencia

$$L(E, F) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$$

(B-2) Sean  $H_1 \in \mathcal{H}$ ,  $H_2 \subseteq L(E, F) : H_2 \subseteq H_1$ , entonces

$$\forall v \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}') : H_1^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}') : H_2^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}) \text{ pues } H_1^{-1}(v) \subseteq H_2^{-1}(v)$$

$$\Leftrightarrow H_2 \in \mathcal{H}$$

(B-3)  $H_1, H_2 \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \forall v \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}') : H_1^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$  y  
 $H_2^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}') : H_1^{-1}(v) \cup H_2^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$$

Ahora,  $H_1^{-1}(v) \cup H_2^{-1}(v) \subseteq (H_1 \cup H_2)^{-1}(v)$ , en efecto:

$$x \in H_1^{-1}(v) \cup H_2^{-1}(v) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(v), \forall f \in H_1 \text{ o } x \in f^{-1}(v), \forall f \in H_2$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(v), \forall f \in H_1 \cup H_2$$

$$\Leftrightarrow x \in (H_1 \cup H_2)^{-1}(v)$$

Luego  $\forall v \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}') : (H_1 \cup H_2)^{-1}(v) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$ , es decir,  
 $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$ .

(L-1) Sean  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  y  $v, w \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T}')$  ( $w$  equil.) :  $w + w \subseteq v$ ,  
entonces  $H_1^{-1}(w), H_2^{-1}(w) \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \mathcal{T})$

$$\Leftrightarrow H_1^{-1}(W) \cap H_2^{-1}(W) \in \sqrt{(0, \tau)}$$

Pero  $H_1^{-1}(W) \cap H_2^{-1}(W) \subseteq (H_1 + H_2)^{-1}(V)$ ; en efecto:

$$u \in H_1 + H_2 \Leftrightarrow u = u_1 + u_2, \text{ con } u_1 \in H_1, u_2 \in H_2, \text{ luego}$$

$$x \in H_1^{-1}(W) \cap H_2^{-1}(W) \Leftrightarrow u_1(x) \in W, u_2(x) \in W, \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2$$

$$\Leftrightarrow u_1(x) + u_2(x) \in W + W \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow (u_1 + u_2)(x) \in V$$

$$\Leftrightarrow u(x) \in V, \forall u \in H_1 + H_2$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{u \in H_1 + H_2} u^{-1}(V)$$

Luego  $(H_1 + H_2)^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$  y en consecuencia

$$H_1 + H_2 \in \mathcal{H}.$$

(L-2) Sean  $H \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $v \in \sqrt{(0, \tau)}$  equilibrada, entonces :

$$\text{si } \lambda \neq 0, (\lambda H)^{-1}(V) = \bigcap_{u \in H} \lambda u^{-1}(V) = \frac{1}{\lambda} \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$$

$$\text{si } \lambda = 0; \lambda H = \{0\} \in \mathcal{H}.$$

(L-3)  $H \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \forall v \in \sqrt{(0, \tau)}$  equil.;  $H^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$

Ahora:  $H^{-1}(V) \subseteq (e(H))^{-1}(V)$ , en efecto;

$$x \in H^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V) \Leftrightarrow u(x) \in V, \forall u \in H$$

$$\Leftrightarrow \forall |\lambda| \leq 1; \lambda u(x) \in \lambda V \subseteq V, \forall u \in H \quad (V \text{ equil.})$$

$$\Leftrightarrow \forall |\lambda| \leq 1; \forall u \in H: x \in (\lambda u)^{-1}(V)$$

$$\Leftrightarrow \forall |\lambda| \leq 1; \forall v \in \lambda H: x \in v^{-1}(V)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda H = e(H): x \in v^{-1}(V)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in e(H): x \in v^{-1}(V)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{v \in e(H)} v^{-1}(V) = (e(H))^{-1}(V)$$

Luego  $(e(H))^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$  y en consecuencia  $e(H) \in \mathcal{H}$ .

(C-1) Supongamos que  $F$  es loc. convexo.

Sean  $H \in \mathcal{H}$ ,  $V \in \sqrt{(0, \tau)}$  disco, entonces

$H^{-1}(V) \subseteq (\Gamma(H))^{-1}(V)$ ; en efecto:  $x \in H^{-1}(V) \Leftrightarrow u(x) \in V, \forall u \in H$ ,

luego  $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i(x) \in V$ ;  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ :  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$ ;  $h_i \in H$ ,  $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow u(x) \in V, \forall u \in \Gamma(H)$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{u \in \Gamma(H)} u^{-1}(V) = (\Gamma(H))^{-1}(V)$

Luego como  $H^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$ , se tiene que

$(\Gamma(H))^{-1}(V) \in \sqrt{(0, \tau)}$ , es decir  $\Gamma(H) \in \mathcal{H}$  y luego  $c(H) \in \mathcal{H}$ .

1.5.5: La bornología compacta de un espacio lineal topológico

Sean  $(X, \tau)$  un e.t. Hausdorff y  $\mathcal{B}_c$  la familia de las partes relativamente compactas de  $X$ . Entonces :

1)  $\mathcal{B}_c$  es una bornología sobre  $X$ .

En efecto :

(B-1)  $\forall x \in X$  :  $\{x\}$  es compacto y  $\{x\} = \overline{\{x\}}^\tau$ , luego  $\{x\} \in \mathcal{B}_c$   
y en consecuencia  $X = \bigcup \{A / A \in \mathcal{B}_c\}$

(B-2) Sean  $A, B \subseteq X$  :  $A \subseteq B$  y  $B \in \mathcal{B}_c$ , entonces

$\bar{A} \subseteq \bar{B}$ , con  $\bar{B}$  compacto

$\Rightarrow \bar{A}$  compacto, es decir,  $A \in \mathcal{B}_c$

(B-3)  $A, B \in \mathcal{B}_c \Rightarrow A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ , con  $\bar{A} \cup \bar{B}$  compacto

$\Rightarrow \overline{A \cup B}$  es compacto, es decir,  $A \cup B \in \mathcal{B}_c$

2) Sea  $\mathcal{K}_X = \{K \subseteq X / K \text{ es compacto}\}$ , entonces  $\mathcal{K}_X$  es una base para  $\mathcal{B}_c$ .

En efecto, claramente  $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{B}_c$ ; además si  $A \in \mathcal{B}_c$ , entonces  $K = \bar{A} \in \mathcal{K}_X$  y  $A \subseteq K$ . Luego  $\mathcal{K}_X$  es base de  $\mathcal{B}_c$ .

$\mathcal{B}_c$  se denomina la " bornología compacta de  $(X, \tau)$  " .

3) La bornología compacta de un e.l.t. Hausdorff es lineal.

En efecto ; sea  $(E, \tau)$  un e.l.t. Hausdorff y  $\mathcal{B}_c$  su bornolo-

gía compacta

(L-1) Sean  $A, B \in \mathcal{B}_c$ , entonces  $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{K}_X$ , luego

$\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$  es un compacto de  $E \times E$  provisto de la bornología producto. Luego  $\bar{A} + \bar{B}$  es compacto pues la aplicación  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$  :  $(x, y) \mapsto x + y$  es continua y como  $A + B \subseteq \bar{A} + \bar{B}$  resulta que  $A + B \in \mathcal{B}_c$ .

(L-2) Sean  $A \in \mathcal{B}_c$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ . La aplicación  $f_\lambda : E \rightarrow E$  definida por  $f_\lambda(x) = \lambda x$  es continua; luego siendo  $\bar{A}$  compacto también lo es  $f_\lambda(\bar{A}) = \lambda \bar{A} = \overline{\lambda A}$ , es decir,  $\lambda A \in \mathcal{B}_c$ .

(L-3)  $A \in \mathcal{B}_c \Leftrightarrow \bar{A} \in \mathcal{K}_X$ . Sea  $D = \mathbb{B}_{\mathbb{K}}[0, 1]$ , es claro que  $D$  es compacto, luego  $D \times \bar{A}$  es un compacto de  $\mathbb{K} \times E$  y siendo  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  :  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  continua, resulta que  $\cdot(D \times \bar{A}) = \{\lambda x / |\lambda| \leq 1, x \in \bar{A}\} = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \bar{A} = e(\bar{A})$  es compacto.

Ahora como  $e(A) \subseteq e(\bar{A})$ , entonces  $\overline{e(A)} \subseteq e(\bar{A})$  y luego  $e(A)$  es compacto de  $E$  y en consecuencia  $e(A) \in \mathcal{B}_c$ .

4)  $\mathcal{B}_c$  es de Kolmogoroff; esto es, para cada  $A \subseteq E$  ;

$A \in \mathcal{B}_c \Leftrightarrow$  Toda sucesión  $(a_n)$  de  $A$  es elemento de  $\mathcal{B}_c$ .

En efecto :

( $\square$ ) es evidente.

( $\square$ ) Supongamos que toda sucesión  $(a_n)$  de  $A$  pertenece a  $\mathcal{B}_c$ . Debemos mostrar que  $A$  es relativamente compacto, es decir, que toda sucesión de  $A$  posee una sub-sucesión convergente (Dieudonné Pag. 63).

Supongamos que  $A$  no es relativamente compacto, entonces existe una sucesión de  $A$  que no admite sub-sucesión convergente. Sea  $(a_n)$  ésta sucesión. Luego;

- $(a_n) \subseteq A \iff (a_n) \in \beta_c$   
 $\iff C = \{a_n / n \geq 1\}$  es compacto  
 $\iff$  toda sucesión de  $C$  admite una sub-sucesión convergente.  
 $\iff (a_n)$  admite una sub-sucesión convergente

Luego, necesariamente  $A$  es relativamente compacto, es decir,  $A \in \beta_c$ .

Por lo tanto,  $\beta_c$  es de Kolmogoroff.

### 1.5.6 La bornología de los discos compactos en un espacio lineal topológico.

Sea  $(E, \mathcal{Z})$  un e.l.t. Hausdorff; un disco compacto en  $E$  es un conjunto compacto y absolutamente convexo (disco).

Sea  $\beta_d = \{A \subseteq E / A \subseteq B; B \text{ disco compacto}\}$ , entonces  $\beta_d$  es una bornología convexa sobre  $E$ . En efecto:

(1) Sea  $a \in E$  y consideremos su cápsula disquada

$\overline{\Gamma}(\{a\}) = \{\lambda a / |\lambda| \leq 1\}$ ; entonces  $\overline{\Gamma}(\{a\}) = \cdot(D \times \{a\})$ ,  
 donde  $D = B_{\mathbb{K}}[0, 1]$ . Como  $D$  es compacto en  $\mathbb{K}$  y  $\{a\}$  es compacto en  $E$ , resulta que  $D \times \{a\}$  compacto en  $\mathbb{K} \times E$ . Luego  $\overline{\Gamma}(\{a\})$  es compacto en  $E$  y en consecuencia  $E = \bigcup_{A \in \beta_d} A$

(2) Sean  $A, C$  sub-conjuntos de  $E$  tal que  $A \subseteq C$  y  $C \in \beta_d$

entonces existe  $B$  disco compacto de  $E$  tal que

$$A \subseteq C \subseteq B \iff A \subseteq B \implies A \in \beta_d$$

(3)  $A \in \beta_d \implies \exists B$  disco compacto :  $A \subseteq B$

Luego, para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ;  $\lambda A \subseteq \lambda B$ , con  $\lambda B$  disco compacto

$$\implies \lambda A \in \beta_d$$

- (4)  $A \in \mathcal{B}_d \iff \exists B$  disco compacto :  $A \subseteq B$   
 $\iff e(A) \subseteq e(B) = B$  pues  $B$  es equilibrado  
 $\iff e(A) \in \mathcal{B}_d$
- (5)  $A \in \mathcal{B}_d \iff \exists B$  disco compacto :  $A \subseteq B$   
 $\iff \Gamma(A) \subseteq \Gamma(B) = B$   
 $\iff \Gamma(A) \in \mathcal{B}_d$
- (6)  $A, B \iff \exists C, D$  discos compactos :  $A \subseteq C, B \subseteq D$   
 $\iff A + B \subseteq C + D$

Ahora como  $C + D = +(C \times D)$  y  $C \times D$  compacto en  $E \times E$  resulta que  $C + D$  es compacto en  $E$ . Además es claro que  $C + D$  es un disco, luego  $A + B \in \mathcal{B}_d$ .

En resumen  $\mathcal{B}_d$  es una bornología convexa sobre  $E$ , denominada " la bornología de los discos compactos de  $(E, \mathcal{C})$  ".

Observación:  $\mathcal{B}_d$  es más fina que  $\mathcal{B}_c$ , esto es,  $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{B}_c$  ;  
 en efecto:  $\forall A \subseteq E$ ;

$A \in \mathcal{B}_d \iff \exists B$  disco compacto:  $A \subseteq B$   
 $\implies A$  es relativamente compacto  
 $\implies A \in \mathcal{B}_c$ .

1.5.7. En general la bornología  $\mathcal{B}_c$  no es convexa.

En efecto: consideremos el espacio

$E = \{ x = (x_n) / \exists n_0 \geq 1 : n \geq n_0 \implies x_n = 0 \}$ , provisto de la norma  $\| x \| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ ,  $x = (x_n)$  y consideremos los vectores  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Es claro que  $(e_n)_{n \geq 1}$  es una base para  $E$ .

Para cada  $n \geq 1$ , pongamos  $x_n = e_n / 2^{3n}$  y  $z_n = 2^{2n} x_n$ , en-

tonces  $\|z_n\| = 2^{2n}\|x_n\| = 2^{2n} \cdot 1/2^{3n} = 1/2^n \rightarrow 0$ , luego

$A = \{z_n / n \geq 1\} \cup \{0\}$  es compacto.

Consideremos  $\overline{\Gamma(A)}$ ; para cada  $n \geq 1$  sea  $y_n = \sum_{i=1}^n 2^i x_i$ , entonces  $y_n = \sum_{i=1}^n 2^i x_i = \sum_{i=1}^n 1/2^i \cdot 2^{2i} x_i = \sum_{i=1}^n 1/2^i \cdot z_i$ , con  $\sum_{i=1}^n 1/2^i = (2^n - 1)/2^n < 1$ , es decir,  $(y_n) \subseteq \Gamma(A) \subseteq \overline{\Gamma(A)}$ .

Por otra parte, para todo  $p \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \|y_{n+p} - y_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^p 2^i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p 2^i \cdot e_i / 2^{3i} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^p e_i / 2^{2i} \right\| = \left\| (1/2^2, 1/2^4, \dots, 1/2^{2p}, 0, \dots) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^p 1/2^{2i} = 1/3 - 1/3 \cdot 2^{-2p} \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|y_{n+p} - y_n\| = 1/3$ , es decir,  $(y_n)$  no es  $\|\cdot\|$ -Cauchy; pero entonces ninguna sub-sucesión  $(y_{n_k})$  de  $(y_n)$  puede ser  $\|\cdot\|$ -Cauchy, pues

$\lim_{p \rightarrow \infty} \|y_{n+p} - y_{n_p}\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|y_{n+p} - y_n\| = 1/3$  y luego  $(y_{n_k})$  no es  $\|\cdot\|$ -Cauchy. Se sigue que  $(y_n)$  no admite sub-sucesiones convergente (de existir serían  $\|\cdot\|$ -Cauchy).

Por lo tanto,  $\overline{\Gamma(A)}$  no es compacto, es decir,  $\overline{\Gamma(A)} \notin \mathcal{B}_c$

Hemos probado así que  $\mathcal{B}_c$  no es convexa. Este mismo ejemplo nos permite probar que la bornología de los discos compactos  $\mathcal{B}_d$  es en general estrictamente más fina que la bornología compacta  $\mathcal{B}_c$ , esto es:  $\mathcal{B}_d \subsetneq \mathcal{B}_c$

En efecto: si  $A = \{z_n / n \geq 1\} \cup \{0\}$  del ejemplo anterior, entonces  $A \notin \mathcal{B}_d$ ; pues si así fuera existiría  $B \subseteq E$  disco compacto tal que  $A \subseteq B$ ; pero entonces  $\overline{\Gamma(A)} \subseteq B$  ( $B$  es cerrado pues  $E$  es  $T_2$ ). Entonces  $\overline{\Gamma(A)}$  es relativamente compacto lo que es imposible.

1.5.8. La bornología precompacta en los e.l.t.

Sea  $(E, \mathcal{Z})$  un e.l.t. y pongamos

$\mathcal{B}_p = \{A \subseteq E / A \text{ precompacto}\}$ , entonces  $\mathcal{B}_p$  es una bornología lineal sobre  $E$ . En efecto:

1)  $\mathcal{B}_p$  es una bornología sobre  $E$ .

(B-1) Toda parte finita de  $E$  es precompacto, luego  $\mathcal{B}_p$  es un recubrimiento de  $E$ .

(B-2) Sean  $A, B \subseteq E$ ;  $B \in \mathcal{B}_p$ ;  $A \subseteq B$ , entonces si  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$ , existen  $x_1, \dots, x_n \in E$ :  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$   
 $\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$ , es decir,  $A \in \mathcal{B}_p$ .

(B-3) Sean  $A, B \in \mathcal{B}_p$ , entonces si  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$  existen

$x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m \in E$  tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V); B \subseteq \bigcup_{j=1}^m (y_j + V)$$

$$\Rightarrow A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V) \cup \bigcup_{j=1}^m (y_j + V) \text{ o bien haciendo}$$

do  $z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n; z_{n+1} = y_1, \dots, z_{n+m} = y_m$

$$\text{luego } A \cup B \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+m} (z_k + V)$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}_p$$

Por lo tanto  $\mathcal{B}_p$  es una bornología sobre  $E$ .

2)  $\mathcal{B}_p$  es lineal.

(L-1) Sean  $A, B \in \mathcal{B}_p$ , entonces si  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$  y  $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$

son tales que  $W + W \subseteq V$  existen  $x_1, \dots, x_n;$

$$y_1, \dots, y_m \in E: A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + W) \text{ y } B \subseteq \bigcup_{j=1}^m (y_j + W)$$

$$\text{luego } A + B \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + W) + \bigcup_{j=1}^m (y_j + W)$$

$$= \bigcup_{i,j} (x_i + y_j + W + W) \subseteq \bigcup_{i,j} (x_i + y_j + V)$$

$$\text{luego } A + B \in \mathcal{B}_p.$$

(L-2) Sean  $A \in \mathcal{B}_p$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ , entonces:

si  $\lambda = 0$  es evidente que  $\lambda A \in \mathcal{B}_p$ .

Supongamos que  $\lambda \neq 0$  y sea  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$ ; luego también  $1/\lambda V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  y en consecuencia

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}_p &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in E : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + 1/\lambda V) \\ &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in E : \lambda A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\lambda x_i + V) \\ &\Leftrightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in E : \lambda A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (y_i + V) \\ &\Leftrightarrow \lambda A \in \mathcal{B}_p \end{aligned}$$

(L-3) Sea  $A \in \mathcal{B}_p$ , entonces si  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  equilibrada,

existen  $x_1, \dots, x_n \in E : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$ , luego

$$\begin{aligned} e(A) &\subseteq e\left(\bigcup_{i=1}^n (x_i + V)\right) \\ &= e(\{x_i / i = 1, \dots, n\} + V) \\ &= e(M) + e(V) = e(M) + V, \text{ con } M = \{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

Ahora  $e(M)$  es precompacto; en efecto

$$\begin{aligned} e(M) &= \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda M = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \bigcup_{i=1}^n \lambda \{x_i\} \\ \text{Pero } e(\{x_i\}) &= \{\lambda x_i / |\lambda| \leq 1\} = D\{x_i\} ; \text{ con } D = B_{\mathbb{K}}[0, 1] \\ &= f_{x_i}(D) \text{ donde } f_{x_i} : \mathbb{K} \rightarrow E; \lambda \rightarrow \lambda x_i \text{ que} \end{aligned}$$

es lineal y continua. Luego siendo  $D$  precompacto en  $\mathbb{K}$  resulta que  $f_{x_i}(D) = e(\{x_i\})$  es compacto en  $E$  y en

consecuencia también lo es  $e(M) = \bigcup_{i=1}^n e(\{x_i\})$ .

Luego  $e(M) + V$  es precompacto y también lo es

$e(A) \subseteq e(M) + V$ , es decir  $e(A) \in \mathcal{B}_p$

Observación: La bornología de Von Neumann de  $(E, \mathcal{T})$  es menos fina que la bornología precompacta.

En efecto: sean  $A \in \mathcal{B}_p$ ,  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T})$  equilibrada, entonces

$$A \in \mathcal{B}_p \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in E : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$$

1.5.9. En un e.l.c. Hausdorff la bornología precompacta es convexa. En efecto: sean  $V, W \in \widehat{\mathcal{V}}(0, \tau)$  disjuntas tales que  $W + W \subseteq V$ , entonces

$$A \in \mathcal{B}_p \Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in E : A \subseteq \{a_1, \dots, a_n\} + W$$

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \Gamma(\{a_1, \dots, a_n\} + W) \\ &= \Gamma(\{a_1, \dots, a_n\}) + \Gamma(W) \\ &= \Gamma(a_1, \dots, a_n) + W \end{aligned}$$

Sean  $u : \mathbb{K}^n \times E^n \rightarrow E : z = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$   
y  $p_i : \mathbb{K}^n \times E^n \rightarrow \mathbb{K}^{(i)} \times E^{(i)} (= \mathbb{K} \times E) : z \mapsto p_i(z) = (\lambda_i, x_i)$   
Claramente  $p_i$  es continua para todo  $i = 1, \dots, n$ ; además si  
 $v : \mathbb{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ,  $v$  es continua.

$$\begin{aligned} \text{Luego } u(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \\ &= v((\lambda_1, x_1)) + \dots + v((\lambda_n, x_n)) \\ &= v(p_1(z)) + \dots + v(p_n(z)) \\ &= (v \circ p_1)(z) + \dots + (v \circ p_n)(z) \\ &= (v \circ p_1 + \dots + v \circ p_n)(z) \end{aligned}$$

Es decir,  $u = v \circ p_1 + \dots + v \circ p_n$  que es continua, luego siendo  $D = B_{\mathbb{K}^n}[0, 1]$  compacto en  $\mathbb{K}^n$  y  $\{a_1\} \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\}$  compacto en  $E^n$  resulta que  $D \times \{a_1\} \times \dots \times \{a_n\}$  es compacto en  $\mathbb{K}^n \times E^n$  (Tikhonoff), luego  $u(D \times \{a_1\} \times \dots \times \{a_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i / (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D) \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i / \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\} = \Gamma(\{a_1, \dots, a_n\})$  es

compacto en  $E$  y en consecuencia precompacto, es decir, existen

$b_1, \dots, b_m \in E$  tal que  $\Gamma(\{a_1, \dots, a_n\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (b_j + W)$ ; luego

$$\Gamma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (b_j + W + W) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (b_j + V) \text{ y } \Gamma(A) \in \mathcal{B}_p.$$

1.5.10. La bornología compacta de un espacio de Banach es convexa.

Hemos visto que en general la bornología compacta no es convexa aún cuando el espacio sea normado. Sin embargo esto es cierto para un espacio de Banach  $B$ . En efecto: como  $\bar{\Gamma}$  es un espacio métrico completo, basta hacer ver que  $\overline{\Gamma(A)}$  es precompacto y completo para todo  $A \in \mathcal{B}_c$ .

Sea  $A$  precompacto, entonces  $\Gamma(A)$  es precompacto y luego  $\overline{\Gamma(A)}$  es precompacto.

Además  $\overline{\Gamma(A)}$  es completo por ser cerrado en un completo.

Por lo tanto,  $\overline{\Gamma(A)}$  es compacto, es decir,  $\Gamma(A) \in \mathcal{B}_c$ .

## 6. CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES DE BORNOLÓGICAS.

### Bornologías Iniciales

**Teorema 1.6.1:** Sea  $I$  un conjunto no vacío de índices,  $(X_i, \beta_i)$  una familia de conjuntos bornológicos,  $X$  un

conjunto. Para todo  $i \in I$  sea  $u_i : X \rightarrow X_i$  una aplicación y

$\beta_I = \{A \subseteq X / \forall i \in I; u_i(A) \in \beta_i\}$ . Entonces:

- i)  $\beta_I$  es una bornología sobre  $X$ . Esta bornología sobre  $X$  es la menos fina que hace acotadas las aplicaciones  $u_i$ .
- ii) Si para todo  $i \in I$ ,  $(X_i, \beta_i)$  es un e.l.b. (resp. e.b.c.),  $X$  e.l. y la aplicación  $u_i$  lineal, entonces la bornología  $\beta_I$  es una bornología lineal (resp. convexa) sobre  $X$ .

**Demostración:**

- i)  $\beta_I$  es una bornología sobre  $X$ ; en efecto:

$$(B-1) \quad x \in X \Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(\{x\}) = \{y_i\} \in \beta_i, \quad y_i \in X_i$$

$$\Leftrightarrow \{x\} \in \beta_I, \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{A \in \beta_I} A \subseteq X$$

$$(B-2) \quad \text{Sean } A \in \beta_I, \quad B \subseteq X : B \subseteq A, \text{ entonces } \forall i \in I; u_i(A) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(B) \in \beta_i \quad (\text{pues } u_i(B) \subseteq u_i(A))$$

$$\Leftrightarrow B \in \beta_I.$$

$$(B-3) \quad A_1, A_2 \in \beta_I \Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A_1), u_i(A_2) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A_1) \cup u_i(A_2) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A_1 \cup A_2) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow A_1 \cup A_2 \in \beta.$$

Además para todo  $i \in I$ ,  $u_i : X \rightarrow X_i$  es acotada por definición de  $\beta_I$ .

Mostremos ahora que  $\beta_I$  es la bornología menos fina sobre  $X$  que hace acotadas las aplicaciones  $u_i$ : sea  $\beta$  otra bornología sobre  $X$  tal que  $\forall i \in I$ ,  $u_i$  es  $\beta - \beta_i$  acotada, entonces  $A \in \beta \Leftrightarrow u_i(A) \in \beta_i, \forall i \in I \Leftrightarrow B \in \beta_I$ .

ii) Supongamos ahora que para todo  $i \in I$ ;  $(X_i, \beta_i)$  es un e.l.b. (resp. e.b.c.);  $X$  un e.l. y  $u_i$  una aplicación lineal. Entonces:

$\beta_I$  es una bornología lineal, en efecto:

$$(L-1) \quad A_1, A_2 \in \beta_I \Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A_1), u_i(A_2) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A_1) + u_i(A_2) = u_i(A_1 + A_2) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow A_1 + A_2 \in \beta_I.$$

$$(L-2) \quad \text{Sean } B \in \beta_I, \lambda \in \mathbb{K}, \text{ entonces } \forall i \in I; u_i(B) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(B) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(\lambda B) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \lambda B \in \beta_I.$$

$$(L-3) \quad \text{Sean } B \in \beta_I \text{ y } \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1, \text{ entonces}$$

$$\forall i \in I; u_i(B) \in \beta_i \Leftrightarrow \forall i \in I; \lambda u_i(B) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda u_i(B) \in \beta_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(\bigcup_{\lambda/\neq 1} \lambda B) \in \beta_i$$

$$\Leftrightarrow c(B) \in \beta_I.$$

Supongamos ahora que para todo  $i \in I$ ,  $\beta_i$  es convexa; entonces  $B \in \beta_I \Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(B) \in \beta_i \Leftrightarrow \forall i \in I; c(u_i(B)) \in \beta_i$ . pero  $u_i(c(B)) = c(u_i(B))$ , en efecto: sea  $y \in u_i(c(B))$ , entonces existe un  $x \in c(B) : y = u_i(x)$ ,  $\forall i \in I$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j ; x_j \in B, \lambda_j > 0 : y = u_i(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j)$$

$$\Leftrightarrow y = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_i(x_j), \forall i \in I ; x_j \in B, \lambda_j > 0$$

$$\Leftrightarrow y \in c(u_i(B))$$

Luego para todo  $i \in I; u_i(c(B)) \in \beta_i$  y en consecuencia  $c(B) \in \beta_I$ .

Definición 1.6.1 : La bornología  $\beta_I$  sobre  $X$  definida por el Teorema 1.6.1 se denomina " bornología inicial sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$  ".

Observación: Una aplicación  $u : Y \rightarrow X$  de un conjunto bornológico  $Y$  sobre  $X$  provisto de la bornología inicial respecto a las aplicaciones  $u_i$  es acotada si sólo si para todo  $i \in I; u_i \circ u$  es acotada. En efecto: si  $u$  es acotada, entonces evidentemente  $u_i \circ u$  es acotada ( comp. de acotada ).

Recíprocamente, supongamos  $u_i \circ u$  acotada y sea  $A \in \beta_I$ , entonces  $(u_i \circ u)(A) \in \beta_i \Leftrightarrow u_i(u(A)) \in \beta_i \Leftrightarrow u(A) \in \beta_I$ , luego  $u$  es acotada.

Base de la bornología inicial.

Utilizando las notaciones del Teorema 1.6.1, para cada  $i \in I$  sea  $u_i^{-1}(\beta_i) = \{ u_i^{-1}(A) / A \in \beta_i \}$

El conjunto  $\mathcal{B}_0 = \bigcap_{i \in I} u_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$  es base de la bornología inicial sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$ . En efecto:

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B}_0 &\Leftrightarrow B \in u_i^{-1}(\mathcal{B}_i), \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \exists A_i \in \mathcal{B}_i : B = u_i^{-1}(A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \exists A_i \in \mathcal{B}_i ; u_i(B) \subseteq A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(B) \in \mathcal{B}_i \\ &\Leftrightarrow B \in \mathcal{B}_I \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_I$

$$\begin{aligned} \text{Además, } A \in \mathcal{B}_I &\Leftrightarrow \forall i \in I; u_i(A) \in \mathcal{B}_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I; \exists B_i \in \mathcal{B}_i : u_i(A) = B_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I; \exists B_i \in \mathcal{B}_i : A \subseteq u_i^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow A \subseteq \bigcap_{i \in I} u_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_0$  es base de la bornología inicial sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$ .

### Casos Particulares de Bornología Iniciales.

1.- Bornología Producto: Sean  $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos bornológicos,  $X = \prod_{i \in I} X_i$  el conjunto producto de los  $X_i$ . Para todo  $i \in I$  sea  $p_i: X \rightarrow X_i$  la proyección canónica. Llamaremos bornología producto sobre  $X$  a la bornología inicial sobre  $X$  respecto a las proyecciones  $p_i$ .

Se dice que  $X$  provisto de la bornología producto, es el producto bornológico de los  $(X_i, \mathcal{B}_i)$ .

Proposición 1.6.1 : La bornología producto sobre un conjunto  $X$  admite por base a la familia

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ B = \prod_{i \in I} B_i / \forall i \in I, B_i \in \mathcal{B}_i \right\}$$

Demostración: Sea  $\mathcal{B}$  la bornología producto sobre  $X$ . Claramente  $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$  puesto que si  $B = \prod_{i \in I} B_i$ , con  $B_i \in \mathcal{B}_i$ ,

$\forall i \in I$ , entonces  $p_i(B) = B_i \in \mathcal{B}_i$ ,  $\forall i \in I$ , luego  $B \in \mathcal{B}$ .

Por otra parte,  $A \in \mathcal{B}$   $\forall i \in I$ ,  $p_i(A) \in \mathcal{B}_i$ . Pongamos  $A_i = p_i(A)$  y  $B = \prod_{i \in I} A_i$ ; con  $A_i \in \mathcal{B}_i$ ,  $\forall i \in I$ , entonces existe

$$B \in \mathcal{B}_0 : A \subseteq B$$

Observación: Si los  $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$  son e.l.b.,  $X$  el espacio producto; las proyecciones  $p_i: X \rightarrow X_i$  son entonces lineales. Luego en virtud del Teorema 1.6.1, la bornología producto es lineal (resp. convexa si los  $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$  son e.b.c.).

## 2.- La bornología inducida : sub-espacios bornológicos.

Sean  $(X, \mathcal{B})$  un conjunto bornológico,  $Y \subseteq X$  y  $u: Y \rightarrow X$  la inyección canónica. Llamaremos bornología inducida por  $(X, \mathcal{B})$  sobre  $Y$ , a la bornología inicial sobre  $Y$  respecto a la inyección canónica  $u$ .

Anotamos  $\mathcal{B}_Y = \{A \subseteq Y / A \in \mathcal{B}\}$  a la bornología inducida. Se dice que  $(Y, \mathcal{B}_Y)$  es un sub-conjunto bornológico de  $(X, \mathcal{B})$ .

Si  $(X, \mathcal{B})$  es un e.l.b., la bornología inducida es entonces lineal y se dice que  $Y$  es un sub-espacio bornológico de  $X$ .

Observación: Una base de la bornología inducida  $\mathcal{B}_Y$  es la familia  $\mathcal{B}_Y^0 = \{A \cap Y / A \in \mathcal{B}_0\}$ , donde  $\mathcal{B}_0$  es base

de  $\beta$ . En efecto : claramente  $\beta_Y^{\circ} \subseteq \beta_Y$ . Además,  
 $B \in \beta_Y \Leftrightarrow B \subseteq Y$ ;  $B \in \beta \Leftrightarrow B \subseteq Y, \exists A \in \beta_0 : B \subseteq A$   
 $\Leftrightarrow B \subseteq A \cap Y, A \in \beta_0$ .

3.- Bornología generada por una familia de partes.

Sea  $X$  un conjunto y  $(\beta_i)_{i \in I}$  una familia de bornologías sobre  $X$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $u_i$  la aplicación idéntica de  $X$  en  $(X, \beta_i)$ .

Llamaremos intersección de las bornologías  $\beta_i$ , a la bornología inicial sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$ .

$$\text{Anotamos } \beta_0 = \{ A \subseteq X / A \in \beta_i, \forall i \in I \} = \bigcap_{i \in I} \beta_i$$

Si  $X$  es un e.l. y las  $\beta_i$  lineales (resp. convexas); la bornología intersección de las  $\beta_i$  es lineal (resp. convexa) en virtud del Teorema 1.6.1.

Sea  $X$  un conjunto (resp. un e.l.),  $\mathcal{A}$  una familia de partes de  $X$ . Llamaremos bornología generada por  $\mathcal{A}$  (resp. bornología lineal; resp. bornología convexa generada por  $\mathcal{A}$ ) a la intersección de todas las bornologías sobre  $X$  que contienen  $\mathcal{A}$  (resp. de todas las bornologías lineales; resp. convexas sobre  $X$  que contienen  $\mathcal{A}$ ).

Observación: Siempre existe una bornología sobre  $X$  conteniendo a  $\mathcal{A}$ ; esta es por ejemplo la bornología  $P(X)$  y si  $X$  es un e.l., es inmediato que  $P(X)$  es lineal y convexa.

4.- Límites proyectivos bornológico.

Sistema proyectivos bornológicos:

Sea  $I$  un conjunto ordenado por la relación  $(\leq)$  y filtrante a derecha. Sea  $(X_i, u_{ij})_{i \leq j}$  un sistema proyectivo de conjuntos tal que para cada  $i \in I$   $(X_i, \beta_i)$  es un conjunto bornológico. Se dice que el sistema  $(X_i, u_{ij})_{i \leq j}$  es un sistema proyectivo de conjuntos bornológicos, si para todo  $i \leq j$  la aplicación  $u_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$  es acotada. De igual forma si los  $(X_i, \beta_i)$  son e.l.b. (resp. e.b.c.) se dice que el sistema  $(X_i, u_{ij})_{i \leq j}$  es un sistema proyectivo de e.l.b. (resp. e.b.c.) si las aplicaciones  $u_{ij}$  son lineales acotadas.

Bornología límite proyectivo:

Sean  $(X_i, u_{ij})_{i \leq j}$  un sistema proyectivo de conjuntos bornológicos (resp. de e.l.b.; resp. de e.b.c.) y  $X$  el conjunto (resp. el e.l.) límite proyectivo del sistema  $(X_i, u_{ij})$ . Para cada  $i \in I$  sea  $u_i : X \longrightarrow X_i$  la proyección canónica de  $X$  en  $X_i$ . Llamaremos bornología límite proyectivo sobre  $X$  de las bornologías  $\beta_i$  sobre  $X_i$ , a la bornología inicial sobre  $X$  respecto a las proyecciones  $u_i$ .

Se dice que  $X$  provisto de la bornología límite proyectivo de las  $\beta_i$  es el límite proyectivo bornológico del sistema proyectivo bornológico  $(X_i, u_{ij})_{i \leq j}$  y se anota:

$$X = \varprojlim_{i \in I} (X_i, u_{ij}).$$

Bornologías Finales.

Teorema 1.6.2 : Sea  $I$  un conjunto no vacío,  $(X_i, \beta_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos bornológicos,  $X$  un conjunto y para todo  $i \in I$   $u_i : X_i \longrightarrow X$  una aplicación de

$X_i$  en  $X$ . Sea  $\mathcal{B}$  la bornología sobre  $X$  generada por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} u_i(\mathcal{B}_i). \quad \text{Entonces :}$$

i) La bornología  $\mathcal{B}$  es la bornología sobre  $X$ , la más fina

(con menos acotados) de todas las bornologías sobre  $X$  que hacen acotadas las aplicaciones  $u_i$ .

ii) Si  $X$  es un e.l. y  $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$  una familia de e.l.b.

(respectivamente e.b.c.) y para cada  $i \in I$ ,  $u_i : X_i \rightarrow X$  lineal, entonces la bornología lineal (resp. convexa) sobre  $X$  generada por  $\mathcal{A}$ , es la más fina de todas las bornologías lineales sobre  $X$  (resp. convexa sobre  $X$ ) que hacen acotadas las aplicaciones  $u_i$ .

Demostración: El Teorema 1.6.2 resulta inmediato de las definiciones y Teorema 1.6.1 .

Definición 1.6.2 : La bornología  $\mathcal{B}$  construida en el

Teorema 1.6.2 (i) (resp.(ii)) se llama

la bornología final (resp. la bornología lineal final; resp. la bornología convexa final) sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$ .

Observación: Una aplicación  $u : X \rightarrow Y$  de  $X$  provisto de la bornología final sobre un conjunto bornológico

$Y$  es acotada si y sólo si para todo  $i \in I$ ,  $u \circ u_i$  es acotada.

En efecto: si  $u$  es acotada, entonces es claro que  $u \circ u_i$  es acotada.

Recíprocamente, supongamos que  $u \circ u_i$  es acotada y sea  $A \in \mathcal{B}$ , entonces existe  $B \in \bigcup_{i \in I} u_i(\mathcal{B}_i) : A \subseteq B$ .

$$\Leftrightarrow \exists i_0; B = u_{i_0}(B'); B' \in \mathcal{B}_{i_0} : A \subseteq u_{i_0}(B')$$

$$\Leftrightarrow u(A) \subseteq u(u_{i_0}(B)) = (u \circ u_{i_0})(B) \in \mathcal{B}$$

Luego  $u(A) \in \mathcal{B}$  y en consecuencia  $u$  es acotada.

### Casos Particulares de Bornología Final

1.- **Bornología Cuociente:** Sean  $(X, \mathcal{B})$  un conjunto bornológico y  $\psi : X \rightarrow Y$  una suryección de  $X$  sobre un conjunto  $Y$ . Llamaremos bornología imagen de  $\mathcal{B}$  por  $\psi$  a la bornología sobre  $Y$  final respecto a la aplicación  $\psi$ . Es decir, la bornología generada por  $\psi(\mathcal{B})$ .

Si  $(X, \mathcal{B})$  es un e.l.b. (resp. e.b.c.),  $Y$  un e.l. y  $\psi$  lineal, entonces la bornología imagen es lineal (resp. convexa).

Supongamos ahora que  $Y$  es un conjunto cuociente de  $X$  por una relación de equivalencia arbitraria,  $\psi$  designa entonces la suryección canónica de  $X$  sobre  $Y$ . Se dice entonces que  $Y$  provisto de la bornología imagen de  $\mathcal{B}$  por  $\psi$  es un cuociente bornológico de  $(X, \mathcal{B})$  y que  $\psi(\mathcal{B})$  es la bornología cuociente de  $\mathcal{B}$  para la relación de equivalencia considerada.

Si  $X$  es un e.l.b. (resp. e.b.c.)  $E$ ;  $F$  un sub-espacio lineal de  $E$  y  $Y = E/F$ , entonces la bornología imagen de  $\mathcal{B}$  es lineal (resp. convexa) pues la suryección canónica es lineal y aplicando el Teorema 1.6.2.

### 2.- Límites Inductivos Bornológicos

**Sistema Inductivo Bornológico:** Sea  $I$  un conjunto no vacío

de índices ordenados por la relación ( $\leq$ ) y filtrante a derecha. Sea  $(X_i, v_{ji})$  un sistema inductivo de conjuntos tal que para todo  $i \in I$ ,  $(X_i, \beta_i)$  sea un conjunto bornológico. Se dice que el sistema  $(X_i, v_{ji})$  es un sistema inductivo de conjuntos bornológicos si para  $i \leq j$ ; la aplicación  $v_{ji}: X_i \longrightarrow X_j$  es acotada.

Si los  $(X_i, \beta_i)$  son e.l.b. (resp. e.b.c.) y las aplicaciones  $v_{ji}$  lineales acotadas, entonces se dice que el sistema  $(X_i, v_{ji})$  es un sistema inductivo de e.l.b. (resp. e.b.c.).

Bornología Límite Inductivo: Sean  $(X_i, v_{ji})_{i \leq j}$  un sistema inductivo de conjuntos bornológicos,  $X$  el límite inductivo de dicho sistema y para todo  $i \in I$   $v_i: X_i \longrightarrow X$  la aplicación canónica. Llamaremos bornología límite inductivo sobre  $X$  de las bornologías  $\beta_i$ , a la bornología final sobre  $X$  respecto a las aplicaciones  $v_i$ .

Si  $(X_i, v_{ji})$  es un sistema de e.l.b. (resp. de e.b.c.); la bornología límite inductivo es entonces necesariamente una bornología lineal (resp. convexa) (Teorema 1.6.2.).

Se dice que el conjunto  $X$  provisto de la bornología límite inductivo es " el límite inductivo bornológico " del sistema inductivo bornológico  $(X_i, v_{ji})$  o simplemente " el límite inductivo bornológico de los  $X_i$  y anotamos:

$$X = \varinjlim_{i \in I} (X_i, v_{ji})$$

3.- Sumas Directas Bornológicas: Sean  $I$  un conjunto no vacío de índices y  $(E_i)_{i \in I}$  una familia de e.l.b.,  $E$  el e.l. suma directa de los  $E_i$  ( $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ) y para cada  $i \in I$ ,  $\beta_i$  la bornología de  $E_i$ ,  $v_i : E_i \rightarrow E$  la inyección canónica de  $E_i$  en  $E$ , es decir, para todo  $x \in E_i$

$$v_i(x) = (x_k)_{k \in I}, \text{ donde } x_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ x & \text{si } k = i \end{cases}$$

Llamaremos bornología suma directa de las bornologías  $\beta_i$  a la bornología lineal sobre  $E$  final respecto a las aplicaciones  $v_i$ . Es decir, la bornología generada por  $\bigcup_{i \in I} v_i(\beta_i)$

Anotamos  $\beta_{\oplus}$  la bornología suma directa de los  $E_i$

Se dice que  $E$  provisto de la bornología suma directa es la suma directa bornológica de los  $E_i$ .

Proposición 1.6.3 : Sean  $(E_i, \beta_i)_{i \in I}$  una familia de espacios lineales bornológicos,  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  el

espacio lineal suma directa de los  $E_i$ . Para todo  $i \in I$  sea  $v_i : E_i \rightarrow E$  la inyección canónica,  $\beta_i^\circ$  base de  $\beta_i$  formada de acotados equilibrados. Entonces :

$$\beta_\circ = \left\{ \bigoplus_{i \in I} B_i / \emptyset \neq J \subset I; J \text{ finito}, B_i \in \beta_i^\circ \right\} \text{ es base de la}$$

bornología suma directa de los  $E_i$ .

Demostración.:

i)  $\beta_\circ$  es un recubrimiento de  $E$ . En efecto :

$$z = (x_i)_{i \in I} \in E \Leftrightarrow \exists \emptyset \neq J \subset I, J \text{ finito} : x_i = 0 \text{ si } i \notin J$$

$$\begin{aligned}
 & y \forall i \in J; \{x_i\} \in \beta_i \\
 \Rightarrow & \forall i \in J; e(\{x_i\}) \in \beta_i^\circ \\
 \Rightarrow & z \in \bigoplus_{i \in J} e(\{x_i\}) \in \beta_0
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } E = \bigcup_{A \in \beta_0} A$$

ii) Sean  $A$  y  $C \in \beta_0$ , entonces existen  $J, J' \subset I$  no vacíos y finitos tales que  $A = \bigoplus_{i \in J} B_i$  y  $C = \bigoplus_{i \in J'} B'_i$ , con  $B_i, B'_i \in \beta_i^\circ$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } A + C &= \{z = (x_i) + (y_i) / (x_i) \in \bigoplus_{i \in J} B_i; (y_i) \in \bigoplus_{i \in J'} B'_i\} \\
 &= \left\{ z = (x_i + y_i) / \begin{array}{l} x_i \in B_i \text{ si } i \in J; x_i = 0 \text{ si } i \notin J \\ y_i \in B'_i \text{ si } i \in J'; y_i = 0 \text{ si } i \notin J' \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ z = (x_i + y_i) / x_i + y_i \in B_i + B'_i \text{ si } i \in J \cup J'; x_i + y_i = 0 \text{ si } i \notin J \cup J' \right\} \\
 &= \bigoplus_{i \in J \cup J'} (B_i + B'_i), \text{ con } B_i + B'_i \in \beta_i^\circ
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A + C \in \beta_0$

iii) Sean  $A = \bigoplus_{i \in J} B_i \in \beta_0$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda A &= \left\{ \lambda(x_i) / (x_i) \in A \right\} = \left\{ (\lambda x_i) / \begin{array}{l} \lambda x_i = 0 \text{ si } i \notin J \\ \lambda x_i \in B_i \text{ si } i \in J \end{array} \right\} \\
 &= \bigoplus_{i \in J} \lambda B_i \in \beta_0 \quad (\text{pues } \lambda B_i \in \beta_i^\circ)
 \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos probado que  $\beta_0$  es base de una bornología lineal  $\beta'$  sobre  $E$ .

Observemos que además todo elemento  $A$  de  $\beta_0$  es equilibrado. En efecto: Sea  $\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1$ , entonces

$$\lambda A = \bigoplus_{i \in J} \lambda B_i \subseteq \bigoplus_{i \in J} B_i = A$$

Mostremos ahora que  $\beta' = \beta_\oplus$

a)  $\forall i \in I; v_i : E_i \longrightarrow E$  es  $\beta_i - \beta'$  acotada, en efecto :

$$B_i \in \beta_i^\circ \Leftrightarrow v_i(B_i) = \bigoplus_{i \in \{i\}} B_i \in \beta_0$$

b)  $\beta_\oplus \subseteq \beta'$ , en efecto :  $\beta_\oplus$  por definición de bornología final es la más fina que hace acotadas las inyecciones canónicas  $v_i$ .

c)  $\beta' \subseteq \beta_\oplus$ , en efecto :  $\bigoplus_{i \in J} B_i \in \beta_0$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, B_i = v_i(B_i) \in \bigcup_{i \in I} v_i(\beta_i) \subseteq \beta_\oplus$$

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{i \in J} B_i = \sum_{i \in J} v_i(B_i) \in \beta_\oplus$$

$$\Leftrightarrow \beta_0 \subseteq \beta_\oplus \Leftrightarrow \beta' \subseteq \beta_\oplus$$

Por lo tanto  $\beta' = \beta_\oplus$

Proposición 1.6.3 : Sean  $(E_1, \beta_1)$  y  $(E_2, \beta_2)$  dos e.l.b., entonces la aplicación

$u : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \oplus E_2 : (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$  es un isomorfismo bornológico.

Demostración : Claramente  $u$  es lineal y biyectiva, además si

$\beta_1^\circ$  y  $\beta_2^\circ$  son bases de acotados equilibrados

de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  resp., siendo  $\beta_0 = \{B_1 \oplus B_2 / B_1 \in \beta_1^\circ \wedge B_2 \in \beta_2^\circ\}$

base de la bornología suma directa  $\beta_\oplus$  y

$\beta' = \{B_1 \times B_2 / B_1 \in \beta_1^\circ \wedge B_2 \in \beta_2^\circ\}$  base de la bornología producto  $\beta_\Pi$  se tiene que :

$$\forall B_1 \times B_2 \in \beta' : u(B_1 \times B_2) = B_1 + B_2 = B_1 \oplus B_2 \in \beta_0 \text{ y}$$

$$\forall B_1 \oplus B_2 \in \beta_0 : u^{-1}(B_1 \oplus B_2) = B_1 \times B_2 \in \beta'$$

Por lo tanto,  $u$  es un isomorfismo bornológica.

Relación entre la bornología suma directa y la bornología producto.

Sean  $(E_i)_{i \in I}$  una familia de e.l.b. y  $E = \prod_{i \in I} E_i$  el espacio producto bornológico. Sea  $F = \bigoplus_{i \in I} E_i$  la suma directa bornológica de los  $E_i$ . El espacio lineal  $F$  es un sub-espacio de  $E$ .

Sobre  $F$  la bornología suma directa es siempre más fina que la bornología inducida por  $E$ . En efecto :

$$\bigoplus_{i \in J} B_i \in \mathcal{B}_{\oplus}^{\circ} \quad (\mathcal{B}_{\oplus}^{\circ} \text{ base de } \mathcal{B}_{\oplus})$$

$$\Rightarrow \bigoplus_{i \in J} B_i = \prod_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}_{\Pi}^{\circ} \quad (\mathcal{B}_{\Pi}^{\circ} \text{ base de } \mathcal{B}_{\Pi})$$

Luego como  $\bigoplus_{i \in J} B_i \subseteq F$  resulta que  $\bigoplus_{i \in J} B_i \in \mathcal{B}_F$

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_{\oplus} \subseteq \mathcal{B}_F$ .

Noción de suplementos bornológicos.

Sea  $E$  un e.l.b.;  $M$  y  $N$  dos subespacios lineales de  $E$  tales que  $E = M \oplus N$  (suma directa algebraica de  $M$  y  $N$ ).  $M$  y  $N$  con la bornología inducida son e.l.b.. Se dice que  $M$  y  $N$  son suplementos bornológicos sobre  $E$  si  $E$  es la suma directa bornológica de los e.l.b.  $M$  y  $N$ . Para ésto es suficiente que una de las dos proyecciones  $p_M : E \rightarrow M$  o  $p_N : E \rightarrow N$  sea acotada. Entonces las dos proyecciones son acotadas; en efecto : si  $E$  es la suma directa bornológica de  $M$  y  $N$ , como una base de la bornología de  $E$  está formada por conjuntos de la forma  $A \oplus B$ , con  $A$  acotado de  $M$  y  $B$  acotado de  $N$ , resulta que

$p_M$  y  $p_N$  son acotadas. Recíprocamente si una de las proyecciones es acotada, por ejemplo  $p_M$ , entonces  $p_N = I - p_M$  donde  $I$  es la identidad de  $E$ , luego  $p_N$  es también acotada.

Sea entonces  $C$  un acotado de  $E$ ;  $p_N(C)$  y  $p_M(C)$  son acotados respectivamente en  $N$  y  $M$ , luego  $C = p_N(C) \oplus p_M(C)$  es un acotado en la bornología suma directa y en consecuencia la bornología de  $E$  es más fina que la bornología suma directa.

Además es evidente que la bornología suma directa es más fina que la bornología de  $E$ , puesto que la suma de dos acotados de  $E$  es un acotado de  $E$ .

Por lo tanto, las dos bornologías son idénticas.

## 7. ESPACIOS LINEALES BORNOLÓGICOS SEPARADOS.

Definición 1.7.1 : Un e.l.b.  $(E, \beta)$  se dice separado (o que la bornología  $\beta$  es separada) si el único subespacio acotado de  $E$  es el trivial " $\{0\}$ ".

Proposición 1.7.1 : Sean  $I$  un conjunto de índice no vacío,  $(X_i, \beta_i)_{i \in I}$  una familia de e.l.b. separados,  $X$  un e.l. y para cada  $i \in I$ ,  $u_i : X \rightarrow X_i$  una aplicación lineal. Entonces la bornología inicial de  $X$  respecto a las aplicaciones  $u_i$  es separada si y sólo si para cada  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ ;  $\exists i \in I : u_i(x) \neq 0$ .

Demostración : Supongamos que la bornología inicial respecto a las aplicaciones  $u_i$  es separada y sea  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ , entonces  $Kx$  no es acotada sobre  $X$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I : u_i(Kx) = K u_i(x) \notin \beta_i$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I : u_i(x) \neq 0$$

Recíprocamente, supongamos que para cada  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ , existe  $i \in I$  :  $u_i(x) \neq 0$  y sea  $A$  un subespacio lineal acotado de  $X$ . Luego para todo  $i \in I$ ;  $u_i(A)$  es un subespacio lineal acotado de  $X_i$  y en consecuencia para todo  $i \in I$ ;  $u_i(A) = 0$ , luego  $A = \{0\}$  (por Hip.), es decir,  $X$  es separado.

Corolario 1.7.1' :

- a) Todo producto de espacios lineales bornológicos separados es separado.
- b) Todo subespacio bornológico de un e.l.b. separado es separado.
- c) Toda intersección de bornologías lineales separadas es separada.
- d) Todo límite proyectivo de espacios lineales bornológicos separados es separado.

Proposición 1.7.2 : Sea  $E = \varinjlim (E_i, v_{ji})$  un límite inductivo bornológico de e.l.b. separados. Si las aplicaciones  $v_{ji}$  son inyectivas, entonces  $E$  es separado.

Demostración: Supongamos que las aplicaciones  $v_{ji}$  son lineales e inyectivas, luego para cada  $i$  en  $I$ ,  $v_i$  es lineal e inyectiva.

Para cada  $i \in I$  sea  $O_i$  el cero de  $E_i$ , luego para cada  $i \in I$ , el único subespacio acotado de  $E_i$  es  $\{O_i\}$  y siendo  $v_i$  lineal e inyectiva resulta que para cada  $i \in I$ ;  $v_i(\{O_i\}) = \{O_E\}$  con  $\{O_E\}$  elemento de  $\mathcal{B}$ , es decir, el único subespacio acotado de  $E$  es  $\{O_E\}$ ; por consiguiente  $E$  es separado.

## B. ESTRUCTURA DE LOS ESPACIOS BORNOLÓGICOS CONVEXOS

### COMPARACION CON LAS ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS.

Proposición 1.8.1 : Todo e.b.c.  $E$  es límite inductivo bornológico de espacios semi-normados, y si  $E$  es separado él es límite inductivo de espacios normados.

Demostración: Sean  $(\mathcal{E}, \beta)$  un e.b.c. y  $\mathcal{A} = \{B \in \beta / B \text{ disco}\}$ .

Es claro que  $(\mathcal{A}, \subseteq)$  es un conjunto dirigido.

Además para  $A, B \in \mathcal{A} : A \subseteq B$  se tiene que  $E_A \subseteq E_B$ .

Sea  $i_{BA} : E_A \rightarrow E_B$  la inyección canónica, entonces :

a) Cada  $i_{BA}$  es acotada. En efecto;

$$C \text{ acotado en } E_A \Leftrightarrow \sup_{x \in C} \mathcal{J}_A(x) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in C} \mathcal{J}_B(x) < \infty \text{ (pues } \mathcal{J}_B \leq \mathcal{J}_A \text{)}$$

$$\Leftrightarrow C \text{ es acotado en } E_B, \text{ es decir, } i_{BA}(C)$$

es acotado en  $E_B$  y en consecuencia  $i_{BA}$  es acotada.

b)  $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = E$ . En efecto;  $x \in E \Leftrightarrow \{x\} \in \beta$   
 $\Leftrightarrow B = \bigcap (\{x\}) \in \beta$   
 $\Leftrightarrow x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$

Además si  $A \subseteq B \subseteq D$ , entonces  $i_{DA} = i_{DB} \circ i_{BA}$  y para

cada  $A \in \mathcal{A} ; i_{AA} : E_A \rightarrow E_A$  es la identidad.

luego  $(E_A, i_{BA})_{A \subseteq B}$  es un sistema inductivo de e.b.c...

Probaremos ahora que  $(E, \beta)$  es el límite inductivo correspondiente a dicho sistema.

Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , sea  $i_A (= i_{AA}) : E_A \rightarrow E$  la identidad

entonces  $E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} E_A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} i_A(E_A)$ .

Ahora  $A \subseteq B : \dot{L}_A = \dot{L}_B \circ \dot{L}_{BA}$ ; además si  $\{\lambda A / A \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$  es una base de la bornología de  $V. N.$  de  $E_A$  y  $\mathcal{B}_0$  es la bornología límite inductivo, entonces ella está generada por  $\{\lambda A / A \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}\}$

Luego  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ .

En resumen  $(E, \mathcal{B})$  es el límite inductivo bornológico del sistema inductivo bornológico  $(E_A, \dot{L}_{BA})_{A \subseteq B}$ , es decir,

$$(E, \mathcal{B}) = \lim_{\rightarrow} (E_A, \dot{L}_{BA})$$

Es claro que cada  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es semi-normado. Sin embargo si  $(E, \mathcal{B})$  es separado; los  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  son normados pues para cada  $A \in \mathcal{A}$ ;  $\text{Ker } \mathcal{G}_A = \{x \in E / \mathcal{G}_A(x) = 0\}$  es un subespacio lineal acotado de  $E$  y  $\text{Ker } \mathcal{G}_A \subseteq A \in \mathcal{B}$ ; luego siendo  $(E, \mathcal{B})$  separado resulta que  $\text{Ker } \mathcal{G}_A = \{0\}$ , es decir,  $\mathcal{G}_A(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ .

Corolario 1.8.1' : Todo e.b.c. a base numerable es límite inductivo de una sucesión de espacio semi-normados, y si  $E$  es separado él es límite inductivo de una sucesión de espacios normados.

Demostración: Basta observar que  $\mathcal{B}$  admite una base contable formada por discos de  $E$ .

CAPITULO II

CONVERGENCIA BORNOLÓGICA

## 1. SUCCESIONES M-CONVERGENTES

Definición 2.1.1 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $(x_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de  $E$ . Se dice que  $(x_n)$  converge bornológicamente al 0 de  $E$ , si existe un  $B \in \beta$  (equilibrada) y una sucesión  $(\lambda_n)$  de escalares tendiendo a 0 tal que  $x_n \in \lambda_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Se anota  $x_n \xrightarrow{M} 0$  en honor a G. W. Mackey quien fué el primero en estudiar sistemáticamente esta noción de convergencia en el año de 1942.

Se dice que  $(x_n)$  converge bornológicamente a un punto  $x$  de  $E$ , si  $x_n - x \xrightarrow{M} 0$  y se anota  $x_n \xrightarrow{M} x$ .

Proposición 2.1.1 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $(x_n)$  una sucesión en  $E$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $(x_n)$  converge bornológicamente al 0 de  $E$ .
- ii)  $\exists B \in \beta$  (equil.) y  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ ;  $\alpha_n \downarrow 0$  :  $x_n \in \alpha_n B$ ,  $\forall n \geq 1$
- ii)  $\exists B \in \beta$  (quil.) tal que  $\forall \varepsilon > 0$ ;  $N(\varepsilon) \geq 1$ :  $x_n \in \varepsilon B$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$

Si  $\beta$  es convexa, las afirmaciones anteriores son equivalentes a la afirmación siguiente:

- iv)  $\exists B \in \beta$  (disco) tal que  $(x_n) \subseteq E_B$  ( $E_B$  es el espacio generado por  $B$ ) y  $\mathcal{G}_B(x_n) \rightarrow 0$  ( $\mathcal{G}_B$  es la jauge de  $B$ ).

Demostración:

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Por (i).  $\exists B \in \beta$  (equil.) y  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{K}$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$  :  $x_n \in \lambda_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ . Como  $B \in \beta$ , entonces  $e(B) \in \beta$  (equil.) y  $B \subseteq e(B)$ .

Luego  $x_n \in \lambda_n B \subseteq \lambda_n \alpha(B)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $d_n = \|\lambda_n\|$ , entonces es claro que  $(d_n \subseteq \mathbb{R}^+$  y  $d_n \longrightarrow 0$

Además,  $x_n \in d_n e(B)$ ,  $\forall n \geq 1$ . En efecto :

si  $d_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n B = \{0\} \Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow x_n \in d_n e(B)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

si  $d_n \neq 0$ , como  $\|\lambda_n\| \leq d_n$  se tiene  $\lambda_n e(B) \subseteq d_n e(B)$  de donde  $x_n \in d_n e(B)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Consideremos ahora la siguiente sucesión :

$$\alpha_1 = \sup \{d_n / n \geq 1\}$$

$$\alpha_2 = \sup(\{d_n / n \geq 1\} - \alpha_1)$$

$$\alpha_n = \sup(\{d_n / n \geq 1\} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\})$$

Claramente  $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha_n \neq 0$  y como  $d_n \leq \alpha_n$ ,  $\forall n \geq 1$  se tiene que  $x_n \in \alpha_n e(B)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Por lo tanto, se tiene (ii).

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Por (ii),  $\exists B \in \mathcal{B}$  (equil.) y  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha_n \neq 0$  :  $x_n \in \alpha_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $\alpha_n \neq 0$ ,  $\exists N(\varepsilon) \geq 1$  :  $\alpha_n \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$

De donde  $x_n \in \alpha_n B \subseteq \varepsilon B$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$

Luego,  $\exists B \in \mathcal{B}$  (equil.) tal que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon) \geq 1$  :  $x_n \in \varepsilon B$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ .

(iii)  $\Leftrightarrow$  (i)

Por (iii),  $\exists B \in \mathcal{B}$  (equil.) tal que

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N(\varepsilon) \geq 1$  :  $x_n \in \varepsilon B$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ . Para cada  $n \geq 1$ , sea

$$\xi_n = \inf \{\varepsilon > 0 / x_n \in \varepsilon B\} \text{ y } \lambda_n = \xi_n + 1/n$$

Claramente  $(\lambda_n)$  es una sucesión de escalares tal que

$$\lambda_n \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad x_n \in \lambda_n B, \quad \forall n \geq 1.$$

Supongamos ahora que  $\mathcal{B}$  es convexa.

(iv)  $\Leftrightarrow$  (i), en efecto : por (iv),  $\exists B \in \mathcal{B}$  (disco) t.q.  
 $(x_n) \subseteq E_B$  y  $\mathcal{G}_B(x_n) \longrightarrow 0$

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $\lambda_n = \mathcal{G}_B(x_n) + 1/n$ ; claramente  $\lambda_n \longrightarrow 0$   
y además como  $\mathcal{G}_B(x_n) = \text{Inf} \{ \rho > 0 / x_n \in \rho B \}$ ,

$$\exists \rho > 0 : x_n \in \rho B \quad \text{y} \quad \rho < \mathcal{G}_B(x_n) + 1/n.$$

Luego  $x_n \in \rho B \subseteq (\mathcal{G}_B(x_n) + 1/n) B = \lambda_n B, \quad \forall n \geq 1$ .

(ii) (iv)

Por (ii),  $\exists B \in \mathcal{B}$  (equil.) y  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ ;  $\alpha_n \searrow 0$  t.q.  $x_n \in \alpha_n B$ ,

$\forall n \geq 1$ .

Ahora, como  $E_B = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$  se tiene que  $x_n \in \alpha_n B \subseteq E_B, \quad \forall n \geq 1$  y

además  $\mathcal{G}_B(x_n) = \text{Inf} \{ \rho > 0 / x_n \in \rho B \} \leq \alpha_n \longrightarrow 0$ .

Proposición 2.1.2 : Sean  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b.,  $(x_n); (y_n)$  sucesiones en  $E$ ;  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{K}$ ;  $x, y \in E$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

entonces :

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{M} x \\ y_n \xrightarrow{M} y \end{array} \right| \Leftrightarrow x_n + y_n \xrightarrow{M} x + y$$

$$2) \quad x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow -x_n \xrightarrow{M} -x$$

$$3) \quad \lambda_n \longrightarrow \lambda \Leftrightarrow \forall x \in E ; \lambda_n x \xrightarrow{M} \lambda x$$

$$4) \quad \left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{M} x \\ y_n \xrightarrow{M} y \end{array} \right| \Leftrightarrow x_n - y_n \xrightarrow{M} x - y$$

$$5) \quad x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}; \lambda x_n \xrightarrow{M} \lambda x$$

$$6) \quad \left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{M} x \\ \lambda_n \longrightarrow \lambda \end{array} \right| \Leftrightarrow \lambda_n x_n \xrightarrow{M} x$$

Demostración:

(1)

$$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \exists B^x \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } (\alpha_n^x) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n^x \searrow 0 : x_n - x \in \alpha_n^x B^x, \forall n \geq 1$$

$$y_n \xrightarrow{M} y \Leftrightarrow \exists B^y \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } (\alpha_n^y) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n^y \searrow 0 : y_n - y \in \alpha_n^y B^y, \forall n \geq 1$$

Ahora,  $B = B^x + B^y \in \mathcal{B}$  (equil.).

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $\alpha_n = \text{Máx}\{\alpha_n^x, \alpha_n^y\}$ ; es claro que  $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n \searrow 0$

$$\text{Además} \quad x_n - x \in \alpha_n^x B^x \subseteq \alpha_n B^x$$

$$y_n - y \in \alpha_n^y B^y \subseteq \alpha_n B^y$$

$$\text{Luego, } x_n + y_n - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y) \in \alpha_n (B^x + B^y) = \alpha_n B$$

$$\text{Por lo tanto, } x_n + y_n \xrightarrow{M} x + y$$

(2)

$$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } (\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n \searrow 0 : x_n - x \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } (\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n \searrow 0 : -x_n + x \in \alpha_n (-B), \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } (\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+; \alpha_n \searrow 0 : -x_n - (-x) \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -x_n \xrightarrow{M} -x$$

(3)

Supongamos que  $\lambda_n \longrightarrow \lambda$  y  $x \in E$ .

para cada  $n \geq 1$ , sea  $\alpha_n = \lambda_n - \lambda$ , claramente  $\alpha_n \rightarrow 0$ ;  $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{K}$

Sea  $B = e(\{x\}) \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}$  (equil.), además  $\lambda_n x - \lambda x = (\lambda_n - \lambda)x = \alpha_n x \in \alpha_n B$

Por lo tanto,  $\lambda_n x \xrightarrow{M} \lambda x$ .

(4)

Supongamos que  $x_n \xrightarrow{M} x$  y  $y_n \xrightarrow{M} y$

$$\Leftrightarrow -y_n \xrightarrow{M} -y$$

$$\Leftrightarrow x_n + (-y_n) \xrightarrow{M} x + (-y)$$

$$\Leftrightarrow x_n - y_n \xrightarrow{M} x - y$$

(5)

Supongamos que  $x_n \xrightarrow{M} x$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ y } (\alpha_n) \subseteq \mathbb{K}; \alpha_n \rightarrow 0: x_n - x \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$$

Sea  $\delta_n = \lambda \alpha_n$ , es claro que  $(\delta_n) \subseteq \mathbb{K}$  y  $\delta_n \rightarrow 0$

además  $\lambda x_n - \lambda x = \lambda(x_n - x) \in \delta_n B, \forall n \geq 1$

Por lo tanto,  $\lambda x_n \xrightarrow{M} \lambda x$

(6)

$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}$  (equil.) y  $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{K}; \alpha_n \rightarrow 0: x_n - x \in \alpha_n B_1, \forall n \geq 1$ .

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $\delta_n = \lambda \alpha_n$ . Claramente  $(\delta_n) \subseteq \mathbb{K}; \delta_n \rightarrow 0$

además  $\lambda_n(x_n - x) \in \lambda \alpha_n B_1 = \delta_n B_1, \forall n \geq 1$ .

Por otro lado, puesto que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  y  $x \in E$  se tiene que

$\lambda_n x \xrightarrow{M} \lambda x$ , luego  $\exists B_2 \in \mathcal{B}$  (equil.), y  $(\alpha_n') \subset \mathbb{K}$ ;  $\alpha_n' \rightarrow 0$

tal que  $\lambda_n x - \lambda x = (\lambda_n - \lambda)x \in \alpha_n' B_2$ ,  $\forall n \geq 1$  (\*)

para cada  $n \geq 1$ , sea  $\varepsilon_n = \text{Máx} \{ |\delta_n|, |\alpha_n'| \}$ .

Claramente  $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{K}$ ;  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , además

$\lambda_n(x_n - x) \in \delta_n B_1 \subseteq \varepsilon_n B_1$ ,  $\forall n \geq 1$  por (\*) y

$(\lambda_n - \lambda)x \in \alpha_n' B_2 \subseteq \varepsilon_n B_2$ ,  $\forall n \geq 1$  por (\*)

Sea  $B = B_1 + B_2 \in \mathcal{B}$  (equil.),

luego  $\lambda_n x_n - \lambda x = \lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x$

$$= \lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x \in \varepsilon_n B, \forall n \geq 1$$

Por lo tanto,  $\lambda_n x_n \xrightarrow{M} \lambda x$ .

Proposición 2.1.3 : Sean  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b.,  $(x_n) \subseteq E$ , entonces

$$x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow (x_n) \in \mathcal{B}.$$

Demostración :  $x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}$  (equil.) y  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ ,  $0 < \lambda_n \leq 1$ ,  $\lambda_n \searrow 0$

tal que  $x_n \in \lambda_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ .

$$\Leftrightarrow x_n \in \lambda_n B \subseteq B, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x_n) \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow (x_n) \in \mathcal{B}.$$

Observación : El recíproco de la Proposición 2.1.3 es falso.

En efecto: En el e.l.b.  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  la sucesión  $(x_n = 1)$  es acotada puesto que existe  $2 > 0 : (x_n) \subseteq B \underset{\mathbb{R}}{[0, 2]}$ , sin embargo no converge a 0 bornológicamente, pues si así fuera existiría  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  (equil.) y  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda_n \searrow 0 : x_n \in \lambda_n B, \forall n \geq 1$ ; lo que es imposible puesto que B es un intervalo centrado en el origen.

Proposición 2.1.4 : Sean  $(E, \mathcal{B}), (F, \mathcal{B}')$  dos e.l.b.,  $f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal acotada y  $(x_n)$  una sucesión en E tal que  $x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{M} 0$ .

Demostración :

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{M} 0 &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} \text{ (equil.) y } 0 < \lambda_n \searrow 0 : x_n \in \lambda_n B, \forall n \geq 1 \\ &\Leftrightarrow f(x_n) \in \lambda_n f(B), \forall n \geq 1, \text{ con } f(B) \in \mathcal{B}' \text{ (equil.)} \\ &\Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{M} 0 \text{ en } F. \end{aligned}$$

## 2. FILTROS M-CONVERGENTES

Definición 2.2.1 : Sea  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b., F un filtro sobre E,

Se dice que F converge bornológicamente a 0 si existe  $B \in \mathcal{B} : \{\lambda B / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} \subseteq F$  y anotamos  $F \xrightarrow{M} 0$ .

Si  $F_0$  es base de filtro sobre E, entonces

$F_0 \xrightarrow{M} 0$  si y sólo si  $\widetilde{F}_0 \xrightarrow{M} 0$ , donde  $\widetilde{F}_0$  es el filtro generado por  $F_0$ .

Se dice que F converge bornológicamente a un punto x de E si la base de filtro  $F - x$  converge bornológicamente a 0. Es decir,  $F \xrightarrow{M} x \in E$  si  $F - x \xrightarrow{M} 0$  si  $\widetilde{F - x} \xrightarrow{M} 0$ .

Proposición 2.2.1 : Sea  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b.,  $A \in \mathcal{B}$  (equil.), entonces la familia  $H_A = \{\lambda A / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\}$  es

una base de filtro sobre  $E$  bornológicamente convergente a  $0$ .

Demostración :  $H_A \neq \emptyset$  puesto que  $A \in H_A$ , además  $\emptyset \notin H_A$  puesto que  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0; \lambda A \neq \emptyset$ .

Sean  $\lambda_1 A, \lambda_2 A \in H_A$  y  $\alpha = \text{Min} \{ |\lambda_1|, |\lambda_2| \}$

Sea  $\delta \in \mathbb{K}, \delta \neq 0$  tal que  $|\delta| = \alpha \Leftrightarrow |\delta/\lambda_1| = \frac{|\delta|}{|\lambda_1|} = \frac{\alpha}{|\lambda_1|} \leq 1$ ,

entonces  $\delta/\lambda_1 A \subseteq A \Leftrightarrow \delta A \subseteq \lambda_1 A$ , análogamente  $\delta A \subseteq \lambda_2 A$ , luego  $\delta A \subseteq \lambda_1 A \cap \lambda_2 A$ .

Proposición 2.2.2 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $(x_n)$  una sucesión en  $E$  y  $F$  el filtro de Frechet asociado a  $(x_n)$ . Entonces :  $x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow F \xrightarrow{M} 0$

Demostración : Supongamos que  $x_n \xrightarrow{M} 0$  y sea  $F = \mathcal{F}_0$  donde

$$F_0 = \{ A_n / n \in \mathbb{N} \}; A_n = \{ x_m / m \leq n \}$$

Sea  $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ , entonces como  $x_n \xrightarrow{M} 0$  existe  $B \in \beta$  (equil.)

$0 < \lambda_n \downarrow 0 : x_n \in \lambda_n B, \forall n \geq 1$ .

Ahora,  $0 < \lambda_n \downarrow 0 \Leftrightarrow [\exists n_0 \geq 1 : n \geq n_0 \Leftrightarrow \lambda_n \leq |\lambda|]$ ; luego

$\forall n \geq n_0, |\lambda_n/\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda_n B \subseteq \lambda B$

$$\Leftrightarrow x_n \in \lambda B, \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow A_{n_0} \subseteq \lambda B \Leftrightarrow \lambda B \in F$$

Es decir  $\{ \lambda B / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \} \subseteq F$  y en consecuencia  $F \xrightarrow{M} 0$ .

Recíprocamente,  $F \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow \exists B' \in \beta : \{ \lambda B' / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \} \subseteq F$ , entonces existe  $B = e(B') \in \beta$  (equil.) :  $\{ \lambda B / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \} \subseteq F$ .

Sea  $\xi > 0$ , entonces  $\xi B \in \{ \lambda B / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 \} \subseteq F$

$$\exists n_0 \geq 1 : A_{n_0} \subseteq \xi B$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists n_0 \geq 1 : x_n \in \epsilon B, \forall n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} 0 \end{aligned}$$

Proposición 2.2.3 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $F$  un filtro sobre  $E$  tal que  $F \xrightarrow{M} 0$ , entonces existe  $B$  tal que  $B \in F$  (es decir,  $\beta \cap F \neq \emptyset$ ).

La demostración es inmediata de la Definición 2.2.1.

Definición 2.2.2 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $A$  una parte de  $E$ .

Se dice que  $A$  es bornívoro si para todo  $B \in \beta$ ,  $A$  absorbe  $B$ . Es decir, si  $\forall B \in \beta, \exists \alpha > 0 : B \subseteq \lambda A, \forall \lambda / \geq \alpha$

Proposición 2.2.4 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y

$G = \{A \subseteq E / A \text{ es bornívoro}\}$ , entonces  $G$  es un filtro sobre  $E$ .

Demostración : Claramente  $G$  es no vacío y  $\emptyset \notin G$ . Además si

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \in G \text{ y } B \in \beta, \text{ entonces existen} \\ \alpha_1, \alpha_2 > 0 : B \subseteq \lambda A_1, \forall \lambda / \geq \alpha_1 \wedge B \subseteq \lambda A_2, \forall \lambda / \geq \alpha_2 \\ \Leftrightarrow B \subseteq \lambda (A_1 \cap A_2), \forall \lambda / \geq \max \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 \in G \end{aligned}$$

También, si  $A \in G, C \subseteq E : A \subseteq C$  y  $B \in \beta$ , entonces  $\exists \alpha > 0 : B \subseteq \lambda A \subseteq \lambda C, \forall \lambda / \geq \alpha \Leftrightarrow C \in G$ .

Por lo tanto,  $G$  es un filtro sobre  $E$  y se denomina el filtro de los bornívoros de  $E$ .

Proposición 2.2.5 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $G$  el filtro de los bornívoros de  $E$ , entonces :

$$G \xrightarrow{M} 0 \text{ si y sólo si } \beta \cap G \neq \emptyset.$$

demostración : Supongamos que  $G \xrightarrow{M} 0$ , entonces  $\beta \cap G \neq \emptyset$  en virtud de la Proposición 2.2.3.

Recíprocamente :  $B \in \beta \cap G \Leftrightarrow B \in \beta \wedge B \in G$

Sean  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$  y  $B' \in \beta$ , entonces  $1/\lambda B' \in \beta$

$$\Leftrightarrow B \text{ absorbe } 1/\lambda B'$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : 1/\lambda B' \subseteq \alpha B \Leftrightarrow B' \subseteq \alpha(\lambda B)$$

$$\Leftrightarrow \lambda B \in G \Leftrightarrow G \xrightarrow{M} 0.$$

Proposición 2.2.6 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,

$$\mathcal{G}_F = \{F / F \text{ filtro sobre } E : F \xrightarrow{b} 0\}$$

y  $G$  el filtro de los bornívoros de  $E$ , entonces

$$G = \bigcap \{F / F \in \mathcal{G}_F\}.$$

Demostración : Sea  $A \in G$  y  $F \in \mathcal{G}_F$

$$F \in \mathcal{G}_F \Leftrightarrow \exists B \in \beta (\text{equil.}) : (\lambda B / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}) \subseteq F$$

$A \in G \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : \alpha B \subseteq A$ . Luego  $A \in F$  y en consecuencia

$$G \subseteq \bigcap \{F / F \in \mathcal{G}_F\}.$$

Recíprocamente,  $A \in \bigcap \{F / F \in \mathcal{G}_F\}$  y  $B \in \beta$  (equil.)

$$\Leftrightarrow A \in \tilde{H}_B \text{ puesto que } \tilde{H}_B \xrightarrow{M} 0 \text{ (Proposición 2.2.1)}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{K}; \lambda_0 \neq 0 : \lambda_0 B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \lambda B \subseteq A, \forall |\lambda| \leq \lambda_0 \Leftrightarrow A \text{ absorbe } B \Leftrightarrow A \in G \text{ y en consecuencia}$$

$$\bigcap \{F / F \in \mathcal{G}_F\} \subseteq G.$$

Por lo tanto  $G = \bigcap \{F / F \in \mathcal{G}_F\}$ .

Proposición 2.2.7 : Sean  $(A, \beta)$  un e.l.b.,  $A \subseteq E$ ,  $x \in E$ .

Entonces;  $x$  es límite bornológico de un filtro de  $A$  si y sólo si  $x$  es límite bornológico de una sucesión de puntos de  $A$ .

Demostración : Sea  $F$  un filtro sobre  $A$  tal que  $F \xrightarrow{M} x$ , entonces  $F - x \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow \exists B \in \beta(\text{equil.})$  tal que  $\{\lambda B / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \widetilde{F - x}$ .

Ahora  $\{\lambda B / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq P(A) - x = P(A - x)$

Para cada  $n \geq 1$ , sea  $\lambda_n = 1/n$ , entonces  $\lambda_n B \subseteq A - x$ .

Sea  $y_n \in \lambda_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ , entonces  $(y_n) \subseteq A - x$ . Luego existe  $B \in \beta(\text{equil.})$ ;  $0 < \lambda_n \searrow 0 : y_n \in \lambda_n B$ ,  $\forall n \geq 1$ , es decir,  $y_n \xrightarrow{M} 0$ , entonces  $y_n + x \xrightarrow{M} x$  con  $y_n + x \in A - x + x = A$  y en consecuencia existe la sucesión  $(x_n = y_n + x)$  en  $A : x_n \xrightarrow{M} x$ .

Recíprocamente, sean  $(x_n) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x$  y  $F_0 = \{F_n / n \geq 1\}$ , donde  $F_n = \{x_m / m \geq n\}$ .

$$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x_n - x \xrightarrow{M} 0$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta(\text{equil.}); 0 \leq \alpha_n \searrow 0 : x_n - x \in \alpha_n B, \forall n \geq 1.$$

Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$ , como  $0 \leq \alpha_n \searrow 0$ ;  $\exists n_0 \geq 1 : n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n \leq |\lambda|$

$$\Leftrightarrow [\exists n_0 \geq 1 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n - x \in \lambda B]$$

$$\Leftrightarrow \exists n_0 \geq 1 : F_{n_0} - x \subseteq \lambda B$$

$$\Leftrightarrow \lambda B \in \overline{\{F_n - x / n \geq 1\}} = \widetilde{F_0} - x$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{F_0} - x \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow F_0 \xrightarrow{M} x.$$

### 3. RELACION ENTRE CONVERGENCIA BORNOLÓGICA Y TOPOLÓGICA.

Sea  $(E, \mathcal{Z})$  un e.l.t., se dirá por abuso del lenguaje que una sucesión  $(x_n)$  de puntos de  $E$  converge bornológicamente a un punto  $x$  de  $E$ , si converge bornológicamente a  $x$  sobre el espacio  $E$  provisto de la bornología de Von Neumann .

Proposición 2.3.1 : Sean  $(E, \mathcal{Z})$  un e.l.t. y  $(x_n)$  una sucesión de puntos de  $E$  tal que  $x_n \xrightarrow{M} 0$ . Entonces  $x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} 0$ .

Demostración : Supongamos que  $x_n \xrightarrow{M} 0$ , entonces existe  $B \in \beta(\mathcal{Z})$  (equil.) :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \geq 1$  t.q.  $x_n \in \varepsilon B, \forall n \geq N(\varepsilon)$

Sea  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$ , entonces existe  $\alpha > 0 : B \subseteq \alpha V$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha' > 0 : \alpha' B \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow \exists N(\alpha') \geq 1 : x_n \in \alpha' B \subseteq V, \forall n \geq N(\alpha')$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} 0.$$

Observación : el recíproco de la Proposición 2.3.1 es falso.

En efecto : sea  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  y  $E = \mathbb{R}^I = \prod_{i \in I} \mathbb{R}^1$ , donde  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \forall i \in I$ .

$(E, \mathcal{Z})$  es un e.l.t. donde  $\mathcal{Z}$  es la topología producto y  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{Z}^1)_{i \in I}$  una familia de e.l.t. donde  $\mathcal{Z}^1 = \mathcal{Z}_{us}$  de  $\mathbb{R}$ .

Además es claro que  $(E, \mathcal{Z})$  es localmente convexo puesto que para todo  $i \in I, (\mathbb{R}^1, \mathcal{Z}^1)$  lo es.

También existe una biyección  $\psi : I \rightarrow J : i \mapsto \psi(i) = (\lambda_n^i)$  donde  $J = \{ \lambda = (\lambda_n) / \lambda_n > 0 \wedge \lambda_n \nearrow +\infty \}$

Definamos ahora  $x : \mathbb{N} \rightarrow E$

$$n \mapsto x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_n(i) = 1/\lambda_n^i$$

Mostraremos que la sucesión  $(x_n)$  converge topológicamente a 0 y no bornológicamente sobre  $E$ .

En efecto, sea  $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z})$ , entonces existe  $\emptyset \neq J \subseteq I$ , y  $\forall i \in J; W_i \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z}^1)$  tal que  $\prod_{i \in I} W_i \subseteq W$ , donde  $W_i = \mathbb{R}$  si  $i \in I \setminus J$ .

Por otro lado, como  $\forall i \in I ; \psi(i) = (\lambda_n^{(i)}) \in S$

$x_n^{(i)} = 1/\lambda_n^{(i)} \xrightarrow{\tau} 0$ , luego, si  $J = \{i_1, \dots, i_p\}$  y  $k = 1, \dots, p$ ;

existe  $N_k \geq 1$  tal que  $x_n^{(i_k)} = 1/\lambda_n^{(i_k)} \in W_{i_k}, \forall n \geq N_k$ .

Sea  $N = \max_{1 \leq k \leq p} \{N_k\}$ , entonces  $x_n^{(i_k)} \in W_{i_k}, \forall n \geq N, k = 1, \dots, p$

$\Rightarrow x_n^{(i)} \in W_i, \forall n \geq N, \forall i \in I$  (pues  $W_i = \mathbb{R}, \forall i \notin J$ )

$\Rightarrow x_n \in \prod_{i \in I} W_i \subset W, \forall n \geq N$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau} 0$  sobre  $E$ .

Supongamos ahora que  $x_n \xrightarrow{M} 0$  sobre  $E$ , entonces existe

$B \in \beta(\tau)(\text{disco}) : (x_n) \subseteq B$  y  $\int_B(x_n) \rightarrow 0$

$\Rightarrow \exists (A_i)_{i \in I} ; A_i \subseteq E_i = \mathbb{R}$  (disco),  $\forall i \in I$  tal que

$B \subseteq A = \prod_{i \in I} A_i$  (disco) :  $(x_n) \subseteq A$  y  $\int_A(x_n) \rightarrow 0$

$\Rightarrow \exists (\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+, \alpha_n \searrow 0$  tal que  $x_n \in \alpha_n A, \forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_n^{(i)} \in \alpha_n A_i, \forall n \geq 1, \forall i \in I$

$\Rightarrow 1/\lambda_n^{(i)} \in \alpha_n A_i, \forall n \geq 1, \forall i \in I$

$\Rightarrow 1 \in \lambda_n^{(i)} \alpha_n A_i, \forall n \geq 1, \forall i \in I$

$\Rightarrow 0 \leq \int_{A_i}(1) \leq \alpha_n \lambda_n^{(i)}, \forall n \geq 1, \forall i \in I$

$\Rightarrow 0 \leq \int_{A_i}(1) \leq \inf \{\alpha_n \lambda_n^{(i)}\} = (\inf \alpha_n) \lambda_1^{(i)} = 0. \lambda_1^{(i)} = 0$

$\Rightarrow \int_{A_i}(1) = 0 \Rightarrow 1 \in \rho_{A_i}, \forall f > 0, \forall i \in I \quad \longrightarrow \longleftarrow$

(pues  $\forall i \in I, A_i$  es un intervalo centrado en el origen).

Proposición 2.3.2 : Sean  $(E, \mathcal{T})$  un e.l.t. metrizable (l.c. o no),  $(x_n)$  una sucesión de puntos de  $E$ .

Entonces :  $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff x_n \xrightarrow{M} 0$ .

Demostración : Sea  $A = (x_n)_{n \geq 1}$  y supongamos que  $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ .

Sea  $(V_n)_{n \geq 1}$  una sucesión fundamental de creciente de vecindades equilibradas de  $0$ . Entonces :

(i) Existe  $B \in \beta(\mathcal{T})$  (equil.) :  $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : A \cap V_m \subseteq \varepsilon B$ .

En efecto;

$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0 \iff A = (x_n)$  es absorbida por toda vecindad de  $0$ .

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda_n > 0 : A \subseteq \lambda_n V_n \quad (1)$$

Sean  $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^+$ ;  $\alpha_n \rightarrow 0$  y  $\gamma_n = \lambda_n / \alpha_n$ ,  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n V_n$

Claramente  $B \in \beta(\mathcal{T})$  (equil.), además puesto que

$\gamma_n / \lambda_n = 1 / \alpha_n \rightarrow +\infty, \forall \varepsilon > 0; \exists l \in \mathbb{N} : \gamma_n / \lambda_n \geq 1/\varepsilon, \forall n \geq l$

$$\iff \lambda_n \leq \varepsilon \gamma_n, \forall n \geq l$$

(1)

$$\iff A \subseteq \varepsilon \gamma_n V_n, \forall n \geq l \quad (2)$$

Por otro lado,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varepsilon \gamma_n V_n$  es una vecindad de  $0$ , entonces

existe  $m \in \mathbb{N} : V_m \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \varepsilon \gamma_n V_n$

$$\iff \exists m \in \mathbb{N} : V_m \subseteq \varepsilon \gamma_n V_n, \forall n \geq 1 \quad (3)$$

Luego de (2) y (3) resulta que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$A \cap V_m \subseteq \varepsilon \gamma_n V_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , es decir, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$A \cap V_m \subseteq \varepsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n V_n = \varepsilon B.$$

Sea ahora  $\delta > 0$ , como  $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ ; existe  $N(\delta) \geq 1$  tal que

$$x_n \in V_m, \forall n \geq N(\varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in A \cap V_m \subseteq \varepsilon B, \forall n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow x_n \in \varepsilon B, \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Por lo tanto, existe  $B \in \beta(\tau)$  (equil.) :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \gg 1$  tal que  $x_n \in \varepsilon B, \forall n \geq N(\varepsilon)$ , es decir,  $x_n \xrightarrow{M} 0$ .

Proposición 2.3.3 : Sean  $(E, // //)$  un espacio de Banach y  $\beta_c$  su bornología compacta.

- 1) Si  $(x_n)$  es una sucesión en  $E$  tal que  $x_n \rightarrow 0$  en  $(E, // //)$ , entonces  $x_n \xrightarrow{M} 0$  en  $(E, \beta_c)$ .
- 2) Si  $\dim(E) = \infty$ , entonces  $\beta_c$  no es la bornología de V. N. de ninguna topología lineal sobre  $E$ .

Demostración :

- 1) Como  $x_n \rightarrow 0$  en  $(E, // //)$ , podemos escoger una sucesión  $(\alpha_n)$  tal que  $//x_n// \leq \alpha_n$  y  $\alpha_n \downarrow 0$ . Luego  $y_n = x_n / \sqrt{\alpha_n}$  es tal que  $//y_n// = //x_n// / \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{\alpha_n} //x_n// / \alpha_n \leq \sqrt{\alpha_n} \cdot 1 \rightarrow 0$

Luego  $y_n \rightarrow 0$  y en consecuencia  $A = \{y_n / n \geq 1\} \cup \{0\}$  es compacto en  $E$  y siendo  $(E, // //)$  Banach resulta que  $\overline{\Gamma(A)} = B$  es un disco compacto de  $E$ .

$$\text{Además } x_n = \sqrt{\alpha_n} \cdot x_n / \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{\alpha_n} y_n \in \sqrt{\alpha_n} A \subseteq \sqrt{\alpha_n} \overline{\Gamma(A)}$$

$$\Leftrightarrow \int_B(x_n) \leq \sqrt{\alpha_n}, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \int_B(x_n) \rightarrow 0$$

Por lo tanto  $x_n \xrightarrow{M} 0$  en  $(E, \beta_c)$

- 2) Supongamos que  $\beta_c$  es la bornología de Von Neumann de cierta topología lineal sobre  $E$ , es decir,  $\beta_c = \beta(\tau)$ .

Consideremos la bola unitaria  $B = B_{// //}[0, 1]$  de  $(E, // //)$ , entonces  $B \in \beta_c$ , en efecto; supongamos que  $B \notin \beta_c = \beta(\tau)$ , en-

tonces  $B \notin \beta(\tau) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(0, \tau)$  (equil.) :  $\forall n \geq 1, B \notin nV$ .

Luego, para cada  $n \geq 1, \exists b_n \in B : b_n/n \notin V$  (\*)

Ahora  $\|b_n/\sqrt{n}\| = \|b_n\|/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ , es decir,

$b_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$  en  $(E, \|\cdot\|)$ , entonces por (1);  $b_n/\sqrt{n} \xrightarrow{M} 0$  en  $(E, \beta_c)$

y en consecuencia  $(b_n/\sqrt{n}) \in \beta_c = \beta(\tau)$ , luego  $V$  absorbe  $(b_n/\sqrt{n})$

es decir, existe  $\alpha > 0 : b_n/\sqrt{n} \in \lambda V, \forall \lambda / \geq \alpha$

$$\Leftrightarrow b_n \in \sqrt{n}\lambda V, \forall \lambda / \geq \alpha$$

$$\Leftrightarrow b_n \in nV, \forall n \geq 1 : \sqrt{n} \geq \alpha \xrightarrow{\quad} \longleftarrow$$

(\*)

Por lo tanto,  $B \in \beta$  y luego  $\bar{B} = B$  compacto lo que implicaría que  $\dim(E) < \infty$  (contradice la Hip) y en consecuencia  $\beta_c$  no es la bornología de  $V$ . N. de ninguna topología lineal sobre  $E$ .

Usaremos ahora la convergencia bornológica para dar otras propiedades de los espacios lineales bornológicos separados.

Proposición 2.3.4 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b., entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- i)  $(E, \beta)$  es separado
- ii) Toda sucesión bornológicamente convergente sobre  $E$  tiene límite único.
- iii) Ninguna recta de  $E$  es acotada.

Demostración :

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Supongamos que  $(E, \beta)$  es separado y que existe una recta de  $E$  acotada. Sea  $L$  ésta recta;

$L : z = y + \lambda x, \lambda \in K, x, y \in E, x \neq 0$ , entonces

$Kx = Kx + y + \{-y\} = L + \{-y\}$ , es decir,  $Kx$  es un subespacio acotado de  $E$ , luego siendo  $E$  separado, resulta que  $Kx = \{0\}$

y luego  $x = 0 \xrightarrow{\text{H. p.}} \longleftarrow$

(iii)  $\Leftrightarrow$  (i) Supongamos que ninguna recta de  $E$  es acotada y  $E$  no separado, entonces existe  $H$  subespacio de  $E$  tal que  $H \in \beta \wedge H \neq \{0\}$ ; luego existe  $x \in H; x \neq 0$ .

Consideremos la recta  $L : z = \lambda x, \lambda \in K$ , entonces  $Kx \subseteq H$  y en consecuencia  $Kx \in \beta \xrightarrow{\text{H. p.}} \longleftarrow$

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Supongamos la unicidad del límite bornológico y que existe una recta  $L : z = Kx; x \in E, x \neq 0$

acotada. Entonces existe  $B \in \beta : Kx \subseteq B \Leftrightarrow \forall n \geq 1, nx \in B$

$$\Leftrightarrow x \in 1/n B, \forall n \geq 1,$$

es decir, la sucesión  $(x_n = x)$  de  $E$ , es tal que  $x_n \xrightarrow{M} 0$  y

$x_n \xrightarrow{M} x$ , entonces  $x = 0 \xrightarrow{\text{H. p.}} \longleftarrow$

(iii)  $\Leftrightarrow$  (ii) Supongamos que ninguna recta de  $E$  es acotada y que existe una sucesión  $(x_n)$  de  $E$  tal que

$x_n \xrightarrow{K} x \in E$  y  $x_n \xrightarrow{M} y \in E$ , con  $x \neq y \Leftrightarrow (x_n - x_n) = \{0\} \xrightarrow{M} x - y$

Mostraremos ahora que la sucesión nula  $(y_n = 0)$  converge bornológicamente únicamente al vector  $0$  de  $E$ . En efecto; supongamos que existe  $y \in E, y \neq 0$  tal que  $y_n \xrightarrow{M} y$ , entonces existe  $B \in \beta$  (equil.) y  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+, \lambda_n \searrow 0 : y - y_n = y \in \lambda_n B, \forall n \geq 1$ .

Ahora como  $\lambda_n \searrow 0, \exists N \geq 1 : 0 \leq \lambda_n < 1, \forall n \geq N$ , luego  $z = \alpha y \in \alpha \lambda_n B \subseteq \alpha B, \forall n \geq N \quad Ky \subseteq \alpha B$

$$1/\alpha Ky = Ky \subseteq B \in \beta$$

$$Ky \in \beta \xrightarrow{\text{H. p.}} \longleftarrow$$

Luego  $(x_n - x_n = 0) \xrightarrow{M} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \xrightarrow{\text{H. p.}} \longleftarrow$

Por lo tanto, toda sucesión bornológicamente convergente en  $E$  tiene límite único.

#### 4. BORNOLÓGICAS TOPOLOGICAS Y TOPOLOGIAS BORNOLÓGICAS.

Definición 2.4.1 : Sean  $E$  un e.l. sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $\beta$  una bornología lineal sobre  $E$  y  $\tau$  una topología lineal sobre  $E$ . Se dice que  $\beta$  y  $\tau$  son compatibles si  $\beta \subseteq \beta(\tau)$  donde  $\beta(\tau)$  es la bornología de V. N. de  $\tau$ .

Se dice también que  $\beta$  es compatible con  $\tau$  o bien que  $\tau$  es compatible con  $\beta$ .

Proposición 2.4.1 : Sea  $\beta$  una bornología lineal sobre un e.l.  $E$ , entonces existe sobre  $E$  una única topología lineal compatible con  $\beta$ , la más fina entre todas las topologías lineales compatibles con  $\beta$ .

Demostración : Sea  $\mathcal{T}_\beta = \{\tau / \tau \text{ top. lineal sobre } E : \beta \subseteq \beta(\tau)\}$

Entonces :

1)  $\mathcal{T}_\beta \neq \emptyset$ , en efecto; sea  $A \subseteq E$  ( $\beta$ -bornívoro equilibrado), entonces  $\mathcal{A} = \{\lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\}$  constituye un sistema fundamental de vecindades para una topología lineal  $\tau$  sobre  $E$ .

Además, si  $\eta A \in \mathcal{A}$ , entonces

$$B \in \beta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : B \subseteq \lambda A \quad (A \text{ } \beta\text{-bornívoro})$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : B \subseteq \lambda / \eta \quad (\eta A)$$

$$\Leftrightarrow B \text{ es } \tau\text{-acotado} \Leftrightarrow B \in \beta(\tau).$$

Es decir,  $\tau$  y  $\beta$  son compatibles y en consecuencia  $\mathcal{T}_\beta \neq \emptyset$ .

2) Sea  $\tau_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_\beta} \tau$ , luego  $\tau_0$  como supremun de una familia de topologías lineales sobre  $E$ , es una topología lineal sobre

$E$ ; además  $\forall B \subseteq E : B-\tau_0\text{-acotado} \iff B-\tau\text{-acotado}, \forall \tau \in \mathcal{T}_\beta$ .

3)  $\beta$  y  $\tau_0$  son compatibles.

En efecto,  $B \in \beta \iff B \in \beta(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_\beta$   
 $\iff B \text{ es } \tau_0\text{-acotado} \iff B \in \beta(\tau_0)$ .

Luego  $\beta \subseteq \beta(\tau)$ , es decir,  $\beta$  y  $\tau_0$  son compatibles. Además es claro que  $\tau_0$  es más fina que toda  $\tau \in \mathcal{T}_\beta$ .

Notación : La topología  $\tau_0$  la indicaremos por  $t\beta$ . Así

$\beta$  y  $t\beta$  son compatibles, es decir,  $\beta \subseteq \beta(t\beta)$

El par  $(E, t\beta)$  se indica por  $tE$ .  $t\beta$  se denomina la topología lineal asociada con la bornología  $\beta$ .

Proposición 2.4.2 : Sea  $(E, \tau)$  un e.l.t., entonces  $\beta(\tau)$  es lineal.

Demostración : Ver Ejemplo 1.5.3

Anotamos al e.l.b.  $(E, \beta(\tau))$  por  $bE$ .

Observación : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b., entonces  $tE$  es un e.l.t.

y luego  $btE$  es un e.l.b. tal que  $\beta \subseteq bt\beta$

Diremos que  $\beta$  es topológica o que  $(E, \beta)$  es un e.l.b. topológico si  $\beta = bt\beta$ , es decir,  $E = btE$  (igualdad bornológica).

Sea  $(E, \tau)$  un e.l.t., entonces  $bE$  es un e.l.b. y  $tbE$  es un e.l.t. tal que  $\tau \subseteq tb\tau$ .

Diremos que  $\tau$  es bornológica o que  $(E, \tau)$  es un e.l.t. bornológica si  $\tau = tb\tau$ , es decir, si  $E = tbE$  (igualdad topológica).

## 5. MACKEY - CONTINUIDAD.

Definición 2.5.1 : Sean  $(E, \beta_E)$  y  $(F, \beta_F)$  dos e.l.b.,  $f: E \rightarrow F$  una aplicación de  $E$  en  $F$ . Entonces :

a)  $f$  es secuencialmente  $M$ -continua si y sólo si  $\forall (x_n) \subseteq E$ ,

$$\forall x \in E : x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{M} f(x).$$

b)  $f$  es  $M$ -continua si y sólo si  $\forall \mathcal{F}$  filtro sobre  $E$ ,  $\forall x \in \mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \widetilde{f(\mathcal{F})} \xrightarrow{M} f(x).$$

Proposición 2.5.1 : Sean  $(E, \beta_E)$ ,  $(F, \beta_F)$  dos e.l.b., y

$f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal de  $E$

en  $F$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i)  $f$  es  $M$ -continua.

ii)  $f$  es acotada.

Demostración :

i)  $\Leftrightarrow$  ii) Sean  $A \in \beta_E$  y  $\mathcal{F}_0 = \{\lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\}$ , entonces

$$\widetilde{\mathcal{F}_0} \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow \widetilde{f(\mathcal{F}_0)} \xrightarrow{M} f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta_F : \{\lambda B / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \widetilde{f(\mathcal{F}_0)}$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta_F : B \in \widetilde{f(\mathcal{F}_0)}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 : f(\lambda A) = \lambda f(A) \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{K}, \gamma \neq 0 : f(A) \subseteq \gamma B \in \beta_F$$

$$\Leftrightarrow f(A) \in \beta_F \Leftrightarrow f \text{ es acotada.}$$

ii)  $\Leftrightarrow$  i) Sean  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $E$  y  $x \in E$  tal que  $\mathcal{F} \xrightarrow{M} x$ ,

$$\text{entonces } \widetilde{\mathcal{F}-x} \xrightarrow{M} 0$$

$$\exists A \in \beta_E : \{\lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}-x}$$

Sea  $B = f(A)$ , entonces  $B \in \beta_F$  por (ii)

Sea  $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ , entonces  $\lambda A \in \widetilde{\mathcal{F}-x}$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} & \quad \exists H \in \mathcal{H} : H-x \subseteq \lambda A \\
\text{iii)} & \quad \exists f(H) \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) : f(H)-f(x) \subseteq \lambda f(A) \\
\text{iv)} & \quad \exists f(H) \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) : f(H)-f(x) \subseteq \lambda B \\
\text{v)} & \quad \lambda B \in \widehat{\mathcal{F}(\mathcal{H}) - f(x)} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{F}(\mathcal{H})} \xrightarrow{K} f(x).
\end{aligned}$$

Proposición 2.5.2 : Sean  $(E, \beta_E)$ ,  $(F, \beta_F)$  dos e.l.e., y  $f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal de  $E$  en  $F$ . Si  $(F, \beta_F)$  es topológico (es decir, si  $\beta_F = \text{st } \beta_F$ ), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- 1)  $f$  es secuencialmente  $K$ -continua.
- 2) Si  $(x_n)$  es una sucesión en  $E$   $K$ -convergente a 0, entonces  $(f(x_n))$  es acotada en  $F$ .
- 3) Si  $(x_n)$  es una sucesión acotada en  $E$ , entonces  $(f(x_n))$  es acotada en  $F$ .
- 4)  $f$  es  $K$ -continua.
- 5)  $f$  es acotada.

Demostración : Por la Proposición 2.5.1, (4) y (5) son equivalentes.

Ahora :

1)  $\Leftrightarrow$  2) Sea  $(x_n) \subseteq E : x_n \xrightarrow{K} 0$ , entonces por (1)  $f(x_n) \xrightarrow{K} 0$ , es decir, existe  $B \in \beta_F$  (equil.) y  $\alpha_n \searrow 0$  :

$$f(x_n) \in \alpha_n B, \quad \forall n \geq 1.$$

Ahora  $\alpha_n \searrow 0 \Leftrightarrow \exists N \geq 1 : \alpha_n \leq 1, \quad \forall n \geq N$ . Luego

$f(x_n) \in \alpha_n B \subseteq B, \quad \forall n \geq N$ , de donde resulta que

$$\bigcup_{n \geq 1} \{f(x_n)\} \subseteq \bigcup_{n=1}^N \{f(x_n)\} \cup B \in \beta_F$$

Por lo tanto  $(f(x_n))$  es acotada en  $F$ .

2)  $\Leftrightarrow$  3) Sea  $D = (x_n)$  una sucesión acotada en  $E$  y supongamos que  $A = (f(x_n))$  no es acotada en  $F$ . Como  $(F, \beta_F)$  es topológico, existe una topología lineal  $\tau$  sobre  $F$  tal que  $A \notin \beta_\tau$ .

Luego,  $\exists V \in \hat{V}(0, \tau)$  (equil.) tal que  $\forall m \geq 1 : A \not\subseteq mV$   
 $\Leftrightarrow \forall m \geq 1, \exists x_{n_m} \in D : f(x_{n_m}) \notin mV$  (\*)

Por otro lado, como  $(x_n)$  es acotada;  $(x_{n_m})$  también lo es, luego  $x_{n_m}/\sqrt{m} \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow (f(x_{n_m}/\sqrt{m}))$  es acotada (por 2)  
 $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : f(x_{n_m}/\sqrt{m}) \in \lambda V, \forall m \geq 1, \forall \lambda/\lambda \geq \alpha$   
 $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : f(x_{n_m}) \in \alpha \sqrt{m} V, \forall m \geq 1$

Sean  $m_0 \geq 1 : \alpha \leq \sqrt{m_0}$ , entonces si  $m \geq m_0$  se tiene que  $f(x_{n_m}) \in \sqrt{m} \sqrt{m} V = mV, \forall m \geq m_0$   $\rightarrow$  (\*)  $\leftarrow$

Luego  $A = (f(x_n)) \in \beta_F$ .

3)  $\Leftrightarrow$  1) Sea  $(x_n) \subseteq E : x_n \xrightarrow{M} 0$ , entonces existe  $B \in \beta_E$  (equil.) y  $\alpha_n \searrow 0 : x_n \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$   
 $\Leftrightarrow \exists B \in \beta_E$  (equil.) y  $\alpha_n \searrow 0 : f(x_n) \in \alpha_n f(B), \forall n \geq 1$

Probaremos que  $f(B)$  es acotado en  $F$ . Supongamos que no lo es, entonces siendo  $(E, \beta_E)$  topológico, existe una topología lineal  $\tau$  sobre  $F$  compatible con  $\beta_F$  tal que existe  $V \in \hat{V}(0, \tau)$  (equil.) y tal que  $V$  no absorbe  $f(B)$ , es decir,  $f(B) \not\subseteq mV, \forall m \geq 1$ , luego para cada  $m \geq 1, \exists b_m \in B$  tal que  $f(b_m) \notin mV, \forall m \geq 1$ . (\*\*)

Ahora,  $(b_m) \subseteq B \in \beta_E \Leftrightarrow (b_m) \in \beta_E$ , luego por (3)  $(f(b_m)) \in \beta_F$  y en consecuencia  $V$  absorbe  $(f(b_m))_{m \geq 1}$ , es decir,

existe  $n_0 \gg 1 : f(b_m) \in n V, \forall n \gg n_0$

Luego  $f(b_m) \in m V, \forall m \gg n_0 \quad \longrightarrow (**)$

Por lo tanto,  $f(B)$  es un acotado de  $F$  y tal que  $f(x_n) \in \alpha_n f(B), \forall n \gg 1 \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{M} 0$ , es decir,  $f$  es secuencialmente  $M$ -continua.

5)  $\Leftrightarrow$  3) Sea  $(x_n) \subseteq E$  acotada, luego  $(f(x_n))$  es acotada en  $F$  por hipótesis.

3)  $\Leftrightarrow$  5) Sea  $A \in \beta_E$  y supongamos que  $f(A)$  no es acotada en  $F$ , entonces como  $(F, \beta_F)$  es topológico existe una topología lineal  $\tau$  sobre  $F$  compatible con  $\beta_F$  y existe  $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$  (equil.) tal que  $f(A) \not\subseteq n V, \forall n \gg 1$ , entonces  $\forall n \gg 1, \exists a_n \in A$  tal que  $f(a_n) \notin n V \quad (***)$

Por otro lado,  $(a_n) \subseteq A \in \beta_E \Leftrightarrow (a_n) \in \beta_E \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (f(a_n)) \in \beta_F$   
 $\Leftrightarrow V$  absorbe  $(f(a_n))$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \gg 1 : f(a_n) \in n V, \forall n \gg n_0 \quad \longrightarrow (***)$

Luego  $f(A)$  es necesariamente acotado y en consecuencia  $f$  es acotada.

Observación : Si la bornología  $\beta_F$  de  $F$  no es topológica, entonces la  $M$ -continuidad secuencial no es suficiente para caracterizar las aplicaciones lineales acotadas.

En efecto : consideremos un espacio  $(E, // //)$  de Banach de dimensión infinita y sea  $\beta_c$  la bornología convexa sobre  $E$  definida por las partes  $r$ -compactas de  $E$  (Ejemplo 1.5.5), ella no es la bornología de  $V. N.$  de ninguna topología lineal sobre  $E$  pues  $E$  es de dimensión infinita ( Proposición 2.3.3 ) .

Consideremos la identidad  $i : (E, \beta_{// //}) \rightarrow (E, \beta_c)$ ,  
entonces :

1)  $i$  no es acotada, en efecto : sea  $B = B_{// //} [0, 1]$ , entonces si  $i(B) \in \beta_c$ , existe  $A \in \beta_c$  disco compacto :  $B \subseteq A$

Ahora,  $A$  compacto y  $B$  cerrado  $\Rightarrow B$  compacto

$$\Rightarrow \dim E < \infty \quad \longrightarrow \longleftarrow$$

Luego  $i$  no es acotada.

2)  $i$  no es  $K$ -continua, en efecto : por Proposición 2.5.1  $i$  no es  $M$ -continua pues  $i$  no es acotada.

3)  $i$  es  $K$ -secuencialmente continua, en efecto : sea  $(x_n)$  una sucesión en  $(E, // //)$  tal que  $//x_n// \rightarrow 0$  y sea  $\lambda_n \searrow 0$  :  $//x_n// \leq \lambda_n$ .

Sea  $A = \{x_n / \sqrt{\lambda_n} / n \geq 1\} \cup \{0\}$ , entonces  $K = \overline{\Gamma(A)}$  es compacto pues para cada  $n \geq 1$  se tiene que

$$\begin{aligned} //x_n / \sqrt{\lambda_n} // &= //x_n// / \sqrt{\lambda_n} = //x_n// \cdot \sqrt{\lambda_n} / \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_n} = //x_n// \sqrt{\lambda_n} / \lambda_n \\ &= (//x_n// / \lambda_n) \sqrt{\lambda_n} \leq 1 \cdot \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego  $A = \{x_n / \sqrt{\lambda_n} / n \geq 1\} \cup \{0\}$  es compacta y siendo  $(E, // //)$  de Banach, resulta que  $K = \overline{\Gamma(A)}$  es compacto.

Sea ahora  $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$ , entonces  $\alpha_n \searrow 0$  y además  $x_n = \sqrt{\lambda_n} / \sqrt{\lambda_n} \cdot x_n = \alpha_n \cdot 1 \cdot x_n / \sqrt{\lambda_n} \in \alpha_n K$ , con  $\alpha_n \searrow 0$  y  $K \in \beta_c$ .

Por lo tanto,  $x_n \xrightarrow{M} 0$  en  $(E, \beta_c)$ , es decir  $i(x_n) \xrightarrow{M} 0$  en  $(E, \beta_c)$ .

Luego  $i$  es  $M$ -secuencialmente continua.

En particular  $\beta_c$  no es topológica pues si así fuera siendo  $i : (E, // //) \rightarrow (E, \beta_c)$   $M$ -secuencialmente continua debería ser  $M$ -continua lo que no es posible por (2) (Prop. 2.5.2).

### CAPITULO III

#### TOPOLOGIZACION DE LA CONVERGENCIA BORNOLÓGICA

## 1. TOPOLOGIZACION DE LA M-CONVERGENCIA

Es interesante y útil saber si la convergencia de Mackey es topologizable, es decir, si dado un e.l.b.  $(E, \beta)$ , saber si necesariamente existe una topología  $\tau$  sobre  $E$  tal que el conjunto de filtros (resp. sucesiones) convergentes en el sentido de Mackey es exactamente el conjunto de filtro (resp. sucesiones) convergentes en el sentido de  $\tau$ . La respuesta en general es negativa. De manera precisa tenemos el siguiente resultado :

Proposición 3.1.1 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b. . Para que la convergencia en el sentido de Mackey (para filtros) sea topologizable, es necesario y suficiente que  $(E, \beta)$  sea simple, es decir, que  $(E, \beta)$  contenga un bornívoro no vacío.

Demostración : Supongamos que la M-convergencia (para filtros) es topologizable, es decir, que existe una topología  $\tau$  sobre  $E$  tal que el conjunto de filtros  $\tau$ -convergentes sobre  $E$  es exactamente el conjunto de filtros M-convergentes sobre  $E$ .

Consideremos el filtro de las partes bornívoras de  $E$ , es decir :  $G = \{A \subseteq E / A \text{ es bornívoro en } E\}$ . Sabemos que

$$G = \bigcap \{ \mathcal{F} / \mathcal{F} \text{ es filtro sobre } E \text{ tal que } \mathcal{F} \xrightarrow{M} 0 \}$$

Ahora, cada filtro  $\mathcal{F}$  M-convergente a 0, es  $\tau$ -convergente a 0; luego  $G$  es  $\tau$ -convergente a 0 y en consecuencia  $G$  es M-convergente a 0.

Por lo tanto, existe  $B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}$  (Proposición 2.2.5).

Recíprocamente, sea  $A$  un bornívoro acotado de  $E$  (que podemos suponer equilibrado).

Pongamos  $D = \{ \lambda A / \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K} \}$ ; entonces

- i) Cada elemento de  $D$  es equilibrado.
- ii) Cada elemento de  $D$  es absorvente (pues son bornívoros).
- iii) Para cada  $\lambda A \in D$ ,  $\exists \alpha A \in D : \alpha A + \alpha A \subseteq \lambda A$ , en efecto :

Sea  $\lambda A \in D$ , como  $A \in \mathcal{B}$ ;  $A + A \in \mathcal{B}$ , luego siendo  $\lambda A$  bornívoro  $\exists \alpha > 0 : \alpha(A + A) \subseteq \lambda A$  y en consecuencia  $\alpha A + \alpha A \subseteq \lambda A$ .

Así,  $D$  define sobre  $E$  una única topología lineal  $\tau$  tal que  $D$  es un sistema fundamental de vecindades de  $0$ .

Sea ahora  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $E$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} 0 &\iff 0 \in \sqrt{(0, \tau)} \subseteq \mathcal{F} \\ &\iff \{ \lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K} \} \subseteq \mathcal{F} \\ &\iff \mathcal{F} \xrightarrow{M} 0 \end{aligned}$$

Luego la convergencia en el sentido de Mackey (para filtros) es topologizable.

Observación : La topología  $\tau$  construida en la Proposición

anterior, tiene las siguientes propiedades :

- 1)  $\tau$  es pseudo - metrizable.

En efecto :  $\{ (1/n)A / n \geq 1 \}$  (Bornívoro acotado) es un sistema fundamental de vecindades de  $0$  y es contable, luego  $\tau$  es pseudo metrizable.

- 2)  $(E, \tau)$  es  $T_0 \iff (E, \beta)$  es separado.

$$\begin{aligned} \text{En efecto : } (E, \tau) T_0 &\iff \forall a \in E, a \neq 0, \exists \lambda \neq 0 : a \notin \lambda A \\ &\iff \forall a \in E, a \neq 0 : \exists \lambda \neq 0 : a \notin \lambda A \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (E, \beta)$  es separado.

3) Si  $(E, \beta)$  es separado y existe un acotado bornívoro de  $E$ , entonces  $(E, \tau)$  es metrizable.

Resulta aplicando 1) y 2).

4) La bornología de Von Neumann de  $(E, \tau)$  es  $\beta$ .

En efecto :

$$\begin{aligned} C \in \beta(\tau) &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : C \subseteq \lambda A && (\text{pues } A \in \mathcal{V}(0, \tau)) \\ &\Leftrightarrow C \in \beta && (\text{pues } \lambda A \in \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Recíprocamente, } C \in \beta &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : C \subseteq \lambda A && (A \text{ bornívoro}) \\ &\Leftrightarrow C \in \beta(\tau) && (\lambda A \in \beta(\tau)) \end{aligned}$$

5)  $(E, \tau)$  es un e.l.t. localmente acotado, es decir,  $\forall x_0 \in E$ ,

$\forall G$  abierto;  $x_0 \in G$ ,  $\exists B$  abierto acotado tal que  $x_0 \in B \subseteq G$ .

En otras palabras, cada punto de  $E$  admite una base de vecindades acotadas en efecto; basta observar que  $\{\lambda \overset{\circ}{A} / \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}\}$

es un sistema fundamental de vecindades abiertas y acotadas

de 0 en  $(E, \tau)$  ( $\overset{\circ}{A}$  es el interior de  $A$ ) y que  $\forall x \in E$ ;

$\lambda \overset{\circ}{A} + x / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$  es un sistema fundamental de vecindades abiertas y acotadas de  $x$ .

Proposición 3.1.2 : Sean  $(E, \tau)$  un e.l.t. y  $\beta(\tau)$  su bornología de Von Neumann. Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $E$ .

Entonces :  $\forall x \in E : \mathcal{F} \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x$

Demostración : Si  $x = 0$ , entonces

$$\mathcal{F} \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow \{\lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathcal{F} \text{ para algún}$$

$A \in \beta(\tau)$ .

Sea  $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$ , entonces  $\exists \alpha > 0 : \alpha A \subseteq V$ , luego  $V \in \mathcal{F}$  puesto que  $\alpha A \in \mathcal{F}$ .

Así,  $\mathcal{V}(0, \tau) \subseteq \mathcal{F}$  o equivalentemente  $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} 0$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \neq 0 : \mathcal{F} \xrightarrow{M} x &\Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} - x \xrightarrow{M} 0 \\ &\Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} - x \xrightarrow{\tau} 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x \end{aligned}$$

**Definición 3.1.1 :** Se dice que un e.l.t.  $(E, \tau)$  verifica la condición de Mackey para filtros (resp. para sucesiones) si todo filtro (resp. toda sucesión) convergente a 0 en el sentido topológico, converge a 0 en el sentido de Mackey, es decir, es M-convergente a 0 con respecto a la bornología de Von Neumann de  $(E, \tau)$ .

**Proposición 3.1.3 :** Los únicos e.l.t. que verifican la condición de convergencia de Mackey para filtros son los e.l.t. localmente acotados.

**Demostración :** Sean  $(E, \tau)$  un e.l.t. y  $\beta(\tau)$  su bornología de Von Neumann. Supongamos que  $(E, \tau)$  verifica la condición de Mackey para filtros, entonces para todo filtro  $\mathcal{F}$  sobre E :  $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} 0 \Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{M} 0$ , en particular como  $\mathcal{V}(0, \tau) \xrightarrow{\tau} 0$ ; se tiene que  $\mathcal{V}(0, \tau) \xrightarrow{M} 0$ , luego existe  $A \in \beta(\tau) : \{\lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathcal{V}(0, \tau)$ .

Además como  $A \in \beta(\tau)$ ;  $\forall v \in \mathcal{V}(0, \tau)$ ,  $\exists \lambda > 0 : \lambda A \subseteq v$ , es decir,  $(E, \tau)$  es localmente acotado.

Recíprocamente, sea  $(E, \tau)$  un e.l.t. localmente acotado, entonces existe  $A \in \beta(\tau) : A \in \mathcal{V}(0, \tau)$ .

Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre E :  $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} 0 \Leftrightarrow \mathcal{V}(0, \tau) \subseteq \mathcal{F}$

Luego,  $\forall 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda A \in \mathcal{V}(0, \tau) \subseteq \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{ \lambda A / 0 \neq \lambda \in \mathbb{K} \} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{M} 0 \end{aligned}$$

### PARTES BORNOLÓGICAMENTE CERRADAS

Definición 3.2.1 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b.. Una parte  $A$  de  $E$  se dice bornológicamente cerrada o Mackey-cerrada (b-cerrada o M-cerrada) si  $\forall (x_n)$  sucesión en  $A$ ,  $\forall x \in E : x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x \in A$ .

Proposición 3.2.1 : Sea  $(E, \beta)$  un e.b.c. y  $A \subseteq E$ , entonces :  
 $A$  es b-cerrado si y sólo si  $\forall B \in \beta$  (disco) tal que  $A \cap E_B$  es cerrado en  $E_B$ .

Demostración : Sean  $B$  un disco acotado en  $E$  y  $x \in \overline{A \cap E_B}^{E_B}$ , entonces :  
 $\exists (x_n) \subseteq A \cap E_B : x_n \longrightarrow x$  en  $E_B$   
 $\Leftrightarrow \int_B (x_n - x) \longrightarrow 0$  y  $(x_n) \subseteq A$   
 $\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} x$  y  $(x_n) \subseteq A$   
 $\Leftrightarrow x \in A$  (pues  $A$  es b-cerrado)

Luego,  $x \in A \cap E_B$  y en consecuencia  $A \cap E_B$  es cerrado en

Recíprocamente sean  $(x_n) \subseteq A$  y  $x \in E : x_n \xrightarrow{M} x$ , entonces existe  $B$  disco acotado de  $E : x_n \longrightarrow x$  en  $E_B$

Ahora como  $(x_n) \subseteq A \cap E_B : x_n \longrightarrow x$  en  $E_B$  se tiene que  
 $x \in \overline{A \cap E_B}^{E_B} = A \cap E_B \subseteq A \Leftrightarrow x \in A$

Luego  $A$  es b-cerrado.

Proposición 3.2.2 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y

$$\tau(E) = \{ \Omega \subseteq E / \Omega \text{-a es bornívoro } \forall a \in \Omega \} \cup \{ \emptyset \},$$

entonces  $\tau(E)$  es una topología sobre  $E$  llamada la topología de la  $b$ -cerradura.

Demostración : Claramente  $\emptyset$  y  $E \in \tau(E)$ , pues para todo  $a \in E$ ;  
 $E-a = E$  es bornívoro.

Sean  $(\Omega_i)_{i \in I} \subseteq \tau(E)$  y  $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

Sea  $a \in \Omega$ , entonces  $\Omega-a$  es un bornívoro.

En efecto : Sea  $B \in \beta$  e  $i_0 \in I$ , luego siendo  $\Omega_{i_0}-a$  bornívoro, existe  $\alpha > 0$  :  $B \subseteq \lambda(\Omega_{i_0}-a)$ ,  $\forall |\lambda| \geq \alpha$   
 $\Rightarrow B \subseteq \lambda(\bigcup_{i \in I} (\Omega_i-a)) = \lambda((\bigcup_{i \in I} \Omega_i)-a) = \lambda(\Omega-a)$   
 $\Leftrightarrow \Omega \in \tau(E)$ .

Finalmente, sean  $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau(E)$  y  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  
 si  $\Omega = \emptyset$ , entonces  $\Omega \in \tau(E)$ .

Supongamos que  $\Omega \neq \emptyset$  y sean  $a \in \Omega$ ,  $B \in \beta$ , entonces siendo  $\Omega_1-a$  y  $\Omega_2-a$  bornívoros, existen  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  tales que  $B \subseteq \lambda(\Omega_1-a)$ ,  $\forall |\lambda| \geq \alpha_1$  y  $B \subseteq \lambda(\Omega_2-a)$ ,  $\forall |\lambda| \geq \alpha_2$ .

Luego, si  $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$  resulta que  
 $B \subseteq \lambda(\Omega_1-a) \cap \lambda(\Omega_2-a)$ ,  $\forall |\lambda| \geq \alpha$   
 pero  $\lambda(\Omega_1-a) \cap \lambda(\Omega_2-a) = \lambda(\Omega_1 \cap \Omega_2 - a) = \lambda(\Omega-a)$

Por lo tanto,  $B \subseteq \lambda(\Omega-a)$ ,  $\forall |\lambda| \geq \alpha$ , es decir,  $\Omega \in \tau(E)$ .

Proposición 3.2.3 : Para cada parte  $A$  de un e.l.b.  $(E, \beta)$   
 pongamos :

- $A^{(1)} = \{x \in E / \exists (x_n) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x\}$ . Entonces :
- (i)  $\forall P \subseteq E$ ;  $P$  es bornívoro  $\Leftrightarrow 0 \neq (CP)^{(1)}$ .
- (ii)  $\forall \Omega \subseteq E$ ;  $\Omega \in \tau(E) \Leftrightarrow \forall a \in \Omega$ ,  $\forall (x_n) \subseteq E : x_n \xrightarrow{M} a$ ,

existe  $n_0 \geq 1 : x_n \in \Omega, \forall n \geq n_0$ .

(iii)  $\forall A \subseteq E; A$  es  $b$ -cerrado  $\Leftrightarrow A = A^{(1)}$ .

Demostración :

(i)  $\Rightarrow$  ) Supongamos que  $0 \in (CP)^{(1)}$ , entonces existe

$$(x_n) \subseteq CP : x_n \xrightarrow{M} 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta(\text{equil.}) \text{ y } \alpha_n \searrow 0 : x_n \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$$

Ahora como  $P$  es bornívoro, existe  $\alpha > 0 : \alpha B \subseteq P$  y puesto que  $\alpha_n \searrow 0$ , existe  $n_0 \geq 1 : \alpha_n \leq \alpha, \forall n \geq n_0$ .

$$\text{Luego } x_n \in \alpha_n B \subseteq \alpha B \subseteq P, \forall n \geq n_0 \quad \longrightarrow (*) \longleftarrow$$

$\Leftarrow$  ) Supongamos que  $P$  no es bornívoro, entonces

$$\text{existe } B \in \beta(\text{equil.}) : B \not\subseteq n P, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \exists b_n \in B : b_n/n \notin P$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \exists b_n/n \in 1/n B \subseteq B; (b_n/n) \subseteq CP$$

$$\Rightarrow \int_B (b_n/n) \leq 1/n \rightarrow 0; (b_n/n) \subseteq CP$$

$$\Rightarrow 0 \in (CP)^{(1)}$$

ii)  $\Rightarrow$  ) Supongamos que  $\Omega \subseteq E : \Omega \in \tau(E)$ , entonces para todo  $a \in \Omega; \Omega - a$  es bornívoro.

$$\text{Sea } (x_n) \subseteq E : x_n \xrightarrow{M} a \Leftrightarrow x_n - a \xrightarrow{M} 0$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta(\text{equil.}) \text{ y } \alpha_n \searrow 0 : x_n - a \in \alpha_n B, \forall n \geq 1$$

Ahora como  $\Omega - a$  es bornívoro, existe  $\alpha > 0 : \alpha B \subseteq \Omega - a$  y siendo  $\alpha_n \searrow 0$ , existe  $n_0 \geq 1 : \alpha_n \leq \alpha, \forall n \geq n_0$ .

Luego, existe  $n_0 \geq 1 : x_n - a \in \alpha_n B \subseteq \alpha B \subseteq \Omega - a, \forall n \geq n_0$ ; de donde se tiene que existe  $n_0 \geq 1 : x_n \in \Omega - a + a = \Omega, \forall n \geq n_0$

$\Leftarrow$  ) Sea  $a \in \Omega$  y supongamos que  $\Omega - a$  no es bornívoro, entonces

$$\text{existe } B' \in \beta(\text{equil.}) : B' \not\subseteq n(\Omega - a), \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \exists x'_n \in B' : x'_n \notin n(\Omega - a)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1, \exists x'_n \in B' : x_n = x'_n/n + a \notin \Omega (*)'$$

Por otro lado,  $B = e(B' + \{a\}) \in \beta$  y  $(x_n) \subseteq B$ , además

$$\begin{aligned} \int_B(x_n - a) &= \int_B(x'_n/n + a - a) \\ &= \int_B(x'_n/n) = 1/n \int_B(x'_n) \leq 1/n \int_{B'}(x'_n) \leq 1/n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

es decir,  $x_n \xrightarrow{f} a$  y en consecuencia  $x_n \in \Omega$ ,  $\forall n \geq n_0 \xrightarrow{(*)} \leftarrow$

iii)  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $A$  es  $b$ -cerrado, entonces

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \exists (x_n = x) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x \in A^{(1)} \text{ y} \\ x \in A^{(1)} &\Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad (\text{por hip.}) \end{aligned}$$

Así,  $A = A^{(1)}$ .

$\Leftarrow$ ) Sean  $x \in E$  y  $(x_n) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x$ , entonces  
 $x \in A^{(1)} = A \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow A$  es  $b$ -cerrado.

Proposición 3.2.4 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $\mathcal{C}(E)$  la topología de la  $b$ -cerradura, entonces :

$$\mathcal{C}_0 \mathcal{C}(E) = \{ A \subseteq E / A \text{ es } b\text{-cerrado} \}.$$

Demostración :

$$\begin{aligned} \subseteq ) \quad A \in \mathcal{C}_0 \mathcal{C}(E) &\Leftrightarrow CA \in \mathcal{C}(E) \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : A-b \text{ es bornívoro} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : 0 \notin (C(CA-b))^{(1)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : 0 \notin (C(C(A-b)))^{(1)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : 0 \notin (A-b)^{(1)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : 0 \notin A^{(1)} - b \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : b \notin A^{(1)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in CA : b \in CA^{(1)} \\ &\Leftrightarrow CA \subseteq CA^{(1)} \\ &\Leftrightarrow A^{(1)} \subseteq A \end{aligned}$$

Además  $A \subseteq A^{(1)}$  puesto que si  $x \in A$ , entonces existe  $(x_n = x) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x$ ; luego  $A = A^{(1)}$  y por Proposición 3.2.3 resulta que  $A$  es  $b$ -cerrado.

$$\underline{\underline{\Rightarrow}}) A \subseteq E, A \text{ } b\text{-cerrado} \Leftrightarrow A = A^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } b \in CA \Leftrightarrow b \notin A \Leftrightarrow 0 \notin A-b &= A^{(1)}-b \\ &= (A-b)^{(1)} \\ &= (CC(A-b))^{(1)} \\ &= (C(CA-b))^{(1)} \end{aligned}$$

$$0 \notin (C(CA-b))^{(1)}$$

$$\Leftrightarrow CA-b \text{ es bornívoro}$$

$$\Leftrightarrow CA \in \mathcal{C}(E)$$

$$\Leftrightarrow A \in C\mathcal{C}(E)$$

Por lo tanto,  $C_0\mathcal{C}(E) = \{A \subseteq E, / A \text{ es } b\text{-cerrado}\}$ .

Proposición 3.2.5 : Sean  $(E, \beta)$  y  $(F, \beta_1)$  dos e.l.b.;  $A \subseteq F$  y  $u : E \rightarrow F$  lineal acotada. Entonces:  $A$  es  $b$ -cerrado en  $F \Leftrightarrow u^{-1}(A)$   $b$ -cerrado en  $E$ .

Demostración : Sean  $x \in E$  y  $(x_n) \subseteq u^{-1}(A) : x_n \xrightarrow{M} x$ , entonces  $u(x_n) \xrightarrow{M} u(x) ; (u(x_n))_{n \geq 1} \subseteq A$   
 $\Leftrightarrow u(x) \in A$  (pues  $A$  es  $b$ -cerrado)  
 $\Leftrightarrow x \in u^{-1}(A)$  y en consecuencia  $u^{-1}(A)$  es  $b$ -cerrado.

Observación : El resultado anterior nos dice que toda aplicación lineal acotada es continua respecto a las topologías de la  $b$ -cerradura.

Proposición 3.2.6 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b.. Entonces :

$E$  es separado si y sólo si  $\{0\}$  es b-cerrado en  $E$ .

**Demostración :** Supongamos que  $\{0\}$  es b-cerrado en  $E$  y  $(x_n)$  una sucesión en  $E$  tal que  $x_n \xrightarrow{M} x$ ;  $x_n \xrightarrow{M} y$  en  $E$ ; entonces la sucesión  $(y_n = x_n - x_n = 0)_{n \geq 1}$  es tal que  $(y_n) \subseteq \{0\}$  y  $y_n \xrightarrow{M} x-y$ , luego siendo  $\{0\}$  b-cerrado resulta que  $x-y \in \{0\}^{(1)} = \{0\}$ , es decir,  $x = y$  de donde en virtud de la Proposición 2.4.1 se tiene que  $E$  es separado.

Recíprocamente supongamos que  $E$  es separado y  $A = \{0\}$ .

Sea  $(x_n)$  una sucesión de puntos de  $A$  tal que  $x_n \xrightarrow{M} x$  en  $E$ ; luego como  $x_n = 0 \xrightarrow{M} 0$  resulta que  $x = 0$  y en consecuencia  $\{0\}$  es b-cerrado.

**Proposición 3.2.7 :** Sean  $(E, \beta)$  un e.l. y  $M$  un subespacio lineal de  $E$ . Entonces :

$E/M$  provisto de la bornología cociente es separado si y sólo si  $M$  es b-cerrado en  $E$ .

**Demostración :** Supongamos que  $E/M$  es separado, entonces por Proposición 3.2.6;  $\{\bar{0}\} = \{M\}$  es b-cerrado en  $E/M$ , luego siendo la epiyección canónica  $\psi: E \rightarrow E/M$  lineal acotada resulta por Proposición 3.2.5 que  $M = \psi^{-1}(\bar{0})$  es b-cerrado en  $E$ .

Recíprocamente, supongamos que  $M$  es b-cerrado en  $E$  y  $H$  un subespacio lineal acotado de  $E/M$ . Entonces  $H = \{\bar{0}\}$ ; en efecto : Sea  $\psi(x) \in H$ ;  $x \in E$  y  $\mathbb{K}\psi(x)$  el subespacio generado por  $\psi(x)$  en  $E/M$ .

Sabemos que la bornología cociente sobre  $E/M$  admite por base a la familia  $\{\psi(A) / A \in \beta \text{ equil.}\}$ .

Sabemos que la bornología cociente sobre  $E/M$  admite por base a la familia  $\{\psi(A) / A \in \mathcal{B} \text{ equil.}\}$ . Luego como  $\mathbb{K}\psi(x) \subseteq H$  y  $H \in \mathcal{B}$ , existe  $A \in \mathcal{B}$  (equil.) :  $\mathbb{K}\psi(x) \subseteq \psi(A)$

$$\Leftrightarrow \psi^{-1}(\mathbb{K}\psi(x)) \subseteq \psi^{-1}(\psi(A))$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{K}x \subseteq A + M \Leftrightarrow \forall n \geq 1 : nx \in A + M$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1, \exists x_n \in M : nx - x_n \in A$$

$$\Leftrightarrow x - x_n/n \in 1/n A, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x_n/n - x \xrightarrow{M} 0 \text{ en } E$$

$$\Leftrightarrow x_n/n \xrightarrow{M} x \text{ en } E, \text{ con } (x_n/n)_{n \geq 1} \subseteq M$$

$$\Leftrightarrow x \in M \quad (\text{pues } M \text{ es } b\text{-cerrado})$$

$$\Leftrightarrow \psi(x) = M = \bar{0}$$

Luego,  $\{\bar{0}\}$  es el único subespacio acotado de  $E$ , es decir,  $E$  es separado.

### 3. ESPACIO LINEAL BORNOLÓGICO SEPARADO ASOCIADO A UN ESPACIO LINEAL BORNOLÓGICO.

A todo e.l.b.  $(E, \mathcal{B})$  podemos asociar un e.l.b. separado  $(\overset{\circ}{E}, \overset{\circ}{\mathcal{B}})$  y una aplicación canónica de  $E$  en  $\overset{\circ}{E}$  tal que toda aplicación lineal acotada de  $E$  en un e.l.b. separado se factoriza de manera única a través de  $\overset{\circ}{E}$ .

Para esto consideremos la cerradura bornológica.

**Definición 3.3.1 :** Sean  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b. y  $A \subseteq E$ . Llamaremos **cerradura bornológica de  $A$  o  $b$ -cerradura de  $A$** , a la intersección de todas las partes  $b$ -cerradas de  $E$  que contienen  $A$ , es decir, la cerradura de  $A$  respecto a la topología  $\mathcal{Z}(E)$  de la  $b$ -cerradura.

Notación : b-cerradura de  $A = \bar{A}^b$ .

Así  $\bar{A}^b$  es la menor parte de  $E$  b-cerrada que contiene a  $A$ .

Observemos que  $\bar{A}^b = (\bar{A}^b)^b$  (1)

Proposición 3.3.1 : Sean  $(E, \mathcal{B})$  un e.l.b. y  $F$  un subespacio lineal de  $E$ , entonces  $\bar{F}^b$  es un subespacio lineal de  $E$ .

Demostración : Primeramente observemos que  $\forall A$  b-cerrado en  $E$  y  $\forall x \in E$ ;  $A_x = \{z \in E / x + z \in A\}$  es b-cerrado en  $E$ . En efecto : si  $A = \emptyset$ , entonces  $\forall x \in E : A_x = \emptyset$  que es b-cerrado.

Supongamos que  $A \neq \emptyset$  y  $(x_n) \subseteq A_x$ ,  $y \in E$   $x_n \xrightarrow{M} y$ , entonces  $x_n + x \xrightarrow{M} y + x$ ;  $(x_n + x)_{n \geq 1} \subseteq A$

$$\Leftrightarrow y + x \in A \quad (A \text{ b-cerrado})$$

$$\Rightarrow y \in A_x$$

$$\Rightarrow A_x \text{ es b-cerrado en } E.$$

Sean  $x, y \in \bar{F}^b$ , entonces para todo  $a \in F$  se tiene que  $\bar{F}_a^b = \{z \in E / a + z \in \bar{F}^b\}$  es b-cerrado, además si  $z \in F$ , entonces  $z + a \in F \subseteq \bar{F}^b \Leftrightarrow z \in \bar{F}_a^b \Leftrightarrow F \subseteq \bar{F}_a^b \Leftrightarrow \bar{F}^b \subseteq \bar{F}_a^b$

Consideremos ahora  $\bar{F}_y^b = \{z \in E / y + z \in \bar{F}^b\}$ . Claramente  $\bar{F}_y^b$  es b-cerrado en  $E$  y contiene a  $\bar{F}^b$ , luego  $x + y \in \bar{F}^b$  pues  $x \in \bar{F}^b \subseteq \bar{F}_y^b$ .

Así,  $\forall x, y \in \bar{F}^b : x + y \in \bar{F}^b$ .

Sea  $\lambda \in K$ , como la aplicación  $f : E \rightarrow E : x \mapsto \lambda x$  es acotada, la preimagen por  $f$  de cualquier parte b-cerrada de  $E$  es b-cerrada en  $E$  (Proposición 3.2.5).

Consideremos el conjunto  $A^\lambda = \{z \in E / \lambda z \in \bar{F}^b\}$ , entonces  $A^\lambda = f^{-1}(\bar{F}^b)$  y en consecuencia  $A^\lambda$  es  $b$ -cerrada. Además,

$$x \in F \Leftrightarrow \lambda x \in F \subseteq \bar{F}^b \Leftrightarrow f(x) \in \bar{F}^b$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\bar{F}^b) = A^\lambda$$

Luego  $F \subseteq A^\lambda$  y en consecuencia  $\bar{F}^b \subseteq A^\lambda$

$$\Leftrightarrow \forall z \in \bar{F}^b : \lambda z \in \bar{F}^b$$

Por lo tanto,  $\bar{F}^b$  es un subespacio lineal de  $E$ .

Proposición 3.3.2 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $(0)^b$  la  $b$ -cierre del origen de  $E$ ,  $\bar{E} = E / (\overline{(0)^b})$  el e.l.b. cociente,  $\psi : E \longrightarrow \bar{E}$  la epimorfía canónica. Entonces

- i)  $\bar{E}$  es un e.l.b. separado.
- ii) Para cada aplicación lineal acotada  $u$  de  $E$  en un e.l.b. separado  $G$ , existe una única aplicación lineal acotada  $\bar{u}$  de  $\bar{E}$  en  $G$  tal que  $u = \bar{u} \circ \psi$ .

Demostración :

- i) Basta observar que  $(\overline{(0)^b})$  es  $b$ -cerrado en  $E$  y aplicar Proposición 3.2.7.
- ii) Sean  $(G, \beta')$  un e.l.b. separado y  $u : E \longrightarrow G$  una aplicación lineal acotada, entonces  $\{0_G\}$  es  $b$ -cerrado en  $G$

$$\Leftrightarrow u^{-1}(\{0_G\}) \text{ es } b\text{-cerrado en } E$$

$$\text{Además } \{0\} \subseteq u^{-1}(\{0_G\}) \Leftrightarrow \overline{\{0\}}^b \subseteq u^{-1}(\{0_G\}) = \text{Ker } u$$

$$\text{Sea } \bar{u} : E / (\overline{\{0\}}^b) \longrightarrow G : \bar{x} \longmapsto u(x)$$

$\bar{u}$  está bien definida pues  $\overline{\{0\}}^b \subseteq \text{Ker } u$  y naturalmente

$$\forall x \in E : u(x) = \bar{u}(\psi(x)) = (\bar{u} \circ \psi)(x), \text{ es decir, } u = \bar{u} \circ \psi.$$

Además  $\bar{u}$  es única puesto que si  $v : E / (\overline{\{0\}}^b) \longrightarrow G$  es tal que  $u = v \circ \psi$ , entonces para todo  $\bar{x} \in E / (\overline{\{0\}}^b)$  se tiene que

$v(\bar{x}) = (v \circ \psi)(x) = u(x) = (\overset{\circ}{u} \circ \psi)(x) = \overset{\circ}{v}(\psi(x)) = \overset{\circ}{u}(\bar{x})$ , es decir,  $v = \overset{\circ}{u}$ .

Finalmente  $\overset{\circ}{u}$  es lineal acotada; en efecto: claramente  $\overset{\circ}{u}$  es lineal pues u lo es.

Sea  $B$  un acotado en la bornología cociente de  $\mathcal{T}/\{\overline{0}\}^b$ , entonces  $\exists A \in \beta : B \subseteq \psi(A)$ , luego  $\overset{\circ}{u}(B) \subseteq \overset{\circ}{u}(\psi(A)) = (\overset{\circ}{u} \circ \psi)(A) = u(A) \in \beta'$ , es decir,  $\overset{\circ}{u}$  es acotada.

**Definición 3.3.2 :** El espacio lineal  $\overset{\circ}{E}$  de la Proposición anterior es llamado "el espacio bornológico separado asociado a  $\mathcal{T}$  y  $\psi : E \rightarrow \overset{\circ}{E}$  la aplicación canónica sobre  $\mathcal{T}$ ."

#### 4. PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA DE LA B-CERRADURA

Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b. e indiquemos por  $\mathcal{T}(E)$  la topología de la b-cerradura sobre  $\mathcal{T}$ . Recordemos que como consecuencia de la Proposición 3.2.5 tenemos que :

**Proposición 3.4.1 :** Sean  $(E, \beta_1), (F, \beta_2)$  dos e.l.b. y  $f : E \rightarrow F$  una aplicación lineal acotada; entonces  $f$  es  $\mathcal{T}(E)$ - $\mathcal{T}(F)$ -continua.

**Proposición 3.4.2 :** Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $a \in E$ , entonces las aplicaciones :

$$h_\lambda : E \rightarrow E : x \rightarrow \lambda x; \quad f : \mathbb{K} \rightarrow E : \lambda \rightarrow \lambda a \quad \text{y}$$

$T_a : E \rightarrow E : x \rightarrow a+x$  son todas continuas.

Demostración :

i)  $h_\lambda$  es continua.

Sea  $B \in \beta$ , entonces  $\lambda B \in \beta$ , luego  $h_\lambda(B) \in \beta$ ; es decir,  $h_\lambda$  es acotada y luego continua por la Proposición 3.4.1.

ii)  $f_a$  es continua.

$$\begin{aligned} \text{Sea } \alpha > 0, \text{ entonces } f_a(\{\lambda \in \mathbb{K} / |\lambda| \leq \alpha\}) &= \{\lambda a / |\lambda| \leq \alpha\} \\ &= \bigcup_{|\lambda| \leq \alpha} \lambda \{a\} = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \alpha \{a\} = \alpha \left( \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda \{a\} \right) = \alpha \epsilon(\{a\}) \in \beta. \end{aligned}$$

Luego  $f_a$  es acotada y luego continua (Proposición 3.4.1)

iii)  $T_a$  es continua

Sea  $A \in C_0 \mathcal{T}(E)$ , entonces  $A+a$  también es b-cerrado y luego  $T_a^{-1}(A+a) = A+a-a = A \in C_0 \mathcal{T}(E)$

Por lo tanto,  $T_a$  es continua

Corolario 3.4.2' : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b.,  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $a \in E$ , entonces :

i) Si  $\lambda \neq 0$  :  $h_\lambda$  es un homeomorfismo .

ii)  $T_a$  es un homeomorfismo.

Demostración :

i) Si  $\lambda \neq 0$ , la biyección  $h_\lambda$  tiene por inversa  $h_\lambda^{-1}$  que también es continua; luego  $h_\lambda$  es un homeomorfismo.

ii)  $T_{-a}$  es continua y es la inversa de  $T_a$ , luego  $T_a$  es un homeomorfismo.

Proposición 3.4.3 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b., entonces :

1)  $\forall (x_n) \subseteq E, \forall x \in E$  :

$$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathcal{T}(E)} x$$

- 2)  $\mathcal{Z}(E)$  es la topología más fina sobre  $E$  entre todas las topologías  $\mathcal{Z}$  sobre  $E$  tales que se verifica (1).

Demostración :

1) Sean  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq E$  y  $x \in E : x_n \xrightarrow{M} x$ .

Supongamos que  $x = 0$ ; entonces si  $x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} 0$ , existe  $V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{Z}(E))$  (abierto) y una subsucesión  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  tal que  $x_{n_k} \notin V, \forall k \geq 1$ .

Luego  $(x_{n_k}) \subseteq \mathcal{C}V$  y  $\mathcal{C}V \in \mathcal{C}_0 \mathcal{Z}(E)$ . Pero

$$\mathcal{C}V \in \mathcal{C}_0 \mathcal{Z}(E) \Leftrightarrow \mathcal{C}V = (\mathcal{C}V)^{(1)}.$$

Ahora,  $x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow x_{n_k} \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow 0 \in (\mathcal{C}V)^{(1)} = \mathcal{C}V$ , es decir,  $0 \in V \longrightarrow \longleftarrow$

Luego, necesariamente  $x_n \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{(E)} 0$ .

Supongamos ahora que  $x \neq 0$ , entonces

$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x_n - x \xrightarrow{M} 0 \Leftrightarrow x_n - x \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} x$ , pues las traslaciones son homeomorfismos.

- 2) Sea  $\mathcal{F}$  una topología sobre  $E$  tal que toda sucesión boro-lógicamente convergente es  $\mathcal{F}$ -convergente hacia el mismo límite.

Sea  $A \subseteq E$ ,  $\mathcal{F}$ -cerrado; mostraremos que  $A$  es  $\mathcal{Z}(E)$ -cerrado, es decir b-cerrado.

En efecto :  $x \in A^{(1)} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A : x_n \xrightarrow{M} x$

Luego  $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x \Leftrightarrow x \in \bar{A}^{\mathcal{F}} = A$  pues  $A$  es  $\mathcal{F}$ -cerrado.

Así,  $A^{(1)} \subseteq A$  y como  $A \subseteq A^{(1)}$ , resulta que  $A = A^{(1)}$ , es decir,  $A$  es b-cerrado (Proposición 3.2.3).

Por lo tanto,  $\mathcal{C}_0 \mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_0 \mathcal{Z}(E)$ , lo que implica que

$\mathcal{T} \subseteq \tau(E)$ .

Proposición 3.4.4 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $W \in \mathcal{V}(0, \tau(E))$  (abierta), entonces  $V = b(W)$  (el núcleo equilibrado de  $W$ ), es una vecindad de cero,  $\tau(E)$ -abierta y bornívora.

Demostración : Es claro que  $V$  contiene a  $0$ ; probaremos que  $V$  es  $\tau(E)$ -abierta, es decir, que  $F = \mathcal{C}V$  es  $b$ -cerrado.

Sean  $(x_n) \subseteq F : x_n \xrightarrow{M} x, x \in E$ ; entonces como  $V = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda W$  resulta que :  $(x_n) \subseteq F = \mathcal{C}V \Leftrightarrow x_n \notin V, \forall n \geq 1$

$$\forall n \geq 1, \exists \lambda_n \in \mathbb{K}, |\lambda_n| \leq 1 : \lambda_n x_n \notin V$$

Ahora  $(\lambda_n) \subseteq B_{\mathbb{K}}[0, 1]$  la bola unitaria de  $\mathbb{K}$  que es compacta, luego extrayendo una subsucesión de  $(\lambda_n)$  si es necesario, podemos suponer que existe  $\lambda \in B_{\mathbb{K}}[0, 1] : \lambda_n \rightarrow \lambda$

Por otra parte,  $W$  abierta  $\Leftrightarrow \mathcal{C}W$  es  $b$ -cerrado, además  $\lambda_n^{-1} x_n \in \mathcal{C}W, \forall n \geq 1$  y  $\lambda_n^{-1} x_n \xrightarrow{M} \lambda x$ , pues  $\lambda_n \rightarrow \lambda, x_n \xrightarrow{M} x$

$$\text{luego } \lambda x \in (\mathcal{C}W)^{(1)} = \mathcal{C}W \subseteq \mathcal{C}V$$

$$\Leftrightarrow \lambda x \in \mathcal{C}V \Leftrightarrow \lambda x \notin V \Leftrightarrow x \notin 1/\lambda V, \quad / \quad 1/\lambda \quad / \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \notin V = \mathcal{C}F \Leftrightarrow x \in F$$

Luego  $F^{(1)} \subseteq F$  y en consecuencia  $F = F^{(1)}$ ; se sigue que  $F$  es  $b$ -cerrado de donde resulta entonces que  $V$  es abierta.

En resumen  $V$  es una vecindad abierta del origen en la topología  $\tau(E)$ .

Mostraremos ahora que  $V$  es bornívora. Supongamos que ésto no es así, entonces existe  $B \in \mathcal{J}^b$  equilibrado tal que

$\nexists n \in V, \forall n \geq 1$ , entonces  $\forall n \geq 1; \exists b_n \in B : b_n \notin nV$ , es decir,  $b_n/n \notin V, \forall n \geq 1$ .

Luego  $b_n/n \in \mathcal{C}V = (\mathcal{C}V)^{(1)}, \forall n \geq 1$  (pues  $V$  es  $b$ -cerrado).

Ahora :  $\int_B(b_n/n) = 1/n \int_B(b_n) \leq 1/n \cdot 1 = 1/n$ , pues  $b_n \in B$

$\Leftrightarrow b_n/n \xrightarrow{K} 0$ , con  $(b_n/n) \in \mathcal{C}V$

Luego  $0 \in (\mathcal{C}V)^{(1)} = \mathcal{C}V \Leftrightarrow 0 \notin V \longrightarrow \longleftarrow$

Por lo tanto, existe  $n_0 \geq 1 : B \subseteq n_0V$ , es decir,  $V$  es bornívoro.

Proposición 3.4.5 : Sea  $(E, \beta)$  un e.l.b., entonces :

1)  $\forall U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E)) : U$  es bornívora.

2)  $\mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$  admite un sistema fundamental formado por vecindades de cero abiertas, equilibradas y bornívoras.

Demostración :

1) Sean  $U \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$  y  $B \in \beta$ , entonces existe  $W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$

abierta tal que  $W \subseteq U$ , pero entonces si  $V = b(W)$ , por la Proposición 3.4.4 se tiene que  $V \subseteq W \subseteq U, \forall V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$ ,  $V$  bornívora, luego existe  $\alpha > 0 : B \subseteq \lambda V \subseteq \lambda W \subseteq \lambda U, \forall |\lambda| \geq \alpha$

$\Leftrightarrow U$  es bornívoro.

2) La familia  $\{W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$  abiertas es un sistema fundamental de vecindades del origen, luego también lo es  $\{b(W) / W \in \mathcal{V}(0, \mathcal{T}(E))$  abierta} y cada  $b(W)$  es bornívoro.

Proposición 3.4.6 : Sobre  $\mathbb{K}^n$  consideremos la bornología usual (la de V. N.), entonces

$$\mathcal{T}(\mathbb{K}^n) = \mathcal{T}_{us}.$$

Demostración : Como  $\tau_{us}$  es metrizable,  $\forall (x_n) \subseteq \mathbb{K}^n, x \in \mathbb{K}^n$  :

$$x_n \xrightarrow{M} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{us}} x$$

Luego  $\tau_{us} \leq \tau(\mathbb{K}^n)$  (Proposición 3.2.8 (2)).

Supongamos que  $\tau_{us} \neq \tau(\mathbb{K}^n)$ , entonces existe  $A \in \mathcal{C}_0 \tau(\mathbb{K}^n)$  tal que  $A$  no es  $\tau_{us}$ -cerrado, es decir,  $A \subsetneq \bar{A}^{\tau_{us}}$

$$\Rightarrow \exists x \in \bar{A}^{\tau_{us}} : x \notin A$$

pero  $x \in \bar{A}^{\tau_{us}} \Leftrightarrow \exists (a_n) \subseteq A : a_n \xrightarrow{\tau_{us}} x \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{M} x$

Luego  $x \in A^{(1)} = A$  pues  $A$  es  $\tau(\mathbb{K}^n)$ -cerrado, entonces  $x \in A$  y  $x \notin A$  lo que es una contradicción.

Por lo tanto,  $\tau_{us} = \tau(\mathbb{K}^n)$ .

De aquí resultan las siguientes afirmaciones :

Proposición 3.4.7 : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  una forma lineal; entonces

$f$  es acotada si y sólo si  $\text{Ker} f$  es  $b$ -cerrado.

Demostración : Supongamos que  $f$  es acotada, luego siendo  $\{0\}$   $\tau_{us}$ -cerrado y  $\tau(\mathbb{K}) = \tau_{us}$  resulta que  $\{0\}$  es  $b$ -cerrado y en consecuencia  $\text{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$  es  $b$ -cerrado (Prop. 3.2.5).

Recíprocamente, supongamos que  $\text{Ker} f$  es  $b$ -cerrado en  $E$ ; si  $f = 0$  nada hay que demostrar.

Supongamos que  $f \neq 0$  y sea  $H = \text{Ker} f$ , entonces  $E/H$  es de dimensión 1; luego considerando la bornología cociente sobre  $E/H$ , como  $\text{Ker} f$  es  $b$ -cerrado;  $E/H$  es separado (Proposición 3.2.7), entonces  $E/H \cong_b \mathbb{K}$ , por Lema 4.3.1 el cual se demuestra independiente de esta proposición.

Más aún el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & K \\
 \psi \downarrow & & \uparrow \bar{f} \\
 & & E/\text{Ker}f
 \end{array}$$

donde  $\psi$  es la suryección canónica (acotada) y  $\bar{f}$  el isomorfismo inducido (bornológico).

**Proposición 3.4.8 :** Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. y  $f : E \rightarrow K$  una forma lineal, entonces

$f$  es  $\tau(E)$ -continua si y sólo si  $f$  es acotada.

**Demostración :** Supongamos que  $f$  es acotada, entonces  $f$  es

$\tau$  -  $\tau(K)$ -continua (Prop. 3.4).

luego como  $\tau(K) = \tau_{us}$  resulta que  $f$  es  $\tau(E) - \tau_{us}$ -continua.

Recíprocamente, supongamos que  $f$  es  $\tau(E) - \tau_{us}$  continua; luego como  $\{0\}$  es  $\tau_{us}$ -cerrado,  $\{0\}$  es  $\tau(K)$ -cerrado, es decir,  $\{0\}$  es b-cerrado, luego

$$\text{Ker}f = f^{-1}(\{0\})$$

es b-cerrado en  $\tau$  (Proposición 3.2.5) y en consecuencia por (Proposición 3.4.7)  $f$  es acotada.

Concluimos esta sección con una interesante caracterización de las sucesiones  $\tau(E)$ -convergentes mediante el concepto de sucesiones  $M$ -convergentes; para ello necesitaremos de algunas notaciones y resultados previos.

En lo que sigue  $(E, \beta)$  será un e.l.b. separado.

Para cada  $A \subseteq E$  definimos

$$A' = \{x \in E / \exists (a_n) \subseteq A : a_n \xrightarrow{M} x ; a_n \neq x, \forall n\}, A' \subseteq A^{(1)}$$

$\bar{A}$  será la adherencia de  $A$  respecto a la topología  $\tau(E)$

Recordemos que  $A = \bar{A} \Leftrightarrow A = A^{(1)}$  (Proposición 3.2.3)

Con estas notaciones tenemos :

1)  $A$  finito  $\Leftrightarrow A' = \emptyset$ .

En efecto; supongamos que existe  $x \in A'$ , entonces existe  $(a_n) \subseteq A$ ,  $a_n \neq x$ ,  $\forall n \geq 1$  :  $a_n \xrightarrow{M} x$   
 como  $A$  es finito, existe una sub-sucesión  $(a_{n_p})$  de  $(a_n)$  tal que  $(a_{n_p})$  es constante y  $a_{n_p} \xrightarrow{M} x$ , pero entonces  $a_{n_p} = x$ ,  
 $\forall p = 1, \dots \rightarrow \leftarrow$

Luego,  $A' = \emptyset$ .

2)  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

En efecto; claramente  $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

Sea  $x \in (A \cup B)'$ , entonces existe  $(c_n) \subseteq A \cup B$ ;  $c_n \neq x, \forall n$ .

Tenemos los siguientes casos :

i)  $(c_n) \subseteq A \Leftrightarrow x \in A' \subseteq A' \cup B'$

ii)  $(c_n) \subseteq B \Leftrightarrow x \in B' \subseteq A' \cup B'$

iii) existe una sucesión  $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$  de naturales tal que  $(c_{n_p}) \subseteq A$ ; entonces  $(c_{n_p})$  es una sub-sucesión de  $(c_n)$  y luego  $c_{n_p} \xrightarrow{M} x$ , con  $c_{n_p} \neq x, \forall p \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in A' \subseteq A' \cup B'$

iv) existe una sucesión  $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$  de naturales tal que  $(c_{n_p}) \subseteq B$ ; entonces  $(c_{n_p})$  es una sub-sucesión de  $(c_n)$  y luego  $c_{n_p} \xrightarrow{M} x$ , con  $c_{n_p} \neq x, \forall p \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in B' \subseteq A' \cup B'$

En resumen  $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$  y luego  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

3) Si  $(x_n) \subseteq E$  y  $x \in \{x_n / n \geq 1\}'$ , entonces existe  $(x_{n_p}) \subseteq (x_n)$  tal que  $x_{n_p} \xrightarrow{M} x$ ,  $x_{n_i} \neq x_{n_k}$  si  $i \neq k$ .

En efecto; si  $x \in \{x_n / n \geq 1\}'$ , existe una sucesión de naturales  $p_1, p_2, \dots$  tal que  $x_{n_p} \xrightarrow{M} x$ ,  $x_{p_i} \neq x$ ,  $\forall i \geq 1$ .

Si la sucesión  $(x_{n_p})$  contiene una sub-sucesión  $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots$  constante, digamos  $y$ , entonces

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{p_i} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_{i_k}} = y$$

$\Leftrightarrow x_{p_{i_k}} = x$ ,  $k=1, \dots$ , lo que no es posible puesto

que  $x \in \{x_n / n \geq 1\}'$ .

Luego, ningún término en la sucesión  $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots$  figura una infinidad de veces y en consecuencia, esta sucesión contiene una sub-sucesión  $x_{p_{q_1}}, x_{p_{q_2}}, \dots$  tal que  $x_{p_{q_i}} \neq x_{p_{q_k}}$

para  $i \neq k$  y  $p_{q_1} < p_{q_2} < \dots <$

Además es claro que  $x_{p_{q_k}} \xrightarrow{M} x$ .

Luego para obtener la tésis basta colocar  $n_k = p_{q_k}$ .

4)  $A = \bar{A} \Leftrightarrow A' \subseteq A$ .

En efecto;  $A = \bar{A} \Leftrightarrow A' \subseteq A^{(1)} = \bar{A} = A \Leftrightarrow A' \subseteq A$

Recíprocamente,  $z \in A^{(1)} \Leftrightarrow \exists (a_n) \subseteq A : a_n \xrightarrow{M} z$

Tenemos dos casos :

i)  $\exists (a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ , de términos constantes, digamos  $y$ , tal que  $a_{n_k} \xrightarrow{M} z$ , entonces  $y = z$ , es decir,  $z \in A$ .

ii)  $\nexists$  una sub-sucesión de términos constantes de  $(a_n)$  que  $M$ -convergen a  $z$ .

Luego, como  $z \in A^{(1)}$ ,  $\exists (a_{n_k}) \subseteq (a_n)$  tal que

$a_{n_k} \xrightarrow{M} z$ ;  $a_{n_k} \neq z$ ,  $\forall k \geq 1 \Leftrightarrow z \in A' \subseteq A$ .

En cualquier caso  $z \in A$ .

Luego,  $A^{(1)} \subseteq A$  y en consecuencia  $A$  es cerrado, es decir,  $A = \bar{A}$ .

5)  $A, B \subseteq E$ ,  $B$  finito,  $A' \subseteq A \cup B \Leftrightarrow \bar{A} = A \cup A'$

$$\begin{aligned} \text{En efecto : } (A \cup A')' &\subseteq (A \cup (A \cup B))' = (A \cup B)' = A' \cup B' \\ &= A' \cup \emptyset \quad (\text{por 1.}) \\ &= A' \subseteq A \cup A' \end{aligned}$$

luego por (4.) :  $A \cup A'$  es cerrado. Así  $\overline{A \cup A'} = A \cup A'$

$$\text{Luego } \bar{A} \subseteq \overline{A \cup A'} = A \cup A'$$

$$\text{Por otra parte, } A \subseteq \bar{A} \Leftrightarrow A' \subseteq \bar{A}' \subseteq \bar{A} \quad (\text{por 4}).$$

Luego  $A \cup A' \subseteq \bar{A}$  y en consecuencia  $\bar{A} = A \cup A'$ .

6) Como consecuencia de (5.); si  $A$  y  $B$  son finitos :

$A' = \emptyset \Leftrightarrow A' \subseteq A \cup B$ , luego  $\bar{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset = A$ , luego  $A$  es cerrado.

7) Sean  $(x_n)$  una sucesión de  $E$  y  $x_0 \in E$  tal que

$$x_0 \in \overline{\{x_{n_p} / p \geq 1\}}, \quad \forall (x_{n_p}) \subset (x_n), \text{ entonces}$$

$$\overline{\{x_n / n \geq 1\}} = \{x_n / n \geq 1\} \cup \{x_n / n \geq 1\}'.$$

Demostración : En primer lugar probaremos que :

$$\{x_n / n \geq 1\}' \subseteq \{x_0\}. \quad \text{En efecto;}$$

si  $\{x_n / n \geq 1\}' = \emptyset$  nada hay que probar.

Supongamos entonces que existe  $x \in \{x_n / n \geq 1\}'$ ; luego por (3) existe  $(x_{n_p}) \subset (x_n) : x_{n_p} \xrightarrow{M} x; x_{n_i} \neq x_{n_k}$  si  $i \neq k$  (\*)

Pero entonces cada subsucesión de  $(x_{n_p})$  es  $M$ -convergente a  $x$ ,

es decir,  $\{x_{n_p} / p \geq 1\}' = \{x\}$ , luego :

$$\{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\}' = \{x\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\}' \subseteq \{x\} \subseteq \{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\} \cup \{x\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_0 \in \overline{\{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\}} &= \{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\} \cup \{x_{n_{k+1}}, \dots\}' \\ &= \{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots\} \cup \{x\} \quad \square \end{aligned}$$

Ahora, si para algún  $k_0$  :  $x_0 \in \{x_{n_{k_0+1}}, x_{n_{k_0+2}}, \dots\}$ , es

decir,  $x_0 = x_{n_{k_0+p_0}}$ , entonces teniendo en cuenta la propiedad

(\*) de la subsucesión  $(x_{n_p})$  y que la relación  $\square$ , podemos

escoger  $k'$  de modo que  $x_0 \notin \{x_{n_{k'+1}}, x_{n_{k'+2}}, \dots\}$

Luego necesariamente  $x_0 = x$ .

Así,  $\{x_n / n \geq 1\}' = \{x\} = \{x_0\}$  y luego  $\{x_n / n \geq 1\}' \subseteq \{x_0\}$

$\Leftrightarrow \{x_n / n \geq 1\}' = \{x_n / n \geq 1\} \cup \{x_0\}$  y siendo  $\{x_0\}$  finito,

resulta por (5) que  $\overline{\{x_n / n \geq 1\}} = \{x_n / n \geq 1\} \cup \{x_n / n \geq 1\}'$ , como queríamos probar.

Proposición 3.4.9 : Sean  $(x_n)$  una sucesión en  $E$  y  $x_0 \in E$ ,  
entonces :

$x_n \xrightarrow{\tau(E)} x_0 \Leftrightarrow$  Toda subsucesión de  $(x_n)$  admite una sub-  
sucesión  $M$ -convergente a  $x_0$ .

Demostración :

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x_n \xrightarrow{\tau(E)} x$ ; entonces existe

$V \in \mathcal{V}(x, \tau(E))$  abierta tal que  $\forall k \geq 1, \exists n_k \geq k : x_{n_k} \notin V$

Consideremos la subsucesión  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$ , luego existe

$(x_{n_{k_m}})$  subsucesión de  $(x_{n_k})$  :  $x_{n_{k_m}} \xrightarrow{M} x$  y además

$$x_{n_{k_m}} \notin V, \forall m \geq 1 \quad (*)$$

pero  $\mathcal{Z}(E)$  es la topología, la más fina sobre  $E$  tal que toda sucesión  $M$ -convergente es  $\mathcal{Z}(E)$ -convergente (Proposición 3.4.3)

luego  $x_{n_{k_m}} \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} x$ , entonces existe  $m_0 \geq 1$  tal que

$$x_{n_{k_m}} \in V, \forall m \geq m_0 \longrightarrow (*) \longleftarrow$$

( $\square$ ) Supongamos que  $x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} x_0$ .

Si ésta sucesión contiene una subsucesión  $(x_{n_k})$  tal

que  $x_0 \notin \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$ , entonces el abierto

$W = E - \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$  es tal que  $x_0 \in W$  y no contiene nin-

gún elemento de la sucesión  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ ; esto contradice el

hecho que  $x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}(E)} x_0$ . Luego  $x_0 \in \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$ , para toda

$(x_{n_k}) \subset (x_n)$  y luego por (7);  $x_0 \in \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}} \cup \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$ .

Luego para toda subsucesión  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  se tiene que

i)  $x_0 \in \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$  o bien ii)  $x_0 \in \overline{\{x_{n_k} / k \geq 1\}}$ .

En el caso (i), existe  $k_0 \geq 1$  :  $x_0 = x_{n_{k_0}}$ , luego definiendo

do  $x_{n_{k_0+1}} = x_{n_{k_0+2}} = \dots = x_0$  obtenemos la subsucesión

$(x_{n_{k_0+p}})_{p \geq 1}$  de  $(x_{n_k})$  tal que  $x_{n_{k_0+p}} \xrightarrow{M} x_0$ .

En el caso (ii), por (3), existe una subsucesión  $(x_{n_{k_p}})$  de  $(x_{n_k})$  tal que  $x_{n_{k_p}} \xrightarrow{M} x_0$ .

Esto concluye la demostración.

Observación : La demostración anterior es una adaptación de un Teorema sobre " convergencia de tipo L" de J. Kisynski (Lublin).

CAPITULO IV

ESPACIOS BORNOLÓGICOS COMPLETOS

## 1. DISCOS COMPLETANTES

Definición 4.1.1 : Sean  $E$  un e.l.,  $A \subseteq E$  (disco). Se dice que  $A$  es completante si  $E_A$  es un espacio de Banach.

Definición 4.1.2 : Sean  $(E, \tau)$  un e.l.t.,  $A \subseteq E$ . Se dice que  $A$  es secuencialmente completo si para toda sucesión  $(x_n)$  de  $A$   $\tau$ -Cauchy, existe  $x$  en  $A$  :  $x_n \xrightarrow{\tau} x$ .

Proposición 4.1.1 : Todo subconjunto  $A$  secuencialmente completo de un e.l.t. Hausdorff  $(E, \tau)$  es secuencialmente cerrado, es decir,  $\forall (x_n) \subseteq A, x \in E$  tal que  $x_n \longrightarrow x \iff x \in A$ .

Demostración : Sean  $(x_n) \subseteq A, x \in E : x_n \xrightarrow{\tau} x$ , entonces  
 $(x_n) \subseteq A$  es  $\tau$ -Cauchy  $\iff \exists x' \in A : x_n \xrightarrow{\tau} x'$   
 $\iff x = x' \in A$

Proposición 4.1.2 : Sean  $(E, \tau)$  un e.l.t. y  $A$  una parte secuencialmente completa de  $E$ , entonces para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda A$  es secuencialmente completo.

Demostración : Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$ , entonces

- i) Si  $\lambda = 0$ , es inmediato que  $\lambda A$  es secuencialmente completo.
- ii) Supongamos que  $\lambda \neq 0$  y  $(x_n) \subseteq \lambda A$  es  $\tau$ -Cauchy, entonces  $(x_n/\lambda) \subseteq A$  es  $\tau$ -Cauchy  
 $\iff \exists x \in A : x_n/\lambda \xrightarrow{\tau} x$   
 $\iff \exists \lambda x \in \lambda A : x_n \xrightarrow{\tau} \lambda x$

$\Leftrightarrow \lambda A$  es secuencialmente completo.

Lema 4.1.1 :  $(E, p)$  seminormado y Hausdorff  $\Leftrightarrow (E, p)$  normado.

Demostración : Sea  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , entonces existe  $V \in \mathcal{V}(0, \tau_p)$

tal que  $x \notin V \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : x \notin \varepsilon V_p \subseteq V$

$\Leftrightarrow p(x) > \varepsilon \Leftrightarrow p(x) \neq 0$

Luego  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  y en consecuencia  $(E, p)$  es normado.

Proposición 4.1.3 : Sean  $(E, \tau)$  un e.l.t. Hausdorff y  $A \subseteq E$  un disco  $\tau$ -acotado y secuencialmente completo, entonces  $A$  es completante.

Demostración : Sabemos que  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es seminormado.

Además  $(E_A, \tau_{E_A})$  es Hausdorff pues  $(E, \tau)$  lo es.

Por otra parte,  $\tau_{E_A} \leq \tau_{\mathcal{G}_A}$  ; en efecto : sea  $V \in \mathcal{V}(0, \tau)$ , entonces  $V \cap E_A \in \mathcal{V}(0, \tau_{E_A})$ , luego como  $V_{\mathcal{G}_A} = \{x \in E_A / \mathcal{G}_A(x) < 1\} \subseteq A$

y  $A$   $\tau$ -acotado, existe  $\alpha > 0 : A \subseteq \alpha V \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : (1/\alpha)A \subseteq V \cap E_A$  ; con  $(1/\alpha)A \in \mathcal{V}(0, \tau_{\mathcal{G}_A})$ .

$\Leftrightarrow V \cap E_A \in \mathcal{V}(0, \tau_{\mathcal{G}_A})$

Luego  $\tau_{E_A} \leq \tau_{\mathcal{G}_A}$  y en consecuencia  $(E_A, \tau_{\mathcal{G}_A})$  es Hausdorff.

Por lo tanto,  $(E_A, \tau_{\mathcal{G}_A})$  es normado (Lema 4.1.1).

Mostraremos ahora que  $(E_A, \tau_{\mathcal{G}_A})$  es completo.

Sea  $(x_n) \subseteq E_A$   $\mathcal{G}_A$ -Cauchy y consideremos la inyección ca-

nónica  $i : E_A \longrightarrow E$ .

$i$  es  $\tau_{\mathcal{G}_A} - \tau$  continua; en efecto :

$$\begin{aligned} V \in \mathcal{V}(0, \tau) \quad \exists \alpha > 0 : (1/\alpha)A \subseteq V \cap E_A = i^{-1}(V) \\ i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(0, \tau_{\mathcal{G}_A}). \end{aligned}$$

Luego  $(x_n)$   $\tau_{\mathcal{G}_A}$ -Cauchy  $\iff (i(x_n)) = (x_n)$  es  $\tau$ -Cauchy.

Además  $(x_n)$  es  $\tau_{\mathcal{G}_A}$ -acotada por ser  $\tau_{\mathcal{G}_A}$ -Cauchy, luego

si  $\lambda'A \in \{\lambda A / \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\}$  (base de  $\mathcal{V}(0, \tau_{\mathcal{G}_A})$ );  $\exists \alpha > 0$  tal que

$(x_n) \subseteq \alpha \lambda'A = \beta A$ , con  $\beta = \alpha \lambda'$ , es decir,  $(x_n) \subseteq \beta A$   $\tau$ -Cauchy y  $\beta A$  sec. completo, luego  $\exists x \in \beta A : x_n \xrightarrow{\tau} x$  en  $E$ ; pero entonces  $x_n \longrightarrow x$  en  $(E_A, \mathcal{G}_A)$ , en efecto :

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $N \geq 1 : x_n - x_m \in \epsilon A, \forall m, n \geq N$ , pues  $(x_n)$  es  $\mathcal{G}_A$ -Cauchy.

Fijemos  $n \geq N$ , entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} (x_n - x_m) = x_n - x$  en  $E$ , con  $(x_n - x_m)_{m \geq N} \subseteq \epsilon A$  y  $\epsilon A$  sec. cerrado, luego  $x_n - x \in \epsilon A, \forall n \geq N$ , es decir,  $\mathcal{G}_A(x_n - x) < \epsilon, \forall n \geq N$ .

Luego,  $x_n \longrightarrow x$  en  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  y en consecuencia  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es completo.

Por lo tanto,  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es un espacio de Banach y luego  $A$  completante como queríamos probar.

**Corolario 4.1.3'** : Sean  $E$  un e.l. y  $A$  un disco de  $E$  compacto para una topología lineal separada sobre  $E$ . Entonces  $A$  es un disco completante.

**Demostración** : Sean  $(x_n) \subseteq A$   $\tau_A$ -Cauchy y  $\forall n \geq 1$  :

$$F_n = \overline{\{x_m / m \geq n\}}^{\tau_A}$$

Como  $A$  es compacto y  $\forall n \geq 1$   $F_n$  es cerrado en  $A$ , entonces  $\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$ , luego existe  $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n (\subseteq A)$ .

Por otra parte,  $(x_n) \tau_A$ -Cauchy  $\Leftrightarrow (x_n) \tau$ -Cauchy, luego  $\forall W, V \in \mathcal{V}(0, \tau) : V + V \subseteq W, \exists N \geq 1$  tal que  $x_p - x_q \in V, \forall p, q \geq N$ . (1)

Además, como  $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$ , entonces  $x \in F_N$ , luego  $(x + V) \cap F_N \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n_0 \geq N : x_{n_0} \in x + V$   
 $\Leftrightarrow \exists n_0 \geq N : x_{n_0} - x \in V$  (2)

Luego de (1) y (2) resulta que  $\forall q \geq N :$

$$x_q - x = (x_q - x_{n_0}) + (x_{n_0} - x) \in V + V \subseteq W$$

$$\Leftrightarrow x_q \longrightarrow x \in A$$

(iii)  $A$  es sec. completo y por Proposición 4.1.3, resulta que  $A$  es completante.

Proposición 4.1.5 : Sean  $E$  y  $F$  dos e.l.b. separados y  $u: E \rightarrow F$  una aplicación lineal acotada de  $E$  en  $F$ .

Si  $A$  es un disco acotado completante de  $E$ , entonces  $u(A)$  es un disco acotado completante de  $F$ .

Demostración : Utilizaremos el siguiente resultado :

(\*) " Sean  $E$  y  $F$  dos e.l. y  $u: E \rightarrow F$  una aplicación lineal de  $E$  en  $F$ . Entonces para todo disco  $A$  de  $E$ ,  $u(A)$  es un disco de  $F$  y  $F_{u(A)}$  es isométrico al espacio seminormado  $E_A / N$  donde  $N = (\text{Ker } u) \cap E_A$  ".

Sea  $A$  un disco acotado completante de  $E$ , entonces  $u(A)$  es un disco acotado de  $F$  ((\*) y  $u$  acotada).

Mostraremos que  $F_{u(A)}$  es un espacio de Banach.

Por (\*)  $F_{u(A)} \cong_{\text{isom.}} E_A / N$ ; con  $N = \text{Ker } u \cap E_A$ .

Sea  $\psi: E_A \longrightarrow E_A / N$  la epiyección canónica; entonces como  $E_A / N$  es normado;  $\{\bar{0}\} = \{N\}$  cerrado en  $E_A / N$  y luego siendo  $\psi$  continua, se tiene que  $\psi^{-1}(\{N\}) = N$  es cerrado en  $E_A$ , de donde se tiene que  $E_A / N$  es de Banach pues  $F_A$  es de Banach. Luego  $F_{u(A)}$  es un espacio de Banach y en consecuencia  $u(A)$  es completante

Proposición 4.1.6 : Sean  $I$  un conjunto no vacío de índices,

$(E_i)_{i \in I}$  una familia de espacios lineales. Para cada  $i \in I$  sea  $A_i$  un disco completante de  $E_i$ . Sea  $E = \prod_{i \in I} E_i$  el espacio lineal producto y  $A = \prod_{i \in I} A_i$ . Entonces

$A$  es un disco completante de  $E$ .

Demostración : Sabemos que :

$A$  es un disco tal que

$$E_A = \{x = (x_i)_{i \in I}; \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i) < +\infty\} \text{ y}$$

$$\mathcal{G}_A(x) = \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i).$$

Mostraremos ahora que  $A$  es completante :

Sea  $(x^{(n)}) \subseteq E_A$   $\mathcal{G}_A$  - Cauchy, entonces para todo  $i \in I$ ,  $(x_i^{(n)})$  es  $\mathcal{G}_{A_i}$  - Cauchy; en efecto

$$(x^{(n)}) \mathcal{G}_A \text{ - Cauchy} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \gg 1: \mathcal{G}_A(x^{(n)} - x^{(m)}) < \varepsilon, \forall n, m \gg N$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \gg 1: \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}) < \varepsilon, \forall n, m \gg N$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1: \forall i \in I \quad \mathcal{G}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq N$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, (x_i^{(n)}) \text{ es } \mathcal{G}_{A_i}\text{-Cauchy.}$$

Pero entonces  $\forall i \in I, (x_i^{(n)})$  es  $\mathcal{G}_{A_i}$ -convergente, es

decir  $\forall i \in I, \exists x_i \in E_{A_i} : x_i^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{G}_{A_i}} x_i$ .

Afirmación :  $(x^{(n)})$  converge a  $x = (x_i)$  en  $E_A$  :

a)  $x = (x_i)_{i \in I} \in E_A$

En efecto; como  $(x^{(n)}) \subseteq E_A$  es  $\mathcal{G}_A$ -Cauchy;  $(x^{(n)})$  es  $\mathcal{G}_A$ -acotada, luego  $\exists \alpha > 0 : \mathcal{G}_A(x^{(n)}) < \alpha, \forall n \geq 1$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i^{(n)}) < \alpha, \forall n \geq 1. \quad (*)$$

Por otra parte, para todo  $i_0 \in I$  se tiene que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A_{i_0}}(x_{i_0}) &= \mathcal{G}_{A_{i_0}}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_0}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{A_{i_0}}(x_{i_0}^{(n)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Máx} \left\{ \sup_{\substack{i \neq i_0 \\ i \in I}} \mathcal{G}_{A_i}(0), \mathcal{G}_{A_{i_0}}(x_{i_0}^{(n)}) \right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Máx} \left\{ \sup_{\substack{i \neq i_0 \\ i \in I}} \mathcal{G}_{A_i}(x_i^{(n)}), \mathcal{G}_{A_{i_0}}(x_{i_0}^{(n)}) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i^{(n)}) \end{aligned}$$

$$< \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \alpha < +\infty$$

$$\text{Luego } \forall i \in I, \mathcal{G}_{A_i}(x_i) < +\infty \Leftrightarrow \sup_{i \in I} \mathcal{G}_{A_i}(x_i) < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{G}_A(x) < +\infty \Leftrightarrow x \in E_A.$$

b)  $x^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{G}_A} x$

En efecto; sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $N \geq 1$  tal que :

$$\mathcal{G}_A(x^{(m)} - x^{(n)}) < \varepsilon, \forall m, n \gg N$$

fijemos  $n \gg N$ , entonces para todo  $m \gg N$  se tiene que :

$$\begin{aligned} \varepsilon > \mathcal{G}_A(x^{(n)} - x^{(m)}) &= \sup_{i \in I} \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}) \\ &\geq \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}), \forall i \in I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i^{(m)}) < \varepsilon, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(m)}) < \varepsilon, \forall i \in I,$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i) < \varepsilon, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \sup_{i \in I} \mathcal{J}_{A_i}(x_i^{(n)} - x_i) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A(x^{(n)} - x) < \varepsilon, \forall n \gg N$$

$$\Rightarrow x^{(n)} \longrightarrow x \in E_A.$$

Luego  $E_A$  es completo.

Además si  $x = (x_i) \in E_A : \mathcal{G}_A(x) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} \mathcal{J}_{A_i}(x_i) = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{J}_{A_i}(x_i) = 0, \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \in I \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es un espacio de Banach y en consecuencia  $A$  es completante.

## 2. ESPACIOS BORNOLÓGICOS CONVEXOS COMPLETOS

**Definición 4.2.1 :** Se dice que una bornología convexa sobre un espacio lineal  $E$  es completa, si posee una base formada de discos completantes.

Un e.b.c.  $E$  es completo si su bornología es completa.

Proposición 4.2.1 : Todo e.l.b. completo  $(E, \beta)$  es separado.

Demostración : Supongamos que  $(E, \beta)$  no es separado, entonces existe  $x \in E$ ,  $x \neq 0$  tal que  $Kx \in \beta$

$$\Rightarrow \exists A \in \beta_0 \text{ (A completante) tal que } Kx \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow nx \in A, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (1/n)A, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \bigcap_A(x) \leq 1/n, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \bigcap_A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Proposición 4.2.2 : Un e.b.c. es completo si y sólo si él es límite inductivo bornológico para aplicaciones inyectivas de espacios de Banach.

Demostración : Sean  $(E, \beta)$  un e.b.c. completo y  $\beta_0$  una base de  $\beta$  formada de discos completantes.

Para cada  $A \in \beta_0$ ;  $E_A$  es un espacio de Banach y luego por Proposición 1.8.1,  $E$  es límite inductivo de los espacios de Banach  $E_A$ ,  $A \in \beta_0$ . Además las aplicaciones canónicas son inyectivas.

Recíprocamente, sea  $E = \varinjlim (E_i, v_{ji})$  con  $E_i$  espacio de Banach para todo  $i \in I$  y  $v_{ji}$  inyectiva para toda  $i \leq j$ .

Sea  $\beta$  la bornología límite inductivo de  $E$ , entonces es separada (Proposición 1.7.2).

Para cada  $i \in I$ , sea  $B_i$  la bola unitaria de  $E_i$ ;  $B_i$  forma una base para la bornología de  $E_i$  y es completante pues  $E_i = E_{B_i}$

Ahora,  $\beta$  está generada por  $\bigcup_{i \in I} v_i(B_i)$ , donde  $v_i(B_i)$  es

completante pues  $v_i$  es acotada y  $B_i$  completante (Prop.4.1.4).

Por lo tanto,  $\beta$  es completa y luego  $(E, \beta)$  es completo.

Proposición 4.2.2': Sean  $E$  un e.b.c. separado y  $F$  un subespacio lineal bornológico de  $E$ . Entonces:

- i)  $F$  completo  $\Leftrightarrow F$  b-cerrado en  $E$ .
- ii)  $E$  completo y  $F$  b-cerrado en  $E \Rightarrow F$  completo.

Demostración :

i) Supongamos que  $F$  es completo y  $(x_n) \subseteq F$  es tal que

$x_n \xrightarrow{M} x \in E$ ; entonces existe un disco acotado  $A$  de  $E$  tal que  $x_n \xrightarrow{A} x$  en  $E_A$ .

Como  $A \cap F \in \beta_F$ , existe  $B$  disco acotado completante de  $F$  tal que  $A \cap F \subseteq B$ . Además  $(x_n)$  es  $\mathcal{G}_A$ -Cauchy, es decir,  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1 : n, m > N \Rightarrow \mathcal{G}_A(x_n - x_m) < \varepsilon$ .

Mostremos :

a)  $(x_n)$  es Cauchy en  $F_A \cap F = E_A \cap F$ .

Claramente  $(x_n) \subseteq E_A \cap F = F_A \cap F$ , además

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A \cap F}(x_n - x_m) &= \inf \{ \lambda > 0 / x_n - x_m \in \lambda(A \cap F) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 / x_n - x_m \in \lambda A \} \\ &= \mathcal{G}_A(x_n - x_m) < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{G}_B(x_n - x_m) \leq \mathcal{G}_{A \cap F}(x_n - x_m) < \varepsilon, \forall n, m > N$ , es decir,  $(x_n)$  es  $\mathcal{G}_B$ -Cauchy y en consecuencia, siendo  $B$  completante, existe  $y \in F_B$  tal que  $x_n \xrightarrow{B} y$ .

Consideremos ahora la inyección canónica  $i: F_B \xrightarrow{i_1} F \xrightarrow{i_2} E$

b)  $i = i_2 \circ i_1$  es lineal acotada :

$i_1$  es lineal acotada; en efecto

$C \in \beta_{F_B} \Leftrightarrow B$  absorbe a  $C$  (pues  $B \in \mathcal{V}(0, \varepsilon \rho_B)$ )

$\Leftrightarrow \exists \rho > 0 : C \subseteq \rho B$

$\Leftrightarrow i_1(C) \subseteq i_1(\rho B) = \rho B \in \beta_F$  (pues  $B \in \beta_{F_B}$ )

$\Leftrightarrow i_1(C) \in \beta_F$ .

$i_2$  es acotada :  $D \in \beta_{F'} \Leftrightarrow D = T \cap F; T \in \beta$

$\Rightarrow D \subseteq T; T \in \beta$

$\Leftrightarrow i_2(D) \subseteq i_2(T) = T \in \beta$

$\Leftrightarrow i_2(D) \in \beta$ .

Además es claro que  $i_1$  e  $i_2$  son lineales.

Luego como  $x_n \xrightarrow{M} y \in F_B$ , entonces  $i(x_n) \xrightarrow{M} i(y) \in E$   
es decir,  $x_n \xrightarrow{M} y \in E$ , luego  $x = y \in F$  pues  $F_B \subseteq F$  y  $F$  separado.

Por lo tanto,  $F$  es b-cerrado en  $E$ .

ii) Supongamos que  $E$  es completo y  $F$  un subespacio lineal bornológico b-cerrado de  $E$  y sea :

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq E / B \text{ es disco completante}\}$$

Es claro que  $\mathcal{A}$  es base de  $\beta$ , además

$$\mathcal{A}_F = \{B \cap F / B \in \mathcal{A}\} \text{ es base de discos completantes}$$

de  $\beta_F$ . En efecto :

a)  $\mathcal{A}_F$  es base de  $\beta_F$

Claramente  $\mathcal{A}_F \subseteq \beta_F$ , además

$$B \in \beta_F \Leftrightarrow B = C \cap F; C \in \beta \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}; C \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow B = C \cap F \subseteq A \cap F \in \mathcal{A}_F$$

b)  $\forall B \in \mathcal{A}$ ,  $B \cap F$  es disco completante.

Mostremos primeramente que  $F_B \cap F = E_B \cap F$  es un subespacio normado cerrado de  $E_B$ .

Observemos que  $\forall x \in F_B \cap F \subseteq F$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{B \cap F}(x) &= \text{Inf} \{ \rho > 0 / x \in \rho(B \cap F) \} \\ &= \text{Inf} \{ \rho > 0 / x \in \rho B \text{ y } x \in \rho F \} \\ &= \mathcal{G}_B(x) \end{aligned}$$

Luego  $\mathcal{G}_{B \cap F} = \mathcal{G}_B / F_{B \cap F}$ , es decir,  $(F_{B \cap F}, \mathcal{G}_{B \cap F})$  es un subespacio normado de  $E_B$ .

Sea ahora  $(x_n) \subseteq F_{B \cap F} : x_n \longrightarrow y$  en  $E_B$ , entonces  $x_n \xrightarrow{M} y$  en  $E$  y siendo  $F$   $b$ -cerrado en  $E$  resulta que  $y \in F$  y en consecuencia  $y \in E_B \cap F = F_{B \cap F}$ , es decir,  $F_{B \cap F}$  es cerrado.

Mostremos ahora que  $F_{B \cap F}$  es completo.

Sea  $(x_n) \subseteq F_{B \cap F} = E_B \cap F$   $\mathcal{G}_{B \cap F}$ -Cauchy, entonces  $(x_n) \subseteq E_B$   $\mathcal{G}_B$ -Cauchy  $\Leftrightarrow x_n \longrightarrow x \in E_B$   
 $\Leftrightarrow x \in F_{B \cap F}$  (pues  $F_{B \cap F}$  es cerrado en  $E_B$ ).

Por lo tanto,  $\mathcal{A}_F$  es base de discos completantes de  $\beta_F$  y en consecuencia,  $F$  es completo.

**Proposición 4.2.3 :** Sean  $E$  un e.b.c. completo y  $F$  un subespacio lineal  $b$ -cerrado de  $E$ . Entonces el espacio e.b.c. cociente  $E/F$  es completo.

**Demostración :** Sea  $\beta_0$  una base formada por discos completantes de la bornología de  $E$ . Si  $\psi : E \longrightarrow E/F$  es la suryección canónica, entonces  $\psi(\beta_0)$  es una base de discos completantes de la bornología de  $E/F$  (Prop. 4.1.5)

Además  $E/F$  es separado pues  $F$  es  $b$ -cerrado. Luego  $\psi(B)$ ,  $\forall B \in \beta_0$  es un disco completante (Proposición 4.1.5) y en consecuencia  $E/F$  es completo.

Proposición 4.2.4 : Todo producto de e.b.c. completos es completo.

Demostración : En efecto, todo producto de discos acotados completantes es completante (Prop.4.1.6).

Proposición 4.2.5 : Sea  $(E_i, f_{ji})_{i \leq j}$  un sistema inductivo de espacios lineales bornológicos convexos tales que para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  sea completo. (Sistema inductivo de e.b.c. completos).

Sea  $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$  su límite inductivo bornológico. Entonces :

$E$  es completo si y sólo si  $E$  es separado.

Demostración :

$\Rightarrow$ ) Proposición 4.1.1

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $E$  es separado y sean para cada  $i \in I$ ,

$f_i : E_i \rightarrow E$  la aplicación canónica y  $\beta_i^\circ$  la base de discos completantes de  $E_i$ ; entonces  $\beta^\circ = \bigcup_{i \in I} f_i(\beta_i^\circ)$  es base

de discos completantes sobre  $E$ ; en efecto :

$$i) \quad E = \bigcup_{i \in I} f_i(E_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{A \in \beta_i^\circ} f_i(A) = \bigcup_{A' \in \beta^\circ} A'$$

ii) Sean  $A_1, A_2 \in \beta^\circ$ , entonces

$$A_1 = f_{i_1}(A_{i_1}) \text{ y } A_2 = f_{i_2}(A_{i_2}); \quad A_{i_1} \in \beta_{i_1}^\circ \text{ y } A_{i_2} \in \beta_{i_2}^\circ$$

$$\Rightarrow A_1 \cup A_2 = f_{i_1}(A_{i_1}) \cup f_{i_2}(A_{i_2})$$

Por otro lado,  $i_1, i_2 \in I \Rightarrow \exists i_3 \in I : i_1 \leq i_3 \text{ y } i_2 \leq i_3$

y además  $f_{i_3 i_1} : E_{i_1} \rightarrow E_{i_3}$  y  $f_{i_3 i_2} : E_{i_2} \rightarrow E_{i_3}$  son fun-

ciones acotadas tales que los siguientes diagramas son conmutativos :



$$\begin{aligned} \text{Luego } A_1 \cup A_2 &= f_{i_1}(A_{i_1}) \cup f_{i_2}(A_{i_2}) \\ &= f_{i_3}(f_{i_3 i_1}(A_{i_1})) \cup f_{i_3}(f_{i_3 i_2}(A_{i_2})) \\ &\subseteq f_{i_3}(f_{i_3 i_1}(A_{i_1}) \cup f_{i_3 i_2}(A_{i_2})) \end{aligned}$$

y como  $f_{i_3 i_1}(A_{i_1}) \cup f_{i_3 i_2}(A_{i_2}) \in \beta_{i_3}$  ( $\beta_{i_3}$  bornología de  $E_{i_3}$ ),

existe  $A_{i_3} \in \beta_{i_3}^\circ$  tal que  $f_{i_3 i_1}(A_{i_1}) \cup f_{i_3 i_2}(A_{i_2}) \subseteq A_{i_3}$ , entonces

$A_1 \cup A_2 \subseteq f_{i_3}(A_{i_3})$ , con  $f_{i_3}(A_{i_3}) \in \beta^\circ$ , es decir, existe

$$f_{i_3}(A_{i_3}) \in \beta^\circ : A_1 \cup A_2 \subseteq f_{i_3}(A_{i_3}).$$

Además en virtud de la Proposición 4.1.4,  $f_i(A)$  con  $A \in \beta_i^\circ$  es disco completante.

Por lo tanto,  $E$  es completo.

Corolario 4.2.5' : Sea  $(E_i, f_{j_i})$  un sistema inductivo de

e.b.c. completos tal que para cada  $i \leq j$ ,

la aplicación  $f_{j_i} : E_i \rightarrow E_j$  es inyectiva. Sea  $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$  su

límite inductivo bornológico. Entonces  $E$  es completo.

Demostración : Para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  es separado, luego por

la Proposición 1.6.2;  $E$  es separado y luego completo en virtud de la Proposición 4.2.5.

Corolario 4.2.5" : Toda suma directa bornológica de e.b.c. completos es un e.b.c. completo.

Demostración : Sean  $(E_i, \beta_i)_{i \in I}$  una familia de e.b.c. completos y  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  la suma directa algebraica

de los  $E_i$ .

Sea  $F(J) = \{J \subset I / J \text{ finito}\}$ , entonces claramente  $(F(J), \subseteq)$  es filtrante a derecha.

Para cada  $J \in F(J)$  pongamos  $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i$  la suma directa algebraica de los  $(E_i)_{i \in J}$ .

Observemos que  $E_J \subseteq E_{J'}$ , siempre que  $J \subseteq J'$ .

Para cada  $J \subseteq J'$  sea  $u_{J', J} : E_J \longrightarrow E_{J'}$ , la inyección canónica. Se sabe que desde el punto de vista algebraico

$$E = \varinjlim_{J \in F(J)} (E_J, u_{J', J})$$

Por otro lado  $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i = \prod_{i \in J} E_i (\subseteq \prod_{i \in I} E_i)$ , luego en  $E_J$  podemos considerar la bornología producto  $\beta_J$  de los  $\beta_i; i \in J$ .

Como cada  $(E_i, \beta_i)_{i \in I}$  es completo, también lo es  $(E_J, \beta_J)$  por Proposición 4.2.4.

Además, para cada  $J \subseteq J'$ ;  $u_{J', J} : E_J \longrightarrow E_{J'}$ , es acotada pues  $\beta_J \subseteq \beta_{J'}$ ; luego  $(E_J, u_{J', J})_{J \in F(J)}$  es un sistema inductivo bornológico de e.b.c. completos y si consideramos sobre  $E$  la bornología límite inductivo  $\beta$ ; resulta por Corolario 4.2.5' que  $(E, \beta)$  es completo.

### 3. ESPACIOS LINEALES BORNOLÓGICOS SEPARADOS DE DIMENSION FINITA

Se establece en esta sección un isomorfismo bornológico entre  $\mathbb{K}^n$  provisto de su bornología usual y un e.l.b. separado de dimensión  $n$ . Un resultado análogo existe para los e.l.t..

Lema 4.3.1 : Todo espacio lineal bornológico separado  $E$  de dimensión uno es bornológicamente isomorfo al cuerpo de escalares  $\mathbb{K}$  provisto de su bornología usual.

Demostración : Sean  $a \in E$ ,  $a \neq 0$  y  $u : E \rightarrow \mathbb{K} : \lambda a \mapsto \lambda$ .

Es claro que  $u$  es un isomorfismo lineal de espacios lineales. Además :

i)  $u^{-1} : \mathbb{K} \rightarrow E : \lambda \mapsto \lambda a$  es acotada; en efecto :

$$\begin{aligned} A \text{ acotado de } \mathbb{K} &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : A \subseteq B_{\mathbb{K}}[0, \varepsilon] \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : u^{-1}(A) \subseteq u^{-1}(B_{\mathbb{K}}[0, \varepsilon]) \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : u^{-1}(A) \subseteq \{ \lambda a \mid |\lambda| \leq \varepsilon \} = \\ &= \cdot (B_{\mathbb{K}}[0, \varepsilon] \times \{a\}) \in \beta_E \end{aligned}$$

pues  $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$  es acotada.

Luego  $u^{-1}(A) \in \beta_E$  y en consecuencia  $u^{-1}$  es acotada.

ii)  $u : E \rightarrow \mathbb{K} : \lambda a \mapsto \lambda$  es acotada; en efecto : supongamos que  $u$  no es acotada y sea  $B$  un subespacio acotado y equilibrado de  $E$  tal que  $u(B)$  sea equilibrado y no acotado de  $\mathbb{K}$ .

Pero la única parte no acotada y equilibrada de  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{K}$  mismo, en efecto : supongamos que  $A \subsetneq \mathbb{K}$ ,  $A$  no acotado y equilibrado.

Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$ , entonces :

si  $\alpha = 0$ , entonces  $\alpha \in A$  y luego  $A = \mathbb{K}$ .

si  $\alpha \neq 0$  y  $\alpha \notin A$ , entonces  $\alpha \notin \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ , pues  $A$  es equilibrado.

$$\Leftrightarrow \alpha \notin \lambda A, \forall |\lambda| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha/\lambda \notin A, \forall |\lambda| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha \notin A, \forall |\lambda| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B_{\mathbb{K}}[0,1] \Leftrightarrow A \text{ es acotado} \longrightarrow \longleftarrow$$

Luego,  $\alpha \in A$  y en consecuencia  $A = \mathbb{K}$ , es decir,  $\mathbb{K}$  es el único subespacio equilibrado y no acotado de  $\mathbb{K}$ . Luego  $u(B) = \mathbb{K}$  y entonces  $B = E$  lo cual es una contradicción puesto que  $E$  es separado y  $B$  un subespacio acotado de  $E$ .

Por lo tanto,  $u$  es un isomorfismo bornológico de  $E$  en  $\mathbb{K}$ .

Lema 4.3.2 : Sea  $E$  un e.l.b. . Entonces todo subespacio lineal  $D$  de  $E$  de dimensión 1 suplemento algebraico de un hiperplano  $b$ -cerrado  $H$  de  $E$ , es también suplemento bornológico de  $H$ .

Demostración :  $E = D \oplus H$ , es decir,  $E = D + H$  y  $D \cap H = \{0\}$ , entonces  $\{0\}$  es  $b$ -cerrado en  $D$  y en virtud de la Proposición 3.2.6  $(D, \beta_D)$  es separado.

También  $E/H$  es separado por Proposición 3.2.7.

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado, Ker } P_D &= \{x \in E / P_D(x) = 0\} \\ &= \{x \in E / P_D(x_H + x_D) = 0\} \\ &= \{x \in E / x_D = 0\} = H \end{aligned}$$

Luego  $P_D$  se descompone algebraicamente en  $P_D = f \circ \psi$ , donde  $\psi$  es la epiyección canónica y  $f$  el isomorfismo algebraico inducido :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{P_D} & D \\
 \psi \downarrow & \nearrow C & \uparrow f \\
 E/H & & 
 \end{array}$$

Luego por el Lema 4.3.1,  $f$  es isomorfismo  $\mathcal{B}_{E/H} - \mathcal{B}_D$  bornológico y  $\psi: \mathcal{B} - \mathcal{S}_{E/H}$  acotada (por construcción de bornología final).

Por lo tanto,  $P_D = f \circ \psi$  es acotada y en consecuencia  $D$  es suplemento bornológico de  $H$ .

**Teorema 4.3.1 :** Todo espacio lineal bornológico separado de dimensión finita  $n$  es bornológicamente isomorfo a  $\mathbb{K}^n$  provisto de su bornología usual.

**Demostración :** Para  $n = 1$ , es el Lema 4.3.1 .

Supongamos que el Teorema se cumple para  $n - 1$  y mostremos para  $n$ . Sea  $H$  un hiperplano en  $E$ , entonces  $(H, \mathcal{B}_H)$  es un e.l.b. separado (Corolario 1.7.1'(b)) y  $\dim H = n - 1$ , luego por hipótesis de inducción  $H \underset{\text{bor.}}{\cong} \mathbb{K}^{n-1}$ .

Pero  $\mathbb{K}^{n-1}$  es completo puesto que su bola unitaria  $B_{\mathbb{K}^{n-1}} [0,1]$  es compacta, luego  $B_{\mathbb{K}^{n-1}} [0,1]$  es completante (por Proposición 4.1.3) y  $\mathbb{K}_B^{n-1} = \mathbb{K}^{n-1}$ , donde  $B = B_{\mathbb{K}^{n-1}} [0,1]$ .

Luego  $(H, \mathcal{B}_H)$  es un e.b.c. completo y por Prop. 4.2.2 (i), resulta que  $H$  es  $b$ -cerrado en  $E$ , entonces todo suplemento algebraico  $D$  de  $H$  es suplemento bornológico (Lema. 4.3.2), es decir,  $E = H \oplus D$  (bornológicamente) y como  $H \underset{\text{bor.}}{\cong} \mathbb{K}^{n-1}$  y

$D \underset{\text{bor.}}{\cong} \mathbb{K}$  resulta que  $E \underset{\text{bor.}}{\cong} \mathbb{K}^{n-1} \oplus \mathbb{K} = \mathbb{K}^n$ .

#### 4. BORNOLÓGIA COMPLETA ASOCIADA A UNA BORNOLÓGIA LINEAL SEPARADA

A todo e.l.b. separado  $E$  podemos asociar un e.b.c. completo  $E_0$ , algebraicamente idéntico a  $E$  y con la propiedad "co-universal" siguiente :

" Toda aplicación lineal acotada de un e.b.c. completo  $F$  en  $E$  es lineal acotada de  $F$  en  $E_0$ ".  
Esta bornología juega un papel esencial sobre la completitud. Reemplaza a menudo la bornología de  $E$  con la ventaja de quedarse en el mismo espacio lineal.

Lema 4.4.1 : El conjunto de los discos acotados completantes de un e.l.b. separado, forma sobre  $E$  una base de una bornología completa sobre  $E$ .

Demostración : Sean  $(E, \beta)$  un e.l.b. separado y

$$D_c = \{A \subseteq E / A \text{ es disco acotado complet. de } E\}.$$

$D_c$  es base de una bornología completa sobre  $E$ .

En efecto :

Sea  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ ; entonces  $\Gamma(x)$  es un disco acotado completante; en efecto :

$$\begin{aligned} \forall z \in E_{\Gamma(x)}; \int \Gamma(x)(z) = 0 &\Leftrightarrow z \in \Gamma(x), \forall \rho > 0 \\ \Leftrightarrow z \in \{\rho \lambda x / \rho > 0, |\lambda| \leq 1\} &= \{\rho x / \rho \in \mathbb{K}\} \\ \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}x, \forall |\lambda| > 0 & \\ \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}x, \forall |\lambda| > 0 & \\ \Leftrightarrow \mathbb{K}z \subseteq \{x\} \cup \{0\} \in \beta & \\ \Leftrightarrow \mathbb{K}z \in \beta \Leftrightarrow \mathbb{K}z = \{0\} & \quad (\text{pues } (E, \beta) \text{ separado}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = 0$$

Es decir,  $(E_{\Gamma(\{x\})}, \mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})})$  es normado.

Por otra parte,

$$E_{\Gamma(\{x\})} = \bigcup_{n \geq 1} n \Gamma(\{x\}) = \bigcup_{n \geq 1} \{n\lambda x \mid |\lambda| \leq 1\} = \mathbb{K}x$$

es isométrico a  $\mathbb{K}$ ; en efecto: claramente

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}x : \lambda \longmapsto \lambda x \text{ es lineal y biyectiva, además,} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})}(\psi(\lambda)) &= \mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})}(\lambda x) \\ &= \inf\{\rho > 0 \mid \lambda x \in \rho \Gamma(\{x\})\} \\ &= \inf\{\rho > 0 \mid (\lambda/\rho)x \in \Gamma(\{x\})\} \\ &= \inf\{\rho > 0 \mid |\lambda/\rho| \leq 1\} \\ &= \inf\{\rho > 0 \mid |\lambda| \leq \rho\} \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

Luego,  $\mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})}(\psi(\lambda)) = |\lambda|$ , es decir,  $\psi$  es una isometría y en consecuencia siendo  $(\mathbb{K}, \tau_{us})$  completo también lo es  $(E_{\Gamma(\{x\})}, \mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})})$ .

Por lo tanto,  $(E_{\Gamma(\{x\})}, \mathcal{G}_{\Gamma(\{x\})})$  es de Banach, y luego  $\Gamma(\{x\})$  es completante.

Así tenemos que para todo  $x \in E$ ;  $\{x\} \subseteq \Gamma(\{x\})$  disco acotado completante de  $E$ ; luego

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{D}_c} A \subseteq E, \text{ es decir, } \mathcal{D}_c \text{ es un recubrimiento de } E.$$

miento de  $E$ .

ii) Sean  $A, B \in \mathcal{D}_c$ , entonces  $A$  y  $B$  son discos acotados completantes de  $E$  y como  $E_{A+B} \cong E_A \times E_B / M$ , donde  $E_A \times E_B / M$  es de Banach; resulta que  $E_{A+B}$  es un espacio de Banach y en consecuencia  $A+B \in \mathcal{D}_c$ .

iii) Sean  $A \in \mathcal{D}_c$  y  $\lambda \in K$ , entonces  $A$  es disco acotado completante de  $E$  y siendo  $E$  separado y la aplicación  $u_\lambda : E \rightarrow E$  lineal acotada resulta por Proposición 4.1.5 que  $u_\lambda(A) = \lambda A$  es un disco acotado completante de  $E$ , es decir,  $\lambda A \in \mathcal{D}_c$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{D}_c$  es base de una bornología completa sobre  $E$ .

Proposición 4.4.2 : Sea  $E$  un e.l.b. separado.

Anotamos  $E_0$  al e.l.  $E$  provisto de la bornología que admite por base a la familia de discos acotados completantes de  $E$ .

Sea  $i : E_0 \rightarrow E$  la inyección canónica de  $E_0$  en  $E$ . El par  $(E_0, i)$  posee las propiedades siguientes :

- i)  $E_0$  es un e.b.c. completo.
- ii) Para toda aplicación lineal  $u$  de un e.b.c. completo  $F$  en  $E$ , existe una única aplicación lineal acotada  $u_0 : F \rightarrow E_0$  tal que  $u = i \circ u_0$ .

Demostración :

- i)  $E_0$  es un e.b.c. completo pues su bornología posee una base formada por discos completantes.
- ii) Sea  $u : F \rightarrow E$  una aplicación lineal acotada de un e.b.c. completo en  $E$ .

Consideremos la aplicación  $u_0 : F \rightarrow E_0$  definida por  $\forall x \in F : u_0(x) = u(x)$ .

(\*)  $u_0$  es lineal acotada tal que  $u = i \circ u_0$ .

En efecto : Sea  $A$  un disco acotado completante de  $F$ , en-

tonces  $u_0(A) = u(A)$  es disco acotado completante de  $E$  por Proposición 4.1.4, luego  $u_0(A)$  es acotado de  $E_0$  y en consecuencia  $u_0$  es acotada y como además es lineal se tiene que existe  $u_0: F \rightarrow E_0$  aplicación lineal acotada tal que  $\forall x \in F : (i \circ u_0)(x) = i(u_0(x)) = i(u(x)) = u(x)$ , es decir,  $u = i \circ u_0$ .

## 5. ESPACIOS LINEALES TOPOLOGICOS MACKEY - COMPLETOS

Nos proponemos en esta sección dar un criterio simple sobre la convergencia de sucesiones para que la bornología de Von Neumann de un e.l.t. localmente convexo Hausdorff sea completa.

Definición 4.5.1 : Sea  $E$  un e.l.c. Hausdorff. Se dice que  $E$  es Mackey completo ( o también bornológicamente completo ) si la bornología de Von Neumann de  $E$  es completa.

Definición 4.5.2 : Sea  $E$  un e.b.c. separado. Una sucesión  $(x_n)$  de  $E$  se dice Cauchy-Mackey en  $E$  ( o también Cauchy-bornológica en  $E$  ) si existe un disco acotado  $B$  de  $E$  tal que  $(x_n)$  es Cauchy en  $(E_B, \mathcal{G}_B)$ .

Observación : El cuerpo de escalares  $K$  es bornológicamente completo. En efecto : basta observar que la familia  $\mathcal{D}_K = \{ \lambda B / B = B_K [0,1], \lambda > 0 \}$  es base de discos completantes de  $\mathcal{B}_K$  (donde  $\mathcal{B}_K$  es la bornología usual de  $K$ ).

Veamos :  $\forall B \in \mathcal{D}_K$ , claramente  $B \in \mathcal{B}_K$  y disco.

Además  $\mathbb{K}_B = \bigcup_{n \geq 1} nB = \mathbb{K}$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_B(z) &= \text{Inf} \{ \rho > 0 / z \in \rho B \} = \text{Inf} \{ \rho > 0 / z/\rho \in B \} . \\ &= \text{Inf} \{ \rho > 0 / \|z/\rho\| \leq 1 \} \\ &= \text{Inf} \{ \rho > 0 / \|z\| \leq \rho \} = \|z\| \end{aligned}$$

Es decir,  $(\mathbb{K}, / /)$   $\cong$   $(\mathbb{K}_B, \mathcal{G}_B)$ , luego siendo  $(\mathbb{K}, / /)$  isom.

un espacio de Banach resulta que  $(\mathbb{K}_B, \mathcal{G}_B)$  es de Banach y en consecuencia B es completante; luego para todo  $\lambda > 0$ ;  $\lambda B$  es completante. Además

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}} &\iff \varepsilon > 0 : A \subseteq B_{\mathbb{K}}[0, \varepsilon] \\ &\iff \varepsilon > 0 : A \subseteq \varepsilon B_{\mathbb{K}}[0, 1] \in \mathcal{D}_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  es base de discos completantes, es decir,  $\mathbb{K}$  es bornológicamente completo.

Proposición 4.5.1 : Sea E un e.l.c. Hausdorff. Entonces

E es Mackey-completo si y sólo si toda sucesión Cauchy-Mackey sobre E es topológicamente convergente.

Demostración : Supongamos que E es Mackey completo y sea

$(x_n)$  una sucesión Cauchy-Mackey en E, entonces existe B disco acotado de E :  $(x_n)$  es Cauchy en  $E_B$

$$\iff \exists A \text{ disco acotado completante de E : } B \subseteq A$$

$$\iff \exists A \text{ disco acotado complet. de E : } (x_n) \text{ es Cauchy en } E_A$$

$$\iff x_n \longrightarrow x \text{ en } E_A ; \text{ pues } E_A \text{ es de Banach}$$

$$\iff x_n \xrightarrow{M} x \text{ en E}$$

$$\iff x_n \xrightarrow{\mathcal{C}} x \text{ en E, por Proposición 2.3.1.}$$

Recíprocamente, supongamos que toda sucesión Cauchy-Mackey en E es topológicamente convergente y sea  $\beta_0$  una ba-

se de la bornología de Von Neumann de  $E$  formada de discos cerrados de  $E$ ; entonces : todo  $A$  de  $\mathfrak{B}_0$  es completante.

En efecto : Sea  $A \in \mathfrak{B}_0$  y  $(x_n)$  una sucesión Cauchy en  $E_A$ , entonces  $(x_n)$  es Cauchy-Mackey sobre  $E \iff x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} x$  en  $E$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , como  $(x_n)$  es Cauchy en  $E_A$ ,  $\exists N \geq 1$  :

$$x_n - x_m \in \varepsilon A, \forall m, n \geq N$$

fijemos  $m \geq N$ , entonces como  $x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} x$  en  $E$  resulta que

$$x_m - x_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} x_m - x \text{ en } E$$

$$\iff x_m - x \in \varepsilon A, \forall m \geq N; \text{ pues } A \text{ es sec. cerrado}$$

$$\iff x_m - (x_m - x) \in E_A$$

Luego,  $x \in E_A$  y  $\mathcal{G}_A(x_n - x) \longrightarrow 0$ , es decir,  $x_n \longrightarrow x$  en  $E_A$  y en consecuencia,  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es completo.

$$\text{Además, } \mathcal{G}_A(x) = 0 \iff x \in \rho A, \forall \rho > 0$$

$$\iff \forall x \in (\alpha \rho) A, \forall \rho > 0, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\iff \mathbb{K}x \subseteq (\alpha \rho) A$$

$$\iff \mathbb{K}x \in \mathfrak{B}$$

$$\iff \mathbb{K}x = \{0\}, \text{ pues } (E, \mathfrak{B}) \text{ separado}$$

$$\iff x = 0$$

Es decir,  $(E_A, \mathcal{G}_A)$  es normado y en consecuencia  $A$  es completante.

Por lo tanto,  $E$  es Mackey - Completo.

Corolario 4.5.1' : Todo e.l.c. Hausdorff en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente, es Mackey - Completo.

Demostración : Sea  $(x_n)$  una sucesión Cauchy - Mackey en  $E$ , entonces existe  $B$  disco acotado de  $E$  tal que

$(x_n)$  es Cauchy en  $E_B$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1 : x_n - x_m \in \varepsilon V_{\mathcal{G}_B}, \forall n, m \geq N$$

$$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(0, \mathcal{C}); \exists N \geq 1 : x_n - x_m \in \varepsilon V_{\mathcal{G}_B} \subseteq V, \forall n, m \geq N$$

$$\Leftrightarrow (x_n) \text{ es Cauchy en } E$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathcal{C}} x \text{ en } E; \text{ por Hipótesis}$$

$$\Leftrightarrow E \text{ es Mackey - Completo.}$$

Observación : El corolario anterior muestra que la condición de completitud bornológica es una condición mucho más débil que la condición de completitud usual de los espacios lineales topológicos.

En muchas de las cuestiones del Análisis, la hipótesis de completitud bornológica es suficiente para lo requerido.

Definición 4.5.2 : Sea  $E$  un e.l.b.. Se dice que  $E$  es Mackey-Completo si es separado y toda sucesión Cauchy - Mackey sobre  $E$  es Mackey - Convergente.

Una parte  $A$  de  $E$  se dice Mackey-Completo, si toda sucesión de puntos de  $A$  Cauchy-Mackey sobre  $E$  es Mackey-Convergente sobre  $A$ .

Proposición 4.5.3 :

a) Sean  $E$  un e.l.b. y  $F$  un subespacio lineal de  $E$ .

(i)  $E$  Mackey-Completo y  $F$   $b$ -cerrado  $\Leftrightarrow F$  Mackey-Completo.

(ii)  $E$  separado y  $F$  Mackey-Completo  $\Leftrightarrow F$   $b$ -cerrado.

b) Todo producto de e.l.b. Mackey-Completos es Mackey-Completo.

- c) Sea  $E = \varinjlim E_i$  un e.l.b. límite inductivo de e.l.b. Mackey-Completos. Si las aplicaciones canónicas  $v_i : E_i \rightarrow E$  son inyectivas, entonces  $E$  es Mackey-Completo.

Demostración :

a)

- (i) Sea  $(x_n) \subseteq F$ ;  $(x_n)$  Cauchy-Mackey en  $E$ , entonces  $(x_n)$  es Mackey-Convergente sobre  $E$  ( $E$  M-Completo)

$$\Leftrightarrow \exists x \in E : x_n \xrightarrow{M} x$$

$$\Leftrightarrow x \in F \quad (F \text{ b-cerrado})$$

$$\Rightarrow x_n \xrightarrow{M} x \text{ sobre } F$$

$$\Leftrightarrow F \text{ es Mackey-Completo.}$$

- (ii) Sea  $(x_n) \subseteq F : x_n \xrightarrow{M} x$  sobre  $E$ , entonces existe  $B$  acotado de  $E$  tal que  $x_n \rightarrow x$  sobre  $E_B$

$$\Leftrightarrow (x_n) \subseteq E_B \text{ es Cauchy sobre } E_B$$

$$\Rightarrow \exists B \cap F \text{ es acotado de } F : (x_n) \text{ es Cauchy en } F_B \cap F$$

$$\Leftrightarrow (x_n) \text{ es Cauchy-Mackey sobre } F$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} x \in F \Leftrightarrow F \text{ es b-cerrado.}$$

- b) Sean  $(E_i)_{i \in I}$  una familia de e.l.b. Mackey-Completos y  $E = \prod_{i \in I} E_i$  el e.l.b. producto. Por Corolario 1.6.1

$E$  es separado, además si  $(x^{(n)}) \subseteq E$  es Cauchy-Mackey en  $E$ , entonces existe  $B$  disco acotado de  $E : (x_n) \subseteq E_B$  es  $\mathcal{G}_B$ -Cauchy

$$\Leftrightarrow \exists A = \prod_{i \in I} A_i \text{ disco acotado de } E, \text{ con } A_i \text{ disco acotado}$$

de  $E_i$  tal que  $B \subseteq A$  y  $E_B \subseteq E_A$

$$\Leftrightarrow \mathcal{G}_A \leq \mathcal{G}_B \text{ y } (x^{(n)}) \subseteq E_A \text{ } \mathcal{G}_A\text{-Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, (x_i^{(n)}) \subseteq E_{A_i} \text{ } \mathcal{G}_{A_i}\text{-Cauchy (ver Prop. 4.1.6)}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, \exists x_i \in E_{A_i} : x_i^n \longrightarrow x_i$$

$$\Leftrightarrow \exists x = (x_i) \in E_A : x^n \longrightarrow x \quad (\text{ver Prop. 4.1.6})$$

$$\Leftrightarrow x^n \xrightarrow{M} x \text{ en } E$$

c) Sea  $(E, \beta) = \varinjlim_{i \in I} (E_i, \beta_i)$  un e.l.b. límite inductivo de e.l.b. Mackey-Completo tal que las aplicaciones canónicas  $v_i : E_i \longrightarrow E$  son inyectivas, entonces por Corolario 1.6.1,  $E$  es separado. Además :

si  $(x_n) \subseteq E$  es Cauchy-Mackey sobre  $E$

$$\Leftrightarrow \exists B \in \beta \text{ (disco) : } (x_n) \subseteq E_B \text{ } \mathcal{G}_B\text{-Cauchy}$$

Luego, como  $\{v_i(\beta_i) : i \in I\}$  es base de  $\beta$ ,  $\exists i_0 \in I$ ,

$$B_{i_0} \in \beta_{i_0} : B \subseteq v_{i_0}(B_{i_0})$$

$$\Leftrightarrow E_B \subseteq E_{v_{i_0}(B_{i_0})} \text{ y } \mathcal{G}_{v_{i_0}(B_{i_0})} \leq \mathcal{G}_B$$

Luego  $x_n = \lambda_1 v_{i_0}(b_1) + \dots + \lambda_n v_{i_0}(b_n), \forall n \geq 1; b_i \in B_{i_0}$   
 $= v_{i_0}(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i)$ ; con  $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in E_{B_{i_0}}$ , es decir,

$$\forall n \geq 1, \exists b_n \in E_{B_{i_0}} : x_n = v_{i_0}(b_n)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{G}_{B_{i_0}}(b_n - b_{n+1}) = \mathcal{G}_{B_{i_0}}(v_{i_0}^{-1}(x_n) - v_{i_0}^{-1}(x_{n+1}))$$

$$= \mathcal{G}_{B_{i_0}}(v_{i_0}^{-1}(x_n - x_{n+1}))$$

$$= \text{Inf} \{ \rho > 0 / x_n - x_{n+1} \in \rho v_{i_0}(B_{i_0}) \}$$

$$= \int_{v_{i_0}(B_{i_0})} (x_n - x_{n+1}) \leq \int_B (x_n - x_{n+1}) \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (b_n) \subseteq E_{i_0} \text{ es } \int_{B_{i_0}} \text{-Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow (b_n) \text{ es Cauchy-Mackey en } E_{i_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists b_{i_0} \in E_{i_0} : b_n \xrightarrow{M} b_{i_0}$$

$$\Leftrightarrow v_{i_0}(b_n) \xrightarrow{M} v_{i_0}(b_{i_0}) \in E \quad (\text{Prop. 2.1.4})$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} v_{i_0}(b_{i_0}) \in E \Leftrightarrow (E, \beta) \text{ es Mackey-Completo.}$$

## 6. ESPACIOS BORNOLÓGICOS p-CONVEXOS

Definición 4.6.1 : Sean  $E$  un e.l. y  $0 < p \leq 1$ . Una parte  $A$  de  $E$  se dice  $p$ -convexa (resp. absolutamente  $p$ -convexa o  $p$ -disqueada) si

$$\begin{array}{l} x \in A, y \in A \\ \lambda \geq 0, \gamma \geq 0 : \lambda^p + \gamma^p = 1 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \lambda x + \gamma y \in A$$

$$\text{resp. } \begin{array}{l} x \in A, y \in A \\ |\lambda|^p + |\gamma|^p \leq 1 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \lambda x + \gamma y \in A$$

Si  $p = 1$ , las partes  $p$ -convexas (resp.  $p$ -disqueadas) de  $E$  son las partes convexas (resp. disqueadas) de  $E$ .

En lo que sigue una parte  $p$ -disqueada de un e.l.  $E$  se llamará un  $p$ -disco.

Propiedades de los  $p$ -discos :

- 1) La intersección de cualquier familia de  $p$ -discos es un  $p$ -disco.

En efecto; sea  $(A_i)_{i \in I}$  una familia de p-discos de un e.l. E y  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Entonces si  $|\lambda|^p + |\mu|^p \leq 1$ :

$$\begin{aligned} x, y \in A &\iff x, y \in A_i, \forall i \in I \iff \lambda x + \mu y \in A_i, \forall i \in I \\ &\iff \lambda x + \mu y \in A \end{aligned}$$

Luego A es un p-disco.

2) E es un p-disco.

3) Si A es un p-disco, entonces  $0 \in A$ .

En efecto;  $|0|^p \leq 1$  y si  $x \in A$ ;  $0 = 0x + 0x \in A$

4) Sea  $A \subseteq E$ ; entonces

$$\Gamma_p(A) = \bigcap \{ B \subseteq E / A \subseteq B, B \text{ p-disco} \} \text{ es un p-disco.}$$

Esto sigue de (1).

$\Gamma_p(A)$  se denomina " la cápsula p-disqueada de A ".

5) Sea  $A \subseteq E$  un p-disco, entonces A contiene todas las combinaciones lineales p-disqueadas de A, es decir,

$$\begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \in A \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}; \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \leq 1 \end{array} \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A.$$

Demostración : Si  $n = 2$  la tesis resulta de la definición de p-disco.

Supongamos que la tesis es válida para  $n-1$  y sean  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \in A$ ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \leq 1$ ;

debemos probar que  $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$

Sean  $\alpha = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p}$ ,  $\mu_i = \lambda_i / \alpha$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ; entonces:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\mu_i|^p = \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p / \alpha^p = \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p / \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p = 1,$$

Luego  $v = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i \in A$  por hipótesis de inducción.

$$\begin{aligned} \text{Ahora, } z &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (\lambda_i / \alpha) x_i + \lambda_n x_n = \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \lambda_n x_n \\ &= \alpha v + \lambda_n x_n; \text{ con } v, x_n \in A \text{ y} \\ / \alpha /^p + / \lambda_n /^p &= \sum_{i=1}^{n-1} / \lambda_i /^p + / \lambda_n /^p = \sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p \leq 1; \text{ luego} \\ z &= \alpha v + \lambda_n x_n \in A \end{aligned}$$

6) Sea  $A \subseteq E$ ; entonces

$$\Gamma_p(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i / (\lambda_i) \subseteq K; \sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p \leq 1, (x_i) \subseteq A \right\}$$

En efecto : Sea  $C$  el conjunto de la derecha en la tesis, entonces

a)  $C$  es un  $p$ -disco, puesto que si  $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, w = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j$  son dos elementos de  $C$ ;  $\lambda, \mu \in K : / \lambda /^p + / \mu /^p \leq 1$ ; entonces  $\lambda z + \mu w = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \lambda_i) x_i + \sum_{j=1}^m (\mu \mu_j) y_j$

además 
$$\sum_{i=1}^n / \lambda \lambda_i /^p + \sum_{j=1}^m / \mu \mu_j /^p = / \lambda /^p \sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p + / \mu /^p \sum_{j=1}^m / \mu_j /^p \leq / \lambda /^p + / \mu /^p \leq 1.$$

Por lo tanto,  $\lambda z + \mu w \in C$ .

b)  $A \subseteq C$ , pues si  $x \in A \iff x = 1x \in C$

c) Si  $D$  es un  $p$ -disco tal que  $A \subseteq D$ , entonces  $C \subseteq D$ .

En efecto; por (5)  $D$  contiene todas las combinaciones lineales  $p$ -disqueada de sus elementos, en particular contiene todas las combinaciones lineales  $p$ -disqueadas de elementos de

A, es decir,  $C \subseteq D$ .

d) Por (a), (b) y (c) se tiene que C es el menor conjunto p-disqueado que contiene a A, es decir,  $C = \Gamma_p(A)$ .

Si  $p = 1$ ;  $\Gamma_1(A)$  se indicará por  $\Gamma(A)$ .

Definición 4.6.2 : Se llama espacio bornológico p-convexo (e.b.c.<sub>p</sub>) todo espacio lineal bornológico  $(E, \mathcal{B})$  que admite una base de bornología formada por p-discos.

Si  $p = 1$ , re-encontramos la noción de e.b.c.

La Jauge de un p-disco.

Definición 4.6.3 : Sea A un p-disco en un espacio lineal E.

Se llama p-jauge o simplemente jauge del p-disco A, a la función definida por :

$$\mathcal{G}_A : E \longrightarrow [0, \infty] \\ x \longmapsto \mathcal{G}_A(x) = \begin{cases} \text{Inf} \{ \lambda^p / \lambda > 0 : x \in \lambda A \} & \text{si existe} \\ \lambda > 0 : x \in \lambda A. \\ \infty & \text{si no existe } \lambda > 0 : x \in \lambda A. \end{cases}$$

Propiedades de la Jauge de un p-disco :

1) Si A es absorbente, entonces  $\mathcal{G}_A$  es finita, es decir,  $\mathcal{G}_A(x) \in [0, \infty[$ ,  $\forall x \in E$ .

En efecto; sea  $x \in E$ , como A es absorbente existe  $\rho > 0$  tal que  $x \in \rho A$ ; luego  $\mathcal{G}_A(x) = \{ \lambda^p / \lambda > 0, x \in \lambda A \} \leq \rho^p < \infty$

Luego,  $\mathcal{G}_A(x) \in [0, \infty[$

2)  $\mathcal{G}_A(x) > 0$ ,  $\forall x \in E$

Segue de la definición de  $\mathcal{G}_A$ .

3)  $x = 0 \iff \mathcal{G}_A(x) = 0$

En efecto; como  $A$  es un  $p$ -disco,  $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in \lambda A, \forall \lambda \geq 0$ ;

luego  $\mathcal{G}_A(0) = \{\text{Inf } \lambda^p / \lambda \geq 0 : 0 \in \lambda A\} \leq \lambda^p, \forall \lambda \geq 0$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A(0) = 0.$$

$$4) \mathcal{G}_A(\alpha x) = |\alpha|^p \mathcal{G}_A(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E.$$

En efecto : si  $\alpha = 0$  el resultado es evidente.

Supongamos que  $\alpha > 0$  y sea  $\lambda \geq 0 : \alpha x \in \lambda A$ , entonces

$$\Rightarrow x \in (\lambda/\alpha)A \Leftrightarrow \mathcal{G}_A(x) \leq (\lambda/\alpha)^p$$

$$\Rightarrow \alpha^p \mathcal{G}_A(x) \leq \lambda^p ; \forall \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha^p \mathcal{G}_A(x) \leq \mathcal{G}_A(\alpha x) \quad (*)$$

Sustituyendo  $\alpha$  por  $1/\alpha$  y  $x$  por  $\alpha x$  se tiene que

$$(1/\alpha)^p \mathcal{G}_A(\alpha x) \leq \mathcal{G}_A((1/\alpha)\alpha x) = \mathcal{G}_A(x)$$

$$\Rightarrow (1/\alpha^p) \mathcal{G}_A(\alpha x) \leq \mathcal{G}_A(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A(\alpha x) \leq \alpha^p \mathcal{G}_A(x) \quad (**)$$

Luego de (\*) y (\*\*) resulta que

$$\mathcal{G}_A(\alpha x) = \alpha^p \mathcal{G}_A(x).$$

Si  $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{K} : \alpha = |\alpha|/\eta$  ; con  $|\eta| = 1$ , luego

$$\mathcal{G}_A(\alpha x) = \mathcal{G}_A(|\alpha|/\eta x) = |\alpha|^p \mathcal{G}_A(\eta x) \quad (***)$$

pero  $\mathcal{G}_A(\eta x) = \mathcal{G}_A(x)$ ; en efecto : sea  $\lambda \geq 0 : \eta x \in \lambda A$ , entonces

$$x \in (\lambda/\eta)A = \lambda(1/\eta)A$$

Como  $A$  es un  $p$ -disco y  $|1/\eta|^p = 1/|\eta|^p = 1$ , resulta que

$(1/\eta)A \subseteq A$ , luego  $x \in \lambda(1/\eta)A \subseteq \lambda A \Leftrightarrow \mathcal{G}_A(x) \leq \lambda^p, \forall \lambda \geq 0$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A(x) \leq \mathcal{G}_A(\eta x)$$

Sustituyendo  $x$  por  $\eta x$  y  $\eta$  por  $1/\eta$  :

$$\mathcal{G}_A(\eta x) \leq \mathcal{G}_A(\eta(1/\eta)x) = \mathcal{G}_A(x)$$

Luego,  $\mathcal{G}_A(\eta x) = \mathcal{G}_A(x)$  y en consecuencia de (\*\*\*) tenemos

$$\mathcal{G}_A(\alpha x) = |\alpha|^p \mathcal{G}_A(x).$$

5)  $\mathcal{G}_A(x+y) \leq \mathcal{G}_A(x) + \mathcal{G}_A(y), \forall x, y \in E.$

En primer lugar observemos que si  $A$  es un  $p$ -disco, también lo es  $\alpha A, \forall \alpha \in K$ ; en efecto :

Si  $\alpha = 0$ , esto es trivial.

Supongamos que  $\alpha \neq 0$  y sean  $v, w \in \alpha A$ ;  $|\lambda|^p + |\mu|^p \leq 1$ , entonces  $v/\alpha \in A, w/\alpha \in A$  y  $\lambda(v/\alpha) + \mu(w/\alpha) \in A \implies \lambda v + \mu w \in \alpha A.$

Luego  $\alpha A$  es un  $p$ -disco.

Observemos que la tesis es trivial si  $\mathcal{G}_A(x) = 0$  o  $\mathcal{G}_A(y) = 0$  es infinito.

Supongamos entonces que  $\mathcal{G}_A(x) < \infty, \mathcal{G}_A(y) < \infty$  y sean  $\rho, \eta > 0$  tales que  $x \in \rho A, y \in \eta A$ ; entonces

$x+y \in \rho A + \eta A = (\rho / \sqrt[p]{\rho^p + \eta^p}) (\sqrt[p]{\rho^p + \eta^p} A) + (\eta / \sqrt[p]{\rho^p + \eta^p}) (\sqrt[p]{\rho^p + \eta^p} A)$   
como  $\sqrt[p]{\rho^p + \eta^p} A$  es un  $p$ -disco y

$(\rho / \sqrt[p]{\rho^p + \eta^p})^p + (\eta / \sqrt[p]{\rho^p + \eta^p})^p = (\rho^p + \eta^p) / (\rho^p + \eta^p) = 1$ , resulta que  $x + y \in \sqrt[p]{\rho^p + \eta^p} A$

$$\mathcal{G}_A(x+y) \leq (\sqrt[p]{\rho^p + \eta^p})^p = \rho^p + \eta^p; \forall \rho, \eta > 0; \text{ es decir,}$$

$$\mathcal{G}_A(x+y) \leq \mathcal{G}_A(x) + \mathcal{G}_A(y).$$

**Definición 4.6.4 :** Una  $p$ -seminorma sobre un espacio lineal  $E$ , es una aplicación  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que :

- 1)  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in E$
- 2)  $x = 0 \iff f(x) = 0$
- 3)  $f(\alpha x) = |\alpha|^p f(x), \forall \alpha \in K, x \in E$
- 4)  $f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in E.$

Una  $p$ -seminorma  $f$  se dice separante si

$$f(x) = 0 \iff x = 0, \forall x \in E.$$

Se llama  $p$ -norma toda  $p$ -seminorma separante.

Observemos que de acuerdo a lo anteriormente probado, la Jauge de un  $p$ -disco absorbente, es una  $p$ -seminorma.

Si  $A$  es un  $p$ -disco sobre un espacio lineal  $E$ , indicaremos por  $E_A$  el espacio generado por  $A$ .

$E_A$  es  $p$ -seminormado por la Jauge de  $A$ , es decir  $g_A$  es una  $p$ -seminorma sobre  $E_A$ .

Se dice que  $A$  es un  $p$ -disco separante de  $E$  si  $g_A$  es una  $p$ -norma sobre  $E_A$ . Entonces  $E_A$  es un e.l.t. localmente acotado.

En efecto : Como

$\{x \in E_A / g_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in E_A / g_A(x) \leq 1\}$ , se tiene que  $A$  es  $\tau_{g_A}$ -acotado pues  $\{x \in E_A / g_A(x) \leq 1\}$  lo es. Además  $A \in \mathcal{V}(C, \tau_{g_A})$  pues  $\{x \in E / g_A(x) < 1\} \in \mathcal{V}(C, \tau_{g_A})$ .

Luego,  $A$  es vecindad acotada del origen de  $E$  y en consecuencia  $E_A$  es localmente acotado y luego metrizable.

**Definición 4.6.5 :** Sea  $E$  un espacio lineal y  $A$  un  $p$ -disco separante de  $E$ . Se dice que  $A$  es completante si  $E_A$  es completo, luego un espacio del tipo (F), es decir un e.l.t. no necesariamente localmente convexo, metrizable y completo.

**Proposición 4.6.1 :** Todo e.b.c. <sub>$p$</sub>  es límite inductivo de espacios  $p$ -seminormados.

Demostración : Sea  $E$  un e.b.c. $_p$ , entonces  $E$  posee una base de bornología formada por  $p$ -discos de  $E$ .

Sean  $A$  y  $B$  dos  $p$ -discos acotados de  $E$  tales que  $A \subseteq B$ ; luego la inyección canónica :  $i_{BA} : E_A \longrightarrow E_B$  es acotada.

Luego, el sistema filtrante superiormente  $(E_A, i_{BA})$  es un sistema inductivo bornológico  $p$ -convexo de e.b.c. $_p$  y además  $E = \varinjlim E_A$ . (ver Demost. Prop. 1.7.1)

## 7. ESPACIOS BORNOLÓGICOS $p$ -CONVEXOS COMPLETOS Y BORNOLOGIAS $\mathcal{L}^p$ - DISQUEADAS

Definición 4.7.1 : Se dice que un e.b.c. $_p$   $E$  es completo si posee una base de bornología formada de  $p$ -discos completantes.

Un tal espacio es entonces límite inductivo de espacios  $p$ -normados completos.

A fin de precisar la relación entre la Mackey-completitud y la noción de completitud de la Definición 4.7.1, introducimos la noción de bornología  $\mathcal{L}^p$  - disqueada.

Definición 4.7.2 : Sean  $E$  un e.l.b. y  $A \subseteq E$ . Se dice que  $A$  es  $\mathcal{L}^p$  - disqueada, si las sumas de las

series  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$  (si es que existen) pertenecen a  $A$ ; donde

$(x_i) \subseteq A, (\lambda_i) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$ . Es decir, si  $\forall (x_i) \subseteq A,$

$\forall (\lambda_n) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$ , si existe  $\mathcal{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ ,

entonces  $\mathcal{A} \in A$ .

Observaciones :

- 1) Toda parte  $\lambda^P$ -disqueada de un e.l.b. E, es p-disqueada.
- 2) Sobre un e.b.c.<sub>p</sub> Mackey-completo E, las series  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$

relativas a una parte A de E convergen todas sobre E.

En efecto :

- 1) Sean  $x_1, \dots, x_n \in A$  ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  :  $\sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p \leq 1$

Sean  $b = s_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  y  $\forall i > n$ ,  $\lambda_i = 0$  ;  $x_i = a \in A$  ;

entonces  $(x_i) \subseteq A$ ,  $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}$  :

$$\sum_{i=1}^{\infty} / \lambda_i /^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p = \sum_{i=1}^n / \lambda_i /^p \leq 1$$

Además, para cada  $m \geq n$  ;  $s_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = s_n = b$ , luego

$s_n \xrightarrow{M} b$ , es decir, existe  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i = b$  y en consecuencia

$b \in A$  (pues A es  $\lambda^P$ -disqueada).

Por lo tanto, A es p-disqueada.

- 2) Para cada  $n \geq 1$ , las sumas parciales  $s_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \Gamma_p(A)$

y forman una sucesión de Cauchy sobre E  $\Gamma_p(A)$  ; en efecto:

$$\int_{\Gamma_p(A)} (s_n - s_m) = \int_{\Gamma_p(A)} \left( \sum_{i=m+1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=m+1}^n / \lambda_i /^p \int_{\Gamma_p(A)} (x_i)$$

$$\sum_{i=m+1}^n / \lambda_i /^p \longrightarrow 0$$

Luego, la sucesión  $(s_n)_{n \geq 1}$  es Cauchy-Mackey sobre E y siendo E Mackey-completo resulta que :

$$s_n \xrightarrow{M} A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$$

es decir, las series  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$  relativas a una parte A de E convergen todas sobre E.

Definición 4.7.3 : Sea E un e.b.c.<sub>p</sub> y  $A \subseteq E$ . Llamaremos cápsula  $\lambda^p$ -disqueada de A al conjunto anotado  $\mathcal{V}_p A$  de las sumas de la series  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$  ; con  $(x_i) \subseteq A$ ,  $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$ .

Si  $p = 1$  escribiremos  $\mathcal{V}A$  en lugar de  $\mathcal{V}_1 A$ .

Se dice que una bornología p-convexa es  $\lambda^p$ -disqueada, si la cápsula  $\lambda^p$ -disqueada de un acotado es también acotado.

Observaciones :

a) La cápsula  $\lambda^p$ -disqueada de una parte A de un e.b.c.<sub>p</sub> E, es  $\lambda^p$ -disqueada y luego p-disqueada.

En efecto : si  $\mathcal{V}_p A = \emptyset$ , entonces  $\mathcal{V}_p A$  es  $\lambda^p$ -disqueada evidentemente.

Supongamos que  $\mathcal{V}_p A \neq \emptyset$  y sea  $(s_n) \subseteq \mathcal{V}_p A$ ,  $(\gamma_n) \subseteq \mathbb{K} :$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|^p \leq 1 .$$

Supongamos que existe  $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i s_i$ , entonces :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i s_i = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{i,n} x_{i,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_i \lambda_{i,n} x_{i,n} ; \text{ con}$$

$$(x_{i,n}) \subseteq A, (\gamma_i \lambda_{i,n}) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_i \lambda_{i,n}|^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_i|^p |\lambda_{i,n}|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{i,n}|^p \leq 1$$

Luego  $\lambda \in \bigvee_p A$ .

b) Claramente  $A \subseteq \Gamma_p(A) \subseteq \bigvee_p A$ .

c) A es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada si y sólo si  $A = \bigvee_p A$ .

En efecto; supongamos que  $A = \bigvee_p A$ , entonces A es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada por (a).

Recíprocamente, si A es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada, entonces para toda  $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in \bigvee_p A$  resulta que  $\lambda \in A$ , y como siempre A está incluido en  $\bigvee_p A$ , se tiene que  $A = \bigvee_p A$ .

Ejemplo 4.7.1 : Sea E un e.b.c.p. saturado (la b-cerradura de un acotado es acotado), entonces la bornología de E es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada.

En efecto : Sea A una parte p-disqueada de E y  $\lambda \in \bigvee_p A$ , entonces  $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i = \lim_b \sum_{n=1}^k \lambda_n x_n$  ; con  $(x_i) \subseteq A$  ;

$(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$  y las sumas finitas  $\sum_{n=1}^k \lambda_n x_n \in A$  ;

pues A es un p-disco. Luego  $\lambda \in \bar{A}^b$ , es decir  $\bigvee_p A \subseteq \bar{A}^b$  y como  $\bar{A}^b$  es acotado, resulta que  $\bigvee_p A$  es acotado y en consecuencia la bornología de E es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada.

Ejemplo 4.7.2 : Toda bornología p-convexa completa es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada.

En efecto : Sea B un p-disco de E, entonces existe D p-disco completante de E tal que  $B \subseteq D$ .

Mostraremos que  $\bigvee_p B \subseteq \bar{B} \subseteq D$  (donde  $\bar{B}$  es la cerradura de B en  $E_D$ ).

Sea  $s = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in \bigvee_p B$ , entonces las sumas parciales  $s_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in B$  forman una sucesión de Cauchy en  $E_B \subseteq E_D$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (s_n)_{n \geq 1} &\text{ es una sucesión de Cauchy en } E_D \\ \Leftrightarrow s_n &\longrightarrow s = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \text{ en } E_D \quad (E_D \text{ es completo}) \\ \Leftrightarrow s &\in B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado, } x \in \bar{B} &\Leftrightarrow \exists (b_n) \subseteq B \subseteq D : b_n \longrightarrow x \\ \Leftrightarrow \int_D(b_n) &\leq 1, \forall n \geq 1 \text{ (pues } b_n \in D, \forall n \geq 1) \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D(b_n) &\leq 1 \Leftrightarrow \int_D(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) \leq 1 \Leftrightarrow \int_D(x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow x &\in D. \end{aligned}$$

Así,  $\bigvee_p B \subseteq \bar{B} \subseteq D$  y  $D$  acotado de  $E$ , luego  $\bigvee_p B$  es acotado y en consecuencia la bornología  $p$ -convexa completa de  $E$  es  $\lambda^p$ -disqueada.

Ejemplo 4.7.3 : Una bornología convexa  $M$ -completa no es necesariamente  $\lambda^p$ -disqueada.

"Ejemplo de Nel"

Consideremos el espacio lineal

$$\lambda^{\infty} = \{ x = (\xi_n) / \text{Sup } |\xi_n| < \infty, \xi \in K \}$$

$(\lambda^{\infty}, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach, donde  $\|x\| = \text{Sup } |\xi_n|$

$$\text{Sea } E = \{ x = (\xi_n) / \exists N \geq 1 ; n \geq N \Leftrightarrow \xi_n = 0 \}$$

Claramente  $E$  es un subespacio lineal de  $\lambda^{\infty}$ .

Definamos para cada  $F$  subespacio lineal de  $\lambda^{\infty}$  tal que  $\dim F < \infty$  y  $\forall f \in F$  :

$$M(p, F) = \{ x \in E + F / \|x\| \leq p \} \subseteq \lambda^{\infty}$$

Sea

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq \ell^\infty / \exists \rho > 0, \exists F \underline{\Delta} E; \dim F < \infty : B \subseteq M(\rho, F)\}$$

1)  $\mathcal{B}$  es una bornología convexa sobre  $\ell^\infty$ .

En efecto :

$$\begin{aligned} (B-1) \quad x \in \ell^\infty &\iff \exists F = \langle \{x\} \rangle \underline{\Delta} E : \dim F < \infty \text{ y } \rho = \|x\| > 0 \\ &\text{tal que } x \in M(\rho, F); \text{ pues } x \in E+F \text{ y } \|x\| \leq \rho \\ &\iff \{x\} \subseteq M(\rho, F) \\ &\iff \{x\} \in \mathcal{B} \iff \ell^\infty = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B. \end{aligned}$$

$$(B-2) \quad \text{Sean } B \in \mathcal{B} \text{ y } A \subseteq B, \text{ entonces existe } \rho > 0, F \underline{\Delta} \ell^\infty ; \\ \dim F < \infty : A \subseteq B \subseteq M(\rho, F) \iff A \in \mathcal{B} .$$

$$(B-3) \quad \text{Sean } B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \text{ entonces existen } \rho_1 > 0, \rho_2 > 0; \\ F_1 \underline{\Delta} \ell^\infty, \dim F_1 < \infty \text{ y } F_2 \underline{\Delta} \ell^\infty, \dim F_2 < \infty \text{ tal que} \\ B_1 \subseteq M(\rho_1, F_1) ; B_2 \subseteq M(\rho_2, F_2)$$

$$\text{Sean } F = \langle F_1 \cup F_2 \rangle \text{ y } \rho = \max \{ \rho_1, \rho_2 \}; \text{ entonces} \\ B_1 \subseteq E+F_1 \subseteq E+F \text{ y } B_2 \subseteq E+F_2 \subseteq E+F .$$

$$\begin{aligned} \text{Además, } x \in B_1 \cup B_2 &\iff x \in B_1 \vee x \in B_2 \\ &\iff \|x\| \leq \rho_1 \vee \|x\| \leq \rho_2 \\ &\iff \|x\| \leq \rho \iff x \in M(\rho, F) \end{aligned}$$

Luego,  $B_1 \cup B_2 \subseteq M(\rho, F)$  y en consecuencia  $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ .

$$(L-1) \quad \text{Sean } B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \text{ entonces existen } \rho_1 > 0, \rho_2 > 0; \\ F_1 \underline{\Delta} \ell^\infty, \dim F_1 < \infty \text{ y } F_2 \underline{\Delta} \ell^\infty, \dim F_2 < \infty \text{ tales que} \\ B_1 \subseteq M(\rho_1, F_1) ; B_2 \subseteq M(\rho_2, F_2)$$

$$\iff \begin{cases} B_1 \subseteq E+F_1 ; \|x\| \leq \rho_1, \forall x \in B_1 \\ B_2 \subseteq E+F_2 ; \|x\| \leq \rho_2, \forall x \in B_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow B_1 + B_2 \subseteq E + F_1 + F_2$  ; con  $F_1 + F_2 \underline{\Delta} \mathcal{L}^\infty$ ,  $\dim F_1 + F_2$  finita.

Además  $x \in B_1 + B_2 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2$  ;  $x_1 \in B_1$  ,  $x_2 \in B_2$

$$\|x\| = \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \rho_1 + \rho_2 = \rho$$

Luego,  $B_1 + B_2 \subseteq M(\rho, F)$ , con  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  ,  $F = F_1 + F_2$  ,  
es decir,  $B_1 + B_2 \in \mathcal{B}$  .

(L-2) Sean  $B \in \mathcal{B}$  ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , entonces existe  $\rho > 0$ , y  $F \underline{\Delta} \mathcal{L}^\infty$  tal  
que  $B \subseteq E + F$  ;  $\|x\| \leq \rho$ ,  $\forall x \in B$

$$\Rightarrow \lambda B \subseteq \lambda(E + F) = E + F$$

Además  $\forall x \in B$  :  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq |\lambda| \rho$

Luego, existe  $F \underline{\Delta} \mathcal{L}^\infty$  y  $\rho' = |\lambda| \rho > 0$  tal que

$$\lambda B \subseteq M(\rho', F), \text{ es decir, } \lambda B \in \mathcal{B} .$$

Observemos que para cada  $F \underline{\Delta} \mathcal{L}^\infty$ , para cada  $\rho > 0$ , el  
conjunto  $M(\rho, F)$  es absolutamente convexo (disco).

En efecto; sean  $x, y \in M(\rho, F)$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  :  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ ,  
entonces :

$$\alpha x + \beta y \in \alpha(E + F) + \beta(E + F) = E + F$$

$$\text{Además } \|\alpha x + \beta y\| \leq |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\|$$

$$\leq |\alpha| \rho + |\beta| \rho = (|\alpha| + |\beta|) \rho \leq \rho$$

es decir,  $\alpha x + \beta y \in M(\rho, F)$  .

(L-3) Sea  $B \in \mathcal{B}$  , entonces existen  $\rho > 0$ ,  $F \underline{\Delta} \mathcal{L}^\infty$ ,  $\dim F$   
finita tal que  $B \subseteq M(\rho, F) \Leftrightarrow \Gamma(B) \subseteq M(\rho, F)$

$$\Leftrightarrow \Gamma(B) \in \mathcal{B} .$$

Luego,  $e(B)$  ;  $c(B) \in \mathcal{B}$  .

Por lo tanto,  $\mathcal{B}$  es una bornología convexa sobre  $\mathcal{L}^\infty$ .

Observemos que la familia :

$\mathcal{B}_0 = \{M(\rho, F) \mid \rho > 0, F \triangle E, \dim F < \infty\}$  forma una base de  $\mathcal{B}$ .

Además,  $(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{B})$  es separado; en efecto: si  $L$  es un subespacio lineal acotado de  $\mathcal{L}^\infty$ , entonces existe  $M(\rho, F) \in \mathcal{B}_0$  :  $L \subseteq M(\rho, F)$

Además,  $x \in L \Leftrightarrow nx \in E + F$  y  $\|nx\| \leq \rho, \forall n \geq 1$

$$\Leftrightarrow \|x\| \leq \rho/n, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Es decir,  $L = \{0\}$ .

2)  $(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{B})$  es Mackey-completo.

En efecto: Sea  $(x_n) \subseteq \mathcal{L}^\infty$ , Mackey-Cauchy, entonces existe  $M(\rho, F) = B \in \mathcal{B}_0$  :  $(x_n)$  es Cauchy en  $(\mathcal{L}^\infty_B, \mathcal{G}_B)$ , es decir,  $\mathcal{G}_B(x_n - x_p) \rightarrow 0$  en  $\mathcal{L}^\infty_B$ , luego existe  $(\varepsilon_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ ,

$$\varepsilon_n \searrow 0 : x_n - x_p \in \varepsilon_n B, \forall n \geq p$$

$$\Leftrightarrow x_n - x_p \in \varepsilon_n B = \varepsilon_n M(\rho, F), \forall n \geq p$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_p)/\varepsilon_n \in M(\rho, F), \forall n \geq p$$

$$\Leftrightarrow (x_n - x_p)/\varepsilon_n \in E + F; \|(x_n - x_p)/\varepsilon_n\| \leq \rho$$

$$\Leftrightarrow x_n - x_p \in E + F; \|x_n - x_p\| \leq \varepsilon_n \rho \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (x_n) \text{ es } \|\cdot\| \text{-Cauchy en } \mathcal{L}^\infty,$$

luego como  $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|)$  es de Banach, existe  $x \in \mathcal{L}^\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Probaremos que  $x_n \xrightarrow{M} x$  en  $\mathcal{L}^\infty$ .

Observemos en primer lugar que :

$$\{x, x_1, x_2, \dots\} \subseteq E + F + \langle \{x, x_1\} \rangle$$

En efecto: Sea  $p=1$ , entonces  $x_n - x_1 \in \varepsilon_n M(\rho, F)$

$$\Leftrightarrow x_n - x_1 \in E + F ; //x_n - x_1// \leq \varepsilon_n^p$$

$$\Leftrightarrow x_n \in E + F + x_1$$

$$\Leftrightarrow x, x_n \in E + F + x_1 + x \subseteq E + F + \langle \{x, x_1\} \rangle , \forall n \geq 1$$

$$\text{Luego, } \{x, x_1, x_2, \dots\} \subseteq E + F + \langle \{x, x_1\} \rangle$$

$$\text{Sea } \varepsilon'_n = //x - x_n// \longrightarrow 0 \text{ y } F' = F + \langle \{x, x_1\} \rangle ,$$

entonces  $\dim F' < \infty$ .

$$\text{Además, } x - x_n \in E + F' , \text{ luego } \frac{x - x_n}{//x - x_n//} \in E + F' ;$$

$$\text{con } \frac{x - x_n}{//x - x_n//} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_n}{//x - x_n//} \in M(1, F')$$

$$\Leftrightarrow x - x_n \in \varepsilon'_n M(1, F') ; \text{ con } \varepsilon'_n \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} x \text{ en } l^\infty .$$

Por lo tanto,  $(l^\infty, \beta)$  es Mackey-completo.

3)  $\beta$  no es  $l^p$ -disqueada.

$$\text{Sea } B = \{b_1, b_2, \dots\} , \text{ donde } b_n = (0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, \dots)$$

i)  $B \in \beta$ .

$$\text{En efecto : } B \subseteq E \subseteq E + F, \forall F \triangleleft l^\infty ; \dim F < \infty .$$

$$\text{Además, } \forall b_n \in B : //b_n// = 1 , \text{ luego } B \subseteq M(1, F) ; \text{ con}$$

$$F \triangleleft l^\infty , \dim F < \infty \text{ y en consecuencia } B \in \beta .$$

Probaremos ahora que  $\bigvee_p B \notin \beta$  para  $p = 1$ , es decir,

$$\text{que } \bigvee B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i / b_i \in B, \lambda_i \in \mathbb{K} : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq 1 \right\} \notin \beta$$

Sea para cada  $m \geq 1$ ,  $y_m = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-mn} b_n$ . Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^m)^n = 1/(2^m - 1) \leq 1, \text{ se tiene que}$$

$y_m \in \mathcal{V}B$ ,  $\forall m \geq 1$ .

Probaremos que cualquiera que sea  $F \subseteq \mathcal{V}B$ , de dimensión finita se tiene que  $\{y_m / m \geq 1\} \not\subseteq E + F$ .

Supongamos que un tal  $F$  existe, es decir, que existe un  $F \subseteq \mathcal{V}B$ ,  $\dim F < \infty$  tal que  $\{y_m / m \geq 1\} \subseteq E + F$ ; entonces  $y_m = e_m + f_m$ ; con  $e_m \in E$  y  $f_m \in F$ ,  $\forall m \geq 1$

$$\Leftrightarrow y_m - e_m = f_m \in F; \text{ con } e_m \in E \text{ y } f_m \in F.$$

Luego,  $\langle \{y_m - e_m / m \geq 1\} \rangle$  es de dimensión finita, luego  $\{y_m - e_m / m \geq 1\}$  es l.d., entonces existe  $k \geq 1$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  escalares no nulos tales que

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j (y_j - e_j) = 0$$

Por otra parte, cada  $e_j$  ( $j \leq k$ ) tiene solo un número finito de componentes no nulas, esto es,

$$e_j = (e_j^{(n)}) = (t_1, t_2, \dots, t_s, 0, 0, \dots) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-jn} b_n = 2^{-j} b_1 + 2^{-2j} b_2 + 2^{-3j} b_3 + \dots \\ &= (2^{-j}, 2^{-2j}, 2^{-3j}, \dots) \end{aligned}$$

Luego :

$$y_j - e_j = (2^{-j} - t_1, 2^{-2j} - t_2, \dots, 2^{-sj} - t_s, 2^{-(s+1)j}, \dots),$$

luego podemos escoger  $q$  suficientemente grande de modo que si  $n > q$ , la  $n$ -ésima componente de  $y_j$  y de  $y_j - e_j$  coinciden (para cada  $j \leq k$ ).

Ahora, las  $n$ -ésimas componentes de  $\sum_{j=1}^k \lambda_j (y_j - e_j)$  y  $\sum_{j=1}^k \lambda_j y_j$  son respectivamente:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j (y_j^{(n)} - e_j^{(n)}) \text{ y } \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j^{(n)}, \text{ donde}$$

$y_j = (y_j^{(n)})$  y  $e_j = (e_j^{(n)})$ ; luego, si  $n > q$ :

$$0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j (y_j - e_j) \implies 0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j (y_j^{(n)} - e_j^{(n)}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j^{(n)},$$

es decir,  $\sum_{j=1}^k \lambda_j y_j^{(n)} = 0, \forall n > q$

pero  $y_j = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-jn} b_n = (2^{-j}, 2^{-2j}, 2^{-3j}, \dots, 2^{-nj}, \dots)$ , luego

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j 2^{-nj} = 0, \forall n > q.$$

Luego  $p(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j$  es un polinomio tal que  $x = 2^{-n}$

es un cero de  $p(x)$ ,  $\forall n > q$ , es decir,  $p(x)$  es un polinomio con infinitos ceros  $\longrightarrow \longleftarrow$

Por lo tanto, para cada  $F \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ ;  $\dim F < \infty$  se tiene que  $\{y_m / m \geq 1\} \not\subseteq E + F$ , es decir,  $\forall B \not\subseteq E + F$  cualquiera que sea  $F \subseteq \mathbb{R}^{\infty}$ ,  $\dim F < \infty$ ; luego  $\forall B \notin \mathcal{B}$  y en consecuencia  $\mathcal{B}$  no es  $\mathbb{R}^P$ -disqueada.

**Proposición 4.7.1 :** Sea  $E$  un e.b.c.<sub>p</sub>.  $0 < p \leq \infty$ . Entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes :

- $E$  es completo.
- $E$  es Mackey-completo y su bornología  $\mathbb{R}^P$ -disqueada.

**Demostración :**

a)  $\implies$  b) Supongamos que  $E$  es completo, entonces la bornolo-

gía de  $E$  es  $\lambda^P$ -disqueada (Ejemplo 4.7.2).

Mostremos que  $E$  es Mackey-completo.

Sea  $(x_n)$  una sucesión Cauchy-Mackey en  $E$ , entonces existe  $B$  acotado de  $E$  tal que  $(x_n)$  es Cauchy en  $E_B$

$\Leftrightarrow \exists A$   $p$ -disco completante de  $E$  :  $(x_n)$  es Cauchy en  $E_A$

$\Leftrightarrow x_n \longrightarrow x$  en  $E_A$  ; pues  $E_A$  es completo

$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{M} x$  en  $E$

Además,  $E$  es separado pues si no lo fuera existiría  $x \in E$ ,  $x \neq 0$  tal que  $\mathbb{K}x$  es acotado de  $E$

$\Leftrightarrow \exists D$   $p$ -disco completante de  $E$  :  $\mathbb{K}x \subseteq D$

$\Leftrightarrow nx \in D$ ,  $\forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in 1/n D$ ,  $\forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow \bigcap_D(x) \leq 1/n^P$ ,  $\forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow \bigcap_D(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \longrightarrow \longleftarrow$

b)  $\Leftrightarrow$  a) Supongamos que  $(E, \beta)$  es Mackey-completo y su bornología  $\lambda^P$ -disqueada.

Mostremos que  $\beta_0 = \{A = \bigvee_p B / B \in \beta\}$  es base de  $\beta$  formada de  $p$ -discos completantes.

Claramente  $\beta_0 \subseteq \beta$ ; además si  $B \in \beta$ , existe  $A = \bigvee_p B \in \beta_0$  tal que  $B \subseteq A$ . Luego  $\beta_0$  es base de  $\beta$ .

Es suficiente entonces mostrar que todo elemento de  $\beta_0$  es  $p$ -disco completante.

Sea  $A \in \beta_0$ , entonces existe  $B \in \beta$  :  $A = \bigvee_p B$ .

Mostremos que  $A = \bigvee_p B$  es completante, es decir, que toda serie absolutamente convergente de  $E_A$ , es convergente.

Observemos primeramente lo siguiente :

(\*) Toda serie de la forma  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i$  (con  $(b_i) \subseteq B$ ,  $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$ ) converge sobre  $E_A$ .

En efecto : Sean  $(b_i) \subseteq B$  ;  $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}$  :  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1$  ,  
luego existe  $b = \lim_{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$

Ahora,  $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{n \geq m} |\lambda_i|^p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  , luego dado

$\varepsilon > 0$  , existe  $n_0 \geq 1$  :  $n \geq n_0 \Leftrightarrow \sum_{i > n} |\lambda_i|^p \leq \varepsilon$

Además,  $\forall n \geq 1$  :  $b - \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \sum_{i > n} \lambda_i b_i \in A$

Luego,  $\forall n \geq n_0$  :  $\mathcal{G}_A(b - \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) = \mathcal{G}_A(\sum_{i > n} \lambda_i b_i)$

$$\sum_{i > n} |\lambda_i|^p \mathcal{G}_A(b_i)$$

$$\sum_{i > n} |\lambda_i|^p \leq \varepsilon$$

Es decir,

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \quad \text{en } E_A .$$

Mostremos ahora que toda serie absolutamente convergente de  $E_A$  es convergente.

Sea  $(u_n)$  una sucesión en  $E_A$  tal que la serie  $\sum_{n \geq 1} u_n$  sea absolutamente convergente, es decir,  $(\sum_{n \geq 1} \mathcal{G}_A(u_n))$  es convergente).

Sea  $(v_n)$  una sucesión de números reales positivos tal que la serie  $\sum_{n \geq 1} v_n = a$  y  $\mathcal{G}_A(u_n) < v_n$  ; entonces  $\sum_{n \geq 1} u_n$  es

Cauchy en  $E_A$  ; en efecto :

$$\mathcal{G}_A\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i\right) \leq \mathcal{G}_A(u_{n+1}) \leq v_{n+1} \longrightarrow 0$$

Luego,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  es Cauchy - Mackey en  $(E, \beta)$  y en consecuencia, Mackey - convergente en  $(E, \beta)$ , es decir, existe  $u \in E$  tal que  $\sum_{n \geq 1} u_n \stackrel{(b)}{=} u$ .

$$\text{Ahora, } \mathcal{G}_A(u_n) < v_n \iff \mathcal{G}_A(u_n/v_n^{1/p}) < 1 \iff u_n/v_n^{1/p} \in A$$

$$\iff \exists (\lambda_{n,k})_{k \geq 1} : \sum_{k \geq 1} \lambda_{n,k}/\lambda_{n,k}^p \leq 1 ; (a_{n,k}) \subseteq B \text{ tal que}$$

$$u_n/v_n^{1/p} = \sum_{k \geq 1} \lambda_{n,k} a_{n,k}$$

$$\iff u_n = v_n^{1/p} \sum_{k \geq 1} \lambda_{n,k} a_{n,k}$$

$$\iff \sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} v_n^{1/p} \sum_{k \geq 1} \lambda_{n,k} a_{n,k}$$

$$\iff u \stackrel{(b)}{=} \sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} v_n^{1/p} \lambda_{n,k} a_{n,k}$$

$$\iff u/a^{1/p} \stackrel{(b)}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} (v_n^{1/p} \lambda_{n,k} / a^{1/p}) a_{n,k}$$

$$\text{donde } \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} (v_n^{1/p} \lambda_{k,n} / a^{1/p}) / \lambda_{k,n}^p \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} (v_n/a) / \lambda_{k,n}^p$$

$$\leq (\sum_{n \geq 1} v_n) / a = a/a = 1$$

Luego,  $u/a^{1/p} \in E_A \iff u \in E_A$ , es decir, la serie  $\sum_{n \geq 1} u_n$

converge en  $E_A$ .

Por lo tanto,  $(E, \beta)$  es completo.

Proposición 4.7.2 : Sean  $E$  un e.l. y  $\mathcal{G}: E \rightarrow \mathbb{R}$  una  $p$ -semi-norma. Entonces :

$(E, \mathcal{G})$  es completo si y sólo si para toda sucesión  $(u_n)$  de  $E$  :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}(u_i) < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} u_i \text{ converge en } E.$$

Demostración : Supongamos que  $(E, \mathcal{G})$  es completo y sea

$$(u_n)_{n \geq 1} \subseteq E : \sum_{i \geq 1} \mathcal{G}(u_i) < \infty.$$

Para cada  $n \geq 1$  , pongamos  $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$  , entonces

$$\mathcal{G}(s_{n+1} - s_n) = \mathcal{G}(u_{n+1}) \longrightarrow 0 ; (\text{pues } \sum_{i \geq 1} \mathcal{G}(u_i) < \infty);$$

es decir,  $(s_n)_{n \geq 1}$  es  $\mathcal{G}$ -Cauchy en  $E$ , luego siendo  $E$  completo existe  $u \in E$  :  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  , es decir,  $\sum_{i \geq 1} u_i$  es convergente

en  $E$ .

Recíprocamente supongamos que para toda sucesión  $(u_n)$  de  $E$  :  $\sum_{i \geq 1} \mathcal{G}(u_i) < \infty \iff \sum_{i \geq 1} u_i$  es convergente en  $E$  y sea  $(x_n)$

una sucesión en  $E$   $\mathcal{G}$ -Cauchy, entonces para cada  $k \geq 1$  , existe  $p_k \geq 1$  :  $\mathcal{G}(x_n - x_m) < 1/2^k$  ,  $\forall m, n \geq p_k$  .

Claramente podemos escoger los  $p_k$  en forma creciente. Consideremos la sucesión  $(x_{p_k})_{k \geq 1}$  y definamos la sucesión

$$(a_n) \text{ como sigue : } a_1 = x_{p_1}, a_2 = x_{p_2} - x_{p_1}, \dots, a_k = x_{p_k} - x_{p_{k-1}}, \dots$$

Consideremos la serie  $\sum_{k \geq 1} \mathcal{G}(a_k)$  , es decir, la sucesión de sumas parciales :

$$s_n = \mathcal{G}(a_1) + \mathcal{G}(a_2) + \dots + \mathcal{G}(a_n)$$

entonces  $s_n = \mathcal{G}(x_{p_1}) + \mathcal{G}(x_{p_2} - x_{p_1}) + \dots + \mathcal{G}(x_{p_k} - x_{p_{k-1}})$

$$\begin{aligned}
 &< \mathcal{G}(x_{p_1}) + 1/2 + \dots + 1/2^{n-1} \\
 &< \mathcal{G}(x_{p_1}) + \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = \mathcal{G}(x_{p_1}) + 1
 \end{aligned}$$

Es decir,  $(s_n)$  es una sucesión de números reales positivos creciente y acotadas superiormente; luego existe

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , es decir,  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}(a_k) < \infty$ , entonces por hipótesis

existe  $z \in E : \sum_{k \geq 1} a_k = z$ , esto es, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  en  $(E, \mathcal{G})$

pero  $\sum_{k=1}^n a_k = x_{p_1} + (x_{p_2} - x_{p_1}) + \dots + (x_{p_n} - x_{p_{n-1}}) = x_{p_n}$

Luego, existe  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n}$  en  $(E, \mathcal{G})$  y como  $(x_{p_n})$  es una

subsucesión de  $(x_n)$ , resulta que para todo  $\varepsilon > 0$ , existen

$$N_1 \geq 1 : n, m \geq N_1 \implies \mathcal{G}(x_n - x_m) < \varepsilon/2 \quad y$$

$$N_2 \geq 1 : p_n \geq N_2 \implies \mathcal{G}(x_{p_n} - z) < \varepsilon/2$$

Luego si  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , se tiene que para  $n \geq N$  y  $p_n \geq N$ :

$$\mathcal{G}(x_n - z) \leq \mathcal{G}(x_n - x_{p_n}) + \mathcal{G}(x_{p_n} - z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Así,  $x_n \longrightarrow z$  en  $(E, \mathcal{G})$  y en consecuencia  $(E, \mathcal{G})$  es completo.

Proposición 4.7.3 :

- Sean  $(E, \beta)$  un e.b.c.<sub>p</sub> y  $F$  un subespacio lineal b-cerrado de  $E$ , entonces  $F$  es completo.
- Todo producto de e.b.c.<sub>p</sub> completos es completo.
- Sea  $E = \varinjlim E_i$  un e.b.c.<sub>p</sub> límite inductivo bornológico

$p$ -convexo de e.b.c.<sub>p</sub>. completos. Si  $E$  es separado, entonces  $E$  es completo.

Demostración :

a) Supongamos que  $(E, \beta)$  es un e.b.c.<sub>p</sub>. completo y  $F$  un subespacio lineal  $b$ -cerrado de  $E$ , entonces por Prop.4.7.1,  $(E, \beta)$  es Mackey-completo y  $\beta$   $\mathfrak{L}^P$ -disqueada; luego  $F$  es Mackey-completo por Proposición 4.5.3.

Mostraremos ahora que  $\beta_F$  es  $\mathfrak{L}^P$ -disqueada.

Sea  $A \in \beta_F$ , entonces existe  $B \in \beta$  tal que  $A = B \cap F$ , pero entonces  $\mathcal{V}_p A = \mathcal{V}_p(B \cap F) \subseteq \mathcal{V}_p B \cap F$ , en efecto :

$$x \in \mathcal{V}_p(B \cap F) \iff x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i ; x_i \in B \cap F, \lambda_i \in K : \sum_{i=1}^k |\lambda_i|^p \leq 1$$

$$\iff x \in \mathcal{V}_p B \text{ y como } x = \lim_{(b)} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i ; \text{ con}$$

$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in F$ ; luego siendo  $F$   $b$ -cerrado resulta que  $x \in F$ , es

decir,  $x \in \mathcal{V}_p B \cap F$ .

Así,  $\mathcal{V}_p A \subseteq \mathcal{V}_p B \cap F \in \beta_F$ ; pues  $\mathcal{V}_p B \in \beta$ . Luego  $\mathcal{V}_p A \in \beta_F$ .

Por lo tanto,  $F$  es completo. (Proposición 4.7.1)

b) Sea  $(E_i)_{i \in I}$  una familia de e. b. c.<sub>p</sub>. completos, entonces  $(E_i)_{i \in I}$  es una familia de e. b. c.<sub>p</sub>. Mackey-completos y sus bornologías  $\mathfrak{L}^P$ -disqueadas ( Proposición 4.7.1), luego  $E = \prod_{i \in I} E_i$  es Mackey - completo ( Proposición 4.5.3).

Mostremos ahora que  $\prod_{i \in I} \beta_i$  es  $\mathfrak{L}^P$ -disqueada.

Sea  $A \in \prod_{i \in I} \beta_i$ , entonces para todo  $i \in I$ ;  $u_i(A) \in \beta_i$ , luego  $\forall i \in I$ ;  $u_i(\mathcal{V}_p A) \subseteq \mathcal{V}_p u_i(A)$ , en efecto: Para cada  $i \in I$  sea  $y \in u_i(\mathcal{V}_p A)$ , entonces existe  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in \mathcal{V}_p A : y = u_i(x)$

$$\Leftrightarrow y = u_i \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_i \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right)$$

$$\Leftrightarrow y = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i(x_i) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i u_i(x_i) \in \mathcal{V}_p u_i(A)$$

Luego,  $\forall i \in I, u_i(\mathcal{V}_p A) \subseteq \mathcal{V}_p u_i(A) \in \beta_i$ , es decir,  $\mathcal{V}_p A \in \beta_{II}$

y en consecuencia  $\beta_{II}$  es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada.

Por lo tanto,  $E = \prod_{i \in I} E_i$  es completo.

c) Sea  $E = \varinjlim E_i$ , donde cada  $E_i$  es un e.b.c.p. completo.

Basta mostrar que  $E$  es Mackey-completo y su bornología  $\mathcal{L}^p$ -disqueada (proposición 4.7.1).

Como cada  $E_i$  es completo por Prop.4.7.1, se tiene que  $E_i$  es Mackey-completo y su bornología  $\mathcal{L}^p$ -disqueada  $\forall i \in I$ .

Luego  $E$  es un límite inductivo de espacios Mackey-completos y siendo  $E$  separado resulta por Corolario 4.5.3' que  $E$  es Mackey-completo.

Resta probar que la bornología de  $E$  es  $\mathcal{L}^p$ -disqueada.

Sean  $\forall i \in I, v_i : E_i \rightarrow E$  las aplicaciones canónicas de  $E_i$  en  $E$  (ellas son lineales y acotadas) y

$\mathcal{Q} = \{v_i(A) / A \in \beta_i, i \in I\}$ ;  $\mathcal{Q}$  genera la bornología  $\beta$  de  $E$  luego basta probar que:

$$\forall i \in I, \forall A \in \beta_i : \mathcal{V}_p(v_i(A)) \in \beta$$

Sea  $y \in \mathcal{V}_p(v_i(A))$ , entonces

$$y = \sum_{j \geq 1} \lambda_j v_i(a_j) ; \text{ con } \lambda_j \in \mathbb{K} : \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p \leq 1 ; a_j \in A ;$$

$$\text{luego } y = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j v_i(a_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j v_i(a_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_i \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \right)$$

$$\begin{aligned}
&= v_i \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \right) \\
&= v_i \left( \sum_{j \geq 1} \lambda_j a_j \right); \text{ con } \sum_{j \geq 1} \lambda_j a_j \in \mathcal{V}_p A
\end{aligned}$$

es decir,  $y \in v_i(\mathcal{V}_p A)$ .

Luego,  $\mathcal{V}_p(v_i(A)) \subseteq v_i(\mathcal{V}_p A)$  y como  $\mathcal{V}_p A \in \mathcal{B}_i$  por ser  $\mathcal{B}_i$   $\ell^p$ -disqueada, se tiene que  $v_i(\mathcal{V}_p A) \in \mathcal{B}$ ; pues  $v_i$  es acotada.

Por lo tanto,  $\mathcal{V}_p(v_i(A)) \in \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}$   $\ell^p$ -disqueada.

## CONCLUSION



- ii) Las aplicaciones  $h_\lambda: E \rightarrow E : x \rightarrow \lambda x$  ;  
 $f_a: \mathbb{K} \rightarrow E : \lambda \rightarrow \lambda a$  y  $T_a: E \rightarrow E : x \rightarrow a + x$   
son todas continuas. Además,  $T_a$  es un homeomorfismo y  
si  $\lambda \neq 0$  , entonces  $h_\lambda$  es también un homeomorfismo.
- iii)  $\mathcal{T}(E)$  es la topología más fina sobre  $E$  entre todas  
las topologías  $\mathcal{T}$  sobre  $E$  tales que la convergencia  
bornológica implica la convergencia topológica de suce-  
siones.
- iv) Una forma lineal  $f$  sobre un espacio lineal bornoló-  
gico  $E$  es  $\mathcal{T}(E)$ -continua si y sólo si  $f$  es acotada.
- v) La Proposición 3.4.9 nos muestra una interesante ca-  
racterización de las sucesiones  $\mathcal{T}(E)$ -convergentes  
mediante el concepto de sucesiones Mackey-convergentes.
- 5) Todo espacio bornológico convexo completo es separado.  
El recíproco es cierto siempre que el espacio sea límite  
inductivo de espacios bornológicos convexos completos. (Pro-  
posiciones 4.2.1 y 4.2.5 resp.)
- 6) La condición de completitud bornológica es mucho más dé-  
bil que la condición de completitud usual en los espacios  
lineales topológicos. (Corolario 4.5.1).
- 7) Un espacio bornológico  $p$ -convexo es completo si y sólo si  
es Mackey-completo y su bornología  $\mathcal{L}^p$ -disqueada. (Propo-  
sición 4.7.1). Uno de los resultados de mayor importancia en  
este trabajo es el Ejemplo 4.7.3 (Ejemplo de Nel), el cual  
muestra que la bornología de un espacio bornológico convexo

Mackey-completo no es necesariamente  $q^p$ -disqueada.

8) Es interesante desarrollar a futuro el estudio de el concepto de completación bornológica de un e.b.c.<sub>p</sub>. ; en efecto, a modo de motivación y sin mayores detalles de demostración, digamos que siempre es posible asociar un e.b.c.<sub>p</sub>. completo a un e.b.c.<sub>p</sub>. arbitrario. A grandes lineas podemos decir que su construcción es la siguiente : se puede suponer E separado, pasando si es necesario al e.b.c.<sub>p</sub>. separado asociado. (Proposición 3.3.2)

Entonces :

$$E = \varinjlim (E_i, \Pi_{ij})$$

Límite inductivo bornológico de los espacios p-normados  $E_i$ .

Anotamos  $\hat{E}_i$  al completado de  $E_i$ . Luego  $\hat{E}$  es el e.b.c.<sub>p</sub>. separado asociado al

$$\varinjlim (\hat{E}_i, \hat{\Pi}_{ji})$$

## BIBLIOGRAFIA

- BUCHWALTER, Henri. Topologies, Bornologies et Compactologies  
Departamento de Matemáticas. Lyons, 1968.
- DELFOSE, Jean Pierre. Los Espacios Bornológicos. Universi-  
dad Católica Louvain. 1968.
- HOGBE, Nleud. Théorie des Bornologies et Applications.  
Berlin, 1971, Springer Lecture Note 213.
- HOGBE, Nleud. Les Fondements de la Bornologie Moderne I.  
Départ. Math. Bordeaux, 1970.
- HORVATH, John. Topological Vector Spaces and Distribution.  
Volume 1. Addison-Wesley. Publishing  
Company. Massachusetts 1966.
- JARCHOW, Hans. Locally Convex Spaces. B. G. Teubner  
Stuttgart. 1981.
- KISINSKI, J. Convergence de Type L. Colloque Math. Vol.7,  
Face 2, 1960, 205-211.
- L. D. Nel. Note on Completeness in a Pseudo Topological  
Linear Spaces. Journal London Math.  
Soc., 40 (1965) 497-498.
- MIKUSINSKI, J. Distributions à valeurs dans les réunions  
d'espaces de Banach. Stud. Math. T. 19,  
1960 p. 251-285.

ROJO, Jorge. Apuntes del Curso de Topología. Programa de  
Maestría. Universidad de Panamá 1983.

ROJO, Jorge. Apuntes del Curso de Análisis Funcional. Pro-  
grama de Maestría. Universidad de Panamá  
1981.

LECTURES NOTES IN MATHEMATICS # 331 : Summer School on  
Topological Vector Spaces, 1973.

Remarcamos los siguientes resultados :

- 1) La bornología compacta de un espacio lineal topológico en general no es convexa. Sin embargo, si el espacio es de Banach, entonces dicha bornología resulta convexa gracias a la completitud del espacio.
- 2) La convergencia bornológica implica la convergencia topológica. El recíproco no es necesariamente cierto; más aún, los únicos espacios lineales topológicos que verifican la condición de convergencia de Mackey para filtros, es decir, en los cuales la convergencia topológica es equivalente a la convergencia bornológica, son los espacios lineales topológicos localmente acotados.
- 3) Para que la convergencia en el sentido de Mackey (convergencia bornológica) sea topologizable, es necesario y suficiente que el espacio sea simple, es decir, que exista un bornívoro acotado. Luego, para dar un ejemplo de un espacio lineal bornológico  $E$  en el cual la convergencia en el sentido de Mackey sea topologizable, basta garantizar la existencia de un acotado bornívoro en  $E$ . Por ejemplo  $(E, P(E))$ ; con  $E$  un espacio lineal arbitrario.
- 4) La topología de la  $p$ -cerradura  $\tau(E)$  en un espacio lineal bornológico  $(E, \tau)$ , posee propiedades de mucha importancia entre las cuales figuran las siguientes :
  - i) Toda aplicación lineal acotada, es lineal  $\tau(E)$ -continua.