SIBIUP
Biblioteca Int. Simón Bolívar
00256035

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

TEORÍA ELEMENTAL DE HOMOTOPÍA

POR:

KATTIA BELÉN FUENTES MORALES

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA

ASESOR

Dr. JOSUÉ ORTIZ GUTIERRÉZ

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2005

Aprobado por:

Josué [illegible] (Presidente)

Omar Oliveros (Miembro)

Enrique Williamson (Miembro)

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

25 de julio de 2005

Fecha

Maestría en Matemática

25 AGO 2005

DEDICATORIA

Después de haber vivido tantas experiencias académicas, en mi vida y como estudiante al finalizar otra etapa de esfuerzos, deseo dedicar con mucho cariño este trabajo:

a Dios Todopoderoso, quien con su misericordia, me permitió lograr este objetivo;

a mis padres, Eduardo y Lely, quienes me han animado a superarme constantemente;

a mis hermanos, Lelis, Lourdes y Emilio, por su motivación para que no desmayara en la culminación de mis estudios y al logro de un peldaño más.

KATTIA

AGRADECIMIENTO

Al Profesor Josué Ortiz, quien en todo momento, me orientó en la realización de este trabajo.

A todas las personas que de una manera u otra hicieron posible la culminación de esta tesis.

LA AUTORA

ÍNDICE GENERAL

	PÁGINA
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTO	iv
RESUMEN	viii
INTRODUCCIÓN	ix
CAPÍTULO I PRELIMINARES	
Espacios Topológicos	2
Subespacios Topológicos	3
Espacios Topológicos T_1 y T_2	3
Base y subbase de una topología	4
Funciones Continuas	7
Topología Producto	9
Topología Cociente	10
Espacios Conexos	11
Espacios Compactos	15
Invariante Topológico	16
Categorías y Funtores	19
CAPÍTULO II GRUPO FUNDAMENTAL	
Caminos	26
Espacios Conexos por caminos	27
Homotopía	31
Espacios Contractibles	35
Deformación Retracta	37
Grupo Fundamental	38
Grupo Fundamental del Círculo	49
Aplicaciones	57
CONCLUSIONES	61
RECOMENDACIONES	63
BIBLIOGRAFÍA	65

RESUMEN

Este trabajo es un estudio del grupo fundamental asociado a todo espacio topológico. Dicha construcción está basada en la teoría de homotopía concerniente a los caminos cerrados alrededor de un punto fijo. Las clases de equivalencia definidas por la relación de homotopía en el conjunto de los caminos cerrados alrededor de un punto fijo constituyen un grupo respecto a una ley de composición definida de manera conveniente, el cual es llamado "**grupo fundamental**" del espacio con relación al punto fijo. En el caso de los espacios conexos por caminos, este grupo es independiente del punto fijo inicial. A través de las nociones anteriores se obtiene una representación de los enteros (Z) como el grupo fundamental del círculo. Como resultados principales podemos decir que toda función continua definida entre espacios topológicos induce de manera natural un homomorfismo entre los grupos fundamentales asociados a los espacios. En particular, si los espacios son homeomorfos, dicho homomorfismo resulta ser un isomorfismo.

SUMMARY

In this work we study the fundamental group associated to a topological space. The construction of such groups is based upon the homotopy theory of closed paths around a fixed point. The homotopy equivalence classes of closed paths form a group, called the fundamental group of the space relative to the fixed initial point, the binary composition law is defined on the set of closed paths in such a way that two paths gives way to a new path whose graph is the graph of the first one continued by the graphs of the second. In the specific case of path connected spaces this group turns out to be independent of the initial fixed point. The notions previously studied allows us to get a representation of the group of integers as the fundamental group of the circle. As main results we can state that continuous maps among topological spaces induce homomorphirms between the fundamental groups associated to them. In particular, if the topological spaces we begin with are homeomorphic then the corresponding groups are isomorphic.

INTRODUCCIÓN

A través de los siglos el hombre ha podido desarrollar tan ampliamente la matemática que en la actualidad sus diversas ramificaciones están interconectadas con casi todas las áreas del conocimiento humano.

Durante la segunda mitad del siglo XIX se desarrolló la teoría de Topología Algebraica, percibiéndose que muchas propiedades de funciones permanecían invariables bajo deformaciones. Este problema fue atacado sistemáticamente por el matemático Henry Poincaré, quien encontró diferencias entre curvas deformables sobre otra y curvas cerradas en espacios grandes. La idea anterior condujo a introducir la **Teoría de Homotopía** como un ejemplo claro de Topología Algebraica. Teoría que deja a un lado el punto de vista conjuntista de la topología y mira a los espacios topológicos en términos de estructura algebraica; permitiendo así, determinar si dos espacios son homeomorfos o no. Para ello se asocian grupos a los espacios y a las funciones continuas homomorfismos de los grupos correspondiente a dichos espacios.

Hemos dividido el presente trabajo en dos capítulos que a continuación detallaremos.

En el primer capítulo, preliminares, damos un resumen de las definiciones, teoremas y proposiciones necesarios para desarrollar la Teoría de Homotopía en el segundo capítulo. Hablamos de espacios topológicos, base y subbase de una topología, funciones continuas, topología producto, topología cociente, espacios conexos, espacios compactos, invariantes topológicos, categorías y funtores.

En el segundo capítulo, desarrollamos la Teoría de Homotopía presentando las definiciones, teoremas y proposiciones del tema como lo son: caminos, espacios conexos por caminos, homotopía, espacios contractibles, deformación retracta. Finalmente exponemos el tema central "Grupo Fundamental" y el Grupo Fundamental del Círculo como caso particular y luego algunas aplicaciones.

Esperamos de antemano, que este pequeño aporte incentive tanto a profesores como a estudiantes de matemática a indagar más a fondo esta Teoría.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 1.1

Sea X un conjunto no vacío. Una familia τ de subconjuntos de X es una topología para X si y sólo si, τ verifica los axiomas siguientes:

a. X y ϕ pertenecen a τ.

b. La unión de cualquier subfamilia de τ pertenece a τ.

c. La intersección de cualquier subfamilia finita de τ pertenece a τ.

Los elementos de τ se llaman conjuntos τ-abiertos de X; y X conjuntamente con la clase τ, es decir, el par (X,τ) es un espacio topológico.

τ_∞ = P(X), la clase de todos los subconjuntos de X cumple con a, b, c, por lo cual P(X) es una topología para X. Entonces (X, τ_∞) es un espacio topológico, al cual llamaremos espacio topológico discreto.

Por otro lado, $\tau_\emptyset$ = $\{X,\phi\}$ es también una topología para X la cual es llamada topología trivial o topología indiscreta. Al espacio $(X,\tau_\emptyset)$ se le llama espacio topológico indiscreto.

Ejemplos

1. Si $X \neq \phi$, $a \in X$, entonces $\tau_a = \{ H \subseteq X / a \in H \} \cup \{\phi\}$ es una topología para X.

2. Si $X \neq \phi$, $A \subseteq X$, entonces $\tau_A = \{H \subseteq X / A \subseteq H\} \cup \{\phi\}$ es una topología para X.

3. Sean X un conjunto, no vacío, y $\tau_{Co} = \{A \subseteq X / A^c \text{ es finito}\} \cup \{\phi\}$. Es claro que (X,τ_{Co}) es un espacio topológico para X y τ_{Co} es llamada topología de los complementos finitos.

4. Sea $x_0 \in R$ y $\varepsilon > 0$, el símbolo $B_\varepsilon(x_0)$ denota al conjunto de número reales tales que $|x_0 - x| < \varepsilon$. $B_\varepsilon(x_0)$ recibe el nombre de bola abierta de centro x_0 y radio ε. Un subconjunto U de R es abierto si y sólo si, para cada x_0 de U, existe una bola $B_\varepsilon(x_0)$ totalmente contenida en U. La colección de todos los conjuntos abiertos de R constituye una topología, la cual es llamada topología usual de R, esta topología se denotará con el símbolo τ_{us}.

SUBESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 1.2

Sean (X,τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Consideremos el subconjunto τ_Y de $P(Y)$ definido por $\tau_Y = \{O \cap Y \,/\, O \in \tau\}$. Es fácil demostrar que (Y,τ_Y) es un espacio topológico. A la topología τ_y se le conoce como la topología inducida por τ sobre Y , y decimos que (Y,τ_Y) es un subespacio topológico de (X,τ).

Definición 1.3

Sean τ_1, τ_2 topologías definidas sobre un mismo conjunto no vacío X. Si todo subconjunto τ_1-abierto de X es un subconjunto τ_2-abierto se dice que τ_1 es menos fina que τ_2 o que τ_2 es más fina que τ_1 , lo cual se denota por $\tau_1 \leq \tau_2$ si y sólo si, $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Es claro que τ_0 es la menos fina de todas las topologías para X, y, también $\tau_\infty = P(X)$ es la más fina de todas. En general, si τ es cualquier topología para X, entonces: $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\infty$.

ESPACIOS TOPOLÓGICOS T_1 y T_2

Definición 1.4

Un espacio topológico (X,τ) se dice T_1, si y sólo si, todos los subconjuntos finitos de X son cerrados. Esto es equivalente a afirmar que todos los subconjuntos unitarios son cerrados.

Proposición 1.1

Un espacio topológico es T_1 si y sólo si, para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe un abierto O tal que $x \in O$ y $y \notin O$.

Demostración

Supongamos que (X,τ) es T_1 y sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $\{y\}$ es cerrado, tenemos que $\overline{\{y\}}$ $\{y\}$. Por lo tanto $x \notin \overline{\{y\}}$. Luego existe un abierto O que contiene a x tal que $O \cap \{y\}$ ϕ, es decir, $y \notin O$.

Recíprocamente, sea $y \in X$ y probemos que el conjunto unitario $\{y\}$ es cerrado. Sea $x \in X \setminus \{y\}$. Por lo supuesto, existe un abierto O_x tal que $x \in O_x$, $y \notin O_x$. Tomemos O $\bigcup_{x \in X / \{y\}} O_x$. Resulta claro que O $X \setminus \{y\}$ es abierto, entonces O^c $\{y\}$ es cerrado.

Definición 1.5

Un espacio topológico (X,τ) se dice T_2 (Separado o de Hausdorff), si y sólo si, dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos disjuntos O_x, O_y tales que $x \in O_x$, $y \in O_y$

Por la proposición anterior todo espaci o T_2 es T_1.

BASE Y SUBBASE DE UNA TOP OLOGÍA

Definición 1.6

Sean (X,τ) un espacio topológico. Una clase ß de subconjuntos abiertos de X, ß $\subset \tau$, es una base de la topología τ si y sólo si,

a. Todo conjunto abierto $H \in \tau$ es una unión de elementos de ß.

Equivalentemente, ß $\subset \tau$ es una base de τ si y sólo si,

b. Para cualquier punto p que pertenece a un conjunto abierto H, existe un elemento $B \in$ ß tal que $p \in B \subset H$.

Ejemplos

1. Los intervalos abiertos form an una base de la topología usual de la recta **R**.
2. Los discos abiertos forman una base de la topología usual del plano $\mathbf{R}^2$.

A continuación presentamos dos conceptos topológicos los cuales so n de vital importancia para el desarrollo del tra bajo:

1. Un espacio topológico (X,τ) es 2-contable si y sólo si, existe al men os una base contable para la topología τ.
2. Un espacio topológico (X,τ) es separable si X contiene un subconjunt o D el cual es denso y contable.

Teorema 1.1

Sea ß una clase de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces ß es base de alguna topología de X si y sólo si, posee estas propiedades:

a. X $\cup$ {B / B $\in$ ß}

b. Dados cualesquiera B, B* $\in$ ß, B $\cap$ B* es la unión de elementos de ß, o equivalente, si p $\in$ B $\cap$ B*, entonces existe B_p $\in$ ß tal que p $\in$ $B_p \subset$ B $\cap$ B*.

Ejemplo

1. Sea ß la clase de intervalos abiertos-cerrados de la recta **R**; ß ={(a, b] / a, b $\in$ R, a < b}. Entonces, ß es base para alguna topología de **R.**

Definición 1.7

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una clase δ de subconjuntos abiertos de X. $\delta \subset \tau$, es una subbase de la topología τ de X, si y sólo si, las intersecciones finitas de elementos de δ determinan una base de τ.

Ejemplo

La clase δ de todos los intervalos infinitos abiertos es una subbase de la topología usual de X.

Teorema 1.2

Dada una colección **D** de subconjuntos de X, tales que X $\cup\{D \,/\, D \in \mathbf{D}\}$, existe una única topología τ para la cual los elementos de **D** son abiertos y cualquier otra topología $\tau^{\bullet}$ que contenga a **D** es más fina que τ, esto es $\tau \subset \tau^{\bullet}$.

A **D** se le conoce como una subbase de τ.

Demostración

Sea **B** el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de **D**, es decir B $\in$ **B**, si y sólo si B $\bigcap_{i=1}^{n} D_i$ para $D_i \in$ **D**; **B** es una base de topología y **D** $\subset$ **B**.

τ es la topología generada por **B** denotada por $\tau\langle \mathbf{B} \rangle$. Un elemento U de τ es aquel que podemos expresar como una unión de intersecciones finitas. Si $\tau^{\bullet}$ es una topología para X tal que **D** $\subset \tau^{\bullet}$, es claro que todo elemento de τ también es elemento de $\tau^{\bullet}$ por la definición de topología.

FUNCIONES CONTINUAS

Definición 1.8

Sean (X,τ) y $(Y,\tau^{\bullet})$ espacios topológicos. Una función f de X en Y es continua con respecto a τ y $\tau^{\bullet}$, si y sólo si, la imagen recíproca $f^{-1}(H)$ de todo subconjunto $\tau^{\bullet}$-abierto H de Y es un subconjunto τ-abierto de X, esto es, f es continua si y sólo si, para todo $H \in \tau^{\bullet}, f^{-1}(H) \in \tau$.

Ejemplos

1. Los ejemplos más triviales de funciones continuas son la función identidad $I_X : X \to X$ y la función constante $X \to Y$ la cual envía cualquier punto de X a algún punto fijo en Y.

2. Si X es un espacio con la topología discreta, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua. Esto es claro, ya que la imagen inversa de cualquier subconjunto abierto de Y es abierto en X.

3. Si Y es un espacio con la topología indiscreta, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua.

Teorema 1.3

Sea X, Y y Z espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces la composición h $gf : X \to Z$ es continua.

Demostración

Sea U un subconjunto abierto de Z, entonces $g^{-1}(U)$ es un abierto en Y y $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es un abierto en X. Pero $(gf)^{-1}(U)$ $f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Definición 1.9

Dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos o topológicamente equivalentes si existe una función biyectiva $f: X \to Y$ tal que f y f^{-1} sean continuas. La función f recibe el nombre de homeomorfismo.

TOPOLOGÍA PRODUCTO

Definición 1.10

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y sea X el producto de los conjuntos X_i ($X = \Pi_I X_i$). La topología menos fina τ de X, respecto a la cual son continuas todas las proyecciones $\Pi_i : X \to X_i$, recibe el nombre de topología producto. El conjunto producto X con la topología producto τ , (X,τ), es el espacio topológico producto. En otras palabras, la topología producto τ del conjunto producto $X = \Pi_i X_i$ es la topología generada por las proyecciones.

Ejemplo

1. La topología usual de $\mathbf{R}^2$ es la topología generada por las proyecciones de $\mathbf{R}^2$ en **R.**

Proposición 1.2

Dados (X, τ) y $(Y,\tau^\bullet)$ espacios topológicos, el conjunto $\mathbf{B} = \{ U \text{ x } V / U \in \boldsymbol{\tau}, V \in \boldsymbol{\tau}^\bullet \}$ es base para una topología en $X \times Y$.

Demostración:

Sean B_1, B_2 en **B** con $B_1 \quad U_1 \times V_1$, $B_2 \quad U_2 \times V_2$.

Dado $(m, n) \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \quad (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$

Tal que $(m, n) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ con $B_3 \in \mathbf{B}$.

TOPOLOGÍA COCIENTE

Definición 1.11

Sea (X,τ) un espacio topológico y sea **P** una partición de X. Formamos un nuevo espacio Y, llamado espacio cociente, como sigue: los puntos de Y son los miembros de **P** y si $q : X \to Y$ es la función cociente, la topología para Y es la más grande para la cual q es continua, es decir, $U \subset Y$ es abierto, si y sólo si, $q^{-1}(U)$ es abierto en X. Esta topología se llama topología cociente.

Como cada partición **P** genera una relación de equivalencia R a Y también se le denota $Y \quad X / R$.

Teorema 1.4

Sea $Y = X / R$ un espacio cociente y $(Z,\tau^{\bullet})$ un espacio topológico. Una función $f : Y \to Z$ es continua si y sólo si, $f \circ q$ es continua para $q : X \to Y$.

Demostración

Si f es continua, $f \circ q$ también lo es. En sentido contrario, sea $f \circ q$ continua y sea $U \subset Z$ con $U \in \tau^{\bullet}$. Para ver que $f^{-1}(U)$ es un abierto de Y, debemos tener que $q^{-1}(f^{-1}(U))$ sea abierto de X, es decir, $(f \circ q)^{-1}(U)$ lo sea.

ESPACIOS CONEXOS

Definición 1.12

Dado un espacio topológico (X,τ), una separación para X, la constituye un par A, B de subconjuntos no vacíos, abiertos y tal es que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \phi$.

Ejemplo

Sea $X = (0,2) - \{1\}$ con la topología inducida τ_{us} sobre **R** y sean $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$ intervalos de la recta. Es claro que A y B es una separación para X, pues $A \cup B = X$ y $A \cap B = \phi$.

Definición 1.13

Un espacio topológico (X,τ) es conexo si y sólo si, no existe una separación para X.

Ejemplos

1. **R** con la topología usual es un espacio conexo.
2. Todo espacio no unitario con la topología discreta es no-conexo.

Teorema 1.5

Un espacio topológico (X,τ) es conexo si y sólo si, no existe una función $f: X \rightarrow \{0,1\}$ que sea continua y suryectiva, en donde $\{0,1\}$ está provisto de la topología discreta.

Demostración

Si X es conexo y existe $f : X \to \{0,1\}$ continua y suryectiva, entonces los conjuntos $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ forman una separación para X, lo cual implica una contradicción.

Por otro lado, si X es no conexo existe una separación A, B para X. Si definimos $f : X \to \{0,1\}$ como $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$, se tiene que f es continua y suryectiva lo cual contradice la hipótesis.

Proposición 1.3

Sea (X,τ) un espacio topológico y A, B una separación de X. Si C es un subespacio conexo de X, entonces $C \subset A$ o $C \subset B$.

Demostración

Si se diera simultáneamente que $A \cap C \neq \phi$ y $B \cap C \neq \phi$, entonces estos dos conjuntos formarían una separación para C.

Teorema 1.6

Sean (X, τ), (Y, τ^{*}) dos espacios topológicos con X conexo. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración

Si $f(X)$ es no conexo, existe $g : f(X) \to \{0,1\}$ continua y suryectiva. Por tanto $g \circ f$ es continua y suryectiva, lo cual es una contradicción ya que X es conexo.

Lema 1

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que el producto $f(0)f(1)$ es finito y no positivo, entonces existe un punto $t \in I$ tal que $f(t) = 0$.

Demostración

Supongamos que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in I$; en particular $f(0)f(1) < 0$. Sea $g : I \to \{\pm 1\} = S^0$ definida por $g(t) \quad \frac{f(t)}{(|f(t)|)}$. Es claro que g es continua y suryectiva.

Pero I es conexo mientras que S^0 no. Lo que contradice el hecho que la imagen continua de un espacio conexo es conexo.

Teorema 1.7

Si (X, τ), (Y, τ^{*}) son espacios topológicos conexos, entonces el espacio producto $X \times Y$ con la topología producto es conexo.

Demostración

Si $X \times Y$ no es conexo, existe $f : X \times Y \to \{0,1\}$ continua y suryectiva.

Sean $a \quad (a_1, a_2)$, $b \quad (b_1, b_2)$ tales que $f(a) = 0$, $f(b) \quad 1$.

Definamos $g : X \to \{0,1\}$, $h : Y \to \{0,1\}$, como $g(x) \quad f(x, b_2)$ y $h(y) = f(a_1, y)$. Luego g, h son continuas, lo son sus proyecciones, con lo cual $g(X)$ y $h(Y)$ son conjuntos unitarios. Por ser $g(b_1) = f(b_1, b_2) - 1$, además $g(a_1) \quad 1$. Por otra parte como $h(a_2)$

$f(a_1,a_2)$ 0 y $h(b_2) - 0$, de donde se obtiene $f(a_1,b_2) - g(a_1)$ $1 \neq 0$ $h(b_2)$ $f(a_1,b_2)$, lo cual contradice la definición de f como función. Así que X×Y es conexo.

Lema 2

Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{C_i\}, (i \in I)$ una familia de subconjuntos conexos de X, con la propiedad que existe un índice $j \in I$ tal que, para cada $i \in I$ tenemos que $C_i \cap C_j \neq \Phi$. Entonces C $\cup C_i$, $(i \in I)$ es conexo.

Demostración

Si A y B es una separación de C, entonces para cada C_i tenemos que $C_i \subset A$ **o** $C_i \subset B$. Si suponemos que $C_j \subset A$ entonces, para ningún índice i, C_i está contenido en B puesto que C_j no es disjunto de algún C_i. Así pues, todos los C_i estarían en A obligando a que B sea el conjunto vacío, lo cual contradice que A, B es una separación de C.

Teorema 1.8

Sea X $- \prod X_i$, $i \in I$ un espacio producto con la topología producto. Si cada espacio coordenado X_i es conexo, entonces X es conexo.

Demostración

Sea c (c_i), $(i \in I)$ un elemento arbitrario pero fijo de X. Sea C la unión de todos los conjuntos conexos en X que contienen al punto c. Como {c} es conexo, por el **lema 2** tenemos que C es conexo. Finalmente veamos que C es un subconjunto denso de X, con lo cual probamos que X es conexo por ser la adherencia de un conexo. Dado J⊂ I, J finito, el conjunto

$$A_J \quad \prod_{i\in J} X_i \times \prod_{i\notin J}\{c_i\}$$

es conexo ya que es homeomorfo a $\prod X_i$, $(i\in J)$ y contiene al punto c ; además A_J está contenido en c, para cada J finito. Así pues, dado un abierto básico cualquiera

$U = U_{i_1} \times \cdots U_{i_n} \times \prod_{i\neq i_k} X_i$ en este caso $J \quad \{i_1,...,i_n\}$ tenemos que A_J corta a U , esto es C corta a U, con lo cual C es denso.

ESPACIOS COMPACTOS

Definición 1.14

Dado un espacio topológico (X, τ) y A⊂X, decimos que una colección $\mathcal{U} \quad \{U_i\}$, $i\in I$ de abiertos (cerrados) de X, es un cubrimiento abierto (cerrado) de A, si y sólo si, A⊂∪ $\mathcal{U} \quad \cup U_i$, $i\in I$. Si existe $J\subset I$ tal que $\{U_j\}$, $j\in J$ es también cubrimiento de A, entonces a la familia $\{U_j\}$, $j\in J$ se le llama subcubrimiento de $\mathcal{U}$.

Ejemplo

1. Sea $A \quad [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $\{G_i\}_{i\in I}$ ∈una clase de conjuntos abiertos tales que $A\subset U_i G_i$. Entonces, es posible escoger un número finito de conjuntos abiertos, $G_{i_1},...,G_{i_m}$ de modo que $A\subset G_{i_1}\cup ...\cup G_{i_m}$.

Definición 1.15

Un espacio topológico X es compacto, si y sólo si, cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito. Si $A \subset X$, entonces A se dice compacto, si y sólo si, A como subespacio de X es compacto, esto es dada $\{V_i\}$ $i \in I$ una colección de subconjuntos abiertos tal que $A \subset U_{i \in I} V_i$, es decir, $A = \cup_{i \in I}(V_i \cap A)$ es una reunión de abiertos del subespacio; existe una subfamilia finita $V_{i_1},...,V_{i_k}$ tal que $A \subset \cup_{t=1}^{k} V_{i_k}$ con lo cual $A = \cup_{k=1}^{n}(V_{i_K} \cap A)$.

Ejemplo

1. ($\mathbf{R}$, τ_{Co}) es compacto, pues dado un cubrimiento abierto $\mathbf{U}$, si tomamos $U \in \mathbf{U}$, como U^c es finito necesitaremos adjuntarle a U tan solo finitos miembros de $\mathbf{U}$ para obtener un subcubrimiento abierto.

Teorema 1.9

Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \to Y$ suryectiva y continua. Si X es compacto, entonces Y es compacto.

Demostración

Sea U un cubrimiento abierto de Y. Entonces $f^{-1}(U) = \{f^{-1}(C)/C \in U\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(C_1),...,f^{-1}(C_n)\}$ de $f^{-1}(U)$ y por ser f suryectiva se tiene $f(f^{-1}(C_k)) = C_k$ para

$1 \leq k \leq n$, y así $Y \subset C_1 \cup \ldots \cup C_n$; luego U admite un subcubrimiento finito. Luego Y es compacto.

INVARIENTE TOPOLÓGICO

Definición 1.16

Una propiedad P del espacio (X, τ), se dice que es un invariante topológico si y sólo si, dados (Y,τ^*) y un homeomorfismo $h: (X,\tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$, entonces (Y, τ^*) también satisface a P. Los invariantes topológicos nos permiten saber cuándo dos espacios topológicos son topológicamente equivalentes.

Ejemplo

La propiedad de ser 2-contable es un invariante topológico. En efecto sean X, Y homeomorfos, donde X es 2 - contable; sean $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo y $B \ \{B_1,B_2,\ldots\}$ una base contable de X. Veamos que $h(B) \ \{h(B_1), h(B_2),\ldots\}$ es una base para la topología de Y. Sea V un abierto de Y y sea $y \in V$, entonces existe U tal que $h^{-1}(y) \in U$ y $h(U) \subset V$. Por ser B una base, existe B_i tal que $h^{-1}(y) \in B_i \subset U$. Luego $y \in h(Bi) \subset h(U) \subset V$.

Definición 1.17

Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo PPF si y sólo si, cada función continua $f : X \rightarrow X$ deja al menos un punto fijo, esto es, existe un $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 1.10

La propiedad del punto fijo PPF es una invariante topológico.

Demostración

Sean X, Y espacios topológicos homeomorfos, donde X tiene la propiedad de punto fijo; veamos que Y también satisface la propiedad de punto fijo. En efecto, sea $f : Y \to Y$ una función continua, entonces queremos encontrar un y $\in$ Y tal que $f(y) = y$. Sea $h : X \to$ Y un homeomorfismo. La función $h^{-1} \circ f \circ h$ es continua, y por lo tanto tiene un punto fijo como función de X en X, llamémoslo x; esto es $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$ con lo que $f(h(x))$ $h(x)$, y tomando $y = h(x)$ se obtiene el punto fijo para f.

Ejemplo

1. El intervalo unidad I $[0,1]$ con la topología de subespacio de los reales tiene la propiedad de punto fijo. En efecto, dada $f : I \to I$ una función continua, definimos una nueva función $g : [0,1] \to R$ como $g(x) = | f(x) - x |$; lo que g hace es medir la distancia entre (x, x) y $(x, f(x))$. Luego necesitamos ver que $g(x)$ es igual a cero para algún punto del intervalo unidad. Si $f(0)$ 0 , o, $f(1)$ 1 ya lo hemos encontrado. Si $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$ tenemos que $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$. Como g es continua, existe un punto x tal que $g(x) = 0$.

Teorema 1.11

La separabilidad es un invariante topológico.

Demostración

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre los espacios. Sea D $\subset$ X denso y contable. Veamos que $f(D)$ es también denso y contable en Y. En efecto, dado V abierto en Y, para $f^{-1}(V)$ existe $d \in D$ con $d \in f^{-1}(V)$ y así $f(d) \in V$.

CATEGORÍAS Y FUNTORES

Definición 1.18

Una categoría **C** es:

a.) Una colección no vacía cuyos elementos se llaman objetos, denotada por Ob (**C**).

b.) Una colección no vacía de conjuntos disyuntos y eventualmente vacíos $\{Mor_C(X,Y)\}$, X, Y $\in$ Ob (**C**). Los elementos del conjunto $Mor_C(X,Y)$ se denominan morfismos del objeto X en el objeto Y. Un elemento de $Mor_C(X,Y)$ se denota $f : X \to Y$. Además $Mor(C) = \bigcup_{X,Y \in Ob(C)} Mor(X,Y)$.

c.) Una operación entre morfismos llamada composición, tal que si X, Y, Z son objetos de **C**, $f \in Mor(X,Y)$ y $g \in Mor(Y,Z)$, entonces existe un único morfismo $g \circ f$ en $Mor(X,Z)$:

$$Mor(X,Y) \times Mor(Y,Z) \to Mor(X,Z)$$

$$(f,g) \to g \circ f$$

La operación $\circ$ cumple la propiedad asociativa y la existencia de un morfismo identidad.

Ejemplos

1. La categoría de conjuntos cuyos objetos son conjuntos, las funciones definidas entre ellos son los morfismos y la operación entre estos es la composición usual de funciones. De manera análoga podemos definir las categorías siguientes:
2. La categoría de espacios topológicos y funciones continuas.
3. La categoría de grupos y homomorfismos.
4. La categoría de grupos abelianos y homomorfismos.

Definición 1.19

Dadas dos categorías C, C′, se dice que C′ es una subcategoría de C, si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Todo objeto de C′ es también objeto de C, es decir, Ob(C′)⊆ Ob(C)

b. Dados X, Y Ob(C′), todo morfismo $f: X \to Y$ en C′ lo es en C, es decir, $Mor_{C'}(X,Y) \subseteq Mor_C(X,Y)$.

c. La composición de morfismos en C′ es la inducida por la composición de morfismos en C.

d. Para cada objeto X de C′ el morfismo identidad es el mismo identidad de la categoría C.

Definición 1.20

Un objeto I se dice inicial si para cada objeto X el conjunto $Mor(I,X)$ es unitario. Un objeto T se dice terminal si para cualquier otro objeto X el conjunto $Mor(X,T)$ es unitario. Un objeto que es simultáneamente inicial y terminal se denomina objeto cero, y se acostumbra a denotar por O.

Ejemplos

En la categoría de conjuntos, el conjunto vacío es el único objeto inicial, mientras que cualquier conjunto unitario es objeto terminal. Esta categoría no posee objeto cero.

Definición 1.21

El morfismo $f : X \to Y$ se llama morfismo cero a izquierda si $f \circ g = f \circ h$ para cualquier objeto Z y cualquier morfismo $g,h : Z \to X$. Se dice que f es un morfismo cero a la derecha si $g \circ f = h \circ f$ para cualquier Z y cualesquiera morfismos $g,h : Y \to Z$. Un morfismo que sea cero simultáneamente a izquierda y a derecha se llama morfismo cero.

Proposición 1.4

En una categoría con objeto cero O para cada par de objetos X,Y existe un único morfismo cero en $Mor(X,Y)$ denotado O_{XY}.

Demostración

Existencia. Si $f : X \to Y$ es un morfismo cero a la izquierda y $g : Y \to Z$ es un morfismo cero a derecha, entonces $g \circ f$ es un morfismo cero. En efecto, sean $h,k : Z \to W$ morfismos. Entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f = k \circ (g \circ f)$

con lo cual $g \circ f$ resulta ser un morfismo cero a la derecha. Por otro lado $(g \circ f) \circ h \quad g \circ (f \circ h) \quad g \circ (f \circ k) \quad (g \circ f) \circ k$, con lo cual $g \circ f$ res ulta ser un morfismo cero a la izquierda. Enton ces por la definición **1.21** resulta que la compuesta $O_{XY} : X \to O \to Y$ es un morfismo ce ro.

Unicidad. El morfismo encontrado O_{XY} es factorizable a través del objeto cer o

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{O} \arrow[dr, "\mathbf{y}"] & \\ \mathbf{X} \arrow[ur, "\mathbf{x}"] \arrow[rr] & & \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

O_{XY}

Puesto que x e y son únicos, entonce s basta probar que cualquier morfismo ce ro $X \xrightarrow{f} Y$ es factorizable a través de cero. Consi deramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{O} \arrow[dr, "\mathbf{y}"] & \\ \mathbf{X} \arrow[ur, "\mathbf{x}"] \arrow[rr, "\mathbf{f}"] & & \mathbf{Y} \end{tikzcd} \qquad i_Y \qquad Y$$

O_{YY}

Puesto que O_{YY} es morfismo cero se tiene que $* \, O_{YY} \circ f = O_{YY} \circ (y \circ x)$, tam bién , como f es morfismo cero, entonces $** \; O_{YY} \circ f = i_Y \circ f$.

De * y ** resulta $O_{YY} \circ (y \circ x) \; f$.

Pero $O_{YY} \circ y = i_Y \circ y$ por ser y es mor fismo cero a derecha. Así $y \circ x \quad f$.

Definición 1.22

Si C, C' son categorías, un funtor F: $C \to C'$ es una regla que asocia con todo objeto X de C un objeto FX de C' y con todo morfismo f: $X \to Y$ en C, un morfismo Ff: $FX \to FY$ en C', tal que: $F(fg) = (Ff)(Fg)$

$$FI_X \quad I_{FX}$$

Los funtores son esencialmente morfismos de categorías.

Definición 1.23

Sean *B, C* categorías. Un funtor covariante F: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ se define por:

i. Una función denotada también por F: $Ob(\boldsymbol{B}) \to Ob(\boldsymbol{C})$ que asigna a cada objeto B de ***B*** un objeto F(B) en ***C.***

ii. Para cada par de objetos A , B de ***B*** se define una función también denotada por F: $Mor_{\boldsymbol{B}}(A, B) \to Mor_{\boldsymbol{C}}(F(A), F(B))$

$$f \to F(f)$$

que cumple las siguientes condiciones:

iii. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

iv. $F(I_B) = I_{F(B)}$

Para cualquiera morfismos f, g de ***B*** compatibles para la composición y para cada objeto de B de ***B***.

Un funtor contravariante de ***B*** en *C* se define de forma análoga a lo anterior, pero cambiando (ii) y (iii) de la siguiente manera: F: $Mor_{\boldsymbol{B}}(A, B) \to Mor_C(F(B), F(A))$

$$f \to F(f)$$

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

Ejemplos

1. Si consideramos los grupos como categorías, los funtores son precisamente los homomorfismos.

2. Si se considera los conjuntos preordenados como categorías, los funtores son las funciones que conservan el orden.

3. El funtor conjunto potencia covariante P. Definimos un funtor P: $\wp \to \wp$ como sigue. Si S $\in \wp$, P(S)=2^S, la colección de subconjuntos de S. Si f: X $\to$ Y, P(f)= 2^f, donde $2^f(A) = f(A)$, A$\subseteq$X. De nuevo, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} X & \to & 2^X \\ f \downarrow & & \downarrow 2^f \\ Y & \to & 2^Y \end{array}$$

4. Funtor identidad $I_{\boldsymbol{B}}$ de una categoría $\boldsymbol{B}$ en sí misma tal que $I_{\boldsymbol{B}}$(B)= b, $I_{\boldsymbol{B}}$ (f) = f, para cualesquiera B $\in \boldsymbol{B}$ y $f \in$ Mor($\boldsymbol{B}$) .

CAPÍTULO II

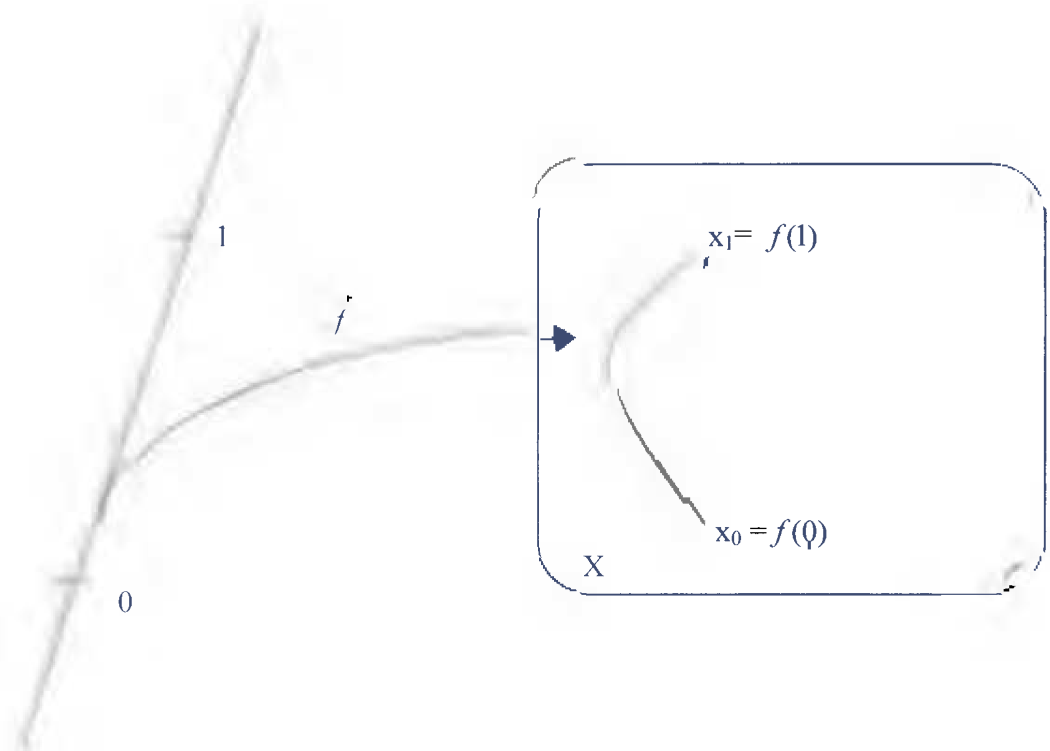
GRUPO HOMOTÓPICO FUNDAMENTAL

CAMINOS

Definición 2.1

Sea $I = [0,1]$, el intervalo cerrado unitario. Un camino de un punto x_0 a un punto x_1 en un espacio topológico X es una función continua $f : I \rightarrow X$. Tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$. El punto x_0 se denomina punto inicial del camino, y el punto x_1 se denomina punto terminal del camino. Si $x_0 = x_1$, diremos que f es un camino cerrado.

Gráficamente,



Ejemplos

1. Para cualquier $p \in X$, la función constante $e_p : I \to X$ definida por $e_p(s) = p$ es continua y, por consiguiente, es un camino. Este camino se le denomina camino constante en p.

2. Sea $h: [0,1] \to \mathbf{R}^2$ la función definida por $h(t) = (\cos 2\Pi t, \operatorname{sen} 2\Pi t)$ la cual es continua y, por consiguiente un camino. Este ejemplo lo podemos generalizar definiendo $h_n(t) = (\cos 2n\Pi t, \operatorname{sen} 2n\Pi t)$; $n \in N$, obteniéndose un camino cerrado de grado n, esto es, la gráfica nos muestra una trayectoria que recorre n veces el círculo unitario a partir del punto (1,0)

3. Sea $h: [0,1] \to \mathbf{R}^2$ la función definida por $h(t) = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

la cual es continua y por consiguiente, un camino. Las gráfica de la función descrita anteriormente nos muestra un camino abierto en $\mathbf{R}^2$. más precisamente, este camino es el segmento rectilíneo que une los puntos (1,2) y (4,5).

ESPACIOS CONEXOS POR CAMINOS

Definición 2.2

Un espacio topológico (X,τ) es conexo por caminos, si y sólo si, dados $x_0, x_1 \in X$, existe un camino f con punto inicial en x_0 y punto final en x_1, esto es, cada par de puntos en X pueden ser unidos por un camino.

Ejemplos

1. Cada ($\mathbf{R}^n$, usual) es conexo por caminos.

2. Cada esfera $\mathbf{S}^n$ es conexo por caminos.

Definición 2.3

Dado un espacio X, en el conjunto C ([0,1], X) de los caminos sobre X, si dos caminos f y g son tales que $f(1) = g(0)$, podemos definir otro camino $f * g$ por la regla :

$$f * g(t) \quad \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ \\ g(2t-1) & \text{si } \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Geométricamente podemos visualizar esta función como un camino de x_0 a x_2 que se obtiene cuando consideramos el camino f desde x_0 hasta x_1 seguido del camino g desde x_1 hasta x_2.

Si además, definimos $f^{\leftarrow}$ por $f^{\leftarrow}$ $f(1-t)$ vemos que $f^{\leftarrow}$ recorre el mismo camino de f, pero su dirección es contraria. Además $f^{\leftarrow} * f$ es un camino cerrado con punto inicial y terminal $f(0)=x_0$

Teorema 2.1

Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. X es conexo por caminos, si y sólo si, cada punto $y \in X$ puede ser unido por un camino con el punto x.

Demostración

La necesidad de la condición es obvia, ya que se da por definición. En el otro sentido, dados p, q $\in$ X, sabemos que existen caminos f, g que unen a p y q con x respectivamente. Entonces $f *$ g une p con q.

Teorema 2.2

La imagen de un espacio conexo por caminos bajo una función continua es conexo por caminos.

Demostración

Supongamos que X es conexo por caminos y $g: X \to Y$ es una función continua suryectiva. Sean a, b dos puntos de Y entonces existen a', b' en X con g (a') = a y g (b')= b. Como X es conexo por caminos existe un camino f de a' a b'. Entonces gf es un camino de a a b, lo cual prueba que Y es conexo por caminos.

Teorema 2.3

Supongamos que { Y_j, j $\in$ J} es una colección de subconjuntos conexos por caminos de un espacio X. Si $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \Phi$, entonces $Y \quad \bigcup_{j \in J} Y_j$ es conexo por caminos.

Demostración

Supongamos que $a,b \in Y$, entonces $a \in Y_k$ y $b \in Y_l$ para cualquier $k,l \in J$. Sea c algún punto de $\bigcap_{j \in J} Y_j$. Ya que Y_k es conexo por caminos y $a,c \in Y_k$, existe un camino $f : a \to c$. Similarmente hay un camino $g : c \to b$. Luego existe un camino $h : a \to b$ dado por $h = f * g$, definida

$$h(t) \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 2.4

Si (X, τ) es conexo por caminos, ento nces es conexo.

Demostración

Por el teorema 2.1 dado un punto x ∈ X, todo otro punto está en la compone nte conexa de x, ya que $f([0,1])$ es conexo para t odo camino *f*, así que la componente con exa de x es todo X, es decir, X es conexo.

Definición 2.4

Un espacio topológico (X, τ) es local mente conexo por caminos, si y sólo si, dado x ∈ X y un abierto U_x, existe un abierto V conexo por caminos tal que x ∈ V ⊂ U_x. (V considerado como subespacio de (X, τ)).

HOMOTOPÍA

Definición 2.5

Sean $f : I \to X$ y $g : I \to X$ dos caminos en un espacio X que tienen el mismo punto inicial $x_0 \in X$ y el mismo punto terminal $x_1 \in X$, es decir, $f(0) = g(0) = x_0$, $f(1) = g(1) = x_1$. Decimos que, f es homotópica a g con puntos extremos fijos, lo que se denota por $f \approx g$ rel (0,1), si existe una función continua $F : I \times I \to X$ tal que:

$F(s,0) = f(s)$ para todo s

$F(s,1) = g(s)$ para todo s

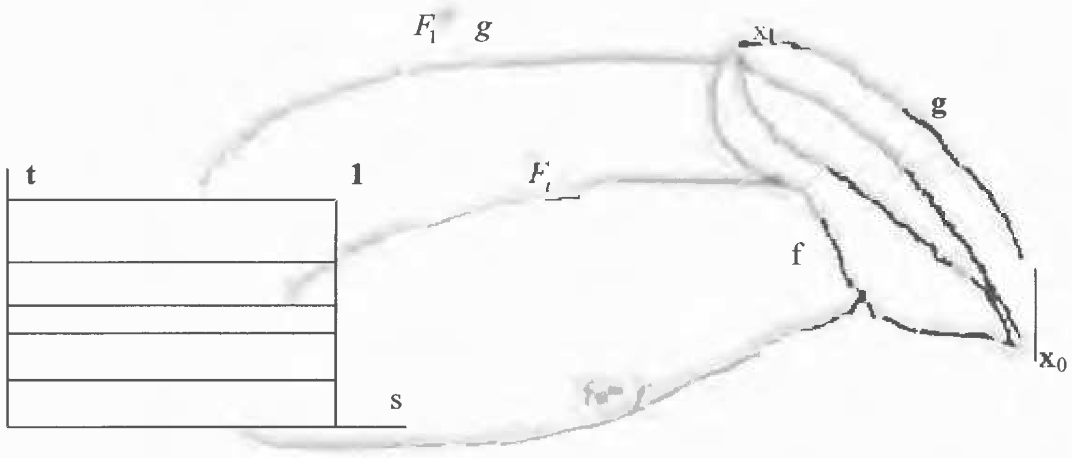
$F(0,t) = x_0$ para todo t

$F(1,t) = x_1$ para todo t

La función F es llamada homotopía de f a g. Para cada (s, t) el valor F (s, t) define un camino F_t de x_0 a x_1 dado por la regla $F_t : [0,1] \to X$

$$s \to F(s,t).$$ Además $F_0 = f$, $F_1 = g$.

Escribimos entonces $F_t : f \approx g$ rel (0,1)



En el diagrama anterior se ilustra com o la homotopía F transforma al camino f en el camino g.

Ejemplos

1. Si f es un camino cerrado en x_0; e s decir, $x_0 = x_1$, y si $f \approx$ g decimos que f puede ser movido a un punto.

2. Sobre una esfera S^2 todo par de caminos f, g cerrados en el punto $p \in S^2$ son homotópicos, pues nada impide que s e deslice g hasta llegar exactamente a la posición de f. Esto no sucede, si por ejemplo $X = R^2 - \{(0,0)\}$, ya que si g es un camino ce rrado en el punto $p \in X$ que envuelve a (0,0), y f es un camino cerrado que no lo hace, e ntonces los caminos no se pueden deslizar a menos de romper uno de ellos, es de cir no son homotópicos.

Definición 2.6

Como los caminos son funciones de I en X, se puede reemplazar I por cualquier espacio Y, y definir homotopía. Así, ya no ten emos más puntos finales pero se puede sustituir un subespacio $A \subset Y$ por el conjunto $\{0,1\}$.

Sean f y g funciones continuas de Y a X tal que $f/A = g/A$,

decimos $f \approx$ g rel A si existe una funci ón continua $F : Y \times I \to X$ que satisface:

F (y, 0) = f(y) para todo $y \in Y$.

F (y,1) = g(y) para todo $y \in Y$.

F (y, t) = f(y) = g(y) para todo $y \in A$ y $t \in I$.

En el caso de que A sea vacío, se escribe simplemente $f \approx g$.

La función F es llamada una homotopía entre f y g.

Ejemplos

1. Sea X Y R^n, sea f la identidad, g la función constante **O.** Entonces, $F(x, t) = t\,x$ define una homotopía de g a f.

2. En $\mathbf{R}^n$, define $f(x)$ x para todo x y $g(x)$ 0 para todo x. Entonces $f \approx g$, la homotopía esta dada por $F(x, t) = (1 \quad t)x$.

3. Sea X cualquier espacio, Y un subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$. Entonces, cualquier par de funciones f, $g : X \to Y$ son homotópicas, la homotopía esta dada por

$$F(x, t) = t \cdot g(x) + (1 - t) \cdot f(x).$$

Teorema 2.5

Sea $C_{x_0}(X)$ $\{f \,/\, f\colon I \to X$, f es continua con $f(0)$ $f(1)$ $x_0\}$. La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto $C_{x_0}(X)$.

Demostración

Si $f \in C_{x_0}(X)$, entonces $F\colon f \approx f$, donde F está definida por

$$F(s, t) = f(s) \text{ para todo } (s, t) \in I \times I.$$

Si $f, g \in C_{x_0}(X)$ y $F\colon f \approx g$, entonces $F'(s, t) = F(s, 1 - t)$

para todo $(s, t) \in I \times I$.

Si f, g, h $\in C_{x_0}$ (X) y $F_1 : f \approx g$ y además $F_2 : g \approx h$, entonces $F : f \approx h$, donde

$$F(s, t) \begin{cases} F_1 (s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq ½ \\ F_2 (s, 2t-1) & ½ \leq t \leq 1 \end{cases}$$

F es continua, F_1 coincide con F_2 en el punto t ½, y es una homotopía de f en h, donde el parámetro t se mueve el doble de velocidad.

Definición 2.7

Las clases de equivalencias en C_{x_0} (X) bajo la relación $\approx$ son llamadas clases de homotopía en C_{x_0} (X) y el conjunto de estas clases se denota como $\prod_1 (X, x_0) = C_{x_0}(X)/\approx$

Definición 2.8

Dadas $[f][g] \in \prod_1 (X, x_0)$, definimos $[f][g]$ $[f * g]$ donde $f * g$ es la operación de caminos definida anteriormente.

Teorema 2.6

La composición de homotopías entre funciones son homotopías.

Demostración

Sean f_1 y g_1 funciones homotópicas de X a Y y f_2 y g_2 son funciones homotópicas de Y a Z, decimos $F_1 : f_1 \approx g_1$ y $F_2 : f_2 \approx g_2$. Entonces $f_2 \circ F_1 : f_2 \circ f_1 \approx f_2 \circ g_1$. Por la propiedad transitiva de la relación de homotopía, definimos $F : X \times I \to Z$ por $F(x, t) \quad F_2(F_1(x, t))$. Entonces, F es una composición de funciones conti nuas, y así continua, y $F : f_2 \circ f_1 \approx g_2 \circ g_1$.

ESPACIOS CONTRACTIBLES

Definición 2.9

Un espacio es contractible, si y sólo si, la función identidad $i : X \to X$ es homotópica con alguna función constante $c(x) = x_0$, de X a un punto $x_0 \in X$.

Ejemplo

Cada subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ es c ontractible. En efecto: sea X un espacio topológico arbitrario y Y un subconjunto convex o de $\mathbf{R}^n$. Si consideramos dos funciones continuas f y g definidas de X en Y, ellas son h omotópicamente equivalentes y la hom otopía está dada por : $F(x, t) \quad t f(x) + (1 \quad t)\ i(x)$. En particular la identidad y cualqui er función constante son homotópicas.

Teorema 2.7

X es contractible, si y sólo si, para cualquier espacio T, cualquier par de funciones continuas $f, g : T \to X$ son homotópica s.

UNIVERSIDAD D
BIBLIOTE

Demostración

Tomando $T = X$ y f, g respectivamente la identidad y la función constante se obtiene claramante que $f \approx g$. Así X es contractible.

Por otro lado, supongamos que X es contractible, entonces por definición $i \approx c$ son homotópicas, donde c es una función constante de X a si misma.

Sean f, $g : T \rightarrow X$ cualquiera dos funciones continuas. Por el teorema **2.6** $f = i \circ f \approx c \circ f$ y $g = i \circ g \approx c \circ g$. Pero $c \circ f = c \circ g$, así $f \approx g$.

Definición 2.10

Dos espacios X y Y se dice que son homotópicamente equivalentes si existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \approx i_Y$ y $g \circ f \approx i_X$. Diremos que las funciones f y g son inversa homotópica entre si.

Teorema 2.8

X es contractible, si y sólo si, es homotópicamente equivalente a un espacio topológico unitario.

Demostración

Supongamos que X es contractible, entonces la identidad $i : X \rightarrow X$ es homotópica a la función constante $c(x)$ x_0. Sea Y $\{x_0\}$ y $j : Y \rightarrow X$ la función inclusión.

Entonces $c \circ j$ es la función identidad en Y y $j \circ c$ c es homotópica a la función identidad en X. Así, j es una equivalencia de homotopía de Y a X.

Por otro lado, supongamos $f : X \to Y$ una equivalencia de homotopía entre X y un punto espacio Y, y sea $g : Y \to X$ una homotopía inversa. Entonces $g \circ f$ es una función constante de X a X cual es homotópica a la identidad en X, así X es contractible.

DEFORMACIÓN RETRACTA

Definición 2.11

Un subconjunto A de X es un retracto de X, si y sólo si, existe una función continua $r : X \to A$, llamada retracción, tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$.

A una deformación retractiva de X, si y sólo si, existe una retracción $r : X \to A$ la cual es homotópica a la función identidad i en X. Si $H : r \approx i$ es llamada una deformación retracta.

Teorema 2.9

Si A es una deformación retracta de X, entonces A es homotópicamente equivalente de X.

Demostración

Sea $j : A \to X$ la inclusión y $r : X \to A$ una retracción. Entonces $j \circ r$ es homotópicamente equivalente a la identidad en X y $r \circ j$ es la identidad en A, entonces r es una homotopía entre X y A.

GRUPO FUNDAMENTAL

Dado un espacio (X,τ) y un punto $x_0 \in X$, el conjunto $C_{x_0}(X)$ de los caminos cerrados con base en el punto x_0 al particionarlo por la relación de equivalencia de homotopía, produce un conjunto $\prod_1(X, x_0)$ que al definirle la operación entre clases [f][g]=[f * g] obtenemos una operación interna, la c ual nos produce una estructura de grupo. Este grupo es llamado el grupo fundamental con base en el punto x_0, o, el primer grupo de homotopía de X con base en el punto x_0.

En general $\prod_1(X, x_0)$ depende de x_0. Sin embargo en el caso de un espacio conexo por caminos, podemos mostrar que la est ructura del grupo asociado es independi ente de x_0, esto es, se trata de grupos isomorfos. Por otra parte el grupo fundamental de un espacio, refleja en parte como es la conexidad en el espacio.

Proposición 2.1

Sean f, g, h caminos en $C_{x_0}(X)$. Enton ces se verifica ([f][g])[h] = [f]([g][h]).

Demostración

Veamos que (f * g) * h ≈ f * (g * h).

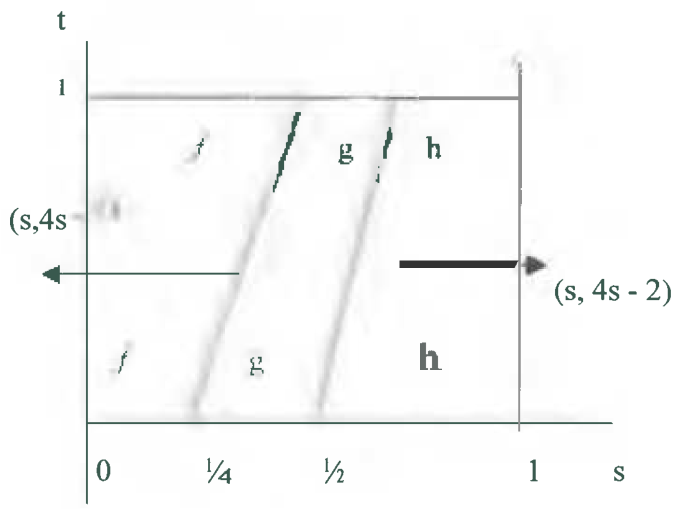
Recordemos que

$$((f * g) * h)(s) = \begin{cases} f(4s) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ g(4s \quad 1) & \text{si } \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ h(2s \quad 1) & \text{si } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$
(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}
$$

la homotopía debe entonces llevar a la función f desde el intervalo [0, ¼] hasta el intervalo [0,½] y así respectivamente, esto es, necesitamos hacer una reparametrización de tal manera que la homotopía F vien e dada por,

$$
F(s, t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{4s}{1+t}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 4s - 1 \\ g(4s - t - 1) & \text{si } 4s - 1 \leq t \leq 4s - 2 \\ h\left(\dfrac{4s - t - 2}{2 - t}\right) & 4s - 2 \leq t \leq 1 \end{cases}
$$



Claramente $F : I \times I \to X$ es continua y para $s \in [0,1]$ tenemos $F(s,0) = ((f * g) * h)(s)$, $F(s,1) = (f * (g * h))(s)$, además $F(0,t) = f(0) = x_0 = h(1) = F(1,t)$ para $t \in [0,1]$.

Proposición 2.2

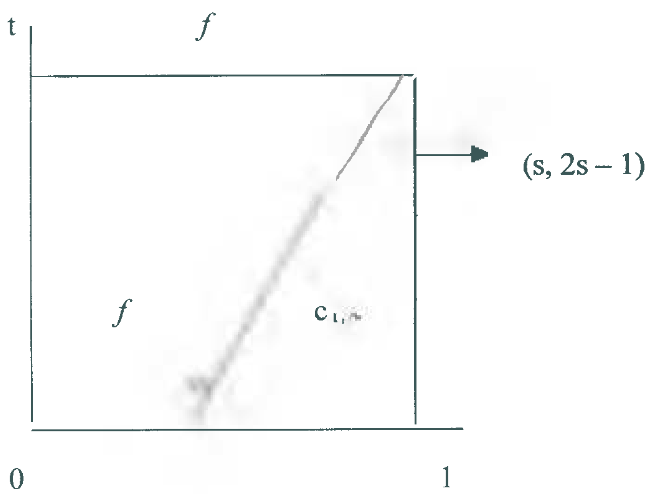
La clase $[c_{x_0}]$ es tal que para cada $f \in C_{x_0}(X)$ tenemos $(c_{x_0} * f) \approx f$ (lo mismo se tiene si se opera a derecha).

Demostración

Definimos la homotopía F como:

$$F(s,t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2s}{1+t}\right) & \text{si } t \geq 2s - 1 \\ x_0 & \text{si } 2s \quad 1 \geq 1 \end{cases}$$

Gráficamente



Claramente $F : I\times I \to X$ es continua y para $s \in [0,1]$ tenemos $F(s,0) = (f * c_{x_0})(s)$, $F(s,1) = f(s)$, además $F(0,t) = f(0) = x_0 = h(1) = F(1,t)$ para $t\in[0,1]$.

Debemos hacer que el efecto c_{x_0} sobre $[0, ½]$ se reduzca al efecto sobre el instante $\{0\}$, esto es, hacer que la función $c_{x_0} * f$ dure detenidamente cada vez menos en el punto x_0.

Proposición 2.3

Dada $[f] \in \prod_1(X,x_0)$, el camino $f^{\leftarrow}$ satisface $[f]\,[f^{\leftarrow}] = [c_{x_0}]$.

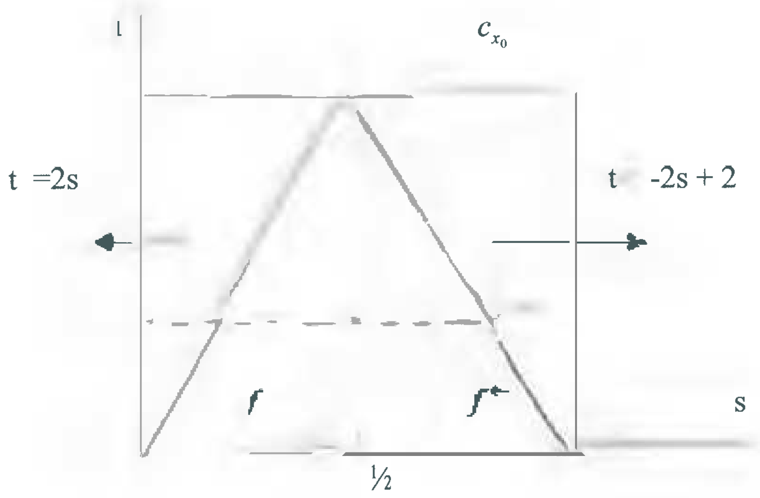
Demostración

Veamos que $f * f^{\leftarrow} \approx c_{x_0}$. Recordemos que

$$(f * f^{\leftarrow})(s) \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \le s \le ½ \\ f(2-2s) & \text{si } ½ < s \le 1 \end{cases}$$

Al observar el siguiente diagrama de deformación se ve que para definir la homotopía F, se debe hacer que en cada momento t, se detenga un poco más en el punto x_0.

$$F(s,t) \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \le s \le ½ \\ f(2s - t) & \text{si } \frac{t}{2} \le s \le 1 - \frac{t}{2} \\ f^{\leftarrow}(2s + t - 1) & \text{si } ½ \le s \le 1 - \frac{t}{2} \\ x_0 & \text{si } 1 - \frac{t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$



De las proposiciones 2.1, 2.2 y 2.3 podemos concluir que el conjunto $\prod_1(X,x_0)$ tiene una estructura de grupo . A este grupo se le conoce como el Grupo Fundamental.

Definición 2.12

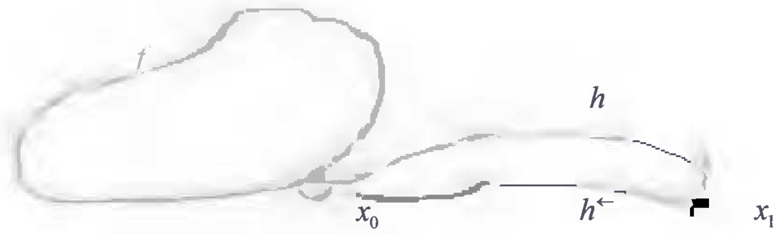
Cuando un espacio (X, τ) tiene como grupo fundamental el grupo trivial, dire mos que el espacio es simplemente conexo. Por ejemplos: los espacios $\mathbf{R}^n$ - {0} cuando n ≥ 3 y 0 es el origen y Cada esfera $\mathbf{S}^n$ cuando $n \geq 2$ son simplemente conexos.

Teorema 2.10

Si X es un espacio conexo por camino s, entonces para cualquier par de puntos x_0 , x_1 en X, $\prod_1(X,x_0)$ y $\prod_1(X,x_1)$ son isom orfos.

Demostración

Sea $h : I \to X$ un camino de x_0 a x_1, $h^{\leftarrow}$ el camino en dirección opuesta. Para cada camino cerrado f basado en x_0, definimos $a(f) = h^{\leftarrow} \circ f \circ h$ como el camin o cerrado basado en x_1 tal como se aprecia en el diagrama siguiente:



Esto induce una función A[f] $\lfloor h^{\leftarrow} * f * h \rfloor$ de $\prod_1(X, x_0)$ a $\prod_1(X, x_1)$. Mostraré que este es el isomorfismo deseado.

Primero, A es valuado sólo. Esto es $f \approx x_0 g$, entonces $h^{\leftarrow} * f * h \approx x_1 h^{\leftarrow} * g * h$. Por si $F : f \approx x_0 g$, entonces la función G es tá definida por:

$$G(x,t) = \begin{cases} h^{\leftarrow}(3x) & 0 \le x \le 1/3 \\ F(3x-1,t) & 1/3 \le x \le 2/3 \\ h(3x \quad 2) & 2/3 \le x \le 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre $h^{\leftarrow} * f * h$ y $h^{\leftarrow} * g * h$.

Segundo A es un homomorfismo, esto es

$A([f]*[g]) = A[f]*A[g]$. Pero

$$A[f]*A[g] = \lfloor h^{\leftarrow} * f * h \rfloor * \lfloor h^{\leftarrow} * g * h \rfloor$$

$$\lfloor h^{\leftarrow} * f * h * h^{\leftarrow} * g * h \rfloor$$

$$\lfloor h^{\leftarrow} * f * g * h \rfloor$$

$$A([f * g])$$

$$A([f]*[g])$$

Probemos que A es biyectiva. Sea $A^{\leftarrow}[f]$ $\lfloor h * f * h^{\leftarrow} \rfloor$ de $\prod_1(X,x_1)$ a $\prod_1(X,x_0)$.

Verifiquemos $A^{\leftarrow} A[f] = A^{\leftarrow}[h^{\leftarrow} * f * h]$

$$[h * h^{\leftarrow} * f * h * h^{\leftarrow}]$$

$$[f]$$

$$A\, A^{\leftarrow}[g] = A[h * g * h^{\leftarrow}]$$

$$[h^{\leftarrow} * h * g * h^{\leftarrow} * h]$$

$$[g]$$

Así A es biyectiva, por lo tanto A es un isomorfismo.

Definición 2.13

Un par (X, x_0) donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$ será llamado espacio topológico punteado (espacio con punto base). Una función continua $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ de un espacio topológico punteado es una función de X a Y tal que $f(x_0) = y_0$.

Definición 2.14

Sea $f : X \to Y$ es una función continua y x un punto de X. Podemos definir una función $f^{\#} : \prod_1(X,x) \to \prod_1(Y, f(x))$ por la regla $f^{\#}[g] = [f * g]$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua; los siguientes tres resultados son claros.

(i) Si g y h son caminos de X entonces $f * g, f * h$ son caminos en Y.

(ii) Si $g \approx h$ entonces $f * g \approx f * h$.

(iii) Si g es un camino cerrado en X con base en $x \in X$ entonces $f * g$ es un camino cerrado en Y con base en $f(x)$.

Corolario 2.1

Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{\#} : \prod_1(X,x) \to \prod_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo.

Así el grupo fundamental proporciona un medio para ir de topología al álgebra. Este proceso tiene las siguientes características:

(i) Para cada espacio topológico (con algún punto base) obtenemos un grupo (el grupo fundamental).

(ii) Para cada función continua entre espacios topológicos obtenemos un homomorfismo (el homomorfismo inducido) entre grupos.

(iii) La composición de funciones continuas induce la composición de homomorfismos inducidos.

(iv) La función identidad induce el homomorfismo inducido.

(v) Un homeomorfismo induce un isomorfismo.

Esto proporciona un buen ejemplo de la topología algebraica. Reemplazamos topología por álgebra y entonces usamos nuestros conocimientos de álgebra para aprender acerca de topología. Si los grupos fundamentales de dos espacios son isomorfos no significa que los espacios sean homeomorfos. Sin embargo, si los grupos fundamentales no son isomorfos entonces los espacios no pueden ser homeomorfos.

Basados en los puntos (i) hasta (v) podemos describir funtores. Así el grupo fundamental es un funtor de la categoría de espacios topológicos sobre la categoría de grupos.

Teorema 2.11

La función continua $f^{\#}: \prod_1(X,x_0) \to \prod_1(Y,y_0)$ inducida por la función continua $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración

Para cada camino g de x_0 en X, sea $f'(g)$ el camino y_0 en Y definido por $f'(g) = f[g(t)]$. Esto define una función f' de C_{x_0}(X) a C_{x_0}(Y) la cual en su momento induce una función $f^{\#}: \prod_1(X,x_0) \to \prod_1(Y,y_0)$ como sigue $f^{\#}([g]) = [f'(g)]$.

$f^{\#}$ está bien definida. Si H es una homotopía entre g_1 y g_2 es $\prod_1(X,x_0)$, entonces $f*H$ es una homotopía entre $f'(g_1)$ y $f'(g_2)$ en $\prod_1(Y,y_0)$. Para probar que $f^{\#}$ es un homomorfismo basta utilizar la propiedad algebraica para f', la cual es:

$$f^{'}(g*h) \quad \begin{cases} f[g(2x)]=f^{'}(g)(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f[h(2x \quad 1)]=f^{'}(h)(2x\text{-}1) & \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f^{'}(g)*f^{'}(h).$$

Teorema 2.12

a) Si f es la función idéntica de X, $f^{\#}$ es la idéntica en $\prod_1(X,x_0)$.

b) Si f y g son funciones continua s de (X,x_0) a (Y,y_0) tal que $f \approx g[x_0]$, entonces $f^{\#} \quad g$

c) Si $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ y $g:(Y,y_0) \to (Z,z_0)$, entonces $(g \circ f)^{\#} \quad g^{\#} \circ f^{\#}$.

d) Si $r:(X,x_0) \to (A,x_0)$ es una retracción y $i:(A,x_0) \to (X,x_0)$ es la función inclusión entonces $i^{\#}$es inyectiva y $r^{\#}$ es suryectiva.

Demostración

a) Es obvio.

b) Es suficiente probar que si h e s un camino cerrado basado en x_0 de X, entonces $f^{*}(h) \approx_{y_0} g^{*}(h)$. Pero, si f y g son homotópicas relativa en x_0, entonces $f \circ h$ y $g \circ h$ son homotópic as, esto es, $f^{*}(h)$ y $g^{*}(h)$ son homotó picas.

c) Si $h$es cualquier camino ce rrado basado en x_0 de X, entonces para $t \in I$

$$[(g \circ f)^{\#}(h)](t) = g \circ f(h(t)) \quad g[f(h(t))]$$

$$g^{\#}[f(h(t))]$$

$$g^{\#} \circ f^{\#}(h(t))$$

d) $r \circ i$ es la función idéntica de (A,x_0), así que $r^{\#} \circ i^{\#} = (r \circ i)^{\#}$ es la idéntica en $\prod_1(A,x_0)$.

Teorema 2.13

Si (X,x_0) y (Y,y_0) son homotópicamente equivalentes, entonces $\prod_1(X,x_0)$ y $\prod_1(Y,y_0)$ son isomorfos.

Demostración

Sean las funciones $f:(X,x_0) \rightarrow (Y,y_0)$ y $g:(Y,y_0) \rightarrow (X,x_0)$ tal que $f \circ g$ es homotópica a la identidad en Y y $g \circ f$ es homotópica a la identidad en X. Entonces por el teorema anterior, $g^{\#} \circ f^{\#}$ $(g \circ f)^{\#}$ es la idéntica en $\prod_1(Y,y_0)$ y $f^{\#} \circ g^{\#} = (f \circ g)^{\#}$ es la idéntica en $\prod_1(X,x_0)$. De allí f y $g^{\#}$ son homomorfismos, entonces son isomorfismos.

Teorema 2.14

Sean X, Y dos espacios topológicos conexos por caminos. El grupo fundamental del producto X × Y es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de X y Y respectivamente.

Demostración

Sean p: X × Y → X, q: X × Y → Y las funciones proyección. Definimos $\varphi : \prod_1 (X \times Y,(x_0,y_0)) \to \prod_1 (X,x_0) \times \prod_1 (Y,y_0)$ por $\varphi[f] = (p^{\#}[f], q^{\#}[f]) = ([pf],[qf])$.

Primero comprobemos que φ está bi en definida. Si $f \approx g$ entonces existe una función continua F: I × I → X × Y tal que F(t,0) = f(t), F(t,1)= g(t) y F(0,s) =F(1, s) = (x_0,y_0). La función continua pF : I × I → X y qF: I × I → Y satisface las equivalencia s $pf \approx pg$ y $qf \approx qg$ así que $\varphi[f] = \varphi[g]$ y φ está bien definida.

Probemos que $([f_1],[f_2])$ perte nece a $\prod_1 (X,x_0) \times \prod_1 (Y,y_0)$. Co nsideremos $f : I \to X \times Y$ dado por $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Es claro que $\varphi[f] = ([f_1],[f_2])$. Por lo tanto φ es suryectiva.

Supongamos que $\varphi[f] = \varphi[g]$. Esto significa que $pf \approx pg$ y $qf \approx qg$. Si F_1 : I × I →X y F_2: I × I → Y dan estas equival encias entonces F : I × I → X × Y , d efinida por F(t,s) = (F_1(t,s),F_2(t,s)) satisfacen la e quivalencia $f \approx g$. Así φ es inyectiva.

Finalmente φ es un homomorfismo puesto que si f, g, : I → X × Y son caminos con $f(1) = g(0)$ entonces $p(f * g) = pf * pg$ y $q(f * g) = qf * qg$.

GRUPO FUNDAMENTAL DEL CÍ RCULO

Veamos intuitivamente el grupo fun damental del círculo. Un camino cerra do f en S^1 basado en 1 ∈ S^1 , rodea un cierto nú mero de veces alrededor del círculo; este número es llamado el grado de f (comienza con $f(0)= 1$ y considera $f(t)$ cuando t incrementa; cada vez que giramos alrededor del círculo en sentido antihorario anotamos un puntaje +1, cada vez que giramos en sentido horario anotamos –1. El puntaje total es el número de vueltas o grado de f). Así, cada camino cerrado f basado en 1 es un entero. Para cada entero n, hay un camino cerrado de grado n.

Lema 1

Sea $e: R \to S^1$ definida por $e(t) = \exp(2\pi it)$. U cualquier conjunto abierto de $S^1 - \{1\}$ y sea $V = I \cap e^{-1}(U) \subseteq R$. Entonces $e^{-1}(U)$ es la unión disjunta de los abiertos $V+n = \{v+n; v \in V\}, n \in Z$, cada una de los cuales es llevado homeomórficamente sobre U por la aplicación e.

Demostración

Sea U un intervalo abierto, definido por $U = \{\exp(2\pi it); 0 \le a \prec t \prec b \le 1\}$ para algún a,b. Entonces $V = (a,b)$ y $V+n = (a+n,b+n)$. Es claro que $e^{-1}(U)$ es la unión disjunta de los conjuntos abiertos $V+n$ $(n \in Z)$. Sea e_n la restricción de e a $(a+n,b+n)$. Claramente e_n es continua y biyectiva. Para comprobar que e_n^{-1} es continua consideremos $(a+n,b+n)$ y sea $W \subset (a+n,b+n)$ un subconjunto cerrado, por lo tanto compacto.

Como W es compacto y S^1 es de Hausdorff, e_n induce un homeomorfismo $W \to e_n(W)$. En particular $e_n(W)$ es compacto y, por tanto cerrado. Esto prueba que si

W es un subconjunto cerrado, entonc es $e_n(W)$ es cerrado también; así e_n^{-1} es continua, entonces e_n es un homeomorfismo.

Corolario 2.2

Si $f: X \to S^1$ no es suryectiva, ento nces f es homotópicamente nula.

Demostración

Si $x \notin$ imagen (f) entonces $S^1 \quad \{x\}$ es homeomorfo con (0,1), el cual es c ontractible. ($x \quad \exp(2\pi is)$ para algún s y $S^1 \quad \{\exp(2\pi it); s \leq t \prec 1+s\}$.)

Definición 2.15

Supongamos que se tiene un diagrama de espacios topológicos y funciones continuas como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "P"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Si existe la función $f: Y \to$ E tal qu e $P \circ f = f$, diremos que *f es un levantamiento para f.*

Teorema 2.15

Cualquier función $f : I \to S^1$ tiene un levantamiento $\bar{f} : I \to R$. Además, $x_0 \in R$, con $e(x_0) = f(0)$ tiene un único leva ntamiento $\bar{f}$ con $\bar{f}(0) = x_0$.

Demostración

Para cada $x \in S^1$, sea U_x una vecind ad abierta de x tal que $e^{-1}(U_x)$ esla uni ón disjunta de subconjuntos abiertos de R cada uno de los cuales son funciones hom eomórficas sobre U_x por e. El conjunto $\{f^{-1}(U_x); x \in S^1\}$ puede ser expresado e n la forma $\{(x_j, y_j) \cap I; j \in J\}$ cada uno es una t apa de I. Por lo tanto, I es compact o y hay una subcubierta finita de la forma $[0, t_1 + \in_1), (t_2 - \in_2, t_2 + \in_2), \ldots, (t_n - \in_n, 1]$ con $t_i + \in_i \succ t_{i+1} \quad \in_{i+1}$ para i 1,2,...,n-1 . Ahora escojamos $a_i \in (t_{i+1} \quad \in_{i+1}, t_i + \in_i)$ para i 1,2,...,n-1 pero 0 $a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$ 1.

Obviamente $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S^1$, per o además $f([a_i, a_{i+1}])$ está conteni do en un subconjunto abierto S_i de S^1 tal que $e^{-1}(S_i)$ es la unión disjunta de su bconjuntos abiertos de R, las cuales son funciones homeomórficas sobre S_i por e.

Definiremos el levantamiento $\bar{f}_k$ indu ctivamente sobre $[0, a_k]$ para k 0,1,...,n tal que $\bar{f}(0)$ x_0. Para k 0 es trivial : $\bar{f}_0(0)$ x_0 , no hay elección.

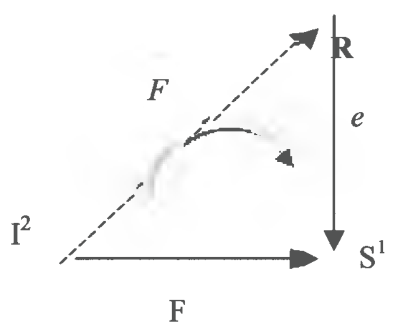
Supongamos que $\bar{f}_k : [0, a_k] \to R$ está definida y es única. Recordemos que $f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq S_k$ y que $e^{-1}(S_k)$ es la unión disjunta de $\{W_j ; j \in J\}$ con $e / W_j : W_j \to S_k$ es un homeomorfismo para cada $j \in J$. Ahora $f_k(a_k) \in W$ para algún miembro único W de $\{W_j ; j \in J\}$. Cualquier extensión $\bar{f}_{k+1}$ de $[a_k, a_{k+1}]$ en W desde $[a_k, a_{k+1}]$ es un camino conexo. Ya que la restricción $e / W : W \to S_k$ es un homeomorfismo existe una única función $\rho : [a_k, a_{k+1}] \to W$ tal que $e\rho = f / [a_k, a_{k+1}]$ en efecto $\rho \quad (e/(W)^{-1} f)$. Ahora definamos $\bar{f}_{k+1}$ por

$$\bar{f}_{k+1}(s) \begin{cases} \bar{f}_k(s) & 0 \le s \le a_k. \\ \rho(s) & a_k \le s \le a_{k+1}, \end{cases}$$

la cual es continua ya que $\bar{f}_k(a_k) = \rho\,(a_k)$ y es única por construcción.

Lema 2.2

Cualquier función continua $F : I^2 \to S^1$ tiene un levantamiento $\bar{F} : I^2 \to R$. Como se observa en la siguiente gráfica.



Además, si $x_0 \in R$ y $e(x_0) = F(0,0)$ se puede definir de manera única la función $\bar{F}$ con $\bar{F}(0,0) = x_0$.

Demostración

La prueba es similar al teorema anterior. Ya que I^2 es compacto encontramos

$$0 = a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n = 1,$$

$$0 = b_0 \prec b_1 \prec \ldots \prec b_m = 1,$$

tal que $F(R_{i,j}) \subset S^1$, donde $R_{i,j}$ es el rectángulo

$$R_{i,j} = \{(t,s) \in I^2; a_i \leq t \leq a_{i+1}, b_j \leq s \leq b_{j+1}\}$$

El levantamiento $\bar{F}$ es definido inductivamente sobre el rectángulo

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \ldots, R_{0,m}, R_{1,0}, R_{1,1}, \ldots$$

por un proceso similar que en el teorema anterior.

Corolario 2.3

Supongamos que f_0 y f_1 son caminos equivalentes en S^1 basado en 1. Si $\bar{f}_0$ y $\bar{f}_1$ son levantamientos con $\bar{f}_0(0) = \bar{f}_1(0)$, entonces $\bar{f}_0(1) = \bar{f}_1(1)$.

Demostración

Sea F la homotopía rel (0,1) entre f_0 y f_1. Este levantamiento es único de $\bar{F}: I^2 \to R$ con $\bar{F}(0,0) = \bar{f}_0(0)$ $\bar{f}_1(0)$. Como $F(t,0) = f_0(t)$ y $F(t,1) = f_1(t)$, tenemos $\bar{F}(t,0) = \bar{f}_0(t)$ y $\bar{F}(t,1) = \bar{f}_1(t)$. También, $\bar{F}(1,t)$ es un camino de $\bar{f}_0(1)$ a $\bar{f}_1(1)$ ya que $F(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$. Pero $\bar{F}(1,t) \in e^{-1}(f_0(1)) \cong Z$, lo cual significa que $\bar{F}(1,t)$ es constante y por lo tanto $\bar{f}_0(1) = \bar{f}_1(1)$.

Teorema 2.16

$\prod_1 (S^1,1) \simeq Z$

Demostración

Definamos $\varphi : \prod_1 (S^1,1) \to Z$ por $\varphi([f]) = \deg(f)$, el grado de f. Llamamos $\deg(f) = \bar{f}(1)$ donde $\bar{f}$ es el único levantamiento de f con $\bar{f}(0)$ 0. La función φ está bien definida por el corolario anterior. Probemos ahora que φ es un isomorfismo de grupo.

Primero probemos que φ es un homomorfismo. Sea $l_a(f)$ el levantamiento de f con principio en $a \in e^{-1}(f(0))$. Así, $l_0(f) = \bar{f}$ y $l_a(f)(t) = \bar{f}(t) + a$ para un camino en S^1 con principio en 1. Es claro que $l_a(f*g)=l_a(f)*l_b(g)$ donde $b=\bar{f}(1)+a$. Así si $[f]$, $[g]\in\prod_1(S^1,1)$, entonces

$$\varphi([f][g])=\varphi([f*g])=\overline{f*g}(1)$$

$$=l_0(f*g)(1)$$

$$=(l_0(f)*l_b(g))(1) \quad \text{donde } b=\bar{f}(1)$$

$$=l_b(g)(1)$$

$$=b+\bar{g}(1)$$

$$=\bar{f}(1)+\bar{g}(1)$$

$$=\varphi([f])+\varphi([g])$$

lo cual prueba que φ es un homomorfismo.

Probemos que φ es suryectiva. Para $n\in Z$ sea $g:I\to R$ definida por $g(t)=nt$; entonces $eg:I\to S^1$ es un camino cerrado con base en 1. Como g es un levantamiento de eg con $g(0)=0$ tenemos $\varphi([eg])=\deg(eg)=g(1)=n$.

Probemos que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi([f])=0$, es decir $\deg(f)=0$. Esto significa que el levantamiento $\bar{f}$ de f satisface $\bar{f}(0)=\bar{f}(1)=0$. Como R es contractible tenemos $\bar{f}\approx\in_0(rel(0,1))$; en otras palabras existe una función $F:I^2\to R$ con $F(0,t)=\bar{f}(t)$, $F(1,t)=0$ y $F(t,0)=F(t,1)=0$. Efectivamente $F(s,t)=(1-s)\bar{f}(t)$. Pero $eF:I^2\to S^1$ con

$eF(0,t) = f(t), eF(1,t) = 1, eF(t,0) = e\,F(t,1) = 1$ y $f \approx_{\in_1} (rel\{0,1\})$, es decir $[f] = 1 \in \prod_1 (S^1,1)$, probándose así que φ es inyectiva. Por lo tanto φ es un isomorfismo. También se puede verificar que los grupos fundamentales asociados a $\mathbf{R}^2 - \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3 - \{L\}$ donde L es una recta, son isomorfos a $\mathbf{Z}$. Dicha verificación sería motivo de continuación para otras investigaciones.

Observación

Un retracto no es necesariamente una deformación retracta. En efecto, los subconjuntos unitarios de cualquier espacio son retractos, pero ningún subespacio unitario de S^1 es una deformación retracta.

Corolario 2.4

El grupo fundamental del Toro es $Z \times Z$

APLICACIONES

Corolario 2.5

Todo polinomio complejo no constante tiene una raíz.

Demostración

Asumamos sin pérdida de generalidad es que nuestro polinomio tiene la forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k$$

con $k \geq 1$. Asumamos que p no tien e ceros. Sea la función $G : I \times [0,\infty] \to S^1 \subset C$ por

$$G(t,r) = \frac{p(r\exp(2\pi it)}{|p(r\exp(2\pi it)|} - \frac{p(r)}{|p(r)|}$$

para $0 \leq t \leq 1$ y $r \geq 0$. Es claro qu e G es continua . Sea $F : I^2 \to S^1$ definida por

$$F(t,s) - \begin{cases} G(t, s/(1-s)) & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \prec 1, \\ \exp(2\pi ikt) & 0 \leq t \leq 1, s = 1 \end{cases}$$

Pero al observar que

$\lim_{s\to 1} F(t,s) = \lim_{s\to 1} G(t, s/(1-s)) = \lim_{r\to\infty} G(t,r) - (\exp(2\pi it))^k$ vemos que F es c ontinua.

También F es una homotopía $rel(0,1)$ entre $f_0(t) = F(t,0)$ y $f_1(t) - F(t,1)$. Pero

$f_0(t) - 1$ y $f_1(t) = \exp(2\pi ikt)$, así q ue $\deg(f_0) - 0$ mientras $\deg(f_1) = k$, l o cual es una contradicción (excepto k − 0).

Corolario 2.6

Cualquier función continua $f : D^2 \to D^2$ tiene un punto fijo, es decir un p unto x tal que $f(x) = x$.

Demostración

Supongamos lo contrario que $x \neq f(x)$ para todo $x \in D^2$. Entonces podemos definir una función $\varphi : D^2 \to S^1$, donde $\varphi(x)$ es un punto de S^1 obtenido de la intersección del segmento de $f(x)$ en x extendida a S^1. Es claro que φ es continua. Sea $i : S^1 \to D^2$ denota la inclusión, entonces $\varphi i = 1$ y se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \\
& D^2 \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto lleva a otro diagrama conmutativo, por el teorema **2.11**

$$\begin{tikzcd}
\prod_1 (S^1,1) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i^*"'] & & \prod_1 (S^1,1) \\
& \prod_1 (D^2,1) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Pero $\prod_1 (D^2,1) = 0$, ya que D^2 es contractible, y se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr] \arrow[dr, "i^\#"'] & & Z \\
& 0 \arrow[ur, "\varphi^\#"'] &
\end{tikzcd}$$

lo cual es imposible.

Teorema 2.17

El círculo no es un retracto del disco unitario cerrado.

Esto significa que no hay una función f de E^2 sobre S^1 cuya restricción a S^1 es la identidad. Supongamos que tenemos tal f. Sea $i: S^1 \to E^2$ la función inclusión. Así, fi = identidad. Aplicando el funtor grupo fundamental obtenemos

$$\underbrace{\prod\nolimits_1(S^1,1)\xrightarrow{i^\#}\prod\nolimits_1(E^2,(0,1))\xrightarrow{f^\#}\prod\nolimits_1(S^1,1)}_{\text{identidad}}$$

Pero esto significa que en la secuencia siguiente $Z \longrightarrow 0 \longrightarrow Z$ la composición de los homomorfismos involucrados dan como resultado la identidad lo cual es imposible.

CONCLUSIONES

1. La topología algebraica presenta una correspondencia entre espacios topológicos y grupos algebraicos. Esta correspondencia permite deducir si dos espacios topológicos dados son homeomorfos o no estableciendo la existencia de isomorfismos entre los grupos algebraicos correspondientes. Por otro lado, toda función continua definida entre espacios topológicos induce de manera natural un homomorfismo entre los grupos asociados, la cual tiene propiedades muy particulares. En especial, todo homeomorfismo entre espacios topológicos induce un isomorfismo entre los grupos respectivos.

2. La correspondencia entre espacios topológicos y grupos algebraicos es un funtor definido entre las categorías de espacios topológicos y la categoría de grupos, el cual es de tipo covariante.

3. En general $\prod_1(X,p)$ depende de *p*. Sin embargo, en el caso de espacios conexos por caminos la estructura del grupo asociado es independiente de *p*, esto es, se trata de grupos isomorfos.

RECOMENDACIONES

Al terminar este trabajo deseo hacer las siguientes recomendaciones:

1. Continuar el estudio de los grupos de homotopía de orden n, siendo $n > 1$, asociados a cada espacio topológico.

2. Estudiar los problemas topológicos que se resuelven algebraicamente, esto es hacer una circursión en el ambiente de la Topología Algebraica.

3. Estudiar otras aplicaciones de la teoría de funtores y en particular del grupo fundamental.

BIBLIOGRAFÍA

Gray, B. (1975). **Homotopy Theory**. New York : Academic Press.

Greenberg, M. y Harper, J. (1981). **Algebraic Topology A First Course.** Unit es Stat America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hilton ,P. y Wu. ,Y (1977): **Curso de Álgebra Moderna.** España: Reverté, S. A.

Horvath, J. (1975). **Introducción ala Topología General.** Estados Unidos: Ev a V. Chesneau.

Klein, F. (1963). **On Riemann´s The ory of Algebraic Functions and Their Integrals**. Dover Publications.

Kosniowski, C. (1987). **A first C ourse in Algebraic Topology.** Gre at Britain: Cambridge University Press.

Lezama, O. y Villamarín, G. (1994). **Topología, Módulos y Anillos.** Santafé de Bogotá: Sección de publicaciones Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colom bia.

Massey, W. (1992). **Algebraic Topol o-gy.** New York: Harcourt, Brace and Wo rld.

Munkres, J. (1975). **A first course in Topology** . Prentice-Hall.

Rubiano, G. (1997). **Toplogía General** . Colombia: Sección de publicaciones Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Col ombia.

Poincaré, H. (1895). **Analysis situs**. P aris J de l`École Polytechnique.

Spanier, E. (1966). **Algebraic Topology.** McGraw-Hill.

Willard, S. (1970). **General Topology**. United States of America: Addison Wesley Publishing Company, Inc.

Wolfgang, F. (1968). **Topología Gene ral y Algebraica**. España. Selecciones Científicas.