



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS
SOBRE VARIETADES DE DIMENSION
DOS

por:

SILVERIO ANTONIO VERGARA BERNAL

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización
en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

TM

FEB. 22 1983

Aprobado por:

Director de Tesis: *Oscar Valdivia G.*
Oscar Valdivia G., Ph.D.

Miembro del Jurado: *Jorge Rojo*
Jorge Rojo, Ph.D.

Miembro del Jurado: *Rogelio Rosas*
Dr. Rogelio Rosas

Fecha: 20 de Octubre de 1982.

abs. del autor

191374

AGRADECIMIENTO

Deseo dejar constancia de mi agradecimiento por la colaboración sincera y desinteresada prestada por el Dr. Oscar Valdivia G.

DEDICATORIA

¿ Recordar? es algo que uno no puede apartar de su mente y eso quiero dejar presente en este trabajo.

La compañía de mi familia ha servido de fuerza moral para poder llevar a cabo mi trabajo.

Con todo cariño y amor que se merecen les dedico este trabajo a mi esposa Zenia A. de Vergara y a mis hijos Rizhski Neil Vergara A. y Herny Randol Vergara A.

PENSAMIENTO

"Se pueden distinguir tres clases de problemas matemáticos:

- (1) Los problemas cuya solución no exija otra cosa que la aplicación correcta de ciertos procedimientos rutinarios;
- (2) Los problemas cuya solución pida que se aplique inteligentemente determinados métodos más o menos corrientes, y
- (3) Los problemas para los cuales los métodos corrientes no proporcionan solución alguna.

Para los de clase 1 sopra toda heurística; con los de la clase 2, toda la necesaria se reduce al precepto de que se intenten aplicar de una manera inteligente los métodos disponibles, y los de la clase 3 se encuentran más allá de toda heurística".

E. W. BETH

INDICE

	Página
Introducción	I
Capítulo 1	
Campo de Vectores y flujos sobre variedades =	1
1. Integración de campos de vectores. . . .	1
2. Estudio General de Orbitas	36
3. Conjuntos Invariantes y Conjuntos Minimales	41
4. Conjuntos Limites	46
Capítulo 2	
Existencia de Órbitas periódicas sobre variedades de dimensión dos	51
1. Introducción	51
2. Flujos con un detractor libre	53
Capítulo 3	
Existencia de Órbitas periódicas sobre esferas y contra-ejemplos	69
Capítulo 4	
Existencia de Órbitas periódicas sobre varie- dades de dimensión dos	77
1. Conceptos Generales	77
2. Resultados preliminares	79
3. Existencia de Órbitas periódicas	88
Conclusiones	92
Problema Abierto	94
Bibliografía	95

INTRODUCCION

H. Poincaré en sus trabajos de mecánica celeste inició el estudio de las órbitas periódicas.

Robert J. Sacker y George R. Sell (1972) en su artículo sobre la existencia de soluciones periódicas sobre variedades de dimensión dos establecieron el teorema siguiente:

"Sea ϕ un flujo generado por un campo vectorial de clase C^1 sobre una esfera con h asas que tiene al menos detractor libre y que además verifica las condiciones

H1: No tiene singularidades atractoras

H2: No existen curvas cerradas que consisten completamente de sillas y órbitas de tránsito.

Entonces existe una órbita recurrente no trivial."

Posteriormente, Dean A. Neumann en 1978 generalizó el teorema de Sacker y Sell para un flujo continuo, utilizando las condiciones H1 y H2 y estableció la existencia de una órbita periódica no trivial.

En éste trabajo presentamos los resultados de Sacker, Sell y Neumann en una versión personal y autocontenida.

Para lograr el objetivo mencionado hemos estructurado el trabajo en cuatro capítulos.

En el capítulo 1 establecemos teoremas sobre la existencia de curvas integrales de un campo vectorial (Teo.1.10); flujos asociados a un campo vectorial (Teo.1.19); campos vectoriales completos (Teo.1.34); clasificación de órbitas

(Teo.1.40).

Continuamos éste capítulo con el estudio de las propiedades de los conjuntos invariantes y minimales; estableciendo los siguientes resultados:

"Todo conjunto invariante, compacto y no vacío contiene un conjunto minimal.(Teo.3.12)"

"Si una variedad es compacta y si todas las órbitas no singulares de un campo vectorial sobre ella son propias o localmente densas, entonces toda órbita propia contiene un punto singular o una órbita periódica en su adherencia.

(Corolario 3.13) .

Concluimos estudiando las propiedades de los conjuntos límites.

En el capítulo 2 demostramos el teorema de Sacker y Sell sobre la existencia de una órbita recurrente no trivial.

En el capítulo 3 estudiamos la existencia de órbitas periódicas sobre las esferas y presentamos algunos contra-ejemplos.

Uno de los resultados fundamentales es el siguiente:

"Sean l_1, \dots, l_k lazos sobre una esfera con h asas $\{^h$ tal que $\{^h - \bigcup_{i=1}^k l_i$ tiene una componente $\{^*$ que es una esfera con hoyos entonces, si se verifican las condiciones anteriores H1 y H2 sobre $\{^*$, existe una órbita periódica sobre $\{^*$ (Teo.1.5)".

Finalmente se construye ejemplos para mostrar que la con-

dición de detractor libre es esencial.

El el capítulo 4 se demuestra el teorema de Sacker, Sell y Neumann.

CAMPOS DE VECTORES Y FLUJOS SOBRE VARIEDADES

1. Integración de campos de vectores

Sea M una variedad diferenciable sin borde, de dimensión m y clase C^s , $2 \leq s < \infty$, y sea X un campo de vectores de clase C^r , $1 \leq r \leq s-1$, sobre M .

1.1 Definición: Una curva integral de X es una aplicación c de clase C^1 de un intervalo J de \mathbb{R} en M tal que $\forall t \in J$, $\dot{c}(t) = X(c(t))$ (fig. 1)

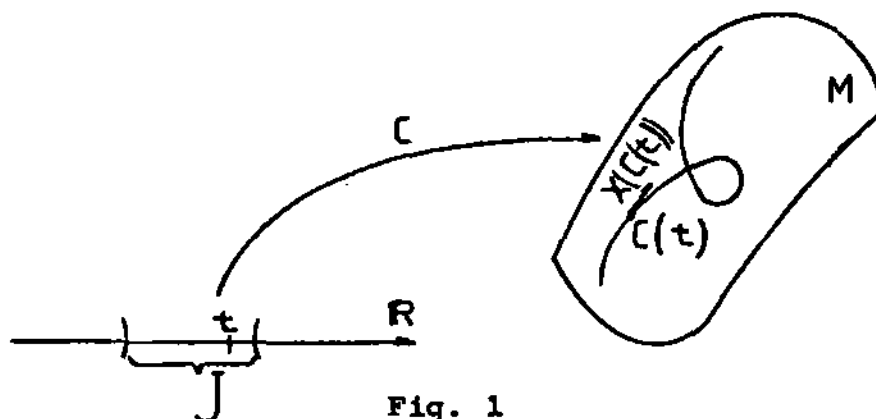


Fig. 1

1.2 Proposición: Sea $y \in M$ tal que $X(y) = 0$

la aplicación $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $c(t) = y$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es una curva integral de X .

Demostración.

En efecto, para toda f del conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ de funciones diferenciables locales de valor real

definidas en vecindades abiertas de y , tenemos

$$\begin{aligned}\dot{c}(t)(f) &= dc\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)f \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ c)_t \\ &= 0 \\ &= X(c(t))\end{aligned}$$

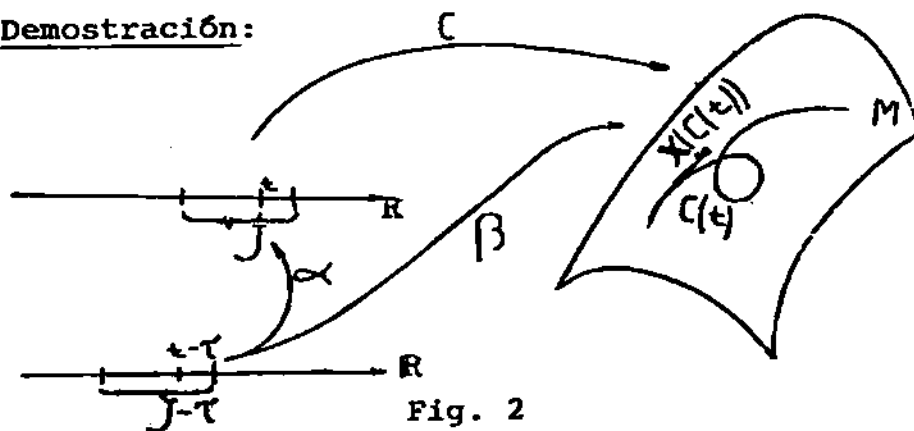
ya que $f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es constante; luego

$$\dot{c}(t) = X(c(t)) \quad \square$$

1.3 Definición: Diremos que un punto $y \in M$ es un punto singular de X si $X(y)=0$; un punto de M donde X no se anula se llama punto regular de X .

1.4 Proposición: Sea $c: J \rightarrow M$ una curva integral de X ; $\tau \in \mathbb{R}$, la aplicación $\beta: J-\tau \rightarrow M$ definida por $\beta(t) = c(t+\tau)$ es una curva integral de X . (fig.2)

Demostración:



En efecto, si $\alpha: J-\tau \rightarrow J$ está definida por $\alpha(t) = t + \tau$ entonces, $\beta = c \circ \alpha$ y

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t) &= (c \circ \alpha)'(t) \\ &= \dot{c}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ &= X(c(\alpha(t))) \\ &= X(\beta(t)) \quad \square\end{aligned}$$

1.5 Proposición: Sea $c: J \rightarrow M$ una curva integral de X ; la aplicación $\beta: -J \rightarrow M$, definida por $\beta(t) = c(-t)$, es una curva integral de $-X$. (fig.3)

Demostración:

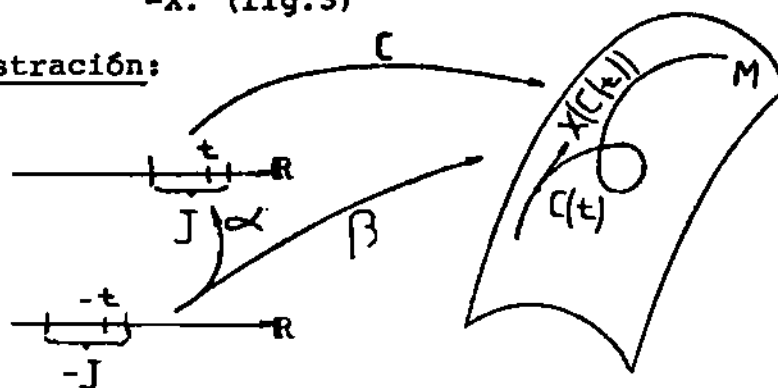


Fig. 3

En efecto, si $\alpha: -J \rightarrow J$ está definida por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -t \text{ entonces } \beta = c \circ \alpha \text{ y} \\ \dot{\beta}(t) &= (c \circ \alpha)'(t) \\ &= \dot{c}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ &= X(c(\alpha(t))) \cdot (-1) \\ &= (-X)(\beta(t)) \quad \square \end{aligned}$$

1.6 Proposición: Si $q: \tilde{M} \rightarrow M$ es revestimiento diferenciable de M , el fibrado tangente \tilde{TM} es isomorfo al fibrado q^*TM , imagen inversa por la proyección q del fibrado tangente TM , existe entonces un único campo de vectores \tilde{X} sobre \tilde{M} (teniendo la misma clase de diferenciabilidad que X) tal que $q^* \tilde{X} = X \circ q$.

En esas condiciones, si $\tilde{c}: \tilde{J} \rightarrow \tilde{M}$ es una curva integral de \tilde{X} , su proyección $c = q \circ \tilde{c}: \tilde{J} \rightarrow M$ es una curva integral de X .

Recíprocamente, toda curva integral de X es la proyección de una curva integral de \tilde{X} . (fig.4)

Demostración:

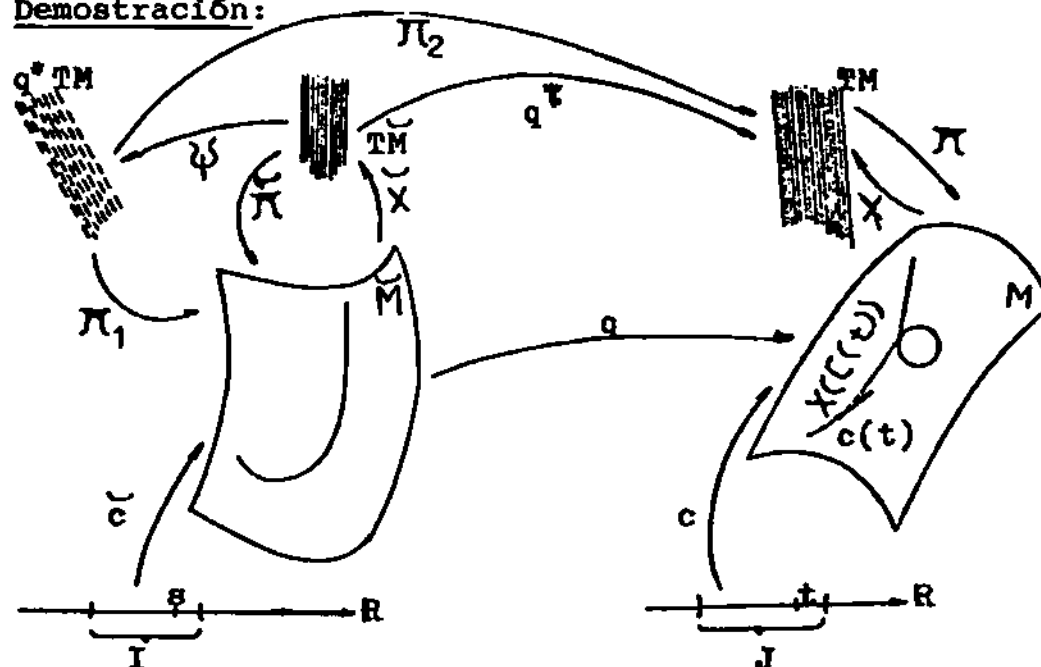


Fig. 4

En efecto; $q^*TM = \{ (x, v) \in \tilde{M} \times TM : q(x) = \pi(v) \}$
 sea $\psi: T\tilde{M} \rightarrow q^*TM$ definida por $\psi(\tilde{v}) = (\tilde{\pi}(\tilde{v}), q^T(\tilde{v}))$
 luego, (a) ψ está bien definida ya que $\tilde{\pi}$ y q^T son aplicaciones; (b) ψ es inyectiva

$$\begin{aligned} \text{sean } \tilde{v}, \tilde{w} \in T\tilde{M} \text{ tal que } \psi(\tilde{v}) &= \psi(\tilde{w}) \\ \psi(\tilde{v}) = \psi(\tilde{w}) &\implies (\tilde{\pi}(\tilde{v}), q^T(\tilde{v})) = (\tilde{\pi}(\tilde{w}), q^T(\tilde{w})) \\ &\implies \tilde{\pi}(\tilde{v}) = \tilde{\pi}(\tilde{w}) \text{ y } q^T(\tilde{v}) = q^T(\tilde{w}) \\ &\implies \tilde{v} = \tilde{w} \text{ ya que } q^T \text{ restringida a} \end{aligned}$$

cada fibra es un isomorfismo debido a que q es un

isomorfismo local.

(c) ψ es sobreyectiva

sea $(x, v) \in q^*TM$

$$(x, v) \in q^*TM \implies q(x) = \pi(v)$$

como q^T es isomorfismo sobre las fibras entonces

existe $\tilde{v} \in T_x \tilde{M}$ tal que $q^T(\tilde{v}) = v$ y $\psi(\tilde{v}) = (\pi(\tilde{v}), q^T(\tilde{v})) = (x, v)$.

luego q^*TM y $T\tilde{M}$ son isomorfos.

De otro lado, si $\tilde{X}: \tilde{M} \rightarrow T\tilde{M}$ está definido por

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{x}) &= \psi^{-1}(\tilde{x}, X(q(\tilde{x}))) \quad \text{tenemos} \\ (\pi_1 \circ \tilde{X})(\tilde{x}) &= \pi(\psi^{-1}(\tilde{x}, X(q(\tilde{x})))) \\ &= (\pi_1 \circ \psi)(\psi^{-1}(\tilde{x}, X(q(\tilde{x})))) \\ &= \pi_1(\tilde{x}, X(q(\tilde{x}))) \\ &= \tilde{x} \quad ; \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{M} \end{aligned}$$

puesto que $\pi = \pi_1 \circ \psi$, luego \tilde{X} es un campo de vectores sobre \tilde{M} .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} q^T \circ \tilde{X}(\tilde{x}) &= q^T(\psi^{-1}(\tilde{x}, X \circ q(\tilde{x}))) \\ &= (\pi_2 \circ \psi)(\psi^{-1}(\tilde{x}, X \circ q(\tilde{x}))) \\ (\text{como } q^T &= \pi_2 \circ \psi) &= X \circ q(\tilde{x}); \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{M} \end{aligned}$$

de donde $q^T \circ \tilde{X} = X \circ q$. Además, si $\tilde{c}: \tilde{J} \rightarrow \tilde{M}$ es una curva integral de \tilde{X} tenemos que

$$\begin{aligned} X(q \circ \tilde{c}(t)) &= (X \circ q)(\tilde{c}(t)) \\ &= q^T \circ \tilde{X}(\tilde{c}(t)) \\ &= q^T(\tilde{X}(\tilde{c}(t))) \\ &= q^T(\dot{\tilde{c}}(t)) \\ &= (q \circ \tilde{c})'(t) \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $c: J \rightarrow M$ es una curva integral de X tenemos:

Como (\tilde{M}, q) es un espacio de revestimiento de M , para todo $t \in J$, existen abiertos $U_t \subset M$, $\tilde{U}_t \subset \tilde{M}$ tales que $c(t) \in U_t$ y $q|_{\tilde{U}_t}: \tilde{U}_t \rightarrow U_t$ es un difeomorfismo; además si $U_t \cap U_{t'} \neq \emptyset$ entonces $\tilde{U}_t \cap \tilde{U}_{t'} \neq \emptyset$. Luego, si $\tilde{U} = \bigcup_{t \in J} \tilde{U}_t$ y $U = \bigcup_{t \in J} U_t$ tenemos que $c(J) \subset U$ y $q|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ es un difeomorfismo con $c = \nu_{\tilde{U}} \circ (q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ c$ además,

$$\begin{aligned} (q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ c(t) &= (q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ X(c(t)) \\ &= (q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ X(q|_{\tilde{U}} \circ (q|_{\tilde{U}})^{-1}(c(t))) \\ &= (q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ q^* X(q|_{\tilde{U}}(c(t))) \\ &= \tilde{X}(q|_{\tilde{U}}(c(t))) \\ &= \tilde{X}((q|_{\tilde{U}})^{-1} \circ c(t)) \end{aligned}$$

Por último, si $Y: \tilde{M} \rightarrow T\tilde{M}$ es un campo de vectores sobre \tilde{M} tal que $q^* Y = X \circ q$ entonces, para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tenemos

$$\begin{aligned} Y(\tilde{x}) &= (q^*_{T_{\tilde{x}}\tilde{M}})^{-1} (X \circ q(\tilde{x})) \\ &= (q^*_{T_{\tilde{x}}\tilde{M}})^{-1} (q^*_{T_{\tilde{x}}\tilde{M}} X)(\tilde{x}) \\ &= \tilde{X}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

de donde \tilde{X} es el único campo de vectores sobre \tilde{M} tal que $q^* Y = X \circ q$ \square

1.7 Proposición: Si Y es un campo de vectores sobre una variedad N , y h una aplicación diferenciable de M en N tal que $h^* Y = X \circ h$, la imagen por h de toda curva integral

de X es una curva integral de Y . (fig.5)

Demostración:

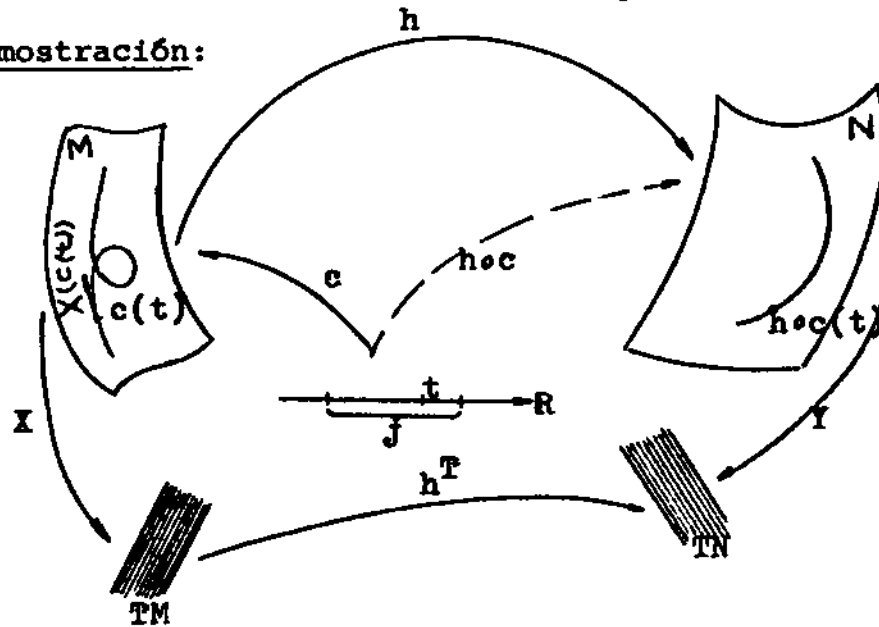


Fig. 5

En efecto, si $c: J \rightarrow M$ es una curva integral de X entonces

$$\begin{aligned} Y((h \circ c)(t)) &= (Y \circ h)(c(t)) \\ &= (h^T \circ X)(c(t)) \\ &= h^T(\dot{c}(t)) \\ &= (h \circ c)'(t) \end{aligned}$$

luego $h \circ c: J \rightarrow N$ es una curva integral de Y . \square

1.8 Corolario: Sea $(U, y = (y_1, \dots, y_m))$ un sistema de coordenadas locales de M . Si la expresión de X en U es $\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, las curvas integrales de X en U son las soluciones de la ecuación diferencial (autónoma)

$$\dot{y}_i = a_i y^{-1}; \quad i=1, \dots, m \quad (\text{fig.6})$$

Demostración:

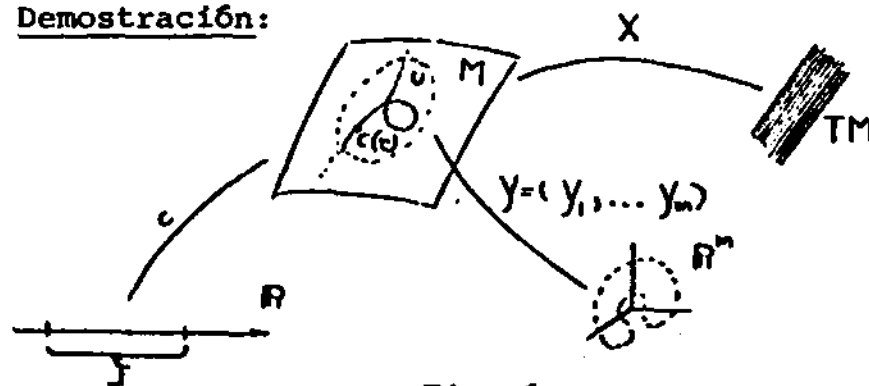


Fig. 6

En efecto; sea $c: J \rightarrow M$ una curva integral de X con $c(J) \subseteq U$

Como $\dot{c}(t) = dc\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) \in T_{c(t)}M$ existen

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{c}(t) = dc\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{c(t)}$ además, para todo $j=1, \dots, m$ tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial y_j}{\partial y_i}\Big|_{c(t)} \\ &= dc\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) \cdot (y_j) \\ &= \frac{d}{dr}(y_j \circ c)\Big|_t \end{aligned}$$

luego $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dr}(y_i \circ c)\Big|_t \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{c(t)}$ Por otra parte $\dot{c}(t) = X(c(t))$

$$\begin{aligned} &= (X|_U)(c(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)(c(t)) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i(c(t)) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{c(t)} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{dr}(y_i \circ c)\Big|_t = a_i(c(t)), \quad i=1, \dots, m$$

luego c es una curva integral de X si y sólo si

$$\frac{d}{dr}(y_i \circ c)\Big|_t = (a_i \circ y^{-1})(y(c(t))), \quad i=1, \dots, m \quad \square$$

1.9 Corolario: Si $N = M \times \mathbb{R}$, un campo de vectores γ sobre N de la forma $Z(y, s) + \frac{\partial}{\partial s}$, con $Z(y, s) \in T_y M$, corresponde localmente a una ecuación diferencial no autónoma.

$$\dot{y}_i = b_i(y_1, \dots, y_m, t), i=1, \dots, m$$

Demostración:

En efecto, si $c: J \rightarrow M \times \mathbb{R}$ es una curva integral de Y entonces

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= Y(c(t)) \\ &= Y((c_1(t), c_2(t))) \\ &= Z((c_1(t), c_2(t))) + \frac{\partial}{\partial s} |_{c_2(t)} \end{aligned}$$

como $Z((c_1(t), c_2(t))) \in T_{c_1(t)} M$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que $Z((c_1(t), c_2(t))) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_{c_1(t)}$ con $\lambda_i = \frac{d}{dt} (y_i \circ c)_t$

para todo $i=1, \dots, m$

$$\text{luego, } Z((c_1(t), c_2(t))) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} (y_i \circ c)_t \frac{\partial}{\partial x_i} |_{c_1(t)}$$

y por lo tanto

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} (y_i \circ c)_t \frac{\partial}{\partial x_i} |_{c_1(t)} + \frac{\partial}{\partial s} |_{c_2(t)}$$

de otro lado, si la expresión local de Y en U es

$$\sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{entonces, como } T_{c(t)} M \times \mathbb{R} = T_{c_1(t)}^M \times T_{c_2(t)}^{\mathbb{R}}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= Y(c(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) (c(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m b_i(c(t)) \frac{\partial}{\partial y_i} |_{c_1(t)} + b_{m+1}(c(t)) \frac{\partial}{\partial y_{m+1}} |_{c_2(t)} \right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y_1 \circ c)_t &= b_1(c(t)) , \quad i=1, \dots, m \\ &= b_1 \circ y^{-1}(y(c(t))) \quad \square \end{aligned}$$

El corolario 1.8 permite reformular los teoremas de existencia y unicidad de soluciones locales de una ecuación diferencial, y de su diferenciabilidad con relación a las condiciones iniciales.

1.10 Teorema: Para todo $y \in M$ y todo número real J existen (a) una vecindad U de y en M ,

(b) un número $\varepsilon > 0$

(c) una aplicación ϕ de clase C^1 de $]J-\varepsilon, J+\varepsilon[\times U$ en M teniendo las siguientes propiedades

(c-1) $\phi_x:]J-\varepsilon, J+\varepsilon[\rightarrow M$ definida por $\phi_x(t) = \phi(t, x)$ es una curva integral de X ;

(c-2) $\phi(J, x) = x$;

(c-3) si $c: J \rightarrow M$ es una curva integral de X definida sobre un intervalo conteniendo J y tal que $c(J) = x$, entonces $c(t) = \phi_x(t)$ en una vecindad de J

1.11 Corolario: Dos curvas integrales de X que tienen el mismo valor en un punto coinciden en una vecindad de ese punto.

Demostración.

Sean α, β dos curvas integrales de X con $\alpha(J) = \beta(J) = x$ entonces por c-3 de 1.10 $\alpha(t) = \phi_x(t)$

en una vecindad de τ y $\beta(t) = \phi_x(t)$ en una vecindad de τ luego $\alpha(t) = \beta(t)$ en una vecindad de τ . \square

1.12 Corolario: Si $U_i, \epsilon_i, \phi_i, i = 1, 2$ están dados como en 1.10 y si $\epsilon = \inf(\epsilon_1, \epsilon_2)$, $V = U_1 \cap U_2$ entonces $\phi_1 = \phi_2$ sobre $\] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [\times V$

Demostración.

En efecto, para cada $x \in V$ las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} y \circ \phi_{1x} :] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [& \longrightarrow & y(V) \\ y \circ \phi_{2x} :] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [& \longrightarrow & y(V) \end{array}$$

son soluciones de la ecuación diferencial $\dot{y} = a \circ y^{-1}$ (por 1.8) con $y \circ \phi_{1x}(\tau) = y \circ \phi_{2x}(\tau)$, de donde $y \circ \phi_{1x} = y \circ \phi_{2x}$ sobre $\] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [$ y como $y: V \rightarrow y(V)$ es difeomorfismo entonces $\phi_{1x} = \phi_{2x}$ sobre $\] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [$ luego $\phi_1 = \phi_2$ sobre $\] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon [\times V$. \square

1.13 Corolario: Existen

- (a) una vecindad abierta W de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$
- (b) una aplicación ϕ de clase C^k de W en M teniendo para todo punto y de M las siguientes propiedades

- (b-1) $\mathbb{R} \times \{y\} \cap W$ es conexo;
- (b-2) $\phi_y: t \rightarrow \phi(t, y)$ es una curva integral de X ;
- (b-3) $\phi(0, y) = y$
- (b-4) si $(t', y), (t+t', y), (t, \phi(t', y))$ están en W

entonces, $\phi(t+t', y) = \phi(t, \phi(t', y))$

Demostración.

En efecto, para todo $y \in M$ existen $\epsilon_y > 0$, U_y vecindad abierta conexa de y en M y una aplicación $\phi_y:]-\epsilon_y, \epsilon_y[\times U_y \longrightarrow M$ satisfaciendo las propiedades c-1, c-2, c-3 de 1.10

Sea $W = \bigcup_{y \in M}]-\epsilon_y, \epsilon_y[\times U_y$ y $\phi: W \longrightarrow M$ definida por $\phi(t, y) = \phi_y(t)$; $(\phi_y:]-\epsilon_y, \epsilon_y[\longrightarrow M)$; luego por 1.12 ϕ está bien definida y satisface b-2, b-3.

De otro lado,

$$(R^x \{y\}) \cap W = \bigcup_{x \in M} [(R^x \{y\}) \cap (]-\epsilon_x, \epsilon_x[\times U_x)]$$

como para todo $x \in M$, $(R^x \{y\}) \cap (]-\epsilon_x, \epsilon_x[\times U_x)$

es conexo y $(R^x \{y\}) \cap (]-\epsilon_x, \epsilon_x[\times U_x) = \emptyset$

ó $(0, y) \in (R^x \{y\}) \cap (]-\epsilon_x, \epsilon_x[\times U_x)$

entonces $(R^x \{y\}) \cap W$ es conexo.

Por otra parte, la aplicación $\phi_{y, t'}: t \longrightarrow \phi(t+t', y)$

es una curva integral de X (por 1.4) y como

$$\phi_{y, t'}(0) = \phi(0, \phi(t', y))$$

es una curva integral de X con

$$\phi_{y, t'}(0) = \phi(0, \phi(t', y))$$

$$= \phi(t', y)$$

$$= \phi(0+t', y)$$

$$= \phi_{y, t'}(0)$$

entonces $\phi(\phi(t', y)) = \phi_{y, t'}$ es decir; $\phi(t, \phi(t', y)) = \phi(t+t', y)$ \square

1.14 Corolario: Si $W_1, \phi_1, i=1, 2$ están dados como en el corolario 1.13 entonces $\phi_1 = \phi_2$ sobre $W_1 \cap W_2$

Demostración.

Si $(t, x) \in W_1 \cap W_2$, como $(0, x) \in W_1 \cap W_2$

y $\phi_{1, \phi_2}(t, x): s \longrightarrow \phi_1(s, \phi_2(t, x))$,

$\phi_{2, \phi_2}(t, x): s \longrightarrow \phi_2(s, \phi_2(t, x))$ son curvas integrales de X con

$$\phi_{1, \phi_2}(t, x)(0) = \phi_1(0, \phi_2(t, x)) =$$

$\phi_2(t, x) = \phi_2(0, \phi_2(t, x)) = \phi_{2, \phi_2}(t, x)$ tenemos

$\phi_{1, \phi_2}(t, x) = \phi_{2, \phi_2}(t, x)$ en la intersección de sus dominios y

$$\begin{aligned} \phi_1(t, x) &= \phi_1(t+0, x) \\ &= \phi_1(t, \phi_1(0, x)) \\ &= \phi_1(t, \phi_2(0, x)) \\ &= \phi_2(t, \phi_2(0, x)) \\ &= \phi_2(t, x) \end{aligned}$$

es decir $\phi_1 = \phi_2$ sobre $W_1 \cap W_2$ \square

1.15 Teorema.

Con estas notaciones, si V es un abierto de M tal que $\{t\} \times V$ y $\{-t\} \times \phi(\{t\} \times V)$ están contenidos en W , entonces $\phi(\{t\} \times V) = \phi_t(V)$ es un abierto de M , y la aplicación $\phi_t: x \longrightarrow \phi(t, x)$ es un difeomorfismo de V sobre ese abierto teniendo por inversa la aplicación $\phi_{-t}: z \longrightarrow \phi(-t, z)$

luego ϕ_t, ϕ_{-t} son aplicaciones inversas y por ser diferenciables ϕ_t es un difeomorfismo, además como V es abierto $\phi_t(V)$ es abierto. \square

1.16 Corolario. Si $\{t'\} \times V$ y $\{t + t'\} \times V$ están contenidos en W entonces, $\phi_{t+t'} = \phi_t \circ \phi_{t'}$ sobre V .

Demostración.

En efecto,

$$\begin{aligned} \forall x \in V, \phi_{t+t'}(x) &= \phi(t+t', x) \\ &= \phi(t, \phi(t', x)) \\ &= \phi_t(\phi(t', x)) \\ &= \phi_t \circ \phi_{t'}(x) \quad \square \end{aligned}$$

Estos corolarios justifican la siguiente definición

1.17 Definición. Un grupo local a un parámetro de difeomorfismos de clase C^r de M es un par (W, ϕ) , donde W es una vecindad abierta de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$ y ϕ una aplicación de clase C^r de W en M , teniendo para todo punto y de M las propiedades siguientes:

(a) $\mathbb{R} \times \{y\} \cap W$ es conexo;

(b) $\phi(0, y) = y$

(c) si $(t', y), (t + t', y), (t, \phi(t', y))$ están en W entonces, $\phi(t + t', y) = \phi(t, \phi(t', y))$.

Si $W = \mathbb{R} \times M$ diremos que ϕ es un grupo (global) a un parámetro de difeomorfismos de M . En es-

te caso, la aplicación $\phi_t : M \rightarrow M$ tal que $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, es para todo $t \in \mathbb{R}$ un difeomorfismo de M y tenemos

$$(a) \quad \phi_0 = \text{Identidad}$$

$$(b) \quad \phi_{t+t'} = \phi_t \circ \phi_{t'}$$

$$(c) \quad (\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$$

Diremos también que ϕ es una acción diferenciable de \mathbb{R} sobre M .

Designaremos también un tal grupo a un parámetro por $(\phi)_{\mathbb{R}}$

1.18 Observación. Un campo de vectores X sobre M permite construir un grupo local a un parámetro (W, ϕ) de difeomorfismos de M (teniendo la misma clase de diferenciabilidad que X) tal que, para cada punto y de M la curva $\phi_y : t \rightarrow \phi(t, y)$ es una curva integral de X ; en este caso diremos que (W, ϕ) es un grupo local a un parámetro determinado por X .

1.19 Proposición. Si (W, ϕ) es un grupo local a un parámetro de difeomorfismos de clase C^r de M , existe un único campo de vectores X de clase C^{r-1} sobre M que lo determina.

Demostración.

Como ϕ es una aplicación de clase C^r entonces

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$ existe y es una aplicación de clase C^{r-1} ;

sea $X : M \rightarrow TM$ la aplicación definida por $X(y) =$

$\frac{\partial \phi}{\partial t} (0, y)$, entonces X es diferenciable de

clase C^{r-1} y $\dot{\phi}_y(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, y)$ luego X determina a (W, ϕ) .

Por otro lado, supongamos que $Z: M \rightarrow TM$ es un campo que determina (W, ϕ)

$$\begin{aligned} \forall y \in M, \quad Z(y) &= Z(\dot{\phi}_y(0)) \\ &= \dot{\phi}_y(0) \\ &= X(\dot{\phi}_y(0)) \\ &= X(y) \end{aligned}$$

luego X es único. \square

1.20 Definición. Sea X un campo de vectores de clase C^r sobre M y \mathcal{A} el conjunto de todos los grupos locales a un parámetro determinado por X . Se define una relación de orden sobre \mathcal{A} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{sean } (W_1, \phi_1), (W_2, \phi_2) \in \mathcal{A} \\ (W_1, \phi_1) \subseteq (W_2, \phi_2) \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \text{ y } \phi_1 = \phi_2|_{W_1} \end{aligned}$$

1.21 Teorema. El conjunto \mathcal{A} de todos los grupos locales a un parámetro determinado por el campo de vectores X , ordenados por inclusión, posee un elemento maximal y sólo uno.

Demostración.

En efecto; sea $\{(W_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ una cadena en \mathcal{A} , sean $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ y $\phi: W \rightarrow M$ dada por $\phi(t, x) = \phi_i(t, x)$ si $(t, x) \in W_i$. Por 1.14 ϕ está bien definida y es diferenciable de clase C^r .

Además, para todo $y \in M$

$$(a) \quad \mathbb{R} \times \{y\} \cap W = \mathbb{R} \times \{y\} \cap \left(\bigcup_{i \in I} W_i \right) \\ = \bigcup_{i \in I} \mathbb{R} \times \{y\} \cap W_i$$

como cada $\mathbb{R} \times \{y\} \cap W_i$ es conexo y $(0, y)$ está en $\mathbb{R} \times \{y\} \cap W_i$ entonces $\mathbb{R} \times \{y\} \cap W$ es conexo.

$$(b) \quad \phi(0, y) = \phi_i(0, y), \quad \forall i \in I \\ = y$$

(c) si $(t', y), (t+t', y), (t, \phi(t', y))$ están en W , por ser $\{(W_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ una cadena, existe W_j tal que $(t', y), (t+t', y), (t, \phi(t', y)) \in W_j$ y por lo tanto

$$\phi(t, \phi(t', y)) = \phi_j(t, \phi_j(t', y)) \\ = \phi_j(t + t', y) \\ = \phi(t + t', y)$$

luego (W, ϕ) es un grupo local a un parámetro determinado por X . Ya que para todo $y \in M$

$$X(\phi_y(t)) = X(\phi_y(t)) \text{ si } (t, y) \in W_i \\ = \phi_i(t) \\ = \phi_y(t)$$

de otro lado, (W, ϕ) es cota superior de $\{(W_i, \phi_i)\}$ por lo tanto A tiene un elemento maximal. Como la unión de grupos locales a un parámetro determinado por X es un grupo local a un parámetro determinado por X entonces, este elemento maximal es único. \square

1.22 Definición. Un campo de vectores X es completo si

el grupo local a un parámetro maximal determinado por X es global.

1.23 Ejemplos:

(i) sobre \mathbb{R}^m , el campo de vectores $X = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es completo: el genera el grupo a un parámetro de las homotecias de \mathbb{R}^m (el difeomorfismo ϕ_t es la homotecia de razón e^t).

Demostración.

En efecto, si α es una curva integral de X entonces.

$$\begin{aligned} X(\alpha(t)) &= \sum_{i=1}^m x_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha(t) \end{aligned}$$

como $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ entonces $\dot{\alpha}(t) = (\dot{\alpha}_1(t), \dots, \dot{\alpha}_m(t))$

y por tanto

$$\dot{\alpha}_i(t) = \alpha_i(t)$$

luego $\alpha_i(t) = c_i e^t, c_i \in \mathbb{R}$

de donde

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (c_1 e^t, \dots, c_m e^t) \\ &= e^t (c_1, \dots, c_m) \end{aligned}$$

como α está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y $\phi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ está dada por $\phi(t, x) = e^t x$

(ii) sobre \mathbb{R} , el grupo local a un parámetro maximal determinado por el campo de vectores $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ está dado por

$$\begin{aligned} W &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 1 - t x > 0\} \\ \phi(t, x) &= \frac{x}{1 - t x} \end{aligned}$$

Demostración.

En efecto, si α es una curva integral de X entonces

$$X(\alpha(t)) = (\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x} \alpha(t)$$

es decir

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t))^2$$

luego

$$\alpha(t) = -\frac{1}{t+c}$$

como $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha(0) = -\frac{1}{0+c}$$

de donde $c = -\frac{1}{x}$ y por lo tanto $\alpha(t) = \frac{x}{1-tx}$

1.24 Proposición. En la proposición 1.6 los campos de vectores X, \tilde{X} son simultáneamente completos o no completos.

Demostración.

Si $(\tilde{W}, \tilde{\phi})$ es el grupo local a un parámetro maximal determinado por \tilde{X} entonces, si \tilde{X} es completo tenemos X completo pues para todo $\tilde{x} \in \tilde{M}$, $q \circ \tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ es una curva integral de X y q es sobreyectiva.

Recíprocamente, si (W, ϕ) es el grupo local maximal a un parámetro determinado por X entonces, si X es completo tenemos \tilde{X} completo pues para toda $x \in M$, existe $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tal que $\phi_x = q \circ \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \quad \square$

1.25 Definición. Diremos que una sub-variedad N de codimensión uno es transversal a X si para todo

punto y de N $X(y) \in T_y N$

1.26 Proposición: Si el campo de vectores X es completo, y genera un grupo a un parámetro, $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, de difeomorfismos de M , tenemos $\phi_t^T \circ X \circ \phi_{-t} = X$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Demostración.

En efecto, si $s \in \mathbb{R}$, $x \in M$ entonces para todo

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} \quad \phi_s \circ \phi_x(t) &= \phi_s(\phi_x(t)) \\ &= \phi(s, \phi(t, x)) \\ &= \phi(s+t, x) \\ &= \phi_x(s+t) \end{aligned}$$

luego por 1.4 para todo $s \in \mathbb{R}$, ϕ_s transforma curvas integrales de X en curvas integrales de X .

Luego, para toda $x \in M$

$$\begin{aligned} \phi_t^T \circ X(x) &= \phi_t^T \circ X(\phi_0(x)) \\ &= \phi_t^T \circ X(\phi_x(0)) \\ &= \phi_t^T(\dot{\phi}_x(0)) \\ &= (\phi_x \circ \phi_x)(0) \\ &= X(\phi_t \circ \phi_x(0)) \\ &= X(\phi_t(x)) \\ &= X \circ \phi_t(x) \end{aligned}$$

por lo tanto $\phi_t^T \circ X = X \circ \phi_t$ y como $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ tenemos $\phi_t^T \circ X \circ \phi_{-t} = X$

1.27 Corolario: Si N es una sub-variedad de codimensión uno de M transversal a X , la sub-variedad $\phi_t(N)$ resulta transversal a X para todo $t \in \mathbb{R}$; y por consiguiente, la aplicación $(t, x) \longmapsto \phi_t(x)$ es una submersión de $\mathbb{R} \times N$ en M .

Demostración.

En efecto, si $y \in \phi_t(N)$ entonces $X(y) = \phi_t^T \circ X \circ \phi_{-t}(y) = \phi_t^T [X(\phi_{-t}(y))]$, como $\phi_{-t}(y) \in N$ entonces $X(\phi_{-t}(y)) \notin T_{\phi_{-t}(y)} N$, luego $\phi_t^T [X(\phi_{-t}(y))] \notin T_y \phi_t(N)$ de donde $\phi_t(N)$ es transversal a X . \square

1.28 Proposición. Si sobre el producto $M \times \mathbb{R}$ un campo de vectores Υ de la forma $Z(y, s) + \frac{\partial}{\partial s}$, con $Z(y, s) \in T_y M$, es completo, el grupo a un parámetro de difeomorfismos de $M \times \mathbb{R}$ que él genera se puede escribir $(t, y, s) \longmapsto (f_{t,s}(y), t)$ donde $f_{t,s}$ es una familia de difeomorfismos de M teniendo las propiedades siguientes

- (a) $f_{0,s} = \text{Identidad}$ para todo s ,
- (b) $f_{t+t',s} = f_{t,t'+s} \circ f_{t',s}$,
- (c) $(f_{t,s})^{-1} = f_{-t,t+s}$

Demostración.

Sea $\phi : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ el grupo a un parámetro maximal generado por X .

Las curvas integrales de X son restricciones de las aplicaciones

$$\phi_{(x,s)} : \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$$

donde $\phi_{(x,s)}(t) = \phi(t, x, s)$; luego $\phi(x, s) = (f_{x,s}, g_{x,s})$

con $f_{x,s}: \mathbb{R} \rightarrow M$ y $g_{x,s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables

$$y \dot{\phi}_{(x,s)}(t) = (\dot{f}_{x,s}(t), \dot{g}_{x,s}(t))$$

$$= \Upsilon (f_{x,s}(t), g_{x,s}(t))$$

$$= Z (f_{x,s}(t), g_{x,s}(t)) + \frac{\partial}{\partial s} g_{x,s}(t)$$

$$\text{luego } \dot{g}_{x,s}(t) = \frac{\partial}{\partial s} g_{x,s}(t)$$

y como $\phi_{(x,s)}(0) = (x, s)$ entonces $g_{x,s} = t + s$

es decir; para todo $(x, s) \in M \times \mathbb{R}$, $\phi_{(x,s)}^{(t)} = (f_{x,s}(t), t+s)$

de otro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi_t: M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (x, s) &\longrightarrow \phi(t, x, s) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo; luego para todo, $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi_{t,s}: M &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \phi_{t,s}(x) = \phi(t, x, s) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo y $\phi_{t,s}(x) = (f_{t,s}(x), g_{t,s}(x))$

donde $f_{t,s}: M \rightarrow M$ y $g_{t,s}: M \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones

diferenciables; además, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} \phi_{t,s}(x) &= (f_{t,s}(x), g_{t,s}(x)) = \phi(t, x, s) \\ &= \phi_{(x,s)}(t) \\ &= (f_{x,s}(t), t+s) \end{aligned}$$

luego $g_{t,s}(x) = t + s$ y $f_{t,s}(x) = f_{x,s}(t)$ de donde

$\phi: \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ se puede escribir como

$$\phi(t, x, s) = (f_{t,s}(x), t+s) \text{ y } f_{t,s} \text{ es una familia}$$

de difeomorfismos, puesto que:

(a) $\phi(0, y, s) = (f_{0,s}(y), 0+s) = (y, s)$ luego $f_{0,s}(y) = y$

es decir $f_{0,s} = \text{Identidad de } M.$

(b) $\forall y \in M,$

$$\begin{aligned} (f_{t+t',s}(y), t+t'+s) &= \phi(t+t', y, s) \\ &= \phi(t, \phi(t', y, s)) \\ &= \phi(t, f_{t',s}(y), t'+s) \\ &= (f_{t,t'+s}(f_{t',s}(y)), t+t'+s) \\ &= (f_{t,t'+s} \circ f_{t',s}(y), t+t'+s) \end{aligned}$$

de donde $f_{t+t',s} = f_{t,t'+s} \circ f_{t',s}$

(c) por (b) $f_{-t,t+s} \circ f_{t,s} = f_{0,s} = \text{Identidad de } M.$

$$\begin{aligned} f_{t,s} \circ f_{-t,t+s} &= f_{t,-t+t+s} \circ f_{-t,t+s} \\ &= f_{t-t,t+s} \end{aligned}$$

= Identidad de M.

luego $(f_{t,s})^{-1} = f_{-t,t+s} \quad \square$

1.29 Corolario: Si hacemos $g_{t,s} = f_{t-s,s}$ obtenemos una familia de difeomorfismos de M verificando las siguientes propiedades

(a) $g_{s,s} = \text{Identidad} \quad ; \forall s \in \mathbb{R}$

(b) $g_{t,s} \circ g_{s,r} = g_{t,r}$

(c) $(g_{t,s})^{-1} = g_{s,t}$

Demostración.

En efecto; como $f_{t-s,s}$ son difeomorfismos entonces $g_{t,s}$ es un difeomorfismo y

$$\begin{aligned} (a) \quad g_{s,s} &= f_{s-s,s} \\ &= f_{0,s} \\ &= \text{Identidad de } M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad g_{t,s} \circ g_{s,r} &= f_{t-s,s} \circ f_{s-r,r} \\
 &= f_{t,-s+s} \circ f_{-s,s} \circ f_{s-r,r} \\
 &= f_{t,0} \circ f_{-s,(s-r)+r} \circ f_{s-r,r} \\
 &= f_{t,-r+r} \circ f_{-s+s-r,r} \\
 &= f_{t,-r+r} \circ f_{-r,r} \\
 &= f_{t-r,r} \\
 &= g_{t,r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad g_{s,t} \circ g_{t,s} &= g_{s,s} = \text{Identidad de } M \\
 g_{t,s} \circ g_{s,t} &= g_{t,t} = \text{Identidad de } M \\
 \text{Luego } g_{s,t} &= (g_{t,s})^{-1} \quad \square
 \end{aligned}$$

1.30 Observación: Haciendo $h_t = g_{t,0}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 h_t \circ h_s^{-1} &= g_{t,0} \circ g_{s,0}^{-1} \\
 &= g_{t,0} \circ g_{0,s} \\
 &= g_{t,s}
 \end{aligned}$$

y como cada h_t es encajamiento, entonces la familia $\{h_t\}_{t \in I}$ es una isotopía con $h_0 =$ Identidad de M .

1.31 Corolario: Para todo $y \in M$, $s \in \mathbb{R}$, la curva

$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow M$ definida por $\alpha(t) = g_{t,s}(y)$ es una solución de la ecuación diferencial no autónoma

$$y' = Z(y, t)$$

tomando el valor y para $t=s$

Demostración.

$$\text{Como } (\alpha(t), t) = (g_{t,s}(y), t)$$

$$\begin{aligned}
 &= (f_{t-s,s}(y), t) \\
 &= (f_{t-s,s}(y), (t-s)+s) \\
 &= \phi(t-s, y, s) \\
 &= \phi_{(y,s)}(t-s)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (\dot{\alpha}(t), 1) &= Y(\phi_{(y,s)}(t-s)) \\
 &= Y(f_{t-s,s}(y), t) \\
 &= Z(g_{t,s}(y), t) + \frac{\partial}{\partial r} \Big|_t
 \end{aligned}$$

de donde

$$\dot{\alpha}(t) = Z(\alpha(t), t)$$

y

$$\begin{aligned}
 \alpha(s) &= g_{s,s}(y) \\
 &= y \quad \square
 \end{aligned}$$

1.32 Observación. Si Z es periódica de período τ en s , como $g_{t+\tau, s+\tau} = g_{t,s}$ entonces el campo de vectores Y induce un campo de vectores sobre el cilindro $M \times S^1 = M \times (\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z})$

1.33 Lema: Sea (W, ϕ) , $W = \bigcup_{x \in M} \omega_x \times \{y\}$, el grupo local a un parámetro maximal generado por X . Si para un punto $x \in M$, la curva $\phi([0, \omega_x \times \{x\})$ es relativamente compacta, entonces $\omega_x = +\infty$

Análogamente, si $\phi([\alpha_x, 0] \times \{x\})$ es relativamente compacta entonces $\alpha_x = -\infty$

Demostración.

Supongamos que $\phi([0, \omega_x \times \{x\})$ es relativamente compacta y que $\omega_x < +\infty$

Sea y un valor adherente de la aplicación

$\phi_x:]\alpha_x, \omega_x[\rightarrow M$ para t tendiendo a ω_x , seleccionamos una vecindad abierta U de y , un número ϵ entre 0 y ω_x , luego existe una aplicación diferenciable $\psi:]-\epsilon, \epsilon[\times U \rightarrow M$ teniendo las propiedades del teorema 1.10.

Sea $\tau \in]\omega_x - \epsilon, \omega_x[$ tal que $\phi(\tau, x) \in U$ y sea V una vecindad abierta de x tal que $\{\tau\} \times V \subset W$ y $\phi(\{\tau\} \times V) \subset U$.

En estas condiciones podemos prolongar ϕ al abierto $W \cup (]\omega_x - \epsilon, \tau + \epsilon[\times V)$ haciendo

$$\tilde{\phi}(t, z) = \psi(t - \tau, \phi(\tau, z))$$

para $z \in V$ y $t \in]\omega_x - \epsilon, \tau + \epsilon[$; lo cual es una contradicción ya que ϕ no puede prolongarse por ser maximal.

Para el caso $\alpha_x = -\infty$ la demostración es análoga. \square

1.34 Teorema: Un campo de vectores a soporte compacto es completo.

Demostración.

Si x es un punto singular del campo entonces

$\phi_x: \mathbb{R} \rightarrow M$; de otro lado, si x es un punto regular entonces $\phi_x(]\alpha_x, 0])$ y $\phi_x([0, \omega_x[)$ son relativamente compactos y por 1.33 $\alpha'_x = -\infty$

$\omega_x = +\infty$ luego el grupo es maximal. \square

1.35 Corolario: Sobre una variedad compacta, todo campo de vectores es completo.

Demostración.

Como la variedad es compacta, el soporte de todo campo de vectores es relativamente compacto y por 1.34 el campo es completo. \square

Designando en adelante por (W, ϕ) el grupo local a un parámetro maximal generado por X , podemos deducir igualmente del lema 1.13 las siguientes conclusiones.

1.36 Proposición: Toda curva integral de X tomando el valor y para $t = \tau$ es la restricción de la aplicación $t \rightarrow \phi(t - \tau, y)$ a un sub-intervalo de $]\alpha_y - \tau, \omega_y + \tau[$

Demostración.

Sea $\beta:]a, b[\rightarrow M$ una curva integral de X con $\tau \in]a, b[$ y $\beta(\tau) = y$

Sea $\lambda:]\alpha_y + \tau, \omega_y + \tau[\rightarrow M$ dada por $\lambda(t) = \phi(t - \tau, y)$

entonces,

(a) Si $a < \alpha_y + \tau$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_y(] \alpha_y, 0]) &= \lambda(] \alpha_y + \tau, \tau]) \\ &= \beta(] \alpha_y + \tau, \tau]) \\ &\subseteq \beta(] \alpha_y + \tau, \tau]) \end{aligned}$$

luego $\phi_y(] \alpha_y, 0])$ es relativamente compacto y $\alpha_y = -\infty$ lo cual es una contradicción luego $\alpha_y + \tau < a$

(b) Si $\omega_y + \tau < b$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_y([0, \omega_y[) &= \lambda([\tau, \omega_y + \tau[) \\ &= \beta([\tau, \omega_y + \tau]) \subseteq \beta([\tau, \omega_y + \tau]) \end{aligned}$$

luego $\phi_y([0, \omega_y[)$ es relativamente compacto y $\omega_y = +\infty$ lo cual es una contradicción por tanto $b \leq \omega_y + \tau$

luego $\beta = \lambda /]a, b[\square$

1.37 Corolario: Para que un campo de vectores X sea completo es necesario y suficiente que toda curva integral de X se prolongue a una curva integral definida sobre \mathbb{R} .

Demostración.

Supongamos que X es completo y que $\alpha: J \rightarrow M$ es una curva integral de X ; por 1.36 α es la restricción de $\phi_x(0): \mathbb{R} \rightarrow M$ luego α se puede prolongar a una curva integral definida sobre \mathbb{R} .

Recíprocamente, si toda curva integral de X se puede prolongar a una curva integral de X definida sobre \mathbb{R} entonces

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, ϕ_x puede ser prolongada a una curva integral sobre \mathbb{R} por 1.36 esa curva integral es una restricción de $\phi_x(0)$ luego $(t, x) \in W$ de donde $W = \mathbb{R} \times M$ y por tanto X es completo. \square

1.38 Proposición: Sea Y un campo de vectores sobre el producto $M \times \mathbb{R}$ de la forma $Z(y, s) + \frac{\partial}{\partial s}$ con $Z(y, s) \in T_y M$. Si la proyección sobre M del soporte de Z es relativamente compacto, el campo Y es completo.

Demostración.

Como la proyección sobre M del soporte de Z es relativamente compacto y la proyección es una aplicación abierta entonces, el soporte de Z es relativamente compacto; luego si (x, s) pertenece al soporte de Z tenemos que $\phi_{(x, s)}(\omega, \omega(x, s)[$) es relativamente compacto y $\phi_{(x, s)}(\alpha(x, s), \alpha]$) es relativamente compacto, luego $\alpha(x, s) = -\infty$, $\omega(x, s) = +\infty$ si (x, s) no pertenece al soporte de Z entonces $\phi_{(x, s)}$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto Y es completo. \square

1.39 Observación: En relación a la proposición 1.36, diremos que C_y definida sobre el intervalo $]\alpha_y, \omega_y[$ por $t \longrightarrow \phi(t, y)$ es la curva integral maximal de X pasando por y .

Las imágenes de dos curvas integrales maximales son disjuntas o iguales. El conjunto de esas imágenes definen una partición de M , donde los elementos son llamados las órbitas de X .

En particular, los puntos singulares de X son órbitas reducidas a un punto. Las órbitas que no son puntos singulares las llamaremos órbitas regulares de X .

El espacio cociente de M determinado por la partición en órbitas de X es llamado el espacio de las órbitas de X .

1.40 Clasificación de las órbitas.

El teorema siguiente nos da una clasificación de las órbitas de un campo de vectores X .

Teorema: Para una órbita dada γ , todas las curvas integrales maximales C_y , $y \in \gamma$, parametrizando poseen simultáneamente una de las tres propiedades siguientes

- i) C_y es inyectiva
- ii) C_y no es inyectiva, pero tampoco constante
- iii) C_y es constante

Demostración.

Sea $C_y :]\alpha_y, \omega_y[\rightarrow M$ la curva integral maximal definida por $C_y(t) = \phi_y(t)$.

Sea $z \in C_y (]\alpha_y, \omega_y[)$; $z = C_y(\tau)$
 luego, por 1.36, C_y es la restricción de la aplicación $t \rightarrow \phi(t - \tau, z)$ a un sub-intervalo de $]\alpha_z - \tau, \omega_z + \tau[$
 como C_y es maximal resulta $C_y(t) = \phi(t - \tau, z)$
 de donde.

- (i) Si C_y es inyectiva entonces la aplicación
 $t \rightarrow \phi(t - \tau, z)$ es inyectiva para todo $z \in C_y(]\alpha_y, \omega_y[)$
 luego $C_z = \phi_z$ es inyectiva para todo $z \in C_y(]\alpha_y, \omega_y[)$
- (ii) Si C_y no es inyectiva ni tampoco constante
 entonces la aplicación $t \rightarrow \phi(t - \tau, z)$ no es

inyectiva ni tampoco constante; luego $C_z = \phi_z$
no es inyectiva ni tampoco constante.

(iii) Si C_y es constante entonces, la aplicación
 $t \rightarrow \phi(t-\tau, z)$ es constante y por tanto ϕ_z
es constante para todo $z \in C_y(]a_y, \omega_y[) \square$

1.41 Corolario: En 1.40 (i), C_y es una inmersión inyec-
tiva del intervalo $]a_y, \omega_y[$ en M . En 1.40 (ii),
la aplicación C_y está definida sobre \mathbb{R} y es perió-
dica. En el caso 1.40 (iii), C_y es una curva inte-
gral singular de X .

Demostración.

En efecto, en el caso (i), C_y es inyectiva y
si $v \in T]a_y, \omega_y[$ entonces $v = \lambda \frac{d}{dt} \Big|_t$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned} dC_y(v) &= dC_y\left(\lambda \frac{d}{dt} \Big|_t\right) \\ &= \lambda dC_y\left(\frac{d}{dt} \Big|_t\right) \\ &= \lambda \dot{C}_y(t) \end{aligned}$$

como $\dot{C}_y(t) = X(C_y(t))$ entonces, $dC_y(v) = 0$ si y
solo si $v = 0$; luego $\ker(dC_y) = \{0\}$, y por tanto
 C_y es una inmersión.

En el caso (ii), si $C_y(b) = C_y(a)$, $b > a$, enton-
ces definiendo $\psi:]b, b+\tau[\rightarrow M$ por $\psi(t) = C_y(t-\tau)$
con $\tau = b-a$ tenemos que

$$\dot{C}_y(t-\tau) = X(C_y(t-\tau)) = X(\psi(t))$$

luego, ψ es una curva integral de X y $\psi(b) = C_y(b)$
como C_y es maximal resulta $]b, b+\tau[\subset]a_y, \omega_y[$
prosiguiendo de esta manera, obtenemos $\omega_y = +\infty$, y

en forma análoga $d_y = -\infty$ y además,

$$\begin{aligned}
 C_y(t) &= C_y(t+\tau) \quad \text{puesto que} \\
 \forall t \in \mathbb{R}, C_y(t-\tau) &= \phi_y(t-b+a) \\
 &= \phi_y((t-b)+a) \\
 &= \phi((t-b)+a, y) \\
 &= \phi((t-b), \phi(a, y)) \\
 &= \phi((t-b), \phi(b, y)) \\
 &= \phi(t, y) \\
 &= C_y(t)
 \end{aligned}$$

luego C_y es periódica con período un sub-múltiplo de $b-a$.

En este caso, diremos que γ , que es entonces una subvariedad de M difeomorfa al círculo S^1 , es una órbita periódica, de período τ , de X .

En el tercer caso, y es un punto singular de X . \square

1.42 Proposición: Sea X un campo de vectores sobre una variedad paracompacta M . Entonces existe una función f estrictamente positiva sobre M , teniendo la misma clase de diferenciabilidad que X , tal que, el campo de vectores $Y = fX$ es completo.

Demostración: Sea g una función propia de clase C^∞ sobre M (donde la existencia es asegurada por la hipótesis de paracompacidad de M), y sea $f = \exp(-(Xg)^2)$

Si $Y = fX$, tenemos

$$|Yg| = |(Xg)\exp(-(Xg)^2)| < 1 \quad \text{sobre } M.$$

Consideremos una curva integral C de Y definida so-

bre un intervalo acotado I .

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g \circ c) &= dc \left(\frac{d}{dt} \right) (g) \\ &= \dot{c}(t)(g) \\ &= Y(c(t))(g) \\ &= (Yg) \circ c(t) \end{aligned}$$

luego $\left| \frac{d}{dt}(g \circ c) \right| < 1$ sobre I .

La imagen de $g \circ c$ está entonces acotada y por consiguiente la de C es relativamente compacta.

Por 1.33 tenemos $I = \mathbb{R}$ luego Y es completo. \square

1.43 Corolario: Si C es una curva integral maximal de un campo de vectores X pasando por z , y si f no tiene ceros sobre M , la curva integral maximal del campo de vectores $Y=fX$ pasando por z es una extensión de la aplicación $t \rightarrow c(h(t))$, donde h es la solución maximal de la ecuación diferencial $\frac{dh}{dt} = f(c(s))$ que se anula para $t=0$.

Demostración.

En efecto,

$$\begin{aligned} Y(c(h(t))) &= (fX)(c(h(t))) \\ &= f(c(h(t)))X(c(h(t))) \\ &= \dot{h}(t) \cdot \dot{c}(h(t)) \\ &= \dot{c} \circ h(t) \end{aligned}$$

luego $c \circ h$ es una curva integral de Y además,

$$c \circ h(0) = c(h(0)) = c(0) = z \quad \square$$

1.44 Observación: Como las curvas integrales maximales no cambian bajo un cambio de parametrización, y conservan la orientación si f es positiva, entonces las órbitas de X y Y son las mismas.

En lo que sigue, lo que nos interesa de una variedad paracompacta y de las propiedades de las órbitas de un campo de vectores (esto es; las propiedades de las curvas integrales maximales invariantes por reparametrización), es suponer que ese campo de vectores es completo.

1.45 Proposición: La relación de equivalencia sobre M donde las clases son las órbitas de un campo de vectores es abierta.

Demostración.

En efecto, si $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ es el grupo a un parámetro de difeomorfismos de M generado por X , y si U es un abierto de M , el saturado de U es el abierto

$$\begin{aligned} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(U) \\ \text{Sat}(U) &= \bigcup_{y \in U} \phi_y(\mathbb{R}) \\ &= \bigcup_{y \in U} \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{\phi(t, y)\} \right] \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \left[\bigcup_{y \in U} \{\phi(t, y)\} \right] \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \left[\bigcup_{y \in U} \{\phi_t(y)\} \right] \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(U) \end{aligned}$$

luego la relación es abierta. \square

2. Estudio General de las Orbitas.

La herramienta fundamental para el estudio de las órbitas no singulares de un campo de vectores está dada por el teorema siguiente.

2.1 Teorema: Sea X un campo de vectores de clase C^r sobre M , y sea y un punto regular de X . Existe en una vecindad de y , un sistema (x_1, \dots, x_m) de coordenadas locales de clase C^r en el cual la expresión de X es $\frac{\partial}{\partial x_1}$

Demostración.

Sea (V, τ) un sistema de coordenadas alrededor de y con funciones coordenadas y_1, \dots, y_m tal que

$$X(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_y$$

se sigue de 1.10 que existe un $\epsilon > 0$ y una vecindad W del origen en \mathbb{R}^{m-1} tal que la aplicación

$$\sigma(t, a_2, \dots, a_m) = \phi_t(\tau^{-1}(0, a_2, \dots, a_m))$$

está bien definida y es de clase C^r para $(t, a_2, \dots, a_m) \in (-\epsilon, \epsilon) \times W \subset \mathbb{R}^m$.

Ahora, σ es no singular en el origen ya que

$$d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = X(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_y \quad y \quad d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_y \quad (i \geq 2)$$

de aquí, por el teorema de la función inversa,

$\phi = \sigma^{-1}$ es una aplicación coordenada sobre alguna vecindad U de y . Denotemos con x_1, \dots, x_m

las funciones coordenadas del sistema (U, ϕ)

Entonces como $d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{(t, a_2, \dots, a_m)} \right) = X(\sigma(t, a_2, \dots, a_m))$

tenemos

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1} |_U \quad \square$$

2.2 Definición: Un sistema de coordenadas locales (U, y_1, \dots, y_m) tal que la expresión de X en U es $\frac{\partial}{\partial y_1}$ le llamaremos sistema de coordenadas locales distinguido para X o simplemente un sistema de coordenadas distinguido de X .

2.3 Corolario: Si $y=(y_1, \dots, y_m), z=(z_1, \dots, z_m)$ son sistemas de coordenadas locales distinguidos para X , la aplicación de transición $z_i = f_i(y_1, \dots, y_m), i=1, \dots, m$ verifica $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1$ y $\frac{\partial f_i}{\partial y_1} = 0$ para $i \geq 2$

Demostración.

En efecto, como $X|_U = \frac{\partial}{\partial y_1}$ y $X|_V = \frac{\partial}{\partial z_1}$ y $f: U \rightarrow V$ está dada por $f = z^{-1} \circ y$

luego $f_i = z_i \circ z^{-1} \circ y$ y

$\frac{\partial f_i}{\partial y_1} = X(f_i) = \frac{\partial}{\partial z_1}(f_i) = \frac{\partial}{\partial z_1}(z_i \circ z^{-1} \circ y)$
de donde $\frac{\partial f_i}{\partial y_1} = 1$ si $i=1$ y 0 si $i \geq 2$ \square

2.4 Corolario: Puesto que cada órbita no singular de X es la imagen por una inmersión inyectiva de la recta \mathbb{R} o del círculo S^1 , la intersección de una tal órbita y de un abierto distinguido U es la reunión numerable de placas $y_2 = \text{cte}, \dots, y_m = \text{cte}$ de U .

Demostración.

Como U es un abierto distinguido de X tenemos,

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_z(t) \in U$, $\frac{\partial}{\partial y_1} \phi_z(t) = \frac{\partial}{\partial y_1} \phi_z(t)$ luego las funciones coordenadas de $y \circ \phi_z$ son constantes para $i \geq 2$, como la órbita es una inmersión inyectiva de \mathbb{R} o S^1 entonces las funciones coordenadas y_i , $i \geq 2$ son constantes sobre $\phi_z(\mathbb{R}) \cap U$. Como \mathbb{R} se puede expresar como la unión numerable de intervalos cerrados conexos tenemos que $\phi_z(\mathbb{R}) \cap U$ es una unión numerable de placas. \square

2.5 Definición: Una órbita no singular γ de X es propia (respectivamente localmente densa) si existe un abierto distinguido U de X tal que, la intersección $U \cap \gamma$ es una sola placa de U (respectivamente sea densa en U).

Esta noción es invariante por cambio de parámetros.

2.6 Proposición: Sea γ una órbita propia (respectivamente localmente densa) de X , todo punto y de γ posee una vecindad abierta distinguida V para X tal que $V \cap \gamma$ sea una sola placa de V (Resp. sea densa en V).

Demostración.

En efecto, si designamos por (W, ϕ) el grupo local a un parámetro maximal generado por X .

Sea $y \in \gamma$, podemos elegir el abierto distinguido U de X tal que $U \cap \gamma$ sea una sola placa (sea localmente denso) y tal que si $z \in U \cap \gamma$ y $y = \phi(t, z)$ entonces $\{t\} \times U \subset W$; el abierto $\phi(\{t\} \times U)$

posee las propiedades requeridas. \square

2.7 Corolario: Para que una órbita no singular sea localmente densa es necesario y suficiente que exista un abierto de M en el que ella sea densa.

Demostración.

Supongamos que la órbita γ es localmente densa.

Para todo $y \in \gamma$ existe un abierto distinguido U_y de X tal que $\gamma \cap U_y$ es denso en U_y

$$\begin{aligned} \text{sea } U &= \bigcup_{y \in \gamma} U_y \text{ entonces} \\ \overline{\gamma} &= \overline{\gamma \cap U} = \overline{\gamma \cap \left(\bigcup_{y \in \gamma} U_y \right)} \\ &= \overline{\bigcup_{y \in \gamma} (\gamma \cap U_y)} \\ &= \bigcup_{y \in \gamma} \overline{(\gamma \cap U_y)} \\ &= \bigcup_{y \in \gamma} U_y \\ &= U \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que existe un abierto U de M en el que γ es densa.

Sea $m \in \gamma$, por 2.1 existe un abierto distinguido U_m para X con $m \in U_m$.

Sea $V = U \cap U_m$; luego V es un abierto distinguido para X y $\overline{\gamma \cap V} = V$

puesto que si $\overline{\gamma \cap V} \neq V$ entonces, existe $z \in V$ y un abierto O que contiene z con $O \cap \gamma = \emptyset$ pero esto contradice $\overline{\gamma} = U$. \square

2.8 Proposición: Para que una órbita no singular γ de X sea propia es necesario y suficiente que ella sea una sub-variedad localmente cerrada de M .

Demostración.

Supongamos que la órbita γ es propia, por 2.6 para todo $y \in \gamma$ existe un abierto distinguido U tal que $U \cap \gamma$ es una sola placa de U , luego γ es localmente cerrado.

Recíprocamente, supongamos que γ es una sub-variedad localmente cerrada de M .

Sea V un abierto distinguido para X tal que $V \cap \gamma$ sea cerrado en V , una de las placas de $V \cap \gamma$ está entonces aislada en el conjunto de las placas de $V \cap \gamma$. En efecto, (propiedad de Baire), un cerrado numerable de \mathbb{R}^{m-1} posee un punto aislado. Podemos entonces construir un abierto distinguido U en V conteniendo únicamente esta placa de $V \cap \gamma$ \square

2.9 Corolario.

- (i) Una órbita cerrada no singular, en particular una órbita periódica, es propia.
- (ii) Si una órbita no singular ni periódica es propia entonces, cada una de las curvas integrales maximales que la parametrizan es un prolongamiento de \mathbb{R} en M .
- (iii) Una órbita no singular y compacta es periódica.

Demostración.

- (i) Si γ es una órbita cerrada no singular enton-

ces, para todo abierto U en M , $\gamma \cap U$ es cerrado en U , luego por 2.8 γ es propia.

(ii) Si γ es una órbita propia, no singular ni periódica, por 1.44, γ es un prolongamiento de R en M .

(iii) Si γ es una órbita no singular y compacta, como M es de Hausdorff entonces γ es cerrada, luego propia, en consecuencia γ tiene que ser periódica porque si no se contradice

(ii) \square

Conjuntos Invariantes y Conjuntos Minimales

3.1 Puesto que lo que nos interesa en lo que sigue de este capítulo son las propiedades de las órbitas de un campo de vectores X , supondremos que X es completo, por 1.43 esto no es una restricción ya que M es paracompacta.

Designaremos por $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ el grupo a un parámetro de difeomorfismos de M que genera el campo X .

3.2 Proposición: Para que un sub-espacio A de M sea una reunión de órbitas de X es necesario y suficiente que tengamos $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración.

En efecto, $y \in \phi_t(A) \iff \exists z \in A$ tal que $y = \phi_t(z)$

$$\Leftrightarrow \exists z \in A \text{ tal que } y = \phi_z(t)$$

$$\Leftrightarrow y \in A \text{ si } A = \bigcup_{z \in A} \phi_z(\mathbb{R})$$

luego si $A = \bigcup_{z \in A} \phi_z(\mathbb{R})$ entonces, $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Recíprocamente; si $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} A = \phi_t(A), t \in \mathbb{R} &\Rightarrow A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(A) \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \left[\bigcup_{z \in A} \{ \phi_t(z) \} \right] \\ &= \bigcup_{z \in A} \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{ \phi_t(z) \} \right] \\ &= \bigcup_{z \in A} \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{ \phi_z(t) \} \right] \\ &= \bigcup_{z \in A} \phi_z(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

luego A es la reunión de órbitas de X . \square

3.3 Definición: Diremos que un sub-espacio A de M es invariante para el campo de vectores X (o por el grupo a un parámetro ϕ_t) si $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.4 Proposición: Si A es invariante para X entonces la frontera ∂A , clausura \bar{A} , complemento A^c , interior $\overset{\circ}{A}$, son invariantes, además si B es invariante entonces, $A \cup B$ y $A \cap B$ también son invariantes.

Demostración: En efecto, por ser ϕ_t homeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$(i) A = \phi_t(A) \Rightarrow A^c = [\phi_t(A)]^c = \phi_t(A^c)$$

luego A^c es invariante

$$(ii) \phi_t(\bar{A}) = \overline{\phi_t(A)} = \bar{A}$$

luego \bar{A} es invariante

$$(iii) \phi_t(A \cup B) = \phi_t(A) \cup \phi_t(B) = A \cup B$$

luego $A \cup B$ es invariante

$$(iv) \phi_t(A \cap B) = \phi_t(A) \cap \phi_t(B) = A \cap B$$

por consiguiente $A \cap B$ es invariante

$$\begin{aligned} (v) \phi_t(\partial A) &= \phi_t(\bar{A} \cap \bar{A}^c) \\ &= \phi_t(\bar{A}) \cap \phi_t(\bar{A}^c) \\ &= \bar{A} \cap \bar{A}^c \\ &= \partial A \end{aligned}$$

(vi) Como $\mathring{A} = [\bar{A}^c]^c$ entonces \mathring{A} es invariante. \square

3.5 Corolario: La adherencia $\bar{\gamma}$ de una órbita γ es un cerrado, invariante y conexo.

3.6 Definición: Diremos que una órbita γ' es adherente a γ si $\gamma' \subset \bar{\gamma}$

3.7 Proposición: Para que una órbita no singular γ sea propia es necesario y suficiente que γ sea un abierto en $\bar{\gamma}$

Demostración.

Supongamos que γ es una órbita no singular y propia.

Por 2.8 sea V un abierto distinguido de X tal que $V \cap \gamma$ sea cerrado en V . Como $V \cap \bar{\gamma}$ es abierto en $\bar{\gamma}$ y $V \cap \bar{\gamma} = V \cap \gamma$ puesto que si $y \in V \cap \bar{\gamma}$ y $y \notin \gamma$ entonces y es un punto en V adherente a γ que no

pertenece a γ , esto contradice que $V \cap \gamma$ es cerrado en V . Luego por ser γ localmente cerrada se tiene γ abierto en $\bar{\gamma}$

Recíprocamente, supongamos que γ es una órbita no singular y γ abierto en $\bar{\gamma}$.

Por 1.41 γ es una sub-variedad de M y por ser γ un abierto en $\bar{\gamma}$ existe un abierto O en M tal que $O \cap \bar{\gamma} = \gamma$, como $\bar{\gamma}$ es cerrado en M entonces $\gamma = O \cap \bar{\gamma}$ es cerrado en O ; luego γ es una sub-variedad de M localmente cerrada y por 2.8 γ es propia. \square

3.8 Proposición: Si γ es una órbita localmente densa adherente a una órbita γ' , entonces γ' es localmente densa, y tenemos $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}$

Demostración.

Por 2.7 existe un abierto O de M tal que $\bar{\gamma} = O$. Además, como $\gamma \subset \bar{\gamma}'$ entonces $\bar{\gamma} = O \subset \bar{\gamma}'$ si $\bar{\gamma}' - \gamma \neq \emptyset$ como $\bar{\gamma}^c$ es abierto en M y $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} \cup (\bar{\gamma}^c \cap \bar{\gamma}') = O \cup (\bar{\gamma}^c \cap \bar{\gamma}')$ tenemos que $\bar{\gamma}'$ no sería conexo, lo cual es una contradicción y por tanto $\bar{\gamma}' - \bar{\gamma} = \emptyset$ de donde $\bar{\gamma}' = \bar{\gamma}$ y $\bar{\gamma}' = O$, luego por 2.7 γ' es localmente densa. \square

3.9 Definición: Un conjunto minimal para X es un elemento minimal del conjunto de los sub-espacios de M , ordenados por inclusión, que son cerrados, invariantes y no vacíos.

3.10 Proposición: Si E, F son conjuntos minimales para X

entonces:

(i) Toda órbita contenida en E es densa en E .

(ii) $E \cap F = \emptyset$

(iii) E es conexo

Demostración.

(i) Si γ es una órbita contenida en E entonces $\bar{\gamma} \subset E$ pues E es cerrado y como E es minimal entonces $\bar{\gamma} = E$.

(ii) Si $E \cap F \neq \emptyset$ entonces $E \cap F$ es cerrado, no vacío y por 3.4 invariante, luego $E \cap F = E = F$.

(iii) Si E no es conexo entonces, existen abiertos no vacíos U, V en E tales que $U \cup V = E$, como las órbitas son conexas entonces U y V son invariantes y cerrados, lo cual contradice que E es minimal. \square

3.11 Ejemplo: Un punto singular o una órbita cerrada, en particular, una órbita periódica, son ejemplos de conjuntos minimales.

3.12 Teorema: Todo conjunto invariante, compacto y no vacío contiene un conjunto minimal.

Demostración.

En efecto, si A es un tal sub-espacio, el conjunto de los sub-espacios cerrados de A , invariantes y no vacíos es inductivo (la intersección de una familia de compactos embotellados y no vacíos es no

vacía). El posee entonces un elemento minimal. (teorema de Zorn). \square

3.13 Corolario: Si la variedad M es compacta, y si todas las órbitas no singulares de X son propias o localmente densas, toda órbita propia contiene un punto singular o una órbita periódica en su adherencia.

Demostración.

Si γ es una órbita propia de X , su adherencia $\overline{\gamma}$ contiene un conjunto minimal E . Si E no es un punto singular de X , todas las órbitas contenidas en E son propias (por 3.8) y por 3.7 E se reduce a una órbita periódica. \square

4. Conjuntos Límites

4.1 Definición: Para todo $y \in M$ designemos por

$\gamma_y = \{\phi_t(y) : t \in \mathbb{R}\}$ la órbita de y

$\gamma_y^+ = \{\phi_t(y) : t \geq 0\}$ la semi-órbita positiva de y

$\gamma_y^- = \{\phi_t(y) : t \leq 0\}$ la semi-órbita negativa de y

4.2 Observación: Estas nociones son invariantes por cambio de parámetros conservando la orientación de las órbitas.

4.3 Definición: Sea γ una órbita de X . El conjunto

$\Omega_\gamma = \bigcap_{y \in \gamma} \overline{\gamma_y^+}$ (Resp. $A_\gamma = \bigcap_{y \in \gamma} \overline{\gamma_y^-}$) se llama el conjunto

ω -límite (Resp. α -límite) de γ

4.4 Observación: Por 1.5 el cambio de X por $-X$ intercambia los conjuntos ω -límite y α -límite.

4.5 Proposición: El conjunto Ω_γ (Resp. A_γ) es el conjunto de los valores de adherencia de las aplicaciones $t \rightarrow \phi_t(y)$, $y \in \gamma$; para t teniendo hacia $+\infty$ (Resp. $-\infty$).

Demostración.

$$\begin{aligned} z \in \Omega_\gamma &\iff z \in \bigcap_{y \in \gamma} \overline{\delta_y^+} \\ &\iff \forall y \in \gamma, z \in \overline{\delta_y^+} \\ &\iff \forall y \in \gamma, z \in \overline{\{\phi_t(y) : t > 0\}} \end{aligned}$$

luego $z \in \Omega_\gamma$ si y solo si para todo $y \in \gamma$, existe una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow +\infty$ y $\phi_{t_n}(y) \rightarrow z$

En forma análoga, A_γ es el conjunto de los valores de adherencia de las aplicaciones $t \rightarrow \phi_t(y)$, $y \in \gamma$; para t tendiendo hacia $-\infty$ \square

4.6 Proposición: Los conjuntos límites son cerrados e invariantes.

Demostración.

En efecto, Ω_γ y A_γ son cerrados por ser intersección de conjuntos cerrados; de otro lado Ω_γ es invariante bajo el flujo pues si $q \in \Omega_\gamma$, sea $\tilde{q} = \phi_q(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R} tendiendo a $+\infty$ y tal que $\{\phi_p(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tienda a q como $\phi_{t_n+s}(p) = \phi_s \circ \phi_{t_n}(p) = \phi_s(q) = \tilde{q}$ luego $\tilde{q} \in \Omega_\gamma$, por tanto para todo $s \in \mathbb{R}$,

$\phi_s(\Omega_\gamma) \subseteq \Omega_\gamma$, de otro lado $q = \phi_s(\phi_{-s}(q))$ y como $\phi_{-s}(q) \in \Omega_\gamma$ tenemos $\phi_s(\Omega_\gamma) = \Omega_\gamma$. Por

consiguiente Ω_γ es invariante por X . En forma análoga se verifica que A_γ es invariante para X . \square

- 4.7 Corolario: Si γ es un punto singular o una órbita periódica entonces $\Omega_\gamma = A_\gamma = \gamma$

Demostración.

En efecto, si γ es un punto singular o una órbita periódica entonces $\gamma_y^+ = \gamma = \overline{\gamma_y^+}$ y $\gamma_y^- = \gamma = \overline{\gamma_y^-}$ luego $\Omega_\gamma = A_\gamma = \gamma$ \square

- 4.8 Corolario: Si γ es una órbita no singular, cerrada y no periódica entonces $\Omega_\gamma = A_\gamma = \emptyset$

Demostración.

En efecto, como $\gamma_y^+ \subset \gamma$, para todo y , tenemos $\overline{\gamma_y^+} \subset \gamma$ luego $\bigcap_{y \in \gamma} \overline{\gamma_y^+} = \Omega_\gamma \subset \gamma$ y como γ es minimal entonces $\Omega_\gamma = \emptyset$ o $\Omega_\gamma = \gamma$. Por otro lado, si $\Omega_\gamma \neq \emptyset$ entonces $\Omega_\gamma = \gamma$, por 2.9 (i) γ es propia, luego (2.6) existe para $z \in \gamma$ un abierto distinguido 0 con $z \in 0$, tal que $0 \cap \gamma$ es una sola placa. Sea $z_1 \in \gamma_z^+$, $z_1 \neq z$ entonces, como $z \in \gamma = \bigcap_{y \in \gamma} \overline{\gamma_y^+}$ tenemos $z \in \gamma_z^+$ luego $0 \cap \gamma_z^+ \neq \emptyset$ y por tanto $z \in \gamma_z^+$ de donde, existen t_0, t_1 en \mathbb{R} tal que $\phi_y(t_0) = \phi_y(t_1) = z$ por 1.41 γ es periódica, lo cual contradice nuestra hipótesis; por tanto $\Omega_\gamma = \emptyset$. En forma análoga, $A_\gamma = \emptyset$. \square

- 4.9 Corolario: Para toda órbita γ no singular, ni periódica, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) γ es propia
- (b) $\gamma \cap A_\gamma = \delta \cap \Omega_\gamma = \emptyset$
- (c) $\bar{\gamma} - \gamma = A_\gamma \cup \Omega_\gamma$

Demostración.

(a) \implies (b)

Si $\delta \cap \Omega_\gamma \neq \emptyset$ entonces existe $z \in \delta \cap \Omega_\gamma$ como $z \in \Omega_\gamma$ y Ω_γ es invariante tenemos $\delta \subseteq \Omega_\gamma$; luego para todo $y \in \delta$, $\delta \subseteq \bar{\delta}_y^+$. Como γ es propia, por el mismo argumento usado en 4.8, γ es periódica, lo cual contradice la hipótesis, luego $\delta \cap \Omega_\gamma = \emptyset$; en forma análoga $A_\gamma \cap \delta = \emptyset$

(b) \implies (c)

$$\begin{aligned} y \in A_\gamma \cup \Omega_\gamma &\iff y \notin \delta \text{ y } y \in A_\gamma \text{ o } y \in \Omega_\gamma \text{ (por b)} \\ &\iff y \notin \delta \text{ y para todo } z \in \delta, y \in \bar{\delta}_z^-, y \in \bar{\delta}_z^+ \\ &\iff y \notin \delta \text{ y } y \in \bar{\delta} \\ &\iff y \in \bar{\delta} - \gamma \end{aligned}$$

(c) \implies (a)

como $\bar{\delta} - \gamma = A_\gamma \cup \Omega_\gamma$ entonces $\bar{\delta} - \gamma$ es cerrado en δ luego δ es abierto en $\bar{\delta}$ y por 3.7 δ es propia. \square

4.10 Corolario: Para toda órbita γ no singular ni periódica son equivalentes las siguientes propiedades.

- (a) δ no es propia
- (b) $\delta \subseteq \Omega_\gamma \bullet \delta \subseteq A_\gamma$ (órbita recurrente)
- (c) $\bar{\delta} = \Omega_\gamma \cup A_\gamma$

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Si $\delta \not\subset \Omega_\gamma$ y $\delta \not\subset A_\gamma$, como Ω_γ y A_γ son invariantes, $\delta \cap A_\gamma = \emptyset$ y $\delta \cap \Omega_\gamma = \emptyset$ luego por 4.9 δ es propia contradiciendo (a) por tanto $\delta \subset \Omega_\gamma$ o $\delta \subset A_\gamma$

(b) \Rightarrow (c)

como $\Omega_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \delta} \overline{\delta_\gamma}$ y $A_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \delta} \overline{\delta_\gamma}$ entonces $\Omega_\gamma \cup A_\gamma \subset \overline{\delta}$ de otro lado (por b)

$\delta \subset \Omega_\gamma$ o $\delta \subset A_\gamma$ luego $\overline{\delta} \subset \Omega_\gamma$ o $\overline{\delta} \subset A_\gamma$ es decir $\overline{\delta} \subset \Omega_\gamma \cup A_\gamma$. Luego $\overline{\delta} = \Omega_\gamma \cup A_\gamma$

(c) \Rightarrow (a)

Si δ es propia entonces por 4.9

$\overline{\delta} \neq \Omega_\gamma \cup A_\gamma$ lo cual contradice (c), por tanto δ no es propia. \square

CAPITULO 2

EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE VARIETADES DE DIMENSION DOS

1. Introducción.

En este capítulo estudiaremos flujos generados por un campo vectorial de clase C^1 sobre una variedad compacta de dimensión dos. Por comodidad asumiremos que la variedad es orientable, en cuyo caso es una esfera, \mathbb{S}^h con h asas. Asumiremos que el campo vectorial tiene un número positivo y finito de singularidades no degeneradas. Aquí, "no degenerada" significa que los valores propios asociados con la diferencial del campo vectorial en una singularidad, tienen parte real no nula.

El problema que nos interesa es determinar cuando existe una órbita recurrente no trivial sobre \mathbb{S}^h

1.1 Definición. Sea X un campo vectorial C^1 sobre M y ϕ el flujo generado por X . Diremos que una órbita γ de X es recurrente si, y solo si $\gamma \subseteq \Omega_\gamma \circ \gamma \subseteq A_\gamma$

1.2 Definición: Una órbita cerrada γ de X es atractora si existe una vecindad V de γ tal que, para todo $P \in V$ se tiene $\bigcap_{p \in \mathbb{R}} \phi_p(P) = \gamma$

1.3 Definición: Una órbita cerrada γ es una órbita destructora de X si y solo si, γ es una órbita atractora de $-X$.

1.4 Definición: Sean P y Q singularidades de X .

una órbita de tránsito generada por P (o Q) es una órbita γ tal que $\Omega_\gamma = \{P\}$ y $A_\gamma = \{Q\}$.

En todo el capítulo y los sucesivos consideraremos válidas las siguientes hipótesis

H_1 : no hay singularidades atractoras

H_2 : no existen curvas cerradas consistiendo enteramente de sillas y órbitas de tránsito.

La hipótesis de que las singularidades son no degeneradas solo implica que una singularidad debe ser un detractor, atractor o una silla. [Ver Pallas, 8] De aquí, si asumimos H_1 entonces una singularidad debe ser un detractor o una silla.

1.5 Teorema: Sea X un campo vectorial C^1 , sobre la esfera S^2 , con un número finito de singularidades no degeneradas. Si H_1 y H_2 son válidas entonces existe una órbita periódica no trivial.

Demostración.

El índice de una silla no degenerada es -1 y el de un detractor es $+1$. [Ver Coddington y Levinson, 3] como la suma de los índices de las singularidades debe ser igual al índice de EULER-POINCARÉ de S^2

el cual es 2, debe existir al menos dos detractores presentes. Después de remover una pequeña vecindad de todos los detractores obtenemos una región compacta en el plano en la cual el flujo está atravesando la frontera.

El teorema de Poincaré-Bendixon. [Ver Schwartz, 10] nos da el resultado esperado. \square

2. Flujos con un detractor libre

2.1 Definición: Diremos que un detractor es libre si no genera órbitas de tránsito.

2.2 Teorema: Sea ϕ un flujo generado por un campo vectorial C^1 sobre \mathbb{C}^h con al menos un detractor libre; si H_1 y H_2 son válidas entonces, existe una órbita recurrente no trivial.

Demostración.

Sea P un detractor libre. Se define la región de detracción correspondiente a P por:

$$D = \{x \in \mathbb{C}^h : A\phi_x(\mathbb{R}) = \{P\}\}$$

La frontera ∂D es compacta e invariante, si ella no tiene singularidades, entonces contiene una órbita periódica no trivial.

Si existe una singularidad Q en ∂D . Claramente Q debe ser una silla. Consideremos una

vecindad de Q como se muestra en la figura 8.

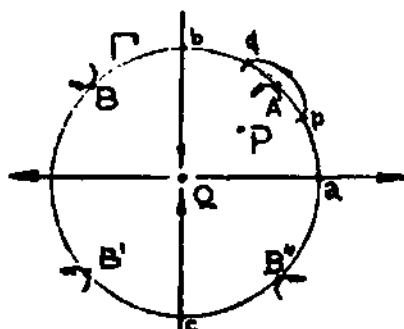


Fig. 8

Al menos una órbita de la variedad estable de Q (conjunto de las órbitas de X que tienen a Q como conjunto w -límite) y al menos una órbita de la variedad inestable de Q (conjunto de órbitas que tienen a Q como conjunto α -límite) penetran en ∂D . Asumiremos que ellas son localmente los ejes positivos x, y . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que P está en el primer cuadrante. Además, podemos asumir que no hay otras singularidades en la vecindad dada. La vecindad puede ser elegida de manera que su curva frontera Γ tenga las siguientes propiedades: [Ver Palis, 8]

"El flujo es transverso a Γ excepto en el punto A (donde la órbita a través de A dobla hacia adentro) y en los puntos B, B', B'' , donde las órbitas doblan hacia afuera".

Asumiremos sobre Γ un orden, el cual aumenta en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj con el origen en c y consideremos el flujo saliendo de Γ en un punto $P < A$. Para P suficientemente próximo a A , por continuidad del flujo, ésta órbita debe tocar Γ en $q > A$ y además, la curva orbital L de P a q es homotópicamente trivial relativa al disco cerrado Δ acotado por Γ , esto es, L más el intervalo $[p, q]$ sobre Γ es homotópico a un punto. Definimos una aplicación T tal que lleva p en q , en esta forma, T resulta un homeomorfismo de un pequeño intervalo abierto $J = (\alpha, A)$ sobre $T(J) = (A, \beta)$.

Definimos ahora T en α como $T(\alpha) = \beta$ y consideremos la posibilidad de extender T antes de α . De un lado, si la órbita a través de α sale de Γ transversalmente y reentra transversalmente en β (en un tiempo finito) entonces T puede ser extendido a un intervalo abierto N alrededor de α y $\beta \in T(N)$.

De otra manera, es cierta alguna de las siguientes posibilidades:

- (i) la órbita a través de α no toca β
- (ii) ella alcanza β y dobla hacia afuera de Γ
en α

(iii) ella alcanza β y dobla hacia afuera de Γ en β .

En el caso (ii) es inmediato que $\alpha = \beta < a$ y en el caso (iii) $\beta = \beta > b$ (Fig. 8).

Los siguientes lemas tienen el objeto de demostrar que las posibilidades (i), (ii) y (iii) no se verifican.

2.3 Lema: Si $\alpha < a$ o $\beta > b$ entonces existe una órbita periódica L la cual acota un disco conteniendo p y no Q .

Demostración.

Si $\beta > b$ entonces $b \in T(J)$. Se sigue que la órbita λ de b regresa a $p = T^{-1}(b)$. Por H_2 , $p \neq a$ (Figura 9)

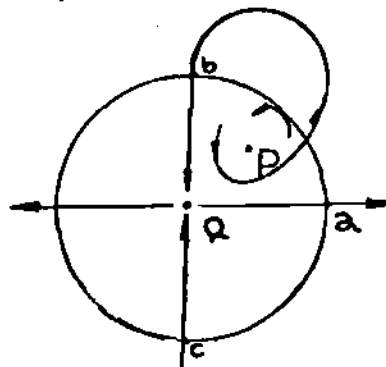


Fig. 9

Si $\beta > a$, consideremos el conjunto α -límite de λ , el teorema de Poincaré - Bendixon asegura que $A_\lambda = \{P\}$ o A_λ es una órbita periódica. La primera posibilidad es descartada puesto que p es un detractor libre. Que la órbita periódica ro-

de a P y no a Q es evidente de las consideraciones del índice. Si $P \prec a$ entonces, el conjunto w-límite de la órbita a través de a es una órbita periódica por el mismo razonamiento. El caso $\alpha \prec a$ es análogo. Luego el lema es válido. \square

Esto contradice el hecho que $Q \in \partial D$, luego las posibilidades (ii), (iii) no se verifican.

En el caso (i) donde la órbita λ a través de α nunca toca β y $a \ll \alpha \ll \beta \ll b$, si el conjunto w-límite de λ , Ω_λ , no contiene una singularidad entonces contiene una órbita recurrente, de otra forma Ω_λ contiene una silla; sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de J con $x_n \rightarrow \alpha$ monotónicamente y sea τ_n el tiempo en el que la órbita a través de x_n toca $y_n = T(x_n)$ esto es, $y_n = \phi(\tau_n, x_n)$. La sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface $\tau_n \rightarrow +\infty$. Los λ_n representan los arcos de la trayectoria de x_n a $y_n = T(x_n)$.

2.4 Lema: Los arcos γ_n convergen a una curva γ uniendo α a β y consistiendo de, un arco de la variedad estable uniendo α a una silla, un arco de la variedad inestable uniendo β a una silla, y órbitas de tránsito uniendo sillas. (Figura 10).

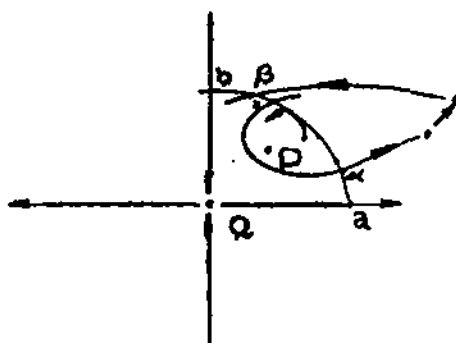


Fig. 10

Demostración.

Sean Q, Q_1, \dots, Q_N todas las sillas. Seleccionemos ϵ tal que las ϵ -vecindades $N_\epsilon(Q_i), i=1, \dots, N$ son dos a dos disjuntas y la unión no interseca Γ . Sea ϵ suficientemente pequeño tal que el flujo en $N_\epsilon(Q_i)$ es canónico, esto es, las órbitas parecen arcos hiperbólicos, los cuales doblan hacia afuera de la frontera de N_ϵ en exactamente cuatro puntos. Cada vecindad consiste de cuatro cuadrantes; sean $k_1, \dots, k_{4(n+1)}$ las clausuras de estos cuadrantes, incluyendo los cuadrantes de Q acotados por Γ . Sea k_1 el cuadrante conteniendo los puntos x_n sobre su frontera.

Observación A: Para n fijo, λ_n penetra cada k_i a lo sumo una vez. esto se deduce del hecho de que cada λ_n más el arco $\overline{y_n x_n}$ sobre $\Gamma \cap k_i$, acota un disco Δ_n . Si λ y λ' son dos arcos de $\gamma_n \cap k_i$ para algún i fijo, entonces sea \cup un segmento lineal en k_i de λ a λ' . Si \cup no corta otra compo-

nente de $\gamma_n \cap k_i$, entonces ℓ permanece totalmente en Δ_n o en el complemento Δ_n^c .

Pero entonces el flujo sobre λ debe tener dirección opuesta que sobre λ' lo cual es claramente imposible. Por lo tanto ℓ debe intersectar otra componente de $\lambda_n \cap k_i$. Procediendo de esta manera obtenemos una infinidad de componentes de $\lambda_n \cap k_i$ para un n fijo, lo cual contradice el hecho que el tiempo τ_n es finito. Esto prueba la observación A.

Observación B: Sea i fijo y supongamos que $\lambda_n \cap k_i \neq \emptyset$ para algún n' . Entonces $\lambda_n \cap k_i \neq \emptyset$ para todo $n \gg n'$. Para probar esto, sea ℓ un segmento lineal en k_i de un punto de λ'_n a la silla s formando uno de los vértices de k_i . Como los discos Δ_n forman una sucesión creciente, esto es $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ y s no está en ninguno de ellos, ℓ intersecta a todos ellos.

Regresando a la demostración del lema, sean ν_n el número de $k_i, i \gg 2$ intersectados por λ_n . De (A) vemos que $\nu_n \leq 4(N+1)$ y de (B), $\nu_{n+1} \geq \nu_n$. De esto, existe \bar{n} tal que para $n \gg \bar{n}$, $\nu_n = \nu = \text{constante}$. Para $n \gg \bar{n}$ sean k'_1, \dots, k'_ν los cuadrantes intersectados por λ_n ordenados en el orden de intersección. Sea p_n^j el punto en el cual λ_n entra en k'_j . Como los Δ_n son encajonados, los p_n^j (j fijo) se mueven monótonicamente a lo largo de $\partial k'_j$ y aquí converge, (obsérvese

que los p_n^j no pueden estar en la porción de ∂K_j^i (consistiendo de la variedad estable e inestable de la silla s en el vértice). Si ninguna de estas sucesiones converge a un punto sobre la variedad estable de una silla, entonces tenemos, para todo n , que los λ_n permanecen a mayor distancia, que una distancia fija ε , de toda silla contradiciendo el hecho de que, Ω_λ , el conjunto w -límite de $\phi(t, \alpha)$ contiene una silla. Luego, sea j_0 el menor j para el cual $p_n^{j_0}$ converge a un punto q sobre la variedad estable, $p_n^{j_0} \rightarrow q$. Los σ_n satisfacen $\phi(\sigma_n, x_n) = p_n^{j_0}$ entonces $\{\sigma_n\}$ es acotada y sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\{\sigma_n\}$ converge, digamos que sea $\sigma = \lim \sigma_n$ luego $\phi(\sigma_n, x_n) = p_n^{j_0} \rightarrow q = \phi(\sigma, \alpha)$. Esto prueba que α está sobre la variedad estable de una silla. En forma análoga se verifica que β está sobre la variedad inestable de una silla en Ω_λ con lo cual se verifica el lema. \square

Regresando a la demostración del teorema, vemos que $\alpha = a$ y $\beta = b$ contradice H_2 . Siguiendo el argumento de 2.3, si $\alpha > a$, consideremos la semi-órbita negativa λ^- a través de α . Si λ^- permanece dentro de Γ , ella permanece fuera de Q como órbita cerca de Q , pegando con Γ cerca de b cuando t decrece. El teorema de Poincaré-

Bendixon implica entonces que existe una órbita periódica circundando P , contradiciendo otra vez el hecho de que $Q \in \partial D$. Si λ sale de Γ en $x < \beta$ (Fig. 10), entonces continuando λ arribamos a $T^{-1}(x) \in \Gamma$ vía un segmento orbital el cual es homotópicamente trivial relativo a Γ .

Continuando cuando $t \rightarrow \infty$ vemos que λ es atrapado en un disco con una singularidad P y el teorema de Poincaré-Bendixon nos da una órbita periódica rodeando a P , lo cual nos lleva a la misma contradicción. Si λ sale de Γ en un punto $x > \beta$ repetimos el argumento anterior, esta vez usando la semiórbita positiva a través de β .

Finalmente si $\alpha = a$, entonces $\beta < b$ la semiórbita positiva a través de β genera una órbita periódica rodeando a P . Como en cualquier caso se llega a una contradicción entonces ∂D no contiene singularidades. \square

- 2.5 Observación: En la demostración del teorema no se hace, esencialmente, uso del hecho de que P es una singularidad; luego podemos sustituir en el teorema singularidad detractora por una curva simple cerrada γ acotando un disco con asas a través de la cual el campo vectorial está en todas partes apuntando hacia la región anular acotada por γ , el eje x ,

el eje y y el segmento dirigido de Γ de a a b .
(figura 11).

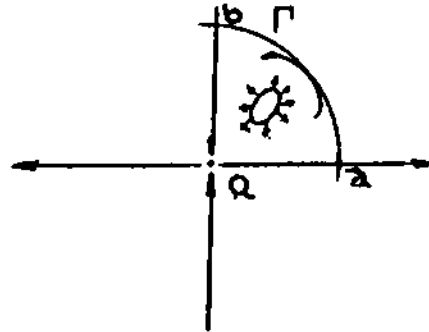


Fig. 11

CAPITULO 3

EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE ESFERAS Y CONTRA EJEMPLOS

Empezaremos esta sección definiendo una configuración especial de singularidades. A través de esta sección asumiremos válidas ambas hipótesis H_1 y H_2 del Cap. 2.

1.1 Definición: Un lazo es una curva cerrada, simple, consistiendo de sillas, detractores y órbitas de tránsito uniéndolos tal que a lo largo de la curva las sillas y detractores aparecen alternados.

1.2 Observación: Un lazo debe contener el mismo número de detractores y sillas, pero dos lazos deben intersectarse en un detractor.

Probaremos el siguiente lema concerniente a lazos.

1.3 Lema: Dado un lazo L y $\epsilon > 0$ existe una σ -vecindad de L , $G_\sigma(L)$, $\sigma \ll \epsilon$, la cual es detractora, esto es, los vectores sobre la frontera $\partial G_\sigma(L)$ están apuntando hacia afuera.

Demostración.

Denotaremos las sillas y detractores en L por s_i y d_i respectivamente, $i=1, \dots, n$ y sea $\delta \ll \epsilon$ tan pequeño que $N_\delta(L) = \bigcup_{x \in L} N_\delta(x)$ es topológicamente una vecindad tubular. Sea $\sigma \ll \delta$ tan pequeño que sobre $\partial N_\sigma(d_i)$ los vectores están apuntando hacia afuera y sobre $N_\sigma(s_i)$ el flujo es canónico, esto es,

las trayectorias que no son de la variedad estable o inestable parecen arcos hiperbólicos. Si σ es suficientemente pequeño entonces las órbitas empezando en $t = 0$ en $N_\sigma(s_i)$ permanecen en $N_\sigma(L)$ para todo tiempo $t \ll 0$.

Sea
$$E = \bigcup_{i=1}^n [N_\sigma(s_i) \cup N_\sigma(d_i)]$$
 y definimos $G = \bigcup_{t \ll 0} \phi(t, E)$; $\phi(t, E) = \{\phi(t, X) : X \in E\}$

sobre la frontera de los vectores no están apuntando al interior. Por el argumento general de posición, puede ser ajustado a darnos una vecindad $G_\sigma(L)$ sobre cuya frontera los vectores apuntan al exterior. \square

- 1.4 Ejemplo: Como una aplicación de lo anterior consideremos dos ejemplos, cada uno sobre una esfera con h asas $\{^h$ como el ilustrado en la configuración mostrada en la figura 12 y 13. Donde D es un detractor y S_i son sillas.



Fig.12



Fig.13

Asumimos que no existen órbitas de tránsito generadas por D o S_i excepto las mostradas. De hecho, si $h=2$ debe haber singularidades adicionales

presentes ya que la característica de Euler (la cual debe coincidir con el índice del campo vectorial) de Σ^h es $2(1-h)$. Si $h = 0$, por el teorema 1.5 Cap.2, se tiene una órbita periódica en ambos casos de las figuras 12 y 13. Si $h = 1$, debe haber dos detractores libres y el teorema 2.2 Cap.2 nos da una órbita recurrente. Veremos en forma rápida que para $h = 2$ obtenemos una órbita periódica en el caso de fig.12 y fig.13 (ver teorema 3.1); ahora consideremos $h > 2$. La región dentro del círculo es topológicamente un disco, esto es, las figuras se distinguen por el hecho de que en fig.13 las órbitas de tránsito $D S_2$ y $D S_3$ emanan del mismo lado del lazo cerrado $L = DS_1D$. Por el lema 1.3 hay una vecindad detractora de L , $G_\sigma(L)$ que no contiene S_2 ni S_3 . Si L acota un disco Δ el teorema de Poincaré-Bendixon implica la existencia de una órbita periódica en Δ en ambos casos de fig.12 y fig.13. En el caso contrario, es interesante observar que para el flujo descrito por fig.12 no se obtiene la conclusión, mientras en el caso de la fig.13 existe una órbita recurrente no trivial sobre Σ^h . El argumento para esto último es como sigue. Cortamos Σ^h a lo largo de $\partial G_\sigma(L)$, eliminando la porción conteniendo L y pegando a la porción restante dos discos abiertos detractores (un disco

abierto detractor es una pequeña vecindad de un detractor). La configuración resultante es una (posiblemente desconexa) variedad compacta, orientable sin borde. El disco pegado a la componente K de $\partial G_\sigma(L)$ que falta para intersectar cada una de las órbitas de tránsito $D S_2$ y $D S_3$ es ahora un disco abierto detractor, el cual es libre. La observación al final capítulo 2 es ahora aplicable y tenemos una órbita recurrente no trivial.

El procedimiento usado en los ejemplos previos pueden ser generalizados como sigue: Removiendo un lazo y sus vecindades detractoras resulta que la característica de Euler de la variedad no cambia pero posiblemente desconecta la superficie. Pegando dos discos, la característica aumenta dos unidades. Considerando $\{^h$ con característica $\chi = 2(1-h)$, si existen h lazos entonces, después de h reemplazos tenemos $\chi = 2$ y por esto una de las componentes debe ser una esfera. Pero entonces el teorema 1.5 del capítulo 2 implica el siguiente:

1.4 Teorema: Si existen h lazos sobre $\{^h$ y H_1, H_2 son ciertas, entonces existe una órbita periódica sobre $\{^h$.

Este resultado puede ser generalizado de la siguiente manera.

1.5 Teorema: Si existen L_1, \dots, L_k lazos sobre Σ^h tal que $\Sigma^h - \bigcup_{i=1}^k L_i$ tiene una componente Σ^* la cual es una esfera con hoyos, entonces si H_1 y H_2 son ciertas sobre Σ^* , existe una órbita periódica sobre Σ^* .

Demostración.

Cortando Σ^h a lo largo de $\partial G_\sigma(L_i)$, $i=1, \dots$, extrayendo la parte que contiene L_i y pegando a cada hoyo de la esfera una vecindad detractora, luego por el teorema 1.5 del capítulo 2 existe una órbita periódica no trivial. \square

El siguiente corolario es ahora una aplicación del último teorema.

1.6 Corolario: Consideremos un flujo sobre el toro Σ^1 . Asumimos válidas H_1 y H_2 y que existe al menos un detractor. Si cada detractor genera al menos dos órbitas de tránsito diferentes, entonces existe una órbita periódica.

Demostración.

Como la característica de Euler de Σ^1 es cero deben existir el mismo número de detractores y sillars, como existe al menos un detractor entonces también debe existir al menos una silla.

Luego existe por lo menos un lazo L entonces por cirugía (proceso de quitar $N_\sigma(L)$ y pegar dos discos detractores) la característica de la región restante es 2 y por el teorema anterior existe una órbita periódica no trivial. \square

2. Contraejemplos.

En esta sección presentaremos dos ejemplos, los cuales dan una respuesta negativa a nuestro problema básico. El primer ejemplo es un flujo sobre \mathbb{C}^1 con una única silla y detractor y una órbita de tránsito. El segundo ejemplo es un flujo sobre \mathbb{C}^2 con exactamente dos sillas. Para cada ejemplo, demostramos que no hay órbita recurrente no trivial aún cuando H_1 y H_2 sean ciertas.

2.1 Ejemplo: (el flujo del diapason) Empezamos con un campo vectorial continuo definido sobre el rectángulo en la Fig. 14; con un único detractor D y silla S y una única órbita de tránsito conectando D y S . Asumiremos que el campo vectorial es simétrico con respecto a la línea a través de D y S y que los vectores son verticales en las dos líneas horizontales en los extremos superior e inferior del rectángulo. Identificamos ahora los lados verticales y obtenemos un cilindro Γ

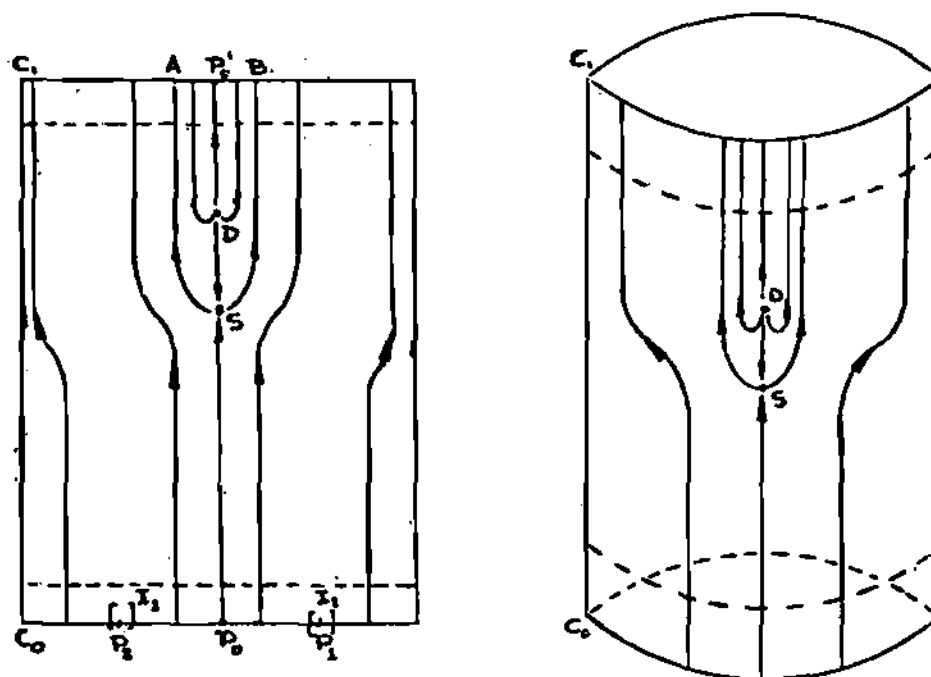


Fig. 14

Teniendo como frontera el círculo superior C_1 y el círculo inferior C_0 . Definimos un ordenamiento cíclico sobre C_0 y C_1 tal que la dirección positiva corresponde al ordenamiento izquierda-derecha en la figura 14.

Se define una aplicación $\phi: C_0 \longrightarrow C_1$ haciendo $\phi(P_0) = P'_0$ (ver Fig. 14) y para todo otro $P \in C_0$, $\phi(P)$ se obtiene siguiendo el flujo. De hecho ϕ es discontinua en P_0 .

Sean P_1 y P_2 otros dos puntos (distintos) sobre C_0 y asumimos que ellos son escogidos tal que $P_0 < P_1 < P_2$ en el orden sobre C_0 . Sea

$$\delta = \min \{d(P_i, P_j) : 0 < i < j < 2\}$$

Donde d denota la longitud de arco sobre C_0 . Observamos que $\delta > 0$. Consideremos $\tau_0 = 0$, $\tau_n = 54^{-n}$,

$$n=1,2,\dots, \sigma_n = 2^{n-3}\tau_n, n=3,4,\dots, \text{ y } \sigma_n = \tau_n$$

para $n=0, 1, 2$. Tenemos entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_n < \delta \\ \sigma_{n+1} < \delta - \{\sigma_1 + \dots + \sigma_n\} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Denotemos con \mathcal{J} una colección finita de intervalos cerrados en C_0 , sea $\mathcal{J} = \{I_1, \dots, I_n\}$. Entonces

$D_0 = C_0 - \{I_1 \cup \dots \cup I_n\}$ consiste de un número finito de intervalos abiertos. Denotemos con $\|\mathcal{J}\|$ la longitud de arco del mas pequeño intervalo abierto en D_0 .

Observamos ahora que existe una sucesión de puntos $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ en C_0 con las tres propiedades siguientes

(1) los intervalos cerrados I_n de longitud de arco τ_n centrados en P_n no se superponen.

(2) Si $\mathcal{J} = \{I_0, \dots, I_n\}$, entonces $\|\mathcal{J}\| > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \{\delta - (\sigma_1 + \dots + \sigma_n)\}$ (4.2)

(3) $P_k < P_j < P_n$ si y solo si $P_{k+1} < P_{j+1} < P_{n+1}$

Demostremos esto por inducción. La observación es cierta para $\{P_0, P_1, P_2\}$ ya que han sido escogidos con ésta propiedad. Asumimos ahora que los puntos $\{P_0, \dots, P_k\}$ ($k > 2$) han sido escogidos tal que los correspondientes intervalos I_0, \dots, I_k no se superponen, (4.2) es cierta para $n=k$, y (3)

es válido para estos puntos.

Sean P_L y P_m los dos puntos de la sucesión $\{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\}$ que son inmediatamente adyacentes a P_k en C_0 . esto es, $P_L < P_k < P_m$ y ningún otro punto de $\{P_0, \dots, P_{k-1}\}$ está entre P_k y los puntos extremos P_L y P_m . Se deduce de (3) que el intervalo abierto (P_{L+1}, P_{m+1}) no contiene puntos de $\{P_1, \dots, P_k\}$ (puede contener P_0), se deduce de (2) y (4.1) que el conjunto.

$$G_k = (P_{L+1}, P_{m+1}) - \{I_0 \cup I_{L+1} \cup I_{m+1}\}$$

Consiste de uno (o dos) intervalos abiertos de longitud mayor que τ_{n+1} (observe que G_k consiste de dos intervalos abiertos si y solo si P_0 está en (P_{L+1}, P_{m+1})). Denotemos el punto medio del mayor intervalo abierto en G_k por P_{k+1} .

(si ambos intervalos tienen la misma longitud, seleccionamos el intervalo abierto adyacente a I_{L+1} para limitar), se deduce ahora que los intervalos

$$J_{k+1} = \{I_0, \dots, I_k, I_{k+1}\} \quad \text{no se trasponen. También}$$

$$\|J_{k+1}\| \geq \frac{1}{2} \|J_k\| - \frac{\tau_{k+1}}{2}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \{ \delta - (\sigma_1 + \dots + \sigma_{k+2}) \} \right] - \frac{\tau_{k+1}}{2}$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \{ \delta - (\sigma_1 + \dots + \sigma_k) \} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} 2^{k-2} \tau_{k+1}$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \{ \delta - (\sigma_1 + \dots + \sigma_{k+1}) \}$$

lo cual es 4.2 para $n = k+1$. Finalmente, el ordenamiento en (3) es claro por nuestra selección de P_{k+1} .

Como H es denso en C_0 y $G = I_0 \cup \phi(H)$, se sigue que G es denso en C_1 . Por su construcción la aplicación h es uno a uno sobre G . La aplicación h puede ahora ser extendida a C_1 , la clausura de G ; por observación, los límites laterales derecho e izquierdo existen para una función monótona. Como el recorrido $H = h(G)$ es denso en C_0 , se sigue que estos límites son los mismos. Además, esto demuestra que h es continua, y como C_1 es compacto, h es un homeomorfismo.

Ahora formamos un toro \tilde{C}^1 del cilindro Γ identificando un punto x sobre C_1 con $h(x)$ sobre C_0 . Esto nos da un campo vectorial continuo sobre \tilde{C}^1 . Demostraremos que no hay conjuntos minimales compactos no triviales sobre \tilde{C}^1 .

Razonando por reducción al absurdo, asumimos que M es un conjunto minimal compacto no trivial. El conjunto $E = C_0 \cap M$ es entonces no vacío y compacto. Además, como la silla S no está en M , se sigue que P_0 no está en E . Como el detractor D no está en M , se sigue que $E \cap I_1 = \emptyset$. Similarmemente, $E \cap I_n = \emptyset$, $n=1,2,\dots$. Esto es $E \cap H = \emptyset$.

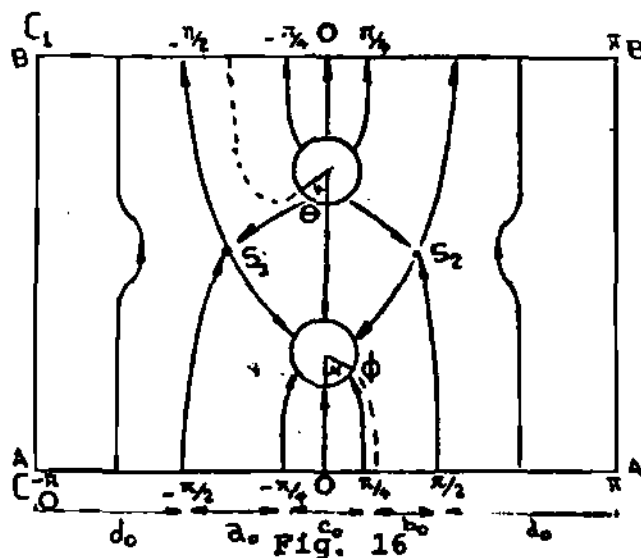
Ahora identificamos cada intervalo I_j , a un único punto en I_j , sea P_j ; este punto, el espacio de identificación es de nuevo un círculo \tilde{C}_0 . Hacemos lo mismo sobre C_1 con los intervalos I_j para

obtener \tilde{C}_1 y observamos que $\phi: \tilde{C}_0 \rightarrow \tilde{C}_1$ es ahora un homeomorfismo sobre \tilde{C}_1 . Obsérvese que la identificación no altera las propiedades de E . Esto es, $\tilde{C}_0 - \tilde{E} \neq \emptyset$ donde $\tilde{E} = \psi(E)$ y ψ es la aplicación de identificación.

La aplicación $T = h \circ \phi: \tilde{C}_0 \rightarrow \tilde{C}_0$ es un homeomorfismo sobre, y tiene una órbita densa $T(P_j) = P_{j+1}$

$j > 0$. Así el número de rotación de T es irracional, [Ver Schwartz, 10]. Esto nos dice entonces que el conjunto Omega límite w_x de la semi órbita positiva $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ es independiente de x . Pero para $x \in E$, $w_x \subset \tilde{E} \neq \tilde{C}_0$ y para $x = P_0$, $w_x = \tilde{C}_0$ y esto es una contradicción.

2.2 Ejemplo: Aquí construimos un flujo satisfaciendo las hipótesis H_1 y H_2 sobre el doble toro \mathbb{T}^2 con precisamente dos puntos silla S_1 y S_2 y sin conjuntos mínimos distintos de esas sillas. Consideremos el flujo dado sobre el cilindro con dos hoyos mostrado en la Fig. 16, donde las fronteras verticales son identificadas. Pegaremos un asa a este cilindro identificando los puntos sobre los dos círculos, recordando la regla $\theta = \phi$ donde θ y ϕ son medidos en la forma indicada en Fig. 16.



Sea $\psi_i, i=1,2$, la medida angular sobre los círculos C_i y definimos la aplicación h_ϵ de C_1 a C_0 por $\psi_0 = \psi_1 + \epsilon$. Esto define un flujo sobre el doble toro Σ^2 . Se definen intervalos abiertos sobre $C_i, i=0,1$ por

$$a_i = \{ -\pi/2 < \psi_i < -\pi/4 \}$$

$$b_i = \{ \pi/4 < \psi_i < \pi/2 \}$$

$$c_i = \{ -\pi/4 < \psi_i < \pi/4 \}$$

$$d_i = \{ -\pi < \psi_i < -\pi/2 \} \cup \{ \pi/2 < \psi_i < \pi \}$$

Asumimos que el flujo sobre el cilindro con asas induce una aplicación ϕ de C_0 a C_1 , donde

$$\phi: \begin{array}{l} a_0 \longrightarrow b_1 \\ b_0 \longrightarrow a_1 \\ c_0 \longrightarrow c_1 \\ d_0 \longrightarrow d_1 \end{array}$$

Además, asumiremos que el flujo es ajustado de manera que ϕ actúa linealmente sobre cada uno de estos cuatro intervalos.

Hagamos $T_\epsilon = h_\epsilon \circ \phi$. Para $\epsilon = 0, T_0^2$ se transforma en la aplicación identidad sobre cada uno de los intervalos a_0, b_0, c_0 y d_0 . Ahora seleccionemos ϵ tal que sea inconmensurable con π y consideremos T_ϵ restringido al conjunto.

$$G = C_0 - \bigcup_{j=1}^{\infty} T_\epsilon^{-n} P_j$$

Donde $P_j = 1, 2, 3, 4$, denota los puntos sobre C_0 con $\psi_0 = \pm \pi/4, \pm \pi/2$. Esta claro de la construcción que, para cada $x \in G$ el conjunto $\{T_\epsilon^n x : n = 0, \pm 1, \dots\}$ es denso en C_0 .

Si hubiera un conjunto minimal E en el flujo sobre \mathbb{T}^2 además de los puntos silla, entonces E debe intersectar C_0 y $E \cap C_0 \subset G$. Sin embargo, $E \cap C_0$ debe entonces ser un conjunto cerrado, invariante bajo T_ϵ y esto es una contradicción. De esto, los únicos dos conjuntos minimales en éste flujo son las dos sillas.

CAPITULO 4

EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE VARIETADES DE DIMENSION 2

Continuamos considerando el problema de determinar condiciones bajo las cuales un flujo sobre una variedad cerrada de dimensión 2 tenga una órbita periódica. Consideraremos en éste capítulo flujos continuos en vez de flujos generados por un campo vectorial C^1 como en los capítulos anteriores; para esto debemos modificar algunas de las definiciones.

1.1 Definición: Una aplicación continua

$$\phi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

Se llama flujo en M si para todo $x \in M$ y $t, s \in \mathbb{R}$ se verifica

$$(1) \quad \phi(0, x) = x$$

$$(2) \quad \phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t+s, x)$$

1.2 Definición: Sea M una variedad cerrada, orientable y conexa de dimensión 2. y $\phi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ un flujo continuo. Diremos que una singularidad p de ϕ es no degenerada si la restricción de ϕ a alguna vecindad de p es topológicamente equivalente a la restricción de un flujo lineal sobre \mathbb{R}^2 a una vecindad del origen, y los valores propios asociados al flujo lineal no tienen parte real nula. Luego una singularidad no degenerada debe ser un

atractor, una silla o un detractor.

En éste capítulo consideraremos flujos continuos que tienen un número finito no nulo de singularidades no degeneradas y que satisfacen las siguientes hipótesis.

H_1 : no existen singularidades atractoras

H_2 : no existen curvas simples cerradas consistiendo enteramente de sillas y órbitas de tránsito.

El teorema del capítulo 2 se puede establecer como sigue.

1.3 Teorema: (Sacker y Sell) sea ϕ un flujo continuo sobre la variedad cerrada, orientable M de dimensión 2. Si H_1 y H_2 son válidas y existe al menos un detractor libre, entonces existe una órbita recurrente no trivial.

1.4 Observación: La prueba dada para el teorema en el capítulo 2 se traslada sin dificultad al teorema 1.3.

La condición de que exista un detractor libre puede ser reemplazada por la condición (cap.2, 2.5) de que exista una curva simple cerrada J separatriz sobre M tal que es transversa al flujo y tal que ninguna órbita de ϕ a través de un punto de J tienda a una singularidad de ϕ cuando $t \rightarrow \infty$

El objeto del capítulo es probar que bajo las mismas hipótesis la conclusión nos garantiza

la existencia de una órbita periódica no trivial. Usaremos el resultado de Sacker y Sell, y simplemente probaremos algunos resultados adicionales para extender la conclusión.

2. Resultados Preliminares.

En ésta sección probaremos tres lemas que necesitaremos posteriormente. El primero requiere del concepto de cubrimiento ramificado.

2.1 Definición: Sea U el disco, unitario, abierto en el plano complejo \mathbb{C} . Sean \tilde{M} y M variedades de dimensión 2, sin frontera; y β una aplicación continua de \tilde{M} sobre M . Diremos que β es un cubrimiento ramificado si, para todo $\tilde{p} \in \tilde{M}$, existen vecindades $\tilde{D} \subset \tilde{M}$ de \tilde{p} , $D \subset M$ de $\beta(\tilde{p})$, homeomorfismos $\check{\phi}: (\tilde{D}, \tilde{p}) \rightarrow (U, o)$, $\phi: (D, \beta(\tilde{p})) \rightarrow (U, o)$ y un entero positivo m (dependiendo de \tilde{p}), tal que $\beta(\tilde{q}) = \phi^{-1} \circ (\check{\phi}(\tilde{q}))^m$ para todo $\tilde{q} \in \tilde{D}$. El entero m es llamado la multiplicidad de \tilde{p} , y, si $m > 1$, \tilde{p} es llamado punto de ramificación de β .

Es conocido que, si $\beta: \tilde{M} \rightarrow M$ es un cubrimiento ramificado, entonces cada $p \in M$ tiene el mismo número de pre-ímagenes bajo β ; asociando a cada punto ramificado su multiplicidad, si el máximo de estos números es $n < +\infty$ diremos que

$\beta: \tilde{M} \rightarrow M$ es un n -cubrimiento ramificado.

2.2 Proposición: Si $\beta: \tilde{M} \rightarrow M$ es un n -cubrimiento ramificado y B_β denota el conjunto de todos los puntos de ramificación de β , entonces si $\beta_0 = \beta/M - B_\beta$ $\beta_0: \tilde{M} - B_\beta \rightarrow \beta(\tilde{M} - B_\beta)$ es una aplicación de cubrimiento en el sentido usual.

Demostración.

Sean $p \in \beta(\tilde{M} - B_\beta)$, $q_1, q_2 \in \tilde{M} - B_\beta$ tal que $\beta(q_1) = \beta(q_2) = p$, existen vecindades \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 en $\tilde{M} - B_\beta$ y homeomorfismos $\check{\phi}_1: \tilde{U}_1 \rightarrow U$, $\check{\phi}_2: \tilde{U}_2 \rightarrow U$, vecindades V_1, V_2 en $\beta(\tilde{M} - B_\beta)$ y homeomorfismos $\psi_1: V_1 \rightarrow U$, $\psi_2: V_2 \rightarrow U$,

$q_1 \in \tilde{U}_1, q_2 \in \tilde{U}_2$ tal que

$$\beta(q) = \psi_1^{-1}(\check{\phi}_1(q)) \quad , \text{ para todo } q \in \tilde{U}_1$$

$$\beta(q') = \psi_2^{-1}(\check{\phi}_2(q')) \quad , \text{ para todo } q' \in \tilde{U}_2$$

Si $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$ entonces $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ es abierto y como $\psi_1^{-1} \circ \check{\phi}_1 = \psi_2^{-1} \circ \check{\phi}_2$ sobre $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ entonces $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ es cerrado, por tanto $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \tilde{U}_2$ y $\check{\phi}_1 = \check{\phi}_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_2$ luego para todo $q \in \tilde{M} - B_\beta$ existe una vecindad V tal que $\beta^{-1}(V)$ es unión de abiertos disjuntos y β restringida a cada uno de esos abiertos es un homeomorfismo. \square

2.3 Lema: Sea M una variedad de dimensión 2, cerrada, orientable de género $g \gg 1$. Entonces, existe un 2 -cubrimiento ramificado $\beta: \tilde{M} \rightarrow M$, donde \tilde{M} es una superficie de género $3g$, cerrada

y orientable, y existen $2g+2$ puntos ramificados sobre \tilde{M} , cada uno de multiplicidad 2.

Demostración.

En la demostración, describiremos \tilde{M} y M explícitamente.

Sean $\epsilon = \frac{1}{4}$ y $p_j \in \mathbb{C}$, definidos para $j=1,2,3,4$ por $p_j = \frac{1}{2}e^{ij\pi/2}$. Definimos \tilde{M} como la unión de todos los sub-conjuntos siguientes de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

$$A_0 = \{(z, t) : |z| < 1, t \in \mathbb{R}\}$$

$$A_n = \{(z, t) : |z| \leq 1, |z - p_j| > \epsilon, j=1,2,3,4; t = n - \epsilon, n=1, \dots, g\}$$

$$B_n = \{(z, t) : |z| \leq 1, |z - p_j| > \epsilon, j=1,2,3,4; t = n + \epsilon, n=0, \dots, g-1\}$$

$$B_g = \{(z, t) : |z| < 1, t = g + \epsilon\}$$

$$C_n = \{(z, t) : |z| = 1, n - \epsilon \leq t \leq n + \epsilon, n=0, \dots, g\}$$

$$T_{n,j} = \{(z, t) : |z - p_j| = \epsilon, n-1 + \epsilon \leq t \leq n - \epsilon, j=1, \dots, 4; n=1, \dots, g\}$$

En la definición de M asumimos que $z^{1/2}$ denota la rama de la función raíz cuadrada dada por $z^{1/2} = r^{1/2} e^{i\theta/2}$ si $z = r e^{i\theta}$ con $-\pi/2 \leq \theta < 3\pi/2$, $r > 0$; sea M la unión de $A_0, B_g, C_0, \dots, C_g$ y los siguientes conjuntos.

$$A'_n = \{(z, t) : |z| \leq 1, |z^{1/2} - p_j| > \epsilon, j=2,4; t = n - \epsilon, n=1, \dots, g\}$$

$$B'_n = \{(z, t) : |z| \leq 1, |z^{1/2} - p_j| > \epsilon, j=2,4; t = n + \epsilon, n=0, \dots, g-1\}$$

$$T'_{n,j} = \{(z, t) : |z^{1/2} - p_j| = \epsilon, n-1 + \epsilon \leq t \leq n - \epsilon; j=2,4, n=1, \dots, g\}$$

En la figura 17 ilustramos la proyección de A_n y A'_n en \mathbb{C} y en la figura 18 \tilde{M} y M en

el caso que M sea el bi-toro.

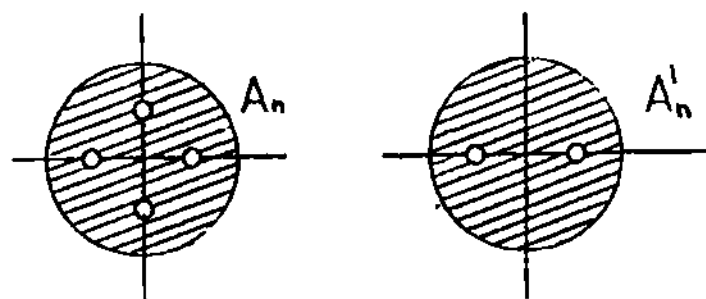


Fig. 17

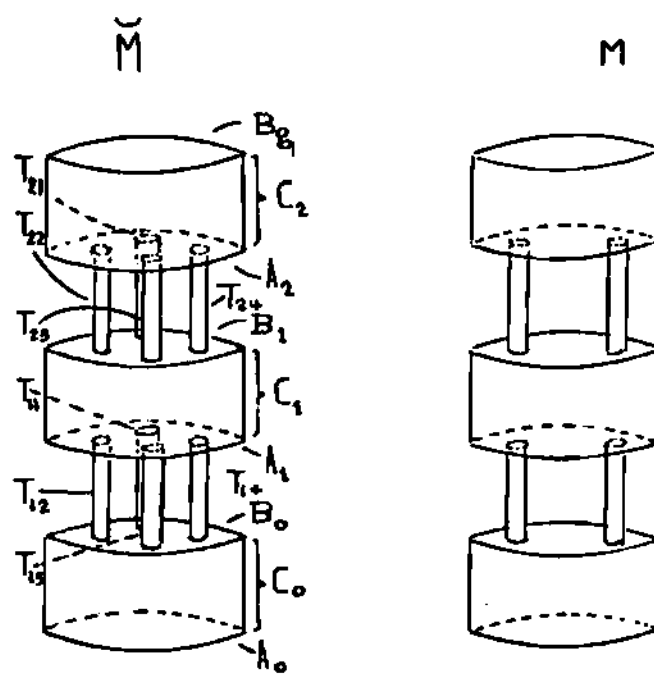


Fig. 18

En la figura 19 ilustramos una triangulación sobre \tilde{M}

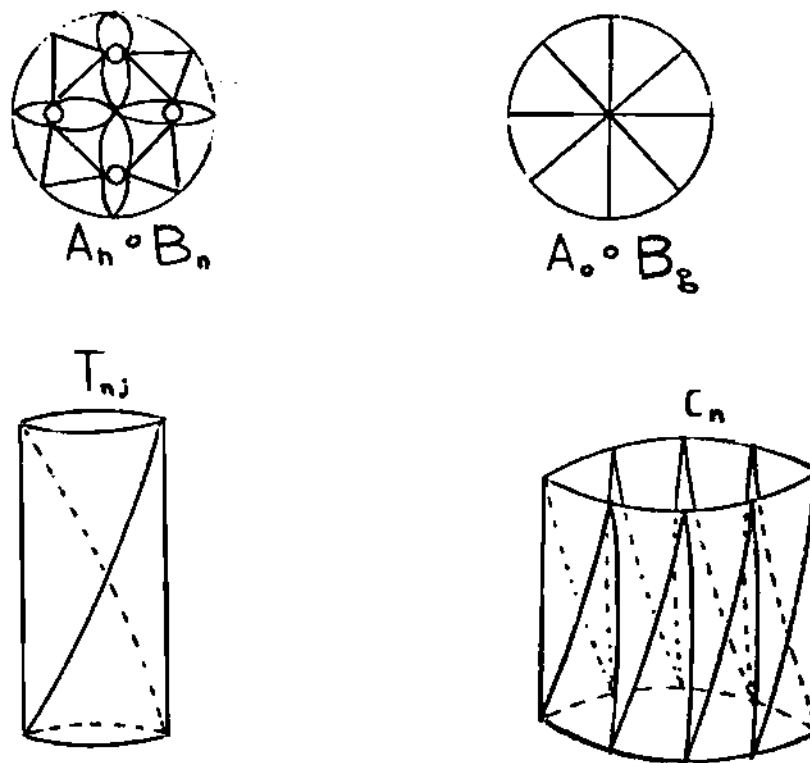


Fig. 19

Sobre la variedad \tilde{M} existen $2g$ sub-conjuntos $A_n \circ B_n$, $g+1$ del tipo C_n , un A_0 , un B_g $4g$ del tipo $T_{n,j}$ luego la triangulación tiene $8 + 120g$ lados, $32 + 80g$ triángulos y $18 + 34g$ vértices, luego la característica de Euler de \tilde{M} es $2 - 6g$ y el género es $3g$; de igual forma $\chi(M) = 2 - 2g$ y el género de M es g .

Por último, definimos $\beta(z, t) = (z^2, t)$, las propiedades locales de β se verifican fácilmente, los puntos de ramificación de β son las

$2g + 2$ intersecciones de \tilde{M} con el eje $z=0$. \square

En la demostración del teorema principal usaremos el hecho de que ciertos flujos pueden ser levantados bajo cubrimientos ramificados. Por simplicidad, consideraremos solo el caso especial que necesitamos. Supongamos que $\beta: \tilde{M} \rightarrow M$ es el cubrimiento ramificado dado por el lema anterior, y que ϕ es un flujo continuo sobre M con al menos una singularidad, digamos P_0 . Sean $P_1, P_2, \dots, P_{2g+2}$ los puntos de ramificación de β y asumimos que P_0 no es la imagen de un punto de ramificación bajo β .

Sea σ un flujo continuo sobre M que tenga exactamente las mismas órbitas (tiempo y orientación) que ϕ , excepto que $\beta^{-1}(P_1), \dots, \beta^{-1}(P_{2g+2})$ son singularidades de σ (la existencia de un tal flujo está garantizada por [2]).

El flujo puede ser levantado a \tilde{M} .

2.4 Lema: Existe un flujo continuo $\tilde{\sigma}: \mathbb{R} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ tal que $\beta \tilde{\sigma}_t = \sigma_t \beta$ (para todo $t \in \mathbb{R}$).

Demostración.

Sea $\tilde{N} = \tilde{M} - \{P_1, \dots, P_{2g+2}\}$, $N = \beta(\tilde{N})$, y denotemos con β_0 la restricción de β a \tilde{N} ; como vimos antes, β_0 es una función de cubrimiento en el sentido usual. Denotemos con ρ la restric-

ción de G a $R \times N$. Sea p_0 una singularidad de ϕ (como $p_0 \in N$), y seleccionemos $\tilde{p}_0 \in \tilde{N}$ con $\beta_0(\tilde{p}_0) = p_0$. Ahora, para cada $t \in R$, φ_t es isotópico a la identidad por una isotopía que fija p_0 ($F(s,x) = \varphi_{(1-s)t}(x)$) (a saber, la restricción de φ a $[0,t] \times \tilde{N}$ o a $[t,\infty) \times N$); aquí el homeomorfismo inducido

$$\varphi_t^* : \phi_1(N, p_0) \longrightarrow \phi_1(N, p_0)$$

Es la identidad ($\varphi_t^*(\langle \infty \rangle) = \langle \varphi_t^* \circ \infty \rangle$). Entonces, por el criterio de levantamiento [12], existe un único homeomorfismo $\tilde{\varphi}_t$ de \tilde{N} que fija \tilde{p}_0 y satisface

$$\beta_0 \tilde{\varphi}_t = \varphi_t \beta_0 \quad (1)$$

Definimos $\tilde{\varphi} : R \times \tilde{N} \longrightarrow \tilde{N}$ por $\tilde{\varphi}(t,x) = \tilde{\varphi}_t(x)$.

Verificamos que $\tilde{\varphi}$ satisface las propiedades de grupo de un flujo continuo como sigue:

Fijamos $s, t \in R$, y se define

$$A = \{x \in \tilde{N} \mid \tilde{\varphi}_s(\tilde{\varphi}_t(x)) = \tilde{\varphi}_{s+t}(x)\}, \quad B = \{x \in \tilde{N} \mid \tilde{\varphi}_s(\tilde{\varphi}_t(x)) = \tilde{\varphi}_{s+t}(x)\}$$

Donde $\tilde{\varphi} : \tilde{N} \longrightarrow \tilde{N}$ es la transformación de cubrimiento no trivial determinada por β_0 , como (1) vale, vemos que $A \cup B = \tilde{N}$; también $A \cap B = \emptyset$, ya que $\tilde{\varphi}$ es punto libre fijado. Como β_0 es un homeomorfismo local, tenemos A y B abiertos.

Pero $\tilde{p}_0 \in A$ y \tilde{N} es conexo, luego $A = \tilde{N}$. Como esto es cierto para $s, t \in R$ arbitrarios, tenemos

que

$$\check{\varphi}_s(\check{\varphi}_t(x)) = \check{\varphi}_{s+t}(x)$$

Para todo $s, t \in \mathbb{R}$, y todo $x \in \check{N}$. La continuidad de $\check{\varphi}$ se debe a (1), la continuidad de φ , y el hecho que β_0 es un homeomorfismo local.

Finalmente, extendemos $\check{\varphi}$ a $\check{\sigma}: \mathbb{R} \times \check{M} \rightarrow \check{M}$

por $\check{\sigma}(p_i, t) = p_i$ ($i=1, \dots, 2g+2$; $t \in \mathbb{R}$) Es entonces inmediato que $\check{\sigma}$ es un flujo continuo, y que

$$\beta \check{\sigma}_t = \sigma_t \beta$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $\check{\sigma}$ es el levantamiento requerido de σ . \square

Necesitamos también encontrar una cota superior del número de órbitas recurrentes esencialmente diferentes y no periódicas sobre una superficie de género g . Debido al teorema de la recurrencia de Birkhoff [cap. 1, 3.12] la clausura de una tal órbita es un conjunto minimal compacto. El siguiente lema establece una cota superior para el número de tales conjuntos minimales. En la demostración usaremos la siguiente extensión de la definición de género.

- 2.5 Definición: El género de una superficie no compacta N es el menor entero l para el cual existe un encajamiento de N en la superficie cerrada de género l ; si no existe tal encajamiento el

género de N es infinito.

2.6 Lema: Supongamos que M es una variedad de dimensión 2 cerrada, orientable de género g y sea $\phi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ un flujo continuo. Entonces existen a lo sumo g conjuntos minimales no periódicos, distintos, de ϕ sobre M .

Demostración.

Se sigue de [11, proposición 4.1] que si Γ es un continuo en la (no necesariamente compacta) 2-variedad N de género k , entonces o Γ está en una 2-celda abierta en N , o cada componente de $N - \Gamma$ tiene género menor que k . Si Γ es un conjunto minimal no periódico de algún flujo sobre N , entonces se sigue del teorema de Poincaré-Bendixon que Γ no está en una 2-célula en N [10] entonces, la última alternativa debe ser cierta.

Supongamos ahora que el lema es falso. Entonces existen conjuntos minimales no periódicos disjuntos $M_1, \dots, M_{g+1} \subseteq M$. Luego del párrafo anterior cada componente de $M - (M_1 \cup \dots \cup M_g)$ tiene género 0. Pero entonces un conjunto minimal no periódico está en alguna superficie de género 0, y esto contradice el teorema de Poincaré Bendixon. \square

3. Existencia de órbitas periódicas

3.1 Teorema: Sea ϕ un flujo continuo sobre la variedad de dimensión 2 cerrada, orientable de género $g > 1$ y asumimos válidas H_1 y H_2 . Si existe al menos un detractor libre, entonces existe una órbita periódica no trivial.

Demostración.

Supongamos que no hay órbita periódica no trivial de ϕ sobre M . Entonces, por el teorema de Sacker y Sell, debe haber al menos una órbita recurrente no periódica, y por tanto, un conjunto minimal no periódico sobre M . Por el lema 3, existen a lo sumo g de tales conjuntos minimales. Denotemos con $\beta: \tilde{M} \rightarrow M$ el 2-cubrimiento ramificado de M dado por el lema 1. Podemos asumir que los $2g+2$ puntos ramificados p_1, \dots, p_{2g+2} sobre \tilde{M} están localizados de manera que al menos un $\beta(p_i)$ está en cada conjunto minimal no periódico de ϕ todos los $\beta(p_i)$ están sobre órbitas recurrentes de ϕ , y no hay dos $\beta(p_i)$ sobre una única órbita de ϕ .

(esto se sigue del hecho que todo par de conjuntos finitos, con el mismo número de puntos, sobre una 2-variedad cerrada son equivalentes bajo un homeomorfismo de la variedad)

Ahora, como en la sección 2, sea σ un flujo continuo sobre M tal que tiene exactamente las mismas (tiempo, orientación) órbitas que ϕ , excepto que las imágenes de cada punto de ramificación de β se transforma en un punto singular de σ . Obsérvese que los únicos (compactos) conjuntos minimales de σ son los puntos singulares. Por el lema 2, existe un flujo $\bar{\sigma}$ sobre M tal que

$$(2) \quad \beta \bar{\sigma}_t = \sigma_t \beta, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Obtenemos la contradicción deseada demostrando que $\bar{\sigma}$ satisface todas las hipótesis del teorema de Sacker-Sell, pero no puede tener órbitas recurrentes.

Primero sea p una singularidad de $\bar{\sigma}$. Si p no es un punto de ramificación, entonces β define una equivalencia topológica entre la restricción de $\bar{\sigma}$ a una vecindad de p y la restricción de ϕ a una vecindad de $\beta(p)$; así p es no degenerado. Si p es un punto de ramificación, entonces se verifica fácilmente que p es un punto silla de $\bar{\sigma}$; se sigue que todas las singularidades de $\bar{\sigma}$ son no degeneradas, que no hay atractores de $\bar{\sigma}$, y que $\bar{\sigma}$ tiene al menos un detractor. Así H_1 se satisface.

También, porque (2) se verifica, si $\bar{x}, \bar{y} \in \check{M}$

con $x = \beta(\bar{x})$ y $y = \beta(\bar{y})$, entonces para toda sucesión $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_{t_n}(\bar{x}) = \bar{y} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{t_n}(x) = y \quad (3)$$

De donde, si $p \in \tilde{M}$ llega a un detractor libre de $\bar{\sigma}$, entonces p es también libre.

Ahora supongamos que $J \subset M$ es un curva simple cerrada que consiste de sillas y órbitas de tránsito de $\bar{\sigma}$. Se deduce de (3), y nuestra hipótesis sobre la posición de los puntos de ramificación de β , que ningún punto de ramificación genera una órbita de tránsito de $\bar{\sigma}$. Aquí las singularidades sobre J cubren sillas de ϕ , y la imagen $\beta(J)$ de J es un lazo consistiendo de sillas y órbitas de tránsito de ϕ . Pero entonces, existe una curva simple cerrada consistiendo de tales órbitas, contrario a nuestra hipótesis que ϕ satisface H_2 . Luego $\bar{\sigma}$ satisface H_2 .

Por último, supongamos que existe una órbita recurrente no trivial, digamos $\gamma(\bar{x})$, de $\bar{\sigma}$; denotemos con \bar{K} la clausura de $\gamma(\bar{x})$ y sea $K = \beta(\bar{K})$.

\bar{K} es un conjunto minimal compacto por [5, teo. 3.7]. Luego K es compacto, invariante, y (aplicando 3) que, para todo $x \in K$, $\overline{\gamma(x)} = K$. Pero entonces K es un conjunto minimal compacto de σ , contrario a nuestra construcción. La con-

traducción demuestra que $\bar{\sigma}$ no puede tener órbitas recurrentes no triviales, y esto completa la demostración del teorema. \square

CONCLUSIONES

En el capítulo 1, "CAMPOS DE VECTORES Y FLUJOS SOBRE VARIEDADES", hemos utilizado la bibliografía que aparece en [5], [6], [16] y [17].

Se han completado en algunos casos las demostraciones y en otros se han elaborado totalmente nuevas demostraciones; nos referimos a las proposiciones 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.19, 1.24, 1.26, 1.28, 1.36, 1.38, 1.42, 1.45, 2.6, 2.8, 3.2, 3.7, 3.8, 3.10, 4.5, 4.6; corolarios 1.8, 1.9, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.16, 1.27, 1.29, 1.31, 1.35, 1.37, 1.43, 2.3, 2.4, 2.7, 2.9, 3.13, 4.7, 4.8; teoremas 1.10, 1.15, 1.21, 1.34, 1.40, 2.1, 3.12 y lema 1.33.

Se han modificado los resultados que aparecen en la bibliografía antes indicada; que en nuestro trabajo aparecen en los corolarios 4.9 y 4.10.

En el capítulo 2, "EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE VARIEDADES DE DIMENSION DOS", se han utilizado, de las referencias-bibliograficas, [1], [2], [4], [6], [8], [9], [10], [13] y [15].

Se han completado las demostraciones y en algunos casos se han modificado, nos referimos a los teoremas 1.5, 2.2 y lemas 2.3 y 2.4.

En el capítulo 3, "EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE ESFERAS Y CONTRAEJEMPLOS", se han utilizado los números [2], [3], [4], [8], [9], [10], [12], [13] y [17] de las referencias bi-

bibliograficas.

Se han completado y modificado las demostraciones de la bibliografía para los resultados que aparecen en el lema 1.3, teorema 1.5 y corolario 1.6.

En el resultado del ejemplo 2.1 se ha modificado la demostración que aparece en la bibliografía.

Finalmente; en el capítulo 4, "EXISTENCIA DE ORBITAS PERIODICAS SOBRE VARIETADES DE DIMENSION 2", se han utilizado los números [7], [9], [10], [12] y [14] de las referencias bibliográficas.

Se han completado y modificado las demostraciones de las referencias bibliográficas e incluimos en los teoremas 1.3 y 3.1; lemas 2.3, 2.4 y 2.6.

La proposición 2.2 es parte de nuestra contribución y no aparece en la bibliografía utilizada.

PROBLEMA ABIERTO

El problema de la existencia de órbitas periódicas, también está relacionada con la existencia de ciclos límites de sistemas polinomiales.

D. Hilbert preguntó sobre la limitación del número de ciclos límites de un sistema polinomial, pero en función del máximo grado de los polinomios; éste problema se conoce como EL PROBLEMA NUMERO 16 DE HILBERT.

Este problema no está resuelto, ni aún para el grado máximo 2 de los polinomios. Estamos interesados en atacar este problema utilizando los trabajos de E. González Velasco, M. Tavares Camacho, V. Arnold, C. Chicone, J. Sotomayor, L. M. Perko y Shi Song Ling.

BIBLIOGRAFIA

1. Alves, J. Ubyrajara, "Formulação De Um Teorema Sobre Campos De Vetores", Atas do Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática. Vol. II, pp.563-588. Rio de Janeiro, 1978.
2. T. Bröker y K. Jänich, "Introducción a la Topología Diferencial". Editorial AC, Madrid, 1977.
3. E. A. Coddington y N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", TATA Mc Graw-Hill Publishing Co. Ltd, 1955.
4. M. P. Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
5. C. Godbillon, "Systèmes Dynamiques Sur Les Surfaces", Institut de Recherche Mathématique A Vancée". Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1979.
6. E. Lima, "Variedades Diferenciáveis", Monografias de Mat. 15 IMPA, 1973.
7. D. A. Neumann, "Existence Of Periodic Orbits On 2-Manifolds", Journal of Differential Equations 27, 313-319, 1978.
8. J. Palis e W. De Melo, "Introdução aos Sistemas Dinâmicos" IMPA, 1978.
9. R. J. Sacker and G. Sell, "On the Existence of Periodic Solutions on 2-Manifolds", Journal of Differential Equations 11, 449-463, 1972.
10. A. Schwartz, "A Generalization of A Poincaré-Bendixon Theorem to Closed Two Dimensional Manifolds", Amer. Jour. of Math. 85, 1963.

11. A. J. Schwartz and E.S. Thomas, The depth of the Center of 2-Manifolds, in "Global Analysis Proc. Symp. Pure Math., Vol.14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970.
12. I. M. Singer, J. A. Thorpe, "Lecture Notes On Elementary Topology and Geometry", Springer-Verlag, 1967.
13. J. Sotomayor, "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias", IMPA, 1979.
14. Springer, G., "Introduction To Riemann Surfaces" Addison-Wesley, Reading, Mass. 1957.
15. Valdivia G. "Metodología de la Investigación Matemática", Universidad de Panamá 1981.
16. Valdivia G., "Introducción a la Topología Diferencial", Universidad de Panamá, 1980.
17. F. W. Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.