



UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

MEDIDA DE NO COMPACIDAD Y
OPERADORES CON PUNTO FIJO

por:

Narciso A. Rodríguez J.

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización
en Matemática

TH

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

2 ABR. 1986

Español del Vicerrector

Director de Tesis

Rogelio Rosas
Dr. ROGELIO ROSAS

Miembro del Jurado

Carlos Sanchez
Dr. CARLOS SANCHEZ

Miembro del Jurado

Elmir Apere Abicir de Carvalho
ELMIR CARVALHO, M.Sc

Fecha

Panama', 13 de Marzo de 1986

Obs. del autor

216384

Ciudad Universitaria "Octavio Méndez Pereira"

ESTAFETA UNIVERSITARIA

PANAMA, R. DE P.

CONTENIDO

	Página
INTRODUCCION	I
CAPITULO I	
Medida de No-Compasidad y sus propiedades	1
CAPITULO II	
Algunos Operadores Especiales	21
CAPITULO III	
Clasificación de los operadores	31
CAPITULO IV	
Operadores con Punto Fijo	
4.1 Operadores Sobre un Espacio de Banach	40
4.2 Operadores Sobre Conos	62
4.3 Caso Especial de Operadores	76
CONCLUSIONES	84
APENDICE	86
BIBLIOGRAFIA	88

INTRODUCCION

La medida de no-compacidad α fue considerada primeramente por Kuratowski quién demostró algunas de sus interesantes propiedades. A partir de éste momento las propiedades de ésta medida fueron estudiados por muchos matemáticos (Darbo, Ambrosetti, Danes, Furi, Nussbaum, Vignoli, y otros).

Kuratowski también introdujo la noción de operadores α - k -lipschitz. Y desde entonces varios matemáticos entre ellos Darbo y Sadovski han demostrado, haciendo uso de la medida de no-compacidad α importantes teoremas sobre operadores con punto fijo.

En ésta tésis que consta de 4 capítulos, se exponen las propiedades más interesantes de la medida de no-compacidad α , se definen algunos operadores y se estudian algunos resultados interesantes de operadores con punto fijo usando la técnica de ésta medida.

En el primer capítulo, naturalmente, se define la medida de no-compacidad α , y se estudian las propiedades más importantes de ésta medida. Algunas de las demostraciones de éstas propiedades fueron modificados, otras como las propiedades 1.11, 1.12 y 1.13 fueron introducidas con posterioridad como resultado de la necesidad de su uso en otros capítulos.

En el capítulo segundo se definen los operadores compactos, α - k -lipschitz, condensados, demicompactos y se introduce un nuevo tipo de operadores el cual estamos investigando los operadores λ_n -demicompactos. Se presentan además algunas

propiedades de éstos operadores. Las propiedades 2.10 , 2.11 fueron introducidos por nosotros. Como resultado de la investigación propia y asesorados por los profesores de la tésis, hemos introducido la propiedad 2.14 que resultó de gran utilidad en el capítulo 3 para encontrar operadores demicompactos que no sean λ_n -demicompactos.

La clasificación de éstos operadores se presenta en el tercer capítulo. Las proposiciones 3.1 , 3.2 y 3.4 así como el lema 3.3 también son el resultado de esta investigación.

En el último capítulo que consta de tres partes, se estudian los operadores con punto fijo. En la primera parte se estudian los operadores con punto fijo definidos sobre un espacio de Banach. Se presentan los teoremas de punto fijo, desde los más elementales como los teoremas de punto fijo para operadores contractivos, y haciendo uso del teorema de Brouwer, se demuestra que toda función continua de un conjunto cerrado acotado y convexo posee punto fijo (proposición 4.1.6). En el teorema 4.1.7 se establece que todo operador d -a-lipschitz con $0 \leq a \leq 1$ definido en un sub-conjunto acotado convexo y cerrado, con valores en el mismo conjunto, posee punto fijo, constituyendo así la primera aplicación de la medida de no-compacidad al problema de punto fijo. El teorema de punto fijo de Schauder queda entonces como un corolario del teorema anterior. Seguidamente se estudian otras aplicaciones de la medida de no-compacidad al problema de punto fijo tales como el teorema de punto fijo de Sadovski.

En la segunda parte del capítulo se ven los operadores con punto fijo definidos sobre un cono. Se introducen los operadores α -lipschitz y los operadores casiacotados. La demostración del corolario 4.2.5 fué realizado por nosotros como una aplicación del teorema 4.2.4.

Se introduce el concepto de operador asintótico a un operador lineal acotado dado, se establecen seguidamente una proposición y dos lemas, previos para la demostración del teorema 4.2.12. El corolario 4.2.13 es introducido por nosotros.

En la última sección del capítulo cuarto se estudian un caso especial de operadores; bajo qué condiciones el operador H definido por $H(x) = G(x, Q(x))$ donde $Q : \Gamma \longrightarrow Y$, Γ es un sub-conjunto cerrado acotado y convexo de un espacio de Banach, Y espacio de Banach, y $G : \Gamma \times Q(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$, es α - k -lipschitz. Para responder a ésta interrogante tenemos el lema 4.3.1 cuya demostración modificamos totalmente. También presentamos el teorema 4.3.5 cuya demostración modificamos.

CAPITULO No. 1

MEDIDA DE NO-COMPACIDAD Y SUS PROPIEDADES

A continuación definiremos la medida de no-compacidad para conjuntos acotados:

Sea (M, d) un espacio métrico completo, X un sub-conjunto acotado de M . Denotemos por:

$\alpha(X) = \inf \{ \varepsilon > 0 / X \text{ admite un cubrimiento finito por conjuntos de diámetros } \leq \varepsilon \}$.

Si \mathcal{A} es el conjunto de las partes acotadas de M entonces:

$$\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+^+$$

Obsérvese que para todo $X \in \mathcal{A}$, $\alpha(X)$ está bien definida pues X al menos admite un cubrimiento finito, a saber, X mismo de diámetro finito. O sea:

$$0 \leq \alpha(X) \leq \text{diam } X, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{A}$$

Es necesario señalar también que α no es una medida en el sentido usual, pues no se cumple que:

$$\alpha \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n)$$

para una familia $(A_n)_{n \geq 1}$ de conjuntos de \mathcal{A} disjuntos dos a dos.

La medida de no-compacidad α tiene las siguientes

propiedades:

Proposición 1.1

Si $X, Y \in \mathcal{A}$ son tales $X \subset Y$ entonces

$$\alpha(X) \leq \alpha(Y)$$

Demostración,

Dado $\xi > 0$, existen Y_1, Y_2, \dots, Y_n con $\text{diam } Y_i < \alpha(Y) + \xi$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$ y tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n Y_i$, pero entonces $X \subset \bigcup_{i=1}^n Y_i$ de donde

$$\alpha(X) \leq \alpha(Y) \quad \square$$

Obsérvese que de acuerdo a la definición de α para un conjunto acotado X y para $\xi > 0$ se puede suponer la existencia de conjuntos Y_1, Y_2, \dots, Y_n con $\text{diam } Y_i < \alpha(X) + \xi$ para $1 \leq i \leq n$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^n Y_i$. En efecto basta observar que para cualquier cubrimiento $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ finito de X es decir:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i$$

se tiene que $X = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap X)$, y además: $\text{diam } (X_i \cap X) \leq$

$\text{diam } X_i$ pues $X_i \cap X \subset X_i$.

Proposición 1.2

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ es una familia decreciente de conjuntos cerrados acotados y no vacíos tales que:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(A_n) = 0$, entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es no vacío y compacto.

Demostración.

Sea $d_n = \alpha(A_n)$ y sea $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números positivos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

Por definición de la medida α tenemos que para todo $n \geq 1$, existen $S_1^n, S_2^n, \dots, S_{k(n)}^n$ con $\text{diam } S_j^n \leq d_n + \epsilon_n$

$$1 \leq j \leq k(n) \text{ y tal que } A_n = \bigcup_{j=1}^{k(n)} S_j^n$$

Afirmamos que para algún j , $1 \leq j \leq k(1)$, $S_j^1 \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.

De lo contrario para todo j , $1 \leq j \leq k(1)$, $S_j^1 \cap A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ y entonces:

$$A_n = A_1 \cap A_n = \left(\bigcup_{j=1}^{k(1)} S_j^1 \right) \cap A_n = \bigcup_{j=1}^{k(1)} S_j^1 \cap A_n = \emptyset \text{ lo cual es imposible por hipótesis.}$$

Denotemos T_1 un conjunto S_j^1 tal que $S_j^1 \cap A_n \neq \emptyset$ para todo n .

Procediendo por inducción supongamos que hemos encontrado los conjuntos T_1, T_2, \dots, T_m tal que $T_i = S_j^i$ para algún $1 \leq j \leq k(i)$ con la propiedad de que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m T_i \right) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq 1$$

Encontremos ahora $T_{m+1} = S_j^{m+1}$ para algún $1 \leq j \leq k(m+1)$ y tal que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m T_i \right) \cap T_{m+1} \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq 1.$$

Si para todo j , $1 \leq j \leq k(m+1)$

$(\bigcap_{i=1}^m T_i) \cap S_j^{m+1} \cap A_n = \emptyset$ para algún n (procediendo por absurdo).

Entonces: $(\bigcap_{i=1}^m T_i) \cap A_n = (\bigcap_{i=1}^m T_i) \cap A_{m+1} \cap A_n$, $n \geq m+1$

ya que por el carácter decreciente de los A_n se tiene que

para $n \geq m+1$, $A_{m+1} \cap A_n = A_n$. Luego:

$$\begin{aligned} (\bigcap_{i=1}^m T_i) \cap A_n &= (\bigcap_{i=1}^m T_i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k(m+1)} S_j^{m+1} \right) \cap A_n \\ &= \bigcup_{j=1}^{k(m+1)} \left(\bigcap_{i=1}^m T_i \right) \cap S_j^{m+1} \cap A_n \\ &= \emptyset \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande} \end{aligned}$$

lo cual es imposible por hipótesis de inducción.

Luego para algún j , $1 \leq j \leq k(m+1)$

$$\left(\bigcap_{i=1}^m T_i \right) \cap S_j^{m+1} \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n.$$

Se define entonces $T_{m+1} = S_j^{m+1}$.

Para todo $n \geq 1$, $\bigcap_{j=1}^n T_j \neq \emptyset$ pues de lo contrario $\bigcap_{j=1}^n T_j \cap A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ lo cual no es posible.

También como para todo $j \geq 1$, $T_j \subset A_j$ entonces:

$$\bigcap_{j=1}^n T_j \subset \bigcap_{j=1}^n A_j = A_n$$

O sea $\bigcap_{j=1}^n T_j \subset A_n$.

Sea $x_n \in \bigcap_{j=1}^n T_j$, como $\text{diam} \left(\bigcap_{j=1}^m T_j \right) \leq \text{diam } T_m \leq d_m + \epsilon_m$

tenemos que para $j, k \geq m$

$$d(x_j, x_k) \leq d_m + \epsilon_m \text{ pues } \bigcap_{j=1}^k T_j \subset \bigcap_{j=1}^m T_j \subset A_m$$

O sea $(x_n)_{n \geq 1}$ es una suc. de Cauchy, luego existe x tal que $x_n \longrightarrow x$

$$\text{Ahora } x \in A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

En efecto $x_j \in A_m$ para $j \geq m$ pues

$$x_j \in \bigcap_{i=1}^j T_i \subset A_j \subset A_m \text{ si } j \geq m$$

Luego siendo A_m cerrado, tenemos $x \in A_m$

Es decir $x \in A_m$ para todo $m \geq 1$

o sea $x \in A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ y entonces $A_\infty \neq \emptyset$

Para ver la compacidad de A_∞ , se procede así:

Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ cualquier sucesión en A_∞ .

Tenemos que:

$$\text{como } A_i = \bigcup_{j=1}^{k(i)} S_j^i \text{ para todo } i$$

entonces, existe un $j, 1 \leq j \leq k(1)$ e infinitos índices n tales que $x_n \in S_j^1$.

Denotemos por x_{n_1} el primero de dichos puntos de la sucesión que pertenecen a S_j^1 . El mismo razonamiento se aplica para $i \geq 2$ quedando así definida la subsucesión $(x_{n_p})_{p \geq 1}$. Esta sub-sucesión se prueba, sin dificultad que es de Cauchy, completando así la demostración. \square

Proposición 1.3

Para todo $x \in \mathcal{A}$, $\alpha(V_r(x)) \leq \alpha(x) + 2r$
 donde $V_r(x) = \{x \in M / d(x, X) < r\}$.

Demostración.

Para $\xi > 0$, existen x_1, x_2, \dots, x_n con $\text{diam } x_i < \alpha(x) + \xi$
 para $1 \leq i \leq n$ y tal que $x \subset \bigcup_{i=1}^n x_i$

Como $V_r(x) \subset \bigcup_{i=1}^n V_r(x_i)$ y $\text{diam } V_r(x_i) < \text{diam } x_i + 2r < \alpha(x) + \xi + 2r$ para $1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow \alpha(V_r(x)) < \alpha(x) + \xi + 2r$$

$$\Rightarrow \alpha(V_r(x)) \leq \alpha(x) + 2r \quad \square$$

Proposición 1.4

Para todo $x \in \mathcal{A}$, $\alpha(x) = \alpha(\bar{x})$

Demostración.

Como $x \subset \bar{x}$ entonces $\alpha(x) \leq \alpha(\bar{x})$

Ahora $\bar{x} \subset V_r(x)$ para todo $r > 0$

luego $\alpha(\bar{x}) \leq \alpha(V_r(x)) \leq \alpha(x) + 2r$ para todo $r > 0$

entonces $\alpha(\bar{x}) \leq \alpha(x)$

o sea $\alpha(x) = \alpha(\bar{x}) \quad \square$

Proposición 1.5

Para todo $x \in \mathcal{A}$, $\alpha(x) = 0 \iff \bar{x}$ es compacto.

Demostración.

Supongamos que $\alpha(x) = 0$

Por 1.4 tenemos que $\alpha(\bar{X}) = 0$.

Sea entonces la sucesión de conjuntos $(A_n)_{n \geq 1}$ definida por:

$$A_n = \bar{X} \text{ para todo } n.$$

Se verifica entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(A_n) = 0$

Por 1.2 se tiene que $\bar{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es no vacío y compacto.

Recíprocamente si \bar{X} es compacto. Para todo $\xi > 0$

$$X \subset \bar{X} \subset \bigcup_{x \in \bar{X}} B(x, \xi/2)$$

Siendo \bar{X} compacto, existen x_1, x_2, \dots, x_n tales que:

$$X \subset \bar{X} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \xi/2) \text{ y } \text{diam } B(x_i, \xi/2) = \xi, \quad 1 \leq i \leq n$$

entonces $\alpha(X) \leq \alpha(\bar{X}) = 0$ por la arbitrariedad de ξ

luego $\alpha(X) = 0$. \square

Proposición 1.6

$$\text{Para todo } X, Y \in \mathcal{A}, \quad \alpha(X \cup Y) = \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$$

Demostración.

$$X \subset X \cup Y \implies \alpha(X) \leq \alpha(X \cup Y)$$

$$Y \subset X \cup Y \implies \alpha(Y) \leq \alpha(X \cup Y)$$

$$\text{Luego } \alpha(X \cup Y) \geq \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$$

Por otro lado:

Para $\xi > 0$, existen $(x_i)_{i=1, \dots, n}$: $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \xi/2)$ y

$$\text{diam } X_i < \alpha(X) + \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{y también existen } (Y_i)_{i=1, \dots, m}: \quad Y \subset \bigcup_{i=1}^m Y_i \quad \text{y}$$

$$\text{diam } Y_i < \alpha(Y) + \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\text{luego existen } (Z_i)_{i=1, \dots, n+m} \quad \text{tal que} \quad X \cup Y \subset \bigcup_{i=1}^{n+m} Z_i$$

$$\text{donde } Z_i = X_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad Z_i = Y_i \quad \text{para } n+1 \leq i \leq n+m \quad \text{y}$$

$$\text{diam } Z_i < \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \} + \varepsilon$$

$$\text{entonces } \alpha(X \cup Y) \leq \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$$

$$\text{luego } \alpha(X \cup Y) = \max \{ \alpha(X), \alpha(Y) \} \quad \square$$

Proposición 1.7

$$\text{Para todo } X, Y \in \mathcal{A}, \quad \alpha(X \cap Y) \leq \min \{ \alpha(X), \alpha(Y) \}$$

Demostración.

$$X \cap Y \subset X \quad \Rightarrow \quad \alpha(X \cap Y) \leq \alpha(X)$$

$$X \cap Y \subset Y \quad \Rightarrow \quad \alpha(X \cap Y) \leq \alpha(Y)$$

$$\text{Luego } \alpha(X \cap Y) \leq \min \{ \alpha(X), \alpha(Y) \} \quad \square$$

Si nuestro conjunto de referencia es un espacio de Banach $(M, \|\cdot\|)$, entonces α tiene algunas propiedades adicionales relacionadas con la estructura lineal.

Veamos:

Proposición 1.8

$$\text{Para todo } X, Y \in \mathcal{A}, \quad \alpha(X+Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y)$$

Demostración.

Para $\varepsilon/2 > 0$, existen X_1, X_2, \dots, X_n tales que

$X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i$ con $\text{diam } X_i < \alpha(X) + \varepsilon/2$ para $1 \leq i \leq n$, también

existen Y_1, Y_2, \dots, Y_m tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^m Y_i$

con $\text{diam } Y_i < \alpha(Y) + \varepsilon/2$ para $1 \leq i \leq m$.

luego $X + Y \subset \bigcup_{i=1}^n \left[\bigcup_{j=1}^m (X_i + Y_j) \right] = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (X_i + Y_j)$

como se verifica fácilmente.

Ahora para todo i, j $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$;

$\text{diam } (X_i + Y_j) \leq \text{diam } X_i + \text{diam } Y_j$

En efecto si $s = x + y, s' = x' + y' \in X_i + Y_j$ donde

$x, x' \in X_i; y, y' \in Y_j$ tenemos:

$$\|s - s'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq \text{diam } X_i + \text{diam } Y_j$$

es decir $\text{diam } (X_i + Y_j) \leq \text{diam } X_i + \text{diam } Y_j$

Luego $\text{diam } (X_i + Y_j) < \alpha(X) + \varepsilon/2 + \alpha(Y) + \varepsilon/2$

o sea $\text{diam } (X_i + Y_j) < \alpha(X) + \alpha(Y) + \varepsilon$ para todo i, j

entonces $\alpha(X + Y) < \alpha(X) + \alpha(Y) + \varepsilon$

es decir $\alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y)$ \square

Proposición 1.9

Para $X \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha(\lambda X) = |\lambda| \alpha(X)$.

Demostración.

Para $\xi > 0$, existen X_1, \dots, X_n tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n X_i \quad \text{con } \text{diam } X_i < \alpha(X) + \xi, \quad 1 \leq i \leq n$$

luego $\lambda X \subset \bigcup_{i=1}^n \lambda X_i$ y $\text{diam}(\lambda X_i) = |\lambda| \text{diam } X_i$

para todo i . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{diam}(\lambda X_i) &< |\lambda|(\alpha(X) + \xi) = |\lambda|\alpha(X) + \\ &|\lambda|\xi, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

es decir $\alpha(\lambda X) < |\lambda|\alpha(X) + |\lambda|\xi$ para todo $\xi > 0$.

luego $\alpha(\lambda X) \leq |\lambda|\alpha(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

En particular para $\lambda \neq 0$ tenemos que:

$$\alpha(X) = \alpha[\lambda^{-1}(\lambda X)] \leq |\lambda^{-1}|\alpha(\lambda X) = \frac{1}{|\lambda|} \alpha(\lambda X)$$

entonces $|\lambda|\alpha(X) \leq \alpha(\lambda X)$

luego $\alpha(\lambda X) = |\lambda|\alpha(X)$ para $\lambda \neq 0$

Si $\lambda = 0$ la igualdad se verifica trivialmente. \square

Proposición 1.10

Para todo $X \in \mathcal{A}$, $\alpha(\text{Conv } X) = \alpha(X)$

donde $\text{Conv } X$ denota la clausura convexa de X , es decir, el menor convexo cerrado que contiene a X .

Demostración.

Si $C(X)$ denota la cápsula convexa de X o sea el menor convexo que contiene a X . Entonces por la proposición 1.4 será suficiente mostrar que $\alpha(CX) = \alpha(X)$.

Mostremos primeramente que $\text{diam } C(X) = \text{diam } X$ para $X \in \mathcal{A}$. Sean $x, y \in C(X)$ entonces existen $\{\alpha_i\}$, $1 \leq i \leq n$ en \mathbb{R} con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ y $\alpha_i \geq 0$ para todo i , y existe

$$\{x_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset X \text{ tal que } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

análogamente existen $\{\beta_i\}$ $i=1, \dots, m$ en \mathbb{R} con $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$

y $\beta_i \geq 0$ para todo i .

También existen $\{y_i\}$ $i=1, \dots, m$ en Y tal que

$$y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \quad . \quad \text{Luego}$$

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - y) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i - y\| \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\| \sum_{j=1}^m \beta_j (x_i - y_j) \right\| \leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \|x_i - y_j\| \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \|x_i - y_j\| \\ &\leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \text{diam } X = \text{diam } X \end{aligned}$$

luego $\text{diam } C(X) \leq \text{diam } X$

Ahora $X \subset C(X)$ entonces $\text{diam } X \leq \text{diam } C(X)$

luego $\text{diam } X = \text{diam } C(X)$

Por otra parte para $\xi > 0$, existen X_1, \dots, X_n tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^n X_i \quad \text{con } \text{diam } X_i < \text{diam } X + \xi \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

Denotemos por $T_j = C(X_j)$ para $1 \leq j \leq n$ y consideremos el conjunto:

$$B = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j \mid t_j \in T_j, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}$$

Entonces $B = \bigcup_{\lambda \in \Delta} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j T_j \right)$ donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y

$$\Delta = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Afirmamos que $C(X) = B$

En efecto como $X_i \subset C(X)$ para todo i entonces

$$T_i = C(X_i) \subset C(X)$$

Si $y \in B$ se tiene que existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta$
 tal que $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j t_j$ con $t_j \in T_j$

como $t_j \in T_j \subset C(X)$ entonces $y \in C(X)$

Demostremos, ahora, que toda combinación convexa de elementos de X está en B

Sea $y \in C(X)$ luego $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ donde $x_i \in X$ para todo

i , con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Es claro que podemos considerar que

$\lambda_i > 0$ para todo i ya que si $\lambda_j = 0$ para algún j , en

la suma no aporta nada.

Designamos con J_i los siguientes conjuntos definidos inductivamente como sigue:

$$J_1 = \{ j \in \{ 1, 2, \dots, m \} \ / \ x_j \in T_1 \}$$

Supóngase que se ha definido J_i , $1 \leq i \leq n$, entonces:

$$J_{i+1} = \left\{ j \in \{ 1, 2, \dots, m \} \ / \ x_j \notin \bigcup_{k=1}^i J_k, \ x_j \in T_{i+1} \right\}$$

Naturalmente algunos J_i pueden ser vacíos. Reordenemos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i.$$

Si $J_k \neq \emptyset$ pongamos $\delta_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j$; y $\delta_k = 0$

Si $J_k = \emptyset$. Para $J_k \neq \emptyset$ resulta:

$$\sum_{j \in J_k} \lambda_j x_j = \delta_k \sum_{j \in J_k} \frac{\lambda_j}{\delta_k} x_j$$

como $\sum_{j \in J_k} \frac{\lambda_j}{\delta_k} = 1$ y $x_j \in T_k$ para todo $j \in J_k$

Se tiene $\sum_{j \in J_k} \frac{\lambda_j}{\delta_k} x_j \in T_k$. Luego:

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{k=1}^n \delta_k \left(\sum_{j \in J_k} \frac{\lambda_j}{\delta_k} x_j \right) \in \sum_{k=1}^n \delta_k T_k$$

$$\text{siendo } \sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

entonces $y \in B$

Luego $C(X) = B$

También tenemos que Δ es compacto.

En efecto consideremos la aplicación $\Psi: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{I}$

donde $\mathbb{R}_+^n = \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0 \}$, definida por:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Esta aplicación es continua.

Esto asegura que: $\Delta = \Psi^{-1}(\{1\})$ es cerrado.

Además Δ es un conjunto acotado pues:

$$\Delta \subset \prod_{i=1}^n [0, 1]$$

Y para $x, y \in \prod_{i=1}^n [0, 1]$ se tiene:

$$\|x - y\| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| < n \text{ o sea } \text{diam } \Delta \leq n$$

Luego Δ es un compacto de \mathbb{R}^n .

Sea ahora $M = \sup \{ \|t\| / t \in \bigcup_{j=1}^n T_j \}$

Como Δ es compacto, podemos seleccionar N vectores

$$\lambda^j = (\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j), \quad 1 \leq j \leq N \text{ en } \Delta \text{ tal que}$$

todo punto en Δ se puede aproximar en $\frac{\xi}{M}$ a algún

Para $j, 1 \leq j \leq N$ sea $B_j = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i / t_i \in T_i \right\}$

Afirmamos que $B \subset \bigcup_{j=1}^N \bigcap_n V_{\xi} (B_j)$

En efecto si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i$ es un punto de B .

Sea λ^j tal que $\|(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - \lambda^j\| < \frac{\xi}{M}$

o sea $\sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_i^j| < \frac{\xi}{M}$ usando la norma

$$\|\lambda\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \quad \text{de } \mathbb{R}^n.$$

Sea $x' \in B_j$ formado con los escalares λ_i^j y los mismos elementos t_i que intervienen en x .

O sea $x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j t_i \in B_j$. Entonces:

$$\|x - x'\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^j) t_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_i^j| \|t_i\| <$$

$\frac{\xi}{M} \cdot M$ es decir $\|x - x'\| < \frac{\xi}{M} \cdot M = \xi$ entonces $x \in V_\xi(B_j)$

$$\text{Luego } \alpha(B) \leq \alpha\left(\bigcup_{j=1}^N V_\xi(B_j)\right) = \max_{1 \leq j \leq N} \{\alpha(B_j) + 2\xi\}$$

Siendo $B_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j T_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(B_j) &\leq \sum_{i=1}^n \alpha(\lambda_i^j T_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j \cdot \alpha(T_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^j \text{diam}(T_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j \text{diam}(X_i) \end{aligned}$$

ya que $T_i = C(X_i)$

$$\text{luego } \alpha(B_j) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^j (\alpha(X) + \xi) = \alpha(X) + \xi \text{ para}$$

todo j . Entonces

$$\alpha(B) \leq \max_{1 \leq j \leq N} \{ \alpha(B_j) + 2\varepsilon \} \leq \max_{1 \leq j \leq N} \{ \alpha(X) + 3\varepsilon \}$$

entonces $\alpha(B) \leq \alpha(X) + 3\varepsilon$

O sea $\alpha(B) \leq \alpha(X)$

En el otro sentido es trivial pues $B \supset X$. \square

Proposición 1.11

$$\text{Para todo } X \in \mathcal{A}, \quad \alpha\left(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right) = h \alpha(X)$$

Demostración.

Como $hX \subset \bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X$ entonces $\alpha(hX) \leq \alpha\left(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right)$

luego $h \alpha(X) \leq \alpha\left(\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right)$

Por otro lado para todo λ , $0 \leq \lambda \leq h$, sea $x \in \lambda X$

entonces existe $a \in X$ tal que $x = \lambda a$. Consideremos $\frac{\lambda}{h}$;

$$0 \leq \frac{\lambda}{h} \leq 1$$

Como $C(X \cup \{0\})$ es convexo y contiene el 0

entonces $\frac{\lambda}{h}a = \frac{\lambda}{h}a + (1 - \frac{\lambda}{h}) \cdot 0 \in C(X \cup \{0\})$

luego $\lambda a \in h C(X \cup \{0\})$

Es decir para todo λ , $0 \leq \lambda \leq h$, $\lambda X \subset h C(X \cup \{0\})$

luego $\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X \subset h C(X \cup \{0\})$

entonces $\alpha\left\{\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right\} < \alpha\{hC(X \cup \{0\})\}$

$$\text{y } \alpha\left\{\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right\} \leq h\alpha\{C(X \cup \{0\})\} = h\alpha(X)$$

luego $\alpha\left\{\bigcup_{0 \leq \lambda \leq h} \lambda X\right\} = h\alpha(X) \quad \square$

Proposición 1.12

Para todo $m \in M$ y cada $X \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\alpha(X + m) = \alpha(X)$$

Demostración.

En efecto para $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ cubrimiento de X con $\text{diam } X_i < \alpha(X) + \xi$, $1 \leq i \leq n$ y cualquier $\xi > 0$.

Tenemos que $\{X_1 + m, \dots, X_n + m\}$ es un cubrimiento finito de $X + m$ con $\text{diam } (X_i + m) = \text{diam } X_i < \alpha(X) + \xi$ para todo i . Luego:

$$\alpha(X + m) \leq \alpha(X)$$

Siendo esto válido para cualquier $m \in M$ y cualquier conjunto X acotado, tenemos:

$$\alpha(X) = \alpha(X + m + (-m)) \leq \alpha(X + m)$$

Luego $\alpha(X + m) = \alpha(X). \quad \square$

Proposición 1.13

Si $X, Y \in \mathcal{A}$ y X es relativamente compacto.

Entonces: $\alpha(Y) = \alpha(X + Y)$.

Demostración.

Para todo $x \in X$ tenemos $x + Y \subset X + Y$

Luego $\alpha(Y) = \alpha(x + Y) \leq \alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y) = \alpha(Y)$

entonces $\alpha(Y) = \alpha(X + Y)$. \square

Todas las propiedades arriba mencionadas no nos ayudan mucho para evaluar $\alpha(X)$ para un conjunto dado. Generalmente hallar el valor real de $\alpha(X)$ es difícil.

Como ilustración presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: En un espacio Banach de dimensión infinita

si $B = \{x / \|x\| \leq 1\}$ y $S = \{x / \|x\| = 1\}$

Entonces $\alpha(B) = \alpha(S) = 2$.

En efecto como $\text{conv } S = B$ entonces por la propiedad 1.10 tenemos que $\alpha(B) = \alpha(S)$.

Además como $\text{diam } S = 2$ tenemos que $\alpha(S) \leq 2$

Si suponemos que $\alpha(S) < 2$, entonces tenemos que para $\epsilon > 0$ podemos escribir $S = \bigcup_{j=1}^n T_j$ donde

$\text{diam } T_j < \alpha(S) + \epsilon$ para $1 \leq j \leq n$.

Es decir $\text{diam } T_j < 2$, $1 \leq j \leq n$

Podemos asumir que $T_j, 1 \leq j \leq n$ es cerrado.

Consideremos ahora un sub-espacio F de dimensión n .

Entonces:

$$S \cap F = \bigcup_{j=1}^n (T_j \cap F)$$

Por el teorema de Lusternik - Schnirelman - Borsut si la esfera unitaria (con respecto a cualquier norma) en un espacio vectorial n dimensional es cubierto por n conjuntos cerrados entonces al menos uno de éstos conjuntos contiene un par de puntos antipodales de la esfera unitaria.

Para nuestro caso significa entonces que existe un T_j $1 \leq j \leq n$ tal que $T_j \cap F$ contiene un par de puntos antipodales. Luego tenemos:

$$2 \leq \text{diam } T_j \cap F \leq \text{diam } T_j$$

lo cual es contradictorio pues $\text{diam } T_j < 2$, $1 \leq j \leq n$. \square

Otra medida de no - compacidad, es la llamada medida-bola, que se define por la fórmula:

$$\chi(X) = \inf \{ \xi > 0 / X \text{ puede cubrirse con un número finito de bolas de radio } \leq \xi \} .$$

Nótese que no hemos asumido que los centros de éstas bolas que cubren a X pertenecen a X. De allí que podamos también definir la medida bola por

$$\chi(X) = \inf \{ \xi > 0 / X \text{ tiene una } \xi \text{- red finita} \}$$

Esta medida de no-compacidad tiene todas las propiedades mencionadas para la medida α .

CAPITULO No. 2

ALGUNOS OPERADORES ESPECIALES

A continuación definimos algunos operadores especiales y estudiamos ciertas propiedades de ellos que utilizaremos en el resto de éste trabajo.

Definición 2.1.

Sean (X,d) , (Y,d) dos espacios métricos. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación compacta, si para todo $A \subset X$ se tiene que $\overline{f(A)}$ es compacto.

Definición 2.2

Sean (X,d) , (Y,d') dos espacios métricos. Denotando con el mismo símbolo α , la medida de no-compacidad en ambos espacios, diremos que:

Una función $f : X \longrightarrow Y$ es $\alpha - k -$ Lipschitz si

- (i) f es continua y
- (ii) existe $k \geq 0$ tal que $\alpha[f(A)] \leq k \alpha(A)$ para todo subconjunto acotado A de X .

Claramente una función $\alpha - k -$ Lipschitz es acotada.

En las siguientes proposiciones veremos las propiedades más importantes de éstos operadores. Para tal efecto, en lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, X , Y y Z son espacios métricos con métricas d_x , d_y y \bar{d}_z respectivamente. E un espacio vectorial normado.

Entonces:

Proposición 2.3

Si $f: X \longrightarrow Y$ es $\alpha - k_1$ - Lipschitz y
 $g: Y \longrightarrow Z$ es $\alpha - k_2$ - Lipschitz

Entonces $g \circ f: X \longrightarrow Z$ es $\alpha - k_1 k_2$ - Lipschitz

Demostración

En efecto $g \circ f$ es continua por serlo f y g .

Para todo conjunto acotado A tenemos:

$$\alpha[(g \circ f)(A)] = \alpha[g(f(A))] \leq k_2 \alpha[f(A)] \leq k_2 k_1 \alpha(A)$$

luego $\alpha[(g \circ f)(A)] \leq k_2 k_1 \alpha(A)$. □

Proposición 2.4

Si $f: X \longrightarrow E$ es $\alpha - k_1$ - Lipschitz y
 $g: X \longrightarrow E$ es $\alpha - k_2$ - Lipschitz

Entonces: $f + g: X \longrightarrow E$ es $\alpha - (k_1 + k_2)$ - Lipschitz

Demostración

Para $A \subset X$ acotado, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha[(f + g)(A)] &\leq \alpha[f(A) + g(A)] \leq \alpha[f(A)] + \alpha[g(A)] \\ &\leq k_1 \alpha(A) + k_2 \alpha(A) \\ &= (k_1 + k_2) \alpha(A) . \end{aligned}$$
□

Proposición 2.5

Sea $f: X \longrightarrow Y$ un operador k - contractivo es decir:

Para todo $x, y \in X$ $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$.

Entonces f es $\alpha - k$ - Lipschitz

Demostración

En efecto, f es continua más aún es uniformemente continua.

Sea $A \subset X$, acotado.

Dado $\xi > 0$, existe $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$

tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $\text{diam } A_i < \alpha(A) + \xi$, $1 \leq i \leq n$.

Entonces $f(A) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i)$

Además para todo $x, y \in A_i$ $1 \leq i \leq n$ tenemos:

$$d_y(f(x), f(y)) \leq k d_x(x, y)$$

luego $\sup_{x, y \in A_i} d_y(f(x), f(y)) \leq k \sup_{x, y \in A_i} d_x(x, y)$

Por tanto $\text{diam } f(A_i) \leq k \text{diam } A_i < k(\alpha(A) + \xi)$

Así $\text{diam } f(A_i) < k \alpha(A) + k \xi$, $1 \leq i \leq n$

es decir $\alpha(f(A)) \leq k \cdot \alpha(A)$. \square

Proposición 2.6

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación compacta entonces f es $\alpha - 0$ - Lipschiciana

Demostración

En efecto para $A \subset X$ acotado, tenemos:

$$\alpha[f(A)] = \alpha[\overline{f(A)}] = 0 \leq 0 \cdot \alpha(A).$$

Por ser $\overline{f(A)}$ compacto. \square

Proposición 2.7

Supongamos que $f : X \longrightarrow E$ es k -contractivo y que $g : X \longrightarrow E$ es un operador compacto.

Entonces $f + g : X \longrightarrow E$ es α - k -Lipschiciana.

Demostración.

En efecto, como f es k -contractiva entonces f es α - k -Lipschitz.

Y luego para $A \subset X$ acotado tenemos:

$$\alpha[(f + g)(A)] \leq \alpha[f(A) + g(A)] \leq \alpha[f(A)] + \alpha[g(A)]$$

pero siendo $g(A)$ relativamente compacto

$$\text{resulta } \alpha[g(A)] = \alpha[\overline{g(A)}] = 0.$$

$$\text{Entonces } \alpha[(f + g)(A)] \leq \alpha[f(A)] \leq k \cdot \alpha(A)$$

Además siendo f continua y g continua también $f + g$ es continua. \square

Finalmente diremos que la función $f : X \longrightarrow Y$ es estrictamente α -Lipschiciana si es α - k -Lipschitz con $k < 1$.

Definición 2.8

Sean X, Y dos espacios métricos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es condensada si:

i) f es continua y

ii) Para todo $A \subset X$ acotado con $\alpha(A) > 0$ se tiene:

$$\alpha[f(A)] < \alpha(A)$$

En primer lugar se observa que toda función estrictamente α -Lipschiciana es condensada.

Ejemplo

Si D es un sub-conjunto de un espacio X de Banach y $T : D \longrightarrow X$ un operador condensado, entonces KT es condensado para $K \in [-1, 1]$.

En efecto si $A \subset D$ es tal que $\alpha(A) > 0$ entonces $\alpha[KT(A)] = |K| \alpha[T(A)] \leq \alpha[T(A)] < \alpha(A)$. \square

Proposición 2.9

Sea $D \subset E$. Y consideremos los operadores $T_1 : D \longrightarrow E$ y $T_2 : D \longrightarrow E$ condensados. Entonces para todo $\lambda \in [0, 1]$ el operador T definido por:

$$T = \lambda \cdot T_1 + (1 - \lambda) \cdot T_2$$

es condensado.

Demostración.

En efecto para $A \subset D$ acotado tal que $\alpha(A) > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha[T(A)] &= \alpha[(\lambda T_1 + (1 - \lambda) T_2)(A)] \\ &\leq \lambda \alpha[T_1(A)] + (1 - \lambda) \cdot \alpha[T_2(A)] \\ &< \lambda \alpha(A) + (1 - \lambda) \cdot \alpha(A) = \alpha(A) \end{aligned}$$

Luego T es condensado.

La proposición anterior nos indica que el conjunto $\mathcal{C} = \{ f : D \longrightarrow E / f \text{ es condensado} \}$ es un conjunto convexo.

A continuación presentamos la siguiente proposición:

Proposición 2.10

Sea X un espacio Banach y $D \subset X$.

Y sea $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ un conjunto de funciones, donde $f_i : D \longrightarrow D$ son $\alpha - k_i -$ Lipschicianas con $k_i \leq 1$ para todo i . i) Si $g : D \longrightarrow X$ es condensado entonces la función:

$$h = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n \circ g$$

es condensada.

ii) Si además $g : D \longrightarrow X$, condensada, es tal que para todo $C \subset D$, C relativamente compacto, $g(C)$ es relativamente compacto, entonces la función:

$$k = g \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$$

es condensada.

Demostración,

i) Sea $A \subset D$, A acotado tal que $\alpha(A) > 0$, entonces:

$$\alpha[h(A)] = \alpha[f_1(f_2(\dots f_n(g(A))\dots))] \leq \prod_{i=1}^n k_i \alpha[g(A)]$$

como $k_i \leq 1$ entonces $\prod_{i=1}^n k_i \leq 1$ Luego:

$$\alpha[h(A)] \leq \alpha[g(A)] < \alpha(A)$$

o sea h es condensada.

ii) Sea $A \subset D$, A acotado tal que $\alpha(A) > 0$.

Si $\alpha[f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(A)] > 0$ entonces:

$$\alpha[k(A)] < \alpha[f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(A)] \leq \prod k_i \cdot \alpha(A) \leq \alpha(A)$$

$$\Rightarrow \alpha[k(A)] < \alpha(A).$$

Por otro lado si $\alpha[f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(A)] = 0$

entonces $\alpha[k(A)] = 0$ pues g lleva relativamente compactos en relativamente compacto.

Luego $\alpha[k(A)] < \alpha(A)$

y k es condensada en cualquier caso. \square

También se da la siguiente proposición:

Proposición 2.11

Bajo el mismo contexto de la proposición anterior, si $f : D \longrightarrow D$ es condensada y $g : D \longrightarrow X$ es una función condensada que lleva conjuntos relativamente compactos en relativamente compactos.

Entonces la función: $g \circ f$ es condensada.

Demostración.

Sea $A \subset D$ acotado tal que $\alpha(A) > 0$.

Si $\alpha(f(A)) > 0$ entonces $\alpha[g \circ f(A)] < \alpha[f(A)] < \alpha(A)$
 pues g es condensada.

Si $\alpha[f(A)] = 0$ se tiene $\alpha[g \circ f(A)] = 0 < \alpha(A)$
 pues g lleva relativamente compactos en relativamente compactos.

Luego $g \circ f$ es condensada.

Tenemos también otros operadores importantes cuyas definiciones damos a continuación:

Definición 2.12

Si X es un espacio real de Banach y $D \subset X$. Un operador $T : D \longrightarrow X$ no necesariamente lineal se llama demicomacto si toda sucesión acotada $(x_n)_{n \geq 1}$ en D tal que $(Tx_n - x_n)_{n \geq 1}$ es convergente posee sub-sucesión convergente.

La siguiente definición identifica un nuevo tipo de operadores.

Definición 2.13

Sea X es un espacio real de Banach. Un operador $T : X \longrightarrow X$ no necesariamente lineal se llama

λ_n - demicomacto si para toda sucesión $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de números reales tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in [-1, 1]$ y para toda sucesión acotada $(x_n)_{n \geq 1}$ en X , con la propiedad de que $x_n + \lambda_n Tx_n \longrightarrow y \in X$, entonces $(x_n)_{n \geq 1}$ admite

sub-sucesión convergente.

A continuación presentamos la siguiente proposición:

Proposición 2.14

Sea X un espacio Banach y sea $D \subset X$, $f : D \rightarrow X$
un operador $\alpha - 1$ - Lipschitz y $|\lambda| < \frac{1}{1 + |K|}$

entonces λS es demicompacto donde $S = I - Kf$

Demostración.

Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión acotada en D tal que

$$y_n = x_n - \lambda S(x_n) \longrightarrow y$$

entonces $x_n = y_n + \lambda S(x_n)$ luego $x_n = y_n + \lambda(I - Kf)(x_n)$

Por comodidad denotemos $\{x_n/n \geq 1\} = \{x_n\}$.

luego $\{x_n\} \subset \{y_n\} + \{\lambda(I - Kf)(x_n)\}$

y también $\{x_n\} \subset \{y_n\} + \lambda\{x_n\} + \{-\lambda \cdot K f(x_n)\}$

entonces $\alpha[\{x_n\}] \leq \alpha[\{y_n\}] + |\lambda|\alpha[\{x_n\}] + |\lambda K| \alpha[\{f(x_n)\}]$

luego $\alpha[\{x_n\}] \leq |\lambda|\alpha[\{x_n\}] + |\lambda K| \cdot \alpha[\{f(x_n)\}]$, pues
 $\alpha[\{y_n\}] = 0$

y se tiene que: $(1 - |\lambda|) \cdot \alpha[\{x_n\}] \leq |\lambda K| \cdot \alpha[\{f(x_n)\}]$
 $\leq |\lambda K| \cdot \alpha[\{x_n\}]$

por ser f $\alpha - 1$ - Lipschitz

entonces $(1 - |\lambda| - |\lambda||K|) \cdot \alpha[\{x_n\}] \leq 0$

Pero por hipótesis tenemos que: $|\lambda| < \frac{1}{1 + |K|}$ y por tanto

$$1 - |\lambda| - |\lambda||K| > 0$$

luego $\alpha\{\{x_n\}\} = 0$ es decir $(x_n)_{n \geq 1}$ posee sub-sucesión convergente, (proposición 1.5) luego λS es demicompacto. \square

CAPITULO No. 3

CLASIFICACIÓN DE LOS OPERADORES

En el capítulo anterior se han introducido ciertos tipos de operadores definidos sobre cierta clase de conjuntos. En éste capítulo se clasifican dichos operadores definiéndolos sobre conjuntos iguales, por supuesto.

Para tal propósito supóngase que X es un espacio Banach, $D \subset X$ y considérense los siguientes conjuntos:

$$C^0 = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es compacta sobre acotados}\}$$

$$C_k = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es } \alpha\text{-}k\text{- Lipschitz}\} \quad k \geq 0$$

$$\tilde{C}_k = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es } k\text{- contractiva}\} \quad k \geq 0$$

$$C^c = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es condensada}\}$$

$$C^d = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es demicompacta, continua}\}$$

$$\tilde{C}^d = \{f : D \longrightarrow X / f \text{ es } \lambda_n\text{- demicompacta, continua}\}$$

Supongamos que $f \in C^0$. Entonces para todo $A \subset D$ acotado tenemos:

$$f(A) \subset f(D)$$

$$\text{luego } \alpha[f(A)] \leq \alpha[f(D)] = 0 \text{ por ser } f \text{ compacta}$$

$$\text{entonces } \alpha[f(A)] = 0 \text{ para todo } A \subset D \text{ acotado.}$$

$$\text{O sea que: } \alpha[f(A)] \leq k \alpha(A) \text{ para todo } k \geq 0$$

$$\text{luego } f \in C_k \text{ para todo } k \geq 0$$

$$\text{Es decir } C^0 \subset C_k \text{ para } k \geq 0.$$

También tenemos que si $f \in C_{k_1}$ entonces

$\alpha[f(A)] \leq k_1 \cdot \alpha(A)$ para todo $A \subset D$ acotado. Luego:

$$\alpha[f(A)] \leq k_1 \cdot \alpha(A) \leq k_2 \alpha(A) \quad \text{para } k_1 \leq k_2$$

Luego:

$$C_{k_1} \subset C_{k_2} \quad \text{si } k_1 \leq k_2$$

Por otra parte si $f \in C_k$ con $k < 1$, tenemos que para todo $A \subset D$ acotado tal que $\alpha(A) > 0$, entonces:

$$\alpha[f(A)] \leq k \cdot \alpha(A) < \alpha(A)$$

Luego $C_k \subset C^c$ para $0 \leq k < 1$.

Por otro lado supóngase que $f \in C^c$, entonces para $A \subset D$ acotado y $\alpha(A) > 0$ tenemos que:

$$\alpha[f(A)] < \alpha(A) \leq \alpha(A)$$

Y como $\alpha(A) = 0$ es falso (no se define) para f condensado. Entonces:

$$\alpha[f(A)] \leq \alpha(A) \leq k \cdot \alpha(A) \quad \text{para } k \geq 1$$

Es decir $C^c \subset C_k$ con $k \geq 1$

Además siendo que $\text{id} : D \longrightarrow D$ es α - k -Lipschitz con $k \geq 1$ y $\text{id} \notin C^c$ se concluye que la inclusión es estricta.

Las siguientes proposiciones nos muestran, como están

incluidos los conjuntos de los operadores demicomactos y λ_n -demicompactos con respecto a los operadores condensados.

Proposición 3.1

Sea X un espacio de Banach y $D \subset X$. Un operador $T : D \longrightarrow X$ condensado es λ_n -demicompacto.

Demostración.

Sea $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ con $-1 \leq \lambda \leq 1$.

Entonces para toda sucesión acotada $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de D , con la propiedad de que:

$$y_n = x_n + \lambda_n \cdot Tx_n \longrightarrow y \in X$$

se cumple que: existe $N > 0$ tal que:

para $n, m \geq N$, $|\lambda_n - \lambda_m| < \frac{\epsilon}{M}$ con $|\lambda_n| < 1 + \frac{\epsilon}{M}$

y también $\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2}$; $\|y - y_m\| < \frac{\epsilon}{2}$

donde $M = \sup \{ \|Tx_n\| / n \geq 1 \}$ si $0 < M < \infty$

Es necesario observar que $\|y_n - y\| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|y - y_m\| < \frac{\epsilon}{2}$

implican que $\|y_n - y_m\| < \epsilon$.

Nótese también que:

$$\alpha[\{x_i / i \geq 1\}] = \alpha[\{x_i / 1 \leq i < N\} \cup \{x_i / i \geq N\}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \max \{ \alpha[\{x_i / 1 \leq i < N\}] , \alpha[\{x_i / i \geq N\}] \} \\
 &= \alpha[\{x_i / i \geq N\}]
 \end{aligned}$$

Supongamos que $d = \alpha[\{x_i / i \geq N\}] > 0$ entonces

$d' = \alpha[T \{x_i / i \geq N\}] < \alpha[\{x_i / i \geq N\}] = d$ por ser T condensada.

Consideremos S_1, S_2, \dots, S_k un cubrimiento de $T \{x_i / i \geq N\}$ con $\text{diam } S_i \leq d' + \xi$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Para $x_n, x_m \in T^{-1}(S_i) \cap \{x_n / n \geq 1\}$, $i = 1, \dots, k$

tenemos:

$$\begin{aligned}
 \|x_n - x_m\| &= \|y_n - \lambda_n T x_n - y_m + \lambda_m T x_m\| = \|y_n - y_m - \lambda_n T x_n + \lambda_m T x_n \\
 &- \lambda_m T x_n + \lambda_m T x_m\| = \|(y_n - y_m) + (\lambda_m - \lambda_n) T x_n + \lambda_m (T x_m - T x_n)\| \\
 &\leq \|y_n - y_m\| + |\lambda_m - \lambda_n| \cdot \|T x_n\| + |\lambda_m| \cdot \|T x_m - T x_n\| \\
 &< \xi + \frac{\xi}{M} \cdot M + (1 + \xi) \|T x_m - T x_n\|
 \end{aligned}$$

luego $\|x_n - x_m\| < 2\xi + (1 + \xi) \|T x_m - T x_n\|$

Como $\text{diam } S_i \leq d' + \xi$ entonces $\|T x_m - T x_n\| \leq d' + \xi$

pués $T x_m, T x_n \in S_i$.

De donde: $\|x_n - x_m\| < 2\xi + (1 + \xi)(d' + \xi)$

por la arbitrariedad de ξ tenemos entonces que:

$$\|x_n - x_m\| \leq d'$$

luego $\alpha(\{x_i / i \geq N\}) \leq \text{diam} \{x_i / i \geq N\} \leq d'$

o sea: $d \leq d'$ lo cual no es posible

Luego $\alpha(\{x_i / i \geq N\}) = 0$

es decir T es λ_n demicomacto

Si $M = 0$ entonces para todo $n \geq 1$, se tiene:

$$\|Tx_n\| = 0 \iff \text{Para todo } n \geq 1, Tx_n = 0$$

Luego siendo $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que

$$y_n = x_n + \lambda_n \cdot Tx_n \longrightarrow y$$

tenemos que $y_n = x_n + 0 \longrightarrow y$.

Luego $(x_n)_{n \geq 1}$ posee sub-sucesión convergente, en este caso la misma $(x_n)_{n \geq 1}$ □

Es decir hemos mostrado que se verifica:

$$c^c \subset \tilde{c}^d$$

Ahora ésta inclusión es estricta pues si X es un espacio de dimensión finita. Y consideramos el operador idéntico $\text{id} : X \longrightarrow X$, éste operador es λ_n - demicomacto, pero no es condensado.

También tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.2

Bajo el mismo contexto de la proposición anterior. Un operador T λ_n - demicomacto es demicomacto.

Demostración.

La demostración es trivial para $\lambda_n = -1$. \square

La siguiente proposición nos mostrará que $\tilde{C}^d \subsetneq C^d$.

Pero antes necesitamos ver el siguiente lema.

Lema 3.3

Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ cualquier sucesión acotada en X . Entonces para cualquier sucesión $(p_n)_{n \geq 1}$ en \mathbb{R} tal que $p_n \longrightarrow p$ se tiene:

$$\alpha[\{p_n x_n\}] \leq |p| \cdot \alpha[\{x_n\}]$$

donde $\{p_n x_n\} = \{p_n x_n / n \geq 1\}$ y $\{x_n\} = \{x_n / n \geq 1\}$

Demostración.

Si $p = 0$ entonces $p_n x_n \longrightarrow 0$ y entonces se cumple que:

$$\alpha[\{p_n x_n\}] = 0 = |0| [\alpha\{x_n\}]$$

Supóngase ahora que: $p > 0$, entonces para $\xi > 0$ existe n_ξ tal que si $n \geq n_\xi$ se tiene $|p_n - p| < \xi$. Es decir:

$$p - \xi < p_n < p + \xi$$

Luego para $n \geq n_\xi$ existe $\lambda_n \in]0, 1[$ tal que:

$$p_n = \lambda_n (p - \xi) + (1 - \lambda_n) (p + \xi)$$

por la convexidad de los intervalos.

Entonces $p_n x_n = \lambda_n (p - \xi) x_n + (1 - \lambda_n) (p + \xi) x_n$

luego para $n > n_\xi$ se tiene que:

$$p_n x_n \in C((p - \xi) \cdot \{x_n\} \cup (p + \xi) \cdot \{x_n\})$$

donde $C((p - \xi) \cdot \{x_n\} \cup (p + \xi) \cdot \{x_n\})$ denota la cápsula convexa de $(p - \xi) \cdot \{x_n\} \cup (p + \xi) \cdot \{x_n\}$. Luego:

$$\{p_n x_n / n \geq n_\xi\} \subset C((p - \xi) \cdot \{x_n\} \cup (p + \xi) \cdot \{x_n\})$$

$$\begin{aligned} \text{luego: } \alpha\{p_n x_n / n \geq n_\xi\} &\leq \max\{ |p - \xi| \alpha\{x_n\}, |p + \xi| \alpha\{x_n\} \} \\ &= |p + \xi| \alpha\{x_n\} \quad \text{pues } p > 0 \\ &\quad (p + \xi) \cdot \alpha\{x_n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por otra parte como } \alpha\{p_n x_n\} &= \alpha\{p_n x_n / n < n_\xi\} \cup \alpha\{p_n x_n / n \geq n_\xi\} \\ &= \alpha\{p_n x_n / n \geq n_\xi\} \end{aligned}$$

$$\text{entonces: } \alpha\{p_n x_n\} \leq (p + \xi) \alpha\{x_n\}$$

$$\text{luego } \alpha\{p_n x_n\} \leq p \alpha\{x_n\} = |p| \cdot \alpha\{x_n\} \quad \text{por la arbitrariedad de } \xi$$

$$\text{Si } p < 0, \text{ entonces } \alpha\{p_n x_n / n \geq n_\xi\} \leq |p - \xi| \alpha\{x_n\}$$

$$\text{o sea que: } \alpha\{p_n x_n\} \leq (\xi - p) \cdot \alpha\{x_n\}$$

$$\text{luego } \alpha\{p_n x_n\} \leq (\xi + |p|) \alpha\{x_n\}$$

y entonces $\alpha\{p_n x_n\} \leq |p| \alpha\{x_n\}$ lo que concluye la demostración. \square

Proposición 3.4

Sea X un espacio Banach, $D \subset X$ y $T : D \longrightarrow X$ un operador $\alpha - \frac{1}{|k|+1}$ - Lipschitz. Supóngase además que

λ es un número tal que: $\frac{1}{2} < |\lambda| < \frac{1}{|k|+1}$.

Entonces λS es demicomacto y no es λ_n - demicomacto, donde $S = I - kT$.

Demostración.

Siendo T un operador $\alpha - \frac{1}{|k|+1}$ - Lipschitz entonces es $\alpha - 1$ - Lipschitz, luego por la proposición 2.14 se tiene que λS es demicomacto.

Demostremos ahora que λS no es λ_n - demicomacto.

En efecto, sea $(p_n)_{n \geq 1}$ una sucesión real tal que:

$p_n \longrightarrow p \in [-1, 1]$ Entonces para una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ acotada en D tal que la sucesión $(y_n)_{n \geq 1}$ definida por $y_n = x_n + p_n (\lambda S)x_n$ para todo $n \geq 1$ sea convergente a algún $y \in X$, se tiene:

$$y_n = x_n + p_n \lambda (I - k T) x_n$$

luego
$$x_n = y_n - p_n \lambda x_n + p_n \lambda k T x_n$$

Consideremos ahora una sub²-sucesión $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ arbitraria.

Entonces:
$$x_{n_k} = y_{n_k} - p_{n_k} \lambda x_{n_k} + p_{n_k} \lambda k T x_{n_k}$$

entonces
$$\{x_{n_k}\} \subset \{y_{n_k}\} + (-\lambda) \{p_{n_k} x_{n_k}\} + \lambda k \{p_{n_k} T x_{n_k}\}$$

$$\alpha \{x_{n_k}\} \leq 0 + |\lambda| \alpha \{p_{n_k} x_{n_k}\} + |\lambda| |k| \alpha \{p_{n_k} T x_{n_k}\}$$

luego por el lema anterior se tiene que:

luego $\alpha\{x_{n_k}\} \leq |\lambda|\alpha\{x_{n_k}\} + |\lambda||k|\alpha\{Tx_{n_k}\}$ pues $|p| \leq 1$

Siendo T $\alpha - \frac{1}{|k|+1}$ - Lipschitz se tiene entonces que:

$$\alpha\{x_{n_k}\} < 2|\lambda|\alpha\{x_{n_k}\}$$

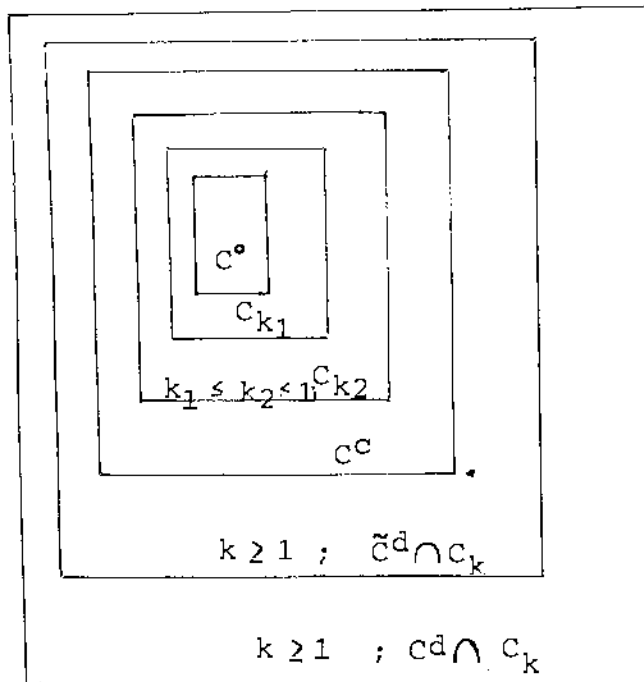
luego $(1 - 2|\lambda|) \cdot \alpha\{x_{n_k}\} < 0$

Pero $\frac{1}{2} < |\lambda| \iff 1 - 2|\lambda| < 0$ por hipótesis

entonces $\alpha\{x_{n_k}\} > 0$ lo cual quiere decir que

$(x_n)_{n \geq 1}$ no admite sub - sucesión convergente. \square

Lo anteriormente expuesto nos permite presentar la siguiente figura que nos muestran como están incluidos éstos conjuntos de operadores.



CAPITULO No. 4
OPERADORES CON PUNTO FIJOS

4.1 OPERADORES SOBRE UN ESPACIO DE BANACH

En ésta sección X siempre denotará un espacio de Banach sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos.

Un operador T sobre X se dice que tiene un punto fijo x en el dominio de T sí y sólo si $Tx = x$.

Teorema 4.1.1 (Principio de Operador Contractivo)

Supongamos que D es un sub-conjunto de X , cerrado. Un operador $T : D \rightarrow D$ contractivo posee punto fijo único en D . Es decir existe un único punto $z \in D$ tal que $Tz = z$. Más aún, si $x_0 \in D$ y $x_n = Tx_{n-1}$ para $n = 1, 2, \dots$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$$

Demostración.

En efecto para $x_0 \in D$ arbitrario y definiendo $x_n = Tx_{n-1}$ para $n = 1, 2, \dots$ tenemos que:

$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leq K \|x_n - x_{n-1}\|$ para todo $n \geq 1$, donde K es tal que $0 \leq K < 1$, por ser T contractivo.

Siguiendo un razonamiento inductivo elemental nos lleva a:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq K^n \|x_1 - x_0\|.$$

Por otra parte para $n, k \geq 1$ tenemos:

$$\|x_{n+k} - x_n\| = \|x_{n+k} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_{n+k} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Procediendo en forma análoga con $\|x_{n+k} - x_{n+1}\|$, se obtiene por inducción que:

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} K^{n+i} \|x_1 - x_0\|$$

es decir $\|x_{n+k} - x_n\| \leq K^n \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{k-1} K^i$

pero $\sum_{i=0}^{k-1} K^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} K^i = \frac{1}{1-K}$

Luego: $\|x_{n+k} - x_n\| \leq K^n \|x_1 - x_0\| \cdot \frac{1}{1-K}$

Esto nos dice que la sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ en D es de Cauchy y luego existe $z \in D$ tal que $z = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$

pues D es un cerrado de X .

Observemos que:

$$Tz = T \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$$

Siendo T continua tenemos que:

$$Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}) = z$$

luego z es un punto fijo de T .

Supongamos ahora que $w \in D$ es tal que $Tw = w$.

Entonces:

$$\|z - w\| = \|Tz - Tw\| \leq K \|z - w\|$$

luego $\|z - w\| = 0$ es decir $z = w$ pues $0 \leq K < 1$

Por tanto z es único. \square

El siguiente teorema es una extensión del teorema anterior.

Teorema 4.1.2 (Extensión del Principio de Operador Contractivo).

Si $D \subset X$, D cerrado y $T : D \rightarrow D$ un operador continuo. Supóngase además que existe una función $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua a derecha tal que $\varphi(r) < r$ si $r > 0$ y $\|Tx - Ty\| \leq \varphi(\|x - y\|)$ para todo $x, y \in D$.

Entonces existe un único punto $z \in D$ tal que $Tz = z$.

Más aún, si $x_0 \in D$ y $x_n = Tx_{n-1}$ para $n = 1, 2, \dots$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z.$$

Demostración.

Supongamos que $Tz = z$ y $Tw = w$ entonces:

$\|z - w\| = \|Tz - Tw\| \leq \varphi(\|z - w\|)$ y no sería posible tener $\|z - w\| > 0$ ya que entonces $\|z - w\| < \|z - w\|$ lo cual no es posible.

Luego $\|z - w\| = 0$ y $z = w$, es decir si existe punto fijo para T éste es único.

Obsérvese que si $x_0 \in D$ es un punto arbitrario de D y definimos $x_n = Tx_{n-1}$ para $n \geq 1$, entonces si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$

existe, se tiene $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n-1}$

entonces $z = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})$ por la continuidad de T .

o sea $z = T \cdot z$

Luego para completar la demostración sólo tenemos que mostrar que $(x_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy.

Para $n \geq 2$ definimos $c_n = \|x_n - x_{n-1}\| = \|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\|$,

Podemos suponer que $c_n > 0$ para todo $n \geq 2$, ya que en caso contrario, existiría $n \geq 2$ tal que

$$\|x_n - x_{n-1}\| = 0$$

luego $x_n = x_{n-1}$ pero como $x_n = Tx_{n-1}$

entonces $Tx_{n-1} = x_{n-1}$

y x_{n-1} sería un punto fijo de T .

Luego $c_n = \|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\| \leq \varphi(\|x_{n-1} - x_{n-2}\|)$

entonces $c_n \leq \varphi(c_{n-1}) \leq c_{n-1}$ para $n \geq 2$

Luego $(c_n)_{n \geq 2}$ es una sucesión de creciente de números positivos. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \delta \geq 0$.

Por la continuidad a derecha de la función φ , tenemos:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(c_{n-1}) = \varphi(\delta)$$

$$\implies \delta = 0$$

Es decir: $c_n \downarrow 0$

Supongamos ahora que (x_n) $n \geq 2$ no es una sucesión de Cauchy.

luego existe un número $\xi > 0$ y enteros n_k y m_k tal que

$$m_k > n_k \geq k \text{ y } d_k = \|x_{m_k} - x_{n_k}\| \geq \xi \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

Escogiendo m_k el más pequeño, de tal forma que podamos asumir que:

$$\|x_{m_k-1} - x_{n_k}\| < \xi \text{ tenemos:}$$

$$\xi \leq d_k \leq \|x_{m_k} - x_{m_k-1}\| + \|x_{m_k-1} - x_{n_k}\| < c_{m_k} + \xi$$

$$\text{luego } d_k \longrightarrow \xi^+ \text{ pues } c_n \longrightarrow 0^+$$

Tambi en:

$$d_k \leq \|x_{m_k} - x_{m_k+1}\| + \|x_{m_k+1} - x_{n_k+1}\| + \|x_{n_k+1} - x_{n_k}\|$$

$$\text{luego } d_k \leq c_{m_k+1} + \varphi(\|x_{m_k} - x_{n_k}\|) + c_{n_k+1}$$

$$\text{pues } \|x_{m_k+1} - x_{n_k+1}\| = \|Tx_{m_k} - Tx_{n_k}\| \leq \varphi(\|x_{m_k} - x_{n_k}\|)$$

$$\text{entonces } \xi \leq d_k \leq \varphi(d_k) + c_{m_k+1} + c_{n_k+1}$$

luego si $k \longrightarrow \infty$ y haciendo uso de la continuidad por la derecha de φ tenemos:

$$\xi \leq \varphi(\xi)$$

pero ésto no es posible pues $\xi > 0$.

Luego $(x'_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy.

Considerando $\varphi(r) = kr$ para $r \geq 0$ y $0 \leq k < 1$ se concluye que éste teorema constituye una generalización del teorema 4.1.1. \square

El siguiente ejemplo mostrará que no es válido el teorema 4.1.1 para operadores 1 - contractivos.

Ejemplo (4.1.3)

Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de todas las sucesiones reales $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, con la norma

$$\|\lambda\| = \max \{ |\lambda_n| / n \geq 1 \} .$$

Para cada $\lambda \in \bar{S}(0, 1)$ se define $T \cdot \lambda = \eta$ donde

$$\eta_1 = \frac{1 + \|\lambda\|}{2} \quad \text{y} \quad \eta_n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \lambda_{n-1} \quad \text{para } n = 2, 3, \dots$$

$$\text{Como } |\eta_1| = \left| \frac{1 + \|\lambda\|}{2} \right| = \frac{1 + \|\lambda\|}{2} \leq 1 \quad \text{pues } \lambda \in \bar{S}(0, 1)$$

$$\text{y } |\eta_n| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \lambda_{n-1} \right| = \left| 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right| |\lambda_{n-1}| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

se tiene que $T : \bar{S}(0, 1) \longrightarrow \bar{S}(0, 1)$

Obsérvese que para todo $\lambda, \beta \in \bar{S}(0, 1)$ con $\lambda \neq \beta$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|T\lambda - T\beta\| &= \left\| \left(\frac{1 + \|\lambda\|}{2} - \frac{1 + \|\beta\|}{2}, \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\lambda_1 - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\beta_1, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\lambda_{n-1} - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\beta_{n-1}, \dots \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{\|\lambda\| - \|\beta\|}{2}, \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)(\lambda_1 - \beta_1), \dots, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(\lambda_{n-1} - \beta_{n-1}), \dots \right) \right\| \end{aligned}$$

y como $\frac{|\|\lambda\| - \|\beta\||}{2} < \|\lambda\| - \|\beta\| \leq \|\lambda - \beta\|$ y también

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot (\lambda_{n-1} - \beta_{n-1}) \right| &= \left| 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right| |\lambda_{n-1} - \beta_{n-1}| \\ &< \|\lambda - \beta\| \quad ; n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

entonces: $\|T\lambda - T\beta\| < \|\lambda - \beta\|$

Supongamos ahora que exista $\lambda \in \bar{S}(0,1)$ tal que $T\lambda = \lambda$

entonces por definición de T tenemos que $\lambda_1 = \frac{1 + \|\lambda\|}{2}$

y para $i \geq 2$

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &= \left| \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right) \lambda_{i-1} \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \lambda_{i-2} \right| \\ &= \dots = \left| \prod_{k=0}^{i-2} \left(1 - \frac{1}{2^{i+1-k}}\right) \lambda_1 \right| \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$|\lambda_2| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \lambda_1 \right|$$

$$|\lambda_3| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \lambda_1 \right| \geq \left| 1 - \sum_{k=0}^i \frac{1}{2^{3+1-k}} \right| \cdot |\lambda_1|$$

$$|\lambda_4| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \lambda_1 \right| \geq$$

$$\left| 1 - \frac{1}{2^5} \right| \left| 1 - \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2^{3+1-k}} \right| |\lambda_1| \geq \left| 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{1}{2^{4+1-k}} \right| |\lambda_1|$$

Luego podemos escribir:

$$|\lambda_i| \geq \left| 1 - \sum_{k=0}^{i-2} \frac{1}{2^{i+1-k}} \right| |\lambda_1| = \left| 1 - \sum_{j=3}^{i+1} \frac{1}{2^j} \right| |\lambda_1|$$

Pero $1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \sum_{j=3}^{i+1} \frac{1}{2^j} = 1 - \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} > \frac{3}{4}$$

luego $|\lambda_i| > \frac{3}{4} |\lambda_1|$ para todo $i \geq 2$

pero ésto no es posible pues $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$

luego T no tiene punto fijo. \square

Bajo ciertas restricciones sobre el conjunto D del espacio X de Banach, el principio de contracción puede ser

extendido a los operadores $1 -$ contractivos. No es nuestro propósito por el momento de profundizar en éste sentido.

A continuación enunciamos el famoso teorema de punto fijo de Brouwer.

Teorema 4.1.4 (Punto fijo de Brouwer).

Sea $\xi > 0$ y $\bar{S}(0, \xi) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x\| \leq \xi\}$ para $p \geq 1$, entonces cualquier función continua de $\bar{S}(0, \xi)$ en $\bar{S}(0, \xi)$ posee al menos un punto fijo.

La demostración general de éste teorema se aleja bastante del contenido de ésta tesis razón por la cual sólo presentamos la prueba para $p = 1$. Para una demostración general véase Dunford - Schwartz págs 467 - 470, véase también Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología de K. Kuratowski pags. 203 - 209.

Demostración del teorema de Punto Fijo de Brouwer para el caso $p = 1$.

Sea $\xi > 0$ entonces $\bar{S}(0, \xi) = [-\xi, \xi]$, luego para una función f de $[-\xi, \xi]$ en $[-\xi, \xi]$, continua definimos $g(x) = f(x) - x$ para todo $x \in [-\xi, \xi]$

Es claro que g es una función continua definida en el intervalo cerrado $[-\xi, \xi]$. Y además:

$g(-\xi) = f(-\xi) + \xi \geq 0$ pues $-\xi \leq f(x) \leq \xi$ para todo x .

$g(\xi) = f(\xi) - \xi \leq 0$ por la misma razón.

El teorema se verifica si $g(\xi) = 0$ ó $g(-\xi) = 0$

Supongamos que $g(-\xi) > 0$ $g(\xi) < 0$ siendo g continua entonces g toma todos los valores comprendidos entre $g(-\xi)$ y $g(\xi)$, luego existe $x_0 \in [-\xi, \xi]$ tal que: $g(x_0) = 0$ es decir $f(x_0) = x_0$. \square

Proposición 4.1.5

Si X es un espacio de Banach finito - dimensional sobre el campo \mathbb{K} y $D \subset X$ cerrado acotado y convexo. Entonces toda función T continua de D en D posee punto fijo en D .

Demostración.

Supongamos que X es un espacio de Banach, n - dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Y sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base del espacio vectorial X .

Definimos sobre X la norma de un elemento $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ como:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right]^{1/2} \text{ para todo } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in X$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Consideremos, también la función $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ definida por:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ donde } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

Entonces ϕ es biyectiva, bicontinua y lineal. También

$$\text{si } \Omega = \phi^{-1}(D) = \{ \lambda \in \mathbb{R} / \phi(\lambda) \in D \}$$

entonces Ω es cerrado, acotado y convexo.

Mas aún si $A(\lambda) = \phi^{-1} \circ T \circ \phi(\lambda)$ para todo $\lambda \in \Omega$ entonces A es continua de Ω en Ω .

Como $A(\lambda) = \lambda \iff T(\phi(\lambda)) = \phi(\lambda)$ es suficiente mostrar que A admite punto fijo.

Para $r > 0$ tal que $\lambda \in \Omega \implies |\lambda| \leq r$ tenemos que como \mathbb{R}^n es un espacio de Hilbert entonces:

para todo $\lambda \in \bar{S}(0, r)$ existe un único punto. $P(\lambda) \in \Omega$

tal que: $\|\lambda - P(\lambda)\| = \min \{ \|\lambda - \eta\| / \eta \in \Omega \}$

siendo $P : \bar{S}(0, r) \longrightarrow \Omega$ continua y $P(\lambda) = \lambda$ si $\lambda \in \Omega$

Entonces la aplicación $C: \bar{S}(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $C(\lambda) = \frac{1}{r} A \circ P(r\lambda)$ es continua de $\bar{S}(0, 1)$ en sí misma.

Luego por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe $z \in \bar{S}(0, 1)$ tal que:

$$\frac{1}{r} A \circ P(rz) = z$$

$$A \circ P(rz) = rz$$

Pero $rz \in \text{Im}(A) \subset \Omega$ entonces $P(rz) = rz$.

Luego rz es un punto fijo de A . □

Proposición 4.1.6

Sea X un espacio de Banach y D un sub-conjunto cerrado compacto y convexo de X . Entonces toda función $T : D \longrightarrow D$ continua tiene punto fijo.

Demostración.

Siendo D compacto existe un sub-conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ de D tal que $\min \{ \|x - x_i\| / i=1, \dots, n \} < \xi$ para todo $x \in D$. Para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ definimos; $\gamma_j : D \longrightarrow [0, \xi]$ por

$$\gamma_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \xi \\ \xi - \|x - x_j\| & \text{si } \|x - x_j\| < \xi \end{cases}$$

Notemos que γ_j para $j \in \{1, \dots, n\}$ es continua y además como para todo $x \in D$, existe x_i tal que

$$\|x - x_i\| < \xi$$

entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\gamma_i(x) > 0$

luego $\max \{ \gamma_j(x) / j \in \{1, \dots, n\} \} > 0$ para $x \in D$.

Definimos la función $\beta_\xi : D \longrightarrow X$ por:

$$\beta_\xi(x) = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i(x) x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \right)^{-1}$$

Como $\max \{ \gamma_j(x) / j \in \{1, \dots, n\} \} > 0$ para todo $x \in D$

entonces $\left(\sum_{i=1}^n \delta_i(x) \right)^{-1}$ existe y además β_ξ es continua de D en $\text{co}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

$$\text{Mas aún} \quad \|\beta_\xi(x) - x\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i(x) (x_i - x)}{\sum_{i=1}^n \delta_i(x)} \right\|$$

$$\begin{aligned} \text{entonces: } \|\beta_\xi(x) - x\| &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i(x)| \cdot \|x_i - x\| \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(x) \right)^{-1} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(x) \xi \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(x) \right)^{-1} = \xi \end{aligned}$$

Sea ahora $\Omega = \overline{\text{co}}(\{x_1, \dots, x_n\})$ y notemos en primer lugar que $\Omega \subset D$ pues D es convexo y cerrado.

Definimos la función $B(x) = \beta_\xi \circ T(x)$ para todo $x \in \Omega$ luego B es continua de Ω en Ω . Siendo Ω compacto y convexo de un espacio finito - dimensional X_ξ . Donde X_ξ es el espacio generado por $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Luego por la proposición anterior tenemos que existe $z_\xi \in \Omega \subset D$ tal que:

$$\beta_\xi(T(z_\xi)) = z_\xi$$

De aquí que se tenga:

$$\|T(z_\xi) - z_\xi\| = \|T(z_\xi) - \beta_\xi(T(z_\xi))\|$$

$$= \left\| \frac{\beta}{\xi} (T(z_\xi)) - T(z_\xi) \right\| \leq \xi$$

Es decir: $\forall \xi > 0, \exists z_\xi \in D : \|T(z_\xi) - z_\xi\| \leq \xi$

Como D es compacto existe una sucesión $(\xi_n)_{n \geq 1}$ de números positivos y un $z \in D$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_{\xi_n} = z$$

Luego $\|T(z_{\xi_n}) - z_{\xi_n}\| \leq \xi_n$

y siendo T continua tenemos:

$$\begin{aligned} \|T(z) - z\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (T(z_{\xi_n}) - z_{\xi_n}) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(z_{\xi_n}) - z_{\xi_n}\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0 \end{aligned}$$

entonces $T(z) - z = 0 \iff T(z) = z$

entonces z es un punto fijo de T. □

Teorema 4.1.7

Supongamos que X es un espacio de Banach y D un subconjunto de X, acotado convexo y cerrado.

Si T es una función de D en D α -a-Lipschitz con $0 \leq \alpha < 1$. Entonces $F = \{x \in D / T(x) = x\}$ es no vacío y compacto.

Demostración.

En primer lugar F es cerrado. En efecto si $x \in \bar{F}$

entonces existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en F tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Siendo T continua tenemos que:

$$T(x) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Luego $x \in F$ de donde $F = \bar{F}$

$$\text{Ahora } T(F) = \{T(x) / x \in F\} = \{T(x) / T(x) = x\} = F$$

entonces $\alpha(F) = \alpha[T(F)] \leq a \alpha(F)$ de donde

$\alpha(F) = 0$ pues $0 \leq a < 1$ y luego F es compacto.

Mostremos ahora que F es no vacío.

Sea $\Omega = D$ y definamos $\Omega_n = \overline{\text{co}}(T(\Omega_{n-1}))$ para $n \geq 1$

Entonces se tiene que $\Omega_n \subset \Omega_{n-1}$ y luego:

$$\alpha(\Omega_n) \leq a^n \alpha(\Omega_0) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Como $a < 1$ se tiene entonces que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(\Omega_n) = 0$

Luego por 1.2 $\Omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ es no vacío y compacto, ya

que Ω es cerrado.

Más aún Ω es convexo ya que es la intersección de conjuntos convexos.

Notemos además que:

$$T(\Omega'_n) \subset T(\Omega_{n-1}) \subset \overline{\text{co}}(T(\Omega_{n-1})) = \Omega_n, \quad n \geq 0$$

Entonces:

$$T(\Omega) = T\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T(\Omega_n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \Omega$$

Es decir $T : \Omega \rightarrow \Omega$

Luego por la proposición 4.1.6, existe $z \in \Omega \subset D$ tal que $T(z) = z$, es decir $F \neq \emptyset$ \square

Una importante consecuencia de éste teorema para funciones completamente continuas es el siguiente.

Corolario 4.1.8 (Teo. de Punto Fijo de Schauder).

Sea D un su-conjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio X de Banach y T una función de D en D completamente continua. Entonces existe un punto $x \in D$ tal que $T(x) = x$.

Demostración.

Siendo T completamente continua entonces:

$$\alpha(T(\Omega)) = 0 \quad \text{para todo } \Omega \subset D.$$

Es decir T es $\alpha - 0$ - Lipschitz y se concluye. \square

En forma más general tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.9

Si D es un conjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio X de Banach y T y F son funciones continuas de D en X

con las siguientes propiedades:

- 1) $(T + F)(x) \in D$ para todo $x \in D$
- 2) $\overline{F(D)}$ es compacto
- 3) existe un número $0 \leq r < 1$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq r \|x - y\|$ para todo $x, y \in D$.

Entonces existe un $z \in D$ tal que $(T + F)(z) = z$.

Demostración.

$$\text{Sea } \Omega \subset D \implies \alpha[(T + F)(\Omega)] \leq \alpha[T(\Omega) + F(\Omega)] \\ \leq \alpha[T(\Omega)] + \alpha[F(\Omega)]$$

pero por 2) $\alpha[F(\Omega)] = 0$ y por 3) T es $\alpha - r -$ Lipschitz

véase 2.4 Es decir:

$$\alpha[(T + F)(\Omega)] \leq r \alpha(\Omega)$$

Luego por el teorema 4.1.7 existe $z \in D : (T + F)(z) = z$. \square

Solo anotaremos que por 2.5 el ejemplo 4.1.3 nos proporciona también un ejemplo de una función $\alpha - 1 -$ Lipschitz que no posee punto fijo.

Para demostrar el próximo teorema necesitamos del siguiente lema:

Lema 4.1.10

Sea X un espacio vectorial normado y D un sub-conjunto de X , no vacío. Sea $f_0 : D \rightarrow X$ una función tal que $(id - f_0)(D)$ es cerrado en X . Supóngase que hay una

sucesión de funciones $\{f_j\}$, $f_j : D \longrightarrow X$ $j \geq 1$ tal que converge uniformemente a f_0 , con la propiedad de que, para todo $j \geq 1$, f_j tiene punto fijo. Entonces f_0 tiene un punto fijo también.

Demostración.

Para cada $j \geq 1$ definimos:

$$g_j = id - f_j : D \longrightarrow X$$

Entonces para todo j , f_j tiene un punto fijo sí y sólo si $0 \in g_j(D)$.

Como $f_j \longrightarrow f_0$ uniformemente entonces:

para $\xi > 0$, existe N tal que si $j \geq N$ entonces

$$\|f_j - f_0\| < \xi$$

Luego $\|g_j - g_0\| = \|id - f_j - id + f_0\| = \|f_j - f_0\|$

entonces $g_j \longrightarrow g_0$ uniformemente.

Es decir, dado $\xi > 0$ existe $n_\xi \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq n_\xi$

entonces $\|g_j(x) - g_0(x)\| < \xi$ para todo $x \in D$. Pero

$$\|g_j(x) - g_0(x)\| < \xi \iff g_j(x) \in B(g_0(x), \xi) = g_0(x) + \xi B(0,1)$$

Luego para $j \geq n_\xi$, $g_j(D) \subset g_0(D) + \xi B(0,1)$

y entonces $0 \in g_0(D) + \xi B(0,1)$ para cualquier $\xi > 0$,

puesto que f_j posee punto fijo para todo j .

Luego $0 \in \overline{g_0(D)} = g_0(D)$ ya que por hipótesis $g_0(D)$ es cerrado.

Es decir f_0 tiene un punto fijo. □

El siguiente teorema fija condiciones bajo las cuales una función $\alpha - 1$ - Lipschitz posee punto fijo.

Teorema 4.1.11

Dado un conjunto D cerrado, acotado y convexo de algún espacio X de Banach. Entonces toda función $f : D \rightarrow D$ $\alpha - 1$ - Lipschitz con la propiedad de que $(\text{id} - f)(D)$ es cerrado tiene punto fijo.

Demostración.

Sea $x_0 \in D$ arbitrario y para todo $r \in [0,1)$ definimos $f_r = rf + (1 - r)x_0$.

Entonces para cualquier $\Omega \subset D$ tenemos:

$$\alpha[f_r(\Omega)] = \alpha[rf(\Omega) + (1 - r)x_0] \leq \alpha[r f(\Omega)]$$

$$\text{luego } \alpha[f_r(\Omega)] \leq r \alpha[f(\Omega)] \leq r \alpha(\Omega)$$

Es decir cada f_r es $\alpha - r$ - Lipschitz. Más aún $f_r(D) \subset D$ por la convexidad de D .

Entonces por el teorema 4.1.7 cada f_r posee punto fijo.

Afirmamos que $f_r \rightarrow f$ uniformemente.

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \|f_r - f\| &= \sup_{x \in D} \|f_r(x) - f(x)\| \\ &= \sup_{x \in D} \|rf(x) - f(x) + (1 - r)x_0\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{luego } \|f_r - f\| &= \sup_{x \in D} \| - (1 - r)f(x) + (1 - r)x_0 \| \\ &= \sup_{x \in D} \| (1 - r) (x_0 - f(x)) \| \end{aligned}$$

$$\text{O sea } \|f_r - f\| = (1 - r) \sup_{x \in D} \|x_0 - f(x)\| \leq (1 - r) \text{diam } D$$

Así $\|f_r - f\|$ se puede hacer tan chico como queramos a partir de un $r \in [0, 1)$. Esto nos muestra que las f_r tienden uniformemente a f .

Luego siendo que $(\text{id} - f)(D)$ es cerrado por hipótesis se concluye por el lema anterior. \square

Teorema 4.1.12 (Teorema del punto fijo de Sadovskii)

Sea D un conjunto cerrado acotado y convexo de algún espacio X de Banach. Entonces toda función f condensada de D en D admite punto fijo. Y $\mathcal{F} = \{x \in D / f(x) = x\}$ es compacto.

Demostración.

$$\text{Sea } \mathcal{F} = \{x \in D / f(x) = x\}$$

Claramente \mathcal{F} es un conjunto cerrado.

Ahora como $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, tenemos que:

$$\alpha(\mathcal{F}) = \alpha[f(\mathcal{F})] < \alpha(\mathcal{F}) \text{ siempre que } \alpha(\mathcal{F}) > 0$$

lo cual no es posible. Luego $\alpha(\mathcal{F}) = 0$.

O sea \mathcal{F} es compacto. Demostremos ahora que $\mathcal{F} \neq \emptyset$

Para un $x_0 \in D$ arbitrario. Sea \mathcal{C} definido como sigue:

$$\mathcal{C} = \{ C \subset D / C \text{ es cerrado, convexo, } x_0 \in C \text{ y } f(C) \subset C \}$$

$$\mathcal{C} \neq \emptyset \quad \text{ya que } D \in \mathcal{C}$$

Considérese el conjunto $C_0 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

Afirmamos que C_0 es cerrado, convexo, $x_0 \in C_0$ y además $f(C_0) \subset C_0$.

En efecto: C_0 es cerrado y convexo por ser intersección de cerrados y convexos respectivamente.

Además $x_0 \in C_0$ pues se verifica que $x_0 \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Para $y \in f(C_0)$ tenemos que existe $x \in C_0$ tal que $y = f(x)$ luego $x \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces $f(x) = y \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Es decir $y \in C_0$. Con esto podemos decir entonces que $C_0 \in \mathcal{C}$.

Mas aún supóngase que $\alpha(C_0) > 0$ entonces:

$$\alpha[f(C_0)] < \alpha(C_0)$$

Sea $C_1 = \overline{C_0} \cup \{x_0\}$; como $f(C_0) \subset C_0$ y C_0 es convexo y cerrado se tiene que:

$$C_1 \subset C_0$$

luego $f(C_1) \subset f(C_0) \subset C_1$ de aquí que $C_1 \in \mathcal{C}$ y entonces

$C_1 \supset C_0$. O sea $C_1 = C_0$, pero ésto es imposible pués:

$$\alpha(C_1) = \alpha[\overline{C_0} \cup \{x_0\} \cup f(C_0)] = \alpha[f(C_0) \cup \{x_0\}] < \alpha(C_0)$$

Luego $\alpha(C_0) = 0$ lo cual nos indica que C_0 es compacto.

Entonces por la proposición 4.1.6 tenemos que f admite punto fijo en C_0 y luego en D . \square

4.2 OPERADORES SOBRE CONOS

El propósito de ésta sección es el estudio de la existencia de puntos fijos para cierto tipo de operadores definidos sobre un cono C de un espacio de Banach X sobre \mathbb{K} .

Introducimos ciertas definiciones y notaciones tales como:

Definición 4.2.1

Sea X un espacio de Banach sobre \mathbb{K} y C un sub-conjunto de X . Se dice que C es un cono si para todo $x, y \in C$ y $\lambda \geq 0$ se tiene que $\lambda x, x+y \in C$.

Si C es un cono y además es cerrado se dirá que C es un cono cerrado. En ésta sección, a menos que se diga lo contrario, C denotará un cono cerrado.

Además si $r > 0$ denotaremos C_r al conjunto:

$$C_r = C \cap \bar{S}(0, r) = \{x \in C / \|x\| \leq r\}$$

Definición 4.2.2

Un operador T continuo y acotado sobre X se dirá α -Lipschitz si existe un número k tal que:

$$\alpha(T(\Omega)) \leq k \alpha(\Omega)$$

para todo $\Omega \subset \text{Dom } T$, Ω acotado.

El ínfimo de tales números k se denotará por $\|T\|_\alpha$.

Definición 4.2.3

Un operador T de C en X se llamará casiacotado si:

- i) T transforma conjuntos acotados de C en conjuntos acotados y
- ii) $q(T) = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$

Un resultado inmediato es que si T es lineal y transforma conjuntos acotados de C en conjuntos acotados, entonces T es casiacotado. En efecto por ser T lineal, existe $k > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| \leq k \|x\| \quad \text{para todo } x \in C.$$

Luego $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq k < \infty$ para $x \neq 0$.

El conjunto de todos los operadores de C en X casiacotados se denotará $\mathcal{Q}(C, X)$. Fácilmente se comprueba que si $T, F \in \mathcal{Q}(C, X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $T + F, \lambda T \in \mathcal{Q}(C, X)$ con:

$$q(T + F) \leq q(T) + q(F) \quad \text{y} \quad q(\lambda T) = |\lambda| q(T)$$

En particular, $\mathcal{Q}(C, X)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $q(\cdot)$ es una seminorma sobre $\mathcal{Q}(C, X)$.

Un resultado fundamental relacionado con punto fijo para operadores casiacotados es el siguiente.

Teorema 4.2.4

Sea $T \in \mathcal{Q}(C, X)$ con $q(T) < 1$ y T de C en C . Supongamos además que T es d -Lipschitz con $\|T\|_\alpha < 1$.

Entonces $F = \{z \in C / T(z) = z\}$ es no vacío y compacto.

Demostración.

Como $q(T) < 1$ existe $R > 0$ tal que $\|T(x)\| < \|x\|$ si $x \in C$ y $\|x\| \geq R$. Esto implica en particular que $F \subset C_R$. Tomando $M = \sup \{ \|T(x)\| / x \in C, \|x\| \leq R \}$ y $r = \max \{ R, M \}$ se tiene que $T(C_r) \subset C_r$.

En efecto si $x \in T(C_r)$ entonces existe $x_0 \in C_r$ ($x_0 \in C$ y $\|x_0\| \leq r$) tal que $x = T(x_0)$.

Si x_0 es tal que $\|x_0\| \geq R$ entonces $\|x\| = \|T(x_0)\| < \|x_0\| \leq r$ luego $x \in C_r$.

Por otro lado si $\|x_0\| < R$ entonces $\|x\| = \|T(x_0)\| \leq M \leq r$ y también $x \in C_r$. Como T es α -Lipschitz con $\|T\|_\alpha < 1$ entonces según el teorema 4.1.7 $F \cap C_r = F$ es no vacío y compacto. □

Corolario 4.2.5

Supóngase que $T \in \mathcal{L}(C, X)$, T α -Lipschitz de C en C . Si $\lambda > 0$ y $\max \{ q(T), \|T\|_\alpha \} < \lambda^{-1}$ entonces $\text{Im}(I - \lambda T) \supset C$.

Demostración.

Sea $z \in C$. Considérese el operador T_z definido por $T_z(x) = \lambda T(x) + z$ para todo $x \in C$.

T_z es α -Lipschitz con $\|T_z\|_\alpha < 1$. En efecto para todo Ω sub-conjunto de C , acotado tenemos:

$$\alpha [T_z(\Omega)] \leq \alpha [\lambda T(\Omega) + z] = \alpha [\lambda T(\Omega)]$$

luego $\alpha [T_z(\Omega)] \leq \lambda \alpha [T(\Omega)]$

entonces para todo $\xi > 0$ se tiene:

$$\alpha[T_z(\Omega)] \leq \lambda \|T\|_\alpha + \xi \alpha(\Omega)$$

se tiene entonces que $\|T_z\|_\alpha \leq \lambda(\|T\|_\alpha + \xi)$ para todo $\xi > 0$

luego $\|T_z\|_\alpha \leq \lambda \|T\|_\alpha$ por la arbitrariedad de ξ .

entonces $\|T_z\|_\alpha < \lambda \cdot \lambda^{-1} = 1$

$$\text{Además } q(T_z) = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|\lambda T(x) + z\|}{\|x\|} \leq \lambda \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

luego $q(T_z) \leq \lambda q(T) < \lambda \cdot \lambda^{-1} = 1$

Entonces como T_z esta definido de C en C , por el teorema anterior tenemos que existe un $x \in C$ tal que:

$$x = \lambda \cdot T(x) + z$$

es decir $z = x - \lambda \cdot T(x)$

luego $z \in \text{Im}(I - \lambda T)$. □

Teorema 4.2.6

Supóngase que $r > 0$ y T un operador condensado de C_r en X . Supóngase también que para $x \in C_r$ con $\|x\| = r$ se tiene $T(x) \neq \lambda x$ para todo $\lambda \geq 1$.

Entonces:

$$\beta = \inf \{ \|\lambda x - Tx\| / \lambda \geq 1, x \in C_r, \text{ con } \|x\| = r \} > 0$$

Además si F es un operador continuo y acotado de C_r en X tal que $T + F$ va de C_r en C con $T + F$ α -Lipschitz y con $\|T + F\|_\alpha < 1$. También si $\|F(x)\| < \beta$ para todo $x \in C$ con $\|x\| = r$, entonces existe un $x \in C_r$ tal que $\|x\| < r$ y $(T + F)x = x$.

Demostración.

Supóngase que $\beta = 0$. Entonces existen sucesiones $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ en $[1, \infty)$ y $(x_k)_{k \geq 1}$ en C con $\|x_k\| = r$ para todo k , tal que:

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k x_k - T(x_k)\| = 0.$$

Ahora siendo T acotado existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$, $x \in C_r$.

Entonces $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ es acotada. En efecto para $\xi = 1$

Tenemos: $\|\lambda_k x_k\| - \|T(x_k)\| \leq \|\lambda_k x_k - T(x_k)\| < 1$ para $k \geq N$, donde N es un número cuya existencia está garantizada por (1).

$$\text{Luego } \lambda_k \|x_k\| < \|T(x_k)\| + 1, \quad k \geq N$$

$$\text{entonces } \lambda_k r < M + 1, \quad k \geq N$$

$$\text{es decir } \lambda_k < \frac{M + 1}{r}, \quad k \geq N$$

Luego $M_0 = \max \left\{ \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \frac{M + 1}{r} \right\}$ es una cota de

$(\lambda_k)_{k \geq 1}$ Entonces podemos asumir que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_0 \geq 1$

y luego:

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_0 x_k - T(x_k)\| = 0$$

lo cual implica que $\lim y_k = 0$ donde $y_k = \lambda_0 x_k - T(x_k)$

Luego si $\Omega = \{x_k/k \geq 1\}$ y $\Omega_0 = \{y_k/k \geq 1\}$

entonces como $x_k = \frac{y_k}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} T(x_k)$ se tiene que:

$$\Omega \subset \frac{1}{\lambda_0} \Omega_0 + \frac{1}{\lambda_0} \{T(x_k) / k \geq 1\}$$

luego
$$d(\Omega) \leq \frac{1}{\lambda_0} d(\Omega) + \frac{1}{\lambda_0} d[\{T(x_k) / k \geq 1\}]$$

entonces
$$d(\Omega) \leq \frac{1}{\lambda_0} \cdot d[T(\Omega)]$$

Si suponemos que $d(\Omega) > 0$ entonces:

$$d(\Omega) \leq \frac{1}{\lambda_0} d[T(\Omega)] < \frac{1}{\lambda_0} d(\Omega)$$

lo cual no es posible pues $\lambda_0 \geq 1$.

Entonces $d(\Omega) = 0$ lo cual indica que existe una sub-sucesión de $(x_k)_{k \geq 1}$ convergente a un $x_0 \in C$ con $\|x_0\| = r$.

Sin pérdida de generalidad asumamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$

entonces:

$$\lambda_0 x_0 - T(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_0 x_n - T(x_n)) = 0 \text{ de (2)}$$

Es decir $\lambda_0 x_0 = T(x_0)$ con $\lambda_0 \geq 1$ y $\|x_0\| = r$ lo cual contradice la hipótesis. Luego $\beta > 0$.

Supongamos ahora que F es un operador como se indica en el teorema, y consideremos la retracción r - radial

$$Q_r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq r \\ \frac{r}{\|x\|} \cdot x, & \text{si } \|x\| > r \end{cases}$$

Es claro que $Q_r : C \rightarrow C$ es continuo y condensado pues Q_r es d -Lipschitz con $\|Q_r\|_d \leq 1$.

Sea $R > r$ tal que $\text{Im}(T + F) \subset C_R$. Definimos el operador A_0 de C_R en C_R por:

$$A_0(x) = T \circ Q_r(x) + F \circ Q_r(x)$$

Entonces A_0 es continua y d -Lipschitz con $\|A_0\|_d = \|(T + F) \circ Q_r\|_d \leq \|T + F\|_d \|Q_r\|_d < 1$

Luego por el teorema 4.1.7 A_0 tiene un punto fijo $x_0 \in C_R$.

Se tiene además que $\|x_0\| < r$. En efecto supongamos que

$$r \leq \|x_0\| \leq R, \quad \text{entonces si } \lambda = \frac{\|x_0\|}{r}, \quad \lambda \geq 1 \quad \text{y}$$

$$A_0(x_0) = T(Q_r(x_0)) + F(Q_r(x_0)) = T\left(\frac{r}{\|x_0\|} x_0\right) + F\left(\frac{r}{\|x_0\|} x_0\right)$$

$$A_0(x_0) = T\left(\lambda^{-1} x_0\right) + F\left(\lambda^{-1} x_0\right) = x_0$$

$$\text{Sea } z = \lambda^{-1} x_0; \text{ entonces, } T(z) + F(z) = \lambda \cdot z$$

$$\text{luego } F(z) = \lambda z - T(z)$$

entonces $\beta \leq \|F(z)\| = \|\lambda z - T(z)\| < \beta$ lo cual no es

posible razón por lo cual se tiene que $\|x_0\| < r$.

Y entonces $T(x_0) + F(x_0) = x_0$. □

Un corolario del teorema anterior se obtiene cambiando T condensing por T α -Lipschitz con $\|T\|_\alpha < 1$. Su verificación es trivial.

También se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.2.7

Supóngase que $r > 0$ y T un operador condensado de C_r en C con $\|T\|_\alpha < 1$ y con la propiedad de que, para todo $x \in C$ con $\|x\| = r$ implica $T(x) \neq \lambda x$ para cualquier $\lambda > 1$. Entonces T tiene un punto fijo en C_r .

Demostración.

Basta tomar $T \equiv 0$. □

Otros resultados importantes de punto fijos sobre conos se obtienen cuando consideramos un operador T asintótico a un operador lineal T' . Para tal efecto tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2.8

Sea T un operador acotado, es decir que transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, $T : C \rightarrow X$.

Se dice que T es asintótico a el operador lineal acotado

$T' = T'_C(\infty)$ sobre X si:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x) - T'(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{para } x \in C.$$

A $T'_C(\infty)$ se le llama derivada de T a través de C .
 Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.2.9

Bajo el contexto de la definición. Si T es asintótico a T' entonces $T \in \mathcal{Q}(C, X)$ y $q(T) \leq \|T'\|$

Demostración.

Como $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x) - T'(x)\|}{\|x\|} = 0$, $x \in C$ entonces existe

$R > 0$ tal que si $\|x\| > R$ entonces $\frac{\|T(x) - T'(x)\|}{\|x\|} < \xi$

para $x \in C$ y $\xi > 0$ arbitrario.

Luego $\|T(x)\| - \|T'(x)\| \leq \|T(x) - T'(x)\| < \xi \|x\|$

O sea $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \xi + \frac{\|T'(x)\|}{\|x\|} \leq \xi + \frac{\|T'\| \|x\|}{\|x\|} = \xi + \|T'\|$

luego $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T'\|$

es decir $T \in \mathcal{Q}(C, X)$ y $q(T) \leq \|T'\|$. \square

Los siguientes lemas facilitarán la demostración de un teorema importante sobre punto fijo.

Lema 4.2.10

Supóngase que $T : C \longrightarrow C$ y T' es la derivada asintótica de T . Entonces $T' : C \longrightarrow C$.

Demostración.

Supongamos lo contrario, es decir que existe un $z \in C$,

$z \neq 0$ y $T'(z) \notin C$.

Como C es cerrado entonces $d = d(T'(z), C) > 0$.

Sea $t > 0$, entonces tenemos que:

$$d(T'(tz), C) = \inf \{ \|T'(tz) - x\| / x \in C \} = \inf \{ t \|T'(z) - t^{-1}x\| / x \in C \} = t \inf \{ \|T'(z) - t^{-1}x\| / x \in C \} = t d \text{ ya que } t^{-1}C = C.$$

Ahora para $\xi = \frac{d}{2\|z\|}$, existe $R > 0$ tal que:

$$\|T(tz) - T'(tz)\| \leq \xi \|tz\| \text{ para } t \geq R$$

pero $\xi \|tz\| = \frac{d}{2\|z\|} \|tz\| = \frac{dt}{2}$ y por hipótesis $T(tz) \in C$

luego $d(T'(tz), C) \leq \frac{dt}{2}$ lo cual equivale a

$$td \leq \frac{dt}{2} \text{ lo cual es contradictorio, pues } d > 0,$$

luego $T' : C \rightarrow C$. \square

Lema 4.2.11

Supóngase que T es un operador α -Lipschitz de C en C con derivada asintótica T' . Si T'_+ es la restricción de T' a C , entonces $\|T'_+\|_\alpha \leq \|T'\|_\alpha$.

Demostración.

Sea $B = T'_+$ y $R = B - T'$, entonces: $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0$
 $x \in C$

Sea Ω un sub - conjunto acotado de C tal que:

$$\rho = \inf \{ \|x\| / x \in \Omega \} > 0$$

y sea $\sigma = \sup \{ \|x\| / x \in \Omega \}$

Como $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0$ para $x \in C$, entonces para $\xi > 0$

existe $r = r(\xi) > 0$ tal que $\|R(x)\| < \frac{\xi}{2\sigma} \|x\|$

para $x \in C$ y $\|x\| \geq r$.

Si $\lambda \geq \frac{r}{\rho}$ y $x \in \Omega$ entonces $\|\lambda x\| \geq \frac{r}{\rho} \|x\| \geq \frac{r}{\rho} \rho = r$

y luego $\|R(\lambda x)\| < \frac{\xi}{2\sigma} \lambda \|x\| \leq \frac{\xi}{2\sigma} \lambda \sigma = \frac{\lambda}{2} \xi$.

Obsérvese también que para $x, y \in \Omega$ se tiene:

$$\|R(\lambda x) - R(\lambda y)\| \leq \|R(\lambda x)\| + \|R(\lambda y)\| < \frac{\lambda \xi}{2} + \frac{\lambda \xi}{2} = \lambda \xi$$

y pasando al sup tenemos que $d[R(\lambda \Omega)] \leq \delta[R(\lambda \Omega)] \leq \lambda \xi$

Luego se sigue que:

$$\lambda d[B(\Omega)] = d[B(\lambda \Omega)] = d[(T + R)(\lambda \Omega)] \leq d[T(\lambda \Omega)] + d[R(\lambda \Omega)]$$

$$\lambda d[B(\Omega)] \leq \|T\|_{\alpha} \cdot d(\lambda \Omega) + \lambda \xi = \lambda (\|T\|_{\alpha} \cdot d(\Omega) + \xi)$$

entonces: $d[B(\Omega)] \leq \|T\|_{\alpha} \cdot d(\Omega) + \xi$ para todo $\xi > 0$.

luego: $d[B(\Omega)] \leq \|T\|_{\alpha} \cdot d(\Omega)$.

Nótese además que:

$\alpha[B(C_\xi)] \leq \delta[B(C_\xi)] \leq \|B\| \delta(C_\xi) \leq 2\|B\|\xi$ puesto que para $x, y \in C_\xi$, $\|B(x) - B(y)\| = \|B(x - y)\| \leq \|B\| \|x - y\|$ para $\xi > 0$.

Ahora si Ω es un sub-conjunto acotado de C y $\xi > 0$ si $\Omega_1 = \{x \in \Omega / \|x\| < \xi\}$ y $\Omega_2 = \{x \in \Omega / \|x\| \geq \xi\}$ entonces:

$$\alpha[B(\Omega)] = \alpha[B(\Omega_1 \cup \Omega_2)] = \alpha[B(\Omega_1) \cup B(\Omega_2)] = \max \{ \alpha[B(\Omega_1)], \alpha[B(\Omega_2)] \}$$

luego $\alpha[B(\Omega)] \leq \max \{ 2\|B\|\xi, \|T\|_\alpha \alpha(\Omega) \}$

Como ésto es válido para todo $\xi > 0$ entonces se concluye que:

$$\alpha[B(\Omega)] \leq \|T\|_\alpha \alpha(\Omega) \text{ para todo } \Omega \subset C \text{ acotado.}$$

Luego $\|B\|_\alpha \leq \|T\|$. □

Teorema 4.2.12

Supóngase que T es un operador α -Lipschitz de C en C con $\|T\|_\alpha < 1$. Si T es asintótico al operador lineal acotado T' , y si T' no tiene vectores propios positivos correspondiente a un autovalor mayor o igual a 1, es decir $z > 0$, y $\lambda \geq 1$ entonces $T'(z) \neq \lambda z$.

Entonces T tiene un punto fijo en C .

Demostración.

Sea T_0 la restricción de T' a C . Por el lema anterior tenemos que $\|T_0\|_\alpha \leq \|T\|_\alpha < 1$. Y por hipótesis se tiene que:

$T_0(z) \neq \lambda \cdot z$ para $z \in C$ con $\|z\| = 1$ y $\lambda \geq 1$. Por otro lado si $\xi = \inf \{ \|\lambda z - T_0(z)\| / z \in C, \|z\| = 1 \text{ y } \lambda \geq 1 \}$ entonces $\xi > 0$ por el teorema 4.2.5.

$$\text{Como } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x) - T_0(x)\|}{\|x\|} = 0 \text{ para } x \in C$$

entonces existe $r > 0$ tal que si $x \in C$ con $\|x\| \geq r$

$$\text{se tiene: } \|T(x) - T_0(x)\| \leq \frac{\xi}{2} \|x\| \quad (*)$$

Ahora siendo que $T_0(r^{-1}w) = r^{-1}T_0(w)$ para $w \in C$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \{ \|\lambda w - T_0(w)\| / w \in C, \|w\| = r, \lambda \geq 1 \} \\ &= \{ r \|\lambda r^{-1}w - T_0(r^{-1}w)\| / w \in C, \|w\| = r, \lambda \geq 1 \} \\ &= r \{ \|\lambda z - T_0(z)\| / z \in C, \|z\| = 1, \lambda \geq 1 \} \end{aligned}$$

donde $z = r^{-1}w$ y entonces $\|z\| = \|r^{-1}w\| = r^{-1}\|w\| = 1$

luego $\inf \{ \|\lambda w - T_0(w)\| / w \in C, \|w\| = r, \lambda \geq 1 \} = r \xi$

Entonces si $R_0(x) = T(x) - T_0(x)$ se tiene que

$$\|R_0(x)\| = \|T(x) - T_0(x)\| \leq \frac{\xi}{2} \cdot r$$

para todo $x \in C$ y $\|x\| = r$ según (*). Es decir R_0 es acotado.

Mas aún $T_0 + R_0$ es la restricción de T a C_r .

Luego $\|T_0 + R_0\|_\alpha \leq \|T\|_\alpha < 1$, entonces por el teorema 4.2.5 existe un $z \in C_r$ tal que:

$$T_0(z) + R_0(z) = z$$

y entonces $T_0(z) + T(z) - T_0(z) = z$

$$T(z) = z \quad \square$$

Corolario 4.2.13

Bajo las hipótesis del teorema anterior tenemos que
 $\text{Im}(I - T) \supset C$.

Demostración.

Sea $w \in C$ y defináse la aplicación T_w por $T_w(x) = T(x) + w$
Entonces:

$$\frac{\|T_w(x) - T'(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|T(x) + w - T'(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|T(x) - T'(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|w\|}{\|x\|}$$

y como T es asintótico a T' tenemos que:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T_w(x) - T'(x)\|}{\|x\|} = 0$$

para $x \in C$, luego T_w es asintótico a T' y por el teorema anterior, existe $z \in C$ tal que: $T(z) + w = z$, es decir $w = z - T(z)$ o sea $w \in \text{Im}(I - T)$. \square

4.3 CASO ESPECIAL DE OPERADORES.

En ésta sección queremos resolver el siguiente problema:

Supongamos que Γ es un sub-conjunto cerrado acotado y convexo de un espacio X de Banach, Q un operador $Q : \Gamma \longrightarrow Y$ Y espacio de Banach. Si $G : \Gamma \times Q(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ nuestro problema es la respuesta a la siguiente pregunta:

¿Bajo qué condiciones la función H , definida por $H(x) = G(x, Q(x))$ es $\alpha - k - Lipschitz$?

Para responder a ésta pregunta, primeramente consideremos el siguiente lema.

Lema 4.3.1

Supongamos que X es un espacio normado y Z es un sub-conjunto totalmente acotado de un espacio normado Y .

Si $G : X \times Z \longrightarrow X$ es continua y satisface las siguientes condiciones:

- (i) $G(\cdot, y)$ es $\alpha - K - Lipschitz$ ($0 \leq K < \infty$) en X , para todo $y \in Z$;
- (ii) Para todo $B \subset X$, acotado y para $x \in B$, $G(x, \cdot)$ es uniformemente continua en Z , uniformemente con respecto a x en B .

Entonces:
$$\alpha \left[\bigcup_{y \in Z} G(B, y) \right] \leq K \alpha(B).$$

Demostración.

Por la condición (ii) para cada $x \in B$, $G(x, \cdot)$ es uniformemente continua en Z . Es decir:

$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|y_1 - y_2\| < \delta \implies \|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| < \xi/3$.

Además por la misma condición podemos escoger δ independiente de x .

Como Z es totalmente acotado entonces podemos dividir Z en un número finito de sub-conjuntos $Z_i, 1 \leq i \leq k$ cada uno de ellos con diámetro $< \delta$.

Para un elemento $z_i \in Z_i$ arbitrario, por (i) tenemos:

$$\alpha[G(B, z_i)] \leq K \cdot \alpha(B)$$

Entonces para $\xi > 0$ existe un cubrimiento finito.

$\{A_1^i, \dots, A_{\ell(i)}^i\}$ de $G(B, z_i)$ con diámetro $\leq K \alpha(B) + \frac{\xi}{3}$.

Consideremos ahora los conjuntos $\frac{\xi}{3} (A_j^i), 1 \leq j \leq \ell(i)$

$1 \leq i \leq k$. Tenemos que para todo i y j :

$$\begin{aligned} \text{Diam } \frac{\xi}{3} (A_j^i) &\leq \text{diam } A_j^i + \frac{2\xi}{3} \\ &\leq k \cdot \alpha(B) + \frac{\xi}{3} + \frac{2\xi}{3} = k \cdot \alpha(B) + \xi \end{aligned}$$

En primer lugar observemos que: $G(B \times Z) = \bigcup_{y \in Z} G(B, y)$

Afirmamos que $\left\{ N \frac{\xi}{3} (A_j^i) \right\}_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell(i)}}$ es un

cubrimiento finito de $G(B \times Z)$.

En efecto para $b \in B$ y $z \in Z$, tenemos que existe

$1 \leq i \leq k$ tal que $z \in Z_i$, luego $\|G(b, z) - G(b, z_i)\| < \frac{\epsilon}{3}$

pues $\text{diam } Z_i < \delta$.

Como $G(b, z_i) \in G(B, z_i)$ y siendo que $\{A_j^i\}_{1 \leq j \leq \ell(i)}$ es un cubrimiento de $G(B, z_i)$, se sigue que

$$G(b, z) \in N_{\frac{\epsilon}{3}}(A_j^i)$$

para algún j , $1 \leq j \leq \ell(i)$

Esto muestra que:

$$\alpha[G(B \times Z)] \leq K \cdot \alpha(B)$$

o equivalentemente:

$$\alpha\left[\bigcup_{y \in Z} G(B, y)\right] \leq K \cdot \alpha(B). \quad \square$$

Teorema 4.3.2

Supongamos que Γ es un sub-conjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio normado X y Q un operador de Γ en un espacio normado Y . Supongamos además que

$G : \Gamma \times Q(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ es continua y satisface las siguientes condiciones:

- (i) $G(x, y)$ es α - k -Lipschitz ($0 \leq k < \infty$) para todo $y \in Q(\Gamma)$
- (ii) $G(x, \cdot)$ es uniformemente continua en $Q(\Gamma)$, uniformemente con respecto a x en Γ .
- (iii) Q es completamente continua.

Entonces la función H definida por $H(x) = G(x, Q(x))$ es $\alpha - k -$ Lipschitz.

Demostración.

Sea $B \subset \Gamma$, por (iii) $\overline{Q(B)}$ es compacto.

Por el Lema tenemos entonces que:

$$\alpha[G(B \times \overline{Q(B)})] \leq k \cdot \alpha(B)$$

Como $\{G(x, Q(x)) / x \in B\} \subset G(B \times \overline{Q(B)})$

Se sigue que: $\alpha[G(B \times Q(B))] \leq \alpha[G(B \times \overline{Q(B)})]$

$$\alpha[H(B)] \leq \alpha[G(B \times \overline{Q(B)})] \leq k \cdot \alpha(B). \quad \square$$

Corolario 4.3.3

Bajo las hipótesis del teorema anterior si X, Y son espacios de Banach, y $0 \leq k < 1$. Supóngase también que Γ es un sub-conjunto cerrado, acotado y convexo de X tal que $G : \Gamma \times Q(\Gamma) \rightarrow \Gamma$. Entonces $G(x, Q(x)) = x$ tiene solución en Γ .

Demostración.

Por el teorema anterior $H(x) = G(x, Q(x))$ es $\alpha - k -$ Lipschitz. Entonces por el teorema del punto fijo de Sadovskii $H(x) = G(x, Q(x))$ tiene solución. \square

Corolario 4.3.4

Bajo las hipótesis del teorema anterior si $0 \leq k < 1$. Y también Γ es un sub-conjunto cerrado acotado y convexo de X , espacio normado, tal que

$$G : \Gamma \times Q(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \quad \text{donde } Q : \Gamma \longrightarrow Y$$

Y espacio normado. Entonces el conjunto

$S = \{x \in \Gamma \mid G(x, q) = x \text{ para algún } q \in Q(\Gamma)\} \neq \emptyset$
es compacto.

Demostración.

Afirmamos que S es cerrado. En efecto para

$$y \in \bar{S} \implies \exists \{x_n\}_{n \geq 1} \subset S \text{ tal que } x_n \longrightarrow y$$

Pero como $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset S \implies \forall n \geq 1, \exists q_n \in Q(\Gamma)$
tal que $G(x_n, q_n) = x_n$.

Siendo $\overline{Q(\Gamma)}$ compacto, podemos asumir que existe un

$$q_0 \in \overline{Q(\Gamma)} \text{ tal que } q_n \longrightarrow q_0.$$

Entonces tenemos que:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, q_n) = G(y, q_0) \quad \text{por la}$$

continuidad de $G \implies y \in S$.

Claramente tenemos que $S \subset G(S \times \overline{Q(\Gamma)})$

$$\implies \alpha(S) \leq \alpha[G(S \times \overline{Q(\Gamma)})] \leq k \alpha(S)$$

Como $k < 1 \implies \alpha(S) = 0 \implies \bar{S} = S$ es compacto.

Concluimos que $S \neq \emptyset$ por el corolario anterior.

Teorema 4.3.5

Sean X, Y espacios normados y $Q : X \longrightarrow Y$ un
operador. Supongase que tenemos una aplicación $G : X \times Q(X) \rightarrow X$

continua. Y se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $G(\cdot , y)$ es $\alpha - k_1$ - Lipschitz en X , para todo $y \in Q(X)$.

(ii) $\forall B \subset X$ acotado, y para $x \in B$, $y_1, y_2 \in Q(B)$ se tiene:

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| < \|y_1 - y_2\|$$

(iii) Q es $\alpha - k_2$ - Lipschitz.

Entonces: $G(x, Q(x)) = H(x)$ es $\alpha - k_1 + 2 k_2$ - Lipschitz.

Demostración.

Para $B \subset X$ acotado, debemos probar que $H(B) = \{ G(x, Q(x)) / x \in B \}$ podemos cubrirlo por un número finito de conjuntos con diámetros $\leq (k_1 + 2 k_2) \alpha(B) + \xi$ para $\xi > 0$ arbitrario.

Siendo Q $\alpha - k_2$ - Lipschitziana, entonces para $\eta > 0$ existe $\{ C_1, \dots, C_k \}$ cubrimiento finito de $Q(B)$ con $\text{diam } C_i \leq k_2 \cdot \alpha(B) + \eta$, $1 \leq i \leq k$.

Para cada i , seleccionemos un elemento $c_i \in C_i$ arbitrario.

Por la condición (i) se da que:

$$\alpha [G(B, c_i)] \leq k_1 \cdot \alpha(B).$$

Luego existe $\{ A_1^i, \dots, A_{\ell(i)}^i \}$ un cubrimiento finito de $G(B, c_i)$ con $\text{diam } A_j^i \leq k_1 \cdot \alpha(B) + \xi$, $1 \leq j \leq \ell(i)$ para $\xi > 0$ arbitrario.

Consideremos el conjunto $\left\{ N_{\lambda}(A_j^i) / \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell(i) \end{matrix} \right\}$

donde $\lambda = k_2 \alpha(B) + \eta$ Entonces:

$$\begin{aligned} \text{diam } N_{\lambda}(A_j^i) &\leq \text{diam } A_j^i + 2\lambda \\ &\leq k_1 \cdot \alpha(B) + \delta + 2k_2 \cdot \alpha(B) + 2\eta \\ &\leq (k_1 + 2k_2) \cdot \alpha(B) + (\delta + 2\eta) \end{aligned}$$

Sean $b \in B$ y $Q(b) \in Q(B)$.

Como $\{C_1, \dots, C_k\}$ es un cubrimiento de $Q(B)$

$\implies \exists i: Q(b) \in C_i$ luego:

$\|Q(b) - C_i\| \leq \text{diam } C_i \leq k_2 \cdot \alpha(B) + \eta$. Por (ii) tenemos entonces que:

$$\|G(b, Q(b)) - G(b, c_i)\| < k_2 \alpha(B) + \eta$$

siendo que $G(b, c_i) \in G(B, c_i)$ entonces:

$$G(b, Q(b)) \in N_{\lambda}(A_j^i) \text{ para algún } j, 1 \leq j \leq \ell(i)$$

O sea $\left\{ N_{\lambda}(A_j^i) / \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell(i) \end{matrix} \right\}$ es un cubrimiento finito

de $\{G(x, Q(x)) / x \in B\}$

$$\implies \alpha[H(B)] = \alpha[\{G(x, Q(x)) / x \in B\}] \leq (k_1 + 2k_2) \alpha(B). \quad \square$$

Corolario 4.3.6

En adición al teorema anterior, si X, Y son espacios de Banach. Si suponemos además que Γ es un sub-conjunto de X cerrado, acotado y convexo, tal que:

$$G : \Gamma \times Q(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$$

y que $0 \leq k_1 + 2k_2 < 1$ con $k_1 \geq 0 ; k_2 \geq 0$

Entonces $G(x, Q(x)) = x$ tiene solución en Γ .

Demostración.

Por el teorema anterior $H(x) = G(x, Q(x))$ es $\alpha - k_1 + 2k_2$ - Lipschitziana. Siendo $0 \leq k_1 + 2k_2 < 1$ entonces por el teorema de punto fijo de Sadovskii la ecuación: $x = G(x, Q(x))$ tiene solución en Γ . \square

CONCLUSIONES

Como resultado de mi experiencia en el estudio de los distintos temas vistos en esta tesis, queremos concluir anotando lo siguiente:

1. Tal como hemos visto la medida de no-compacidad constituye una herramienta de gran utilidad para investigar si un conjunto acotado es relativamente compacto o no. Para el caso de una sucesión acotada $(x_n)_{n \geq 1}$ como se ha visto, si $\alpha \{x_n\} = 0 \iff (x_n)_{n \geq 1}$ admite sub-sucesión convergente, ha sido de gran utilidad.
2. La medida de no-compacidad constituye, aparte de las técnicas tradicionales: contractivas, compacta y monótono, una excelente herramienta en el estudio de punto fijo para operadores no necesariamente lineales.
3. Sobre los operadores λ_n -demicompactos introducidos en los capítulos 2 y 3, se plantean una serie de interrogantes para seguir investigando, por ejemplo:
 - a) ¿Bajo qué condiciones un operador λ_n -demicompacto es continuo?
 - b) El teorema de punto fijo de Sadovskii nos dice que todo operador condensado que reúna ciertas condiciones sobre su conjunto donde se define, admite punto fijo. Y por la proposición 3.1 todo operador condensado es λ_n -demicompacto. Natu-

ralmente uno se pregunta. ¿Bajo qué condiciones, aparte de la de ser condensado, un operador λ_n -demicompacto admite punto fijo?

APENDICE

1. Conjunto acotado:

Un conjunto A de un espacio métrico es acotado si,
 $\sup \{d(x, y) / x, y \in A\}$ es finito.

2. Espacio acotado:

Es un espacio métrico de diámetro finito.

3. Espacio compacto:

Es un espacio métrico en el que de toda sucesión de puntos p_1, p_2, \dots , puede extraerse una subsucesión convergente hacia algún punto p del espacio.

4. Espacio completo:

Un espacio métrico es completo si en él toda sucesión de Cauchy p_n es convergente. Existe, pues, en ese espacio un punto p tal que $\lim_n p_n = p$.

5. Espacio totalmente acotado:

Para todo ξ , ese espacio es la unión de un número finito de conjuntos de diámetro menor que ξ .

6. Cápsula convexa (pág. 11)

7. Clausura convexa (pág. 11)

8. Medida de no compacidad (pág. 1)

9. Medida de no compacidad bola (pág. 20)

10. Operadores con punto fijo (pág.40)
11. Operadores compactos (pág. 21)
12. Operadores α -k - Lipschitz (pág. 21)
13. Operadores condensados (pág 28)
14. Operadores demi-compactos (pág. 28)
15. Operadores λ_n - demicomactos (pág. 28)
16. Principio de operador contractivo (pág. 40)
17. Teorema de punto fijo de Brouwer (pág 48)
18. Teorema de punto fijo de Schauder (pág. 55)
19. Operador α - Lipschitz (pág. 62)
20. Operadora acotado (pág. 69)

BIBLIOGRAFIA

- Bartle, Robert G. Introducción al Análisis Matemático.
Editorial Limusa, México, 1980.
- Kuratowski, Kazimierz. Introducción a la Teoría de Conjuntos
y a la Topología. Traducción de Vidal, Rodríguez. Editor-
ial Vicens-Vives, España, 1966.
- Furi M. - Martelli, M. On the Minimal Displacement of Points
Under α -Lipschitz Maps in Normed Spaces. Bolletino
U.M.I (4)9 (1974), 791 - 799.
- Perez, Jesus Fortea. Introducción a los Procesos Diferencia-
les. Editorial Tecnos, Madrid, 1981.
- Nussbaum, Roger D. Degree Theory For Local Condensing Maps.
Journal of Mathematical Analysis and Applications 37,
741 - 766 (1972).
- Nussbaum, R. D. The Fixed Point Index and Asymptotic Fixed
point Theorems For k -set-Contractions, Bull. Amer. Math.
Soc. 75 (1969) 490 - 495.