

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**  
**PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA**  
**EN MATEMÁTICA**

**EL AXIOMA DE COMPLETITUD COMO FUNDAMENTO**  
**DEL**  
**ANÁLISIS REAL**

**Por:**  
**MIGUEL RIVERA**

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS**  
**PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.**

**PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ**

**1995**

TH



UNIVERSIDAD DE PANAMA

ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

4 DIC 1995

Aprobado por:

ok, del autor

ROGELIO ROSAS Ph.D.  
Director de Tesis

JORGE HERNANDEZ Ph.D.  
Miembro del Jurado

OMAR OLIVEROS M. en C.  
Miembro del Jurado

Fecha:

\_\_\_\_\_

280737

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Peretra'

Estafeta Universitaria

Panamá, Rep. de Panamá

## **DEDICATORIA**

**A MI DIOS TODOPODEROSO**

**Y**

**A MI FAMILIA**

## **AGRADECIMIENTO**

Queremos agradecer de manera muy especial al Profesor Rogelio Rosas que nos mostró cooperación e interés para la realización de nuestro trabajo de graduación.

De igual manera, nuestro más sincero agradecimiento, a los profesores Jorge Hernández y Omar Oliveros por sus valiosas contribuciones y recomendaciones. Para ellos, nuestro agradecimiento más sincero.

**MUCHAS GRACIAS.**

## INDICE

	PÁGINA
DEDICATORIAS.....	1
AGRADECIMIENTO .....	111

### CAPITULO I LA AXIOMÁTICA DE LOS NUMEROS REALES

INTRODUCCIÓN . . . . .	- 2 -
Operación de Adición . . . . .	- 6 -
Operación de Multiplicación . . . . .	- 7 -
Campo o Cuerpo . . . . .	- 10 -
Operación de Sustracción . . . . .	- 10 -
Operación de División . . . . .	- 10 -
Desigualdades . . . . .	- 11 -
Propiedad de Continuidad o Completitud . . . . .	- 12 -
Sistema de los Números Reales . . . . .	- 13 -
Recta Real . . . . .	- 14 -
Propiedades de las Fracciones . . . . .	- 21 -
Potencia y Radicación . . . . .	- 23 -
Propiedades de Orden . . . . .	- 26 -
Valor Absoluto . . . . .	- 30 -
Propiedades Básicas del Valor Absoluto . . . . .	- 31 -
La Recta Numérica Extendida . . . . .	- 33 -
Intervalos y Entornos . . . . .	- 35 -
Ínfimo y Supremo . . . . .	- 37 -
Teorema del Supremo . . . . .	- 41 -

Teorema del Ínfimo . . . . .	- 43 -
Teorema de Dedekind . . . . .	- 43 -
Propiedad Arquimediana . . . . .	- 47 -
Principio de los Intervalos Encajados . . . . .	- 51 -
Teorema de G. Cantor . . . . .	- 53 -
Punto de Acumulación . . . . .	- 57 -
Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos . . .	- 58 -
Propiedades de $\mathbb{R}$ que no dependen del Axioma de Completitud . . . . .	- 60 -

## CAPITULO II

### EL AXIOMA DE COMPLETITUD

#### Y LAS FUNCIONES

Función . . . . .	- 68 -
Sucesión de Números Reales . . . . .	- 70 -
Subsucesión . . . . .	- 73 -
Propiedades de las Sucesiones Convergentes . . . .	- 75 -
Teorema del Emparedado . . . . .	- 77 -
Teorema de la Sucesión Creciente y Acotada . . . .	- 78 -
Caracterización de Punto de Acumulación . . . .	- 80 -
Teorema de Bolzano-Weierstrass para Sucesiones . .	- 81 -
Criterio de Cauchy para la Convergencia. . . . .	- 82 -
Sucesión de Cauchy . . . . .	- 84 -
Representación de los Números Reales por Fracciones Decimales Infinitas . . . . .	- 86 -

Continuidad . . . . .	- 89 -
Continuidad en un punto . . . . .	- 89 -
Caracterización de Funciones Continuas . . . . .	- 90 -
Función Continua en un Conjunto . . . . .	- 92 -
Función Acotada . . . . .	- 93 -
Cubrimiento Abierto . . . . .	- 93 -
Teorema de Heine-Borel Lebesgue . . . . .	- 94 -
Conjunto Compacto . . . . .	- 95 -
Teorema de Bolzano . . . . .	- 99 -
Una Aplicación del Teorema de Bolzano . . . . .	- 102 -
Sobre la Derivada . . . . .	- 104 -
Teorema de Fermat . . . . .	- 105 -
Teorema de Rolle . . . . .	- 106 -
Teorema de Lagrange . . . . .	- 109 -
Teorema de los incrementos finitos de Cauchy . . . . .	- 116 -
CONCLUSIONES . . . . .	- 119 -
BIBLIOGRAFÍA . . . . .	- 121 -

**EL AXIOMA DE COMPLETITUD COMO FUNDAMENTO DEL ANÁLISIS REAL  
RESUMEN**

Estamos convencidos, que una presentación del sistema de los números reales, mediante la vía de la axiomatización, representa una alternativa pedagógica, para aquellos docentes que en un momento dado, se les asigne cursos introductorios de Cálculo o cursos sobre la fundamentación del Análisis Matemático. Esto resulta "económico" sin dejar de ser formal en su presentación matemática. En este trabajo procuramos abordar aquellos resultados que se derivan de una forma u otra del axioma de completitud y que están relacionados con la teoría de las funciones reales, tratando en la medida de lo posible, de resaltar el axioma de completitud como un elemento fundamental de dichos resultados. Esperamos despertar el interés y el reconocimiento de la importancia que tiene el axioma de completitud, en la estructura base de ese enorme "edificio" que representa el Análisis Matemático.

**THE COMPLETENESS AXIOM AS REAL ANALYSIS BASIS  
SUMMARY**

We are convinced that a presentation of the Reals Numbers System axiomatically is a pedagogical alternative for those teachers who have been assigned either Fundamentals of Calculus or Fundamentals of Real Analysis Courses. It results "economic" without losing rigor in its Mathematical presentation. Here we are dealing with the results derivated from the Completeness Axiom regarding the theory of Reals valued Functions, attempting to point out the Completeness Axiom as a basic element of these results. We hope this work is going to bring about interest and acknowledgment of the great importance which the Completeness Axiom bears as one of the basic "building" blocks of Mathematical Analysis.

## **INTRODUCCIÓN**

Los cursos introductorios de Cálculo, se inician con el estudio del sistema de los números reales, razón por la cual trataremos de escoger la mejor manera de hacer esta presentación.

Tenemos dos caminos, entre los cuales podemos escoger; el camino que consiste en introducir los números naturales mediante un conjunto de axiomas y partiendo de aquí, construir los números enteros, racionales y los reales, así, este camino nos resultaría sumamente extenso y tendríamos que determinar, una vez construido los racionales (o partiendo de ellos), que tipo de construcción haríamos, puesto que se puede construir  $\mathbb{R}$  a través de Las Cortaduras de Dedekind, Sucesiones de Cauchy, etc.

La otra opción, por la cual nos inclinamos, es la de enunciar un conjunto de axiomas, en donde los números reales serían objetos con operaciones de adición, multiplicación y una relación de orden. Uno de estos axiomas nos afirma que  $\mathbb{R}$  es completo, dicho axioma puede ser enunciado de varias formas, por ejemplo: como el **axioma de completitud**, el axioma del supremo, el axioma del ínfimo, etc.

El trabajo consta de dos capítulos. En el capítulo I presentamos, el sistema de los números reales como aquel conjunto que cumple con ciertos atributos, los cuales llamaremos axiomas de los números reales. Partiendo de ellos, probaremos algunas de las propiedades conocidas de  $\mathbb{R}$ .

Igualmente estudiaremos resultados importantes que se obtienen en subconjuntos de  $\mathbb{R}$  , haciendo notar en la mayoría de los casos, la dependencia que ellos tienen del axioma de completitud.

En el segundo capítulo, tratamos aquellos resultados del axioma de completitud que están relacionados con la teoría de las funciones reales, tratando en la medida de lo posible, de resaltar el axioma de completitud

**CAPÍTULO I**

**LA AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES.**

Iniciaremos nuestro trabajo, definiendo operaciones que nos permitirán desarrollar una estructura algebraica sobre un conjunto  $R$  distinto del vacío.

**DEFINICIÓN 1.1: (Operación de Adición)**

Sea  $R$  un conjunto no vacío, para cualquier par de elementos  $x, y$  de  $R$  está definido de forma única el número  $S$  de  $R$  denominado suma de  $x$  e  $y$ , al cual denotamos por  $S=x+y$ . El objeto  $(R,+)$ , es un Grupo Aditivo Conmutativo si cumple con las siguientes propiedades:

**A.1. Propiedad Asociativa:**

Para todo elemento  $x, y, z$  de  $R$ , tenemos

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

**A.2. Elemento Neutro:**

Existe un elemento  $0$  de  $R$  tal que para todo elemento  $x$  de  $R$  se tiene que  $x + 0 = 0 + x = x$ . A dicho elemento  $0$  lo llamaremos neutro aditivo o elemento nulo.

**A.3. Elemento Opuesto:**

Para todo elemento  $x$  de  $R$  existe un elemento de  $R$  que lo denotaremos por  $-x$  tal que  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ . Al elemento  $-x$  lo llamaremos opuesto aditivo de  $x$ .

**A.4. Propiedad Conmutativa:**

Para todos los elementos  $x, y$  de  $R$  tenemos que

$$x + y = y + x.$$

**Observación** Debido a la propiedad A.4., las propiedades A.2 y A.3 pueden ser reformuladas respectivamente como:

**A.2'. Elemento Neutro:**

Existe un elemento  $0$  de  $R$  tal que para todo elemento  $x$  de  $R$  se viene que  $x + 0 = x$

**A.3'. Elemento Opuesto:**

Para todo elemento  $x$  de  $R$  existe un elemento de  $R$  que lo denotaremos por  $-x$  tal que  $x + (-x) = 0$ .

**DEFINICIÓN 1.2: (Operación de Multiplicación)**

Sea  $R$  un conjunto distinto del vacío, para cualquier par de elementos,  $x, y$  de  $R$  está definido de forma única el número  $M$  de  $R$  denominado producto de los elementos  $x$  e  $y$ , denotado por  $M = x \bullet y$  o simplemente  $M = xy$ . El objeto  $(R - \{0\}, \bullet)$  es un Grupo Multiplicativo Conmutativo, si cumple con las propiedades siguientes:

**A.5. Propiedad Asociativa:**

Para todos los elementos  $x, y, z$  de  $R$ , tenemos que

$$x(yz) = (xy)z$$

**A.6. Elemento Neutro:**

Existe un elemento 1 de R tal que para todo elemento x de R tenemos que  $1 \bullet x = x \bullet 1 = x$ . A dicho elemento 1 de R se le llama neutro multiplicativo o elemento unidad.

**A.7. Elemento Inverso:**

Para todo elemento x de  $R - \{0\}$  existe un elemento de R que lo denotaremos por  $x^{-1}$  o por  $\frac{1}{x}$ , tal que  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

A dicho elemento  $x^{-1}$  lo llamaremos inverso multiplicativo.

**A.8. Propiedad Conmutativa:**

Para todos los elementos x, y de R tenemos que  $xy = yx$ .

**Observación:** Al igual que la observación anterior, debido a la propiedad A.8., las propiedades A.6 y A.7 pueden ser reformuladas respectivamente como.

**A.6'. Elemento Neutro:**

Existe un elemento 1 de R tal que para todo elemento x de R tenemos que  $1 \bullet x = x$ .

**A.7'. Elemento Inverso:**

Para todo elemento  $x$  de  $R - \{0\}$  existe un elemento de  $R$  que lo denotaremos por  $x^{-1}$  o por  $\frac{1}{x}$ , tal que  $x^{-1}x = 1$ .

Además, la razón por la cual se quita el elemento nulo de  $R$  es para poder definir el elemento inverso en todo el conjunto  $R - \{0\}$  puesto que el nulo no posee inverso, pues como sabemos  $\frac{1}{0}$  no está definido.

Hasta aquí, tenemos definido en  $R$  dos operaciones con un conjunto de propiedades para cada operación, también podemos relacionar las dos operaciones mediante la siguiente propiedad.

**A.9. Propiedad Distributiva del Producto con respecto a la Suma:**

Para cualquiera que sean los elementos  $x, y, z$  de  $R$  tenemos que

$$(x + y)z = xz + yz \quad (\text{distributividad por la derecha})$$

$$x(y + z) = xy + xz \quad (\text{distributividad por la izquierda}).$$

Diremos que la terna  $(R, +, \cdot)$  es un **anillo** si cumple las propiedades A.1 a A 5 y A 9 Si además cumple con A.8 diremos que el **anillo es conmutativo**. Si  $(R, +, \cdot)$  es un anillo con la propiedad A.6 decimos que es anillo con unidad o anillo unitario. Finalmente, si el anillo  $(R, +, \cdot)$  es

conmutativo, con unidad y cumple con A.7, lo llamaremos Campo o Cuerpo.

El conjunto de los Números Enteros es un ejemplo de un anillo conmutativo con unidad. Mientras que el conjunto de los números racionales se eleva a la categoría de campo.

**DEFINICIÓN 1.3: (Operación de Sustracción)**

En un anillo R se define la operación de sustracción como  $x - y = x + (-y)$  para todo  $x, y$  en R.

**DEFINICIÓN 1.4: (Operación de División)**

En un campo R se define la operación división como:  
 $x \cdot y^{-1}$  con  $y \neq 0$ , para todo  $x, y$  en R.

Continuando con las propiedades, en un anillo R podemos introducir el concepto de comparación entre sus elementos si en R se verifica la siguiente propiedad.

**A.10. Cono Positivo:**

Sea  $\mathbb{P}$  un subconjunto del anillo R tal que:

- i) 0 no pertenece a  $\mathbb{P}$ .
- ii) Si  $x \neq 0$  entonces se tiene una y sólo una de las siguientes posibilidades:  $x$  está en  $\mathbb{P}$ , o  $-x$  está en  $\mathbb{P}$ .
- iii) Si  $x, y$  están en  $\mathbb{P}$  entonces  $x + y$  y  $xy$  están en  $\mathbb{P}$ .

Al subconjunto  $\mathbb{P}$  de  $R$  se le llama cono positivo de  $R$  y sus elementos se denominan positivos.

Un anillo con la propiedad A.10 se le llama anillo ordenado (cuando el anillo es con unidad, conmutativo y con la propiedad A.10 lo llamaremos campo ordenado).

### Desigualdades

De lo anterior, en un anillo ordenado se introduce el concepto de comparación al definir la relación menor que y la relación mayor que.

#### DEFINICIÓN 1.5: (Mayor que y menor que)

En un anillo ordenado, definimos la relación menor que, como  $x < y$  si  $y - x \in \mathbb{P}$ . Y la relación mayor que, como  $x > y$  si  $x - y \in \mathbb{P}$ , o de forma semejante,  $x > y$  si  $y < x$

Para mayor comodidad, diremos que  $x$  es positivo si  $x > 0$ , puesto que  $x > 0$  implica  $x = x - 0 \in \mathbb{P}$  y diremos que  $x$  es negativo si  $x < 0$ , es decir si  $-x = 0 - x \in \mathbb{P}$ .

La expresión  $x \geq y$  (ó  $x \leq y$ ) significa que  $x$  es mayor (menor) o igual a  $y$ , es decir que  $x > y$  ( $x < y$ ) o bien que  $x = y$ .

En otras palabras  $x \geq y$  ( $x \leq y$ ) significa que  $x$  no es menor (mayor) que  $y$ .

**DEFINICIÓN 1.6: (Desigualdades)**

Llamaremos desigualdades a las expresiones  
 $x < y$  ,  $x > y$  ,  $x \leq y$  ,  $x \geq y$ .

Finalmente presentaremos la siguiente:

**A.11. Propiedad de Continuidad o Completitud:**

Sea  $R$  un anillo ordenado y  $A, B$  dos subconjuntos no vacíos de  $R$ . Si para cualquiera que sean  $x \in A$  e  $y \in B$  se cumple que  $x \leq y$ , entonces existe un número  $C \in R$  tal que para todo  $x \in A, y \in B$  se tiene  $x \leq C \leq y$ .

Esta propiedad es sumamente importante, ella hace que entre dos elementos arbitrarios  $x, y$  del anillo ordenado  $R$  se pueda encontrar otro elemento del anillo de tal forma que sea imposible encontrarnos con un "hueco" o vacío entre los elementos  $x, y$ ; es decir, no solamente nos indica densidad entre los elementos de  $R$  si no que también nos habla de una continuidad entre sus elementos, así como su nombre lo expresa. Además, la propiedad de continuidad está relacionada con la práctica de medición, por ejemplo cuando se suman las áreas de los rectángulos inscritos en la gráfica de una función continua en un intervalo  $[a, b]$  se obtiene un número, al ir incrementando estos rectángulos se obtienen otros números que constituirían el conjunto  $A$ , análogamente al considerar los rectángulos circunscritos se

forma el conjunto B; de tal forma que la propiedad A.11 nos garantiza la existencia de un número que representa el área exacta de dicha función en el intervalo  $[a,b]$ .

Otro ejemplo corresponde en la práctica de medir una magnitud física en donde se acostumbra obtener valores aproximados por exceso (conjunto B), y por defecto (conjunto A), así la propiedad A.11 nos da la seguridad de la existencia de un valor que representa la medida exacta.

Ahora estamos en condiciones de introducir el sistema de los números reales mediante la vía de la axiomatización.

**DEFINICIÓN 1.7: (Sistema de los Números Reales)**

Un campo ordenado  $R \neq \{0\}$  que posee la propiedad de continuidad A.11 lo llamaremos: **Sistema de los Números Reales** y lo representamos con la letra  $\mathbb{R}$  (del latín realus), a sus elementos los llamaremos números reales.

Debemos aclarar que la condición  $\mathbb{R} \neq \{0\}$ , significa que el anillo debe poseer al menos un elemento distinto del nulo, claro está, además de poseer al mismo nulo. Esto se debe a que si  $\mathbb{R} = \{0\}$ , cumple de forma trivial todas las propiedades del A.1 al A.11, y en tal caso, el anillo  $\mathbb{R}$  no se "parece" al conjunto de los números reales que conocemos

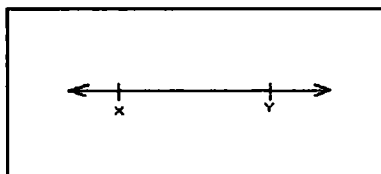
Por otro lado, observamos que como  $\mathbb{R} \neq \{0\}$  es un campo ordenado, posee la unidad  $1 \in \mathbb{R}$  con lo cual tenemos.

$1, 1+1, 1+1+1, \dots$  los cuales los podemos identificar con el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  respectivamente, de tal forma que  $\mathbb{N}$  está incluido en  $\mathbb{R}$ , al igual que los enteros  $\mathbb{Z}$ , al identificarlos adecuadamente con los elementos de  $\mathbb{R}$  siguientes:  $\dots, -1-1-1, -1-1, -1, 0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots$

Análogamente los racionales  $\mathbb{Q}$ , al utilizar la propiedad A.7 del inverso multiplicativo y la operación de multiplicación obtenemos la inclusión de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$

### Recta Real

De lo anterior, es evidente que  $\mathbb{R}$  es infinito y por la propiedad de continuidad (A.11), podemos identificar cada elemento de  $\mathbb{R}$  con un punto de una línea recta sin que falte un elemento de  $\mathbb{R}$ , ni que sobre un punto de la recta, por tal razón, al sistema de los números reales se le llama ocasionalmente Recta Real; y decir  $x < y$  es equivalente a afirmar que  $x$  está a la izquierda de  $y$ .



Observe que existen otros campos ordenados que no se identifican con  $\mathbb{R}$  de una forma biunívoca, como es el caso de los números racionales, los cuales constituyen un campo ordenado, así pues lo que marca la diferencia es la propiedad de continuidad (A.11), ya que en  $\mathbb{Q}$  se tienen conjuntos, A y B tales que para todo  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $x < y$ , más sin embargo no existe  $C \in \mathbb{Q}$  tal que  $x \leq C \leq y$ , para todo  $x \in A$  e  $y \in B$ . Tómese como ejemplo,  $B = \{y \in \mathbb{Q}^+ \text{ (racionales positivos) / } y^2 > 2\}$  y  $A = B^c$  (complemento de B). Estos elementos "c" que no pertenecen a los números racionales, pero que por la propiedad de completitud (A.11), si pertenecen a los números reales, forman un subconjunto de  $\mathbb{R}$  al cual llamaremos los Números Irracionales y lo denotaremos por  $\mathbb{I}$ .

Recordemos que esta presentación de los números reales es axiomática y que las propiedades A 1 a la A 11 constituye su sistema axiomático, de las cuales se deducen muchas otras propiedades, veamos algunas de ellas:

### **P.1. El Neutro Aditivo y Multiplicativo es Único**

#### PRUEBA.

Sea 0 el neutro aditivo de  $\mathbb{R}$  y sea  $\alpha$  un elemento de  $\mathbb{R}$  que cumple con la propiedad del neutro aditivo. Investiguemos quién es el elemento  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha + 0 && \text{(propiedad del neutro para 0)} \\ &= 0 && \text{(propiedad del neutro para } \alpha \text{)}\end{aligned}$$

con lo cual  $\alpha = 0$  y así 0 es el único neutro aditivo.

Similarmente se prueba para el neutro multiplicativo. ❖

**P.2. El Opuesto Aditivo y el Inverso Multiplicativo de un Elemento, es Único.**

PRUEBA:

Comprobemos la unicidad del inverso multiplicativo.

Sean  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $x^{-1}$  su inverso multiplicativo, sea además  $\alpha$  un número real tal que verifica

$$\begin{aligned}x\alpha &= 1, \text{ en tal caso } \alpha = 1\alpha && \text{(A.6)} \\ &= (x^{-1}x)\alpha && \text{(A.7)} \\ &= x^{-1}(x\alpha) && \text{(A.5)} \\ &= 1x^{-1} && \text{(propiedad de } \alpha \text{)} \\ \alpha &= x^{-1} && \text{(A.6)}\end{aligned}$$

Con lo cual  $\alpha$  resulta ser  $x^{-1}$ , así  $x^{-1}$  es único.

De manera análoga se prueba la unicidad del opuesto aditivo. ❖

**P.3. Para cualquier número real  $x$  se cumple que**

$$-(-x) = x \quad \text{y} \quad (x^{-1})^{-1} = x \quad \text{siempre que } x \neq 0.$$

PRUEBA:

En efecto, sabemos que  $x + (-x) = 0$  luego por A.3,  $x$  es el opuesto aditivo de  $(-x)$ , o sea  $x = -(-x)$ .

Similarmenete se prueba para el inverso del inverso multiplicativo. ❖

**P.4. Para todo número real  $x$  se tiene que  $x - x = 0$ , y**

**si  $x \neq 0$  tenemos  $\frac{x}{x} = 1$ .**

PRUEBA:

En efecto,  $x - x = x + (-x)$  (definición)

$$= 0 \quad (\text{A.3})$$

por otro lado  $\frac{x}{x} = xx^{-1}$  (definición)

$$= 1 \quad (\text{A.7}) \quad \text{❖}$$

**P.5. Para cualquier par de números reales  $x$ ,  $y$  se tiene que**

**$-x - y = -(x+y)$ ; y si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  tenemos que**

**$x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$ .**

PRUEBA:

Sólo probaremos la segunda igualdad:

$$xy(x^{-1}y^{-1}) = (xx^{-1})(yy^{-1}) \quad (\text{A.5 y A.8})$$

$$= (1) \cdot (1) \quad (\text{A.7})$$

$$= 1 \quad (\text{A.6})$$

luego  $x^{-1}y^{-1}$  es el inverso multiplicativo de  $xy$  así,

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad \text{❖}$$

**P.6. Las ecuaciones en  $x$ ,  $a+x = b$  y  $ax = b$  ( $a \neq 0$ ) poseen en  $\mathbb{R}$  solución  $x = b - a$  y  $x = \frac{b}{a}$  respectivamente, y dichas soluciones son únicas.**

PRUEBA:

Probemos que  $x = b - a$  es solución de  $a + x = b$ . En efecto

$$\begin{aligned} a + (b-a) &= (a-a) + b && \text{(A 1 y A.4)} \\ &= 0 + b && \text{(P.4)} \\ &= b && \text{(A.2)} \end{aligned}$$

con lo cual  $x = b - a$  es solución de  $a + x = b$

Ahora probemos la unicidad, consideremos :

$$\begin{aligned} a + x &= b \\ (a + x) + (-a) &= b + (-a) \\ (a + (-a)) + x &= b + (-a) && \text{(A 1 y A.4)} \\ (a - a) + x &= b - a && \text{(definición)} \\ 0 + x &= b - a && \text{(P.4)} \\ x &= b - a && \text{(A.2)} \end{aligned}$$

Con lo cual  $x = b - a$  es solución única de la ecuación  $a + x = b$ .

De manera similar se prueba la afirmación para  $ax = b$  ❖

**P.7. Para  $x, y, z \in \mathbb{R}$  se tiene que  $x(y-z) = xy - xz$ .**

PRUEBA:

En efecto,  $x(y-z) = x(y-z) + xz - xz$  (A.2, A.3)

- 19 -

$$= x(y-z+z) - xz \quad (\text{A.9})$$

$$= xy - xz \quad (\text{A.3})$$

lo que se quería probar. ❖

**P.8. Para cualquier número real  $x$ , se cumple que  $x0 = 0$ .**

PRUEBA:

$$x0 = x(y - y) \quad (\text{A.3})$$

$$= xy - xy \quad (\text{P.7})$$

$$= 0 \quad \text{lo que se quería probar.} \quad \text{❖}$$

**Observación:**

Nótese, que esta propiedad expresa que si un factor es nulo entonces el producto es nulo, es decir,  $x0 \neq 0$  es imposible que ocurra. De aquí se deduce que la unidad 1 es diferente del cero en  $\mathbb{R}$ ; en efecto, sea  $x \neq 0$  entonces  $x1 = x$  o sea  $x1 \neq 0$  y esto es imposible que ocurra si  $1 = 0$  con lo cual  $1 \neq 0$ .

**P.9. Si  $xy = 0$  entonces al menos uno de los factores es el elemento nulo.**

PRUEBA:

Supongamos que  $x \neq 0$  y que  $xy = 0$  entonces:

$$\frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(0) \quad \text{con lo cual} \quad y = 0.$$

Similarmente, si  $y \neq 0$  obtenemos  $x = 0$ .

Por lo tanto, si  $xy = 0$  entonces al menos uno de los factores es nulo. ❖

**Nota:** Esta propiedad es muy importante como un método para resolver ecuaciones polinomiales, para el caso en que se conozca su factorización.

Por ejemplo.  $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$(x + 1)(x + 2) = 0 \quad \text{y por P.9}$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$\text{con lo cual} \quad x = -1 \quad \quad x = -2 \quad \quad (\text{P.6})$$

**P.10.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  entonces.

$$\text{i) } \quad (-x)y = -xy; \quad \quad \text{ii) } \quad (-x)(-y) = xy.$$

PRUEBA:

$$\text{1) } \quad (-x)y = (-x)y + xy - xy \quad (\text{A.2, A.3})$$

$$= (-x + x)y - xy \quad (\text{A.9})$$

$$= -xy \quad (\text{A.3, P.8})$$

**Nota:** Para  $x = 1$  tenemos  $(-1)y = -y$

$$\text{ii) } \quad (-x)(-y) = -x(-y) \quad (\text{Por la parte 1) anterior})$$

$$= (-1)[x(-y)] \quad ( \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad )$$

$$= -1(-xy) \quad ( \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad )$$

$$= xy \quad ( \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad ) \quad \text{❖}$$

**Nota:** En lo que sigue, sólo daremos la justificación en aquellos pasos de cada prueba donde, a nuestro juicio, sea necesario o interesante hacerlas.

### Propiedades de las Fracciones

Ahora presentaremos unas propiedades relacionadas con fracciones, las cuales se deducen de los axiomas y propiedades anteriores.

**P.11.** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tal que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$  entonces,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si y sólo si } ad = bc.$$

PRUEBA:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b}(bd) &= \frac{c}{d}(bd) \end{aligned}$$

$$a(b^{-1}b)d = b(d^{-1}d)c \quad (\text{definición, A.5, A.8})$$

$$a(1)d = b(1)c$$

$$ad = bc. \quad \text{❖}$$

**Observación:** Como consecuencia de esta propiedad tenemos la simplificación de fracciones expresada en el siguiente:

**COROLARIO 1.1:**

Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$  con  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$  entonces  $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$

PRUEBA:

Consecuencia inmediata de P.11. ❖

La suma de fracciones la obtenemos de la siguiente propiedad.

**P.12. Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tal que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ ,**

$$\text{entonces } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

PRUEBA:

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{ad + bc}{bd} &= (ad + bc) \frac{1}{bd} \\ &= ad \left( \frac{1}{bd} \right) + bc \left( \frac{1}{bd} \right) \\ &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \end{aligned}$$

También obtenemos la regla para multiplicar fracciones como lo expresa la siguiente propiedad.

**P.13. Sean  $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$  tal que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

PRUEBA:

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } \frac{ac}{bd} &= ac \left( \frac{1}{bd} \right) \\ &= ac \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{d} \right) \quad (P.5) \\ &= \left[ a \left( \frac{1}{b} \right) \right] \left[ c \left( \frac{1}{d} \right) \right] \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \end{aligned}$$

**P14. Sea  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  dos números reales, entonces el inverso multiplicativo de  $\frac{a}{b}$  es  $\frac{b}{a}$ .**

PRUEBA:

En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} &= \frac{ab}{ba} && (P.13) \\ &= 1 && (A.8 \text{ y } P.4) \quad \text{✱}\end{aligned}$$

La división entre fracciones se puede expresar por

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \text{y su regla de operación se muestra en}$$

la siguiente propiedad.

**P.15. Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tal que  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$  entonces**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

PRUEBA:

$$\text{En efecto} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \quad (\text{definición})$$

$$\begin{aligned}&= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && (P.14) \\ &= \frac{ad}{bc} && \text{✱}\end{aligned}$$

Pasemos ahora a definir dos operaciones de importancia en el sistema de los números reales como lo son la potenciación y radicación

### Potencia y Radicación

**DEFINICIÓN 1.8: (Potencia de un Número Real)**

Sean  $b$  un número real y  $n$  un número natural. Al resultado de multiplicar  $b$  por sí mismo  $n$  veces se llama  $n$ -ésima potencia de  $b$  y se denota por  $b^n$ , en donde  $b^n = \underbrace{bbb \dots b}_n$  ( $n$  veces).

Al número  $b$  se le llama base y al natural  $n$  exponente.

Por definición entenderemos que  $b^0 = 1$  y  $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ .

**DEFINICIÓN 1.9: (Radicación)**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que  $b$  es la raíz  $n$ -ésima de  $a$  si  $b^n = a$  y lo denotaremos como:

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{o} \quad b = a^{\frac{1}{n}}, \quad \text{esto significa que} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Ahora estudiaremos algunas propiedades que se obtienen para estas operaciones.

**P.16 Sean  $m, n$  dos números enteros y  $b$  un número real no nulo entonces  $b^m b^n = b^{m+n}$**

PRUEBA.

Analicemos los posibles casos para  $m$  y  $n$

i) Si  $m = 0$  o  $n = 0$  el resultado es obvio.

ii) Si  $m$  y  $n$  son números naturales, tenemos:

$$b^m b^n = \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_m \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_n = b^{m+n} \quad (m+n \text{ veces})$$

iii) Si  $m > 0$  y  $n < 0$  hacemos  $p = -n > 0$  y así

$$b^m b^n = b^m b^{-p}$$

$$= \frac{b^m}{b^p} \quad \begin{array}{l} (m \text{ veces}) \\ (p \text{ veces}) \end{array}$$

para el caso en que  $m \geq p$  tenemos

$$b^m b^n = \frac{b^m}{b^p}$$

$$= b^{m-p}$$

$$b^m b^n = b^{m+n}$$

y si  $m < p$  se obtiene

$$\begin{aligned} b^m b^n &= \frac{b^m}{b^p} \\ &= \frac{1}{b^{p-m}} \\ &= b^{m-p} \\ &= b^{m+n} \end{aligned}$$

así, en todos los casos  $b^m b^n = b^{m+n}$ .

iv) Si  $m < 0$  y  $n > 0$  es trivial por la parte iii).

v) Si  $m < 0$  y  $n < 0$  hacemos  $m = -p$  y  $n = -q$  de tal

forma que  $b^m b^n = b^{-p} b^{-q}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b^p} \frac{1}{b^q} \\ &= \frac{1}{b^{p+q}} \\ &= b^{-(p+q)} \\ &= b^{m+n} \end{aligned}$$

**P.17. Bajo las condiciones de la propiedad anterior tenemos**

$$(b^m)^n = b^{mn}.$$

PRUEBA: Análoga a P.16. ❖

### Propiedades de Orden

Estudiemos las siguientes propiedades de orden que posee el sistema de los números reales.

**P.18. Transitividad de la relación de orden. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales cualesquiera. Si  $a > b$  y  $b > c$  entonces  $a > c$ .**

PRUEBA:

Como  $a > b$  y  $b > c$  entonces  $a - b > 0$  y  $b - c > 0$ , por lo tanto  $(a - b) + (b - c) > 0$  por A.10 (\*), pero  $(a - b) + (b - c) = a - c$ , de donde  $a - c > 0$ , lo que implica que  $a > c$ . ❖

**Observación:** En (\*) no se ha sumado miembro a miembro puesto que esto se probará mas adelante, lo que se ha hecho es que si  $a - b$  es positivo y  $b - c$  es positivo entonces  $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{D}$  por A.10.

**P.19. Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Si  $x > y$  entonces  $x + z > y + z$ .**

PRUEBA:

Debemos probar que  $(x + z) - (y + z) > 0$  En efecto, como  $x > y$  entonces  $x - y > 0$  pero

$$\begin{aligned}x - y &= x - y + z - z \\ &= (x + z) - (y + z)\end{aligned}$$

y así  $(x + z) - (y + z) > 0$  con lo cual  $x + z > y + z$ . ❧

**P.20. Propiedad de Tricotomía.**

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple:

- i)  $x > y$
- ii)  $x = y$
- iii)  $x < y$

PRUEBA:

Debemos probar que para  $x - y$  se cumple sólo una de las siguientes afirmaciones.

$$x - y > 0 \quad x - y = 0 \quad \text{o} \quad x - y < 0.$$

En efecto, si  $x - y = 0$  se tiene que  $x = y$  con lo que se cumple sólo ii).

Supongamos que  $x - y \neq 0$ , entonces por A.10 parte ii) se tiene que  $x - y > 0$  o  $-(x - y) > 0$  lo que es equivalente a que  $x > y$  o  $y > x$  con lo cual se concluye la prueba. ❧

**P.21. Siendo  $x, y, \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$  implica que  $-x > -y$**

PRUEBA:

Si  $x < y$  entonces  $y - x > 0$

por lo tanto  $(y - x) + (-y) > 0 + (-y)$  por P.19

con lo cual  $-x > -y$

lo que se quería probar

❖

A continuación presentamos la propiedad en la que podemos sumar miembro a miembro en una desigualdad.

**P.22. Para  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  y  $x < y$ ,  $z \leq w$  se cumple que**

$$x + z < y + w.$$

PRUEBA:

Como  $x < y$  y  $z \leq w$  entonces

$x+z < y+z$  y  $z+y \leq w+y$  (P.19) y por la propiedad

transitiva (P.18) se concluye que  $x + z < w + y$ . ❖

**P.23. Siendo  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  y  $x < y$  y  $z \geq w$  se tiene que**

$$x - z < y - w.$$

PRUEBA:

En efecto,  $z \geq w$  luego por P.21  $-w \geq -z$  y por propiedad anterior  $x - z < y - w$ . ❖

Las siguientes propiedad nos muestra la forma como podemos multiplicar a una desigualdad.

**P.24. Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Si  $z > 0$  y  $x < y$  entonces,  $xz < zy$ . Además, si  $z < 0$  y  $x < y$  entonces  $xz > zy$ .**

PRUEBA:

Para la condición  $z > 0$ , la prueba se hace similar que para la condición  $z < 0$ . Por lo tanto veamos, sólo la prueba para el caso en que  $z < 0$ .

Si  $z < 0$  entonces por P.21  $-z > 0$  (1), además siendo  $x < y$  se tiene que  $y - x > 0$  (2).

De (1), (2) y A.10 (111)  $(y-x)(-z) > 0$  luego

$$y(-z) - x(-z) > 0 \quad (\text{P.7})$$

$$-yz + xz > 0 \quad (\text{P.10})$$

$$xz > yz \quad (\text{A.10}) \quad \text{❖}$$

Del axioma A.10 y la propiedad P.24 obtenemos la conocida ley de los signos para el producto de números reales.

- i) Si  $a > 0$  y  $b > 0$  entonces  $ab > 0$  (A.10)
- ii) Si  $a < 0$  y  $b < 0$  entonces por P.24 y para el caso en que  $x = a$ ,  $y = 0$  y  $z = b$  se tiene que  $ab > 0$ .
- 111) Si  $a > 0$  y  $b < 0$  o bien  $a < 0$  y  $b > 0$  entonces por la propiedad P.24 para el caso en que  $x = 0$ ,  $y = a$  y  $z = b$  se tiene que  $ab < 0$ .

**P.25. El número real 1 (la unidad) es mayor que el nulo.**

PRUEBA:

En efecto, por la observación dada en P.8 se tiene que  $1 \neq 0$ , luego por la ley de los signos y A.6,  $1 = 1 \cdot 1 > 0$  de lo que resulta que  $1 > 0$ . ❖

### VALOR ABSOLUTO

Un concepto muy importante en una introducción al análisis matemático es el de valor absoluto y sus propiedades, por lo tanto daremos dicha definición y mostraremos sus propiedades más sobresalientes.

#### **DEFINICIÓN 1.10: (Valor Absoluto)**

Para cualquier número real  $x$ , se define el valor absoluto de  $x$  (o el módulo de  $x$ ) y se denota como  $|x|$  al

número, 
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de  $x$ , se puede entender en ocasiones como  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

### Propiedades Básicas del Valor Absoluto

Daremos una lista de las propiedades y seguidamente haremos la prueba de aquellas cuyas demostración consideremos interesante.

Para todo número real  $x$ ,  $y$  se tiene

$$\text{P.26 } |x| \geq 0 ; |x| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0 ; |x| = |-x| ; \\ x \leq |x| ; -x \leq |x| \text{ además } -|x| \leq x \leq |x|.$$

$$\text{P.27 } |xy| = |x| |y|$$

$$\text{P.28 } |x+y| \leq |x| + |y| \text{ desigualdad triangular}$$

$$\text{P.29 } ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

#### PRUEBA

P.26. Esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de valor absoluto y considerando los casos en que  $x \geq 0$  y  $x < 0$ . ❧

P.27. Esta también se deduce de la definición de valor absoluto.

Si  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  entonces  $xy \geq 0$  y así  $|x| = x$ ,  $|y| = y$ , y  $|xy| = xy$  luego se cumple que  $|xy| = |x| |y|$ .

Si  $x \geq 0$  y  $y < 0$  entonces  $xy \leq 0$  y así  $|x| = x$ ,  $|y| = -y$  y  $|xy| = -xy$  con lo cual se cumple que  $|xy| = |x| |y|$ .

Finalmente, si  $x < 0$  y  $y < 0$  entonces  $xy > 0$  y así  $|x| = -x$ ,  $|y| = -y$  y  $|xy| = xy$  de donde  $|xy| = (-|x|) (-|y|) = |x| |y|$ . ❧

**P.28. Desigualdad Triangular:**

$|x+y| \leq |x| + |y|$ . Sabemos por P.26 que  $x \leq |x|$ ,  $-x \leq |x|$ ,  
 $y \leq |y|$  y que  $-y \leq |y|$ , por lo tanto  $x + y \leq |x| + |y|$  (1),  
además  $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$  (2)

$$\text{Por otro lado } |x + y| = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \geq 0 \\ -(x + y) & \text{si } x + y < 0 \end{cases}$$

así que  $|x + y|$  debe de coincidir, ya sea con  $x + y$  o con  
 $-(x + y)$ , en todo caso por las relaciones (1) o (2) se  
concluye  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .      ❖

**P.29.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$**

$$\begin{aligned} \text{Observe que } |x| - |y| &= |(x - y) + y| - |y| \\ &\leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|, \end{aligned}$$

es decir  $|x| - |y| \leq |x - y|$

$$\begin{aligned} \text{Análogamente, } -(|x| - |y|) &= |y| - |x| \\ &= |(y - x) + x| - |x| \\ &\leq |y - x| + |x| - |x| \\ &= |y - x| = |x - y| \end{aligned}$$

es decir  $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$ .

Al igual que en la prueba anterior,  $||x| - |y||$   
debe coincidir con  $|x| - |y|$  o con  $-(|x| - |y|)$   
y en cualquiera de los casos obtenemos

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad \text{❖}$$

Como hemos expresado anteriormente, la presentación de los números reales ofrecida en este trabajo, es una axiomática. Existen construcciones que proporcionan modelos de los Números Reales, los cuales cumplen con nuestra definición, por ejemplo las que se obtienen por Cortaduras de Dedekind, Intervalos encajados, Sucesiones de Cauchy, etc.

Surge, luego una interrogante. ¿Existen, pues varios sistemas numéricos a los cuales llamamos sistema de números reales? es decir ¿el conjunto obtenido por Cortaduras de Dedekind es diferente, por ejemplo al obtenido por las Sucesiones de Cauchy?

A pesar de la diversidad de caminos, el sistema obtenido es **único**, salvo por isomorfismo (los interesados en una demostración de esta afirmación, ver bibliografía 10) Esto significa que el conjunto que se obtiene por los diferentes caminos es siempre un Campo Ordenado Continuo (posee las propiedades A.1 - A.11).

### **La Recta Numérica Extendida**

A menudo es conveniente agregar a  $\mathbb{R}$  dos elementos que denotamos por  $+\infty$  y  $-\infty$  (mas infinito y menos infinito) que están sujetas a las reglas:

$$-\infty < +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) (+\infty) = -\infty.$$

Las operaciones de  $(+\infty) + (-\infty)$  no esta definida al igual que  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Además, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos por definición que  $-\infty < x < +\infty$  y se cumplen las operaciones siguientes:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$$

$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Si } x > 0 : x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \text{ y } x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$$

$$\text{Si } x < 0 : x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \text{ y } x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$$

**DEFINICIÓN 1.11:**

Llamaremos recta numérica extendida o conjunto extendido de los números reales al conjunto  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

A  $(+\infty)$  y  $(-\infty)$  se les llama números infinitos mientras que a un  $x \in \mathbb{R}$  se le llama número finito.

### Intervalos y Entornos

#### DEFINICIÓN 1.12: (Intervalo)

Sea  $I$  un subconjunto no vacío de números reales.

Diremos que  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , si  $I$  contiene a todo  $x$  tal que  $a < x < b$ , para todo  $a, b \in I$ .

Si  $a \leq b$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  entonces:

- i) El conjunto  $[a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}$  se llama segmento de recta numérica extendida o intervalo cerrado. Si  $a = b$  el segmento  $[a, b]$  está formado por un punto.
- ii) El conjunto  $(a, b) = \{x / a < x < b\}$  se llama intervalo o intervalo abierto.

El intervalo  $(a, b)$  se llama interior del segmento  $[a, b]$

- iii) A los conjuntos  $[a, b) = \{x / a \leq x < b\}$  y  $(a, b] = \{x / a < x \leq b\}$  se les llaman intervalos semiabiertos.

En general, a todos los conjuntos definidos anteriormente se le conoce con el nombre de intervalos de extremos  $a$  y  $b$ . Al número  $a$  se le llama extremo inferior y al  $b$  extremo superior y a los puntos  $x$  tales que  $a < x < b$  se llaman puntos interiores.

Si  $a$  y  $b$  son finitos ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) entonces  $b - a$  es la longitud del intervalo, y si al menos uno de los números  $a$  y  $b$  es infinito, entonces el intervalo se le dice infinito. El

conjunto de los números reales se puede representar por medio del intervalo infinito  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

**Propiedad:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$ . Si  $x, y$  pertenecen a un intervalo de extremos  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces  $[x, y]$  está incluido en este intervalo.

PRUEBA: (por definición).      ❖

A continuación definiremos el concepto de Entorno.

**DEFINICIÓN 1.13: (Entorno o Vecindad)**

Sea  $a \in \mathbb{R}$ , se llama  $\epsilon$ -entorno  $U(a, \epsilon)$ , con  $\epsilon > 0$ , del número  $a$ , al intervalo  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ .

Para los casos en que  $a = +\infty$ , entonces

$$U(+\infty, \epsilon) = \left( \frac{1}{\epsilon}, +\infty \right] \text{ y si } a = -\infty, U(-\infty, \epsilon) = \left[ -\infty, -\frac{1}{\epsilon} \right)$$

Observe que para  $a = +\infty$  o  $a = -\infty$ , la definición da la idea de un pedazo de  $\mathbb{R}$  en el extremo derecho y en el izquierdo respectivamente.

**Propiedad:**

- 1) Si  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$  entonces  $U(a, \epsilon_1) \subset U(a, \epsilon_2)$
- 2) Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , entonces existen  $\epsilon_1 > 0$ ,  $\epsilon_2 > 0$  tal que  
$$U(a, \epsilon_1) \cap U(b, \epsilon_2) = \emptyset.$$

PRUEBA:

1) Por definición tenemos que

$$U(a, \epsilon_1) = (a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \text{ y } U(a, \epsilon_2) = (a - \epsilon_2, a + \epsilon_2).$$

Por otro lado, al ser  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$  tenemos que  $a - \epsilon_2 < a - \epsilon_1 < a + \epsilon_2$  y además  $a - \epsilon_2 < a + \epsilon_1 < a + \epsilon_2$  lo que significa que tanto  $a - \epsilon_1$  como  $a + \epsilon_1$  pertenecen al intervalo  $U(a, \epsilon_2) = (a - \epsilon_2, a + \epsilon_2)$ . Luego por la propiedad anterior se tiene  $U(a, \epsilon_1) \subset U(a, \epsilon_2)$ . ❖

Para la parte 2), basta con tomar  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = \frac{b - a}{2}$  con lo que se verifica  $U(a, \epsilon_1) \cap U(b, \epsilon_2) = \emptyset$ .

### Ínfimo y Supremo

**DEFINICIÓN 1.14: (Conjunto Acotado Superior e Inferiormente)**

i) Si  $A \subset \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{R}$  es tal que  $a \leq b$  para toda  $a \in A$  entonces  $b$  se denomina **cota superior** de  $A$ .

ii) Si  $A \subset \mathbb{R}$  tiene una cota superior, se dice que  $A$  está **acotado superiormente**.

Similarmenete se define **cota inferior y acotado inferiormente**.

**DEFINICIÓN 1.15: (Conjunto Acotado)**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , diremos que  $A$  está acotado si lo está inferior y superiormente.

**NOTA:** 1) Asumiremos por definición que  $\emptyset$  está acotado.

2) Diremos que  $A \subset \mathbb{R}$ , esta acotado si existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $A \subset [a, b]$ .

**Ejemplos:**

$(1, 4]$  es un conjunto acotado

$[1, +\infty)$  es un conjunto acotado inferiormente.

$(-\infty, 4)$  es un conjunto acotado superiormente.

$(-\infty, +\infty)$  es un conjunto no acotado

**DEFINICIÓN 1.16: (Ínfimo y Supremo de un Conjunto)**

i) Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , diremos que  $c \in \mathbb{R}$  es el **ínfimo de A** y lo denotaremos **Inf A**; si  $c$  es cota inferior de  $A$  y si no existe una cota inferior de  $A$  mayor que  $c$ .

ii) Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , diremos que  $b \in \mathbb{R}$  es el **supremo de A** y lo denotaremos **Sup A**; si  $b$  es cota superior de  $A$  y si no existe una cota superior de  $A$  menor que  $b$ .

**DEFINICIÓN 1.17: (Mínimo y Máximo de un Conjunto)**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , diremos que:

i)  $a \in A$  es el número mínimo de  $A$  o el menor de  $A$  si para todo  $x \in A$ ,  $a \leq x$ .

ii)  $b \in A$  es el número máximo de  $A$  o el mayor de  $A$  si para todo  $x \in A$ ,  $x \leq b$ .

**Nota:** El mínimo de un conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  es una cota inferior al igual que el máximo es una cota superior. Más aún, el mínimo de un conjunto es también el ínfimo, lo mismo que el máximo es igualmente el supremo.

**PROPOSICIÓN 1.1: (Caracterización del Ínfimo y Supremo)**

**a) Supremo:** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , el número real  $b$  es el  $\text{Sup } A$  si:

1) para todo  $x \in A$ ,  $x \leq b$

11) para todo  $b' \in \mathbb{R}$  tal que  $b' < b$ , existe  $x \in A$  tal que  $b' < x \leq b$ . Dicho de otra forma, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $b - \epsilon < x \leq b$ .

(observe que  $b' = b - \epsilon$ )

**b) Ínfimo:** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , el número real  $a$  es el  $\text{Inf } A$  si:

i) para todo  $x \in A$ ,  $a \leq x$ .

11) para todo  $a' \in \mathbb{R}$  tal que  $a < a'$ , existe  $x \in A$  tal que  $a \leq x < a'$ . Expresado de otra forma, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $a \leq x < a + \epsilon$ .

**PROPOSICIÓN (Caracterización de los conjuntos acotados):**

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío está acotado si y sólo si, existe  $M > 0$  tal que para toda  $a \in A$ ,  $|a| \leq M$ .

PRUEBA:

⇐) Supongamos que existe  $M > 0$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $|a| \leq M$  entonces  $-M \leq a \leq M$  con lo cual  $A$  está acotada superiormente por  $M$  e inferiormente por  $-M$  por lo cual  $A$  está acotado.

⇒) Supongamos que  $A \subset \mathbb{R}$  es no vacío y acotado, entonces existen números  $c$  y  $c'$  tales que  $c' \leq a \leq c$  para toda  $a \in A$ .

Si  $c' \geq 0$  y  $c > 0$  entonces hacemos  $M = c > 0$ , con lo cual; para todo  $a \in A$ ,  $0 \leq c' \leq a \leq c = M$  por lo tanto  $|a| = a \leq M$ .

Si  $c' < 0$  y  $c \leq 0$  entonces hacemos  $M = -c' > 0$  con lo cual, para todo

$a \in A$ ,  $c' \leq a \leq c \leq 0$  o sea  $0 \leq -c \leq -a \leq -c'$ , entonces  $|a| = -a \leq -c = M$ .

Finalmente, si  $c' < 0$  y  $c > 0$  entonces tenemos:

a) para todo  $a \in A$  tal que  $a \geq 0$ ,  $|a| = a \leq c$  con  $c > 0$ .

b) para todo  $a \in A$  tal que  $a \leq 0$ ,  $|a| = -a \leq -c'$  con  $-c' > 0$  por lo cual, tomando  $M = \text{Sup}\{-c', c\}$  tenemos que para todo  $a \in A$ ,  $|a| \leq M$

En todo caso se cumple la proposición. ❖

**PROPOSICIÓN 1.2:**

El Supremo y el Ínfimo de un conjunto son únicos.

PRUEBA.

Supongamos  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , y  $b, b'$  dos números reales tales que  $\text{Sup } A = b$  y  $\text{Sup } A = b'$ , entonces para todo  $a \in A$ ,  $a \leq b$  o sea que  $b$  es una cota superior de  $A$  y como  $\text{Sup } A = b'$  entonces  $b' \leq b$  [1]

Además, para todo  $a \in A$ ,  $a \leq b'$ , o sea que  $b'$  es una cota superior de  $A$ , y como  $\text{Sup } A = b$  entonces  $b \leq b'$  [2]

De [1] y [2] se obtiene que  $b = b'$  es decir, que si existe el supremo este es único

Similarmente se obtiene el resultado para el ínfimo ❖

**TEOREMA 1.1: (Teorema del Supremo)**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  tal que  $A \neq \emptyset$  posee cota superior entonces existe el  $\text{Sup } A$ .

PRUEBA:

Sea  $A \neq \emptyset$  un conjunto de números reales acotado superiormente y sea además

$B := \{b \in \mathbb{R} / b \text{ es cota superior de } A\}$ ,  
como  $A$  está acotado superiormente entonces  $B \neq \emptyset$

Por definición de  $B$  se tiene que para cada elemento  $b \in B$  y para cualquier elemento  $a \in A$  se cumple la desigualdad  $a \leq b$  por lo tanto, existe un número  $c$  tal que  $a \leq c \leq b$  para todo  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

La desigualdad  $a \leq c$  muestra que  $c$  es una cota superior de  $A$ , y la desigualdad  $c \leq b$  muestra que  $c$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ , por lo cual  $c = \text{Sup } A$ . ❖

Mostraremos que la proposición anterior es equivalente al **axioma de completitud**, ya que muchas veces, es más cómodo trabajar con esta proposición que con el Axioma

**TEOREMA 1.2:**

La propiedad del Supremo es equivalente al **axioma de completitud**.

PRUEBA.

⇐) Esta implicación ya fue demostrada.

⇒) Sean  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  dos conjuntos no vacíos, en los cuales para dos elementos cualesquiera  $a \in A$  y  $b \in B$  se cumple la desigualdad  $a \leq b$ . Debemos probar que existe un número  $c$  tal que  $a \leq c \leq b$  para cualquiera que sean  $a \in A$  y  $b \in B$ .

En efecto, como  $a \leq b$  se tiene que  $A$  está acotado superiormente por cualquier elemento de  $B$  por lo cual existe el  $\text{Sup } A$  el cual denotamos por  $c$ , luego por la propiedad del Supremo se tiene que  $a \leq c$  para toda  $a \in A$  ( $c$  es cota superior de  $A$ ) y además  $c \leq b$  para toda  $b \in B$  ( $c$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ ) con lo cual  $a \leq c \leq b$ , lo que concluye la prueba. ❖

**TEOREMA 1.3: (Teorema del Ínfimo)**

Si  $B \subset \mathbb{R}$  es no vacío y acotado inferiormente, entonces  $B$  tiene Ínfimo.

PRUEBA:

Sea  $A := \{a \in \mathbb{R} / a \text{ es cota inferior de } B\}$ . Como  $B$  está acotado inferiormente, entonces existe  $a \in A$  con lo cual  $A \neq \emptyset$ .

Por otro lado, para toda  $a \in A$ ,  $a \leq b$  con  $b \in B$ , así  $A$  está acotado superiormente y por el teorema anterior existe  $\text{Sup } A$ .

Note que  $\text{Sup } A$  es cota inferior de  $B$  puesto que como  $b \in B$  es cota superior de  $A$  y  $\text{Sup } A$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ , se tiene que  $\text{Sup } A \leq b$  para todo  $b \in B$ . Por otro lado, si  $a$  es una cota inferior de  $B$ ,  $a \leq \text{Sup } A$  o sea  $\text{Sup } A$  es la mayor de las cotas inferiores de  $B$ , luego  $\text{Sup } A = \text{Inf } B$ . ❧

Tomando la proposición anterior como hipótesis, se logra probar de manera similar el **axioma de completitud**, lo que prueba la equivalencia del axioma con la proposición.

**TEOREMA 1.4: (Teorema de Dedekind)**

Supongamos  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tales que:

- 1)  $A \cup B = \mathbb{R}$ .
- 2)  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ .

3) Si  $a \in A$  y  $b \in B$  entonces  $a < b$ .

Entonces existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que si  $x > \alpha$  entonces  $x \in B$  y si  $x < \alpha$  entonces  $x \in A$ .

PRUEBA:

Por hipótesis  $A \neq \emptyset$  y por 3), cada elemento  $b \in B$  es cota superior de  $A$  luego por el **teorema del supremo** existe  $\alpha = \text{Sup } A$ .

Sea  $x < \alpha$  entonces por definición de supremo,  $x$  no es cota superior de  $A$ , entonces  $x \in A$  ya que de lo contrario, se tendría que  $x \in B$ , lo que implicaría que  $x$  fuera una cota superior de  $A$ , lo que sería una contradicción.

Sea  $\alpha < x$  entonces  $x \in B$  ya que si  $x \in A$  entonces  $x \leq \alpha$  (por ser  $\alpha = \text{Sup } A$ ) lo que sería una contradicción

De lo anterior se concluye lo que se quería probar. ❖

Esta proposición, también es equivalente al **axioma de completitud**. Para ver esta equivalencia se debe probar el axioma usando como hipótesis el teorema anterior.

PRUEBA:

En efecto, sea  $A'$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  y acotado superiormente por  $b \in \mathbb{R}$ . Si  $b \in A'$  entonces  $b$  es el máximo de  $A'$ , con lo cual  $b = \text{Sup } A'$ .

---

<sup>1</sup> Ver nota después de la definición de Mínimo y Máximo de un conjunto.

Supongamos que  $A'$  no posee ninguna de sus cotas superiores, y sea  $B := \{b \in \mathbb{R} / b \text{ es cota superior de } A'\}$  el cual no es vacío, y sea además  $A := B^c$  entonces  $A' \subset A$  y por lo tanto  $A$  distinto del vacío.

Por otro lado, para todo  $a \in A$  existe  $a' \in A'$  tal que  $a \leq a'$  ya que de lo contrario un  $a \in A$  sería cota superior de  $A'$ , o sea que  $a \in B$ , lo que es una contradicción

Sea  $a \in A$  y  $b \in B$  entonces existe  $a' \in A'$  tal que  $a \leq a'$  pero  $a' \leq b$  con lo cual  $a < b$ .

De lo anterior y por el teorema Dedekind existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que si  $x > \alpha$  entonces  $x \in B$  y si  $x < \alpha$  entonces  $x \in A$ .

Ahora, si  $x \in A'$  entonces  $x \in A$ , luego  $x \leq \alpha$  puesto que lo contrario,  $x > \alpha$ , nos lleva a la contradicción de que  $x \in B$ , por lo tanto  $\alpha$  es una cota superior de  $A'$ .

Si  $\gamma$  es una cota superior de  $A'$  entonces  $\gamma \in B$  y  $\alpha \leq \gamma$  puesto que lo contrario,  $\alpha > \gamma$  implicaría  $\gamma \in A$ , lo que es una contradicción, por lo tanto  $\alpha$  es la menor de las cotas superiores de  $A'$ .

De lo anterior, el  $\text{Sup } A'$  existe y es  $\alpha$  con lo cual queda demostrado que el teorema del supremo es equivalente al **axioma de completitud**. ❖

Entre los conceptos de cota inferior, cota superior, ínfimo, supremo, mínimo y máximo, existe una estrecha semejanza en sus respectivas definiciones, la que se pone en evidencia en la siguiente pregunta: ¿Qué relación de orden existe entre  $a$  y  $b$  si:

- a)  $a = \text{Inf } A$  y  $b$  es una cota inferior de  $A$ ?
- b)  $a = \text{Sup } A$  y  $b$  es una cota superior de  $A$ ?
- c)  $a = \text{Sup } A$  y  $b = \text{Inf } A$ ?
- d)  $a$  es cota inferior de  $A$  y  $b = \text{Sup } A$ ?
- e)  $a$  es el máximo de  $A$  y  $b = \text{Sup } A$ ?
- f)  $a$  es el mínimo de  $A$  y  $b = \text{Inf } A$ ?
- g)  $a$  es el mínimo de  $A$  y  $b$  es una cota inferior?
- h)  $a$  es el máximo de  $A$  y  $b$  es una cota superior?

Con relación a conjuntos acotados, es interesante pensar en la pregunta ¿Todo conjunto infinito es no acotado?. Es tentador el querer contestar afirmativamente, pero el intervalo  $[0, 5)$  nos aclara que la respuesta es negativa.

**PROPOSICIÓN 1.3:**

Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  no vacíos y acotados superiormente y  $A = \{x / x = a_1 + a_2 \text{ con } a_1 \in A_1 \text{ y } a_2 \in A_2\}$ , entonces  $\text{sup } A = \text{sup } A_1 + \text{sup } A_2$ .

PRUEBA:

Sea  $\alpha_1 = \text{Sup } A_1$  y  $\alpha_2 = \text{Sup } A_2$ . Debemos probar que

$$\text{sup } A = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

En efecto, para todo  $a_1 \in A_1$  y para todo  $a_2 \in A_2$ ,  
 $a_1 \leq \alpha_1$  y  $a_2 \leq \alpha_2$  por lo tanto  $a_1 + a_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2$  con lo cual  
 $\alpha_1 + \alpha_2$  es una cota superior de  $A$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existen  $a_1 \in A_1$  y  $a_2 \in A_2$  tal que  
 $\alpha_1 - \epsilon/2 < a_1 \leq \alpha_1$  y  $\alpha_2 - \epsilon/2 < a_2 \leq \alpha_2$  con lo cual

$(\alpha_1 + \alpha_2) - \epsilon < a_1 + a_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2$ . Así pues,  $\text{sup } A = \alpha_1 + \alpha_2$ . ❖  
~~A~~

### **Propiedad Arquimediana**

La propiedad Arquimediana es una consecuencia del  
**axioma de completitud**, como lo veremos a continuación.

### **Principio de Arquímedes (P. de A.)**

Cualquiera que sea el número real  $a$ , existe un natural  
 $n$  tal que  $n > a$ .

PRUEBA:

Supongamos que el P. de A. no se cumple, es decir que  
existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq a$ . Esto significa  
que  $\mathbb{N}$  es un conjunto no vacío y acotado superiormente por  $a$ ,  
por lo tanto, existe el supremo de  $\mathbb{N}$  que denotaremos por  $b$   
( $\text{Sup } \mathbb{N} = b$ ).

Como  $b - 1 < b = \sup \mathbb{N}$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $b - 1 < n \leq b$  con lo cual  $b < n + 1$ , con  $n+1 \in \mathbb{N}$  lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > a$ . ❖

**COROLARIO 1.2: (Propiedad Arquimediana)**

Para todo número real  $x > 0$  y para todo número real  $y$  se tiene que existe un natural  $n$  tal que  $y < n x$ .

PRUEBA.

Si  $y \leq 0$  basta con tomar  $n = 1 \in \mathbb{N}$ .

Si  $y > 0$  entonces para el número real  $\frac{y}{x}$  (positivo) existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > \frac{y}{x}$  con lo cual  $y < nx$ . ❖

El corolario anterior se le conoce con el nombre de Propiedad Arquimediana, la cual es de mucha importancia en la inferencia de resultados tales como la convergencia de la sucesión  $(\frac{1}{n})$ , y por ende todas las aplicaciones que de esta sucesión se conocen.

La propiedad Arquimediana en  $\mathbb{R}$  es deducida del **axioma de completitud**, pero no son equivalentes, ya que el conjunto de los números racionales en donde no se satisface el **axioma de completitud**, posee la propiedad Arquimediana enunciada de la siguiente manera:

**PROPOSICIÓN 1.4: (Propiedad Arquimediana en  $\mathbb{Q}$ )**

Si  $a > 0$  y  $b$  son dos números racionales cualesquiera, entonces hay un natural  $n$  tal que  $na \geq b$ .

PRUEBA:

Observe que si  $b \leq a$  entonces basta con tomar  $n = 1$  y se tiene  $1a \geq b$  y el enunciado queda probado.

Supongamos que  $0 < a < b$ , como  $a$  y  $b$  son racionales positivos, ellos pueden ser escritos como  $a = \frac{m}{n}$ ,  $b = \frac{p}{q}$  con  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  y  $q \neq 0$ , y sin pérdida de generalidad podemos suponer  $m, n, p$  y  $q$  positivos.

Como  $a = \frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$  y  $b = \frac{np}{nq}$ , entonces tanto  $a$  como  $b$  se pueden tomar con igual denominador, por lo tanto, sea

$a = \frac{m}{d}$  y  $b = \frac{n}{d}$  con lo cual, tomando  $n_0 = nd \in \mathbb{N}$  tenemos

$$n_0 a = nd \left( \frac{m}{d} \right) = nm \geq n \geq \frac{n}{d} = b \text{ o sea, } n_0 a \geq b. \quad \text{***}$$

**PROPOSICIÓN 1.5: (Densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ )**

Si  $a$  y  $b$  son números reales con  $a < b$ , entonces existe un número racional  $r$  tal que  $a < r < b$ .

PRUEBA.

Como  $b-a > 0$  entonces, por la Propiedad Arquimediana existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n(b-a) > 1$  o sea,  $nb > na+1$ .

Consideremos  $a > 0$  y el conjunto  $A := \{m \in \mathbb{N} / m > na\}$ ,  $A$

es distinto del vacío (Propiedad Arquimediana) y subconjunto

de  $\mathbb{N}$ , por lo tanto  $A$  posee un primer elemento al cual lo llamaremos  $p$ , por lo tanto  $p > na > p-1$ .

Tenemos  $nb > na+1$  y  $p > na > p-1$  entonces

$nb > na+1 > p > na$  haciendo  $r = \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$  o sea  $p = rn$

tenemos  $nb > rn > na$  lo que equivale a tener  $a < r < b$  con  $r \in \mathbb{Q}$ .

Este resultado es válido en el caso que  $a > 0$ .

Consideremos ahora que  $a = 0$  entonces, tenemos  $0 < \frac{b}{2} < b$

con  $\frac{b}{2} > 0$  entonces por el caso anterior existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal

que  $0 < \frac{b}{2} < r < b$  y así  $a < r < b$ .

Si  $a < 0$  y  $b > 0$  tenemos  $a < 0 < b$ . Tomando  $r = 0 \in \mathbb{Q}$  se concluye que existe  $r$  tal que  $a < r < b$ .

Finalmente  $a < 0$  y  $b < 0$ , tenemos  $a < b < 0$  lo que implica  $-b < -a$  con  $-b > 0$ , luego por el primer caso, tenemos que existe  $-r \in \mathbb{Q}$  tal que  $-b < -r < -a$ , lo que equivale a tener  $r \in \mathbb{Q}$  con  $a < r < b$ . Lo que prueba la proposición.  $\text{✱}$

### **COROLARIO 1.3:**

Para todo número real  $x > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{n} < x .$$

#### **PRUEBA:**

Sea  $x$  un número real positivo y  $1 \in \mathbb{R}$  la unidad, entonces existe un número natural  $n$  tal que  $1 < nx$  con lo

cual  $\frac{1}{n} < x$ . ✱

**PROPOSICIÓN 1.6:**

Probar que si  $A = \{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \}$  entonces  $\text{Inf } A = 0$

PRUEBA:

Como para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n} > 0$  entonces 0 es una cota inferior de A.

Finalmente, para todo  $\epsilon > 0$  y  $1 \in \mathbb{R}$  tenemos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1 < n\epsilon$  con lo cual

$$\frac{1}{n} < \epsilon, \left( \frac{1}{n} < 0 + \epsilon \right).$$

Por lo tanto  $\text{Inf } A = 0$ . ✱

**Principio de los Intervalos Encajados.**

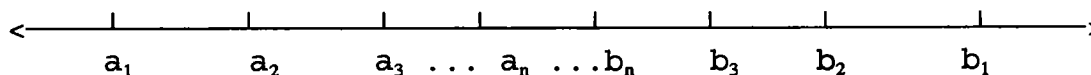
Definiremos, el significado de segmentos (intervalos cerrados) encajados.

**DEFINICIÓN 1.18: (Segmentos Encajados)**

Llamaremos sistema de segmentos encajados al conjunto de segmentos  $I_1 = [a_1, b_1]$ ,  $I_2 = [a_2, b_2]$ ,  $I_3 = [a_3, b_3]$ , ...

$I_n = [a_n, b_n]$ , ... con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  y  $n = 1, 2, 3, \dots$  tales que

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \dots$  es decir,  
 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$ .



Sabemos que si  $A \subset B$  entonces  $A \cap B = A$  por lo que se sospecha que del sistema de segmento anterior,  $I = \bigcap_{k=1}^n I_k$  debe tener el intervalo "más incluido" de todos, pero estos intervalos son infinitos, de lo cual, se puede preguntar si  $I = \emptyset$  o  $I \neq \emptyset$ . El siguiente teorema, conocido también como la continuidad de  $\mathbb{R}$  versión G Cantor, nos aclara la duda

**PROPOSICIÓN 1.7:**

Para cualquier sistema de segmentos encajados existe al menos un número que pertenece a todos los segmentos.

PRUEBA:

Sea  $S = \{I_n \subset \mathbb{R} / I_n = [a_n, b_n] \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$  un sistema de intervalos encajados. Sea además  $A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$  y  $B = \{b_n / n \in \mathbb{N}\}$ . Tanto A como B son conjuntos de números reales acotados: A superiormente por  $b_n$  y B inferiormente por  $a_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto existe  $\text{Sup } A = a$  y el  $\text{Inf } B = b$ .

Como  $a = \text{Sup } A$  entonces a es la menor de todas las cotas superiores, es decir  $a_n \leq a \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que a es cota inferior de B y siendo  $b = \text{Inf } B$  entonces  $a \leq b \leq b_n$  por lo tanto  $a_n \leq a \leq b \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De lo anterior, para todo  $x \in [a, b]$ ,  $a \leq x \leq b$  por lo que  $a_n \leq x \leq b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y así  $x \in [a_n, b_n]$  para todo

$n$ , lo que prueba la proposición. Más aún, hemos probado que

$$[a, b] \subset I = \bigcap_{n \geq 1} I_n \text{ y si } x \in I \text{ tenemos } a_n \leq x \leq b_n \text{ para todo}$$

$n \in \mathbb{N}$  es decir,  $x$  es cota superior de  $A$  y cota inferior de  $B$  con lo cual  $a \leq x \leq b$  y así  $x \in [a, b]$  o sea  $I \subset [a, b]$  lo que prueba más precisamente que  $[a, b] = I$ . ❖

**DEFINICIÓN 1.19:**

Dado el sistema  $S$ , definido como en la proposición anterior, diremos que la longitud  $|I_n| = b_n - a_n$  de los segmentos de  $S$  tiende a cero si:

Para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $n_0$  (que depende del  $\epsilon$ ) tal que  $|I_n| = b_n - a_n < \epsilon$  siempre que  $n \geq n_0$

**LEMA 1.1:**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , si para todo  $\epsilon > 0$ ,  $|a - b| < \epsilon$  entonces  $a = b$ .

PRUEBA:

Supongamos que  $a \neq b$  entonces,  $|a - b| > 0$  con lo cual, para  $\epsilon = |a - b|$  se tiene que  $|a - b| < \epsilon = |a - b|$  lo que es una contradicción así  $a = b$ . ❖

**TEOREMA 1.5: (Teorema de G. Cantor)**

Sea  $S$  cualquier sistema de segmentos encajados. Si las longitudes de sus segmentos tienden a cero entonces existe un

único punto (número)  $c$  que pertenece a todos los segmentos de  $S$ .

PRUEBA:

Sea  $S = \{I_n \subset \mathbb{R} / I_n = [a_n, b_n] \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existen  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $b_n - a_n < \epsilon$ .

Por la proposición anterior, sabemos que  $[a, b] = I$  (donde  $I = \bigcap I_n$ ,  $a = \sup A$  y  $b = \inf B$ ) esto es  $b - a < b_n - a_n < \epsilon$  con lo cual, para todo  $\epsilon > 0$ ,  $b - a < \epsilon$  entonces  $a = b$ . Llamemos por  $c$  al número  $a = b$ , entonces  $I = \{c\}$  o sea, que existe un único punto que pertenece a todos los segmentos del sistema. ❖

El teorema de Cantor al que denotaremos temporalmente por  $C_2$  es equivalente al teorema del supremo, al que denotaremos temporalmente por  $C_1$

PRUEBA:

$[C_1 \Rightarrow C_2]$  fue probada en la proposición anterior.

$[C_2 \Rightarrow C_1]$

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  y acotado superiormente. Probaremos que existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $b = \sup A$ .

En efecto, sea  $m$  una cota superior de  $A$  tal que  $m \notin A$  y sea  $x \in A$ . Tomemos  $I_0 = [x, m]$ , es obvio que  $A \cap I_0 \neq \emptyset$  ( $x$  pertenece a ambos conjuntos).

Sea  $m_0 = \frac{x + m}{2}$  (punto medio de  $I_0$ ) entonces por  $m_0$  se forman dos intervalos  $J_1 = [x, m_0]$  y  $J_2 = [m_0, m]$  ambos de longitud  $\frac{1}{2}|I_0|$ , y  $I_0 = J_1 \cup J_2$ .

Como  $I_0 \cap A \neq \emptyset$  entonces  $J_1 \cap A \neq \emptyset$ . Si  $J_2 \cap A \neq \emptyset$  hacemos  $I_1 = J_2$  de lo contrario  $I_1 = J_1$ .

De lo anterior, hemos construido un intervalo  $I_1$  tal que

- i)  $|I_1| = \frac{1}{2}|I_0|$ .
- ii)  $I_1 \cap A \neq \emptyset$ .
- iii) Ningún punto de  $A$  es cota superior de  $I_1$ .
- iv) El  $\text{Sup } I_1$  es cota superior de  $A$ .
- v)  $I_1 \subset I_0$ .

Con  $I_1$  y  $A$  procedemos de igual forma para obtener  $I_2$  con las mismas propiedades anteriores.

De esta forma obtenemos un sistema de segmentos encajados  $S = \{I_n / n = 0, 1, 2, \dots\}$  tal que  $|I_n| = \frac{1}{2} |I_{n-1}|$

$$|I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 |I_{n-2}| \dots$$

$$|I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |I_0|$$

En el corolario del Principio de Arquímedes se probó que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ . Si  $n > n_0$ ,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon \quad \text{entonces, para todo } n \geq n_0, \quad \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\text{Por otro lado } 2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots > n$$

de donde,  $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$  y así  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$  (para todo  $\epsilon$ ), de lo anterior  $\frac{1}{2^n}$  tiende a cero y siendo  $|I_0|$  un número fijo entonces

$$|I_n| = \frac{1}{2^n} |I_0| \text{ tiende a cero.}$$

Como se cumple todas las condiciones de la proposición  $C_2$ , se concluye que existe un único número  $c$  que pertenece a todos los segmentos de  $S$ .

Probemos que  $c = \text{Sup } A$ .

En efecto, por iv),  $c$  es una cota superior de  $A$ .

Supongamos que  $c$  no es la menor de las cotas superiores, es decir, existen  $b, b_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $b < c < b_2$  con  $b, b_2$  cotas superiores de  $A$ .

Sea  $b_1 = \frac{b + b_2}{2}$  y observemos que  $[b_1, b_2] \cap A = \emptyset$  puesto

que al ser  $b$  una cota superior de  $A$  entonces para todo  $y \in A$ ,  $y \leq b < b_1$  con lo cual  $y \notin [b_1, b_2]$  para todo  $y \in A$ .

Como  $|I_n|$  tiende a cero y  $c \in I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset [b_1, b_2]$  con  $I_{n_0} \cap A \neq \emptyset$ , luego existe  $y \in A$  tal que  $y \in I_{n_0}$  con lo cual  $y \in [b_1, b_2]$  lo que contradice la observación  $[b_1, b_2] \cap A = \emptyset$ . Así  $c$  es la menor de las cotas superiores de donde  $c = \text{Sup } A$ . ❖

**Nota:** De lo anterior, el **axioma de completitud** es equivalente al teorema de Cantor.

### PUNTO DE ACUMULACIÓN

Un concepto de mucha importancia en el Análisis y que tiene relación con el **axioma de completitud** es el de punto de acumulación de un conjunto.

#### DEFINICIÓN 1.20: (Punto de Acumulación de un Conjunto)

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $x$  es un punto de acumulación de  $A$  si para todo  $\epsilon > 0$ , el intervalo abierto  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  posee al menos un punto  $a \in A$  con  $a \neq x$ .

#### Observación:

Si  $x$  es un punto de acumulación del conjunto  $A$ , puede ser que  $x \in A$  o que  $x \notin A$ .

#### Ejemplos:

1) El conjunto  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  posee al 0 como punto de acumulación.

En efecto, se  $\epsilon > 0$  y probemos que en  $(-\epsilon, \epsilon)$  existe un elemento de  $A$ . Por la propiedad Arquimediana, existe un natural  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0\epsilon > 1$  o sea  $\frac{1}{n_0} < \epsilon$  con lo cual

$\frac{1}{n_0} \in (-\epsilon, \epsilon)$  con  $\frac{1}{n_0} \in A$  y  $\frac{1}{n_0} \neq 0$  y esto es para todo  $\epsilon > 0$ , con lo cual 0 es punto de acumulación de  $A$ .

Observe que  $0 \notin A$

2) El conjunto  $A = \{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$  posee al cero como punto de acumulación y  $0 \in A$ .

3) Sea  $A$  un conjunto finito, probemos que  $A$  no posee punto de acumulación.

En efecto, como  $A$  es finito, él se puede escribir como  $A := \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ . Tomando  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \text{Inf}\{|a_i - a_j| / i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq n, j \neq i\}$ . Tenemos que para todo  $x \in A$ ,  $(x - \epsilon_0, x + \epsilon_0) \cap A = \{x\}$ , o sea que existe un intervalo que no posee elementos de  $A$  distintos de  $x$  por lo cual  $A$  no posee puntos de acumulación.

Este ejemplo equivale a decir que si  $A \subseteq \mathbb{R}$  posee punto de acumulación entonces  $A$  es infinito.

**Observación:** Si  $A$  es finito entonces  $A$  no posee puntos de acumulación.

A continuación presentaremos un teorema que recibe el nombre de **Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos**, este teorema es de mucha importancia y tiene estrecha relación con el axioma de completitud.

**TEOREMA 1.6: (Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos)**

Todo conjunto infinito y acotado de números reales posee al menos un punto de acumulación.

PRUEBA:

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto infinito y acotado por lo cual, existe un intervalo  $[a, b]$  tal que  $A \subset [a, b]$  y de longitud  $L = b - a$ .

Bisecando el intervalo  $[a, b]$  se obtienen dos intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$  con  $c = \frac{a + b}{2}$ . Como  $A$  es infinito entonces al menos uno de estos dos intervalos contiene infinitos elementos de  $A$ . Denotemos por  $I_1 = [a_1, b_1]$  a dicho intervalo, por lo tanto,  $I_1$  posee infinitos elementos de  $A$  y su longitud es  $\frac{1}{2}L$ .

Análogamente se obtiene un subintervalo  $I_2 = [a_2, b_2]$  de  $I_1$  el cual contiene infinitos elementos de  $A$  y de longitud igual  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 L$ .

De esta manera se obtiene un sistema de intervalos encajados en donde el  $n$ -ésimo intervalo tiene longitud  $\left(\frac{1}{2}\right)^n L$ , la cual converge a cero, y  $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$ . Por lo tanto existe un único elemento  $x$  que pertenece a todos los intervalos.

Probemos que  $x$  es un punto de acumulación. En efecto, si  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|b_n - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  (ya que la longitud de  $I_n = [a_n, b_n]$  es  $\left(\frac{1}{2}\right)^n L$ , la cual converge a cero), entonces el intervalo  $I_n$  está contenido en  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  por lo cual  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  contiene elementos de  $A$  distintos de  $x$ , luego  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ .  $\text{✱}$

**Propiedades de  $\mathbb{R}$  que no dependen del Axioma de Completitud.**

El conjunto  $N = \{1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$  es evidentemente un subconjunto de  $\mathbb{R}$  al cual hemos llamado, "el conjunto de los números naturales".

El conjunto  $N$  puede ser definido mediante el concepto de conjunto inductivo el cual definiremos a continuación

**DEFINICIÓN 1.21: (Conjunto Inductivo)**

Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  se dice que es inductivo si:

- a)  $1 \in A$
- b) Si  $P \in A$  entonces  $P+1 \in A$ .

Observe que el conjunto de los números reales es un conjunto inductivo, ya que  $1 \in \mathbb{R}$  y si  $P \in \mathbb{R}$ , al ser  $(\mathbb{R}, +)$  un grupo obtenemos  $P+1 \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSICIÓN 1.8:**

La intersección de toda familia de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo.

**PRUEBA:**

Definamos  $S := \{A \subset \mathbb{R} / A \text{ es inductivo}\}$  y  $N := \cap \{A / A \in S\}$  y probemos que  $N$  es inductivo.

En efecto, como  $1 \in A$  para todo  $A \in S$  entonces  $1 \in N$ , ahora tomemos un  $P \in N$ , luego  $P \in A$ , para toda  $A \in S$  con lo

cual  $P+1 \in A$  para toda  $A \in S$  y así  $P+1 \in N$ , lo que prueba que  $N$  es inductivo. ❖

De la proposición anterior se deduce que  $N$  es el menor conjunto con la propiedad de ser inductivo ya que; al ser  $M$  inductivo,  $M \in S$  así  $M \supset \cap \{A \mid A \in S\} = N$  o sea que todo conjunto inductivo  $M$  contiene a  $N$ , luego  $N$  es el menor conjunto inductivo.

De lo anterior, definimos a  $N$  como el conjunto de los números naturales al cual denotamos por la letra  $N$  ( $N=N$ )

Enunciaremos una proposición, la cual nos será útil para probar que el conjunto de los números naturales es cerrado para la suma y el producto, esta proposición se le conoce con el nombre de **principio de inducción**.

**PROPOSICIÓN 1.9:**

Si  $A \subset N$  es inductivo entonces  $A=N$ .

PRUEBA.

Si  $A$  es inductivo entonces  $N \subset A$  (recuerde que  $N$  es la intersección de todos los conjuntos inductivos) y como por hipótesis  $A \subset N$  entonces  $A=N$ . ❖

**Observación:** Esta es una modificación del método de demostración por inducción que dice : Sea  $P_n$  una afirmación acerca de los enteros positivos tal que .

a)  $P_1$  es válida

b) Si  $P_k$  es válida para algún entero  $k \geq 1$ , entonces  $P_{k+1}$  también es válida.

Entonces  $P_n$  es válida para todo  $n \geq 1$ .

Esto obedece al hecho que si  $A := \{n \in \mathbb{N} / P_n \text{ es verdadera}\}$  entonces  $A \subset \mathbb{N}$  y al probar que  $A$  es inductivo se concluye que  $A = \mathbb{N}$  o sea  $P_n$  es verdadera siempre.

**PROPOSICIÓN 1.10:**

$\mathbb{N}$  es cerrado para la suma.

PRUEBA.

Sean  $a$  y  $b$  dos elementos de  $\mathbb{N}$ , debemos probar que  $a+b \in \mathbb{N}$

En efecto, definamos  $A := \{n \in \mathbb{N} / a+n \in \mathbb{N}\}$  y note que si  $A = \mathbb{N}$  entonces existe un  $n$  que coincide con  $b$  tal que  $a+b \in \mathbb{N}$

Para probar  $A = \mathbb{N}$  basta probar que  $A$  es inductivo ya que por definición  $A \subset \mathbb{N}$ .

Como  $a \in \mathbb{N}$  entonces  $a+1 \in \mathbb{N}$ , luego  $1 \in A$ .

Sea  $P \in A$  entonces  $a+P \in \mathbb{N}$ , por otro lado,  $a + (P + 1) = (a + P) + 1 \in \mathbb{N}$  (por ser  $\mathbb{N}$  inductivo), luego  $P + 1 \in A$  lo que prueba que  $A$  es inductivo, y en virtud de la proposición anterior  $A = \mathbb{N}$ . Lo anterior prueba que  $a + b \in \mathbb{N}$ .  $\text{☒}$

**PROPOSICIÓN 1.11:**

$\mathbb{N}$  es cerrado para el producto.

PRUEBA:

Considerando  $a, b \in \mathbb{N}$  y probando que  $A := \{n / na \in \mathbb{N}\}$  es inductivo (o sea  $A = \mathbb{N}$ ) se concluye que  $ab \in \mathbb{N}$       ❖

**PROPOSICIÓN 1.12:**

Sean  $a$  y  $b$  dos números naturales entonces:

- i)  $a \geq 1$  es decir que 1 es el primer elemento de  $\mathbb{N}$ .
- ii)  $b > a$  implica que  $b - a \in \mathbb{N}$ .

La prueba de esta proposición es similar a las dos anteriores, y se realiza probando que  $\{n, n \in \mathbb{N} / n \geq 1\}$  es inductivo para la parte i) y que  $\{n \in \mathbb{N} / \text{si } a > n \text{ entonces } a - n \in \mathbb{N}\}$  es inductivo para la parte ii).      ❖

**PROPOSICIÓN 1.13:**

Entre los números naturales  $n$  y  $n+1$  no existe otro número natural.

PRUEBA:

Debemos probar que si  $n < x < n+1$  entonces  $x \notin \mathbb{N}$ .

En efecto, si suponemos  $x \in \mathbb{N}$  entonces por la proposición anterior ii) tenemos que  $x - n \in \mathbb{N}$  luego por la parte i)  $x - n \geq 1$ , es decir,  $x \geq n+1$  lo que contradice la hipótesis  $x < n+1$  por lo que concluimos que  $x \notin \mathbb{N}$ .      ❖

**TEOREMA 1.7: (Principio de Buena Ordenación)**

Si  $B \subset \mathbb{N}$  es distinto del vacío, entonces  $B$  tiene un primer elemento.

PRUEBA:

Supongamos que existe un subconjunto  $B$ , no vacío de números naturales que no posea primer elemento y definamos  $A := \{n \in \mathbb{N} / \text{si } r \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq r \leq n \text{ implica que } r \notin B\}$ .

Observemos que  $1 \in A$  ya que de lo contrario  $1 \in B$  y  $B$  tendría primer elemento.

Supongamos  $p \in A$  y que  $p+1 \notin A$ , entonces  $p+1 \in B$  y como  $B$  no posee primer elemento, existe  $x \in B$  tal que  $x < p+1$  luego, por la proposición anterior  $x \leq p$ , pero  $p \in A$  entonces  $x \notin B$  (por definición de  $A$ ). Por lo tanto,  $p \in A$  implica  $p + 1 \in A$ , así  $A$  es inductivo.

Por lo cual  $A = \mathbb{N}$ , luego  $B$  debe ser vacío, lo que contradice la hipótesis del teorema.

De lo anterior,  $B$  posee primer elemento.      ❖

En resumen, tenemos que el sistema de los Números Reales es un conjunto distinto del  $\{0\}$  y que cumple con los axiomas A.1 al A.11, del cual obtenemos los siguientes subconjuntos

Los Números Naturales, como el conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$$

Los Números Enteros, como el conjunto

$\{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{N} \text{ o } x=0 \text{ o } -x \in \mathbb{N}\}$  al cual denotaremos por el símbolo  $\mathbb{Z}$ .

Los Números Enteros no Negativos, como el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{N} \text{ o } x=0\}$  al cual denotaremos por el símbolo  $\mathbb{N}_0$

Los Números Racionales, como el conjunto  $\left\{ \frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$  al cual denotaremos por el símbolo  $\mathbb{Q}$ .

Y en base al **axioma de completitud** que nos garantiza la existencia de números reales que no son racionales, los cuales nos forman el conjunto de los números irracionales definido como  $\mathbb{I} := \{x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Q}\}$

**CAPÍTULO II**  
**EL AXIOMA DE COMPLETITUD**  
**Y LAS**  
**FUNCIONES**

La importancia del **axioma de completitud** en el sistema de los números reales no fue percibido si no hasta finales del siglo XIX. Este axioma es la raíz de resultados significativos del análisis, tales como:

- a) Completitud de espacios métricos ( $\mathbb{R}$  como un espacio métrico).
- b) Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.
- c) Toda función continua sobre un intervalo cerrado está acotada.

Además de los estudiados en el capítulo anterior. Ahora, trataremos de estudiar algunos de estos resultados.

### **FUNCIONES**

Se define en  $\mathbb{R}$  una distancia o métrica, la cual se denota por  $|x-y|$  y se lee "distancia de  $x$  a  $y$ ", la que verifica las siguientes propiedades:

- a)  $|x-y| \geq 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- b)  $|x-y| = 0$  si y sólo si  $x = y$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- c)  $|x-y| = |y-x|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- d)  $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$  para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

La métrica anterior recibe el nombre de métrica usual de  $\mathbb{R}$  y el conjunto de los números reales con la distancia definida anteriormente se le denomina Espacio Métrico de los Números Reales.

**Ejemplo:** Los intervalos abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}$  pueden ser redefinidos mediante la métrica usual. Tomando  $a, b \in \mathbb{R}$

con  $a < b$  y  $r = \frac{b - a}{2}$ ,  $c = \frac{a + b}{2}$ , tenemos por ejemplo

que:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - c| < r\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - c| \leq r\}$$

#### **DEFINICIÓN 2.1: (Función)**

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ . Si a cada elemento  $x \in A$  se le hace corresponder por cierta relación  $f$ , a lo más un elemento  $y \in B$ , el cual denotamos  $y = f(x)$ , entonces se dice que en  $A$  está definida la función  $f$ .

Se acostumbra a denotar, a una función, de la manera siguiente:  $f: A \rightarrow B$ . y si  $A = B = \mathbb{R}$  entonces  $f$  se le llama función real de una variable real.

Se define el dominio de  $f$  y se denota  $\text{Dom}f$  al conjunto  $\{x \in A / f(x) \text{ existe}\}$  y se define la imagen de  $f$  y se denota  $\text{Im}f$  al conjunto  $\{y \in B / \text{existe } x \in A \text{ con } y = f(x)\}$

Dadas las funciones reales  $f, g$  se definen las funciones

a)  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ .

b)  $(fg)(x) = f(x) g(x)$ .

c)  $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$  siempre que  $g(x) \neq 0$

d)  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

**DEFINICIÓN 2.2: (Aplicación)**

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es una aplicación si a cada elemento  $x$  de  $A$  se le hace corresponder por medio de  $f$  un sólo elemento  $y$  de  $B$ .

**Ejemplo:**

1) En base a la definición de función, el valor absoluto de un número real es una función definida de la forma siguiente.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$f(x) = |x|$ . Más aún la función valor absoluto es una aplicación de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}_0^+$ .

2) Definimos la función signo,  $sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

con dominio  $\mathbb{R}$  e Imagen  $\{-1, 0, 1\}$ , la cual se puede definir de

forma equivalente como  $sg(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**DEFINICIÓN 2.3: (Función Decreciente y Creciente)**

Diremos que  $f: A \rightarrow B$  es una función:

1) Decreciente si  $x < y$  implica  $f(x) > f(y)$ .

ii) Creciente si  $x < y$  implica  $f(x) < f(y)$ .

Un ejemplo importante de función corresponde a las sucesiones de números reales, a las cuales les dedicaremos atención debido a que poseen resultados que dependen fundamentalmente del **axioma de completitud**.

**DEFINICIÓN 2.4: (Sucesión de Números Reales)**

Una sucesión de números reales, es una aplicación  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = x_n$ .

Denotaremos por  $(x_n)$  a la sucesión de números reales definida anteriormente, en donde  $x_n$  representa el  $n$ -ésimo término de la sucesión.

No debemos confundir la sucesión  $(x_n)$  con  $x_n$ , el cual representa el  $n$ -ésimo término de la sucesión,

$$(x_n) = x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, \dots$$

**Ejemplo:**

1) Los números naturales son un ejemplo de sucesión ya que  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(n) = x_n = n$  describe al conjunto de los números naturales.

$$f(1) = x_1 = 1$$

$$f(2) = x_2 = 2$$

$$f(3) = x_3 = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$f(n) = x_n = n$$

· · ·  
 · · ·  
 · · ·

2) Los números racionales son también un ejemplo de sucesión.

En efecto, como  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$

entonces los racionales pueden ser "ordenados" de la siguiente manera:

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
	↗	↖	↗	↖	↗	↖	↗	↖
1/2	-1/2	3/2	-3/2	5/2	-5/2	7/2	-7/2	...
	↗	↖	↗	↖	↗	↖	↗	↖
1/3	-1/3	2/3	-2/3	4/3	-4/3	5/3	-5/3	...
	↗	↖	↗	↖	↗	↖	↗	↖
·								
·								
·	1/n	-1/n	...					
·								
·								

Tomando el orden  $a_1=0, a_2=1/2, a_3=1, a_4=1/3, a_5=-1/2, a_6=-1, a_7=1/4, a_8=-1/3, a_9=3/2, a_{10}=2, a_{11}=1/5, a_{12}=-1/4, a_{13}=2/3, a_{14}=-3/2, a_{15}=-2, \dots$

se obtiene la sucesión de números racionales requerida.

3)  $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \rightarrow \frac{1}{n}$  es una sucesión, la cual denotamos como

$(U_n) = \left( \frac{1}{n} \right)$  en donde su término general es  $U_n = \frac{1}{n}$

**Lema 2.1:**

Sea la sucesión  $(x_n)$ , de números reales, entonces existe a lo sumo un número real  $x$  tal que cumple la siguiente propiedad:

**P:** Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \epsilon$ , para todo  $n \geq n_0$ .

PRUEBA:

Supongamos que  $L$  es un número real que al igual que  $x$  cumple con la propiedad (P), entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0' \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$  para  $n \geq n_0'$  y existe  $n_0'' \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n \geq n_0''.$$

Tomando  $n_0 = \text{Sup} \{n_0', n_0''\}$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} |x - L| &= |x - L + x_n - x_n| \\ &\leq |x_n - L| + |x_n - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto, por el LEMA 1.1,  $x = L$  y así a lo sumo existe un  $x$  que cumple la propiedad (P). ❖

**DEFINICIÓN 2.5: (Sucesión Convergente)**

Diremos que la sucesión  $(x_n)$  converge a un número  $x$ , si  $x$  verifica la propiedad (P) del lema anterior.

Cuando  $(x_n)$  converge a  $x$  diremos que el límite de la sucesión es  $x$  y lo denotaremos como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  o simplemente  $\lim x_n = x$ .

En caso contrario, diremos que  $(x_n)$  diverge.

**PROPOSICIÓN 2.1:**

La sucesión  $(\frac{1}{n})$  converge a cero.

PRUEBA:

Sugerencia: Usar el principio de Arquímedes. ❖

**DEFINICIÓN 2.6: (Subsucesión)**

Si  $(x_n)$  es una sucesión de números reales y  $(n_k)$  es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, es decir  $n_k < n_{k+1}$ , entonces  $(x_{n_k}) = (x_n)_{(n_k)}$  se llama subsucesión de  $(x_n)$ .

Recuerde que una sucesión es una aplicación y en ese sentido "." representa la composición de funciones.

**Ejemplo:**

1) Sea  $(x_n) = (\frac{1}{n})$  y  $(\eta_k) = (\frac{1}{k^2})$  entonces la sucesión  $(\eta_k)$  es una subsucesión de  $(x_n)$ , en donde la aplicación estrictamente creciente es  $n(k) = k^2$ .

Observe, que según la definición  $\eta = (x_n)_{(n_k)}$ .

2) Sea  $(x_n) = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$  escogiendo elementos de  $(x_n)$  sin alterar el orden, es decir, seleccionando los

$\eta(1) < \eta(2) < \dots < \eta(k) < \eta(k+1) < \dots$  obtenemos la subsucesión  $(x_{\eta(k)}) = x_{\eta(1)}, x_{\eta(2)}, x_{\eta(3)}, \dots, x_{\eta(k)}, \dots$

3) La sucesión  $(2n) = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$  es una subsucesión de  $(x_n) = (n)$  donde la aplicación  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  está definida por  $\eta(k) = 2k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

$$Y_1 = X_{\eta(1)} = X_2 = 2$$

$$Y_2 = X_{\eta(2)} = X_4 = 4$$

$$Y_3 = X_{\eta(3)} = X_6 = 6$$

.

.

.

$$Y_k = X_{\eta(k)} = X_{2k} = 2k$$

.

.

.

4) De la sucesión  $(-1)^n = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$  se pueden obtener las subsucesiones  $(1) = 1, 1, 1, 1, 1, \dots$  y  $(-1) = -1, -1, -1, \dots$  en donde la aplicación  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  para la primera es  $\eta(k) = 2k$  y para la segunda es  $\eta(k) = 2k - 1$ .

**LEMA 2.2:**

Para toda sucesión creciente de números naturales  $(n_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene  $n_k \geq k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$

PRUEBA.

Es inmediato. ❖

**Propiedades de las Sucesiones Convergentes.**

**DEFINICIONES:**

Sean  $(x_n), (y_n)$  dos sucesiones de números reales, entonces definimos la suma y el producto de las siguiente manera:

$$1) \quad (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

$$11) \quad (x_n)(y_n) = (x_n y_n)$$

**PROPOSICIÓN 2.2:**

El conjunto de todas las sucesiones de números reales dotado de las operaciones de suma y producto, constituyen un anillo conmutativo con unidad.

PRUEBA:

Se sugiere al lector. ❖

**PROPOSICIÓN 2.3:**

Toda sucesión convergente es acotada, es decir: Si  $\lim x_n = x$  entonces existe  $m \in \mathbb{R}, m > 0$  tal que  $|x_n| \leq m$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

PRUEBA:

Se sugiere al lector. ❖

**PROPOSICIÓN 2.4:**

Sean  $(x_n), (y_n)$  dos sucesiones tales que  $\lim x_n = x$  y  $\lim y_n = y$ . Entonces:

- i) La sucesión  $(x_n) + (y_n)$  converge a  $x + y$ .
- ii) La sucesión  $(-x_n)$  converge a valor  $-x$ .
- iii) La sucesión  $(|x_n|)$  converge a  $|x|$ .
- iv) La sucesión  $(x_n)(y_n)$  converge a  $xy$ .
- v) Si  $x_n \leq y_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $x \leq y$ .
- vi) Si  $a \in \mathbb{R}$ , la sucesión  $(ax_n) = a(x_n)$  converge al número real  $ax$ .

PRUEBA:

Haremos el ii) y iv) dejando el resto como ejercicio.

ii) P.D.  $\lim (-x_n) = -x$

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces por hipótesis, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \epsilon$ , para todo  $n \geq n_0$ . Luego para  $n \geq n_0$

$$|(-x_n) - (-x)| = |-(x_n - x)|$$

$$|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x|$$

Así,  $|(-x_n) - (-x)| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ ,

por lo tanto  $\lim (-x) = -x$ .

iv) P.D.  $\lim (x_n y_n) = xy$

Si  $x = 0$  ó  $y = 0$  el resultado es inmediato, supongamos pues que  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

Como  $(y_n)$  converge a  $y$ , entonces existe  $m > 0$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $|y_n| \leq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Además, para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0' \in \mathbb{N}$  tal que

$$|Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2|x|} \quad \text{si } n \geq n_0'.$$

Por otro lado,  $(x_n)$  converge a  $x$  entonces para el  $\epsilon$  anterior existe  $n_0'' \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2m}$  siempre que  $n \geq n_0''$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n + x y_n - x y_n - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x y_n| + |x y_n - xy| \\ &= |y_n| |x_n - x| + |x| |y_n - Y| \\ &< m \frac{\epsilon}{2m} + |x| \frac{\epsilon}{2|x|} \quad \text{si } n \geq \text{Max}\{n_0', n_0''\} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Es decir, para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 = \text{Max}\{n_0', n_0''\}$  tal que

$$|x_n y_n - xy| < \epsilon \quad \text{siempre que } n \geq n_0 \quad \text{y } x \neq 0. \quad \text{✱}$$

### TEOREMA 2.1: (Teorema del Emparedado)

Sean  $(x_n)$  y  $(y_n)$  dos sucesiones tales que  $\lim x_n = \lim y_n = L$ , si  $x_n \leq U_n \leq y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\lim U_n = L$ .

#### PRUEBA:

Tenemos las siguientes hipótesis:

- i)  $\lim x_n = L$
- ii)  $\lim y_n = L$
- iii)  $x_n \leq U_n \leq y_n$

Por i) y ii), dado  $\epsilon > 0$  existen  $n_0'$  y  $n_0''$  en  $\mathbb{N}$  tales que:

$$|x_n - L| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{si } n \geq n_0' \quad (1)$$

$$|y_n - L| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{si } n \geq n_0'' \quad (2)$$

Por lo tanto, para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 = \text{Max}\{n_0', n_0''\}$  tal que si

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \text{ entonces } |U_n - L| &= |U_n - x_n + x_n - L| \\ &\leq |U_n - x_n| + |x_n - L| \quad (\text{D.T.}) \\ &\leq |y_n - x_n| + |x_n - L| \quad (\text{por 111}) \\ &= |y_n + L - L - x_n| + |x_n - L| \\ &\leq |y_n - L| + |x_n - L| + |x_n - L| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{por (1) y (2)} \end{aligned}$$

Con lo cual  $|U_n - L| < \epsilon$  y así  $\lim U_n = L$ . ❖

**TEOREMA 2.2: (Teorema de la Sucesión Creciente y Acotada)**

Una sucesión  $(x_n)$  creciente y acotada es convergente. Es decir, si existe un  $m > 0$  tal que  $x_n \leq x_{n+1}$  y  $|x_n| < m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $(x_n)$  converge.

Este teorema, también se conoce como **axioma de completitud**.

PRUEBA:

Sea  $A = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  luego  $A$  es un conjunto acotado superiormente y por lo tanto existe el  $\text{Sup } A$  al cual denotaremos por  $x$ .

Probemos que  $\lim x_n = x$ .

En efecto, sea  $\epsilon > 0$  luego por la propiedad del  $\text{Sup } A$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x - \epsilon < x_{n_0} \leq x < x + \epsilon$  y como  $(x_n)$  es creciente se tiene  $x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x + \epsilon$  para toda  $n \geq n_0$

con lo cual  $x - \epsilon \leq x_n \leq x + \epsilon$  es decir  $|x_n - x| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Por lo tanto  $\lim x_n = x$ . ❖

**TEOREMA 2.3:**

Una sucesión  $(x_n)$  decreciente y acotada es convergente. Es decir, si existe un  $m > 0$  tal que  $x_n \geq x_{n+1}$  y  $|x_n| < m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $(x_n)$  converge.

PRUEBA:

Se deja al lector ❖

**PROPOSICIÓN 2.5:**

Sea  $(x_n)$  una sucesión tal que  $\lim x_n = x$ . Entonces cualquier subsucesión  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  converge a  $x$ .

PRUEBA:

Como  $(x_n)$  converge a  $x$ , entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \epsilon$  siempre que  $n \geq n_0$ .

Sea  $(x_{n_k})$  una subsucesión arbitraria de  $(x_n)$  y sea además  $K_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k_0} \geq n_0$  con lo cual si  $K \geq K_0$  entonces  $n_k \geq n_0$  y así  $|x_{n_k} - x| < \epsilon$ . Por consiguiente  $(x_{n_k})$  converge a  $x$  ❖

Recordando el concepto de puntos de acumulación y relacionandolo con el de sucesiones, obtenemos una caracterización de punto de acumulación de mucha importancia.

**PROPOSICIÓN 2.6: (Caracterización de Punto de Acumulación).**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ .
2. Para cada  $\epsilon > 0$ , el intervalo abierto  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  posee infinitos puntos de  $A$ .
3. Existe una sucesión de elementos distintos en  $A$  que converge hacia  $x$ .

PRUEBA.

(1. implica 2.) Sea  $x$  un punto de acumulación de  $A$  y supongamos que existe un  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $I = (x - \epsilon, x + \epsilon)$  no contiene una infinidad de puntos de  $A$ . Como  $x$  es punto de acumulación entonces existe  $a \in A$ ,  $a \neq x$  tal que  $a \in I$ , por lo tanto,  $B := A \cap (I - \{x\})$  es un conjunto finito y no vacío por lo que podemos escribir a este conjunto como

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}.$$

Tomando  $r = \frac{1}{2} \inf \{|x - b| \mid b \in B\} > 0$  entonces el intervalo abierto  $(x - r, x + r)$  no contiene ningún punto de  $A$  distinto de  $x$  lo cual es imposible. Esto completa la primera implicación.

(2. implica 3.) Por hipótesis, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n} > 0$  y  $I_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$  posee infinitos puntos de  $A$ , por lo cual, para  $n = 1$  tomamos  $x_1 \in I_1$  con  $x_1 \neq x$  y  $x_1 \in A$  para  $n = 2$  tomamos  $x_2 \in I_2$  con  $x_2 \notin \{x, x_1\}$  y  $x_2 \in A$

para  $n = 3$  tomamos  $x_3 \in I_3$  con  $x_3 \notin \{x, x_1, x_2\}$  y  $x_3 \in A$

así sucesivamente, tomamos un  $x_n \in I_n$  con

$x_n \notin \{x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$  y  $x_n \in A$  con lo cual, obtenemos una sucesión  $(x_n)$  de puntos distintos en  $A$ .

Por otro lado, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene que  $|x_n - x| < \frac{1}{n_0} < \epsilon$  con lo cual  $(x_n)$  converge a  $x$ .

(3. implica 1.)

Supongamos que existe una sucesión  $(x_n)$  de elementos distintos de  $A$ , que converge a  $x$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x| < \epsilon$  siempre que  $n \geq n_0$ . Esto es equivalente a decir que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$  siempre que  $n \geq n_0$  con  $x_n \neq x$  y  $x_n \in A$ , por lo tanto  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ . ❖

**TEOREMA 2.4: (Teorema de Bolzano-Weierstrass para Sucesiones)**

De toda sucesión acotada, se puede extraer una subsucesión convergente.

PRUEBA:

Sea  $(x_n)$  una sucesión acotada, entonces el conjunto  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$  está acotado.

Supongamos que  $A$  es infinito, luego por estar acotado, se tiene que existe al menos un punto de acumulación  $x$  de  $A$  (Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos) por lo

tanto, por la caracterización de puntos de acumulación, existe una sucesión infinita de A que converge a x la cual, ordenandola en sentido creciente con respecto a sus índices, constituye una subsucesión de  $(x_n)$ , lo que prueba el teorema.

Si A es un conjunto finito, entonces debe existir un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{n_0}$  se repite infinitas veces <sup>1</sup> formando una subsucesión  $(x_{n_i}) = (x_{n_0})$  constante la cual, evidentemente es convergente. ❖

El teorema anterior implica el teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos (Teorema 1.6) y ambos son equivalentes al axioma de completitud. Esto se prueba haciendo uso de la teoría de sucesiones, la misma es rutinaria y sus detalles se dejan al lector.

### **Criterio de Cauchy para la Convergencia.**

#### **DEFINICIÓN 2.7: (Sucesión de Cauchy)**

Diremos que  $(x_n)$  es una sucesión de Cauchy, si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0, m \geq n_0$  entonces  $|x_n - x_m| < \epsilon$ .

---

<sup>1</sup> Para la sucesión  $(X_n) = (-1)^n$ , el conjunto A es el formado por  $\{-1, 1\}$ , es decir  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{-1, 1\}$  luego existe  $n_0 = 1$  tal que  $X_1 = -1$  se repite infinitas veces  
( $X_{2n-1} = -1$ )

**Nota:** Si hacemos  $p = n - m$  si  $n \geq m$  o  $p = m - n$  si  $m \geq n$  podemos reformular la propiedad de Cauchy de la definición anterior de la siguiente forma.  $(x_n)$  es de Cauchy si dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

**PROPOSICIÓN 2.7:**

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

PRUEBA:

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - x_m| < \epsilon$  siempre que  $n \geq n_0, m \geq n_0$ .

En particular, si  $\epsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$|x_n - x_{n_0}| < 1$  siempre que  $n \geq n_0$ . Sea

$K = \sup \{1, |x_1 - x_{n_0}|, |x_2 - x_{n_0}|, \dots, |x_{n_0-1} - x_{n_0}|\} > 0$

entonces,  $|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}|$

$$\leq |x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}|$$

$$\leq |x_{n_0}| + K \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto  $(x_n)$  está acotada.  $\text{⌘}$

**PROPOSICIÓN 2.8:**

Si  $(x_n)$  y  $(y_n)$  son sucesiones de Cauchy, entonces

i)  $(x_n + y_n)$ .

ii)  $(-y_n)$ .

iii)  $(x_n - y_n)$ .

son sucesiones de Cauchy.

PRUEBA:

Se deja al lector. ❖

**PROPOSICIÓN 2.9:**

Toda sucesión convergente es de Cauchy

PRUEBA:

Sea  $(x_n)$  una sucesión tal que  $\lim x_n = x$  entonces para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ . De lo cual, si  $n \geq n_0$  y  $m \geq n_0$  tenemos que:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

de donde  $(x_n)$  es de Cauchy. ❖

**TEOREMA 2.5:**

Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

PRUEBA:

Sea  $(x_n)$  una sucesión de Cauchy entonces  $(x_n)$  está acotada luego, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, de  $(x_n)$  podemos extraer una subsucesión  $(x_{n_i})$  convergente. Así definimos  $\lim x_{n_i} = x$ .

Probaremos que  $\lim x_n = x$ .

En efecto, sea  $\epsilon > 0$  entonces existe  $n_0' \in \mathbb{N}$  tal que

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } n_k \geq n_0'.$$

Además, para el mismo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0''$  tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } n \geq n_0'', m \geq n_0''.$$

Por lo tanto, para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 = \text{Max}\{n_0', n_0''\}$  tal que si  $n_k \geq n_0, n \geq n_0$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

de donde  $\lim x_n = x$ .  $\otimes$

### PROPOSICIÓN 2.10:

Una sucesión de números reales converge si y sólo si es de Cauchy.

#### PRUEBA:

Probado en las dos proposiciones anteriores.  $\otimes$

**Observación:** Una sucesión de números reales no es de Cauchy si y sólo si diverge.

**Representación de los Números Reales por Fracciones  
Decimales Infinitas.**

Sea  $a$  un número real tal que  $a \geq 0$ , por el principio de Arquímedes existe un número entero  $n_0 > a$ . Este  $n_0$  no es necesariamente el menor que cumpla con ser mayor que  $a$ , entonces sea  $\alpha_0 + 1$  ( $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ ) el menor natural tal que  $\alpha_0 + 1 > a$ , entonces  $\alpha_0 \leq a < \alpha_0 + 1$ , es decir  $a \in I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$  y  $a$  no es el extremo derecho de  $I_0$ .

Dividiremos  $I_0$  en diez segmentos iguales y sea  $I_1$  uno de estos intervalos para el cual  $a \in I_1$ , el número  $a$  no es el extremo derecho del  $I_1$  y  $I_1 \subset I_0$ .

Denotemos a  $I_1 = [\alpha_0.\alpha_1, \alpha_0.\alpha_1 + 1/10]$  donde  $\alpha_1$  denota el número de los diez segmentos, es decir,  $\alpha_1$  es una de las cifras

$0, 1, 2, 3, \dots, 9$  ;.

es claro que  $|I_1| = \frac{1}{10}$  ya que  $\frac{(\alpha_0 + 1) - \alpha_0}{10} = \frac{1}{10}$  por comodidad. Hagamos  $I_1 = [\alpha_0.\alpha_1, \alpha_0.\alpha_1 + 1/10] = [a_1^-, a_2^+]$

Procediendo de igual forma para  $I_1$  obtenemos:

$I_2 = [\alpha_0.\alpha_1\alpha_2, \alpha_0.\alpha_1\alpha_2 + 1/10^2] = [a_2^-, a_2^+]$  tal que  $a \in I_2$ , el número  $a$  no es el extremo derecho de  $I_2$ ,  $|I_2| = 1/10^2$  y  $I_2 \subset I_1$ .

En general, tenemos un sistema  $S = \{ I_k / k \in \mathbb{N} \}$  de segmentos encajados tal que  $|I_k| = \frac{1}{10^k}$

$$I_k = [\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k, \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k + \frac{1}{10^k}] = [a_k^-, a_k^+]$$

$a \in I_k$  y el número  $a$  no es el extremo derecho de  $I_k$ , o sea  $a \neq a_k^+$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

Por el principio de segmentos encajados,  $\{a\} = \bigcap_{k \geq 1} I_k$  o sea  $\lim a_k^+ = \lim a_k^- = a$ .

**DEFINICIÓN 2.8:**

A los números  $a_k^+$  y  $a_k^-$  se les llaman fracciones decimales finitas que aproximan al número  $a$ . Así  $a_k^+$  se llama aproximación decimal superior de orden  $k$  y  $a_k^-$  aproximación decimal inferior de orden  $k$  del número  $a$ .

Es obvio que:

- i)  $a_k^- \leq a < a_k^+$ .
- ii)  $a_k^- \leq a_{k+1}^-$  y que  $a_k^+ \geq a_{k+1}^+$  o sea  $(a_k^-)$  es creciente y  $(a_k^+)$  es decreciente.
- iii)  $|I_k| = a_k^+ - a_k^- = \frac{1}{10^k}$ .
- iv)  $\lim a_k^+ = \lim a_k^- = a$ .

**COROLARIO 2.1:**

Cualquier número real es límite de una sucesión de números racionales.

PRUEBA:

Por iv), y siendo  $a_k^+$  y  $a_k^-$  números racionales, se deduce el resultado.

Note que por el principio de segmentos encajados, el número real  $a$ , es el único número que se encuentra en todos los segmentos, por lo que a números distintos le corresponde una fracción decimal distinta. ❖

**Observación:** Aquí no se consideran fracciones decimales de la forma  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots$  como por ejemplo  $a = 0.69999\dots$  ya que por la construcción de los  $I_k$   $a$  sería un extremo derecho  $0.7$  lo cual no puede ser, de esta forma se tienen dos formas de fracciones decimales  $0.6999\dots$  y  $0.7$  para representar al mismo número  $a = \frac{7}{10}$

Note que  $0.6999\dots = 0.7$  esto se puede ver fácilmente mediante el siguiente algoritmo

$$\begin{aligned} 0.6999\dots &= 0.6 + 0.09999\dots \\ &= 0.6 + 3(0.033333\dots) \\ &= 0.6 + \frac{3(0.3333\dots)}{10} \\ &= 0.6 + 3\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 0.6 + \frac{1}{10} = 0.6 + 0.1 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado al aplicar la serie geométrica.

En conclusión, cada número real le corresponde una fracción decimal (finita o infinita) y viceversa.

### Continuidad

En este punto, estamos interesados en ver las implicaciones que tiene el **axioma de completitud** en las funciones continuas sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Para ello, recordemos la definición de continuidad.

#### **DEFINICIÓN 2.9: (Continuidad en un punto)**

La función  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $\alpha \in A$  si dado  $\epsilon > 0$  podemos hallar  $\delta > 0$  tales que,  $x \in A$  y  $|x - \alpha| < \delta$  implica que  $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$ .

**Comentario:**  $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$  significa que  $f(x) \in (f(\alpha) - \epsilon, f(\alpha) + \epsilon)$  y  $|x - \alpha| < \delta$  que  $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  entonces, a grosso modo,  $f$  es continua en  $\alpha \in \mathbb{R}$  si puntos próximos al valor  $\alpha$  se aplican en puntos próximos a  $f(\alpha)$ .

#### **Ejemplo:**

Sea  $A := \{1\} \cup (3, 6)$  y  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \neq 1 \end{cases} .$$

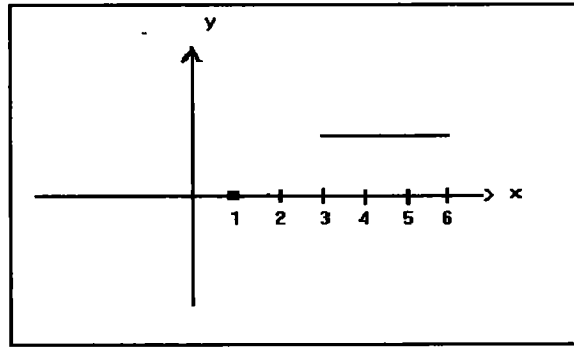
Estudiemos la continuidad de  $f$  en  $x = 1$ .

Solución. Observe que dado cualquier  $\epsilon > 0$  podemos tomar  $\delta = \frac{1}{2}$  tal que si :

$x \in A$  y  $|x - 1| < \frac{1}{2}$  entonces

$$|f(x) - f(1)| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

por lo cual  $f$  es continua en  $x=1$ .



Note que la gráfica de  $f$  en el intervalo  $(-1,3)$  en donde  $1 \in (-1,3)$  corresponde solamente al único punto  $(1,0)$  lo cual corresponde a un resultado "raro" para nuestra intuición respecto a la gráfica de una función continua, pero que es válido según nuestra definición.

En la práctica puede resultar complicado verificar la continuidad de una función en un punto utilizando la definición anterior. Afortunadamente se tiene una caracterización, verdaderamente útil, de la continuidad en un punto en términos de sucesiones.

**PROPOSICIÓN 2.11: (Caracterización de Funciones Continuas)**

Sea  $f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a$  un punto de  $A$ .  
Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:  
(a)  $f$  es continua en  $a \in A$ .

(b) Para cada sucesión  $(a_n)$  de puntos de  $A$  que converja hacia  $a$ , se cumple que la sucesión  $(f(a_n))$  converge hacia  $f(a)$ .

PRUEBA:

(a)  $\Rightarrow$  (b) Supongamos que  $f$  es continua en  $a \in A$  y que  $(a_n)$  es una sucesión de puntos de  $A$  tal que  $(a_n)$  converge al valor  $a$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in A$  y  $|x - a| < \delta$  implica que  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  [1]

Como  $(a_n)$  converge al valor  $a$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  implica que  $|a_n - a| < \delta$  [2]

De [1] y [2] tenemos que si  $n \geq n_0$  entonces  $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$  por lo cual  $f(a_n)$  converge a  $f(a)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Recíprocamente, supongamos que  $f$  no es continua en  $a$ . Entonces para algún  $\epsilon > 0$  no existe ningún  $\delta > 0$  tal que  $|x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ , esto es, para cada  $\delta > 0$  existe un  $x \in A$  tal que si  $|x - a| < \delta$  entonces

$$|f(x) - f(a)| \geq \epsilon .$$

En particular, para  $\delta = \frac{1}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$  existe un  $a_n \in A$  tal que si  $|a_n - a| < \frac{1}{n}$  entonces  $|f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon$ . Así  $(a_n)$  es una sucesión de puntos de  $A$  que converge al valor  $a$  pero  $(f(a_n))$  no converge a  $f(a)$  lo que es una contradicción, por lo cual queda probada la proposición  $\text{❖}$

Veamos algunos ejemplos, utilizando la caracterización de funciones continuas.

**Ejemplos:**

1. Probemos que la función  $f(x) = 3x^2 - 7$  es continua en todo número real  $a_0$ .

En efecto, sea  $(a_n)$  una sucesión arbitraria de números reales, tal que  $(a_n)$  converge al valor  $a_0$

Como  $f(a_n) = 3a_n^2 - 7$  entonces la sucesión  $(f(a_n))$  converge al valor  $3a_0^2 - 7 = f(a_0)$  con lo cual  $f$  es continua.

2. Probemos que  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  no es continua en  $x = 0$ .

En efecto, consideremos la sucesión  $(a_n) = \left( \frac{1}{n\pi} \right)$  la cual converge a 0. Entonces la sucesión  $f(a_n) = \cos(n\pi)$  diverge ya que sus valores se alternan en 1 y -1, es decir  $f(a_{2k-1}) = -1$  y  $f(a_{2k}) = +1$  para toda  $k \in \mathbb{N}$  por lo tanto la función  $f(x)$  no es continua en  $x = 0$ . ❖

**DEFINICIÓN 2.10: (Función Continua en un Conjunto)**

Diremos que la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A \subset \mathbb{R}$  es continua en  $A$  si es continua para cada  $x \in A$ .

Recordemos que el conjunto de las imágenes de  $f$  está dada por  $f(A) := \{y \in \mathbb{R} / \text{existe } x \in A \text{ con } f(x) = y\}$ .

**DEFINICIÓN 2.11: (Función Acotada)**

Diremos que una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subset \mathbb{R}$  está.

- a) acotada superiormente si existe  $M$  tal que  $f(x) \leq M$  para toda  $x$  elemento de  $A$ .
- b) acotada inferiormente si existe  $m$  tal que  $m \leq f(x)$  para toda  $x$ .
- c) acotada si  $f$  está acotada superior e inferiormente.

Observe que  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada si el conjunto  $f([a,b])$  está acotado, en otras palabras si existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para toda  $x$  en el intervalo  $[a,b]$  (Caracterización de los Conjuntos Acotados).

Existe un teorema conocido como **Propiedad de Heine-Borel Lebesgue** del cual se derivan resultados muy importantes de las funciones continuas, esta propiedad es una consecuencia del **axioma de completitud**, por tanto le dedicaremos atención, pero antes necesitamos definir algunos conceptos.

**DEFINICIÓN 2.12: (Cubrimiento Abierto)**

Sea  $A$  un conjunto de números reales. Diremos que la familia de intervalos abiertos  $\{ I_\alpha \}$  es un cubrimiento abierto de  $A$  si  $A \subset \cup I_\alpha$ .

Diremos que del cubrimiento abierto  $\{I_\alpha\}$  de  $A$  se puede extraer un subcubrimiento finito, si existe

$J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$  (un conjunto finito) tal que

$$A \subset \bigcup_{k \in J} I_k .$$

**TEOREMA 2.6: (Teorema de Heine-Borel Lebesgue)**

De cualquier cubrimiento abierto de un intervalo cerrado y acotado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  se puede extraer un subcubrimiento finito.

PRUEBA:

Supongamos que existe un cubrimiento abierto  $\{J_\alpha\}$  de  $[a, b]$  tal que de dicho cubrimiento no se pueda extraer un subcubrimiento finito. Entonces al biseccionar  $[a, b]$  se obtienen dos intervalos de los cuales al menos uno de ellos no puede ser cubierto por un número finito de  $\{J_\alpha\}$ .

Denotemos a tal intervalo por  $I_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b]$  el cual tiene longitud  $\frac{1}{2}(b - a)$ .

Repetiendo el procedimiento, se obtiene un intervalo cerrado  $I_n = [a_n, b_n]$  tal que  $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1 \subset [a, b]$  y la longitud de  $I_n$  es  $(\frac{1}{2})^n(b-a)$  y además  $I_n$  no puede ser cubierto por un número finito de  $\{J_\alpha\}$ . Luego por el principio de intervalos encajados existe un único elemento  $x \in [a, b]$  tal que  $\{x\} = \bigcap I_n$  y  $\{x\} \subset [a, b] \subset \bigcup J_\alpha$  entonces existe  $\beta$  tal que  $x \in J_\beta = (p_\beta, q_\beta)$ .

Tenemos que  $x \in [a, b]$ ,  $x \in (p_\beta, q_\beta)$  y  $x \in [a_n, b_n]$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , por lo cual  $a_n \leq x \leq b_n$  y como la sucesión  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$  entonces  $(x - a_n) \rightarrow 0$  y  $(b_n - x) \rightarrow 0$ , así por definición de convergencia, para todo  $\epsilon > 0$  existe un natural  $n_0$  tal que  $x - a_{n_0} < \epsilon$  y  $b_{n_0} - x < \epsilon$  esto es,  $x - \epsilon < a_{n_0} < b_{n_0} < \epsilon + x$  lo que es equivalente a que  $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$  para todo  $\epsilon > 0$ . Por lo tanto, para  $\epsilon = \text{Inf} \{x - p_\beta, q_\beta - x\}$  se tiene que  $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset J_\beta = (p_\beta, q_\beta)$  es decir que  $[a_{n_0}, b_{n_0}]$  está cubierto por un solo abierto  $J_\beta$  de  $\{J_\alpha\}$  lo que contradice lo supuesto, con lo cual queda probada la proposición. ❖

**DEFINICIÓN 2.13: (Conjunto Compacto)**

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ , diremos que  $A$  es compacto si de cualquier cubrimiento abierto de  $A$  se puede extraer un subcubrimiento finito de  $A$ .

**Observación:** Los intervalos cerrados  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  son compactos (Teorema anterior).

Las funciones continuas definidas sobre este tipo de conjuntos poseen ricas propiedades de las cuales pasaremos a estudiar algunas de ellas.

**PROPOSICIÓN 2.12:**

Si  $f$  es continua en  $[a,b]$  entonces para cada  $c \in [a,b]$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f$  está acotada en el intervalo abierto  $(c - \delta, c + \delta)$ .

PRUEBA:

Sea  $c \in [a,b]$ , entonces como  $f$  es continua en  $c$  se tiene que para todo  $\epsilon > 0$ , en particular para  $\epsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(c)| < 1$  siempre que  $|x - c| < \delta$ .

$$\begin{aligned} \text{Luego, } |f(x)| &= |f(x) - f(c) + f(c)| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |f(c)| \end{aligned}$$

entonces  $|f(x)| < 1 + |f(c)|$  siempre que  $|x - c| < \delta$  es decir,  $f$  está acotada en el intervalo abierto  $(c - \delta, c + \delta)$  lo que prueba la proposición. ❖

**PROPOSICIÓN 2.13:**

Si  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  está acotada en el intervalo  $[a,b]$ .

PRUEBA:

Supongamos que  $f$  no es acotada en el intervalo  $[a,b]$  entonces no lo es en al menos uno de los dos intervalos que se obtienen al biseccionar  $[a,b]$ .

Sea  $I_1 = [a_1, b_1]$  el primero de los dos intervalos anteriores en donde  $f$  no es acotada. Sea  $L := b - a$  la longitud del intervalo  $[a,b]$ , entonces la longitud de  $I_1$  es  $\frac{1}{2} L$ .

Repitiendo el procedimiento anterior, encontramos  $I_2=[a_2, b_2]$  en el cual  $f$  no es acotada y de longitud  $(\frac{1}{2})^2 L$ . En general tenemos  $I_n = [a_n, b_n]$  con  $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$  con  $f$  no acotada en  $I_n$  y de longitud  $(\frac{1}{2})^n L$ .

Continuando este proceso, se obtiene un sistema de intervalos encajados cuya longitud  $(\frac{1}{2})^n L$  tiende a cero y en ninguno de estos intervalos,  $f$  es acotada. Entonces existe un único punto  $c$  que pertenece a todos los  $I_n$ .

Como  $f$  es continua en  $c \in [a, b]$  entonces, por la proposición anterior, existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  está acotada en el intervalo abierto  $(c - \delta, c + \delta)$  y como  $b_n - a_n$  tiende a cero entonces existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (c - \delta, c + \delta)$  lo que es una contradicción ya que no puede ser que  $f$  esté no acotada en el intervalo  $[a_{n_0}, b_{n_0}]$  y si en  $(c - \delta, c + \delta)$  que contiene a  $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ , por lo tanto se debe descartar el supuesto que  $f$  no es acotada en  $[a, b]$ .

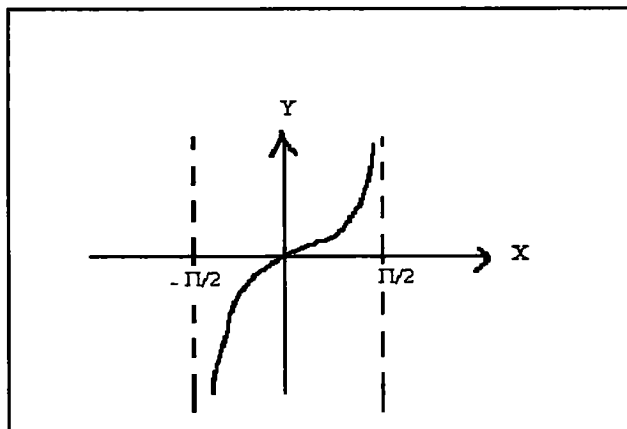
Luego, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  está acotada en el intervalo  $[a, b]$ . ❖

Note que si en la proposición anterior, se altera el intervalo cerrado  $[a, b]$  por uno abierto  $(a, b)$  o si no se da la continuidad entonces la proposición pierde su validez como se muestra en los siguientes ejemplos.

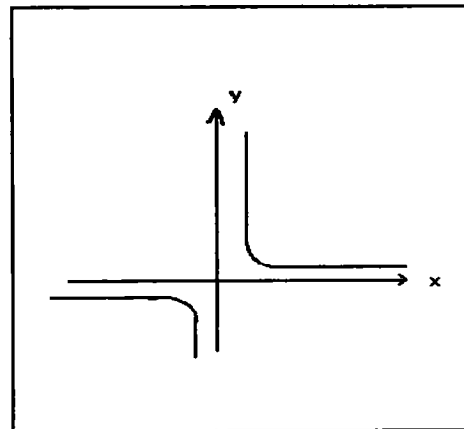
1) La función  $f(x) = \tan(x)$  definida en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  no posee cota superior ni cota inferior (figura 1).

2) La función  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

no posee máximo ni posee mínimo por lo cual  $f$  es no acotada (Figura 2).



(Figura 1)



(Figura 2)

**TEOREMA 2.7:**

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua entonces  $f$  alcanza en  $[a, b]$  su valor máximo y mínimo absoluto.

PRUEBA:

Supongamos que para toda  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \neq \text{Sup}f([a, b])$

Definimos  $h(x) := \text{Sup} f([a, b]) - f(x)$  la cual,

obviamente es continua y positiva por lo que podemos definir  $H(x) = \frac{1}{h(x)}$

la cual también es continua en  $[a, b]$  por lo cual  $H(x)$  está acotada. Sea  $c \in \mathbb{R}$  una cota superior de  $H(x)$  así  $0 < H(x) < c$  para toda  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  entonces

$\frac{1}{H(x)} > \frac{1}{c}$  de donde  $h(x) = \text{Sup } f([a,b]) - f(x) > \frac{1}{c}$  o sea  $f(x) < \text{Sup } f([a,b]) - \frac{1}{c}$  para toda  $x \in [a,b]$  lo cual es una contradicción con la definición del supremo de  $f([a,b])$  por lo que debe existir un  $x \in [a,b]$  tal que  $f(x) = \text{Sup } f([a,b])$ .

Análogamente se prueba para el ínfimo de  $f([a,b])$ . ❖

Ahora pasamos a discutir una proposición muy importante sobre una función que también es continua en un intervalo cerrado  $[a,b]$ , llamado **Teorema del Valor Intermedio** o **Teorema de Bolzano-Cauchy**, el cual expresa que cuando la función toma dos valores distintos entonces toma todos los valores que se encuentre entre ellos.

**TEOREMA 2.8: (Teorema de Bolzano)**

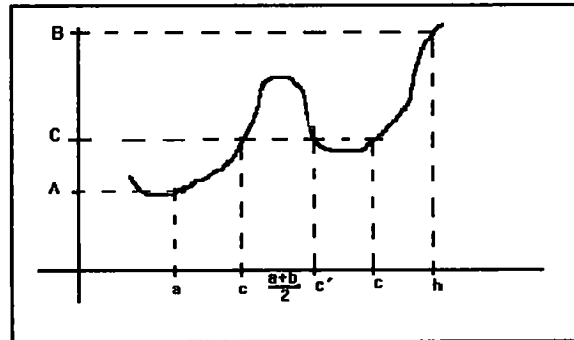
Si la función  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y si  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  con  $A \neq B$ , entonces para cualquier  $C$  entre  $A$  y  $B$  ( $A < C < B$ ) existe un punto  $c \in [a,b]$  tal que  $f(c) = C$ .

PRUEBA:

Consideremos, sin pérdida de generalidad, que  $A < B$  por lo tanto  $A < C < B$  Ahora dividamos el segmento  $[a,b]$  por su punto medio, luego si  $f(b_1) = C$  (donde  $b_1$  es el punto medio entre  $a$  y  $b$ ) entonces no hay nada más que probar, si  $f(b_1) \neq C$  se tiene que en uno de los dos intervalos ya sea  $[a,b_1]$  o  $[b_1,b]$  la función  $f$ , en el extremo izquierdo del

intervalo, toma valores menores que  $C$  y en el derecho valores mayores que  $C$ , sea  $I_1 = [a_1, c_1]$  tal intervalo, entonces  $f(a_1) < C < f(c_1)$  y la longitud de  $I_1$  es

$$I_1 := \frac{1}{2}(b - a) \quad (\text{ver Figura 3}).$$



(Figura 3)

Procediendo de la forma anterior, se encuentra un punto  $c$  en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(c) = C$  y de no ser así, se tendrá un sistema de intervalos cerrados encajados  $I_n = [a_n, c_n]$  de longitud  $I_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$  con  $f(a_n) < C < f(c_n)$ , por lo tanto existe un único  $c$  en el intervalo  $[a, b]$  tal que  $\{c\} = \bigcap [a_n, c_n]$  por lo cual para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - c_n| < \epsilon$  para  $n \geq n_0$  y como  $c \in [a_n, c_n]$  para todo  $n$ , entonces  $|a_n - c| < \epsilon$  y  $|c - c_n| < \epsilon$  para toda  $n \geq n_0$ , con lo cual las sucesiones  $(a_n)$  y  $(c_n)$  convergen ambas al valor  $c$ .

Como  $f$  es una función continua en  $c$ , entonces  $(f(a_n))$  y  $(f(c_n))$  convergen a  $f(c)$ . Tenemos  $\lim f(a_n) = \lim f(c_n) = f(c)$  y como  $f(a_n) < C < f(c_n)$  entonces,  $\lim f(a_n) \leq \lim C \leq \lim f(c_n)$  de donde  $f(c) \leq C \leq f(c)$  finalmente  $f(c) = C$ . ❖

**TEOREMA 2.9:**

Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, entonces la imagen de  $f$  es un intervalo cerrado

PRUEBA:

Como  $f$  es continua en  $[a,b]$  entonces  $f$  alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Sea  $A$  y  $B$  su valor mínimo y máximo respectivamente, entonces para toda  $x \in [a,b]$  se tiene que  $f(x) \geq A$  y  $f(x) \leq B$  o sea  $A \leq f(x) \leq B$ , y como  $f$  toma todos los valores comprendidos entre dos de sus imágenes (Teorema de Bolzano) entonces para toda  $x \in [a,b]$  se tiene  $f(x) \in [A,B]$  y si  $C \in [A,B]$  entonces existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = C$  Por consiguiente  $f([a,b]) = [A,B]$ . ❖

**Observación:**

El teorema del valor intermedio o teorema de Bolzano-Cauchy establece que si  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $C$  es tal que  $f(a) < C < f(b)$  entonces la recta horizontal  $y = C$  intersecta a la gráfica de la función  $y = f(x)$  por lo cual existe  $c \in [a,b]$  tal que  $f(c) = C$ . De este teorema se obtiene un corolario muy útil para calcular las raíces de polinomios o para aproximar dichas raíces tanto como uno quiera. Dicha aproximación, se consigue mediante el procedimiento usado en la demostración del teorema, veamos el corolario.

**COROLARIO 2.2:**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, tal que  $f(a)f(b) < 0$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$

PRUEBA:

Como  $f(a)f(b) < 0$  entonces  $f(a)$  y  $f(b)$  poseen signos contrarios y además  $f(a) \neq 0$ , y  $f(b) \neq 0$ . Supongamos pues, sin pérdida de generalidad, que  $f(a) < 0$  y que  $f(b) > 0$ , entonces  $f(a) < 0 < f(b)$ , luego por el Teorema de Bolzano existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . ❖

**Una Aplicación del Teorema de Bolzano.**

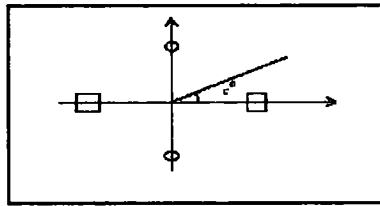
Supóngase que se tiene una mesa con cuatro patas de igual longitud y que la misma "cojea" o resulta inestable al ponerla en el piso.

La mesa deja de cojear haciendo girar la mesa entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  grados, para un giro de  $c$  grados con  $0 < c < \frac{\pi}{2}$  la mesa quedará estable.

PRUEBA:

Supongamos que el piso está desnivelado, pero sin tener hoyos ni escalones.

En la figura, los cuadrados representan la marca de dos patas opuestas de la mesa y los "círculos" las otras dos.



Sea  $c$  el ángulo de rotación respecto al eje horizontal que une las marcas de las dos patas cuadradas y definamos  $f(c)$  como la suma de las alturas de la mesa sobre el piso en la dirección de las patas cuadradas, menos la suma de la longitud de las patas cuadradas. Similarmente, definimos  $g(c)$  como la suma de las alturas de la mesa al piso en la dirección de las patas redondas, menos la suma de la longitud de las patas redondas.

Sea  $h(c) = f(c) - g(c)$  definida en el intervalo cerrado  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , como en  $c = 0$  la mesa está desnivelada entonces podemos suponer que las patas redondas no están ambas tocando el piso por lo cual  $f(0) = 0$  y  $g(0) > 0$ , luego  $h(0) < 0$

Al girar  $\frac{\pi}{2}$ , las patas redondas y cuadradas intercambian de posición, por lo cual  $f(\frac{\pi}{2}) > 0$  y  $g(\frac{\pi}{2}) = 0$  luego  $h(\pi/2) > 0$  por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe  $\beta \in (0, \pi/2)$  tal que  $h(\beta) = 0$  lo que significa que ambas pares de patas tocan el piso y la mesa queda nivelada. ❖

### Sobre la Derivada.

Recordemos que la derivada de una función  $y = f(x)$  en un punto  $x$  está definida como

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que dicho límite exista.

Por otro lado, la existencia de un límite, por ejemplo  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  es equivalente a que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  existan y sean iguales.

Veamos un teorema que relaciona la derivada con la continuidad.

**TEOREMA 2.10:**

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $c$  entonces  $f$  es continua en  $c$ .

PRUEBA.

Por hipótesis  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$  existe.

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ (x - c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + f(c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] + \lim_{x \rightarrow c} f(c) \\ &= (0) f'(c) + f(c) \\ &= f(c) \end{aligned}$$

Con lo cual  $f$  es continua en  $c$ .      ❖

**TEOREMA 2.11: (Teorema de Fermat)**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c)$  exista y además,  $f$  toma en este punto su valor máximo o su valor mínimo. Entonces  $f'(c) = 0$ .

PRUEBA:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f$  toma en  $x = c$  su valor máximo, es decir, para todos los  $x \in (a,b)$  se cumple la desigualdad  $f(x) \leq f(c)$ . Por lo tanto tenemos,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{siempre que } x < c \quad (1)$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \text{siempre que } x > c \quad (2)$$

Como la derivada de  $f$  en  $c$  existe entonces, de (1) y (2) y aplicando límite, obtenemos  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$  con lo cual  $f'(c) = 0$ . ❖

**Ejemplos:**

1) Sea  $f: [-2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ , la función definida por  $f(x) = 2x^3$ .

Entonces,  $f$  alcanza su valor máximo y su valor mínimo en  $x = 3$  y  $x = -2$  respectivamente, más sin embargo no cumple con la tesis del teorema de Fermat, puesto que  $f'(-2) = 24$  y  $f'(3) = 54$  los cuales no son cero. Esto se debe a que  $-2$  y  $3$  no pertenecen al intervalo abierto  $(-2,3)$ .

2) El recíproco del Teorema de Fermat en general es falso.

Como un contraejemplo, tenemos la función del ejemplo anterior, en la cual  $f'(0) = 0$  con  $0 \in (-2,3)$ , más sin embargo en  $x = 0$  la función no toma su valor máximo ni su valor mínimo.

Ahora bien, el siguiente Teorema que estudiaremos es una consecuencia del **axioma de completitud**, el mismo es conocido

con el nombre del **Teorema de Rolle**, el cual en los libros de Cálculo por lo general sólo es enunciado.

**TEOREMA 2.12: (Teorema de Rolle)**

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en cada punto del intervalo abierto  $(a, b)$  y si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

PRUEBA:

Como  $[a, b]$  es cerrado y  $f$  es una función continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  alcanza su valor máximo  $M$  y su valor mínimo  $m$  en  $[a, b]$ , es decir, existen dos valores  $d$  y  $d'$  en  $[a, b]$  tales que  $f(d') = m$  y  $f(d) = M$  con lo cual  $f(d') \leq f(x) \leq f(d)$  para toda  $x \in [a, b]$ .

Si  $m = M$  entonces  $M \leq f(x) \leq M$  para toda  $x \in [a, b]$  o sea,  $f(x) = M$  (función constante), en consecuencia  $f'(c) = 0$  para cada  $c \in (a, b)$ .

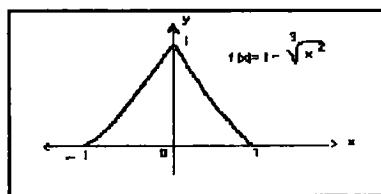
Supongamos pues que  $m \neq M$ , entonces alguno de ellos es diferente a  $f(a) = f(b)$ , sin pérdida de generalidad, supongamos que  $M \neq f(a)$  por lo tanto  $d \neq a$  y  $d \neq b$  o sea  $d \in (a, b)$  y como  $f$  es derivable en  $(a, b)$  se tiene, por el Teorema de Fermat, que  $f'(d) = 0$ , lo que concluye la prueba. ❖

En algunos textos sustituyen la condición  $f(a) = f(b)$  por  $f(a) = f(b) = 0$ , el cual es un caso particular y por lo tanto, una consecuencia inmediata de nuestro enunciado.

**Ejemplos:**

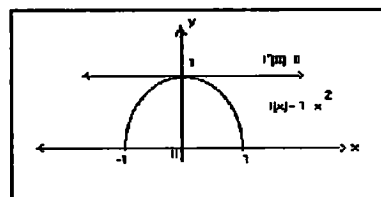
1) La función  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  es tal que  $f(x)$  es continua en  $[-1,1]$  y  $f(-1) = f(1) = 0$  (ver figura 4) más sin embargo no existe  $c \in (-1,1)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

El teorema no es aplicable ya que la derivada de  $f$  en  $x = 0$  no existe.



(Figura 4)

2) La función  $f(x) = 1 - x^2$  cumple con las condiciones del Teorema de Rolle es decir,  $f(x)$  es continua en  $[-1,1]$  y derivable en el intervalo abierto  $(-1,1)$  tal que  $f(-1) = f(1) = 0$  por lo tanto existe  $c = 0 \in (-1,1)$  tal que  $f'(c) = -2c$  es cero (ver figura 5).



(Figura 5)

3) La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^7 + 2x^5 + x^3 + 3x$  sólo posee una y sólo una raíz real

En efecto,  $f$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , además  $f(-1) = -7 < 0$  y  $f(1) = 7 > 0$  luego por el teorema de Bolzano existe  $c \in [-1, 1]$  tal que  $f(c) = 0$ , obviamente  $c = 0$ .

Probemos que  $c$  es la única raíz real de  $f$ . Supongamos que existe otra  $c'$  tal que  $f(c') = 0$  entonces tenemos  $f(c) = f(c')$  y por el teorema de Rolle existe  $b \in (c, c')$ <sup>2</sup> tal que  $f'(b) = 0$  lo cual es imposible ya que  $f'(x) = 7x^6 + 10x^4 + 3x^2 + 3 > 0$  para toda  $x \in (c, c')$ , con lo cual el supuesto  $c'$  no existe.

4) Considere la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + c$ , con  $a < 0$  y  $c > 0$  Entonces,  $f$  tiene exactamente una raíz negativa.

En efecto,  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , además  $f(0) = c > 0$  y  $f(-\sqrt[3]{c}) = -c + ac^{2/3} + c = ac^{2/3} < 0$ . Luego como  $f$  es continua y además  $f(0)f(-\sqrt[3]{c}) < 0$ , entonces por el Corolario del Teorema de Bolzano existe  $d \in (-\sqrt[3]{c}, 0)$  tal que  $f(d) = 0$  con  $d < 0$ , es decir,  $d$  es una raíz negativa de  $f$ .

Supongamos que existe un número real  $b$  negativo tal que  $f(b) = 0$ , entonces  $f(d) = f(b)$  con  $f$  continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , con lo cual, por el Teorema de Rolle, existe  $r$  entre  $b$  y  $d$  tal que  $f'(r) = 0$  con  $r$  negativo (por estar entre dos números negativos)

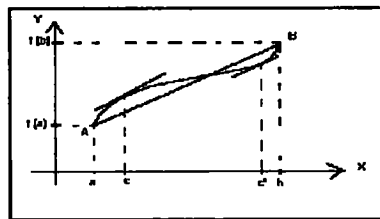
---

<sup>2</sup> El intervalo  $(c, c')$  se considera suponiendo  $c < c'$  de no ser así entonces se toma  $(c', c)$  como el intervalo en cuestión.

Por otro lado,  $f'(x) = 3x^2 + 2ax$  luego  $3r^2 + 2ar = 0$  y como  $r < 0$  ( $r \neq 0$ ) entonces  $r = -\frac{2}{3}a > 0$  lo que es una contradicción por lo tanto  $d$  es la única raíz negativa de  $f$

### EL TEOREMA DE LAGRANGE

El siguiente teorema es conocido con el nombre de Teorema del Valor Medio, Teorema de los Incrementos Finitos o Teorema de Lagrange, el mismo es una generalización del Teorema de Rolle ya que el Teorema de Lagrange muestra que en un intervalo abierto  $(a,b)$  existe, bajo iguales hipótesis a las del Teorema de Rolle, un punto  $c$  no necesariamente único (ver figura) en el cual la tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .



#### TEOREMA 2.13: (de Lagrange)

Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a,b)$ . Entonces, al menos existe un número  $c$  en el intervalo  $(a,b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

#### PRUEBA:

Sean  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  las coordenadas de los puntos A y B respectivamente, entonces la ecuación de la recta que pasa por A y B está dada por  $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$

Definamos la función  $h(x) = f(x) - g(x)$  la cual es continua en  $[a,b]$  y derivable en  $(a,b)$ , además

$$\begin{aligned}h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) - f(a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - g(b) \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) - f(a) = 0\end{aligned}$$

De donde  $h(a) = h(b)$ , con lo cual el teorema de Rolle es aplicable a la función  $h(x)$ , por lo tanto, existe  $c \in (a,b)$  tal que  $h'(c) = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{Por lo tanto, } 0 &= h'(c) \\ &= f'(c) - g'(c) \\ &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\end{aligned}$$

con lo cual  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

lo que demuestra el teorema. ❖

### Comentario.

El nombre de Incrementos Finitos para este teorema proviene del hecho que, cada punto  $c \in (a,b)$  puede ser escrito como  $c = a + \beta(b - a)$  con  $0 < \beta < 1$ , puesto que  $\beta = \frac{c - a}{b - a}$  y  $0 < \beta < 1$  entonces  $a < c < b$  y viceversa. De esta manera, la conclusión del Teorema de Lagrange se puede escribir de la forma  $f(b) - f(a) = f'(a + \beta(b - a))(b - a)$ ,  $0 < \beta < 1$

Haciendo  $a = x$  y  $b - a = \Delta x$ , obtenemos la forma  $f(x + \Delta x) - f(x) = F'(X + \beta \Delta x) \Delta x$ ,  $0 < \beta < 1$  la cual se conoce como la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange.

Un ejemplo curioso

Sea  $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  una función.

Note que  $f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

luego  $f(x)$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y así  $f$  es continua, por lo anterior, el Teorema de Lagrange es aplicable en todo intervalo  $[0, x]$ , de donde existe  $c \in (0, x)$  tal que  $f(x) - f(0) = xf'(c)$ , luego

$$x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = x \left( 2c \operatorname{sen} \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c} \right)$$

$$\cos \frac{1}{c} = 2c \operatorname{sen} \frac{1}{c} - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

note que cuando  $x \rightarrow 0$  también  $c \rightarrow 0$  y por lo tanto al aplicar el límite, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{c} = \lim_{x \rightarrow 0} 2c \operatorname{sen} \frac{1}{c} - \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{c} = 0 \text{ de lo cual obtenemos que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{c} = 0''.$$

Este ejemplo, lo hemos llamado un ejemplo curioso puesto que se ha obtenido un resultado el cual a priori contradice con el hecho de que  $\cos \frac{1}{x}$  no posee límite cuando  $x \rightarrow 0$ .

---

(3) Se ha utilizado el resultado que se obtiene al aplicar límite a la desigualdad  $-1 \leq \operatorname{sen} 1/x \leq 1$  lo que es lo mismo  $-x \leq x \operatorname{sen} 1/x \leq x$  así  $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} 1/x \leq 0$  con lo cual  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} 1/x = 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

Lo que ha ocurrido es que el valor  $c$  el cual depende de  $x$ , se va escogiendo en  $(0,x)$  a medida de  $x \rightarrow 0$ , luego estos valores de  $c$  van formando una sucesión de puntos que la podemos representar por  $(C_n)$  la cual tiende a cero y de manera tal que  $(\cos \frac{1}{C_n})$  converge a cero, pero para  $(C_n) = (\frac{1}{n})$  la cual también converge a cero, tenemos que  $(\cos \frac{1}{C_n}) = (\cos(n))$  la cual no tiene límite por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \text{ no existe.} \quad \text{✘}$$

Seguidamente presentaremos unas proposiciones las cuales se derivan del Teorema de Lagrange y que son de mucha importancia en las teorías de las antiderivadas (integral indefinida).

**PROPOSICIÓN 2.14:**

Sea  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua.  $f$  es constante en  $[a,b]$  si y sólo si  $f$  es derivable en  $(a,b)$  y su derivada es cero.

PRUEBA:

[  $\Rightarrow$  ] Supongamos que  $f$  es constante en  $[a,b]$ , es decir

$$f(x) = K \text{ para toda } x \in [a,b] \text{ y } K \text{ una constante real.}$$

Entonces, para

$x \in (a,b)$  y  $h$  un número real tal que  $x+h \in (a,b)$ , se tiene que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K - K}{h} = 0 ,$$

luego  $f$  es derivable con derivada cero.

[  $\Leftarrow$  ] Recíprocamente, supongamos que  $f'(x) = 0$  para toda  $x \in (a,b)$  y sean  $y, z \in [a,b]$  tal que  $y < z$  entonces  $f$  es continua en  $[y,z]$  y derivable en  $(y,z)$  con lo cual, por el teorema de Lagrange, existe  $c \in (y,z)$  tal que  $f(z) - f(y) = f'(c)(z-y)$  pero  $f'(c)=0$ , entonces  $f(z) = f(y)$  para toda  $y, z \in [a,b]$  con lo cual  $f$  es constante en el intervalo  $[a,b]$       ❖

**PROPOSICIÓN 2.15:**

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en el intervalo cerrado  $[a,b]$  tales que  $f'(x) = g'(x)$  para toda  $x$  en el intervalo  $(a,b)$ , entonces existe una constante  $K$  tal que  $f(x) = g(x) + K$ .

PRUEBA:

Definamos  $h(x) = f(x) - g(x)$  para toda  $x \in [a,b]$ , entonces  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ , luego por la proposición anterior  $h(x)$  es una función constante, o sea  $h(x) = K$  para toda  $x \in [a,b]$ , así  $f(x) = g(x) + K$ .      ❖

**COROLARIO 2.3:**

Sea  $f$  una función continua en  $[a,b]$  tal que  $f'(x) = 0$  para toda  $x \in (a,b)$ , excepto posiblemente para un número finito de puntos de  $(a,b)$ . Entonces  $f$  es constante sobre el intervalo  $[a,b]$ .

PRUEBA:

Sea  $A := \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  los posibles puntos de  $[a, b]$  tales que  $f'(a_i) \neq 0$  con  $i=1, 2, 3, \dots, n$ .

En cada intervalo  $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, b]$  se cumple la proposición anterior, con lo cual  $f$  es constante en cada uno de estos intervalos, es decir

$f(a) = f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = \dots = f(a_n) = f(b)$  luego  $f(x) = K$  ( $K$  constante) para todo  $x \in [a, b]$ . ❖

Otros resultados de mucha importancia que se deducen del Teorema de Lagrange los constituyen aquellos que se encaminan a la teoría de los valores máximos y mínimos de una función.

**PROPOSICIÓN 2.16:**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces:

1) Si  $f'(x) > 0$  entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$

i1) Si  $f'(x) < 0$  entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$

PRUEBA:

Sólo probaremos la parte 1). En efecto, sean  $y, z \in [a, b]$  tales que  $y < z$  luego por el teorema de Lagrange existe  $c \in (y, z)$  tal que  $f(z) - f(y) = f'(c)(z-y)$  como  $f'(c) > 0$  y  $z - y > 0$  entonces  $f(z) - f(y) > 0$  y así  $f(y) < f(z)$  con  $y < z$ . De lo anterior se tiene que  $f$  es creciente en  $[a, b]$ . ❖

**Ejemplo:**  $f(x) = e^x$  es una función creciente en  $\mathbb{R}$ , puesto que

$f'(x) = e^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, presentamos otro teorema del valor medio debido a Cauchy o **Teorema de los incrementos finitos de Cauchy** el cual representa una generalización al Teorema de Lagrange.

**TEOREMA 2.14: (Teorema de los incrementos finitos de Cauchy)**

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales definidas en el intervalo cerrado  $[a,b]$ . Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a,b]$  y derivables en el intervalo abierto  $(a,b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a,b)$  tal que

$$f'(c) [g(b) - g(a)] = g'(c) [f(b) - f(a)] \quad [1]$$

y si además,  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a,b)$  o  $g(b) \neq g(a)$  y las derivadas  $f'(x)$  y  $g'(x)$  no se anulan simultáneamente en ningún punto  $x$  del intervalo  $(a,b)$ . Entonces, la condición [1] se puede expresar así:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \left( \begin{array}{l} \text{fórmula de los incrementos} \\ \text{finitos de Cauchy} \end{array} \right)$$

PRUEBA:

Definamos la función auxiliar  $h: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = (A)f(x) - (B)g(x)$  donde  $A$  y  $B$  se eligen de manera tal que  $h(a) = h(b)$ , o sea,  $(A)f(a) - (B)g(a) = (A)f(b) - (B)g(b)$  de donde  $A[f(b)-f(a)] = B[g(b)-g(a)]$  luego la igualdad se verifica tomando  $A = g(b) - g(a)$  y  $B = f(b) - f(a)$ .

Por lo tanto  $h$  es una función que verifica con el Teorema de Rolle, con lo cual existe  $c \in (a,b)$  tal que

$$h'(c) = 0$$

$$(A)f'(c) - (B)g'(c) = 0 \quad \text{con lo cual}$$

$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$  lo que prueba la ecuación [1].

Ahora, supongamos que se tiene  $g'(x) \neq 0$  para toda  $x \in (a,b)$  entonces  $g(b) \neq g(a)$  ya que de lo contrario, es decir si,  $g(b) = g(a)$ , por el Teorema de Rolle tendríamos la existencia de  $\beta \in (a,b)$  tal que  $g'(\beta) = 0$  lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, al tener  $g'(c) \neq 0$  y  $g(b) - g(a) \neq 0$  podemos dividir [1] por el producto  $g'(c)[g(b) - g(a)] \neq 0$  para obtener:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Finalmente, si ocurre la condición en que  $g(b) - g(a) \neq 0$  y,  $f'(x)$  y  $g'(x)$  no se anulan simultáneamente. Entonces  $g'(c)$  es distinto de cero ya que si  $g'(c) = 0$ , en [1] se tendría  $f'(c)[g(b) - g(a)] = 0$  y como  $g(b) - g(a) \neq 0$  entonces  $f'(c) = 0$  lo que contradice que  $f'(c)$  y  $g'(c)$  no se anulan simultáneamente por lo tanto  $g'(c) \neq 0$  y al igual que en el caso anterior se obtiene el resultado requerido. ❖

**Observación:** Como se dijo al inicio del Teorema de Cauchy, este es una generalización del Teorema de Lagrange.

En efecto, sea  $g(x) = x$  y  $f(x)$  como en las hipótesis del Teorema de Cauchy, entonces existe  $c \in (a,b)$  tal que

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

$$f'(c)[b - a] = f(b) - f(a) .$$

(Note que  $g'(x) = 1$ )

## **CONCLUSIONES**

En la elaboración de este trabajo, hemos aprendido a reconocer la importancia que tiene el axioma de completitud, en la estructura de ese enorme "edificio" que representa el Análisis Matemático.

Existen en el Cálculo muchos resultados importantes, que le han dado un gran desarrollo a dicha teoría. En nuestro trabajo hemos hecho mención a muchos de ellos, probando en algunos casos su equivalencia con el axioma de completitud, y en otros no, ya que nuestro interés fundamental fue el de presentar una teoría que se derive de dicho axioma.

Esperamos poder despertar interés en el tema tratado, ya que del mismo se pueden desprender líneas de investigación, como por ejemplo, establecer los enunciados equivalentes al axioma de completitud y elaborar la demostración en cada caso.

Estamos convencidos, que una presentación de los números reales, tal como se dio en este trabajo, representa una alternativa pedagógica, para aquellos docentes que en un momento dado, se les asigne cursos introductorios de Cálculo o cursos sobre la fundamentación del Análisis Matemático.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aliprantis, C, y Burkinshzw, O. Principles of Real Analysis. Academic Press, Inc New York, 1990.
2. Bartle, G. Introducción al Análisis Matemático de una variable. Editorial Limusa. México, 1989.
3. Bosch Giral, Carlos. El Teorema de Bolzano'o un Teorema que no debe pasar inadvertido. Educación Matemática. Vol.5, N°3. México, Diciembre 1993.
4. Bottazzini, Humberto. The Higher Calculus. A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. Springer-Verlag. New York, 1986.
5. Bourbaki, Nicolás. Elements of Mathematics General Topology. Adison-Wesley Publishing Co. New York.
6. Bourbaki, Nicolás. Elementos de Historia de las Matemáticas. Alianza Editorial S.A. Madrid, España 1972.
7. Bravo F., Raúl. Fundamentos de los Sistemas Numéricos. Editorial Interamericana, S.A. México, 1971.

8. Bugrov, Ya. S. y Nikolski, S.M. Matemáticas Superiores. Traducción al Español. Editorial Mir. Moscú, 1980.
9. Burgos, Juan. Cálculo Infinitesimal de una Variable. McGraw-Hill. Edición 1. España, 1994.
10. Diaz, Ariscela. Una Alternativa en la Construcción de los Números Reales. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Panamá, 1995.
11. Dieudonné, Jean. Foundations of Modern Analysis. Academic Press, Inc. New York, 1980.
12. Dieudonné, Jean. Mathematics-the music of Reason. Springer- Verlag New York, 1992
13. Grattan-Guinness, I. Del Cálculo a la teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una Introducción Histórica Editorial Alianza Universidad. España, 1980.
14. Hernández, Jorge Motivación a la enseñanza de los Números Reales. Artículo. Universidad de Panamá, 1982.
15. Hernández, Jorge. El teorema de Weierstrass y sus Implicaciones en la Enseñanza del Cálculo. Memorias del

Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa.  
Universidad de Panamá, 1992

16. Hernández, Edith de. El Axioma de Completitud. Monografía.  
Universidad de Panamá, 1993.
17. Herstein, I.N. Algebra Abstracta. Grupo Iberoamérica,  
1988.
18. Heyd, David. Guía de Cálculo McGraw-Hill Edición 3  
México, 1993.
19. Hewitt, E. Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag.  
New York, 1974.
20. Kudriáv'tsev, L. D. Curso de Análisis Matemático Tomo I  
Editorial Mir, Moscú, 1983.
21. Lang, Serge. Analysis I. Adison-Wesley Publishing Co. New  
York, 1974.
22. National Council of Teachers of Mathematics. Editorial  
Trillas S.A. México, 1986.
23. Royden, H.L. Real Analysis. MacMillan Company. New York,  
1963.

24. Rudin, W. Principio de Análisis Matemático. McGraw-Hill, 1980.
  
25. Sánchez F., Carlos. Análisis Matemático Tomo I. Pueblo y Educación. La Habana, 1982.
  
26. Simmons G.F. Topology and Modern Analysis. McGraw-Hill Book Company. New York, 1963.
  
27. Stein, Sherman. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1. Editorial McGraw-Hill. Edición 5. Colombia, 1995.
  
28. Tjonov, A N. Algo acerca de la Matemática Aplicada. Editorial Mir. Moscú, 1983.
  
29. White, A. J. Introducción al Análisis Real. Promoción Cultural,S.A. Barcelona, 1973.