Universidad de Panamá
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Programa de Maestría en Matemática Educativa
Facultad de Ciencias Naturales Exacta y Tecnología

El Método Genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primero y segundo grado

Por Orlando Martínez

Trabajo de Graduación para optar por el
Grado de Maestro en Ciencias con
Especialización en Matemática Educativa

Panamá Republica de Panamá

2014

Titulo de la Tesis El Metodo Genetico como recurso didactico para la enseñanza de las ecuaciones de primero y segundo grado"

TESIS

Sometida para optar al titulo de Maestria en Matemática Educativa

Vicerrectoria de Investigación y Postgrado
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnologia

APROBADO POR

Juan M Nole

Prof Juan Nole
Presidente

Analida Ardila

Prof Analida Ardila
Miembro

Mayra Murillo

Prof Mayra Murillo
Miembro

REFRENDADO POR

Melva Jaen de Lan...

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA. 22 de octubre de 2014

AGRADECIMIENTO

Mi infinito agradecimiento doy a nuestro Padre Celestial por bendecirme con el don de la vida y permitirme poder prepararme profesionalmente con la convicción de la vocación por servir a la ensenanza de la Matemática

A mi esposa Juánica y a mi hija Thays por la paciencia que tuvieron durante todo el periodo que duró la maestría

A los facilitadores de esta maestría que a través de su labor educativa propiciaron y desarrollaron en mi aprendizaje relevante y edificante que cimientan la educación de calidad que recibí de la cual me siento satisfecho y orgulloso

Finalmente mi sincero agradecimiento al Profesor Juan Manuel Nole por asesorar mi trabajo de grado Muchas gracias profesor por haber creído en mí

A todos quienes de una manera u otra colaboraron conmigo para ver culminada esta meta educativa profesional mil gracias y estén seguro de que en mí tendrán por siempre un amigo sincero

A TODOS MIL GRACIAS

DEDICATORIA

Paso a paso se recorre el sendero que nos lleva a alcanzar las metas que nos hacen ser individuos íntegros y competentes que aportamos sabiamente para el desarrollo de la Patria

Dedico este trabajo de manera muy especial a mi esposa Juánica y a mi hija Thays a quienes mantengo presente en mi mente en cada instante de mi vida A mi Abuela Esmeralda por sus sabios consejos y el amor de madre que me ha ofrecido siempre siendo como un farol que da brillo y claridad a mi vida

A todos aquellos que piensan que los obstáculos son insalvables que no permitirán que arribemos a puerto seguro He aquí la prueba de que si nos proponemos trabajar con todas las fuerzas de nuestro ser seguro que obtendremos el éxito deseado Quien persevera alcanza Quien está con Dios nada es imposible

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En Panamá un gran ausente en la ensenanza aprendizaje de la Matemática por muchos años ha sido su propia historia Se vincula generalmente a la narración de anécdotas o biografías que no prestan mayor aporte a la construcción del conocimiento matemático En este sentido debería ser tarea de todos los profesores de Matemática mostrar en el aula pequeñas pinceladas de Historia de la Matemática que haga más interesante la asignatura que fomenten la comprensión de problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que los alumnos aprenden en clase que ensenen la manera de trabajar de los grandes matemáticos y que enriquezca el bagaje cultural y la formación integral del alumnado

Esta investigación se estructura en cinco capítulos a saber el capítulo primero contempla lo concerniente al planteamiento del problema los objetivos y la justificación en donde se presenta la importancia de incorporar la Historia de la Matemática en el aula de clase hacemos mención de investigaciones que se han realizado en los ultimos años alusivos al tema las razones y necesidades que han originado su recuperación que hoy se ve fortalecido por la formación de grupos de trabajo en esta área

En el capítulo segundo se presenta la teoría concerniente a la evolución histórica de las ecuaciones de primero y segundo grado desde las antiguas civilizaciones antes de Cristo hasta el siglo XVIII en donde fueron aceptadas las raíces imaginaria y negativas de las ecuaciones

En el capítulo tercero se descnbe la metodología senalando el tipo de investigación la población y muestra procedimientos y técnicas de análisis Se hará uso de dos encuestas una dingida a profesores de educación premedia o media que dictan la cátedra en distintas escuelas del Distnto de Penonomé y otra a los estudiantes de octavo y décimo grado que participan en la investigación del Colegio Federico Zuñiga Feliu Mediante un cuestionario previamente elaborado en ambas poblaciones se conocerá la opinión del sujeto seleccionando una o varias opciones sobre un asunto dado

El capítulo cuarto descnbe el análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos en las encuestas aplicadas a profesores de Matemática del Distrito de Penonomé y a los estudiantes de octavo y décimo grado del Colegio Federico Zuniga Feliu Además de las evaluaciones que se aplicaron en ambos grupos control y experimental de los dos niveles estableciendo cuadro y tablas de datos para luego graficarlos en términos de la frecuencia y el porcentaje de respuestas dadas

Se presenta en el capítulo quinto la propuesta que consiste en tres guías didácticas una para octavo y dos para décimo grado y su importancia radica en presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos en nuestro caso ecuaciones de primero y segundo grado Aparte de la historia (origen y evolución) se presentan problemas concretos que pretenden mostrar técnicas y métodos del pasado y compararlos con los métodos modernos Mediante esta actividad también se busca en todo momento aumentar la motivación del alumnado mostrarles el impresionante trabajo desarrollado por los principales matemáticos de la época concreta y poner en relieve los avances logrados en la busqueda de los métodos para resolver ecuaciones de primero y segundo grado

Lo que se busca con estas guías es dar a conocer los desacuerdos los errores los problemas y las necesidades que se encuentran tras la historia de cada concepto matemático proporcionándole al alumno un escepticismo saludable y además generando discusiones en clase

Igualmente este ultimo capítulo contiene las conclusiones y recomendaciones en función de los hallazgos encontrados en el proceso de investigación

CAPÍTULO PRIMERO

ASPECTOS GENERALES DEL PROBLEMA INVESTIGADO

1 1 Antecedentes del problema

Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Ensenanza Premedia y Media son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación en donde las intuiciones más fecundas con otras estériles han configurado sus presentaciones sucesivas A lo largo de la historia estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas prácticos o teóricos pertenecientes a la propia Matemática o a otras disciplinas Cabe señalar al respecto algunas nociones epistémicas en cuanto a la posición que se aborda en la Historia de las Ciencias y que se ajustan como caso particular a la Historia de la Matemática

Para Fauvel (1991) durante décadas se ha insistido en el valor y la importancia de usar la Historia de la Matemática en la enseñanza no obstante califica como incompletas las ideas que sustentan este mensaje Considera que la razón puede ser la brecha que existe entre las distintas maneras de visualizar la Matemática es decir una Matemática que consiste en verdades absolutas preexistentes que la humanidad debe descubrir es fundamentalmente incoherente con una Matemática que es creada por seres humanos en el contexto de las sociedades y que por lo tanto sus verdades son socio-históricamente relativas

Segun Guzmán (1992) la historia nos proporciona una magnifica guía para enmarcar los diferentes temas Los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia nos da luces para entender la razón que han conducido al hombre para ocuparse de ello con interés Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado etc

Chávez y Salazar (2003) realizan con estudiantes de secundaria de Costa Rica una experiencia en que utilizan la Historia de la Matemática como recurso metodológico para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas De dicho trabajo concluyen

- Promueve un cambio de actitud hacia la matemática
- Ayuda para explicar y superar obstáculos epistemológicos
- Incentiva la reflexión y una actitud crítica del estudiante
- Debe estar presente en la formación de educadores de Matemática
- Fomenta el interés y la motivación de los alumnos hacia la Matemática

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas dan cuenta de experiencias desde proyectos concretos sobre la enseñanza de las matemáticas y sus puntos de referencia entre los saberes los programas y la práctica En ellas la Historia de las Matemáticas se devela como un potencial didáctico Entre algunas de las preguntas abordadas por dichas investigaciones están ¿Es conveniente retomar el enunciado de un teorema matemático de una época anterior si a fin de cuenta la versión actual es más sencilla y además abordable? ¿El proceso de obtención de dicha versión qué importancia tiene? ¿Es importante intentar evidenciar lo sentido por los matemáticos en sus momentos y contexto de producción? Atendiendo a estas interrogantes es necesario sentarse a planificar estrategias didácticas que respondan a las mismas

De esta forma podemos ver que hoy en día es una preocupación mundial creciente el considerar la Historia de la Matemática como componente de la Educación Matemática que tiene en la actualidad por estos mismos motivos su propia línea de investigación al interior de la Didáctica de la Matemática El análisis histórico epistemológico

El estudio de la historia del Álgebra puede ser un elemento importante en la autoformación permanente del profesor La enseñanza no es sólo una vocación o una profesión puede ser también un arte y es indudable que el conocimiento de la historia del Álgebra con sus grandezas y miserias con sus momentos estelares y sus épocas oscuras influirá decisivamente en el espíritu del profesor y en su actitud hacia la propia Matemática y como escriben Malet y otros (1983) Bien sabemos que la actitud del profesor hacia la materia que explica sea una de las enseñanzas más importantes que transmitimos al alumno

En Panamá la práctica docente llega a los alumnos como un producto inflexible cerrado y acabado debido a la formación universitaria que los mismos recibieron anteriormente Hace afortunadamente algunos años que ha empezado a abrirse paso a una incipiente institucionalización en la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas específicamente en el Departamento de Matemática que tienen bajo su responsabilidad las carreras de Licenciatura en Matemática Licenciatura en Docencia de la Matemática y Maestrías en Matemática Educativa en la cuales se dictan asignaturas sobre la Historia de la Matemática De igual manera se dictan conferencias cursos seminarios y se ofrecen congresos cuyo contenido versa sobre los más diversos aspectos de los temas históricos donde se producen nuevas originales y creativas ideas que se constituyen en una verdadera reforma de nivel nacional e internacional

1 2 Planteamiento del problema

Un instrumento didáctico que ha sido muy poco aprovechado por los docentes de Matemática es la busqueda de elementos históricos como recurso pedagógico que permita analizar en colaboración con los estudiantes obstáculos epistemológicos ontogénicos y de problemas que faciliten el proceso de enseñanza aprendizaje

El conocimiento de la Historia ayuda al docente a comprender las etapas del aprendizaje así como a proponer problemas inspirados en la misma A manera de ejemplo las dificultades históricas en el paso del álgebra numérica a la simbólica conducen a creer que los docentes deben estar conscientes de las dificultades conceptuales que sus estudiantes pueden presentar al hacer el mismo paso

Desde mucho tiempo los maestros y profesores ponen énfasis en los cálculos los algoritmos el uso de recetas de propiedades o teoremas y no se le permite al estudiante conocer el origen de algun objeto matemático que se estudia en ese momento y por tanto se le impone por alguna razón desconocida El docente usa la historia matemática sólo con anécdotas o cortas reseñas históricas al introducir un contenido y hace poco uso del análisis de algun error que se haya presentado en la historia o de los métodos por ejemplo que se utilizaron para resolver una ecuación por distintas civilizaciones y solicitarles a los estudiantes que lo discutan y decidan si esa solución es válida al menos en algunos casos o no lo es del todo

De esta manera se ha evidenciado el poco uso del uso de la historia en los procesos de enseñanza-aprendizaje y particularmente en la Matemática algunas veces por desconocimiento de esta herramienta en el ambiente educativo

Los docentes pueden llegar a considerar la Historia de la Matemática dentro de un programa de estudio como una carga adicional de escaso valor didáctico Al respecto Galadí Enríquez (1997) señala La utilización de la historia de la Matemática como recurso didáctico es un campo de acción no demasiado cultivado por el profesor de esta materia Este suele aducir toda una serie de escollo para justificar su desinterés por la cuestión Así que argumenta que los temas antiguos y sobre todo el enfoque que se hizo de los mismos en el pasado están demasiado alejado de la sensibilidad actual o bien que la terminología en los mismos distancia los textos de la comprensión de los alumnos Todos estos argumentos son esencialmente ciertos sobre todo si no hemos sabido seleccionar adecuadamente los textos o su presentación y con ello no hemos conseguido más que añadir obstáculos al aprendizaje de nuestros alumnos

Por el modelo de enseñanza que muchos profesores hemos recibido ha llevado a varios investigadores en Didáctica de la Matemática en Francia España México Alemania entre otros países a estudiar el uso de la Historia de la Matemática en el aula aunque valdrá la pena decir que en rigor se trata de recuperarla

El profesor que esté al corriente de la historia además de aprovechar el legado histórico para enriquecer su actividad docente manifestará una actitud prudente y encontrará sugerencias que faciliten la introducción sin grandes traumas de un concepto nuevo por difícil que sea y lo que es más importante no perderá la paciencia ante las dudas y dificultades de los alumnos y por consiguiente estos ganarán además confianza y seguridad en sí mismo

Frente a una metodología lógico-deductivista que conduce a un tratamiento absoluto dogmático de la Matemática la Historia de las Matemáticas permite plantear activamente el aprendizaje como un redescubrimiento como dice Kline (1978) Se puede comprimir la historia y evitar muchos de los esfuerzos y trampas inutiles pero no es posible darla de lado Pues la Historia de las Matemáticas es una fuente inagotable de material didáctico de ideas y problemas interesantes y también en un alto grado de diversión y recreo intelectual en suma de enriquecimiento personal científico y profesional que el profesor debe aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento desdramatizando el aprendizaje de la Matemática

En la busqueda de nuevas ideas que expliquen el ser y el saber de la Matemática la historia de esta ciencia trasciende de su papel de simple colección de anécdotas curiosas datos antiguos y sucesos acumulados Ahora conforma junto a la didáctica y a la epistemología una fuente teórica de poderosa aplicabilidad en la práctica educativa

Basado en lo anteriormente expuesto se considera que la Historia de la Matemática puede ser un medio cuya aplicación pedagógica resultaría beneficiosa en un proceso de enseñanza aprendizaje de esta asignatura ya sea a nivel Premedio y Medio Este recurso tiene en sí mismo un gran potencial capaz de despertar curiosidad y crear las motivaciones en los jóvenes por el aprendizaje facilitando así a los alumnos la adquisición de conocimientos

Por lo tanto es necesario formular una estrategia didáctica que recurra al uso de la historia para el estudio y comprensión de los conceptos algebraicos por tal motivo a través de la presente investigación se pretende responder a las siguientes preguntas

1 ¿Cuáles son las estrategias didácticas que aplican los docentes de Matemática para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Álgebra?

2 ¿Están los docentes de Matemática utilizando la Historia de la Matemática como un instrumento didáctico para la enseñanza de esta asignatura?

3 ¿Qué actitud tienen los estudiantes frente a la integración del método genético en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática?

4 ¿Cuál sería el rendimiento académico de los estudiantes si el profesor utiliza el método dogmático como recurso didáctico en la enseñanza de la Matemática?

5 ¿Cómo sería el rendimiento académico de los estudiantes con la integración del método genético como recurso didáctico en la ensenanza de la Matemática?

6 ¿Mejoraría el aprendizaje de los estudiantes en la asignatura de Matemática con la integración del método genético respecto a aquellos que no la utilizan?

1 3 Hipótesis general

El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de ensenanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo y décimo grado

1 4 Objetivos de la investigación

1 4 1 Objetivo general

Determinar si mediante la incorporación del método genético en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra favorece el rendimiento académico de los estudiantes

1 4 2 Objetivos específicos

1 Identificar las estrategias didácticas que emplean los docentes de premedia y media de Educación Escolar en el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos matemáticos

2 Conocer por parte de los estudiantes si los docentes emplean la Historia de la Matemática como medio que facilita el proceso de aprendizaje

3 Reconocer la importancia de la utilización del método genético como recurso didáctico en la enseñanza de las ecuaciones de ecuaciones primero y segundo grado

4 Facilitar y mejorar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra a través del método genético

5 Presentar problemas concretos que pretenden mostrar técnicas y métodos de las antiguas civilizaciones (egipcios griegos y otras) y compararlos con los procedimientos actuales

6 Elaborar guías didácticas que permitan conocer la génesis y evolución de las ecuaciones de primero y segundo grado

1 5 Delimitación

La investigación se desarrolla en el Colegio Federico Zuniga ubicada en el Distrito de Penonomé Provincia de Coclé con 5 grupos de estudiantes de los cuales dos cursan el octavo grado y los otros tres el décimo grado Bachiller en Ciencias

1 6 Justificación

El conocimiento de la Historia de la Matemática debe formar parte indispensable del bagaje cognitivo del matemático en general Desde hace algunos años cada vez son más los libros de textos matemáticos que relatan notas históricas de los tópicos que tratan

Ciertamente existe un desconocimiento no sólo de la Historia de la Matemática sino de su valioso uso Al lado de la complejidad de algunos textos y la manera tan monótona o tediosa que tienen algunos docentes para enseñar esta materia una anécdota o algunas dificultades presentadas en sus inicios puede resultar altamente atractiva ¿Qué se puede hacer para ayudar a subsanar este problema? ¿Qué se puede hacer para estimular a los niños niñas y jóvenes para que conozcan la Historia de la Matemática? El docente debe poner sus conocimientos y sus medios al alcance del discente y hacer de ellos un recurso que contribuya a la transmisión efectiva de los contenidos

Otro aspecto que justifica este estudio es el valor del uso de la Historia de la Matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje por la posibilidad de representar un valioso recurso en la construcción de estrategias que puedan desarrollar habilidades y le permita al docente darle a la Matemática una imagen de producto terminado inmune a la crítica y al cuestionamiento al presentarla con el trasfondo de su propia historia Con esto dar a conocer los desacuerdos los errores los problemas y las necesidades que se encuentran tras la historia de cada concepto matemático proporcionándole al alumno un escepticismo saludable y además generando discusiones en clase

La importancia de esta investigación radica en mostrar el resultado del impacto del uso de la Historia de la Matemática como un instrumento didáctico colaborador que puede llevarse a cabo de diversas maneras Procediendo por ejemplo a resolver problemas y ejercicios que involucran ecuaciones de primero y segundo grado que para su solución se requiere conocer los distintos métodos que utilizaban las civilizaciones egipcia babilónica griega hindu y árabe permitiendo suavizar el camino que conduce de la Ensenanza al Aprendizaje de estas ecuaciones Integrar la Historia de la Matemática de forma armónica a la enseñanza de esta asignatura es uno de los objetivos trazados en esta investigación

Lo que se aporta con este proyecto es dar a conocer las posibilidades que tiene el uso del método genético en transmitir contenidos de una manera efectiva A partir del conocimiento de la Historia de la Matemática por parte del docente se puede utilizar de diferentes formas dentro del salón de clase como un medio auxiliar que estimule al estudiantado en el conocimiento de esta materia y despierte su deseo de saber sobre la materia

CAPÍTULO SEGUNDO

MARCO TEÓRICO

2 1 Evolución histórica de las ecuaciones de primero y segundo grado

Hablar de las ecuaciones de pnmero y segundo grado al ıgual que cuando hablamos de cualquıer otro tema matemátıco es ımportante conocer su Hıstona La evolucıón no fue en un corto período sıno de muchos sıglos en el que muchas personas manıfestaron su ınterés por el estudıo de las ecuacıones en el que fueron aportando hasta su estado actual como las conocemos en el día de hoy Esto sıgnıfica que no fue fácıl nı rápıdo

Sı estudıamos la hıstona de las ecuacıones por las dıstıntas cıvılızacıones o en sus dıstıntos períodos nos percatamos que en las mısmas se encuentran ınmersos el descubnmıento de técnıcas y fórmulas para su resolucıón y el descubnmıento de un lenguaje en el que esas técnıcas y esas fórmulas aparecen

2 1 1 El álgebra en la antigua babilonia

Los babılonıos fueron los pnmeros que resolvıeron ecuacıones cuadrátıcas en una tablılla descıfrada por Neugebaveren (1930) cuya antıguedad es de unos 400 anos a de C donde se encontraron solucıones a vanas de estas ecuacıones Los mısmos podían resolver ecuacıones cuadrátıcas empleando el método conocıdo actualmente como completar el cuadrado algunas ecuacıones cubıcas y bıcuadrátıcas

El álgebra babılónıca es retónca es decır los problemas algebraıcos se enuncıan y solucıonan sın utılızar de manera sıstemátıca notacıones algebraıcas (como hoy) Sı aparecen palabras como por ejemplo *us* (longıtud) *sag* (anchura) y *asa* (área) usadas como ıncógnıtas no porque dıchas ıncógnıtas representen tales cantıdades geométricas sino posiblemente porque muchos problemas algebraicos surgen de situaciones geométricas y esto hizo que esa terminología se impusiera Un indicio de que esto era así es que los babilónicos no tenían ningun reparo en sumar una longitud con un área o un volumen Además usaban antiguos pictogramas sumerios para designar las incógnitas de una ecuación

Los babilonios disponían de fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas No conocían los numeros negativos por lo que no se tenían en cuenta las raíces negativas de las ecuaciones Tampoco conocían el cero lo que lleva a problemas de interpretación de las cantidades

En las transformaciones algebraicas los babilonios manipularon las ecuaciones con una habilidad realmente sorprendente asumiendo de manera tácita las propiedades conmutativas y distributivas en la que obtuvieron relaciones algebraicas

La ecuación cuadrática de la forma $x^2 - px = q$ la resolvían de la siguiente manera primero calculaban p/2 a continuación $(p/2)^2$ y por ultimo $(p/2)^2 - q$ entonces obtenían la solución de la incógnita

$$x = p/2 + \sqrt{(p/2)^2 + q}$$

siendo esta la fórmula cuadrática actual conocida por todo el mundo

Algunos ejemplos de problemas que corresponden a las líneas sexta y séptima de una tablilla que consta de 24 secciones y que pertenece a la época de la Antigua Babilonia son

El problema en el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14 30 (en notación sexagesimal) La solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - x = 870$ y viene explicada por el escriba de la siguiente forma

Instrucción del escriba	Traducción al lenguaje actual
1 He restado el lado del cuadrado a partir del área y es 14 30	1 $x^2 - x = 870$
2 "Toma la mitad de 1 que es 0 30 y multiplica 0 30 por 0 30 que es 0 15	2 $0\,5 x 0\,5 = 0\,25$
3 Suma este numero a 14 30 lo que da 14 30 15 este es el cuadrado de 29 30	3 $x^2 - x + 0\,25 = 870 + 0\,25$ $(x - 0\,5)^2 = 870\,25$ $\sqrt{(x-0\,5)^2} = \sqrt{870\,25}$ $x - 0\,5 = 29\,5$
4 Ahora suma 0 30 a 29 30 cuyo resultado es 30 que es el lado del cuadrado * El escriba es la persona que se encargaba de acuñar las tablillas ellos desarrollaban su trabajo en la corte del rey o eran secretarios personales de varios gobernadores	4 $x = 0\,5 + 29\,5$ $x = 30$

Escrito en lenguaje actual es la aplicación directa de la conocida fórmula (antes señalada) de resolución de la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870}$$

Enunciado del problema Al sumar el área y dos tercios de un lado de un cuadrado me da 0 35

Como en el caso del problema anterior hay que encontrar el lado del cuadrado De las condiciones del problema notamos que las relaciones nos conducen a resolver la ecuación cuadrática siguiente

$$x^2 + \frac{2}{3}x = 0\ \ 35$$

(donde x denota el lado del cuadrado) esta es una ecuación del tipo $x^2 + px = q$ donde $p = \frac{2}{3}$ y $q = 0\ \ 35$

La solución de este problema es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$ y viene explicada por el escriba de la siguiente forma

Instrucción del escriba	Traducción al lenguaje actual
1 Al sumar el área y dos tercios de un lado de un lado de un cuadrado me da 0 35	1 $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$
2 Tomamos 1 por coeficiente Dos tercio de 1 nos da 0 40	2 Recordemos que $\frac{2}{3}$ tenía un símbolo especial y 0 40 es su representación sexagesimal Es decir es escribir p en notación sexagesimal
3 La mitad de 0 40 es 0 20	3 $\frac{p}{2} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$

4 0 20 veces 0 20 nos da 0 6 40	4 $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
5 Sumamos 0 35 y obtenemos 0 41 40	5 $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \frac{1}{9} + \frac{7}{12} = \frac{25}{36}$
6 Lo que nos da 0 50 como su raíz cuadrada	6 $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} = \frac{5}{6}$
7 Restamos 0 20 y obtenemos 0 30 que es el lado del cuadrado	7 $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

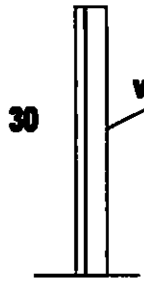
Nuevamente en lenguaje actual es la aplicación directa de la conocida fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

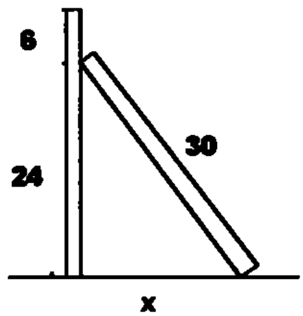
que corresponde a una de las soluciones de la ecuación La otra solución es negativa y obviamente no podría ser solución del problema Aun cuando esto ultimo ellos no lo sabían la aparición de los enteros negativos todavía tardo muchos años

Para la solución del siguiente problema se recurre a una ecuación cuadrática

Una viga de 30 unidades de largo se apoya verticalmente contra un muro Si la extremidad superior de la viga se coloca a 6 unidades más abajo ¿En cuántas unidades se desplazará el otro extremo de la viga? (Ver figura)



Para la solución de este problema los Babılonios usaban el *Teorema de Pıtágoras* pues ellos conocían el Teorema aunque muy probablemente no conocían ninguna demostración del mismo



El tnángulo que se obtiene en la figura de amba es rectángulo y se conocen las medidas de dos de sus lados la hipotenusa (mide 30 unidades pues representa la viga) y el cateto vertical que mide 24 unidades El cateto honzontal que representa el segmento recomdo por la extremidad inferior de la viga es la incógnita

Gracias al Teorema de Pitágoras se puede asegurar que

$$x^2 + 24^2 = 30^2$$

Estamos en presencia de una ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado

Resolviendo se tiene

$$x^2 = 30^2 - 24^2$$

$$x^2 = 900 - 576$$

$$x^2 = 324$$

La solución de la ecuación es entonces aquel numero que elevado al cuadrado sea igual a 324

Como se sabe que todo numero real negativo elevado al cuadrado es un numero positivo hay dos soluciones para la ecuación

$$x_1 = 18$$

$$x_2 = -18$$

En efecto

$$18^2 = 324$$

y

$$(-18)^2 = 324$$

Pero los babilonios no conocían los numeros negativos y además siendo la incógnita x una representación del tamano de un segmento x no puede ser un numero negativo

Así la solución al problema es $x = 18$ pues $\sqrt{324} = 18$ en otras palabras la extremidad inferior de la viga se desplazó 18 unidades cuando su extremidad superior descendió 6 unidades Muchos otros problemas geométricos cuya solución requería de una ecuación de segundo grado fueron resueltos por los babilonios muy hábilmente

La ecuación completa $x^2 + px + q = 0$ con valores p y q positivos la encontramos en los documentos babilónicos que como veremos más adelante se debe a la Matemática Árabe Las formas usuales que los babilónicos podían resolver con facilidad y a las cuales trataron de reducir las soluciones de todas las ecuaciones algebraicas con una incógnita son las siguientes

$$px = q$$

$$x^2 = q$$

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 - px = q$$

$$x^3 = q$$

$$x^2(x + 1) = q$$

Podemos ver que las ecuaciones cuadráticas ya con los babilonios cerca de 300 años a C se podían solucionar con el método de reducir a la mitad elevar al cuadrado adicionar" no se hacían con símbolos sino con palabras y numeros (retóricos) El trabajo de los babilonios constituyó un logro notable teniendo en cuenta que no contaban con la notación moderna

2 1.2 El álgebra egipcia

Los egipcios nos dejaron en sus papiros una gran cantidad de problemas matemáticos resueltos Hay dos papiros de gran importancia El papiro de Rhind (1650 a de C) y el de Moscu (1850 a de C) La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria sin embargo encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos pues no se refiere a ningun objeto concreto

En lo referente al álgebra los papiros contienen soluciones a problemas con una incógnita Empero los procesos eran puramente aritméticos y no constituían un tema distinto a éste que es el predominante junto con problemas geométricos Los problemas se plantean de una forma retórica obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dicha ecuaciones

Estos problemas se resuelven generalmente con la sola ayuda de la aritmética o utilizando ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ ó $x + ax + bx = c$ donde la incógnita se llama aha que significa cantidad

La solución que se da en el *papiro de Rhind* de los problemas de carácter algebraico planteados no es la que podría verse en los libros de texto modernos sino que es característica de un procedimiento que conocemos hoy como el método de la falsa posición o *regula falsi*" En este método se supone un valor concreto para el montón lo más probable es que sea incorrecto y se efectuan con dicho numero las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda de la igualdad A continuación se compara el resultado de estas operaciones con el resultado que debería haberse obtenido y mediante el uso de proporciones se halla la respuesta correcta En particular en los siguientes ejemplos veremos algunas de las resoluciones originales mostradas en los papiros

Problema 24 del papiro de Rhind traducido literalmente dice

Un montón más $\bar{7}$ de él son 19

Con la notación $\bar{7}$ se refería a $\frac{1}{7}$ el problema en lenguaje actual se traduce en resolver la ecuación $x + {}^{x}/_{7} = 19$ El método utilizado expuesto en el papiro es

Solución Supóngase que la solución es 7 entonces

$$7 + \bar{7}\,(7) = 8$$

Como 8 tiene que ser multiplicado por $(2 + \bar{4} + \bar{8})$ para conseguir 19

$$(8)(2 + \bar{4} + \bar{8}) = 16 + 2 + 1 = 19$$

Entonces 7 tiene que ser multiplicado por $(2 + \bar{4} + \bar{8})$ para llegar a la solución

$$x = (7)(2 + \bar{4} + \bar{8}) = 14 + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} = \frac{133}{8}$$

En el problema 26 cuyo enunciado es

Una cantidad más $\bar{4}$ de ella son 15

El procedimiento utilizado en el papiro es

Solución Cambia x por 4

$$4 + \bar{4}\,(4) = 5$$

Como 5 tiene que ser multiplicado por 3 para conseguir 15 Entonces 4 tiene que ser multiplicado por 3 para llegar a la solución

$$x = (4)(3) = 12$$

Para resolver una ecuación del tipo $x + ax = b$ consistente en términos actuales se siguen los siguientes pasos

i) Si $f(x) = x + ax$ se supone un valor x_1 para x luego se determina $f(x_1) = x_2$

ii) Se busca k tal que $kx_2 = b$ y por la linealidad de f se tiene que $f(kx_1) = b$ por lo que $x = kx_1$

El problema anterior en el lenguaje actual se corresponde con la ecuación $x + \frac{1}{4}x = 15$ observamos que si denotamos $f(x) = x + \frac{1}{4}x$ tenemos que $f(x)$ es lineal Suponiendo que $x = 4$ tenemos que $f(4) = 5$ ahora bien $15 = (3)(5) = (3)\,f(4) = f(3(4))$ luego la solución es $x = (3)(4) = 12$ Por tanto estamos ante un método de *regula falsi* simple Como puede observase el procedimiento está basado en conceptos de proporcionalidad directa lo que permite su utilización sin complicaciones en la enseñanza secundaria para resolver problemas relacionados con las ecuaciones de primer grado

Utilizando la misma técnica se resuelven los problemas del papiro Rhind siguientes

n° 25 $\quad x + \bar{2}x = 16$

n° 27 $\quad x + \bar{5}x = 21$

En general los egipcios no resolvían ecuaciones cuadráticas pero eso no les impidió resolver ciertas ecuaciones de segundo grado El unico tipo de ecuación de segundo grado que aparece es el más sencillo

$$(ax)^2 = b^2$$

que se reduce a la solución de una ecuación lineal $ax = b$

En el papiro de Berlín se incluye este problema que implica la solución de una ecuación cuadrática El texto es como sigue

Un cuadrado y un segundo cuadrado cuyo lado es $^3/_4$ (en el texto $\bar{2} + \bar{4}$) del lado del primer cuadrado tienen juntos un área de 100 Muéstrame cómo calculas sus lados

Instrucción del escriba	Traducción al lenguaje actual
1 Un cuadrado y un segundo cuadrado cuyo lado es $^3/_4$ (en el texto $\bar{2}+\bar{4}$) del lado del pnmer cuadrado tienen juntos un área de 100 Muéstrame cómo calculas sus lados	1 $x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=100$
2 La solución se inicia con una falsa suposición "tomamos un cuadrado de lado 1 y tomo $\frac{3}{4}$ de 1 es decir $\bar{2}+\bar{4}$ como el lado de la otra área	2 Sea x = 1 como aproximación se obtiene $(x)^2=(1)^2=1$ $\left(\frac{3}{4}(1)\right)=\frac{3}{4}$
3 Multiplico $\bar{2}+\bar{4}$ por si mismo esto da $\bar{2}+\overline{16}$	3 $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$
4 De aquí si el lado de una de las áreas es tomado como 1 y el del otro lado como $\bar{2}+\bar{4}$ entonces la adición de las áreas da $\bar{1}+\bar{2}+\overline{16}$	4 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{25}{16}$
5 Toma la raíz cuadrada de $\bar{1}+\bar{2}+\overline{16}$ es decir $1+\bar{4}$	5 $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$
6 Toma la raíz cuadrada del numero dado 100 que es 10	6 $\sqrt{100}=10$
7 ¿Cuántas veces esta contenido $1+\bar{4}$ en 10? 8 veces A partir de aquí el texto se hace indescifrable pero se puede ver que el ultimo paso es	7 $10 \div \frac{5}{4}=8$

8	$8 \times 1 = 8$ y $8 \times (\bar{2} + \bar{4}) = 6$ que son los lados de los cuadrado	8	Se busca una constante k tal que $k\left(\frac{5}{4}\right)=10$ donde k = 8 $8 \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 6$ Raices buscadas 8 y 6

Los egipcios utilizaban muy poco el simbolismo en su álgebra En el papiro de Rhind las operaciones de sumar y restar aparecen representadas por un dibujo esquemático de las piernas de una persona que se acerca y que se aleja

En definitiva los egipcios solucionaban problemas de una incógnita que viene a ser equivalentes a nuestra resolución de ecuaciones lineales No obstante los procesos seguidos eran puramente aritméticos y no constituían para los egipcios un tema distinto como podía ser la resolución de ecuaciones

2 1 3 El álgebra geométrica griega

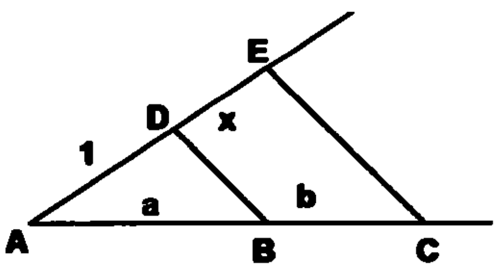
La civilización griega (500 a 200 a C) utilizó procedimientos geométricos para resolver muchos problemas entre ellos la resolución de ecuaciones de primer grado y segundo grado Esto se debió por la aparición de los numeros irracionales unido a la falta de practicidad del sistema de numeración griega Quizás esto hizo que los griegos se sintieran más seguros ante las figuras geométricas que ante los numeros y por ello Euclides desarrolló gran parte de la aritmética y de la teoría de numeros con una perspectiva geométrica Las magnitudes eran representadas por segmentos y el producto de dos magnitudes a y b era representado por el rectángulo de los lados a y b

Para resolver ciertas ecuaciones de primero y segundo grado los pitagóricos utilizaban principalmente dos métodos el método de las proporciones y el de la aplicación de las áreas

La época del álgebra geométrica trata los problemas algebraicos con la ayuda de construcciones geométricas El nucleo lo constituye el método de ***anexión de áreas*** cuya finalidad básica era resolver ecuaciones Este método se puede usar para resolver ecuaciones lineales y no lineales En los *Elementos* de Euclides se tratan diversas ecuaciones cuadráticas segun los métodos del álgebra geométrica También Teodoro de Cirene Teeteto y Eudoxo de Cnido consolidan esta álgebra geométrica

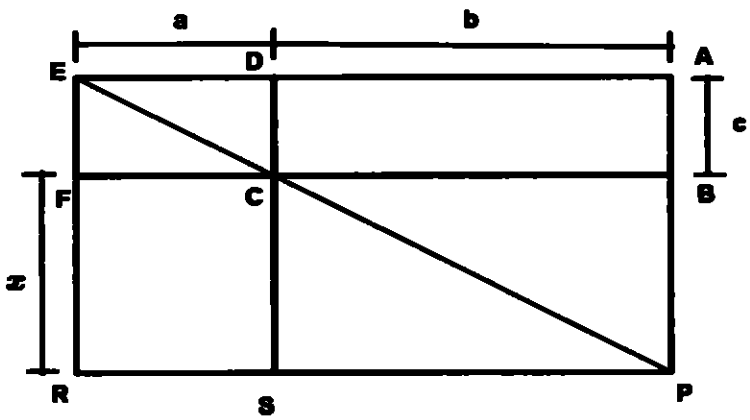
A continuación se describen los procedimientos usados por los griegos para resolver algunas ecuaciones de primero y segundo grado

La proposición 12 del Libro VI de los *Elementos* (pág 107) consiste en calcular la cuarta proporcional de tres segmentos dados

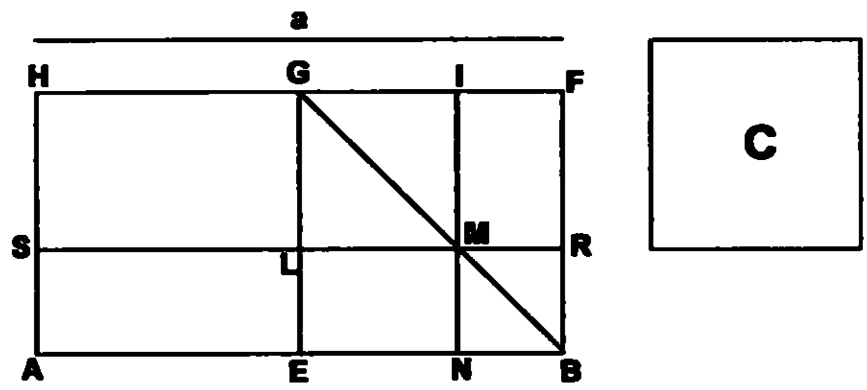


La aplicación de esta propiedad permite resolver geométricamente ecuaciones del tipo $a\,x = b$ con coeficientes positivos considerando como segmentos $AB = a$ $BC = b$ $AD = 1$ y $DE = x$

La solución a la ecuación lineal $ax = bc$ donde a b y c son segmentos lineales dados los griegos la podían considerar como la expresión de la igualdad de las áreas ax y bc o bien como una proporción o igualdad entre las dos razones a b y c x así al construir en este caso la cuarta proporcional x lo que se hacía usualmente era construir un rectángulo ABCD (ver figura abajo) de lados AD = b y AB = c y llevar sobre AD un segmento DE = a Completando el rectángulo DEFC y trazando la diagonal EC y prologando la misma corta en P la extensión de AB luego extendiendo DC y EF se tiene los rectángulos RSCF y SPBC Se observa claramente que FR es el segmento buscado puesto que el rectángulo RSCF tiene igual área a la del rectángulo ABCD



A partir de la proposición 28 y 29 del Libro VI (pág 146-150) se puede resolver geométricamente las ecuaciones de segundo grado que admiten al menos una raíz positiva Así por ejemplo la ecuación $ax - x^2 = b^2$ corresponde al problema geométrico *Sobre un segmento dado (a) construir un rectángulo (de altura x) que exceda al cuadrado de la altura (x^2) en un área equivalente a un cuadrado* *dado* (b^2) Para resolverlo se procede en este modo sean *a* el segmento dado y *C* el cuadrado de área b^2



1 Se determina el punto medio del segmento $a = AB$ sea *E* sobre *EB* se construye el cuadrado *EBFG* y se completa el cuadrado *AEGH* El área del cuadrado *AEGH* debe ser mayor o igual que b^2 de lo contrario el problema no tiene solución

2 Si el área del cuadrado *AEGH* es b^2 entonces $x = AH$ y el problema *está resuelto*

3 Si el área del cuadrado *AEGH* es mayor que b^2 se construye el cuadrado *LMIG* de área igual a la diferencia de estas áreas Por la proposición 26 del libro VI los cuadrados *LMIG* y *NBRM* tiene una diagonal sobre la recta *GB* y de este modo se completa la figura

4 El área de la figura *LEBFIM* es igual a b^2 por construcción fácilmente se demuestra que las áreas del rectángulo *ANMS* y de la figura *LEBFIM* son iguales y de aquí se deduce que $x = SA$

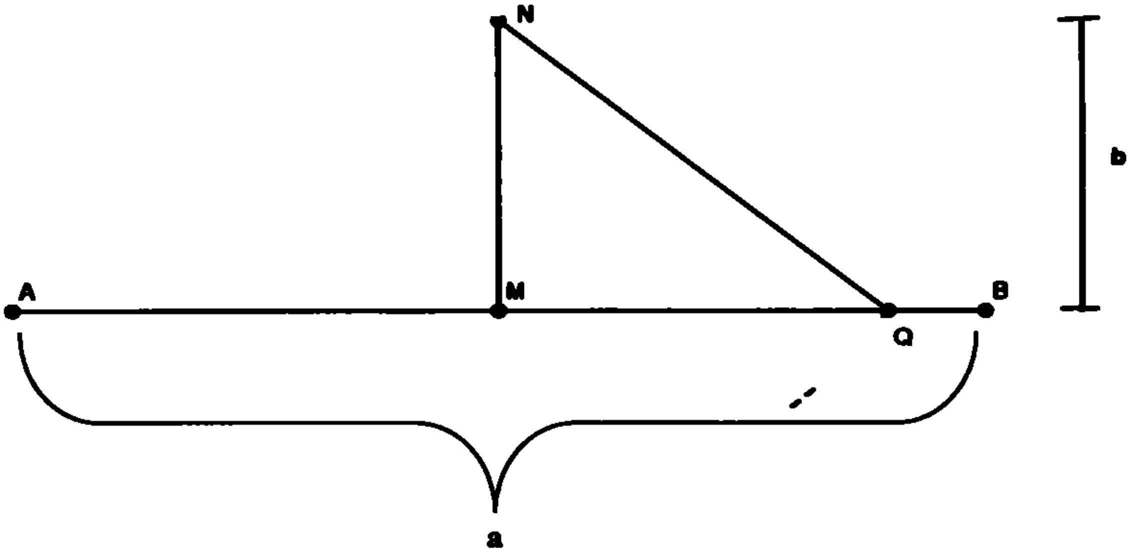
Analizaremos ahora la técnica que usaban los griegos para resolver geométricamente la ecuación

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

donde a y b son segmentos lineales dados

Resolvamos el siguiente problema Sobre el segmento AB de longitud a tenemos que encontrar un punto Q tal que $(AQ)(QB) = b^2$

Para lograrlo sobre el punto medio M de AB (ver figura de abajo) trácese una perpendicular y sobre ésta encontramos el punto N talque $MN = b$



Tomando como centro a N y con MB como radio trácese un arco que corte en Q a AB El punto buscado es Q

Simplemente nótese que

$$
\begin{aligned}
(AQ)(QB) &= (AM + MQ)(MB - MQ)) & \\
&= (MB + MQ)(MB - MQ) & \quad AM = MB \ (\textit{punto medio}) \\
&= (MB)^2 - (MQ)^2 & \quad \textit{Identidad algebraica de la sección anterior} \\
&= (NQ)^2 - (MQ)^2 & \quad \textit{Por sustitución } (MB = NQ) \\
&= (MN)^2 & \quad \textit{teorema de pitagoras} \\
&= b^2 & \quad MN = b
\end{aligned}
$$

¿Por qué decimos que AQ y QB son raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$?

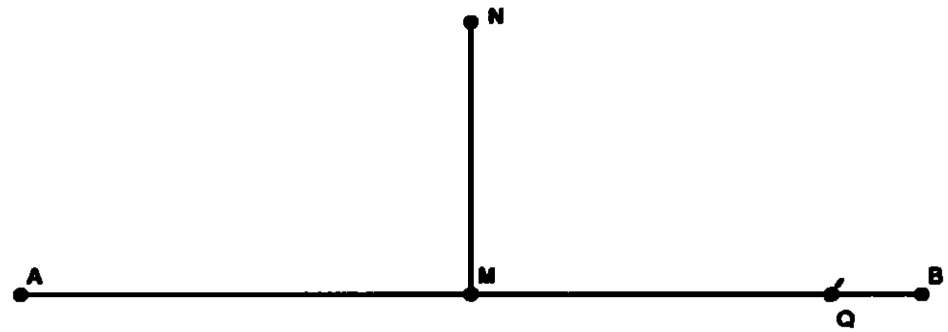
AQ y QB son raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$ ya que una de las características es que se debe de cumplir lo siguiente

su suma es igual a a

su producto es igual a b^2

Esto es lo que hemos encontrado que cumplen AQ y QB Encontrar Q es pues equivalente a encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$

Por ejemplo la ecuación que en nuestros días se escribe $x^2 - 10x + 9 = 0$ utilizando la técnica antes expuesta se procede así *Trace el segmento AB = 10 (ver figura abajo) marque el punto medio de AB y por el mismo levante el segmento perpendicular MN=3 (igual a la raíz cuadrada de nueve) y con centro en N y radio MB trace un arco de circunferencia que corta a AB en el punto Q La raíz deseada está dada por la medida AQ*



Por construcción la medida de los segmentos AQ y QB son 9 y 1 respectivamente que corresponden a las raíces de la ecuación

Hacia el siglo III aparece Diofanto (200 290 a C) considerado el más importante de los algebristas griegos de la época alejandrina quien introdujo un simbolismo algebraico que consistía en designar a la incógnita con la primera sílaba de la palabra griega *arithmos* que significa numero es decir utiliza abreviaciones de palabras para representar algunas de las nociones del álgebra A este manejo de los problemas se le ha llamado ***álgebra sincopada***

Diofanto ha sido llamado muchas veces el padre del álgebra pero muchos le reniegan este título ya que a pesar de que en cuestiones de notación sin duda se lo merece en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados esta pretensión resulta menos justificada

La obra más importante que se conoce de Diofanto es su ***Arithmetica*** un tratado de 13 libros del que sólo se conocen los 6 primeros trataba temas como las soluciones particulares enteras o racionales de ecuaciones algebraicas determinadas e indeterminadas

Una parte considerable de la ***Arithmetica*** de Diofanto está dedicada a problemas indeterminados en los que las soluciones que se requieren son numeros enteros positivos o como máximo cantidades racionales positivas Sin embargo algunos de sus caminos de resolución son altamente ingeniosos y aplicables a problemas similares No da soluciones generales sino se limita a obtener una de sus soluciones ya que probablemente sea consciente de que en muchos casos hallada una solución las otras se pueden calcular con facilidad

La ***Arithmética*** de Diofanto considerada por muchos como el primer texto de álgebra constituía un listado caracterizado por un alto grado de habilidad matemática y de ingenio puesto en juego El libro no tiene nada en comun con respecto a lo que constituye la matemática griega tradicional puesto que representa una rama esencial nueva que utiliza por tanto unos planteamientos diferentes Al estar divorciada de los métodos geométricos recuerda mucho al álgebra babilónica pero mientras que la matemática babilónica se había ocupado principalmente de la solución aproximada de ecuaciones determinadas de grado hasta tercero la ***Arithmética*** de Diofanto en lo que ha llegado hasta nosotros está dedicada casi completamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas

La ***Arithmética*** no es una exposición sistemática sobre las operaciones o las funciones algebraicas o la resolución de ecuaciones algebraicas sino que consisten en unos 189 problemas resueltos todos ellos en términos de ejemplos numéricos concretos y específicos aunque quizás Diofanto pretendiese sugerir con ellos un método general En su libro no hay un desarrollo axiomático tampoco se encuentran todas las soluciones posibles enteras ya que como sabemos se requiere el sistema numérico de los complejos para obtener todas las soluciones En las ecuaciones de segundo grado se elige la mayor de las respuestas cuando son enteros positivos al resolver una ecuación rechaza las raíces negativas o imaginarias y dice que la ecuación no es resoluble

En un problema de la ***Arithmética*** que se explica a continuación se puede observar el método que utiliza de forma sistemática Diofanto Para calcular dos numeros tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208 los numeros desconocidos no se representan por x e y por lo que en nuestra notación moderna sería $10 + x$ y $10 - x$ entonces se tendrá que verificar unicamente que $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ luego $x = 2$ y los numeros buscados son 8 y 12

En estos problemas nos encontramos con ecuaciones determinadas pero Diofanto utilizaba de hecho esencialmente el mismo método para los problemas de análisis indeterminados En un cierto problema se pide calcular dos numeros tales que al sumar cualquiera de ellos con el cuadrado del otro da siempre como resultado un cuadrado perfecto este es un ejemplo claro de problemas de análisis diofántico en el que sólo se admiten como soluciones aceptables numeros racionales Para resolver este problema Diofanto no llama a los numeros buscado x e y sino x y $2x$+1 de forma que al añadir el segundo al cuadrado del primero automáticamente se obtiene un cuadrado perfecto cualquiera que sea el valor atribuido a x Ahora bien se exige además que $(2x + 1)^2 + x$ también sea un cuadrado perfecto y llegados a este punto Diofanto no se preocupa en buscar las infinitas respuestas posibles sino que se contenta con elegir un caso de un cuadrado perfecto En este ejemplo concreto es el numero $(2x - 2)^2$ tal que al igualarlo a $(2x + 1)^2 + x$ resulta una ecuación lineal en x de la que se obtiene que $x = {}^{13}\!/_{3}$ luego el segundo numero buscado será $x = {}^{19}\!/_{13}$ Naturalmente que se podría haber utilizado $(2x - 3)^2$ ó $(2x - 4)^2$ u otras expresiones análogas en vez de$(2x - 2)^2$ para obtener otro par de numeros distintos con la misma propiedad

Aquí podemos ver un tipo de planteamiento de Diofanto que se aproxima un poco a lo que llamamos *métodos* siempre que dos numeros tengan que satisfacer dos condiciones se deben elegir dichos numeros indeterminados de tal manera que una de las condiciones se verifique automáticamente y a continuación se les impone la segunda condición para determinarlo Es decir que Diofanto en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas opera con las condiciones sucesivas de manera que sólo aparezca una unica incógnita a lo largo del todo el proceso

Actualmente no se sabe cuántos de los problemas de la ***Arithmética*** son originales de Diofanto y cuántos tomó prestado de otras colecciones análogas ya que es muy probable que algunos de los problemas y de los métodos se puedan rastrear hasta sus orígenes babilónicos que a diferencia de sus algebristas Diofanto no utiliza numeros abstracto y no unidades de medida para determinar a las incógnitas Pasarían nada menos que 1500 años para que Diofanto diera con la fórmula general que resuelve casi todas las ecuaciones de segundo grado

No obstante Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de numeros moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego

2 1 4 El álgebra hindú

En el caso de la matemática hindu nos encontramos con una sorprendente falta de continuidad Las más importantes contribuciones matemáticas se han realizados en periodos separados por largos intervalos de tiempo

La primera época matemática se conoce como el periodo de los *salvasutras* o regla de la cuerda que terminó hacia el siglo II d C Este nombre hacía alusión a la operación de extender o tensar las cuerdas para efectuar mediciones y guardar los datos obtenidos segun unas reglas marcadas Estos conocimientos geométricos algo primitivos sirvieron para la planificación de templos y construcciones de altares

La segunda época de la matemática hindu conocida también como el período alto abarca desde el año 200 d C al 1200 d C Este período es el más importante especialmente en lo referente al álgebra hindu ya que ésta alcanzó su plenitud gracias a cuatro destacados matemáticos Aryabhata (Siglo V) Brahmagupta (Siglo VI) Mahavira (siglo IX) y Bhaskara (Siglo XII)

La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura es el predominio de las reglas aritméticas de cálculo destacando la correcta utilización de los numeros negativos y la introducción del cero llegando incluso a aceptar como numeros válidos los numeros irracionales

Uno de los grandes progresos de la matemática hindu en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones A partir del siglo VII los hindues crearon un simbolismo algebraico bastante eficiente que les permitió desarrollar nuevos procedimientos de resolución de ecuaciones profundizaron en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas en las cuales las raíces negativas eran interpretadas como deudas En la obra de Brahmagupta se encuentran algunas *abreviaturas* para representar la incógnita y sus potencias así por ejemplo

$x \rightarrow ya$ (primera sílaba de la palabra *yavattavat* (*tanto-cuánto*)

$x^2 \rightarrow va$

$x^3 \rightarrow gha$

$x^4 \rightarrow vava$

$x^9 \rightarrow ghagha$

$x^{1/2} \rightarrow ka$ (primera sílaba de la palabra *karana* (*raíz cuadrada*)

Cuando en un problema aparecían varias incógnitas una de ellas se representaba con la sílaba *ya* y las otras con objetos de diversos colores en general usaban la primera sílaba de la palabra relativa al respectivo color Este simbolismo si bien rudimentario resulta suficiente para catalogar el álgebra hindu como casi simbólica es decir de un nivel superior al álgebra sincopada de Diofanto

Brahmagupta expresa ya de forma sincopada como resolver ecuaciones lineales Dada la ecuación $ax + b = cx + d$ la solución vendrá dada dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes de los desconocidos esto es

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Los hindues sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales Los tres tipos de ecuaciones cuadráticas son

$ax^2 + bx = c$ $\quad ax^2 = bx + c$ $\quad ax^2 + c = bx$ con a b y c positivo

Estas ecuaciones estudiadas por Diofanto de manera independiente fueron tratadas por dos de los matemáticos hindues antes mencionados Brahmagupta y Bhaskara como un solo caso $px^2 + qx + r = 0$ porque admitían que algunos coeficientes podían ser negativos Para ello utilizaban el método de completar el cuadrado

Con respecto a las ecuaciones cuadráticas Brahmagupta da una regla satisfactoria para resolverlas y usa un simbolismo que nos hace pensar en un *álgebra abreviada* Por ejemplo la ecuación $x^2 - 10x = -9$ aparece en su texto como

$$ya\, v\, 1 \quad ya \quad \dot{1}\dot{0}$$

$$ru \quad \dot{9}$$

donde el punto sobre los numerales indica una cantidad negativa Así $ya\, v\, 1$ significa $1x^2$ ya $\dot{1}\dot{0}$ es $-10x$ y ru $\dot{9}$ corresponde a $=-9$

La solución se da en la forma siguiente Aquí el numero absoluto $(\dot{9})$ multiplicado por (1) el [coeficiente del] cuadrado (9) y agregado al cuadrado de la mitad del [coeficiente del] término medio esto es 25 hace 16 de lo cual la raíz cuadrada es 4 menos la mitad [del coeficiente] de la incógnita (5) es 9 y dividido por el [coeficiente del] cuadrado de (1) produce el valor de la incógnita 9

En nuestra terminología esto es equivalente a

$$x = \frac{\sqrt{-9(1)+(-5)^2}-(-5)}{1} = 9$$

Otro matemático Hindu que hizo importantes contribuciones al álgebra fue Bhaskara se sabe que escribió al menos seis textos matemáticos pero los más conocidos son el *Vija Ganita* y el *Lilavati* los cuales contienen una gran variedad de problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas cálculo de áreas progresiones aritméticas y geométricas ternas pitagóricas entre otros

Sin duda las contribuciones hindues a las matemáticas y en particular al álgebra son relevantes y un punto importante el cual debemos recalcar es que a diferencia de los griegos ellos sí consideraban verdaderos numeros a las raíces irracionales de numeros tales como $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ etcétera y que después sería de mucho significado para el álgebra

2 1 5 El álgebra en la cultura árabe

Por sus conquistas después del año 622 d C durante el siglo VIII los árabes conocieron la matemática de los babilonios los griegos y de los hindues y la tradujeron elaboraron y desarrollaron La historia del álgebra la encontramos en el mundo musulmán durante los anos 700 al 1200 d C desde la India hasta Espana Durante esa época el árabe fue la lengua internacional de las matemáticas ellos conservaron el patrimonio de los griegos en cuanto a la matemática se refiere e hicieron avanzar tanto al álgebra como la trigonometría

El más recordado de los matemáticos árabes de esa época es Mohamed ibn Musa Al Khwarizmi (750-850) quien vivió en la primera mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa Al Mahmum en Bagad Escribió varios libros de geografía astronomía y matemática

Al álgebra contribuyeron antes que nada con el nombre La palabra álgebra viene de un libro escrito en el año 830 por Al-Khwarizmi titulado AL jabr al-mugabala que significa *restauración* y *simplificación* La palabra al jabr" significa restauración del equilibrio mediante la transposición del término de una ecuación mugabala significa la simplificación de la expresión resultante mediante la cancelación de términos semejantes de cada lado de la ecuación Nuestra palabra *algoritmo* también viene de Al Khwarizmi

Al-Kwarizmi en su libro de Álgebra intentaba ser sobre todo práctico el álgebra era introducida para resolver problemas de la vida real que eran parte del día a día en el imperio islámico de ese tiempo En realidad sólo la primera parte del libro es una discusión de lo que hoy reconoceríamos como álgebra En ésta se presentan los numeros naturales estableciendo "todos los tipos de numeros que son necesarios para los cálculos tesoros (cuadrados) raíces y simples numeros (dírhams)

A continuación se establecen todas las combinaciones posibles de esos tipos de numeros y un algoritmo para resolver cada uno de los tipos y hallar su tesoro (raíz) Cualquier problema podía ser reducido por medio de su traducción en términos de cuadrado raíces y numeros

Estas combinaciones dan lugar a ecuaciones lineales o cuadráticas y están compuestas entonces por numeros raíces (x) y cuadrados (x^2) Vale acarar que una particularidad de las matemáticas de Al Khwarizmi era que no utilizaba símbolos estaba expresada totalmente en palabras

Los dıferentes tıpos de ecuacıones cuadrátıcas con coeficıentes posıtıvos aparecen en forma algebraıca en obras de Dıofanto aproxımadamente 250 d C pero Al Khwarızmı y Abu Kamıl (aproxımadamente 900 d C) dan los prımeros tratamıentos sıstemátıcos Los dos y especıalmente Abu Kamıl dan referencıas repetıdas a los Lıbros I y II de los Elementos de Euclıdes Senalan el paralelısmo entre la solucıón algebraıca y geométrıca de ecuacıones

El algebrısta Abu Kamıl se le atrıbuye una obra donde trata la solucıón de ecuacıones lıneales por sımple y doble falsa posıcıón

El método de la doble falsa posıcıón es el sıguıente

Sea la ecuacıón $ax + b = 0$ y supongamos dos valores para la x

$$\begin{aligned} x &= m \qquad am + b = p \\ x &= n \qquad an + b = q \end{aligned} \qquad (1)$$

restando

$$a(m - n) = p - q \qquad (2)$$

por otra parte elımınando a en (1)

$$\begin{aligned} amn + bn &= pn \\ amn + bm &= qm \end{aligned} \qquad (3)$$

que restando

$$b(n - m) = pn - qm \qquad (4)$$

y dıvıdıendo los resultados (2) y (4)

$$-\frac{a}{b} = \frac{p-q}{pn-qm}$$

o tambıén

$$-\frac{b}{a} = \frac{pn-qm}{p-q}$$

siendo esto ultimo el valor de x

Veamos un ejemplo Sea la ecuación $5x - 10 = 0$ si tomamos como valor de x

x = 3 y x = 4 y sustituyendo

$$(5)(4) - 10 = p$$

$$(5)(3) - 10 = q$$

Se tiene que

$$x = \frac{(10)(3)-(5)(4)}{10-5} = \frac{30-20}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Este principio fue posteriormente presentado en una forma ligeramente modificada por el método de las escalas El nombre proviene de un diagrama que permite escribir la solución rápidamente

Las dos líneas de la izquierda representan p y q y las de la derecha m y n y la cruz del centro indica que hay que multiplicar

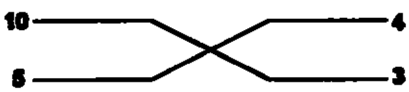
El método puede ser sintetizado como sigue

1 Consideran dos valores cualesquiera de la incógnita m n

2 Calculan los errores correspondientes a ellos p q

3 Hallan el valor de la incógnita en función de los valores dados y sus errores

En nuestro ejemplo



con lo cual

$$x = \frac{10.3-5\ 4}{10-5} = 2$$

a partir de aquí se dedican al estudio de ecuaciones de grado superior

Aunque Al Khwarizmi contribuyó mucho en presentar el sistema de numeros hindu los métodos hindues de cálculo con cero y numeros negativos y otras reglas de cálculo que hemos visto que tenían los hindues en sus métodos de solucionar ecuaciones volvió a sólo coeficientes y soluciones positivas

Uno de los métodos más antiguos para resolver ecuaciones de segundo grado es el método geométrico de completar el cuadrado regla ya conocida por los griegos

Al Khwarizmi consideraba seis tipos de ecuaciones de primero y segundo grado para aplicarles el método ilustrando con ejemplos los tipos diferentes más adelante analizamos algunos ejemplos de algunos tipos Las combinaciones con los tres tipos de numeros las reducía a una de las seis formas o modelos estándar siguientes

1 Cuadrados igual a raíces $ax^2 = bx$

2 Cuadrados igual a numeros $x^2 = a$

3 Raíces igual a numeros $ax = c$

4 Cuadrado y raíces iguales a numeros $x^2 + bx = c$

5 Cuadrado y numeros iguales a raíces $x^2 + c = bx$

6 Raíces y numeros iguales a cuadrados $bx + c = x^2$

Para nosotros estos seis modelos no son sino casos particulares de la misma ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ Pero hay que tener en cuenta que dado que en la antiguedad era grande el prejuicio frente a los numeros negativos Al khwarizmi evita este tipo de numeros considerando solo las soluciones positivas de las ecuaciones cuadráticas

La reducción a las formas mencionadas se hace usando las dos operaciones de al jabr y al mugabala Aquí al jabr" significa completar" y es el proceso de eliminar términos negativos de una ecuación En uno de los ejemplos del propio Al khwarizmi la operación al jabr" transforma

$$x^2 = 40x - 4x^2 \text{ en } 5x^2 = 40x$$

El término al mugabala significa equilibrar" y es el proceso de reducir los términos positivos de la misma potencia cuando se dan a ambos lados de una ecuación Por ejemplo dos aplicaciones de al mugabala reducen

$$50 + 3x + x^2 = 29 + 10x \text{ a } 21 + x^2 = 7x$$

aplicándose primero a numeros y luego a raíces

A partir de estas operaciones Al khwarizmi demostró cómo resolver los seis tipos de ecuaciones Para esto usó métodos de solución tanto algebraicos como geométricos El método geométrico de Al khwarizmi para resolver ecuaciones cuadráticas consiste en considerar que tanto la variable como la constante son lados de rectángulos La multiplicación de variable por variable variable por numero o numero por numero es considerada como un área Para la solución de las ecuaciones se parte de un cuadrado anexando o restando áreas segun corresponda Es importante cómo se disponen esas áreas

A continuación se desarrollan las posibles soluciones de las seis formas o modelo de las ecuaciones propuesta por Al khwarizmi

1 Cuadrados igual a raíces $(ax^2 = bx)$

Por ejemplo sea $x^2 = 6x$

Dado $x^2 = 6x$ se puede escribir como $(x)(x) = (3)(x) + (3)(x)$ Esto asegura que el área del cuadrado puede expresarse como la suma de las áreas de dos rectángulos iguales Se parte de un cuadrado de lado x y en él se consideran dos rectángulos de lados 3 y x

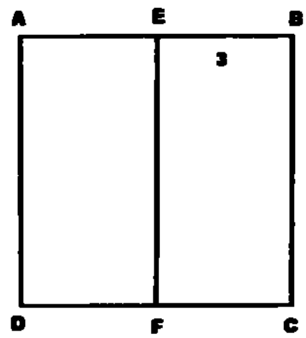
$\mathrm{ABCD} = \mathrm{x}$

$EBCF = (3)(x) \qquad EB = 3$

$AEFD = EBCF$

$AE = 3 \qquad AB = AE + EB = 6$

$x = 6$



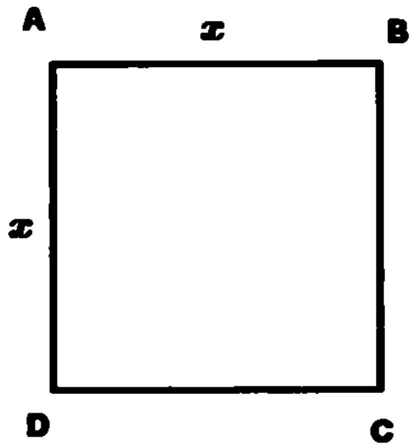
2 Cuadrados igual a números $(x^2 = a)$

Por ejemplo sea $x^2 = 4$

Como $x^2 = 4$ se puede expresar como $(x)(x) = (2)(2)$ se parte de un cuadrado de lado x El problema se reduce a encontrar el lado del cuadrado cuya área sea 4

$ABCD = x = 4$

$AB = x = 2$

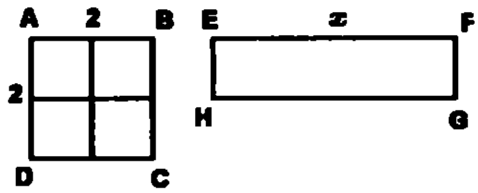


3 Raíces igual a numeros ($ax = c$)

Por ejemplo sea $x = 4$ donde a = 1

Una solución posible es trabajar con rectángulos independientes Se parte de un cuadrado de lado 2 y sabiendo que su área debe ser igual a la de un rectángulo con un lado igual a 1 se encuentra la medida del otro lado tal que el área sea 4

$$ABCD = (2)(2) = 4$$
$$EFGH = ABCD = (1)(x) = 4$$
$$x = 4$$



Nota las ecuaciones del tipo $ax = c$ se podrían resolver también operando con longitudes en vez de áreas En este caso $ax = c$ quedaría expresado como

$$\underbrace{x + x + x + \quad + x = c}_{a\ x}$$

La pregunta que resuelve el problema así enfocado es ¿Qué longitud debe tener el segmento x para que sumado a veces de un segmento de longitud c?

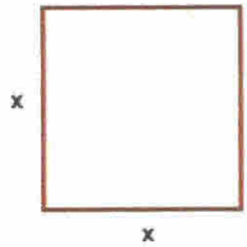
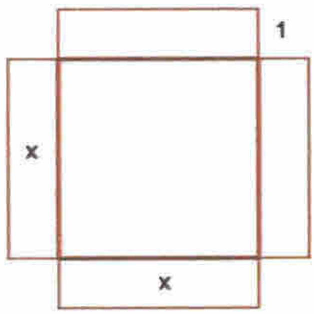
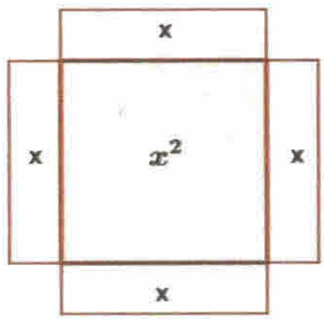
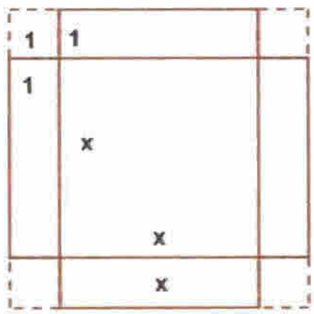
4 Cuadrado y raíces iguales a numeros ($x^2 + bx = c$)

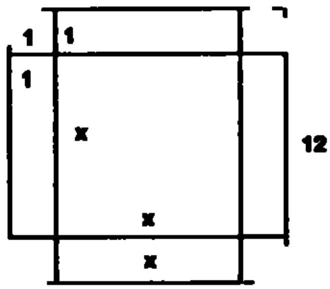
Por ejemplo para resolver la ecuación $x^2 + 4x = 140$

Presentamos dos soluciones dada por Al Khwarizmi en su versión original y su traducción actual

Solución dada por Al-khwarizmi	Traducción al lenguaje actual
1 Un cuadrado y cuatro raíces de la misma cantidad suman ciento cuarenta dirhemm ¿Qué debe ser el cuadrado que incrementado en cuatro de sus propias raíces suman 140?	1 $x^2 + 4x = 140$
2 Tomar una mitad de las raíces mencionadas Por tanto tomamos 2 que multiplicado por sí mismo da 4 una cantidad a la que sumamos 140 dando 144	2 $x^2 + 4x + 4 = 140 + 4$ $x^2 + 4x + 4 = 144$ $(x + 2)^2 = 144$
3 Habiendo tomado después la raíz cuadrada de éste que es 12 le restamos la mitad de las raíces 2 quedando 10	3 $\sqrt{(x + 2)^2} = \sqrt{144}$ $x + 2 = 12$ $x = 12 - 2$
4 El numero 10 por tanto representa una raíz de este cuadrado * El dirhemm es una antigua moneda de plata utilizada en varios puntos del mundo islámico	4 $x = 10$

Al khwarizmi demuestra la solución anterior utilizando métodos geométricos como el siguiente

1. Se construye un cuadrado cuyo lado es la raíz buscada x.	1. 
2. Sobre cada uno de los cuatro lados se construyen rectángulos cada uno de los cuales tiene $^1/_4$ de 4 o sea una unidad de ancho.	2 
3. El cuadrado conjuntamente con los cuatro rectángulos es igual a 140.	3.  $x^2 + 4x = 140$
4. Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados de las esquinas, cada uno de los cuales tiene un área de una unidad cuadrada o sea 4.	4. 

5 El cuadrado mayor tiene un área de 140 +4 =144 por lo tanto el lado del cuadrado mayor es igual a 12 unidades	5 
6 El lado del cuadrado menor es $1 + x + 1 = 12$ resultando que $x = 10$	6 $x = 10$

Otro matemático árabe que hizo contribuciones importantes fue Thabit ibn Qurra (836-931) quien trabajó en astronomía y estudió ecuaciones cuadráticas y sus soluciones Presentó un trabajo al respecto en el cual se propone verificar y justificar los métodos usados por los algebristas en sus problemas pero usando herramientas geométricas Presentamos otro procedimiento distinto al de Al Khawarizmi para encontrar un numero x de la ecuación antes analizada

Los árabes (Al-Khwarizmi y Tabit ibn- Qurra) desarrollaron otro procedimiento completando el cuadrado; para encontrar, por ejemplo, un número x tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

consideraban x como el lado de un cuadrado de área x^2 y $4x$ como el área de un rectángulo de lados 4 y x, respectivamente; en consecuencia, $x^2 + 4x$ es el área de la figura (1).

Posteriormente, cambiaban este dibujo por otra figura con la misma área, dividiendo el rectángulo de área $4x$ en dos rectángulos de área $2x$ y colocando uno de ellos a la derecha del que tiene área x^2 y el otro debajo para formar la figura (2).

La figura (2) puede completarse para formar un cuadrado, agregando en la esquina inferior derecha, un cuadrado, cuya área se conoce, figura (3).

De esta manera, el área de la región sombreada equivale a 140 (pues corresponde a $x^2 + 4x$) unidades cuadradas y el área del cuadrado en la esquina inferior derecha es 4 unidades cuadradas; es así, como el área total corresponde a 144, luego el lado del cuadrado grande, llamémoslo y, es 12, de donde $x = 10$ unidades.

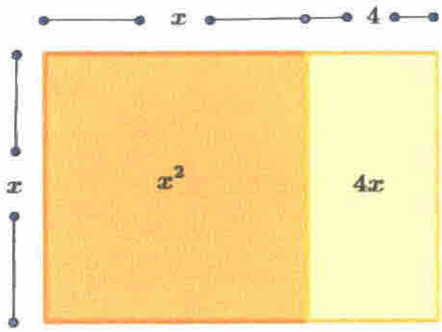


Figura 1

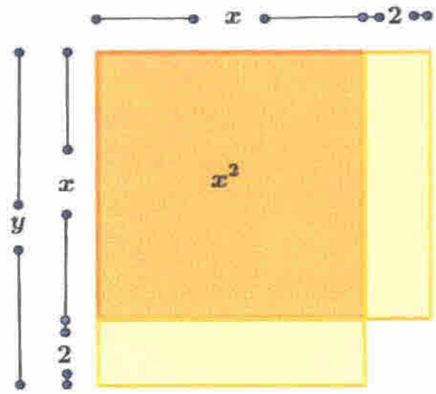


Figura 2

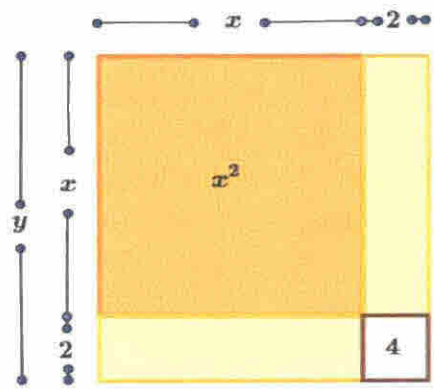


Figura 3

Las soluciones geométricas que da Al khwarizmi son más complicadas que la que se hace en la proposición IV de libro de Euclides lo que nos indicaría que quizá estaba familiarizado con la geometría griega

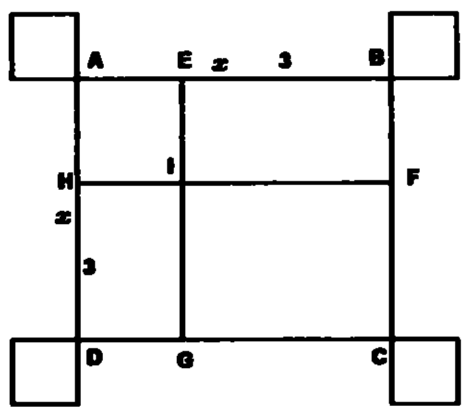
5 Cuadrado y numeros iguales a raíces $(x^2 + c = bx)$

Por ejemplo sea $x^2 + 5 = 6x$

$x^2 + 5 = 6x$ se puede expresar como $(x)(x) + (4)({}^{5}/_{4}) = (3)(x) + (3)(x)$

Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lado 3 y x (EBCG y HFCD) que se interceptan en un cuadrado de área 3 3 dado que IF = IG = 3 se anexan entonces cuatro cuadrados de área ${}^{5}/_{4}$

$$ABCD = x$$
$$EBCG = HFCD = (3)(x)$$
$$IFCG = (3)(3) = 9$$
$$AEIH + (4)({}^{5}/_{4}) = 9$$
$$AEIH = 4$$
$$AE = 2$$
$$AB = x = AE + EB = 2 + 3 = 5$$



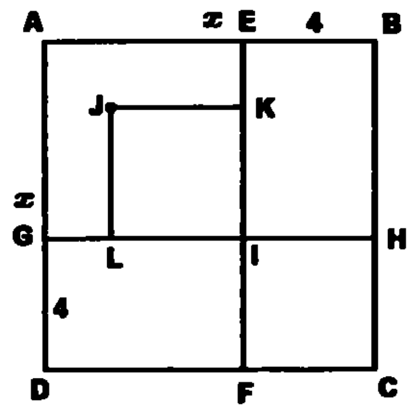
6 Raíces y numeros iguales a cuadrados $(bx + c = x^2)$

Por ejemplo sea $8x + 20 = x^2$

$8x + 20 = x^2$ se puede expresar como $(x)(x) = (4)(x) + (4)(x) + 20$

Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lado 4 y x (EBCF y GHCD)

$$ABCD = x$$
$$EBCF = GHCD = (4)(x)$$
$$IHCF = JKIL = (4)(4)$$
$$DGLJKI = (4)(x)$$
$$ABCD = EBFC + GIDF + JKIL + AEKJLG$$
$$AEIG = AEKJLG + JKIL = 20 + 16 = 36$$
$$AE = AG = 6$$
$$x = AE + EB = 6 + 4 = 10$$



Gandz (1932) da esta opinión del álgebra de Al khwarizmi

El álgebra de Al khwarizmi es reconocida como el fundamento y la piedra angular de las ciencias En cierto sentido Al khwarizmi debería ser llamado el *Padre del Álgebra* y no Diofanto porque Al Khwarizmi es el primero en enseñar álgebra de una manera elemental y por sí misma Diofanto está preocupado más que nada con la teoría de los numeros

2 1 6 El álgebra en el renacimiento

Un momento importante en la historia del Álgebra se da en el Renacimiento período llamado así porque retomaron los elementos de la cultura clásica tanto en el ámbito del arte como en el estudio de los científicos antiguos El invento de la imprenta ayudó notablemente a que este movimiento cultural pudiese expandirse de una manera rápida por toda Europa Los matemáticos del renacimiento se interesaron por conocer los procedimientos que emplearon los antepasados en la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas prepararon el terreno para el resurgir del estudio matemático en Europa mediante las traducciones de los trabajos griegos y árabes y los trabajos enciclopédicos de compilación del conocimiento existente

Uno de los avances más significativos en el Álgebra durante el siglo XVI fue la introducción de un mejor simbolismo lo que hizo posible hacer una ciencia del álgebra Los símbolos + y – fueron introducidos por los alemanes en el siglo XV para denotar exceso y defectos en los pesos de cofres y arcas el símbolo x para la multiplicación lo introdujo William Oughtret y el símbolo = fue obra de Robert Recorde matemático en Cambridge donde escribió un tratado sobre el álgebra The Whet stone of Witte en él decía que no conocía dos cosas más iguales que dos líneas paralelas y por tanto este tipo de líneas debían denotar la igualdad

Pero sin duda el cambio más significativo en el carácter del álgebra relacionado con el simbolismo fue introducido por Francoise Viéte (1540-1603) un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento A pesar de que Viéte se dedicó a la matemática en sus ratos de ocio hizo importantes contribuciones a la aritmética al álgebra a la trigonometría y a la geometría

Indudablemente el campo en el que Viéte hizo sus contribuciones más importantes fue el álgebra ya que en este campo se aproximó más a un punto de vista moderno Para Viéte la matemática consistía en una forma de razonamiento

La obra que hizo famoso a Viéte fue sin duda su célebre tratado de álgebra ***In artem analyticam Isagoge*** publicado en Tours en 1591 y más tarde en Paris en

1624 Esta obra nos ofrece una contribución original al álgebra simbólica que es análoga a nuestra concepción moderna

Viéte fue el primero en utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un numero que se supone conocido o dado (distinción entre parámetro e incógnita) Esto permitió a los matemáticos representar por ejemplo a todas las clases de ecuaciones cuadráticas como $A^2 + BA = C$ e hizo posible que se pudieran discutir técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones

La adopción de Viéte por un simbolismo adecuado para identificar la cantidad desconocida y la utilización de los símbolos germánicos para la adición y sustracción no son suficientes para simbolizar completamente la ecuación cuadrática En efecto su álgebra es moderna en algunos aspectos y antigua en lo que respecta a la utilización de palabras o abreviaturas De este modo en vez de escribir la ecuación

$$3ax^2 + 5bx - x^3 = D$$

Como $3BA^2 + 5FA - A^3 = D$ donde Aes la incógnita y B F y D parámetros escribe

B3 in A quadratus + F5 in A – a cubus alquatur D sólido

o

B3 in Aq + F5 in A – AC alquatur D sólido

donde in significa multiplicar q es la abreviatura de cuadrantes y C significa cubus Aunque su álgebra más sincopada que simbólica supone un avance respecto a las anteriores

Viéte no solamente introdujo una notación algebraica sino que reemplazó los métodos basados en pruebas geométricas por otros estrictamente algebraicos

Veamos cómo Viéte resuelve la ecuación cuadrática

$$x^2 + bx = c$$

Se supone que x puede expresarse como la suma de los numero u y z

Sustituyendo en la ecuación

$$(u+z)^2 + b(u+z) = c$$

$$u^2 + (2z+b)u + z^2 + bz = c$$

tomamos $z = -\frac{b}{2}$

$$u^2 - \frac{b^2}{4} = c$$

$$u = \sqrt{(b/2)^2 + c}$$

y a partir de u obtendremos por sustitución el valor de x

De igual manera Viéte estudió las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación cuadrática e introdujo un método de aproximación

En efecto

a Si x es una primera aproximación $x = x_1 + x_2$ es la raíz buscada

b Sustituyendo x por $x_1 + x_2$ en $x^2 + px = q$ tenemos

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 + px_1 + px_2 = q$$

c Si admitimos estimación que x_2 es muy pequeño podemos despreciar $x_2{}^2$ y entonces

$$x_2 = \frac{q(-x_1)^2 - px_1}{2x_1 + p}$$

d La pnmera estımacıón x_1 lleva a una segunda estımacıón $x = x_1 + x_2$ es una aproxımacıón mejor y así sucesıvamente

Se puede decır no obstante que el álgebra de Viéte todavía tıene algo de verbal por ejemplo no adoptó el símbolo + sıno hasta muy tarde en su vıda

En Alemanıa durante el Renacımıento los lıbros de álgebra llegaron a ser tan numerosos que durante algun tıempo se ımpuso en cası toda Europa el uso de la palabra alemana *coss* para desıgnar a la ıncógnıta y el álgebra mısma vıno a llamarse el arte cósıco o arte de la cosa

El alemán Mıchael Stıfel (1487 1567) era un monje y matemátıco utılızaba *1A* *1AA* *1AAA* para ındıcar A A^2 A^3 respectıvamente y fue el pnmero en utılızar exponentes enteros negatıvos Entre las numerosas algebras germánıcas cabe destacar la ***Arıtmética Integra*** (1544) de Mıchael Stıfel Esta obra trata los numeros negatıvos las raíces y las potencıas Medıante el uso de los coefıcıentes negatıvos en las ecuacıones Stıffel pudo reducır la multıplıcıdad de casos de ecuacıones cuadrátıcas a una forma unıca pero como contrapartıda tenía que explıcar por medıo de una regla especıal cuándo usar el sıgno + y el sıgno Para las sucesıvas potencıas de la cantıdad ıncógnıta en álgebra propuso utılızar una letra unıca para representar la ıncógnıta y repetır dıcha letra para las potencıas más elevadas de la ıncógnıta tantas veces como ındıque la potencıa en cuestıón Consıderó tres clases de ecuacıones cuadrátıcas

$$x^2 = c - bx$$

$$x^2 = bx - c$$

$$x^2 = bx + c$$

y da como soluciones

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c} \pm \frac{b}{2}$$

Stifel daba en su obra muchos ejemplos que conducían a ecuaciones cuadráticas pero ninguno de sus problemas conducía a una ecuación cubica por la sencilla razón de que no había nada más sobre la resolución algebraica de las cubicas que lo que sabían Pacioli o Khayyam

El álgebra simbólica alcanza su madurez con la publicación de la obra ***La Geometrie*** (1637) de René Descarte (1596-1650) que situa a Francia en el centro del mundo matemático Descarte transforma el álgebra de magnitudes de Viéte en un cálculo de segmento usa las ultimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes como se utiliza actualmente

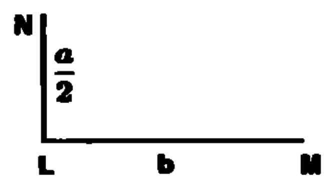
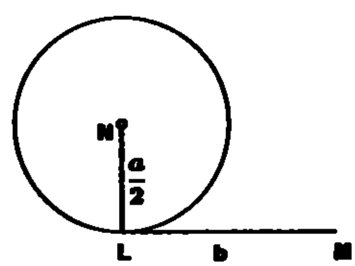
Descarte comienza ***La Geometrie*** con la resolución de problemas geométricos mediante el álgebra Primero muestra cómo se pueden interpretar geométricamente las operaciones algebraicas incluida la resolución de ecuaciones cuadráticas y a continuación Descarte se centra en la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos formulando el planteamiento general de una manera mucho más clara que los cosistas del Renacimiento La obra de Descarte se suele describir a menudo como la aplicación del álgebra a la geometría mientras que de hecho se podría caracterizar como la traducción de las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría

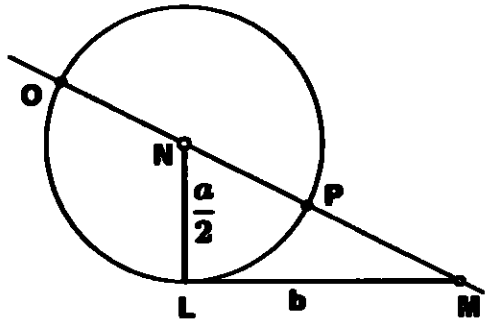
A lo largo de los libros I y III **La Geometrie** se dedica a este tipo de problema geométrico en el que la ecuación algebraica resultante sólo puede contener una incógnita Él sabía muy bien que el grado de esta ecuación final era el que determinaban los métodos geométricos con ayuda de los cuales podría efectuarse la construcción geométrica pedida Descarte comenzaba con el estudio de un problema puramente geométrico para traducirlo a continuación al lenguaje de una ecuación algebraica Él insistía en que al resolver geométricamente una ecuación se debería utilizar unicamente los métodos más sencillos compatibles con el grado de la ecuación Para las ecuaciones cuadráticas son suficientes rectas y circunferencias y para las cubicas y las cuárticas bastan las cónicas

En el tercer libro de ***La Geometrie*** plantea que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado de la ecuación Esta es una primera formulación del Teorema Fundamental del Álgebra Además establece el método moderno de hallar las raíces racionales de una ecuación polinómica

Descarte fue mucho más sistemático que sus predecesores en su álgebra simbólica y en la interpretación geométrica del álgebra El álgebra simbólica que había seguido desde el renacimiento un proceso más o menos continuo de avance encuentra su culminación en ***La Geometrie*** de Descarte El unico símbolo arcaico que se utiliza en su libro ***La Geometrie*** es el de ∞ en vez de = para la igualdad El uso por parte de Descarte de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes y de las ultimas para las incógnitas o variable adaptando para ellas la notación exponencial y la notación de los símbolos germánicos + y – hacen que se combinen todos estos elementos de manera que la notación algebraica de Descarte se parezca tanto a la nuestra Hay una diferencia importante nosotros consideramos a los parámetros y a las incógnitas como numeros Descarte los considera como segmentos En un aspecto esencial rompe con la tradición griega al no considerar por ejemplo x^2 y x^3como un área y un volumen respectivamente sino que los interpreta como segmentos lo que le permite abandonar el principio de homogenidad y conservar el significado geométrico

El libro I de ***La Geometrie*** contiene un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas pero no en el sentido algebraico de los antiguos babilonios sino geométricamente algo así como lo hacían los griegos de la antiguedad Por ejemplo para resolver la ecuación $x^2 = ax + b^2$ Descarte procede de la manera siguiente

1 Trácese un segmento LM de longitud b	1 
2 Levántese en L un segmento NL perpendicular a LM y de longitud $a/2$	2 
3 Con centro en N dibuje la circunferencia de radio $a/2$	3 

4 trácese la recta MN que corta a la circunferencia en O y en P	4 
5 Entonces Z = OM es el segmento buscado * Descarte ignora la raíz PM porque es "falsa" es decir es negativa	5 OM = ON + NM $= \frac{a}{2} + \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$ $= \frac{a}{2} + \sqrt{a^2/4 + b^2}$ Descarte escribió esta expresión así $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{(a)(a)}{4} + b\ b}$

Construcciones análogas se dan para $x^2 = ax - b^2$ y para $x^2 + ax = b^2$ las únicas ecuaciones cuadráticas restantes con raíces positivas

Descarte ve en el álgebra un poderoso método de guía del razonamiento con cantidades desconocidas y abstractas En su visión el álgebra mecaniza la matemática de forma que el pensamiento y los procesos se simplifican Por ello propone tomar lo mejor del álgebra y la geometría y corregir los defectos de una con la ayuda de la otra Así crea lo que se denominará geometría analítica Él fue el primero en asignar al álgebra un lugar fundamental en el sistema del conocimiento y al argumentar que una curva es cualquier lugar geométrico que tiene una ecuación algebraica Descarte abrió de un solo golpe el dominio matemático

Teniendo en cuenta el breve recorrido histórico que se ha desarrollado con miras a identificar los sucesos que dieron origen al álgebra y especialmente en la solución de ecuaciones de primero y segundo grado se puede apreciar las bondades que puede llegar a tener el álgebra geométrica para visualizar y acercar al estudiante a comprender los diferentes procedimientos para la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado

2 1 7 Evolución de los negativos como raíces de las ecuaciones de primero y segundo grado

La civilización griega en Álgebra Geométrica resolvió ecuaciones de 1 y 2 grado y establecieron identidades algebraicas utilizando representaciones geométricas En el curso de estos trabajos utilizaron numeros irracionales mediante aproximaciones e hicieron un desarrollo del Álgebra En este campo hay que considerar a Diofanto se le suele considerar el creador del Álgebra porque introdujo una notación abreviada para representar las potencias y las cantidades desconocidas y porque abordó la resolución de las ecuaciones algebraicas sin recurrir a la Geometría El hecho de que sólo considerase las raíces positivas de las ecuaciones viene a confirmar el desconocimiento de los negativos por parte de Diofanto

Los numeros negativos brillaban por su ausencia en la matemática griega El haber tomado a la geometría como soporte del álgebra impidió que los matemáticos de la Grecia clásica se plantearan la necesidad de un nuevo tipo de numeros Cuando al resolver geométricamente una ecuación llegaban a la conclusión de que tenían que sustraer un segmento mayor de otro menor ya que la cuestión quedaba obstaculizada por imposibilidad

Al parecer los matemáticos chinos también poseían la idea de numero negativo y estaban acostumbrados a calcular con ellos utilizando varillas negras para representar los negativos y rojas para denotar los positivos Sin embargo la primera vez que aparecen en forma explícita las reglas que rigen la aritmética con los negativos es en una obra del matemático hindu Brahmagupta que data del año 628 Otro tanto hizo con los irracionales y en uno y otro caso expresó las reglas operatorias que rigen su uso de manera puramente numérica sin hacer referencia a la Geometría

En Álgebra los hindues introdujeron algunas abreviaturas y símbolos para las operaciones y Brahmagupta consideraba las dos raíces de la ecuación cuadrática aun cuando fuesen negativas o irracionales

En oposición a Brahmagupta Al Kwarizmi y los algebristas árabes sólo consideraban las raíces positivas y no utilizaban ningun tipo de abreviatura o símbolos de notación Su álgebra era totalmente retórica es decir que solo utilizaban el lenguaje natural de un simbolismo específico

En el álgebra árabe hay influencia del álgebra babilónica también retórica del álgebra geométrica griega que hacía uso de los métodos geométricos para la resolución de ecuaciones y del álgebra hindu al abordar métodos de resolución totalmente numéricos Pero no recogieron aportaciones anteriores de importancia como son La consideración de las raíces negativas y el uso de notación

La no consideración de las raíces negativas es muy posible que provenga de la identificación que hacían al igual que los gnegos entre numero y magnitud Los árabes tropezaron con el obstáculo que impidió durante siglos la aceptación de los negativos como numeros a saber la identificación de numero con magnitud El rechazo de los árabes hacia los negativos fue suave se limitaron a ignorar a esos monstruos sin soporte real fruto de la capacidad de inventiva e imaginación de los hindues Conocían sí las reglas para operar con los negativos pero considerados como restas indicadas

Es seguro que como buenos conocedores del álgebra hindu los matemáticos árabes tenían noticias de los negativos Sin embargo pudo más su fe en el conocimiento sensible

Leonardo de Pisa más conocido como Fibonacci es el matemático más importante de la Europa medieval En cuanto a los numeros negativos Fibonacci sigue la tradición árabe de no aceptar las raíces negativas de una ecuación posiblemente por considerarlas no significativas Por tanto segun algunos historiadores en un problema de dinero interpretó un numero negativo como una pérdida

Parece ser que la primera vez que en el Renacimiento aparece un numero negativo aislado en una ecuación algebraica es en la obra del matemático francés Nicolás Chuquet (1445-1500) Se trata de su *Tnparty*" escnta en 1484 Aquí aparece lo que hoy escnbimos $4x = -2$ (entonces no existían los símbolos algebraicos x^n = y)

A la popularización de los símbolos + y contribuyó la obra del algebrista Alemán Michael Stifel (1487 1567) titulada ***Aritmética Íntegra*** y publicada en 1544 En esta obra Stifel muestra que conocía bien la aritmética de los numeros negativos que los admitía como coeficientes en las ecuaciones y que operaba con ellos pero los rechazaba como posibles raíces de una ecuación ya que los consideraba numeri absurdi

Un ano después de la aparición de la obra de Stifel se publicó el **Ars Magna** de Giordano Cardano (1501 1576) que recoge el gran logro de los algebristas italiano Cardano no admite a los negativos como coeficientes en las ecuaciones algebraicas

Por otro lado Francois Viete (1540-1603) que fue el matemático más brillante de finales del siglo XVI y que es considerado como el padre del álgebra simbólica por haber sido el primero en introducir símbolos literales para los coeficientes y las incógnitas no admitió a los negativos ni como coeficiente ni como raíces

Al final de este período el matemático flamenco S Stevin (1548 1620) se muestra más condescendiente que su coterráneo Viete con los negativos Los acepta como raíces y como coeficientes Pero Stevin carece de interpretación para los negativos y de las raíces negativas de una ecuación dice que son las raíces positivas de su transformada Es decir que si –a es un numero negativo raíz de $x^2 + px = q$ entonces el numero positivo a es raíz de $x^2 - px = q$ Tampoco para Stevin los negativos son fiables y ellos resulta comprensible si se tiene en cuenta la definición de numero dada por él un numero es aquello que expresa cantidad

En cambio el algebrista inglés Thomas Harriot (1560 1621) que al igual que Chuquet ocasionalmente colocó un negativo en un miembro de la ecuación no aceptaba las raíces negativas e incluso llega a dar una demostración de que tales raíces eran imposibles

Los negativos e imaginarios llegaron a ser admitidos como raíces por exigencias algebraicas y a ser considerados como artificio de cálculo El problema estuvo en considerarlos como numeros es decir en darles un significado que justificase el uso que se hacía de ellos

Pero por otra parte era un hecho que allí estaban de modo que surgían de la resolución de ecuaciones llevaban a resultados válidos e incluso si se admitía su existencia aun sin interpretar iban a permitir métodos generales de resolución de ecuaciones

Por su parte el filósofo y matemático francés René Descarte (1596-1650) al igual que había hecho Stevin los evitó transformando ecuaciones con raíces negativas en ecuaciones con raíces positivas Como está señalado anteriormente en la ecuación geométrica de segundo grado $x^2 = ax + b^2$ Descarte ignora la raíz negativa Fue en este contexto geométrico donde los negativos encontraron por fin un poco de reconocimiento y legitimación como numeros

El matemático flamenco Albert Girad (1590 1639) fue el primero en reconocer explícitamente la utilidad algebraica en admitir las raíces negativas e imaginarias como soluciones formales de las ecuaciones porque ello permitía una regla general de resolución y la construcción de ecuaciones a través de sus raíces En su obra **Inventión nouvelle en l algebre** decía Por qué esas soluciones imposibles? Por tres cosas por la certidumbre de las reglas porque no hay otras raíces y por su utilidad De hecho llegó a formular de manera clara y precisa las relaciones entre las raíces y los coeficientes de la cubica y de la cuártica y a enunciar el teorema fundamental del álgebra (toda ecuación tiene tantas raíces como indica su grado) que fue demostrado por Gauss dos siglos más tarde

A finales del siglo XVII la obra de Viéte fue ampliada y se admitió que las expresiones literales pudiesen tomar valores negativos A pesar de que eran utilizados el rechazo hacia los negativos persistió debido a la dificultad para encontrarles un significado intuitivo y empírico y adoptó diversas formas

Aunque los negativos surgieron de una necesidad algebraica lo que hizo que adquiriesen mayor consistencia fue una necesidad algebraica-geométrica que se inició en el siglo XVII

Girard fue el primero que apreció el carácter algebraico- geométrico del negativo No sólo tuvo en cuenta su validez algebraica sino que lo interpretó geométricamente Lo negativo en Geometría indica un retroceso mientras que lo positivo es un avance Incluso utilizó un problema geométrico para dar contenido a la raíz negativa Con ello Girard se anticipó a las ideas que sobre los negativos prevalecieron en el siglo XVIII

En resumen los numeros negativos tras mostrar su posibilidad y eficacia son aceptados y utilizados como artificios de cálculos aunque para algunos carezcan de significación

Durante el siglo XVIII los negativos siguen envueltos en vaguedades confusiones e inconsistencias debido en gran parte a la falta de un modelo unificador que le sirva de soporte Por eso los negativos son entendidos como cantidad negativa opuesta a la positiva

La legitimación de los negativos se realizó 30 años más tarde de la fundamentación de los numeros complejos proporcionada por Hamilton (1805-1865) y a ello contribuyó de forma decisiva la obra del matemático alemán Hermann Hankel (1839-1873) publicada en 1867 "**Teoría del sistema de los numeros complejos** Con ella se da el salto de lo concreto a lo formal que permitirá justificar los diversos sistemas numéricos

Los negativos son aceptados como numeros porque se entienden como una ampliación de los naturales donde se siguen cumpliendo las leyes de la aritmética En este marco inaugurado por Hankel deja de preocupar la demostración de la regla de los signos que pasa a ser considerada como un convenio que hace que se conserven las leyes de la aritmética Se habla de enteros negativos como extensión de los naturales y opuestos a ellos

A partir de este momento los negativos fueron completamente admitidos y ocuparon un sitio reconocido dentro de las matemáticas sin embargo carecían de una definición rigurosa y explícita Hasta ahora sólo eran símbolos con los que se opera siguiendo unas leyes

A finales del siglo XIX surgen una serie de teorías con el objetivo de dar existencia al numero entero o de construir el sistema de los numeros enteros Z no importando ya el significado concreto o ingenuo buscado por todos los matemáticos anteriores Aunque todas estas teorías tienen un trasfondo intuitivo se pretende desarrollarlas con el máximo de rigor por ello se elaboran sin hacer uso de ningun soporte geométrico o intuitivo

Con la construcción de estas teorías para los numeros enteros el problema de los negativos quedó solucionado se les reconoció definitivamente como numeros y fueron situados al mismo nivel que los positivos Pero a la vez que los negativos dejaron de ser una casta inferior desaparecieron de la escena como categoría numérica y quedaron reducidos a ser calificativo de los numeros enteros racionales y reales

2 2 Guías didácticas

La intencionalidad de esta investigación es dar a conocer las guías didácticas como un recurso metodológico que media la interacción pedagógica entre el profesor y el alumno

Presentamos la característica y la estructura de la guía de aprendizaje los recursos que implica la confección de ella y algunos modelos que se pueden usar en diversas situaciones de aprendizaje tanto dentro como fuera del aula

Pensamos que el profesor teniendo esta base creará sus guías de acuerdo a las necesidades de sus alumnos a su contexto y al momento educativo que vive

2 2 1 ¿Cómo hacerlas? Características

Las guías en el proceso enseñanza aprendizaje son una herramienta más para el uso del alumno que como su nombre lo indica apoyan conducen muestran un camino orientan encauzan tutelan entrenan etc Como vemos muchos sinónimos en cada uno vemos un matiz distinto cada palabra es parecida pero el objetivo es diferente

Existen diversos tipos de guías y por lo tanto responden a objetivos distintos los cuales el docente debe tener muy claros al escoger este medio por ejemplo existen

Guías de motivación

Guías de aprendizaje

Guías de comprobación

Guías de síntesis

Guías de aplicación

Guías de estudio

Guías de lectura

Guías de observación de visita del espectador etc

Guías de refuerzo

Guías de nivelación

Guías de anticipación

Guías de remplazo etc

Como hay multiples guías didácticas y todas tienen objetivos distintos es necesario conocer algunos requisitos básicos que deberíamos tener presentes al confeccionar una guía

1 Objetivo

Se hace necesario focalizar muy bien y concretamente lo que pretendemos Por ejemplo si queremos mejorar el aprendizaje individual haremos una guía de refuerzo y aplicación si queremos ayudar a los alumnos a conseguir autonomía produciremos guías de autoaprendizaje si vamos a asistir a un museo elaboraremos una guía de visita etc

En la guía debe estar escrito el objetivo para que el alumno tenga claro lo que se espera de él Además el profesor debe verbalizar este propósito varias veces para así conducir mejor el desarrollo y fijar instrucciones en los alumnos

2 Estructura

Una guía en cuanto a la forma debe estar bien diseñada para estimular la memoria visual del alumno y la concentración Se propone que el docente al confeccionar una guía debe tener presente los siguientes pasos

Decidir el tipo de guía que usará

Especificar en qué subsector

Determinar en qué nivel la aplicará

Establecer en qué contexto de la unidad

3 Nivel de alumno

Es importante que la guía sea acorde con las condiciones del alumno es decir dirigida al momento en que está en su aprendizaje y adaptada a su realidad

4 Contextualización

En algunas ocasiones nos damos cuenta que al usar las actividades de los textos de estudio los alumnos no comprenden bien o se desmotivan Se debe a que encuentran los ejemplos o situaciones muy alejados de su realidad

5 Duración

Una guía individual debe durar alrededor de 25 minutos en su lectura y ejecución ya que la experiencia nos indica que más allá de este tiempo el alumno se desconcentra y pierde interés En el caso de guías grupales es distinto ya que la interacción va regulando los niveles de concentración Incluso hay guías que pueden tener etapas de avance y desarrollarse en más de una clase

6 Evaluación

Dentro del proceso enseñanza aprendizaje evaluar es sondear la situación para seguir adelante por lo tanto es vital que el alumno en conjunto con su profesor revise y compruebe sus logros o analice sus errores para así reafirmar lo aprendido y además al autoevaluarse se desarrolla su autoestima

Otro aspecto importante de la evaluación hace referencia con que al profesor le facilita el conocimiento de sus alumnos ver cómo ellos aprenden a aprender observar las interrelaciones etc

2 2 2 Recursos para hacer guías de aprendizaje

Al planificar nuestras actividades y tener como objetivo construir una guía es importante tener en cuenta la realidad con la cual contamos y a partir de esa realidad confeccionarlas Debemos ser pragmáticos ya que en ocasiones planeamos mentalmente o por escrito una hermosa guía no obstante al querer llevarla a la práctica nos damos cuenta que fuimos muy ambiciosos y no tenemos todos los elementos

Hoy en día contamos con muchos recursos además de la creación personal Debemos confiar en esos recursos ya que hubo personas que pensaron y crearon materiales para que sean utilizados con nuestros alumnos Lo importante es citar la fuente y contextualizarla Será ahorro de tiempo y esfuerzo al tomar esta decisión

Cabe resaltar que una guía se puede llevar a cabo con un mínimo de recursos incluso debemos adaptar lo existente a nuestras realidades por ejemplo actividades de textos de estudio guías del profesor etc pero es necesario que los consideremos con antelación para así no frustrar nuestros proyectos

Los recursos básicos a considerar **antes** de la elaboración del instrumento e incluso en la planificación al inicio del año o al reprogramar algunos contenidos son **el tiempo el material y la reproducción** de éste

Tiempo

Al igual que en la confección de un instrumento de evaluación la guía requiere de un tiempo en su elaboración que se debe considerar en la planificación Lo positivo es que después el tiempo invertido en la creación es recuperado en la clase ya que el profesor tendrá un papel menos protagónico pues debe centrar su atención en la supervisión del trabajo del alumno En síntesis el profesor colabora en construir andamiajes para que el alumno construya

-Materiales

Se hace imprescindible que el profesor sea práctico y utilice los elementos que tiene a su alcance en la confección de la guía

Textos del alumno

Guías del profesor

Textos de la biblioteca del profesor

Diarios

Revistas

Para que los alumnos las desarrollen es importante que recurran a estos mismos elementos por ejemplos textos libros de consulta internet etc Es vital que para fomentar el trabajo riguroso del alumno se valide lo que tiene a su alcance sobre todo a nivel de textos que están presentes en la biblioteca así sentirá que la guía es contextualizada a su realidad

-Reproducción del material

Muchas veces elaboramos un material precioso motivante etc y nos encontramos que no podemos reproducirlo o por el contrario simplemente no hacemos guías porque no tenemos cómo multiplicarlas Cabe destacar que la reproducción depende del tipo de guía que se aplique pues en algunas puede ser individual en otras grupal en otras usar la guía como modelo y responder en el cuaderno para que así se pueda reutilizar etc

Como señalamos anteriormente existen variedades de guías didácticas Entre las más significativas se encuentra la **guía de motivación** la cual estaremos empleando para el desarrollo de nuestra propuesta

2 2 3 Guías de motivación

Se acostumbran al iniciar una unidad o contenido nuevo o de difícil asimilación Tienen como objetivo que el alumno vaya **interesándose** por algun tema nuevo que no conoce Al profesor le sirve para indagar los intereses de los alumnos

Para la confección de las guías de motivación en esta investigación se tomaron en cuenta las siguientes estrategias didácticas

2 2 3 1 La enseñanza de la Matemática a través de la situación-problema

Aun cuando una de las preocupaciones centrales en el campo de la didáctica de la Matemática es reorientar las formas de trabajo docente lo cierto es que la mayoría de las propuestas innovadoras no han logrado impactar los sentidos que los docentes confieren a sus acciones Con ello los escolares continuan viendo a la Matemática como una sucesión lineal de acontecimientos como una materia aburrida que poco o nada se relaciona con su vida cotidiana

La situación problema es una estrategia que consiste en plantear en forma de problema un tema para que a partir de varios elementos pueda ser resuelto Esta estrategia ha sido propuesta por diversos autores e implementada en distintos proyectos en otros países con la finalidad de generar aprendizajes significativos

Es una propuesta viable que puede propiciar el aprendizaje de la Matemática a partir de lograr una situación de empatía que parta de lo cotidiano a la elaboración de referentes históricos que posibilitan la construcción de esquemas conceptuales

Así tenemos por ejemplo su utilización en la educación básica particularmente en la enseñanza de las ciencias naturales y matemáticas Una de las intenciones de este proyecto es que los profesores de Matemática la conozcan y puedan disenar sus clases desde esta postura para analizar actitudes y aprendizajes de los alumnos ante esta estrategia

En ocasiones se suelen explicar los problemas en Matemática como algo que se sabe hacer que se conoce su solución que no genera duda generalmente porque el profesor conoce la situación y para él deja de ser un problema En nuestra investigación proponemos que la resolución de situación problemática dentro del proceso de enseñanza aprendizaje sea una evidencia del uso de la observación y la experimentación como métodos científicos con una significatividad para el estudiante una ocasión privilegiada para construir y profundizar en conocimientos

La propuesta que aquí se presenta aspira a una clara concepción de un aprendizaje constructivista cognitivo y sociocultural que permita ver a la Matemática como una asignatura novedosa llena de retos y problemas a resolver y coadyuve a la solución de algunas problemáticas que representa el proceso de aprendizaje en los nuevos programas de Matemática

2 2 3 2 Situaciones de aprendizaje

Otro elemento esencial en la planeación didáctica son las situaciones de aprendizaje que se proporcionan y desarrollan para el logro de los aprendizajes

Estos han sido denominados de diversas formas como lo son situaciones de aprendizajes actividades estrategias experiencias de aprendizajes estrategias didácticas etc

Con mayor o menor precisión y claridad cada uno de estos términos encierra como esencia el referirse a las acciones que se prevén y ejecutan para que el alumno desarrolle su proceso de aprendizaje

Si se trata de una propuesta de corte tradicional se enfatizarán las actividades que realiza el docente para provocar en los alumnos el aprendizaje

Cuando se trata de una propuesta centrada en el aprendizaje y en el alumno las actividades se enfocarán esencialmente en describir lo que hará el alumno para adquirir o construir el conocimiento

Las situaciones de aprendizaje remiten muchas veces a trabajar en forma interrelacionada los diversos tipos de contenidos datos hechos conceptos principios procedimientos actitudes y valores

Al plantear las situaciones para la adquisición o construcción de conceptos y principios las actividades deben permitir a los alumnos relacionar los nuevos aprendizajes con los previos Esto implica que los alumnos pueden relacionar contrastar alimentar o sustentar los nuevos conocimientos con datos hechos informaciones conceptos o principios adquiridos con anterioridad

2 2 3 3 Tipos de actividades que se pueden incluir en las situaciones de aprendizaje

Entre las actividades que se pueden incluir en las situaciones de aprendizaje están las actividades expositivas las cuales se usan en el contexto constructivista pero considera el engarce con conocimientos previos que poseen los alumnos La exposición es más flexible abierta y dinámica es más un proceso de comunicación que de recepción Implica la interacción entre el docente y los alumnos Esta interacción puede concretarse a través de preguntas redactadas por el docente o mediante interrogantes inquietudes y comentarios de los alumnos

Otra actividad es la de construcción o reconstrucción del conocimiento que implican descubrimiento por parte de los alumnos Esto significa que ellos no reciben el conocimiento procesado mediante transmisión del docente sino que ellos lo buscan y recrean orientados por el educador

Implican investigación observación análisis crítico exploración etc (retos)

Busqueda de soluciones al problema la explicación de la inquietud o el momento de analizar y deducir lo que ocurrió durante el experimento o la prueba realizada

2 2 3 3 1 Actividades de desarrollo individual

Son un medio esencial para que cada alumno desarrolle su propio potencial en el aspecto académico personal y social

Estas actividades convierten la situación de aprendizaje en una oportunidad para que cada alumno avance con su particular ritmo a la vez que ejercita sus habilidades de pensamiento descubrimiento resolución de retos en síntesis en la construcción de su propio aprendizaje

2 2 3 3 2 Actividades de desarrollo grupal

Constituyen un medio esencial para garantizar el aprendizaje socializado compartido y solidario Éstas fortalecen el aprendizaje entre compañeros Es fundamental garantizar que la actividad grupal permita a todos los participantes brindar su aporte personal

Esto hará que el trabajo no se concentre en uno o dos de los alumnos sino que todos logren construir grupalmente el conocimiento Se trata de lograr lo que los constructivistas llaman la construcción social del conocimiento

En ambos casos es fundamental el rol que le corresponde al docente como orientador o guía del proceso de enseñanza y aprendizaje como mediador entre el conocimiento y la estructura cognitiva de los alumnos

El docente crea el clima y ofrece las condiciones necesarias para que los alumnos descubran construyan y reconstruyan los conocimientos

2 2 3 4 Actividades extraclase

Concepto

Son consideradas actividades extraclase aquellas que se desenvuelven a manera de complemento de las que son propias de la clase vinculadas o no a las materias del plan de estudio y dirigidas preferentemente por alumnos bajo la supervisión de los profesores

Las actividades extraclase constituyen una necesidad para la educación integral ya que las actividades educativas desarrolladas durante la clase resultan insuficientes y precarias Insuficientes porque no reflejan una serie de actividades sociales y esenciales para una buena educación Precarias porque las oportunidades de expresión del educando son bastante limitadas y asimismo impuestas por igual a todos de manera artificial

Las actividades extraclase se prestan para complementar las clases tanto en la escuela primaria como en la media y superior En la escuela media se prestan admirablemente para atender las necesidades de afirmación y expresión del adolescente así como para la discriminación de sus aptitudes

Objetivos de las actividades extaclase

Las actividades extraclase en cualquier nivel de ensenanza se prestan admirablemente para

1 Orientar al educando hacia las actividades adecuadas a sus peculiaridades y preferencias
2 Dar sentido práctico a la enseñanza teórica
3 Favorece el sentido de la realidad ya que estas actividades requieren planeamiento y ejecución por parte de los alumnos sobre la base de lo que es posible hacer

CAPÍTULO TERCERO

MARCO METODOLÓGICO

3 1 Tipo de Investigación

Este estudio es expenmental de tipo exploratono Los estudios exploratonos se efectuan normalmente cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes (Hernández Sampieri 1998)

El empleo cotidiano del uso de la Histona de la Matemática como recurso didáctico para la enseñanza de la misma es muy poco utilizado por los docentes de esta especialidad alegando diversas razones entre otras falta de preparación de tiempo etc De tal manera que se explorará la frecuencia del uso de este método de enseñanza qué otros métodos utilizan la aceptación del mismo por parte del estudiante entre otros

3 2 Diseño de la Investigación

Hernández (2003) clasifica el diseño de investigación en expenmental y no expenmental Para fines de nuestro estudio se ocupará el diseño expenmental situación de control la cual se manipulan de manera intencional una o más vanables independientes (causas) para analizar las consecuencias de tal manipulación sobre una o más vanables dependientes (efectos)

Se realizará el proceso de ensenanza aprendizaje de la Matemática con un grupo expenmental en ambos niveles (octavo y décimo grado) con el que se manipulará la vanable independiente de la hipótesis utilizando durante el estudio de las ecuaciones de pnmero y segundo grado el Método Genético y un grupo control en ambos niveles con el que no se manipulará la vanable independiente

En cada grupo se evaluará de manera objetiva a través de dos pruebas sumativas y dichos resultados se compararán de manera estadística.

3.3 Hipótesis del trabajo

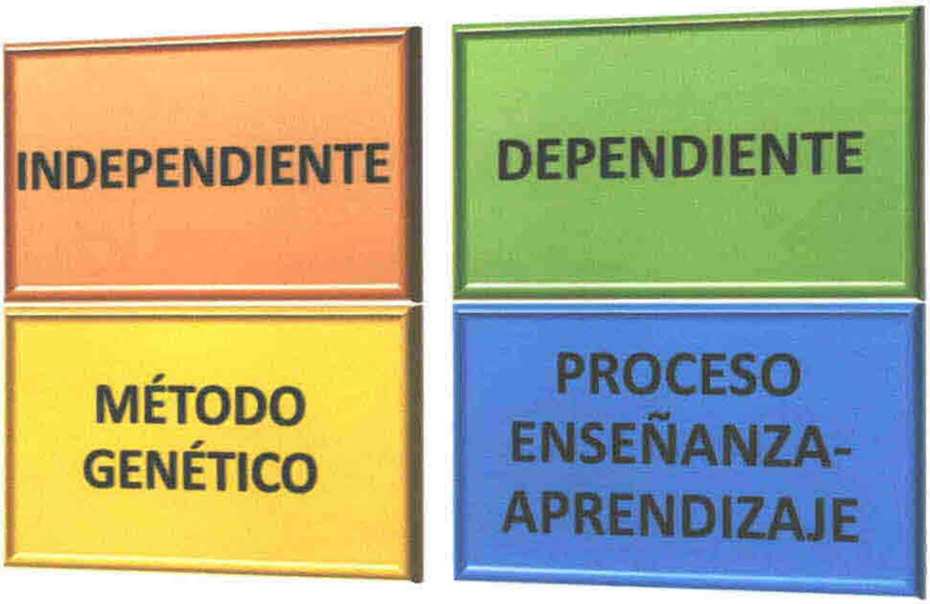
Hipótesis nula

Ho: El rendimiento académico no mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo y décimo grado.

Hipótesis alternativa

Ha: El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo y décimo grado.

3.4 Definición de variables



HIPÓTESIS	VARIABLES	CONCEPTUAL	OPERACIONAL	INSTRUMENTAL
El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos en la asignatura de Matemática.	**VARIABLE INDEPENDIENTE** Método Genético	Forma de utilizar la Historia de la Matemática como instrumento didáctico colaborador que puede llevarse a cabo de diversas maneras.	• Introducción histórica • Demostración de un teorema • Resolución de un problema	• Análisis • Interpretación
	VARIABLE DEPENDIENTE Proceso Enseñanza-aprendizaje	Proceso que tiene como fin la formación del estudiante con el propósito de mejorar sus saberes.	• Talleres • Escala -Lista de cotejo	• Interrogar • cuestionar • Examen

3 5 Población

La población para la investigación y análisis fueron 150 estudiantes de octavo y décimo grado del Centro de Educación Básica General Federico Zuñiga y 21 docentes de Matemática de diferentes colegios del Distrito de Penonomé durante el ano lectivo 2013

3 6 Fuente de Información

Dentro de las fuentes primarias que nos sirven para recopilar información podemos mencionar a los estudiantes de octavo y décimo grado del Centro de Educación Básica General Federico Zuñiga y los docentes de Matemática de diferentes colegios del Distrito de Penonomé

Entre las fuentes secundarias para recopilar información se encuentran textos documentos y el Internet

Finalmente se obtuvo el resultado de la evaluación objetiva acumulativa a los estudiantes de octavo y décimo grado realizada al grupo experimental y de control resultado que sirvió para validar la hipótesis sometiéndolo a la prueba estadística **t de student** para diferencia de media que consiste en evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias

3 7 Técnica e Instrumento de recolección de datos

Se confeccionaron dos encuestas una dirigida a profesores de educación premedia o media que dictan la cátedra en distintas escuelas del Distrito de Penonomé y otra a los estudiantes de octavo y décimo grado que participarán en la investigación de la Escuela Federico Zuniga Mediante un cuestionario previamente elaborado en ambas poblaciones se conoció la opinión del sujeto seleccionando una o varias opciones sobre un asunto dado

Las encuestas cuentan con una estructura lógica que permanece inalterada durante todo el proceso investigativo Las respuestas se escogen de modo especial y se determinan del mismo modo las posibles variantes de respuestas estándares lo que facilita la evaluación de los resultados por métodos estadísticos

Las preguntas se diseñan de tal forma que se puedan sumar todas las respuestas de los entrevistados a fin de obtener resultados aplicables a toda la muestra La información que nos brinda está restringida sólo a lo que nos dice el individuo será significativa pueden compararse y generalizarse sus resultados La encuesta se aplicará a todos los estudiantes de la clase y se tabularán todos los resultados obtenidos en la misma Es auto-administrada se entrega y recoge en un mismo encuentro presencial Las respuestas a las preguntas serán de opción multiples y se disenan evitando la ambiguedad La encuesta a los estudiantes se realizó utilizando preguntas cerradas y abiertas para conocer la motivación actitudes y opiniones sobre el conocimiento de la Historia de la Matemática en los conceptos matemáticos estudiados

Un segundo instrumento utilizado en la recolección de datos es el colector de notas que llevó el docente de cada cátedra durante el periodo que se desarrolló la investigación (septiembre y octubre de 2013) El objetivo era conocer las notas promedio obtenidas y comparar el rendimiento académico con los resultados obtenidos por estos sometiéndola a las técnicas estadísticas ya explicadas

3 8 Análisis estadístico de datos

El procesamiento estadístico de la información se realizó a través de la estadística descriptiva e inferencial mediante ella conoceremos por ejemplo la frecuencia en el uso de la historia como recurso didáctico por los docentes de matemática del Distrito de Penonomé

Con los resultados obtenidos en las pruebas sumativas se aplica un análisis cuantitativo para probar la hipótesis sometiéndolo a la prueba estadística t de student para diferencia de media que consiste en evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias

3 9 Limitaciones

El implemento de esta propuesta didáctica tuvo las siguientes limitaciones

- Convencimiento a la directora del plantel educativo seleccionado
- Disponibilidad de los docentes al ceder sus horas de clases
- El tiempo puesto que los temas a tratar estaban planificado para Octubre y Noviembre meses de movimiento por festividades patrias

CAPÍTULO CUARTO

ANÁLISIS DE RESULTADOS

4 1 Análisis de encuestas aplicadas a estudiantes

Con el objetivo de determinar si mediante la incorporación del método genético en el proceso de ensenanza y aprendizaje de las ecuaciones de primero y segundo grado favorece el rendimiento académico de los estudiantes se aplicó una encuesta a dos grupos 23 de Octavo Grado y 27 de Décimo grado que totalizaron 50

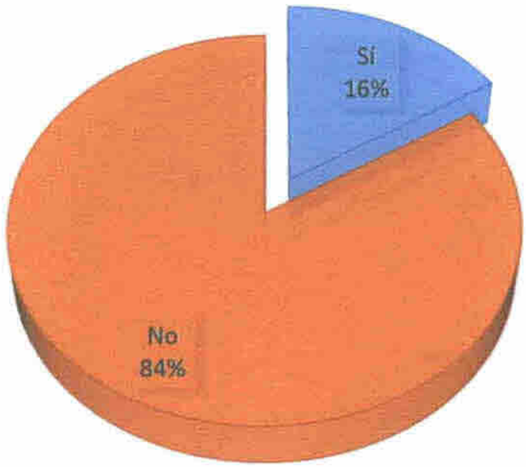
Se les consultó a los estudiantes si conocían la evolución histórica de las ecuaciones de primero o segundo grado En el cuadro y gráfica N 1 se muestran sus respectivas respuestas en la cual se observa que 42 (84%) opinó que no

CUADRO N 1 OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE EL CONOCIMIENTO QUE POSEEN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO NOVIEMBRE 2013

Opción	Frecuencia	%
Total	50	100
Si	8	16
No	42	84

Fuente Encuesta aplicada a estudiantes

GRÁFICO N° 1. OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE EL CONOCIMIENTO QUE POSEEN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO. NOVIEMBRE 2013



Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

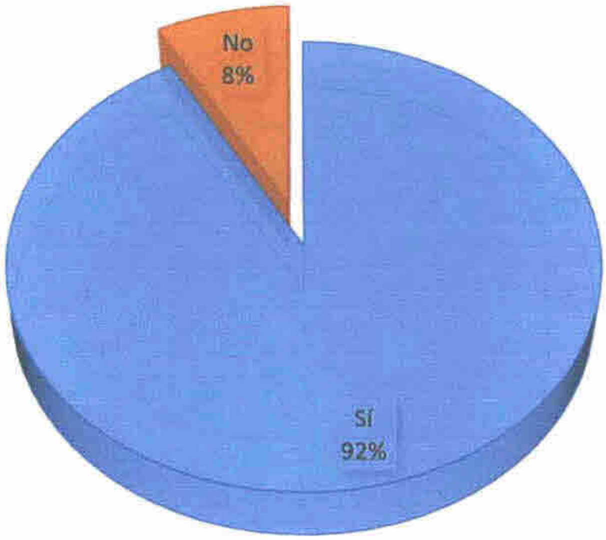
Se les presentó a los estudiantes una serie de métodos diferentes para resolver ecuaciones de primero o segundo grado. Se observa en el cuadro y gráfica N° 2 que a la mayoría 46 (92%) les agrada el conocer otros métodos.

CUADRO N°2. OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI LES GUSTO RESOLVER ECUACIONES POR MÉTODOS DIFERENTES. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	50	100
Sí	46	92
No	4	8

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

GRÁFICO N° 2.OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI LES GUSTO RESOLVER ECUACIONES POR MÉTODOS DIFERENTES. NOVIEMBRE 2013



Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Los estudiantes manifiestan que es importante conocer métodos diferentes con el fin de resolver ecuaciones para luego estudiar los métodos tradicionales. De esta forma, resulta más entretenido, divertido, dinámico e interactivo el aprendizaje. Igualmente, la gran mayoría de los alumnos señaló que además de ser métodos fáciles, rápidos e interesantes para resolver ecuaciones, los mismos le permiten conocer formas diferentes utilizadas por distintas civilizaciones.

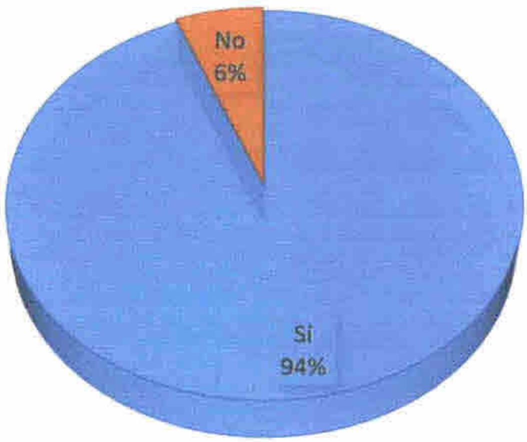
Al ser consultado los estudiantes si conocer la historia del concepto matemático, es importante, para la comprensión del mismo; 47 de 50 (94%) señalaron que sí tal como se aprecia en el cuadro y gráfico N° 3.

CUADRO N°3. OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONOCER LA HISTORIA DEL CONCEPTO MATEMÁTICO, ES IMPORTANTE, PARA SU COMPRENSIÓN. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	50	100
Sí	47	94
No	3	6

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

GRÁFICO N° 3. OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONOCER LA HISTORIA DEL CONCEPTO MATEMÁTICO, ES IMPORTANTE, PARA SU COMPRENSIÓN. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

Finalmente al ser consultado sobre si han tenido la experiencia de conocer la historia de algún concepto matemático, ya estudiado, por parte de su profesor, 36 (72%) manifestaron que sí y 14 (28%) que no como se aprecia en el cuadro y gráfico N° 4.

CUADRO N°4. OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI HAN TENIDO LA EXPERIENCIA DE CONOCER LA HISTORIA DE ALGÚN CONCEPTO MATEMÁTICO, POR PARTE DE SU PROFESOR. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	50	100
Sí	36	72
No	14	28

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

GRÁFICO N° 4: OPINIÓN DE LOS ESTUDIANTES ENCUESTADOS SOBRE SI HAN TENIDO LA EXPERIENCIA DE CONOCER LA HISTORIA DE ALGÚN CONCEPTO MATEMÁTICO, POR PARTE DE SU PROFESOR. NOVIEMBRE 2013

Fuente: Encuesta aplicada a estudiantes.

4.2 Análisis de encuestas aplicadas a docentes

Con la intención de Identificar las estrategias didácticas que emplean los docentes de premedia y media de Educación Escolar en el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos matemáticos se le aplicó una encuesta a 22 docentes de Matemática que laboran en diferentes escuelas del Distrito de Penonomé.

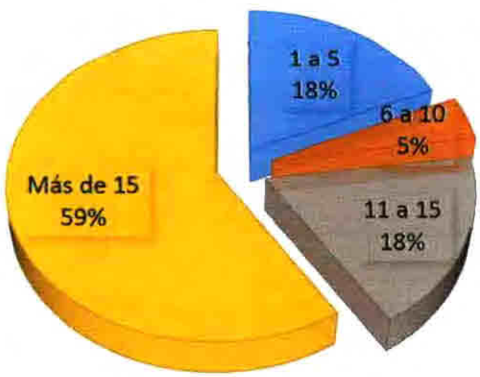
Se muestra en el cuadro y gráfico N° 5 que con respecto a la edad, la mayoría de los docentes, 13 (59%) cuenta con más de 15 años de experiencia en la labor docente.

CUADRO N°5. AÑOS DE SERVICIOS DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS QUE LABORAN EN DIFERENTES ESCUELAS DEL DISTRITO DE PENONOMÉ. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	22	100
1-5	4	18
6-10	1	5
11-15	4	18
Más de 15	13	59

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N° 5. AÑOS DE SERVICIOS DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS QUE LABORAN EN DIFERENTES ESCUELAS DEL DISTRITO DE PENONOMÉ. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

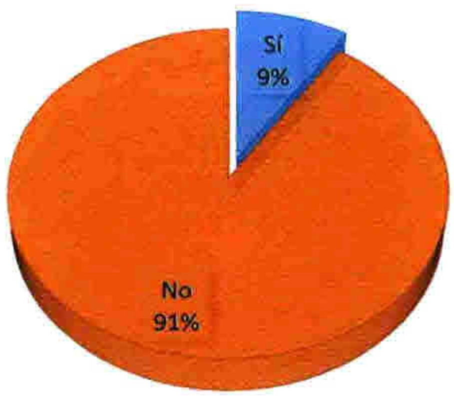
Al ser consultados los docentes en relación a si conocían el *método genético* como recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática, en su mayoría 20 de 22 (91%) indicó que no; como se aprecia en cuadro y gráfico N° 6.

CUADRO N°6. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONOCÍAN EL MÉTODO GENÉTICO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	22	100
Sí	2	9
No	20	91

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N° 6. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONOCÍAN EL MÉTODO GENÉTICO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

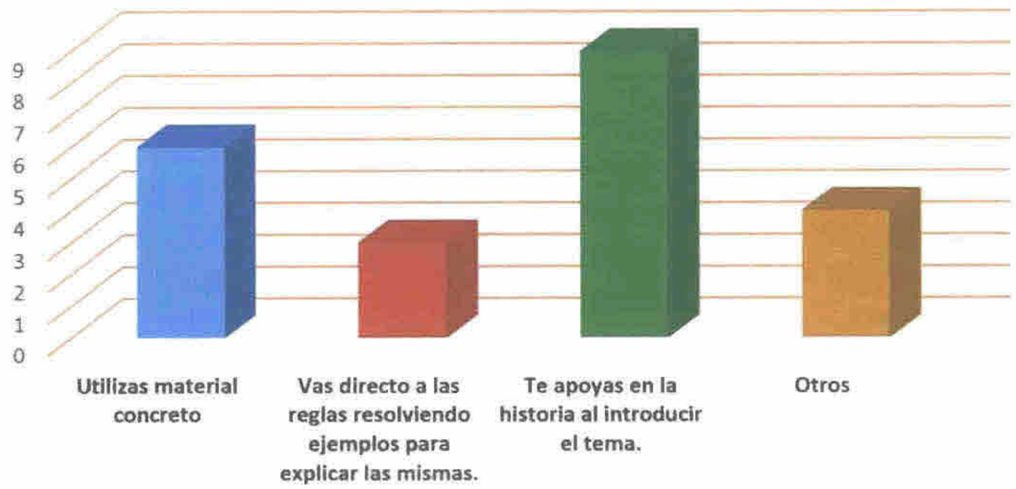
Con respecto a si el docente consideraba alguna estrategia didáctica al introducir un nuevo concepto se muestra en el cuadro y gráfico N 7 que los docentes manifiestan estrategias variadas sobresaliendo que se apoyan en la historia al introducir el tema y utilizan material concreto

CUADRO N 7 OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONSIDERAN ALGUNAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS AL INTRODUCIR UN NUEVO CONCEPTO MATEMÁTICO NOVIEMBRE 2103

Opción	Frecuencia
Total	22
Utilizas material concreto	6
Vas directo a las reglas resolviendo ejemplos para explicar las mismas	3
Te apoyas en la historia al introducir el tema	9
Otros	4

Fuente Encuesta aplicada a docentes

GRÁFICO N° 7. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONSIDERAN ALGUNAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS, AL INTRODUCIR UN NUEVO CONCEPTO MATEMÁTICO. NOVIEMBRE 2103.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

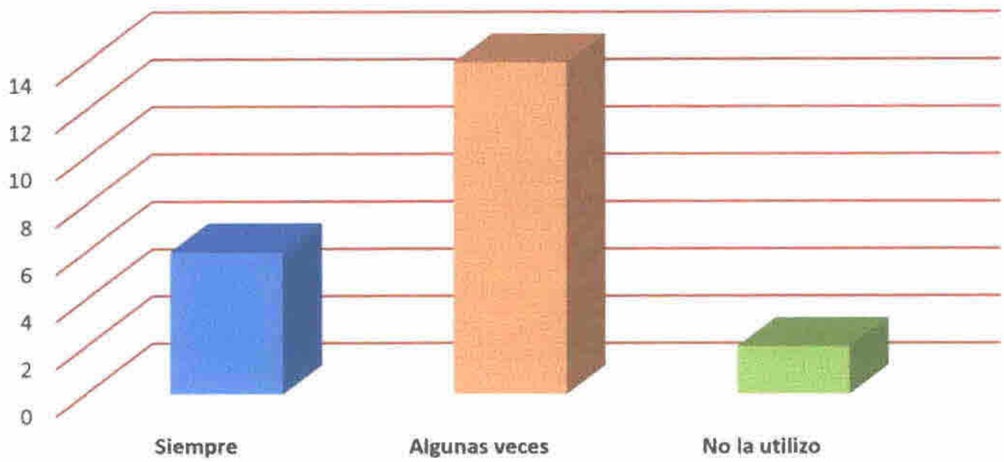
Se les consultó a los docentes si utilizaban la Historia de la Matemática como instrumento didáctico colaborador en la enseñanza-aprendizaje de esta asignatura, la mayoría (14) señaló que algunas veces, 6 siempre y 2 no la utiliza como lo observan en el cuadro y gráfico N° 8.

CUADRO N°8. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI UTILIZAN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO INSTRUMENTO DIDÁCTICO COLABORADOR EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ESTA ASIGNATURA. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia
Total	22
Siempre	6
Algunas veces	14
No la utilizo	2

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N° 8. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI UTILIZAN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO INSTRUMENTO DIDÁCTICO COLABORADOR EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ESTA ASIGNATURA. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

Los profesores manifiestan que, en algunas ocasiones, introducen un tema con ejemplos en la tecnología o aplicaciones a la ciencia. Además, señalan que en los programas no se les pide conocer la historia de los conceptos, por lo que se concretan a la aplicación de las reglas y desarrollo de ejercicios.

Los docentes consideran que conocer la historia de un concepto matemático, es importante para la comprensión del mismo (ver cuadro y gráfico N° 9).

CUADRO N°9. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONSIDERAN QUE CONOCER LA HISTORIA DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO, ES IMPORTANTE, PARA LA COMPRENSIÓN DEL MISMO. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	22	100
Sí	20	91
No	2	9

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N° 9. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI CONSIDERAN QUE CONOCER LA HISTORIA DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO, ES IMPORTANTE, PARA LA COMPRENSIÓN DEL MISMO. NOVIEMBRE 2013.

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

Para los profesores, el conocer la historia de un concepto matemático crea expectativa e interés en el tema, ayudando a conocer la esencia del concepto.

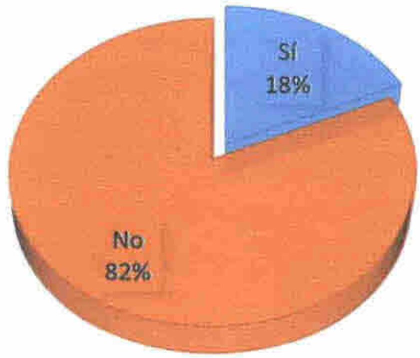
Señalan 4 docentes que han tomado alguna asignatura o seminario que promueva el uso de la historia como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática y 18 que no, como se aprecia en el cuadro N° 10.

CUADRO N°10. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI HAN TOMADO ALGUNA ASIGNATURA O SEMINARIO QUE PROMUEVA EL USO DE LA HISTORIA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia	%
Total	22	100
Sí	4	18
No	18	82

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N° 10. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE SI HAN TOMADO ALGUNA ASIGNATURA O SEMINARIO QUE PROMUEVA EL USO DE LA HISTORIA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

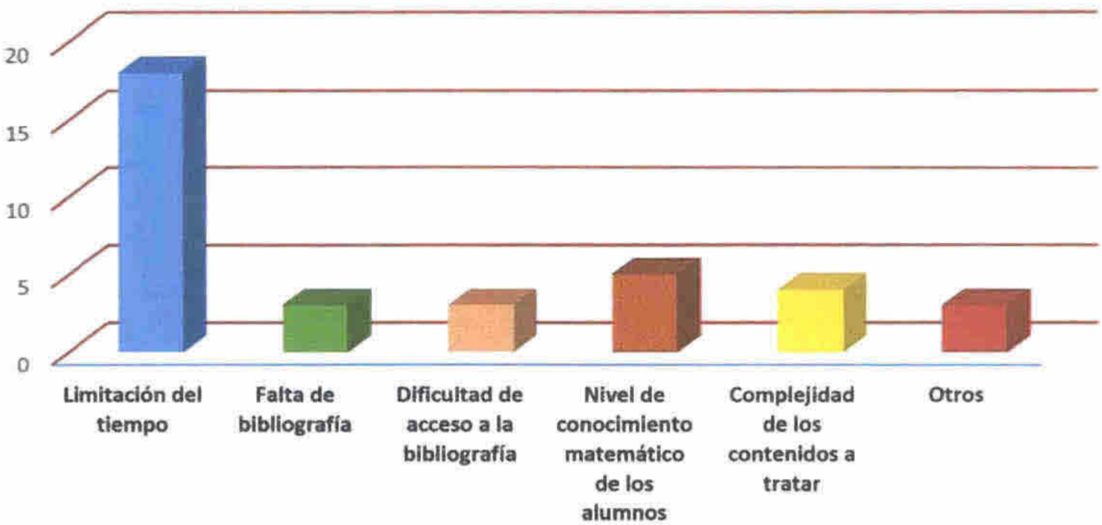
Finalmente, se les consultó a los docentes cuáles factores consideran que inciden en algunos docentes para dejar a un lado la Historia de la Matemática en el tratamiento de los contenidos, en su mayoría la opción fue limitación de tiempo.

CUADRO N°11. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE LOS FACTORES QUE INCIDEN EN ALGUNOS DOCENTES PARA DEJAR A UN LADO LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL TRATAMIENTO DE LOS CONTENIDOS. NOVIEMBRE 2013.

Opción	Frecuencia
Total	36
Limitación del tiempo	18
Falta de bibliografía	3
Dificultad de acceso a la bibliografía	3
Nivel de conocimiento matemático de los alumnos	5
Complejidad de los contenidos a tratar	4
Otros:	3

Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

GRÁFICO N°11. OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS SOBRE LOS FACTORES QUE INCIDEN EN ALGUNOS DOCENTES PARA DEJAR A UN LADO LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL TRTATAMIENTO DE LOS CONTENIDOS. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

Algunos profesores señalan que van directo a las reglas y después se resuelven ejercicios por falta de tiempo

4 3 Análisis de los resultados de las calificaciones obtenidas en los dos métodos de enseñanza

La investigación se realizó en el Colegio Federico Zuñiga Feliu con dos grupos de 23 alumnos cada uno de octavo grado y dos grupos de 27 estudiantes de décimo grado en la cual se seleccionó un grupo de cada nivel como grupo control y de igual forma para el grupo experimental Luego de manipular la variable independiente con los alumnos de los dos grupos experimentales durante el mes de octubre de 2013 se procedió a comparar las notas de 3 evaluaciones objetivas acumulativas (1 de octavo grado y 2 de décimo) preparadas por los docentes de la asignatura la misma refleja los conocimientos básicos que un alumno debe tener en resolución de las ecuaciones de primero y segundo grado (método por factorización y completando el cuadrado) A continuación se presenta el análisis de las calificaciones obtenidas por el grupo control y el grupo experimental en las pruebas sumativas

4 3 1 Grupo control y grupo experimental de octavo grado

4 3 1 1 Análisis de las calificaciones obtenidas por los estudiantes de octavo grado del grupo control

Se presenta en el cuadro N 12 las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo control en la prueba de ecuaciones fraccionarias con el método de ensenanza tradicional

CUADRO N 12 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL DE OCTAVO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO OCTUBRE 2013

Nº de Estudiantes	*Calificación*
1	3 8
2	4 4
3	3 8
4	4 6
5	3 0
6	2 6
7	4 8
8	3 4
9	2 8
10	4 2
11	3 8
12	3 4
13	2 4
14	3 6
15	4 4
16	4 8
17	3 0
18	4 2
19	3 4
20	4 8
21	3 4
22	3 0
23	4 0

Fuente Prueba aplicada estudiantes

En la tabla N 1 se agruparon las calificaciones obtenidas en una tabla de distribución de frecuencia donde se puede observar que la mayoría de los estudiantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 3 0 a 3 5

TABLA N 1 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO CONTROL DE OCTAVO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUCIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Total	**23**	**100%**
46 50	4	17
41 45	4	17
36-40	5	22
30-35	7	31
Menos de 30	3	13

Fuente Prueba aplicada estudiantes

4 3 1 2 Análisis de las calificaciones obtenidas por los estudiantes de octavo grado del grupo experimental

Se presenta en el cuadro N 13 las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo experimental en la prueba de ecuaciones fraccionarias con el método genético

CUADRO N 13 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERMINENTAL DE OCTAVO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO OCTUBRE 2013

N° de Estudiantes	*Calificación*
1	4 8
2	3 8
3	3 4
4	4 0
5	3 8
6	4 4
7	4 8
8	3 6
9	3.2
10	4 4
11	5 0
12	3 8
13	4 4
14	4 8
15	4 2
16	3 8
17	4 6
18	3 6
19	4 4
20	3 4
21	4 6
22	4.2
23	4 8

Fuente Prueba aplicada estudiantes

En la tabla N 2 se agruparon las calificaciones obtenidas en una tabla de distribución de frecuencia donde se puede observar que la mayoría de los estudiantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 4 6 a 5 0 y 3 6 a 4 0 con una frecuencia de 7 estudiantes en los dos rangos de calificación

TABLA N 2 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO EXPERIMENTAL DE OCTAVO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Total	**23**	**100%**
46 50	7	31
41 45	5	22
36-40	7	30
30-35	4	17
Menos de 3 0	0	0

Fuente Prueba aplicada estudiantes

4 3 1 3 Comparación de las medidas de tendencia central y de dispersión entre el grupo control y experimental en las calificaciones obtenidas de octavo grado

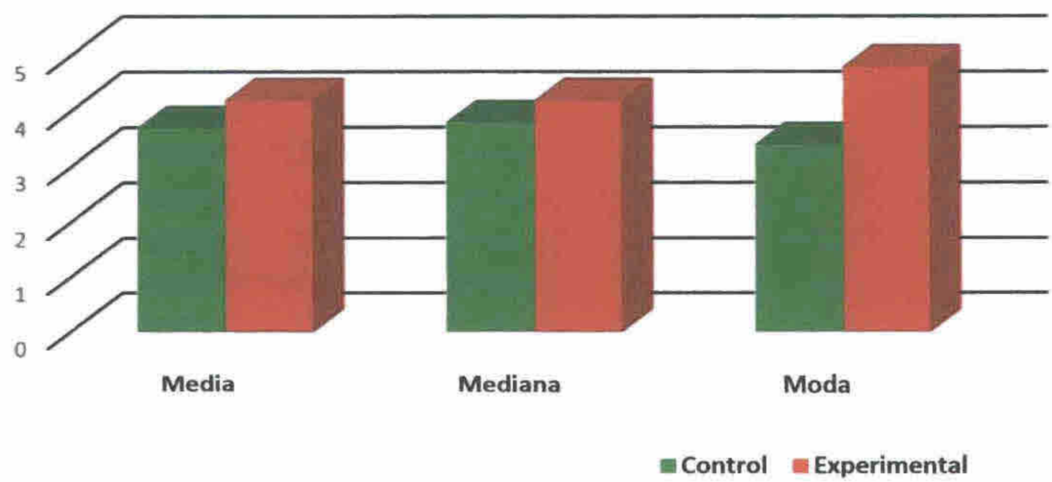
Al calcular las medidas de tenencia central se obtuvo que el promedio más alto corresponde al grupo experimental con 4 2 e igual nota para la mediana la calificación modal que más se repite es de 4 8 obteniendo mejores resultados en el grupo experimental Con respecto a las medidas de dispersión en el grupo experimental en ambos casos son menores tal como se muestran en la tabla N 3 y gráfico N 12

TABLA N° 3. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS DE OCTAVO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO. NOVIEMBRE 2013.

Medidas	Control	Experimental
Media	3.7	4.2
Mediana	3.8	4.2
Moda	3.4	4.8
Varianza	0.53	0.28
Desviación Estándar	0.73	0.53

Fuente: Prueba aplicada estudiantes.

GRÁFICO N°12. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS DE OCTAVO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO. NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Prueba aplicada a estudiantes.

4 3 2 Grupo control y grupo experimental de décimo grado (Taller N°1)

4 3 2 1 Análisis de las calificaciones obtenidas en la primera prueba por los estudiantes de décimo grado del grupo control

Se presenta en el cuadro N 14 las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo control en la prueba de ecuaciones cuadráticas resueltas por factorización con el método de enseñanza tradicional

CUADRO N 14 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN OCTUBRE 2013

N° de Estudiantes	*Calificación*
1	4.2
2	1 6
3	2 9
4	4.3
5	4 8
6	5 0
7	4 1
8	4 8
9	3 0
10	4 1
11	3 8
12	4.3
13	2 6
14	4 9
15	2 0
16	4.3
17	2 7
18	4 0
19	2 8
20	5 0
21	3.3
22	4 1
23	1 0
24	2 0
25	5 0
26	1 0
27	1 7

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

En la tabla N 4 se agruparon las calıficacıones obtenıdas en una tabla de dıstrıbucıón de frecuencıa donde se puede observar que 10 estudıantes de 27 obtuvıeron una calıficacıón con menos de 3 0 que representa el mayor porcentaje del total

TABLA N 4 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO CONTROL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencıa*	*Porcentaje*
Total	**27**	**100%**
4 6 5 0	6	22
4 1 4 5	7	26
3 6-4 0	2	8
3 0-3 5	2	7
Menos de 3 0	10	37

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

4 3 2 2 Análisis de las calificaciones obtenidas en la primera prueba por los estudiantes de décimo grado del grupo experimental

Se presenta en el cuadro N 15 las calıficacıones obtenıdas por los estudıantes del grupo experımental en la prueba de ecuacıones cuadrátıcas resueltas por factorızacıón con el método *genétıco*

CUADRO N 15 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS CUADRATICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN OCTUBRE 2013

N° de Estudiantes	*Calificación*
1	2 7
2	4 6
3	3 9
4	4 9
5	5 0
6	4 4
7	5 0
8	2 8
9	3 1
10	2 4
11	3 7
12	2 0
13	4 2
14	4 7
15	5 0
16	3 2
17	3 9
18	2 5
19	4 9
20	5 0
21	4 4
22	4 9
23	5 0
24	2 4
25	4 1
26	4 6
27	5 0

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

En la tabla N 5 se agruparon las calificaciones obtenidas en una tabla de distribución de frecuencia donde se puede observar que 12 estudiantes de 27 obtuvieron una calificación con menos de 4 6 a 5 0 que representa el 44% del total

TABLA N° 5 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO EXPERIMENTAL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Total	**27**	**100%**
4 6 5 0	12	44
4 1 4 5	4	15
3 6-4 0	3	11
3 0-3 5	1	4
Menos de 3 0	7	26

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

4 3 2 3 Comparación de las medidas de tendencia central y de dispersión entre el grupo control y experimental en las calificaciones obtenidas de décimo grado en las ecuaciones cuadráticas resueltas por factorización

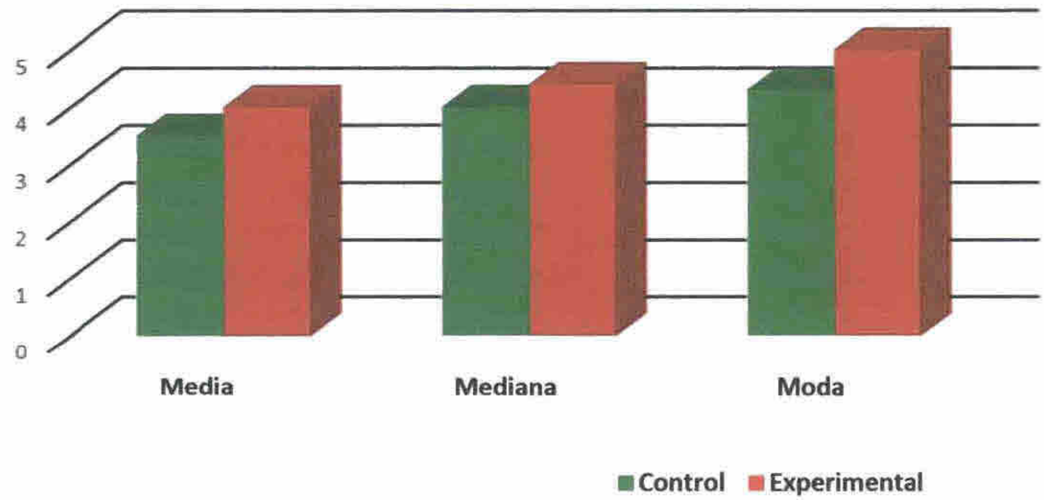
Al calcular las medidas de tenencia central se obtuvo que el promedio más alto corresponde al grupo experimental con 3 9 con una mediana de 4 4 la calificación modal que más se repite es de 5 0 obteniendo mejores resultados en el grupo experimental Con respecto a las medidas de dispersión en el grupo experimental en ambos casos son menores tal como se muestran en la tabla N 6

TABLA N° 6. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS DE DÉCIMO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN. NOVIEMBRE 2013.

Medidas	Control	Experimental
Media	3.5	4.0
Mediana	4.0	4.4
Moda	4.3	5.0
Varianza	1.63	1.00
Desviación Estándar	1.28	1.23

Fuente: Prueba aplicada a estudiantes.

GRÁFICO N°13. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS DE DÉCIMO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR FACTORIZACIÓN . NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Prueba aplicada a estudiantes.

4 3 3 Grupo control y grupo experimental de décimo grado (Taller N°2)

4 3 3 1 Análisis de las calificaciones obtenidas en la segunda prueba por los estudiantes de décimo grado del grupo control

Se presenta en el cuadro N 16 las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo control en la prueba de ecuaciones cuadráticas resueltas por completación de cuadrados con el método *genético*

CUADRO N 16 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO CONTROL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS OCTUBRE 2013

N° de Estudiantes	*Calificación*
1	1.2
2	3.3
3	2 6
4	1 4
5	4.3
6	3 0
7	5 0
8	1 9
9	1 0
10	2 4
11	1 0
12	2 9
13	3 0
14	3 8
15	5 0
16	1 2
17	2.3
18	1.5
19	1 4
20	2.2
21	3 6
22	4 0
23	4 9
24	1.2
25	2 0
26	1 0
27	5 0

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

En la tabla N 7 se agruparon las calificaciones obtenidas en una tabla de distribución de frecuencia donde se puede observar que 16 estudiantes de 27 obtuvieron una calificación con menos de 3 0 que representa el 59% del total

TABLA N 7 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO CONTROL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Total	**27**	**100%**
4 6 5 0	4	15
4 1 4 5	1	4
3 6- 4 0	3	11
3 0- 3 5	3	11
Menos de 3 0	16	59

Fuente Prueba aplicada a estudiantes

4 3 3 2 Análisis de las calificaciones obtenidas en la segunda prueba por los estudiantes de décimo grado del grupo experimental

Se presenta en el cuadro N 17 las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo experimental en la prueba de ecuaciones cuadráticas resueltas por completación de cuadrados con el método *genético*

CUADRO N 17 CALIFICACIÓNES OBTENIDAS POR LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRATICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS OCTUBRE 2013

Nº de Estudiantes	*Calificacion*
1	5 0
2	1 7
3	3 0
4	4 6
5	4 7
6	5 0
7	3 1
8	4 9
9	5 0
10	4 9
11	5 0
12	3 4
13	1 4
14	5 0
15	3 0
16	2 4
17	1 5
18	3 4
19	3 5
20	5 0
21	4 0
22	5 0
23	1 5
24	1 0
25	5 0
26	4 9
27	2 6

Fuente Prueba a aplicada estudiantes

En la tabla N 8 se agruparon las calificaciones obtenidas en una tabla de distribución de frecuencia donde se puede observar que 13 estudiantes de 27 obtuvieron una calificación con menos de 4 6 a 5 0 que representa el 48% del total

TABLA N 8 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO EXPERIMENTAL DE DÉCIMO GRADO EN LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS OCTUBRE 2013

Clases	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Total	**27**	**100%**
4 6 5 0	13	48
4 1 4 5	0	0
3 6-4 0	1	4
3 0-3 5	6	22
Menos de 3 0	7	26

Fuente Prueba a aplicada estudiantes

4 3 3 3 Comparación de las medidas de tendencia central y de dispersión entre el grupo control y experimental en las calificaciones obtenidas de décimo grado en las ecuaciones cuadráticas resueltas por completación de cuadrados

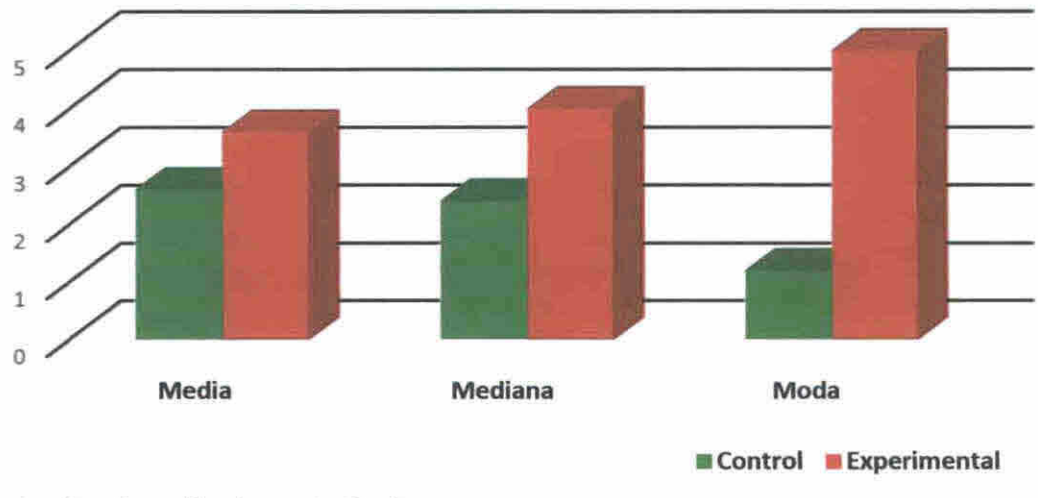
Al calcular las medidas de tenencia central se obtuvo que el promedio más alto corresponde al grupo experimental con 3 6 con una mediana de 4 0 la calificación modal que más se repite es de 5 0 obteniendo mejores resultados en el grupo experimental Con respecto a las medidas de dispersión en el grupo experimental en ambos casos son menores tal como se muestran en la tabla N 9

TABLA N° 9. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE DISPERSIÓN DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS EN DÉCIMO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS. NOVIEMBRE 2013.

Medidas	Control	Experimental
Media	2.6	3.6
Mediana	2.4	4.0
Moda	1.2	5.0
Varianza	1.90	1.94
Desviación Estándar	1.38	1.39

Fuente: Prueba a aplicada estudiantes.

GRÁFICO N°14. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL DEL GRUPO CONTROL Y EXPERIMENTAL EN LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS DE DÉCIMO GRADO DE LA PRUEBA SUMATIVA DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS RESUELTAS POR COMPLETACIÓN DE CUADRADO.NOVIEMBRE 2013.



Fuente: Prueba aplicada a estudiantes.

4 4 Comprobación de las hipótesis

4 4 1 Comprobación de la hipótesis correspondiente a las calificaciones del grupo control y experimental de octavo grado en las ecuaciones fraccionarias

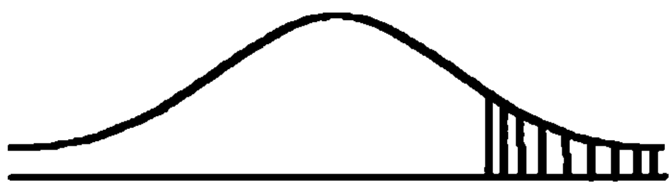
Hipótesis

H_0 El rendimiento académico no mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo grado

H_1 El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo grado

Sea $\alpha = 0\ 05$ y $\tau = 1\ 645$

Regla de decisión



1 645

Estadístico de prueba

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1{}^2}{n_1} + \frac{S_2{}^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{4\ 16 - 3\ 72}{\sqrt{\frac{0\ 2823}{23} + \frac{0\ 5263}{23}}} = \frac{0\ 44}{\sqrt{0\ 01227 + 0\ 02288}} = \frac{0\ 44}{\sqrt{0\ 03515}} = \frac{0\ 44}{0\ 1874} \approx 2\ 35$$

Decisión y conclusión

Se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación De esta manera se concluye que el rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en octavo grado

4 4 2 Comprobación de la hipótesis correspondiente a las calificaciones del grupo control y experimental de décimo grado en las ecuaciones cuadráticas resueltas por factorización

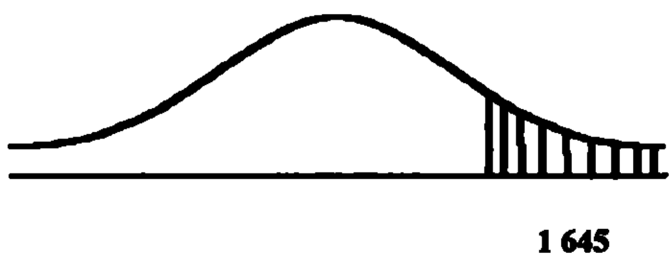
Hipótesis

H_0 El rendimiento académico no mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Algebra en décimo grado

H_1 El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en décimo grado

Sea $\alpha = 0\ 05$ y $\tau = 1\ 645$

Regla de decisión



Estadístico de prueba

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas iguales

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{4\ 01 - 3\ 45}{\sqrt{\frac{1\ 0025}{27} + \frac{1\ 6271}{27}}} = \frac{0\ 56}{\sqrt{0\ 0371 + 0\ 0603}} = \frac{0\ 56}{\sqrt{0\ 974}} = \frac{0\ 56}{0\ 3121} \approx 1\ 79$$

Decisión y conclusión

Se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación De esta manera se concluye que el rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de ensenanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en décimo grado

4 4 3 Comprobación de la hipótesis correspondiente a las calificaciones del grupo control y experimental de décimo grado en las ecuaciones cuadráticas resueltas por completación de cuadrados

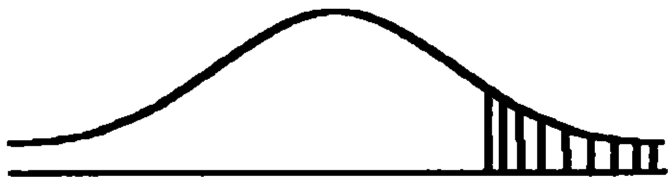
Hipótesis

H_0 El rendimiento académico no mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos del Álgebra en décimo grado

H_1 El rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de ensenanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en décimo grado

Sea $\alpha = 0\,05$ y $\tau = 1\,645$

Regla de decisión



1 645

Estadístico de prueba

Prueba *t* para dos muestras suponiendo varianzas iguales

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1{}^2}{n_1} + \frac{S_2{}^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{3\ 6852 - 2\ 6}{\sqrt{\frac{1\ 9405}{27} + \frac{1\ 9006}{27}}} = \frac{1\ 0852}{\sqrt{0\ 0719 + 0\ 0704}} = \frac{1\ \ 0852}{\sqrt{0\ 1423}} = \frac{1\ 0852}{0\ 33772} \approx 2\ 88$$

Decisión y conclusión

Se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación De esta manera se concluye que el rendimiento académico mejora significativamente al integrar el método genético al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos temáticos de Álgebra en décimo grado

CONCLUSIONES

El análisis de las encuestas y las calificaciones obtenidas en las tres pruebas reflejan que

Las formas tradicionales de enseñar la Matemática (pizarrón marcador directo a las reglas o fórmulas) se siguen utilizando por parte de los docentes dejando a un lado el uso de la historia de la Matemática como recurso didáctico afectando considerablemente la comprensión de esta asignatura por parte de los estudiantes

Los docentes de Matemática no realizan un esfuerzo para incorporar como instrumento pedagógico la Historia de la Matemática ya que de acuerdo a sus propias palabras existe un conformismo por seguir utilizando el pizarrón el marcador e ir directamente a las reglas

Los docentes no incorporan un constante hábito de actualización (seminario recursos informáticos y bibliografía) causando con esto deficiencia en el proceso de ensenanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos

De acuerdo a los docentes de Matemática no se le ha brindado una actualización (seminario o materia) en lo que respecta al uso de la historia como recurso didáctico para la enseñanza de la asignatura que les permita tener un conocimiento sólido de cómo utilizarlas

La gran mayoría de los alumnos manifestó (94%) que el conocer métodos diferentes de resolver ecuaciones les estimula al aprendizaje de las reglas tradicionales

Los estudiantes aprecian la utilidad de resolver ecuaciones como la hacían las antiguas civilizaciones segun manifiestan (92%) son métodos fáciles rápidos e interesantes para resolver ecuaciones

El uso permanente del Método Genético como recurso didáctico en el proceso de ensenanza aprendizaje de las ecuaciones de primero y segundo grado permitió validar la hipótesis de investigación y estadísticamente se comprobó que los resultados de las tres pruebas asignadas presentaron mejores calificaciones en los grupos donde se aplicó la investigación y sus resultados son significativos

RECOMENDACIONES

Tomando en cuenta las conclusıones establecıdas y los objetıvos de este estudıo se recomıenda

Solıcıtar a las autorıdades (MEDUCA) ıncorporar en los Programas de Matemátıca el uso de la hıstorıa como recurso dıdáctıco con mayor frecuencıa y que se utılıce de manera efectıva en el desarrollo de los contenıdos programátıcos

Realızar cursos semınarıos etc que sırvan para actualızar en cuanto al uso práctıco del método *genétıco* como recurso dıdáctıco actıvo para la ensenanza aprendızaje de la matemátıca y los mısmos no queden solo plasmados

Indagar acerca de ejercıcıos que ımplıquen la génesıs del concepto matemátıco correspondıente a cada tema prıncıpalmente problemas que tengan aplıcacıones práctıcas en la vıda cotıdıana

Reflexıonar como docentes sı conocıendo las dıfıcultades de nuestros alumnos para el tratamıento de ıdentıdades y ecuacıones algebraıcas no sería bueno comenzar su enseñanza de una manera elemental con los aportes de dıstıntas cıvılızacıones (grıega árabe entre otras) desarrollando la posıbılıdad de un trabajo sımultáneo en dos marcos geométrıco y algebraıco

Confeccıonar guías dıdáctıcas que presenten ıntroduccıones hıstórıcas como bıografías anécdotas o ejercıcıos que sırvan de excusa para desarrollar completamente los conceptos y resultados relacıonados con tal hıstorıa

Desarrollar investigaciones dirigidas a la utilización del método genético como medio y recurso didáctico en la ensenanza de la Matemática

Dar mayor énfasis al desarrollo de la actividad educativa en clase a través de talleres individuales grupales etc que promueva el uso de la historia como recurso didáctico permitiendo que el alumno sea un ente activo dentro del proceso de enseñanza aprendizaje

CAPÍTULO QUINTO

PRESENTACIÓN Y DESARROLLO DE LA PROPUESTA

5 1 Presentación

El proceso de ensenanza aprendizaje de la Matemática necesita ser renovada por lo tanto requiere una educación que dinja al individuo a descubnr la génesis de los conceptos que aprende que desarrolle su capacidad de pensar cnticar crear analizar que desarrolle el espíntu de investigación a través de las motivaciones que se presentan en la busqueda de la excelencia como decisión importante en su desarrollo

Por ello se debe utilizar desde los pnmeros anos de la educación formal la Histona de la Matemática a fin de contnbuir al aprendizaje de la matemática permitiendo desarrollar su habilidad para razonar

El conocimiento de la Histona de la Matemática es de gran importancia en la formación del educando y debe onentarse entre otros aspectos en una didáctica enmarcada hacia el desarrollo de la misma en donde el uso por parte del docente de estrategias adecuadas al aprendizaje de esta área es fundamental De allí la necesidad de que el docente utilice recursos pedagógicos que le conduzcan a la formación de aprendizaje significativos de la Matemática sobre todo aquellos recursos que le son utiles en el hacer educativo tal es el caso de la Histona de la Matemática por cuanto en ella se almacena grandes informaciones sobre cosas del pasado dificultades errores anécdotas biografías y aportes de grandes matemáticos a esta ciencia

Cabe destacar que en las encuestas aplicadas a los docentes los resultados indican que a pesar de que consideran importante el uso de la Histona en la ensenanza de la Matemática y de estar consciente de la utilidad pedagógica que tiene la misma no implementan estrategias constructivistas para el fomento de la Historia de la Matemática en el proceso de ensenanza-aprendizaje de esta asignatura

Por ello esta propuesta ofrece una oportunidad para que los docentes asuman realmente la valoración didáctica del Método Genético y lo utilicen para la enseñanza de la Matemática

5 2 Objetivos de la propuesta

Promover un cambio de actitud hacia la Matemática

Incentivar la reflexión y una actitud crítica del estudiante

Fomentar el interés y la motivación del estudiante hacia la Historia de la Matemática

Fomentar en los docentes de Matemática la valoración didáctica del uso de guías de motivación como recurso pedagógico para la enseñanza de la Matemática en los niveles de Premedia y Media de Educación

5 3 Estructura de la propuesta

Esta propuesta está estructurada en procedimientos que detallamos a continuación

Procedimiento 1

Gestionar nota ante el Director de Investigación y Postgrado de la Facultad de Ciencias Naturales y Tecnologías Dr Juan Jaén solicitando a la Directora del

Colegio Federico Zuniga de Penonomé su colaboración para desarrollar la propuesta en esta escuela

Procedimiento 2

Reunión con la Directora del Colegio Federico Zuñiga Profesora Leyda de Guardia para darle a conocer la propuesta y entregar nota del Profesor Juan Jaén solicitando su colaboración para el éxito del trabajo Se estableció fecha para coordinar con los dos profesores colaboradores en esta investigación

Procedimiento 3

Reunión con los profesores Everardo Fernández (octavo grado) y Manuel De Gracia (décimo grado) para comentarle los objetivos de la investigación a fin de sensibilizarlo sobre la importancia pedagógica del uso del Método Genético en el proceso de ensenanza aprendizaje de la Matemática y coordinar fecha para el desarrollo de la misma

Procedimiento 4

Confección de las tres guías didácticas de motivación una para octavo grado concerniente al tema de ecuaciones de primer grado (fraccionaria) y dos para décimo grado con los temas de ecuaciones de segundo grado por factorización y completando el cuadrado se utilizó el formato recomendado para la confección de la misma con pequeñas modificaciones También se confeccionaron las dos encuestas la primera dirigida a los estudiantes de los dos grupos experimentales y la segunda dirigida a los profesores que laboran en diferentes escuelas de Educación Promedia y media del Distrito de Penonomé

5 4 Implementación de la propuesta

El desarrollo de la propuesta se llevó a cabo durante 6 semanas la ultima semana de septiembre y todo el mes de octubre de 2013 Los dos grupos control fueron tomados por los profesores colaboradores en donde utilizaron el método tradicional para la ensenanza de las ecuaciones de pnmero y segundo grado explicando reglas y procedimientos para resolver las mismas De igual forma los dos grupos expenmental en donde se aplicó el método genético fueron asignados al profesor responsable de la investigación

Las actividades para el desarrollo de las guías de motivación fueron las siguientes

Exposición dialogada

Trabajo grupal

Lectura comentada

Participación activa en el tablero

Invitación a direcciones de internet dadas al final de la guía para complementar la parte histórica del tema a desarrollar

Presentamos las tres guías implementadas (una de octavo grado y dos de décimo grado) y su respectiva prueba sumativa aplicada después de explicarles los procedimientos actuales para resolver ecuaciones de pnmero y segundo grado acompanado de secciones de práctica que se encuentran en los libros de texto recomendados por los dos profesores responsables de la asignatura Las evidencias fotográficas de la implementación de los tres talleres aparecen en los anexos Es importante destacar la activa participación de los estudiantes en el desarrollo de las guías tanto en la parte dialogada como la participación en el tablero Una vez explicada las reglas y procedimientos actual para resolver ecuaciones podían ver diferencia con los métodos antiguos expuestos en las guías

La aceptación por parte del estudiante en el desarrollo de las tres guías se pudo notar durante las seis semanas en la que se llevó a cabo la investigación

GUÍA N°1

MODELO DE SITUACIÓN PROBLEMICA PARA LA ENSENANZA DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Sabıas que por necesıdad de reparto de vıveres salarıal o de tıerras los escrıbas tuvıeron que ser capaces de solventar cıertos problemas los cuales podrıan ser rescrıtos en nuestros dıas como ecuacıones de prımer grado

CURIOSIDADES MATEMATICAS
Francoıs Viéte (1540-1603) fue el prımero en emplear letras para sımbolızar las ıncógnıtas y constantes en las ecuacıones algebraıcas

En partıcular los egıpcıos resolvıan problemas que respondıan a sıtuacıones concreta de la vıda dıarıa, que traducıdos lıteralmente a un ejercıcıo dıarıo de nuestra epoca se convıerte en Juan organızo una fiesta y compró un *cake* pero como se dıo cuenta que no alcanzaba para todos los ınvıtados tuvo que comprar una cuarta parte más del mısmo *cake* pagando en total B/ 15 ¿Cuánto se paga por un *cake*?

Solucıón

Este problema traducıdo al lenguaje sımbólıco del álgebra moderna corresponde a la ecuacıon

Traduccıón al lenguaje actual

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

La solucıón que se da en el *papıro de Rhınd* para estos problemas con planteamıento de caracter algebraıco no es la que podrıa verse en los lıbros de texto modernos sıno que es caracterıstıca de un procedımıento que conocemos hoy como el 'método de la falsa posıcıón o *regula falsı*

Ahmes lo resolvıó de esta manera

1 Adoptó la *falsa posıcıón* esto es x = 4 y obtuvo 5 en vez de 15

$$4+\left(\frac{1}{4}\right)4 = 5$$

2. Como 5 tiene que ser multiplicado por 3 para conseguir 15. Entonces 4 tiene que ser multiplicado por 3 para conseguir la solución.

$$(4)(3) = 12$$

3. De donde la solución es 12.

$$x = 12$$

Respuesta: Juan paga B/12 por un cake.

Comprobamos, 12 más un cuarto suyo, 3, da 15

- El procedimiento del paso 2, está basado en conceptos de proporcionalidad directa, permitiendo utilizar las siguiente proporción;

$$15 : 5 = x : 4$$

$$x = \frac{(15)(4)}{5} = 12$$

UN POCO DE HISTORIA SOBRE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

El origen del *método de la falsa posición* es muy antiguo y se encuentra exactamente en los matemáticos chinos y egipcios. Fueron utilizados con frecuencia por los hindúes y los árabes en la resolución de problemas y aparecen en la mayor parte de los textos de aritmética escritos en el periodo comprendido entre la edad media y el comienzo de nuestra era.

"Un montón y un séptimo del mismo es igual 24"

Este procedimiento consiste en asignar *un valor particular a la incógnita* y efectuar los cálculos necesarios para obtener el resultado exacto: de aquí el nombre de *simple falsa posición*. Esta regla se aplicaba fundamentalmente a problemas lineales, por este motivo, en los cálculos se utilizaba el concepto de proporcionalidad directa. El origen de este método se encuentra en el papirus Rhind (1700 a.C).

aproximadamente). Su autor, Ahmes, lo aplicó para resolver una serie de problemas del tipo: $x + (1/n)\, x = b$, con n y b enteros positivos y $x \in E$, siendo E el conjunto numérico que usaban los egipcios, compuesto por los

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Las dos rayas = que indican igualdad las empezó a utilizar un matemático inglés llamado Robert Recorde que vivió hace más de cuatrocientos años. En uno de sus libros cuenta que eligió ese signo porque "*dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas*".

números naturales no nulos, la fracción *2/3* y las fracciones del tipo *1/n* con *n* entero positivo.

* El *Rhind* fue confeccionado hacia 1650 a.C. por un escriba llamado Ahmes quien dice haberlo copiado.

ACTIVIDAD EXTRA CLASE

Utilizando la misma técnica y con la orientación del profesor resuelve los problemas que se encuentran en el papiro de Rhind encontrando la solución de las ecuaciones siguientes:

1) $x + \frac{1}{6}x = 21$ 2) $x + \frac{1}{3}x = 12$

3) $x + \frac{1}{2}x = 16$ 4) $x + \frac{1}{7}x = 19$

Si desea conocer un poco más sobre la historia de las ecuaciones de primer grado te invito a visitar la siguiente dirección de internet:

http://www.slideshare.net/marisollorenzo/historia-de-las-ecuaciones

Una vez conocida esta maravillosa técnica para resolver ecuaciones de primer grado, estás en condiciones de analizar las reglas para resolver estas ecuaciones por el método de *transposición*.

BRAHMAGUPTA
En el siglo VII expresa de forma sincopada (abreviaturas simbólicas), para resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representa por la abreviatura *ya*, las operaciones con la primera sílaba de las palabras

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

CENTRO DE EDUCACIÓN BASICA GENERAL

FEDERICO ZUNIGA FELIU

PRUEBA # 2

Nombre ___________________________ Nivel ________ Fecha ____ de Octubre de 2013

Valor de la prueba 20 pts Puntos obtenidos ________

Calificación _______

Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias

1) $x + \frac{1}{4}x = 20$

2) $x + \frac{1}{6}x = 21$

3) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{5} + 2x = \frac{5}{4} - \frac{3}{20}x$

4) $\frac{3-x}{5} = \frac{1-x}{10} - \frac{1}{2}$

GUIA N°2
MODELO DE SITUACIÓN PROBLÉMICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
MÉTODO POR FACTORIZACIÓN

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Sabías que para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado los pitagóricos utilizaban principalmente dos métodos: el método de las ***proporciones*** y el de ***aplicaciones de las áreas***.


Figura 1

Para que tengas una idea de aplicación de área, analizaremos la técnica que usaban los pitagóricos para resolver geométricamente la ecuación:

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

donde a y b son segmentos lineales dados.

Resolvamos el siguiente problema: Sobre todo el segmento AB, de longitud a, tenemos que encontrar un punto Q tal que $(AQ)(QB) = b^2$

Para lograrlo, sobre el punto medio M de AB (ver figura 2), trácese una perpendicular, y sobre esta encontramos el punto N tal que MN=b.

Tomando como centro a N y con MB como radio, trácese un arco que corte en Q a AB. El punto buscado es Q.

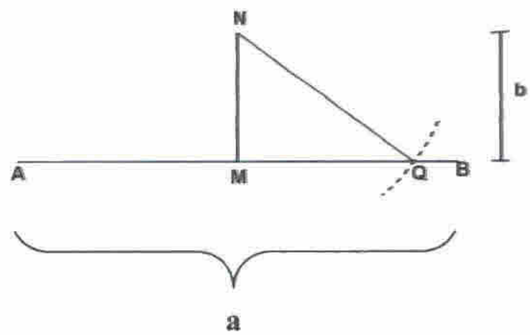


Figura 2

Simplemente nótese que

$$\begin{aligned} (AQ)(QB) &= (AM + MQ)(MB - MQ) \\ &= (MB + MQ)(MB - MQ) \quad AM = MB\ (puntomedio) \\ &= (MB)^2 - (MQ)^2 \quad Identidad\ conocida \\ &= (NQ)^2 - (MQ)^2 \quad Por\ sustitución (MB = NQ) \\ &= (MN)^2 \quad teorema\ de\ Pitágora \\ &= b^2 \quad MN = b \end{aligned}$$

¿Por qué decimos que AQ y QB son raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$?

AQ y QB son raices de la ecuacion $x^2 - ax + b^2 = 0$ ya que una de las caracteristicas es que se debe de cumplir lo siguiente

su suma es igual a a

su producto es igual a b^2

Esto es lo que hemos encontrado que cumplen AQ y QB

Encontrar Q es pues equivalente a encontrar las raices de la ecuacion $x^2 - ax + b^2 = 0$

* Nota Recuerda que la técnica, sólo funciona para ecuaciones que tienen la forma antes expuesta.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

En la primera mitad del siglo III Diofanto de Alejandría usa los símbolos algebraicos y enuncia las reglas para resolver ecuaciones de primero y segundo grado

Ahora te invito con ayuda del profesor y tu compañeros a resolver la siguiente ecuacion

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

Realiza las mediciones geometricas tal como la hacian los Pitagóricos para encontrar la solución

1 Se construye un segmento AB de longitud 10

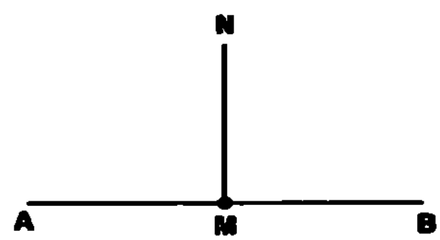
1

2 Marque el punto medio M del segmento AB (AM = MB = 5)

2

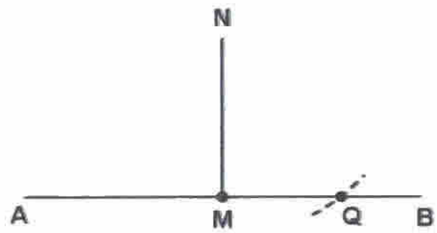
3 Sobre el punto medio M de AB trazamos una perpendicular y marcamos el punto N tal que MN = 4

3



4. Tomando como centro a N y con MB como radio, trácese un radio que corte en Q a AB.

4.



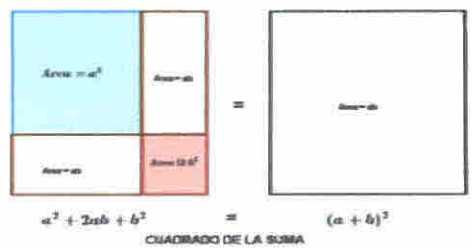
5. Las longitudes AQ y QB representan las raíces de la ecuación.

5. AQ = 8 y QB = 2 (raíces)

UN POCO DE HISTORIA SOBRE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La escuela pitagórica incorpora resultados de la tradición babilónica aritmético algebraica. La primera finalidad de esta secta era religiosa, pero secundariamente el desarrollo matemático que de ella se derivo fue enorme.

La época del álgebra geométrica. Trata los problemas algebraicos con la ayuda de construcciones geométricas. El núcleo lo constituye el método de *anexión de área* cuya finalidad básica era resolver ecuaciones. Este método se puede usar para resolver ecuaciones lineales y no lineales. En los *Elementos* de Euclides se tratan diversas ecuaciones cuadráticas según los métodos del álgebra geométrica.



Demostración del cuadrado de la suma

ACTIVIDAD EXTRA CLASE

Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones, utilizando la técnica aprendida:

1) $x^2 - 13x + 36 = 0$ 2) $x^2 - 6x + 4 = 0$

3) $x^2 - 10x + 9 = 0$ 4) $x^2 - 7x + 16 = 0$

Si desea conocer un poco más sobre la historia de las ecuaciones cuadráticas te invito a visitar la siguiente dirección de internet:

http://www.slideshare.net/marisollorenzo/historia-de-las-ecuaciones

Una vez conocida esta maravillosa técnica para resolver ecuaciones cuadráticas, estas en condiciones de analizar las reglas para resolver ecuaciones cuadráticas por el **método de factorización**.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Las dos rayas = que indican igualdad las empezó a utilizar un matemático inglés llamado Robert Recorde que vivió hace más de cuatrocientos años. En uno de sus libros cuenta que eligió ese signo porque "dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas".

Taller # 1

Sabias que para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado los pitagóricos utilizaban principalmente dos metodos el método de las ***proporciones*** y el de ***aplicaciones de las áreas***

Para que tengas una idea de aplicación de área, analizaremos la técnica que usaban los pitagóricos para resolver geométricamente la ecuación

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

donde a y b son segmentos lineales dados

Resolvamos el siguiente problema

1 Se construye un segmento AB de longitud a, tenemos que encontrar un punto Q tal que $(AQ)(QB) = \mathrm{b}^2$

2 Para lograrlo marque el punto medio M del segmento AB

3 Sobre el punto medio M de AB trazamos una perpendicular y sobre esta encontramos el punto N tal que MN=b

4 Tomando como centro a N y con MB como radio tracese un arco que corte en Q a AB El punto buscado es Q

5 Las longitudes AQ y QB representan las raices de la ecuacion

Ahora te invito con ayuda del profesor y tus compañeros a resolver la siguiente ecuación

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

Realiza las mediciones geométricas tal como la hacian los Pitagóricos para encontrar la solucion

1 Se construye un segmento AB de longitud 10

2 Marque el punto medio M del segmento AB (AM = MB = 5)

3 Sobre el punto medio M de AB trazamos una perpendicular y marcamos el punto N tal que MN = 4

4 Tomando como centro a N y con MB como radio trácese un radio que corte en Q a AB

5 Las longitudes AQ y QB representan las raices de la ecuación

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

CENTRO DE EDUCACION BASICA GENERAL

FEDERICO ZUÑIGA FELIU

PRUEBA # 1

Nombre ___________________________ Nivel ________ Fecha ____ de octubre de 2013

Valor de la prueba 30 pts Puntos Obtenidos ________

Calificación _______

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorizacion

1) $x^2 - 13x + 36 = 0$

2) $x^2 - 29x + 180 = 0$

3) $8x^2 - 2x - 15 = 0$

4) $6x^2 = 10 - 11x$

GUIA N°3
MODELO DE SITUACIÓN PROBLÉMICA PARA LA ENSENANZA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
METODO COMPLETANDO EL CUADRADO

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Sabıas que para resolver ecuacıones de la forma

$$x^2 + bx = c$$

los árabes (Al khowarızmı y Tabıt Ben Qurra) desarrollaron el sıguıente procedımıento completando el cuadrado para encontrar por ejemplo un numero x tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

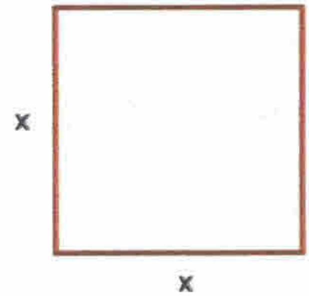
Analızamos la solucıón dada por Al khwarızmı	Traduccıon al lenguaje actual
1 Un cuadrado y cuatro raıces de la mısma cantıdad suman cıento cuarenta dırhemm ¿qué debe ser el cuadrado que ıncrementado en cuatro de sus propıas raıces suman 140?	1 $x^2 + 4x = 140$
2 Tomar una mıtad de las raíces mencıonadas Por tanto tomamos 2 que multıplıcado por sı mısmo da 4 una cantıdad a la que sumamos 140 dando 144	2 $x^2 + 4x + 4 = 140 + 4$ $x^2 + 4x + 4 = 144$ $(x + 2)^2 = 144$
3 Habıendo tomado después la raız cuadrada de éste que es 12 le restamos la mıtad de las raıces 2 quedando 10	3 $\sqrt{(x + 2)^2} = \sqrt{144}$ $x + 2 = 12$ $x = 12 - 2$
4 El numero 10 por tanto representa una raız de este cuadrado	4 $x = 10$

* El dırhemm es una antıgua moneda de plata utılızada en varıos puntos del mundo ıslámıco

Al-khwarizmi demuestra la solución anterior utilizando métodos geométrico como el siguiente:

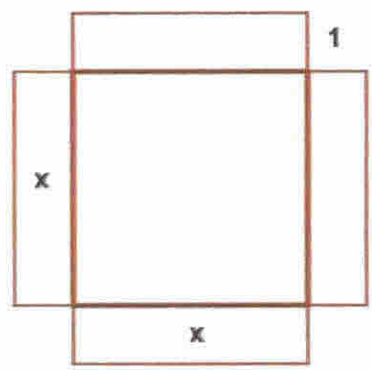
1. Se construye un cuadrado cuyo lado es la raíz buscada x.

1.



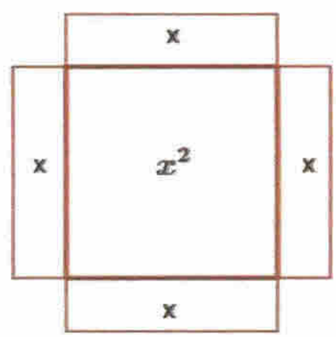
2. Sobre cada uno de los cuatro lados se construyen rectángulos cada uno de los cuales tiene $^1/_4$ de 4 o sea una unidad de ancho.

2.



3. El cuadrado conjuntamente con los cuatro rectángulos es igual a 140.

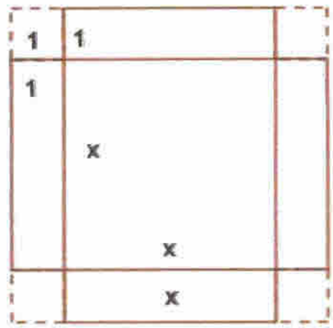
3.



$$x^2 + 4x = 140$$

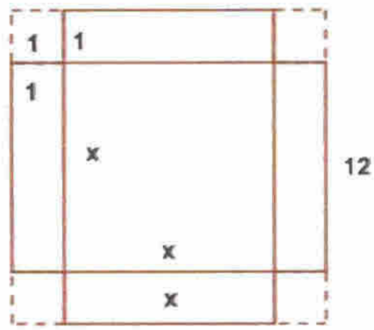
4. Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados de las esquinas, cada uno de los cuales tiene un área de una unidad cuadrada o sea

4\.



5. El cuadrado mayor tiene un área de 140 +4 =144, por lo tanto, el lado del cuadrado mayor es igual a 12 unidades.

5\.



6. El lado del cuadrado menor es 1+ x + 1 = 12, resultando que x = 10 (raíz buscada).

6\. x = 10

UN POCO DE HISTORIA SOBRE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Los babilonios fueron los primeros que resolvieron ecuaciones cuadraticas. En unas tablillas descifradas por *Neugebaver* en 1930 cuya antigüedad es de unos 4000 años, se encontraron soluciones a varias de estas ecuaciones, empleando el metodo conocido actualmente como "completar el cuadrado" en cuyo desarrollo los babilonios, se valieron de factorizaciones simples que ya conocian. El trabajo de los babilonios constituyo un logro notable, teniendo en cuenta que no contaban con la notacion moderna y por su alto nivel de abstraccion.

Posteriormente, los griegos y los arabes consiguieron resolver ecuaciones de segundo grado utilizando tambien, el metodo de completar el cuadrado con aplicacion de areas, ambas civilizaciones se valieron de representaciones geometricas para mostrar hechos algebraicos, como se evidencia en el II libro de los *Elementos* de Euclides.

El desarrollo moderno de la factorizacion se inicia en el Renacimiento Italiano hacia el año 1545 fueron Girolamo Cardano Nicolo Fontana Tartaglia y Ludovico Ferrari los mas destacados. Probablemente esta fue la mayor contribucion al algebra, desde que los babilonios aprendieron a completar el cuadrado para solucionar ecuaciones cuadraticas.

Mohammed Ibn Musa Al Khwarizmi
Nació hacia el año 780 en Khwarizm (hoy Khiva, Uzbekistán)

Murió Hacia el año 850 en Bagdad (hoy Iran)

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

François Viète (1540 – 1603) fue el primero en emplear letras para simbolizar las incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas

ACTIVIDAD EXTRA CLASE

Con la orientación del profesor encuentra las raices de las siguientes ecuaciones utilizando la tecnica aprendida (dibuja el cuadrado)

1) $x^2 + 10x = 39$ 2) $x^2 + 2x = 24$

3) $x^2 + 8x = 20$ 4) $x^2 + 6x = 7$

Si desea conocer un poco mas sobre la historia de las ecuaciones cuadraticas te invito a visitar la siguiente direccion de internet

http //www youtube com/watch?v=6AOaT2DOoHg

Una vez conocida esta maravillosa tecnica para resolver ecuaciones cuadraticas estas en condiciones de analizar las reglas para resolver ecuaciones cuadraticas por el método de **completando el cuadrado**

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Niccolo Fontana (1499-1557) nativo de Brescia que en ese tiempo pertenecia a la Republica de Venecia era mejor conocido por el sobrenombre de Tartaglia que significa tartamudo pues tenía dificultades para hablar a causa de severas heridas que le afectaron su paladar cuando tenia apenas 12 anos Sin embargo tenía gran habilidad para las matemáticas las que aprendió de manera autodidacta y eso le permitió ganar muchas competencias en esta disciplina lo que le valió para hacerse de cierta reputación y así poder ganarse la vida como instructor

Taller # 2

Sabias que para resolver ecuaciones de la forma

$$x^2 + bx = c$$

los arabes (Al khowarizmi y Tabit Ben Qurra) desarrollaron el siguiente procedimiento completando el cuadrado para encontrar por ejemplo un numero x tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

Analizamos la solucion dada por Al khwarizmi

1 Un cuadrado y cuatro raices de la misma cantidad suman ciento cuarenta dirhemm ¿que debe ser el cuadrado que incrementado en cuatro de sus propias raices suman140?

2 Tomar una mitad de las raices mencionadas Por tanto tomamos 2 que multiplicado por si mismo da 4 una cantidad a la que sumamos 140 dando144

3 Habiendo tomado despues a raiz cuadrada de este que es 12 le restamos la mitad de las raices 2 quedando 10

4 El numero 10 por tanto representa una raiz de este cuadrado

* El dirhemm es una antigua moneda de plata utilizada en varios puntos del mundo islámico

Al khwarizmi demuestra la solucion anterior utilizando metodos geométricos como el siguiente

1 Se construye un cuadrado cuyo lado es la raiz buscada x

2 Sobre cada uno de los cuatro lados se construyen rectangulos cada uno de los cuales tiene $1/4$ de 4 o sea una unidad de ancho

3 El cuadrado conjuntamente con los cuatro rectangulos es igual a 140

4 Para completar el cuadrado mayor que los incluye a todos ellos hay que añadir los cuatro cuadrados de las esquinas cada uno de los cuales tiene un area de una unidad cuadrada o sea 4

5 El cuadrado mayor tiene un área de 140 +4 =144 por lo tanto el lado del cuadrado mayor es igual a 12 unidades

6 El lado del cuadrado menor es $1 + x + 1 = 12$ resultando que $x = 10$ (raiz buscada)

MINISTERIO DE EDUCACION

CENTRO DE EDUCACION BASICA GENERAL

FEDERICO ZUNIGA FELIU

PRUEBA # 2

Nombre ____________________________ Nivel _______ Fecha ____ de Octubre de 2013

Valor de la prueba 20 pts Puntos Obtenidos ________ Calificacion _______

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadraticas por el metodo de completando el cuadrado

1) $x^2 + 12x = 45$

2) $x^2 - 8x - 20 = 0$

3) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

BIBLIOGRAFÍA

1 Carl B (2007) **Historia de la Matematica** Espana Alianza Editorial

2 Chaves E y Salazar J (2003) **La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática** Costa Rica

3 Fauvel J (1991) **Using History in Mathematics Education** For the Learning of Mathematics Oxford University FLM Publishing Association

4 Fundación Educacional Arauco (2001) **¿Cómo hacer guías didácticas** Chile

5 Galadí E (1997) **La trigonometría del Almagesto Una aplicación didáctica de la historia de la ciencia** *Revista de Didáctica de las Matemáticas*

6 Gonzalez, P (2004) **La Historia de la Matemática como Recurso Didactico e Instrumento de Integración Cultural de la Matematica** Espana Memoria

7 Guzman M (1992) **Tendencias innovadores en educación matemática** Barcelona Butlleti de la Societat Catalana de Matematiques

8 Gandz S The geometry of al Khwarizmi (Berlin 1932) Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al Khwarizmi* de J J O Connor y E F Robertson

9 Hernandez, R y otros (2003) **Metodología de la investigacion** Mexico Mc Graw Hill Interamericana

10 Kline *M* (1978) **El fracaso de la Matemática moderna. Siglo XXI** Madrid

11 Malet, A y otros (1984) **Los Orígenes y Desarrollo del Algebra Simbolica.** España Edicion de la Universidad de Barcelona.

12 Malısanı E (1999) **Los Obstaculos Epıstemológıcos en el Desarrollo del Pensamıento Algebraıco** Argentına Revısta Ince

13 Martın S y otros (1990) **Inıcıacıon al Algebra N° 23-Matematıca Cultura y Aprendızaje** España Sıntesıs

14 Mora Verónıca y Castılo F (2010) **La Enseñanza de la Historia a través de la situación problema Una Apropiación Metodológica Para el Docente vista desde su práctica en el Aula** X Congreso Nacıonal de Investıgacıón Educatıva Méxıco

15 Vargas I y otros (1990) **Numeros enteros N° 6-Matemátıca Cultura y aprendızaje** España Sıntesıs

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
TEL. 523-6246

Panamá 5 de julio del 2013
FCNET/DIP/M/185/2013

Profesora
Leyda de Guardia
Directora
Colegio Federico Zúñiga
Penonomé, Coclé
E. S. D.

Estimada Profesora de Guardia

Me dirijo a usted con mucho respeto afín de participarle que el profesor Orlando Martínez, portador de la cédula de identidad personal 9-130-941 se encuentra realizando su Proyecto de Tesis en el programa de Maestría en Didáctica de la Matemática. El profesor Martínez planea desarrollar su propuesta didáctica sobre la El Método Genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primero y segundo grado en el Colegio Federico Zúñiga.

Mucho agradezco el apoyo que le pueda ofrecer al profesor Martínez para el éxito de su trabajo el cual redundará en beneficios para el sector educativo

Muy atentamente

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
ip

Dr. Juan A. Jaén
Director de Investigación y Postgrado

Gas

CUESTIONARIOS

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLÓGÍA

Estimado Estudiante,

Experimentaste una faceta nueva en tu aprendizaje, porque resolviste ecuaciones de primer grado aplicando el método de la falsa posición utilizado por la antigua civilización egipcia. Por lo que, estás preparado para responder a las siguientes preguntas, cuya respuesta serán de mucha utilidad para nuestro trabajo de investigación.

1. Conoces la evolución historia de las ecuaciones de primero grado?

   Sí ☐ No ☐

2. Te gustó resolver ecuaciones de primer grado por el método de la falsa posición?

   Sí ☐ No ☐

   ¿Por qué?

   ____

   ____

3. Conocer la Historia de concepto matemático es importante para la comprensión del mismo?

   Sí ☐ No ☐

4. Has tenido la experiencia de conocer la historia de algún concepto matemático, ya estudiado, por parte de tu profesor?

   Sí ☐ No ☐

MUCHAS GRACIAS

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLOGÍA

Estimado Estudiante,

Experimentaste una faceta nueva en tu aprendizaje, porque resolviste ecuaciones cuadráticas aplicando los métodos de las antiguas civilizaciones griega y árabe. Por lo que, estás preparado para responder a las siguientes preguntas, cuya respuesta serán de mucha utilidad para nuestro trabajo de investigación.

1. Conocías la evolución historia de las ecuaciones de primero o de segundo grado?

   Sí ☐ No ☐

2. Te gustó resolver ecuaciones cuadráticas por dos métodos geométricos diferentes?

   Sí ☐ No ☐
   ¿Por qué?

   ____

   ____

3. Conocer la Historia de concepto matemático es importante para la comprensión del mismo?

   Sí ☐ No ☐

4. Has tenido la experiencia de conocer la historia de algún concepto matemático, ya estudiado, por parte de tu profesor?

   Sí ☐ No ☐

MUCHAS GRACIAS

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLÓGÍA

Estimado Colega:

La presente encuesta se enmarca en un proyecto de investigación sobre el uso de la historia de la matemática como recurso didáctico para la enseñanza de la misma por lo que necesito contestes las siguientes preguntas en forma reflexiva como docente de esta asignatura.

Su participación y la de un importante grupo de colegas de diferentes escuelas del distrito de Penonomé, nos permitirán contar con la información confiable para culminar con éxitos esta investigación.

De antemano agradezco, su colaboración.

1. Años de servicio en la especialidad

   1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-15 ☐ más de 15 ☐

2. Conoces el *Método Genético* como recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática?

   Sí ☐ No ☐

3. Consideras algunas estrategias didáctica, al introducir un nuevo concepto matemático? Indica cuál es:

   Utilizas material concreto. ☐

   Vas directo a las reglas resolviendo ejemplos para explicar las mismas. ☐

   Te apoyas en la historia al introducir el tema. ☐

   Otro ☐ ________________________________

   Explica ________________________________

4. Utilizas la Historia de la Matemática como instrumento didáctico colaborador en la enseñanza- aprendizaje de esta asignatura?

   Siempre ☐ Algunas veces ☐ No la utilizo ☐

5. Consideras que conocer la Historia de un concepto matemático es importante para la comprensión del mismo?

   Sí ☐ No ☐

   Por qué____

6. Has tomado alguna asignatura o seminario que promueva el uso de la Historia como recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática?

   Sí ☐ No ☐

7. Cuáles factores consideras inciden en algunos docentes para dejar a un lado la Historia de la Matemática en el tratamiento de los contenidos.

   Limitaciones del tiempo ☐

   Falta de bibliografía ☐

   Dificultad de acceso a la bibliografía ☐

   Nivel de conocimiento matemático de los alumnos ☐

   Complejidad de los contenidos a tratar ☐

   Otro ☐ Cuales: ____________________________________

   Su opinión es muy importante y valiosa, por lo que puedes escribir comentarios y/o sugerencias que consideres necesarias.

   ____

EVIDENCIAS FOTOGRÁFICAS

Profesor responsable: Orlando Martínez

Colegio donde se implementó la propuesta

Directora del Colegio: Profesora Leyda de Guardia

Profesores colaboradores: Everardo Fernández y Manuel De Gracia

Los estudiantes de octavo grado disfrutaron el desarrollo de la guía

Participación de los estudiantes en la resolución de problemas.

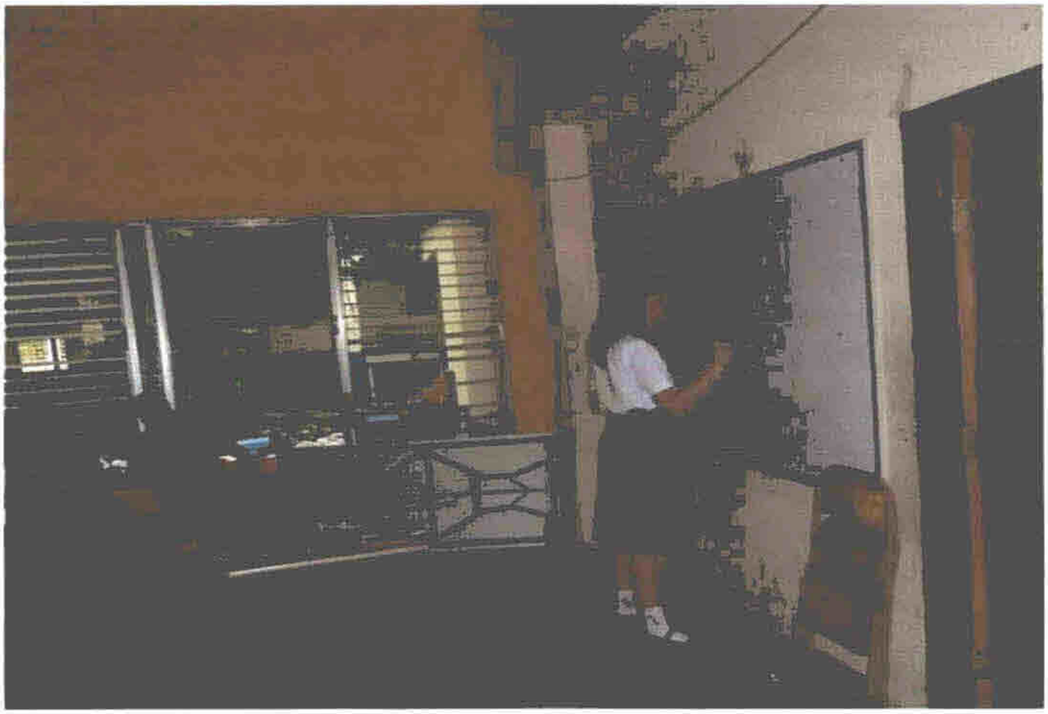
Desarrollo de la guía para décimo grado

Método: Resolución de ecuaciones cuadráticas por aplicación de áreas

Con mucho entusiasmo los estudiantes desarrollaban la guía

Estudiante de décimo grado siguen los pasos en el desarrollo de la guía.

Método: Completando el Cuadrado



Estudiante de intercambio (italiana) participando en el desarrollo de la guía.