

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA



"EL PROBLEMA DE DIRICHLET"
Origen y desarrollo histórico, desde el
Siglo XVII hasta el siglo XIX

Por:

José María Vásquez

Tesis presentada como uno de los
requisitos para optar por el grado
de Maestro en Ciencias con Especialización
en Matemática Educativa.

Panamá, República de Panamá

1989



INSTITUTO DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, _____

ENE 3 0 1990

Aprobado por:

Director de Tesis

Juan M. Nole

Juan Manuel Nole H., M. Sc.

Miembro del Jurado

Elmir Carvalho

Elmir Carvalho, M. Sc.

Miembro del Jurado

Alvaro Pino Niño

Alvaro Pino Niño, M. Sc.

Fecha

21 / noviembre / 1989

Obs. del autor

740 216

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico con mucho cariño a mis hijos Shelmar y José, a mi esposa Ina Sween de Vásquez, y a mi madre, la Sra. Leonidas Ríos, quienes constituyen mi fuente de motivación para seguir adelante y alcanzar las metas de la superación.

José

AGRADECIMIENTO

Deseamos dejar constancia de nuestro más profundo y sincero agradecimiento al Prof. Juan Manuel Nole, M.Sc., asesor de esta tesis, porque en todo momento estuvo pendiente del avance del trabajo y siempre nos brindó su ayuda y su apoyo de manera incondicional.

También agradecemos su colaboración al Prof. Ramiro Gómez y a la Sra. Inés M. de Linares.

INDICE

INTRODUCCION	viii
CAPITULO I: PRELIMINARES	
1.1 Teorema de la Divergencia y Fórmulas de Green	1
1.1.1 Gradiente de una función escalar	1
1.1.2 Divergencia de una función escalar	3
1.1.3 Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss- Ostrogradski	6
1.1.4 Las Fórmulas de Green	9
1.2 El Cálculo Variacional	16
1.2.1 Método de variaciones en problemas con fronteras fijas	17
1.2.1.1 Conceptos, definiciones y notaciones	17
1.2.1.2 Extremos en funcionales que dependen de funciones de varias variables indepen- dientes	23
1.3 Las Ecuaciones Integrales y la Alternativa de Fredholm ...	36
1.3.1 Ecuaciones Integrales	36
1.3.2 La Alternativa de Fredholm	38
CAPITULO II: EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y SUS ORIGENES	
2.1 Planteamiento del Problema de Dirichlet	45
2.2 Orígenes del Problema de Dirichlet	52
2.2.1 Campo de fuerzas creado por una partícula de masa m	58

2.2.2	Campo de fuerzas creado por una distribución volumétrica de masa	61
2.2.3	Campo de fuerzas creado por una distribución superficial de masa	64
2.3	Los Potenciales Newtonianos	66
2.4	El Potencial de Doble Capa	70
2.4.1	Potencial generado por una partícula magnética..	70
2.4.2	Potencial generado por una distribución superficial de dobletes o partículas magnéticas	72
2.5	Las Ecuaciones de Laplace y de Poisson	74
CAPITULO III: DESARROLLO HISTORICO DEL PROBLEMA DE DIRICHLET DURANTE EL SIGLO XIX		
3.1	El Método de Fourier	95
3.2	El Método de la Función de Green	109
3.3	El Principio de Dirichlet	130
3.4	EL Método de las Ecuaciones Integrales	144
3.5	La Unicidad en el Problema de Dirichlet	146
3.6	Ejemplos de Zaremba y Lebesgue sobre la existencia de regiones en las que el problema de Dirichlet no tiene solución	148
	CONCLUSIONES	153
	BIBLIOGRAFIA	156
	APENDICE	160

"INTRODUCCION"

Como es normal, cuando se intenta realizar un trabajo de investigación y se ha determinado con claridad el tema del mismo, es preciso localizar, de ser posible, los trabajos de investigación ya existentes, relacionados estrechamente con el que nos hemos propuesto. Sobre escritos e investigaciones referentes al desarrollo histórico del problema de Dirichlet durante el siglo XIX, podemos mencionar los trabajos de Kellogg, Oliver D. [15] y Figueiredo, D.G. [12].

El propósito principal de este trabajo es el de destacar, en forma categórica, la importancia histórica que ha tenido el estudio del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace durante el siglo XIX para el desarrollo y la evolución de la matemática hasta nuestros días. De manera más precisa, esta investigación de carácter histórico, pretende, por medio de la recopilación, el estudio y el análisis crítico de la información extraída de una basta y selecta bibliografía, demostrar: cómo el interés, cada vez más creciente, de los matemáticos y físicos de la época por encontrarle una solución general al problema de Dirichlet, trajo como consecuencia importantes contribuciones para el desarrollo y el enriquecimiento de la matemática, que se traducen en el surgimiento de nuevas y muy fructíferas ramas de esta disciplina, como lo son: la teoría de las series de Fourier, el cálculo de variaciones con integrales múltiples, la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm, y las aplicaciones de algunos de los métodos ideados para resolverlo, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales de orden superior al

de la ecuación de Laplace y en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones elípticas.

Para el logro de nuestro objetivo, y para que la información recopilada aparezca ante el lector en una secuencia adecuada, que le permita tener, en cada instante, una visión clara del contenido y sus proyecciones, hemos dividido la obra en tres partes. Un primer capítulo que denominamos "Preliminares", que contiene una serie de definiciones, resultados, teoremas y demostraciones, relacionados con ciertos aspectos matemáticos básicos que son utilizados posteriormente en el capítulo III, en el desarrollo de los distintos métodos creados para resolver el problema de Dirichlet. El segundo capítulo trata sobre el origen del problema de Dirichlet, posiblemente como consecuencia del estudio de ciertos problemas de la física-matemática, que fueron objeto de atención por parte de los investigadores desde el siglo XVII hasta la primera mitad del siglo XIX; como lo fueron: "la Teoría de la Gravitación Universal", "la Teoría del Potencial" y "los Campos de Fuerzas". En el tercer capítulo presentamos, propiamente, el desarrollo histórico del problema de Dirichlet a través de un estudio cronológico, analítico y crítico de los más importantes métodos ideados para resolverlo, por parte de los matemáticos y físicos del siglo XIX. Al final del Capítulo III, presentamos una sección especial en la que formulamos las conclusiones de este trabajo de investigación. Después de las conclusiones, hemos incluido un "APENDICE" en el cual exponemos un breve panorama histórico acerca de los avances realizados por los matemáticos en torno al estudio del problema de Dirichlet y sus proyecciones durante

el siglo XX.

Por otro lado, procurando imprimirle a este trabajo un carácter didáctico, el desarrollo de los diferentes temas abordados se ha hecho de la manera mas clara y sencilla posible, complementando la presentación con gráficas, y evitando omisiones en las demostraciones que pudieran opacar la claridad de las mismas.

CAPITULO I

"PRELIMINARES"

1.1.- TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y FORMULAS DE GREEN.

1.1.1 Gradiente de una función escalar.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región, o bien, un conjunto abierto y conexo, y designemos con $\partial\Omega$ y $\bar{\Omega}$, su frontera y su cerradura respectivamente. Sea además, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, una función escalar real diferenciable en $x \in \Omega$. La derivada f' , de f , es un elemento de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$, el espacio dual de \mathbb{R}^n . A $f'(x)$ se le llama también diferencial de f en el punto x y se denota por $df(x)$. La matriz jacobiana de la función f tiene una fila y n columnas, o sea:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right),$$

y el diferencial $df(x)$ se define como:

$$df(x) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot h_i$$

Para "K" entero no negativo, $C^K(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones escalares reales definidas en Ω con derivadas parciales continuas y acotadas hasta de orden K. $C^0(\bar{\Omega})$ es el conjunto de todas las funciones escalares reales definidas y continuas en $\bar{\Omega}$.

El producto interno natural de \mathbb{R}^n induce un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\approx (\mathbb{R}^n)^* \\ x &\longrightarrow x^* , \end{aligned}$$

tal que: $x^*(y) = \langle x, y \rangle$. El "gradiente" de la función $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, en el punto $x \in \Omega$ es el vector $\text{grad } f(x) \in \mathbb{R}^n$, que corresponde al funcional lineal $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ por medio del isomorfismo. En otras palabras, el gradiente está caracterizado por la propiedad:

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = f'(x)(v),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. En particular, cuando v es un vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , $\langle \text{grad } f(x), e_1 \rangle = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$,

es decir que:

$$\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot e_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

Observación 1.1.1.1.

El gradiente de una función $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se designa también por ∇f , donde el símbolo " ∇ ", (nabla), es un operador conocido como operador de Hamilton. Así, para $f \in C^1(\Omega)$, el gradiente de f : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, es una función de Ω en \mathbb{R}^n , o sea, un campo vectorial sobre Ω .

1.1.2 Divergencia de una función vectorial.

Funciones armónicas.

Para un campo vectorial $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con componentes $F_j \in C^1(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$, la divergencia de F ,

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}, \text{ es una función de } \Omega \text{ en } \mathbb{R}.$$

Así, para $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$,

$$\operatorname{div} (\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \text{ El segundo miembro de esta}$$

última igualdad se llama operador de Laplace o Laplaciano de la función escalar real $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, y se denota

Δf .

La ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

se llama ecuación de Laplace, y la función f que satisface esta ecuación en cada punto de la región Ω se denomina "armónica" en Ω .

El ejemplo más simple e importante de función armónica en el espacio de tres dimensiones es el siguiente:

Ejemplo 1.1.2.1.

Sea $Q(a,b,c)$ un punto fijo y $P(x,y,z)$ un punto variable del espacio \mathbb{R}^3 , cuya distancia al punto Q es:

$$r = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}$$

La función $f = 1/r$, es una función armónica en todo el espacio, excepto en el punto singular Q , es decir:

$$\Delta f = \Delta (1/r) = 0$$

En efecto, tenemos que:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

de donde:

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2(x-a),$$

y entonces,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}$$

Como,

$$\frac{\partial (1/r)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x},$$

resulta que:

$$\frac{\partial (1/r)}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}$$

Derivando con respecto a x en la igualdad anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2} = -\frac{r^3 - 3(x-a)\frac{r^2(x-a)}{r}}{r^6},$$

y finalmente,

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2} = -\frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5}$$

De forma análoga, resulta que:

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial y^2} = -\frac{r^2 - 3(y-b)^2}{r^5}$$

y,

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial z^2} = -\frac{r^2 - 3(z-c)^2}{r^5}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(1/r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(1/r)}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{3r^2 - 3[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}{r^5} \\ & = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} \\ & = 0 \end{aligned}$$

1.1.3 Teorema de la divergencia o teorema de Gauss-Ostrogradski.

Teorema 1.1.3.1

Sea Ω una región limitada de \mathbb{R}^3 , cuya frontera $\partial\Omega$ tiene un plano tangente en cada uno de sus puntos, sea $\gamma = \gamma(x)$ la normal unitaria exterior en cada punto $x \in \partial\Omega$, y sea $F: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial cuyas componentes F_j , $j = 1, 2, 3$, son funciones en $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Entonces:

$$\iiint_{\Omega} \text{div } F \, d\tau = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \gamma \, ds, \quad (1.1.3.1)$$

donde $d\tau$ es el elemento de volumen del cuerpo Ω , ds es el elemento de área de la superficie $\partial\Omega$ y $F \cdot \gamma = \sum_{j=1}^3 F_j \gamma_j$, expresa el producto escalar de vectores en \mathbb{R}^3 . (1)

El teorema de la divergencia es válido para regiones Ω de un tipo más general, en las cuales la frontera $\partial\Omega$ puede dejar de tener normal en un subconjunto de puntos que no sea muy grande. (2) En vista de esto, el teorema puede aplicarse, por ejemplo, a regiones con aristas

-
- (1) Véase en [21] Piskunov, N. -"Cálculo Diferencial e Integral (Tomo II), una demostración de este teorema para el caso en que Ω es una región regular.
- (2) Ver [11] Figueiredo D.G., "Artículo publicado en el American Mathematical Monthly. (Vol. 71 de 1964, pags. 619 a 622).

como los cubos.

Una interpretación hidromecánica de la fórmula (1.1.3.1) es la siguiente:

Supongamos que $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ es el vector velocidad de un líquido que corre a través del dominio Ω . En tal caso, la integral de superficie en la fórmula (1.1.3.1) es la integral de la proyección del vector F sobre la normal γ . Esta integral da la cantidad de líquido que sale de Ω (o que entra en Ω , si la integral es negativa), en la unidad de tiempo, y dicha cantidad, de acuerdo a la citada fórmula, se expresa también mediante la integral triple de $\text{div } F$.

La ecuación (1.1.3.1) es la forma vectorial del teorema de la divergencia, y puede enunciarse así: "La Integral de la divergencia de un campo vectorial F , extendida por un cierto volumen, es igual al flujo del vector a través de la superficie que limita a este volumen.

El teorema de la divergencia tiene una versión, en el caso del plano R^2 , muy parecida a la del espacio R^3 :⁽¹⁾

Sea Ω una región limitada de R^2 , cuya frontera $\partial\Omega$ tiene una recta tangente en cada uno de sus puntos. Sea $\gamma = \gamma(x)$ la normal unitaria exterior en cada punto

(1) Ver [4] Bugrov Ya. S. - "Matemáticas Superiores" (Cap. 3, pág. 313).

$x \in \partial\Omega$ y $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial cuyas componentes F_j , $j = 1, 2$, son funciones en $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Entonces:

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F \, ds = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta \, dl, \quad (1.1.3.2)$$

donde dl es el diferencial del arco $\partial\Omega$.

Si $F = P(x,y)e_1 + Q(x,y)e_2$, entonces:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} (P dy - Q dx) \quad (1.1.3.3)$$

Esta última fórmula se conoce como la fórmula de Green.

El teorema de la divergencia fue demostrado por primera vez por Ostrogradski en 1828, y posteriormente, él mismo desarrolló su generalización a un espacio n -dimensional:

$$\int \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \right) dV_n = \int \frac{\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}}$$

En las investigaciones de Ostrogradski, el teorema de la divergencia, (en \mathbb{R}^3), a parecía como una fórmula de balance hidrodinámico, la cual establecía la equivalencia del flujo líquido que pasa en la unidad de tiempo:

- a) Partiendo del control de las fuentes dentro del volumen;
- b) Partiendo de las velocidades de fluencia a través de la superficie.

Once años después, en 1839, Gauss utilizó esta fórmula para relacionar la magnitud de las fuerzas del campo potencial dado, con masa o con carga común situada dentro de su superficie. Estos resultados y otros de gran importancia, aparecen en una publicación científica de Gauss, realizada en 1840, bajo el título de "Teoremas generales relativos a las fuerzas de atracción y repulsión ..., actuando inversamente proporcional al cuadrado de la distancia".

En la actualidad, el teorema de la divergencia se denomina también "Teorema de Gauss-Ostrogradski, lo que evidentemente es justo.

1.1.4.- Las Fórmulas de Green.

Teorema 1.1.4.1

Sea Ω una región de \mathbb{R}^3 para la cual es válido el teorema de la divergencia, y sean u y v dos funciones en $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, entonces:

$$(I) \quad \iiint_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{z} + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{z} = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

$$(II) \quad \iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, d\mathbf{z} = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

$$(III) \quad u(x) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{\|x-y\|} dz + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds +$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\|x-y\|} ds$$

Demostración.

Para la demostración de la fórmula (I) es preciso demostrar previamente la siguiente identidad:

$$\operatorname{div} (u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \quad (1.1.4.1)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (u \nabla v) &= \operatorname{div} \left(u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &\quad + u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \end{aligned}$$

Primera fórmula de Green:

De la fórmula (1.1.4.1) se deduce que:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dz + \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dz = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (u \nabla v) dz$$

Aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss al segundo miembro de esta igualdad, obtenemos.

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \iint_{\partial\Omega} (u \nabla v) \cdot \eta ds,$$

entonces:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \iint_{\partial\Omega} u (\nabla v \cdot \eta) ds,$$

y como $\nabla v \cdot \eta = \langle \nabla v, \eta \rangle = \frac{dv}{d\eta}$,

resulta que:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \iint_{\partial\Omega} u \frac{dv}{d\eta} ds, \quad (1.1.4.2)$$

con lo cual queda demostrada la primera fórmula de Green.

Segunda fórmula de Green:

Utilizando la primera fórmula de Green, en intercambiando las funciones u y v tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \iint_{\partial\Omega} u \frac{dv}{d\eta} ds,$$

y

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\tau = \iint_{\partial\Omega} v \frac{du}{d\eta} ds$$

Restando miembro a miembro las dos últimas igualdades, y tomando en cuenta que $\nabla v \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \nabla v$, obtenemos la segunda fórmula de Green:

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\partial\Omega} (u \frac{dv}{d\eta} - v \frac{du}{d\eta}) ds. \quad (1.1.4.3)$$

Si en (1.1.4.2) sustituimos u por v , queda:

$$\iiint_{\Omega} v \Delta v d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\tau = \iint_{\partial\Omega} v \frac{dv}{d\eta} ds, \quad (1.1.4.4)$$

y si en (1.1.4.2) o en (1.1.4.3), se hace $u = 1$, resulta:

$$\iiint_{\Omega} \Delta v d\tau = \iint_{\partial\Omega} \frac{dv}{d\eta} ds, \quad (1.1.4.5)$$

que constituyen dos casos particulares interesantes de las fórmulas de Green.

Tercera fórmula de Green

Consideremos, ahora, un dominio o volumen Ω limitado por una superficie $\partial\Omega$ que cumple con las condiciones de regularidad exigidas para que sea válido el teorema de la divergencia. Vale entonces la segunda fórmula de Green, la cual vamos a aplicar al caso de ser $v = 1/r$, donde r tiene la definición antes expuesta y Q lo supondremos interior a Ω .

Para evitar el punto singular Q , (en el cual $r = 0$ y $v = \infty$), excluirémos de Ω el volumen de una esfera de radio ε y centro en Q . Sea Ω' el volumen resultante y, Σ la superficie de la esfera cerrada $B'(Q, \varepsilon)$.

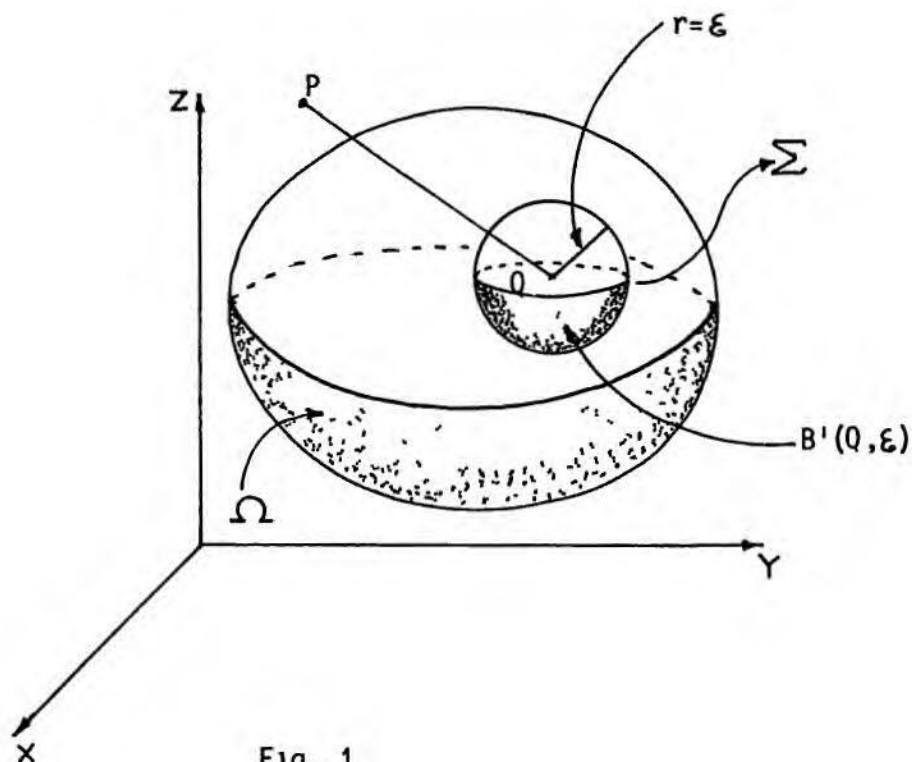


Fig. 1

Es claro que $\Omega' = \Omega - B'(Q, \epsilon)$, y que su frontera $\partial\Omega' = \partial\Omega + \Sigma$. La fórmula (II) se escribe en este caso:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega'} \frac{\Delta u}{r} d\mathcal{V} &= \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{d\mathcal{N}} - u \frac{d}{d\mathcal{N}} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds + \\ &+ \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{d\mathcal{N}} - u \frac{d}{d\mathcal{N}} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \quad (1.1.4.6) \end{aligned}$$

Para la integral sobre Σ del segundo miembro de la igualdad anterior, observemos que:

- (1) $u \in C^1(\bar{\Omega})$, entonces $\frac{du}{d\mathcal{N}}$ es continua sobre la superficie cerrada $\Sigma \subset \bar{\Omega}$, y en consecuencia, $\frac{du}{d\mathcal{N}}$ es una

función acotada en el dominio Σ . Es decir,

$\exists K \in \mathbb{R}, K > 0$, tal que:

$$\left| \frac{du}{d\eta}(x,y,z) \right| < K, \quad \forall (x,y,z) \in \Sigma$$

- (2) $\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$, es positiva por el hecho de que la normal η se considera siempre exterior al volumen sobre el cual se integra, en este caso, Ω' ; y como $r = \varepsilon$ en la superficie Σ , $\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}$, para todo punto P sobre dicha superficie.
- (3) Las funciones $\frac{1}{r} \frac{du}{d\eta}$ y $u \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)$ son continuas sobre la superficie Σ .

Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{d\eta} - u \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] ds &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{du}{d\eta} ds - \iint_{\Sigma} u \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) ds \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{du}{d\eta} ds - \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} u ds \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \frac{du}{d\eta} ds - \iint_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon^2} u ds \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas esféricas de centro en Q, en las dos últimas integrales, se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \frac{du}{d\eta} ds - \iint_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon^2} u ds &= \iint_{\Sigma} \varepsilon \frac{du}{d\eta} \sin\theta d\theta d\varphi - \iint_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \iint_{\Sigma} \varepsilon \frac{du}{d\eta} \sin\theta d\theta d\varphi - \iint_{\Sigma} u \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ en esta última expresión, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{\Sigma} \epsilon \frac{du}{d\gamma} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi - \iint_{\Sigma} u \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \right] &= \\ &= -u(Q) \iint_{\Sigma} \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \\ &= -u(Q) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \right) d\varphi \\ &= -2u(Q) \int_0^{\pi} d\varphi \\ &= -4\pi u(Q) \end{aligned}$$

Volviendo a la igualdad (1.1.4.6), al pasar al límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, tenemos que.

$$\iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} d\mathcal{V} = \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{d\gamma} - u \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds - 4\pi u(Q),$$

y entonces:

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} d\mathcal{V} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{du}{d\gamma} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{1}{r} \right) ds,$$

o lo que resulta igual, por ser $r = ||P-Q||$:

$$\begin{aligned} u(Q) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u(P)}{||P-Q||} d\mathcal{V} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{||P-Q||} \frac{du(P)}{d\gamma} ds + \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u(P) \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{1}{||P-Q||} \right) ds, \end{aligned}$$

que es la importante tercera fórmula de Green.

1.2.- EL CALCULO VARIACIONAL.

El concepto de funcional es una generalización directa y natural del concepto de función, e incluye a este como un caso especial.

Definición 1.2.1

Sea M un conjunto de objetos de cualquier clase; pueden ser números, puntos de un espacio, curvas, funciones, superficies, estados, o incluso, movimientos de un sistema mecánico; si cada elemento x del conjunto M se corresponde con un número " y ", decimos que sobre el conjunto M hay definido un funcional $y = F(x)$.

El cálculo de variaciones es un capítulo particular de la teoría de funcionales. En él se consideran funcionales definidos sobre un conjunto de funciones, y el problema consiste en la construcción de una teoría de valores extremos para tales funcionales. Esta rama de la matemática comenzó a desarrollarse en 1696, con los estudios realizados por Iohanis Bernoulli, llegando a ser una disciplina matemática independiente, con métodos propios de investigación, después de los trabajos fundamentales del miembro activo de la Academia de Ciencias de San Petesburgo, Leonard Euler (1707-1783), quien puede considerarse, con pleno derecho, el fundador del cálculo variacional.

De manera particular, el cálculo variacional adquirió importancia después del descubrimiento de su conexión con muchas

situaciones de la física y la mecánica. La razón de esta conexión se puede ver como sigue: "para que una función proporcione un extremo de un funcional, es necesario que verifique una cierta ecuación diferencial, (como veremos más adelante en el desarrollo de este parágrafo). Por otra parte, es bien sabido que muchos problemas de la mecánica y la física se escriben con frecuencia en forma de tales ecuaciones, (ecuación de la cuerda vibrante, ecuación del calor etc.), y resultó que muchas ecuaciones de este tipo aparecían entre las ecuaciones diferenciales del cálculo de variaciones. De este modo fue posible considerar las ecuaciones de la mecánica y la física como condiciones extremas para funcionales convenientes, y enunciar las leyes de la física en la forma de exigir un valor extremo, en particular un mínimo, para ciertos funcionales. Todo ello introdujo nuevos puntos de vista en la física y en la mecánica, ya que ciertas leyes se podrían sustituir por enunciados equivalentes en términos de "principios del mínimo". Esto, a su vez, abrió la posibilidad de un nuevo método de resolución de problemas físicos, (en forma exacta o aproximada), buscando los mínimos de los correspondientes funcionales.

1.2.1 Método de variaciones en problemas con fronteras fijas.

1.2.1.1 Conceptos, definiciones y notaciones.

Antes de entrar, propiamente, en el estudio de un método de resolución de problemas variacionales, esto es, problemas sobre la investigación de los extremos de los

funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes, es preciso revisar ciertos conceptos y resultados importantes relacionados con esta materia.

Los funcionales pueden ser dependientes de una función de una variable, de una función de varias variables, o de varias funciones de una o de varias variables.

Si "v" es un funcional dependiente de la función "y(x)", lo denotaremos por: $v = v [y(x)]$.

Se llama incremento a la variación " δy " del argumento "y(x)" del funcional $v [y(x)]$ a la diferencia entre dos funciones: $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Se supone que y(x) varía arbitrariamente dentro de cierta clase de funciones.

Para los funcionales de la forma: $v [y(x)]$, se define la "variación" como la derivada de la función $v [y(x) + \alpha \delta y]$ con respecto a α , cuando $\alpha = 0$, donde α es un parámetro numérico. En forma abreviada, la "variación" del funcional $v [y(x)]$ se denota por el símbolo " δv " y está dada por la expresión:

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v [y(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0}$$

El funcional $v [y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y = y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y = y_0(x)$ no es mayor que $v [y_0(x)]$, es decir:

$$\Delta v = v [y(x)] - v [y_0(x)] \leq 0$$

Análogamente, se define la curva $y = y_0(x)$ en la que hay un mínimo. En tal caso,

$$\Delta v = v [y(x)] - v [y_0(x)] \geq 0,$$

para todas las curvas $y = y(x)$ cercanas a $y = y_0(x)$.

Teorema 1.2.1.1

Si el funcional $v [y(x)]$, que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $y = y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición del funcional, entonces, para $y = y_0(x)$ será:

$$\delta v = 0$$

Este teorema se conoce como "condición necesaria de extremo para el funcional $v [y(x)]$ ".

Demostración:

Para $y_0(x)$ y δy fijos,

$$v [y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$$

es una función de α , la cual por hipótesis, tiene en $\alpha = 0$ un máximo o un mínimo; por consiguiente, la derivada de la función φ cuando $\alpha = 0$ es nula:

$$\varphi'(0) = 0,$$

o lo que resulta igual:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v [y(x) + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha = 0} = 0,$$

esto es:

$$\delta v = 0$$

De este modo, en las curvas en las que el funcional tiene un extremo, su variación es igual a cero. Aquí, el parámetro α puede tomar tanto valores positivos como negativos en un entorno del punto $\alpha = 0$, puesto que $y_0(x)$ es un punto interior de la región de definición del funcional.

Observación 1.2.1.1.

Todas las definiciones expuestas en la sección 1.2.1.1, así como el teorema 1.2.1.1, se generalizan a los funcionales dependientes de varias funciones desconocidas:

$$v [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] ,$$

o dependientes de una o de algunas funciones de varias variables:

$$v [z(x_1, x_2, \dots, x_n)] ,$$

o

$$v [z_1(x_1, \dots, x_n), z_2(x_1, \dots, x_n), \dots, z_n(x_1, \dots, x_n)]$$

Lema 1.2.1.1 (Lema fundamental del cálculo variacional)

"Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

siendo $\phi(x)$ una función continua en el intervalo

$[x_0, x_1]$, entonces:

$$\phi(x) = 0$$

en dicho intervalo.

Observación 1.2.1.2

La afirmación del lema y su demostración no varían si a la función $\eta(x)$ se le imponen las siguientes condiciones: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$; $\eta(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden "p"; $|\eta^{(s)}(x)| < \epsilon$,
($s = 0, 1, \dots, q; q \leq p$).

Demostración:

Supondremos que para algún $x = \bar{x}$ contenido en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$, la función $\phi(x)$ es distinta de cero, y probaremos que existe necesariamente una función $\eta(x)$ para la cual:

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \eta(x) dx \neq 0,$$

lo cual contradice la hipótesis del lema.

En efecto, de la continuidad de $\phi(x)$ se deduce que si $\phi(x) \neq 0$, entonces existe un cierto entorno $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ del punto \bar{x} en el cual $\phi(x)$ conserva su signo. Pero entonces, tomando una función $\eta(x)$ que también conserve su signo en dicho entorno $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ y sea igual a cero fuera del mismo, (Fig. 2), se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \phi(x) \eta(x) dx \neq 0,$$

ya que el producto $\phi(x) \eta(x)$ conserva su signo en el intervalo $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$ y se anula fuera del mismo. De este modo hemos llegado a una contradicción; por lo tanto, $\phi(x) = 0$. La función $\eta(x)$ puede escogerse, por

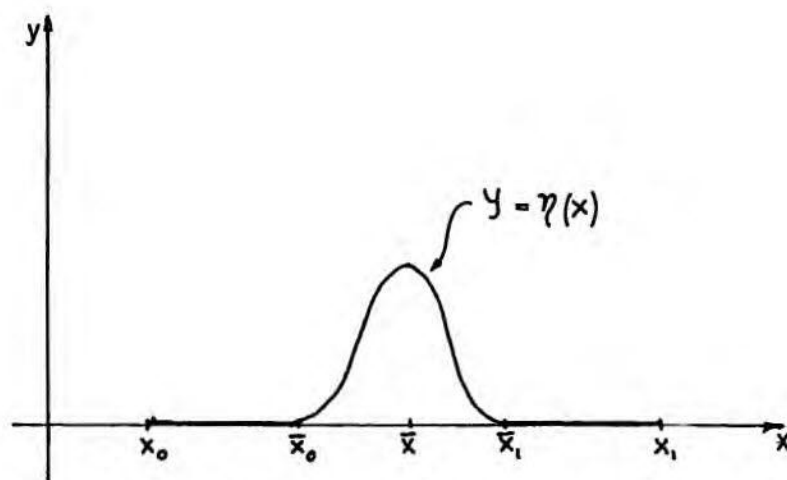


Fig. 2

ejemplo, así: $\eta(x) = 0$, fuera del segmento $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$;
 $\eta(x) = K(x-\bar{x}_0)^{2n}(x-\bar{x}_1)^{2n}$, en el segmento $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$,
donde n es un número entero positivo y K un factor constante. Es evidente que $\eta(x)$ así definida, satisface las condiciones consideradas anteriormente: es continua, tiene derivadas hasta de orden $2n-1$, se anula en los puntos x_0 y x_1 , y puede hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto, conjuntamente con sus derivadas, disminuyendo el módulo del factor K .

Observación 1.2.1.3

Un lema análogo se cumple también para integrales

múltiples, es decir, integrales en las que intervienen funciones de varias variables: $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y $\eta(x_1, \dots, x_n)$.

1.2.1.2 Extremos en funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes.

Analícemos el extremo del funcional;

$$v[z(x,y)] = \iint_D F(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy;$$

bajo los siguientes supuestos: en la frontera "C" de la región "D" los valores de la función $z(x,y)$ están dados, es decir, está dado un contorno C' por el cual deben pasar todas las "superficies admisibles", (Fig. 3), a las que nos referiremos dentro de poco. Para abreviar la escritura, designemos $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. La función F se considerará de clase C^2 con respecto a los parámetros x, y, z, p y q , y la superficie $z = z(x,y)$ en la cual se realiza el extremo, se supone también de clase C^2 en la región D .

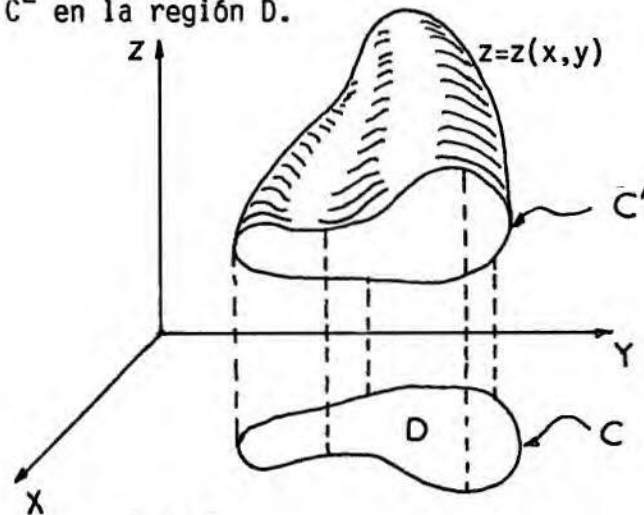


Fig. 3

Consideremos, ahora, la familia monoparamétrica de superficies:

$$z = z(x,y, \alpha) = z(x,y) + \alpha \delta z$$

que contiene, para $\alpha = 0$, la superficie $z = z(x,y)$, en la cual se realiza el extremo y, para $\alpha = 1$, cierta superficie admisible $z = \bar{z}(x,y)$, donde

$\delta z = \bar{z}(x,y) - z(x,y)$. El conjunto de superficies admisibles, (o de funciones admisibles), dentro de cierta clase de funciones $z = z(x,y)$, está determinado por las siguientes condiciones:

- a) z es de clase C^2
- b) Para todo $(x,y) \in C$, $z(x,y) \in \bar{C}'$

En las funciones de la familia $z(x,y, \alpha)$, el funcional "v" se transforma en una función de α , la cual, por hipótesis tiene un extremo cuando $\alpha = 0$, por lo tanto,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v [z(x,y, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$$

Así, tenemos que la variación del funcional $v [z(x,y, \alpha)]$ es igual a:

$$\delta v = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint F [x,y,z(x,y, \alpha), p(x,y, \alpha), q(x,y, \alpha)] dx dy \right\}_{\alpha=0}$$

Como F es de clase C^2 , podemos derivar dentro del signo de integral, y utilizando la diferencial parcial total de F , que denotaremos por $\partial \{ F \}$, se tiene que:

$$\partial \{F\} = \frac{\partial F}{\partial x} \partial x + \frac{\partial F}{\partial y} \partial y + \frac{\partial F}{\partial z} \partial z + \frac{\partial F}{\partial p} \partial p + \frac{\partial F}{\partial q} \partial q,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F\}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

y como $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ se anulan, ya que x y y permanecen constantes al variar α , haciendo:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = F_p \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial q} = F_q,$$

resulta que:

$$\frac{\partial \{F\}}{\partial \alpha} = F_z \frac{\partial z}{\partial \alpha} + F_p \frac{\partial p}{\partial \alpha} + F_q \frac{\partial q}{\partial \alpha}$$

Además, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [z(x,y) + \alpha \delta z] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [z(x,y) + \alpha \bar{z}(x,y) - \alpha z(x,y)] \\ &= \bar{z}(x,y) - z(x,y) \\ &= \delta z, \end{aligned}$$

y análogamente, siendo $p(x,y,\alpha) = p(x,y) + \alpha \delta p$

y $q(x,y,\alpha) = q(x,y) + \alpha \delta q$, se tiene que:

$$\frac{\partial p(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = \delta p \quad \text{y} \quad \frac{\partial q(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = \delta q ,$$

entonces,

$$\frac{\partial \{F\}}{\partial \alpha} = F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q$$

por lo tanto:

$$\delta v = \iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy$$

Ahora, concentremos la atención en la integral:

$$\iint_D [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy$$

Probaremos primero que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} = \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z + F_p \delta p \quad (1.2.1.1)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} = \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z + F_q \delta q \quad (1.2.1.2)$$

En tal sentido, haremos solamente la demostración de la ecuación (1.2.1.1), ya que la ecuación (1.2.1.2) se obtiene de manera similar. Consideremos la diferencial parcial total

$$\partial \{F_p \delta z\} :$$

$$\begin{aligned} \partial \{F_p \delta z\} &= \frac{\partial F_p \delta z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial y} \partial y + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial z} \partial z + \\ &+ \frac{\partial F_p \delta z}{\partial p} \partial p + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial q} \partial q, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F_p \delta z\}}{\partial x} &= \frac{\partial F_p \delta z}{\partial x} + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial F_p \delta z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x}, \end{aligned}$$

y como $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F_p \delta z\}}{\partial x} &= \frac{\partial F_p \delta z}{\partial x} + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial z} p + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F_p \delta z}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \delta z + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_p}{\partial z} \cdot \delta z + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) p + \\ &+ \left(\frac{\partial F_p}{\partial p} \cdot \delta z + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_p}{\partial q} \delta z + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \delta z + \frac{\partial F_p}{\partial z} p \delta z + \frac{\partial F_p}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta z + \\ &+ \frac{\partial F_p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \delta z + F_p \delta p + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial z} p + \\ &+ F_p \frac{\partial \delta z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + F_p \frac{\partial \delta z}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \end{aligned}$$

Aquí, $\frac{\partial \delta z}{\partial z}$, $\frac{\partial \delta z}{\partial p}$ y $\frac{\partial \delta z}{\partial q}$ son nulas, luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F_p \delta z\}}{\partial x} &= \left[\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_p}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial F_p}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F_p}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \right] \delta z + F_p \delta p \\ &= \frac{\partial \{F_p\}}{\partial x} \cdot \delta z + F_p \delta p, \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la ecuación (1.2.1.1).

De las ecuaciones (1.2.1.1) y (1.2.1.2), resulta:

$$\begin{aligned} F_p \delta p &= \frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} \delta z \\ F_q \delta q &= \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \delta z, \end{aligned}$$

y sumando miembro a miembro,

$$\begin{aligned} F_p \delta p + F_q \delta q &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] + \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \iint_D [F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy + \\ &\quad - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy, \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ es la llamada derivada parcial total o completa de F_p con respecto de x . Al calcularla, "y" se considera fija, pero la dependencia de z, p y q de x se toma en cuenta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}$$

y análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}$$

En virtud de la conocida fórmula de Green (1.1.3.3), se tiene:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q \delta z\} \right] dx dy = \int_C (F_p dy - F_q dx) \delta z = 0.$$

La última integral es igual a cero, debido a que en el contorno C , (de la región D), la variación δz es nula, ($\delta z = 0$), puesto que todas las superficies admisibles pasan por el mismo contorno C' . Por lo tanto, la igualdad (1.2.1.3) se reduce a:

$$\iint_D [F_p \delta z + F_q \delta q] dx dy = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} \right] \delta z dx dy,$$

y la condición necesaria de extremo:

$$\iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q] dx dy = 0$$

toma la forma:

$$\iint_D (F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\}) \delta z dx dy = 0 \quad (1.2.1.4)$$

Aquí, en virtud de las condiciones que caracterizan a las funciones admisibles (Pág. Nº 24), y por la forma arbitraria

como se escogió la función $z = \bar{z}(x,y)$, la variación δz es una función arbitraria, continua, de clase C^2 y se anula en el contorno C . Como F es de clase C^2 , el primer factor:

$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\}$, del integrando de la integral del miembro izquierdo de la ecuación (1.2.1.4), es continuo;

entonces, por el lema fundamental, en la superficie

$z = z(x,y)$ que realiza el extremo,

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0$$

Por consiguiente, $z = z(x,y)$ es la solución de la ecuación diferencial:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 \quad (1.2.1.5)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, a la cual debe satisfacer la función $z = z(x,y)$ que realiza el extremo, lleva el nombre de "ecuación de Ostrogradski", en honor al eminente matemático ruso M.V. Ostrogradski, quien la obtuvo por primera vez en el año 1834; sin embargo, para regiones D rectangulares, se encontraba ya en los trabajos de L. Euler.

En general, para el funcional

$$v[z(x_1, \dots, x_n)] = \iint_D \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1, \dots, dx_n,$$

donde $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, en base a la condición necesaria fundamental

de extremo $\delta v = 0$, se obtiene en forma completamente análoga,

la siguiente ecuación Ostrogradski:

$$F_z - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \{ F_{p_i} \} = 0$$

Ejemplo 1.2.1.1.

Como ejemplo específico al que puede aplicarse este método, probaremos que para el funcional:

$$v [u(x,y,z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz, \text{ donde, en la}$$

frontera C de la región D se dan los valores de la función $u = f(x,y,z)$, la ecuación de Ostrogradski tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned} v [u(x,y,z)] &= \iiint_D F(x,y,z,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) dx dy dz \\ &= \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

Sea $\frac{\partial u}{\partial x} = p_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = p_2$ y $\frac{\partial u}{\partial z} = p_3$, entonces,

$$F(x,y,z,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad (1.2.1.6)$$

Supongamos que para la función $u = u(x,y,z)$, el funcional $v [u(x,y,z)]$ tiene un extremo, que de acuerdo con lo expuesto, será de clase C^2 . Consideremos, ahora, la familia

monoparamétrica de funciones:

$$u = u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z) + \alpha \delta u,$$

que contiene para $\alpha = 0$, la función $u = u(x, y, z)$ en la cual se realiza el extremo y , para $\alpha = 1$, cierta función admisible $\bar{u}(x, y, z)$, donde

$$\delta u = \bar{u}(x, y, z) - u(x, y, z)$$

En las funciones de la familia $u(x, y, z, \alpha)$ el funcional $v [u(x, y, z, \alpha)]$ se convierte en una función del parámetro numérico α . Luego, para $\alpha = 0$,

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v [u(x, y, z, \alpha)] = 0,$$

que es la condición necesaria de extremo para el funcional $v [u(x, y, z, \alpha)]$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \delta v &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \iiint_D F(x, y, z, u(x, y, z, \alpha), p_1(x, y, z, \alpha), p_2(x, y, z, \alpha), \right. \\ &\quad \left. p_3(x, y, z, \alpha)) dx dy dz \right\}_{\alpha=0} \\ &= \iiint_D [F_u \delta u + F_{p_1} \delta p_1 + F_{p_2} \delta p_2 + F_{p_3} \delta p_3] dx dy dz \\ &= \iiint_D (F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{p_1}\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_{p_2}\} - \frac{\partial}{\partial z} \{F_{p_3}\}) \delta u dx dy dz \\ &= \iiint_D (F_u - F_{p_1 x} - F_{p_2 y} - F_{p_3 z}) \delta u dx dy dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde,

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_{p_1}\} = F_{p_1 x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \{F_{p_2}\} = F_{p_2 y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \{F_{p_3}\} = F_{p_3 z}$$

Como $F \in C^2(D)$, resulta que:

$$F_u - F_{p_1 x} - F_{p_2 y} - F_{p_3 z}$$

es una función continua y, por las condiciones características de las funciones admisibles y la forma arbitraria como se escogió la función $\tilde{u}(x,y,z)$, la función " δu " es arbitraria, continua, de clase C^2 y se anula en la frontera C de D . Tomando en cuenta las anteriores consideraciones, por el lema fundamental,

$$F_u - F_{p_1 x} - F_{p_2 y} - F_{p_3 z} = 0 \quad (1.2.1.7)$$

Determinemos, ahora, a partir de (1.2.1.7) la ecuación de Ostrogradski en términos de " u ", calculando previamente los valores de:

$$F_u, F_{p_1 x}, F_{p_2 y} \quad \text{y} \quad F_{p_3 z}$$

En tal sentido tenemos que:

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

y como los valores de $F_{p_1 x}$, $F_{p_2 y}$ y $F_{p_3 z}$, requieren de mayor trabajo, pero se obtienen de manera análoga, realizaremos el cálculo solamente para $F_{p_1 x}$:

$$\begin{aligned} \partial \{F_{p_1}\} &= \frac{\partial F_{p_1}}{\partial x} \partial x + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial y} \partial y + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial z} \partial z + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial u} \partial u + \\ &+ \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_1} \partial p_1 + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_2} \partial p_2 + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_3} \partial p_3, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{F_{p_1}\}}{\partial x} &= \frac{\partial F_{p_1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x} \end{aligned}$$

Aquí, los términos (1) y (5) del segundo miembro de la igualdad anterior son no nulos, y los restantes: (2), (3), (4), (6) y (7) son nulos. En efecto:

$$(1) \quad \frac{\partial F_{p_1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2p_1) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(5) \quad \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p_1} (2p_1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(2) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial F_{p_1}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial F_{p_1}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial F_{p_1}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial p_1}{\partial u} (p_1) = 2p_1(0) = 0$$

$$(6) \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial p_2}{\partial x} (0) = 0$$

$$(7) \frac{\partial F_{p_1}}{\partial p_3} \cdot \frac{\partial p_3}{\partial x} = 2 \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \cdot \frac{\partial p_3}{\partial x} = 2 \frac{\partial p_3}{\partial x} (0) = 0$$

Luego,

$$\frac{\partial \{F_{p_1}\}}{\partial x} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

y análogamente,

$$\frac{\partial \{F_{p_2}\}}{\partial y} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \{F_{p_3}\}}{\partial z} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

por lo tanto, reemplazando en (1.2.1.7), resulta

$$-4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

entonces,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

es la ecuación de Ostrogradski que corresponde al funcional:

$$v[u(x,y,z)] = \iiint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$



1.3.- LAS ECUACIONES INTEGRALES Y LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM.

1.3.1 Ecuaciones Integrales.

Definición 1.3.1.1

Se acostumbra llamar ecuaciones integrales a aquellas ecuaciones que contienen la función incógnita bajo el signo de integral. En particular, la ecuación:

$$a(x) \varphi(x) - \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.3.1.1)$$

es una ecuación integral respecto a la función " $\varphi(t)$ ", donde $a(x)$, $f(x)$ y $K(x,t)$ son funciones conocidas, $\varphi(t)$ es una función incógnita y las variables x y t toman todos los valores en el intervalo (a,b) .

En nuestro estudio, nos ocupamos solamente de las ecuaciones integrales lineales de la forma:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.3.1.2)$$

en las cuales la función incógnita " $\varphi(t)$ " figura en forma lineal, y " λ " es un factor numérico. Las ecuaciones del tipo (1.3.1.2) se llaman ecuaciones lineales integrales de Fredholm, de segunda especie, en honor al matemático que las estudió por primera vez. La función $K(x,t)$ se denomina "núcleo", de la ecuación integral, y la supondremos definida en el cuadrado

$\Omega \{ a \leq x \leq b, a \leq t \leq b \}$ del plano (x,t) , y es continua en Ω , o bien sus discontinuidades son tales que la

integral doble:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt,$$

tiene un valor finito. Si $f(x) \neq 0$, la ecuación (1.3.1.2) se denomina no homogénea; si en cambio, $f(x) \equiv 0$, la ecuación (1.3.1.2) toma la forma:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = 0, \quad (1.3.1.3)$$

y se denomina homogénea.

Se llama "solución" de las ecuaciones integrales (1.3.1.2) o (1.3.1.3), a cualquier función $\varphi(x)$ que al ser sustituida en dichas ecuaciones, las reduce a identidades respecto a $x \in (a,b)$.

Ejemplo 1.3.1.1.

La función $\varphi(x) = \text{Sen } \pi x/2$ es solución de la ecuación integral de Fredholm:

$$\varphi(x) - \pi^2/4 \int_0^1 K(x,t) \varphi(t) dt = x/2, \quad (1.3.1.4)$$

cuyo núcleo tiene la forma:

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Basta verificar que al sustituir la función solución dada: $\varphi(x) = \text{Sen } \pi x/2$, en el primer miembro de la ecuación (1.3.1.4), el mismo se reduce a una expresión idéntica al segundo miembro de dicha ecuación.

1.3.2 La Alternativa de Fredholm.

Con relación a la solubilidad de las ecuaciones integrales de segunda especie, existen tres teoremas importantes que se le atribuyen a Fredholm, por considerarsele el primero que obtuvo resultados significativos en el estudio de este tipo de ecuaciones. El primero de estos teoremas se conoce como "Alternativa de Fredholm" y, en gran parte, su importancia para este trabajo radica en el hecho de que tiene aplicación en uno de los métodos utilizados para la resolución del problema de Dirichlet;⁽¹⁾ como veremos más adelante en el Capítulo 3.

Teorema 1.3.2.1 (Alternativa de Fredholm)

O bien la ecuación lineal no homogénea de segunda especie:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x),$$

tiene solución única para cualquier función $f(x)$, (de cierta clase suficientemente amplia), o la ecuación

(1) Véase enunciado del problema de Dirichlet al comienzo del Capítulo 2.

homogénea correspondiente:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = 0,$$

tiene, por lo menos, una solución no trivial, es decir, no idénticamente nula⁽¹⁾

Fredholm demostró un resultado sobre la solubilidad de las ecuaciones integrales lineales de segunda especie, que es un caso particular de lo que hoy se conoce como "Alternativa de Fredholm". En su demostración utilizó determinantes de orden infinito, y la misma se aplicaba a las ecuaciones integrales que a él le interesaban para resolver el problema de Dirichlet. Los estudios sobre la solubilidad de estas ecuaciones los inició en el año de 1900, promoviendo, de esta manera, el estudio de las ecuaciones integrales con un trabajo pionero que se ubica en los orígenes del Análisis Funcional.

La Alternativa de Fredholm tiene una importancia particular en la práctica; en sus aplicaciones, en lugar de demostrar que la ecuación integral dada posee solución, es más sencillo demostrar, con frecuencia, que la ecuación homogénea correspondiente tiene sólo solución trivial.

(1) Ver en [17] Krasnov, Kiseliov y Makarenko. "Ecuaciones Integrales", demostraciones de los teoremas de Fredholm, para ciertas clases particulares de ecuaciones integrales.

Entonces, en virtud de la "Alternativa de Fredholm, la ecuación original tiene, efectivamente, una única solución.

Ejemplo 1.3.2.1

Para la ecuación integral,

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = e^x, \quad (1.3.2.1)$$

que tiene por solución a la función:

$$\varphi(x) = \lambda(e-2)(5x^2-3) + e^x,$$

se prueba que la ecuación homogénea correspondiente:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = 0$$

tiene sólo solución trivial. En consecuencia, de acuerdo a la "Alternativa de Fredholm, la solución de la ecuación (1.3.2.1) es solución única para cualquier λ .

Utilizando el lenguaje matemático de hoy, lo que Fredholm logró se puede explicar en la siguiente forma: Sea $C^0([a,b])$ el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, con la norma del máximo, lo cual constituye un espacio de Banach. La expresión:

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt, \quad (1.3.2.2)$$

define un operador lineal compacto de $C^0([a,b])$ en $C^0([a,b])$, siempre que el núcleo K sea una función continua en $[a,b] \times [a,b]$.

En efecto, sea $K(x,t)$ una función continua definida en el cuadrado $[a,b] \times [a,b]$. Para cada función

$\varphi = \varphi(t) \in C^0([a,b])$ definamos el operador $T\varphi = y$, donde y es la función:

$$y(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt \quad (1.3.2.3)$$

Para probar que T es un operador compacto de $C^0([a,b])$ en $C^0([a,b])$, debemos probar, de acuerdo con el teorema de Arzelá-Ascoli⁽¹⁾, que el conjunto $\{T\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ es igualmente continuo y acotado en norma.

Como:

$$|y(x_1) - y(x_2)| \leq \int_a^b |K(x_1,t) - K(x_2,t)| |\varphi(t)| dt, \quad (1.3.2.4)$$

y, además, $K(x,t)$ es uniformemente continua en $[a,b] \times [a,b]$ ⁽²⁾, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces:

$|K(x_1,t) - K(x_2,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Luego, de (1.3.2.4), resulta que:

(1) Véase [7] Cotlar, Mischa y Gignoli, Roberto. "Nociones de Espacios Normados y sus aplicaciones al Análisis". (Tomo I, Cap. IV), para mayores detalles sobre el Teorema de Arzelá-Ascoli.

(2) Ver [9] Dieudonné, J. "Fundamentos del Análisis Moderno". (Cap. III, parag. 16, Teorema 3.16.5).

$$\begin{aligned} |y(x_1) - y(x_2)| &\leq \int_a^b |K(x_1, t) - K(x_2, t)| |\varphi(t)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b |\varphi(t)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon \|\varphi\|}{b-a} \int_a^b dt \\ &= \varepsilon \|\varphi\| \\ &\leq \varepsilon \quad \|\varphi\| \leq 1 \end{aligned}$$

es decir: $|y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon$, si $|x_1 - x_2| < \delta$, lo que prueba que la familia $\{y = T\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ es igualmente continua.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t)| |\varphi(t)| dt \\ &\leq M \|\varphi\| (b-a) \\ &\leq M(b-a) \\ &= C, \end{aligned}$$

donde: $M = \max |K(x, t)|$ en $[a, b] \times [a, b]$, de manera que:

$$\|T\varphi\| = \|y\| \leq c.$$

para todo $\varphi \in C^0([a,b])$, tal que $\|\varphi\| \leq 1$, con lo que queda demostrado que el conjunto $\{T\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ es acotado en norma.

Ahora bien, haciendo a $\lambda = 1$ en la ecuación (1.3.1.2), obtenemos la ecuación:

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.3.2.5)$$

y en virtud de que:

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt$$

es un operador lineal compacto de $C^0([a,b])$ en $C^0([a,b])$, la expresión (1.3.2.5) equivale a la ecuación funcional:

$$\varphi(x) - (T\varphi)(x) = f(x), \quad (1.3.2.6)$$

para todo $x \in [a,b]$, por lo tanto:

$$\varphi - T\varphi = f \quad (1.3.2.7)$$

Trabajando con ecuaciones funcionales del tipo de (1.3.2.7), F. Riesz (1918) y J. Schauder (1930) demostraron un resultado que generaliza la teoría de Fredholm acerca de las ecuaciones integrales, que representa una de las piezas más valiosas del Análisis Funcional, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 1.3.2.2

Sea $T: X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto de un

espacio de Banach X en sí mismo. Entonces, una y solamente una de las siguientes posibilidades ocurre:

(i) $(I - T)(\varphi) = f$

(ii) Existe $\varphi \neq 0$, tal que $(I-T)(\varphi) = 0$ ⁽¹⁾

(1) Ver en [16] Kreiszig, E. "Introductory Functional Analysis with applications. (Cap. 8, parag. 8.6), una demostración de este teorema para espacios normados.

CAPITULO II

"EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y SUS ORIGENES"

2.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE DIRICHLET.

Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n y $\partial\Omega$ la frontera de Ω . Dada la función continua,

$$f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

encontrar una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tal que:

a) $\Delta u = 0$ en la región Ω .

b) $u = f$ en la frontera $\partial\Omega$.

Cuando Ω es un abierto conexo y acotado, el problema de Dirichlet se llama problema de Dirichlet interior. Si Ω es el exterior de un conjunto acotado, el problema se llama problema de Dirichlet exterior.

Ejemplo 2.1.1.

El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el círculo:

Sea $D \subset \mathbb{C}$ una región circular de radio "a" y $\alpha : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua de valores conocidos. Hallar la función

$$u : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})),$$

tal que:

i) $\Delta u = 0$, para todo $P \in D$.

ii) $u = \alpha$, para todo $P \in \partial D$.

Solución:

Introduzcamos un sistema de coordenadas polares (r, φ) con el origen en el centro del círculo D ; así, la función $\alpha(P)$ será función solamente de la variable φ . Expresaremos el valor de la función desconocida $u(r, \varphi)$ en un punto interior arbitrario (r_0, φ_0) del círculo D , en términos de los valores de frontera dados por la función $\alpha(\varphi)$.

A tal efecto, consideremos la transformación conforme:
 $f: \bar{D} \longrightarrow \bar{D}'$, definida como:

$$f(z) = w = \lambda \frac{z - r_0 e^{i\varphi_0}}{z - \frac{a^2}{r_0} e^{i\varphi_0}},$$

donde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, $D' = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$

y la constante " λ " se escoge con la condición de que los puntos $z = a e^{i\varphi}$ de la frontera del círculo D , se transformen, por medio de f , en puntos de la frontera del círculo unitario D' .

Aquí $|\lambda| = a/r_0$, y el argumento de λ define la rotación del círculo $|w| \leq 1$ en torno a su centro $w = 0$. Por medio de esta transformación, las coordenadas (r, φ) y (ρ, ψ) están relacionadas, siendo (r, φ) coordenadas polares del plano z -complejo y (ρ, ψ) coordenadas polares del plano w -complejo. En consecuencia, la función $u(r, \varphi)$ está dada por:

$$u[r(\rho, \psi), \varphi(\rho, \psi)] = u(\rho, \psi),$$

donde $U = u \circ f^{-1}$. (Ver figura 4).

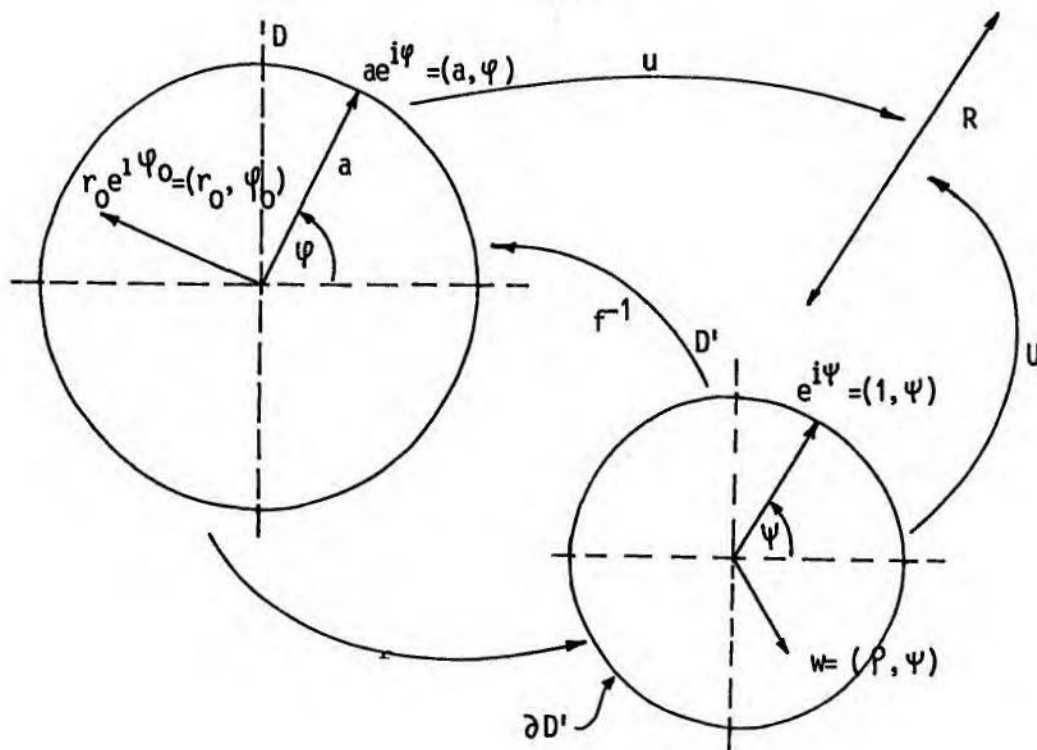


Fig. 4

Además, la función $\alpha(\psi)$ está dada por:

$$\alpha[\psi(1, \psi)] = A(\psi),$$

donde $A = \alpha \circ f^{-1}$. (Ver figura 5).

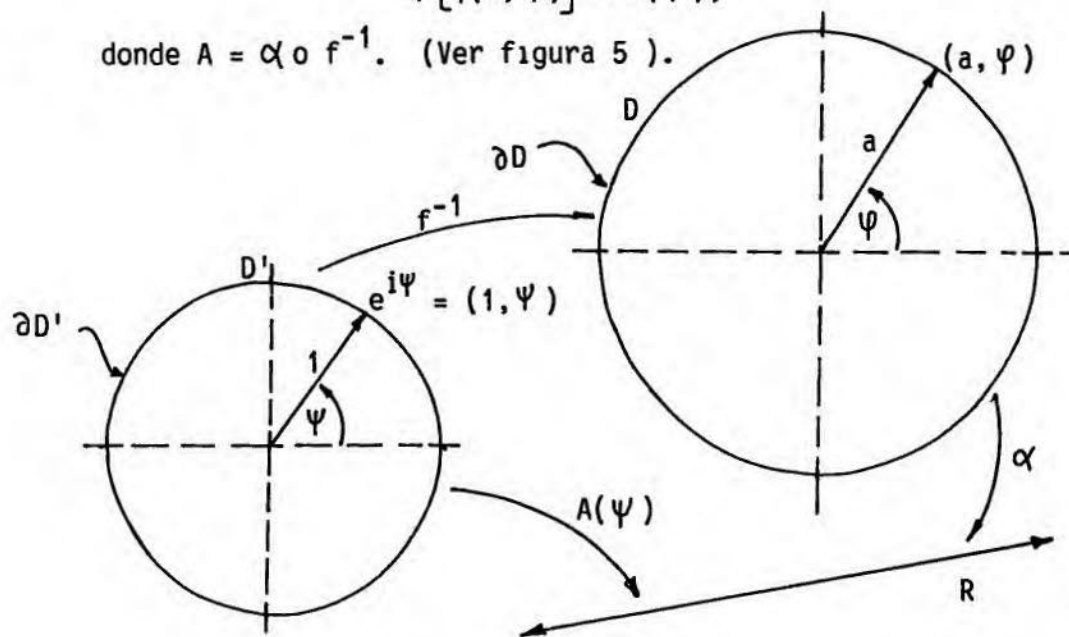


Fig. 5

Entonces:

$$U \Big|_{\partial D'}(1, \psi) = (u \circ f^{-1})(1, \psi) = u(f^{-1}(1, \psi)) = u(a, \varphi)$$

y,

$$A(\psi) = (\alpha \circ f^{-1})(1, \psi) = \alpha(f^{-1}(1, \psi)) = \alpha(a, \varphi)$$

Como estamos asumiendo que $u(a, \varphi) = \alpha(a, \varphi)$, se tiene que:

$$U \Big|_{\partial D'}(1, \psi) = A(\psi)$$

Por otro lado, como la transformación f es conforme, ella transforma la ecuación de Laplace para la función $u(r, \varphi)$ en la ecuación de Laplace para la función $U(\rho, \psi) = u[r(\rho, \psi), \varphi(\rho, \psi)]$ ⁽¹⁾, o sea que $U(\rho, \psi)$ es una función armónica en sus variables. Este último hecho nos permite expresar el valor de la función U en el centro del círculo D' por medio de la fórmula del valor medio para funciones armónicas:

$$U \Big|_{\omega=0} = 1/2\pi \int_0^{2\pi} U(1, \psi) d\psi$$

y, tomando en cuenta que $u(r_0, \varphi_0) = U \Big|_{\omega=0}$ y que

$U \Big|_{\partial D'}(1, \psi) = A(\psi)$, podemos escribir que:

$$u(r_0, \varphi_0) = U \Big|_{\omega=0} = 1/2\pi \int_0^{2\pi} A(\psi) d\psi \quad (2.1.1)$$

(1) Ver [28] Sveshnicov, A.G y Tikhonov, A.N. "The Theory of Functions of a Complex Variable. (Cap. 7, Parag. 2, Pag. 189).

De la igualdad anterior, se obtiene una solución explícita del problema de Dirichlet para el círculo, expresando la función $A(\Psi)$ en términos de la función $\alpha(\varphi)$. Obsérvese que por la correspondencia que establece la transformación f sobre los puntos frontera de los círculos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq a\}$ y $D' = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$, la siguiente expresión es válida:

$$f(ae^{i\varphi}) = e^{i\Psi} = \frac{a}{r_0} \frac{ae^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}}{ae^{i\varphi} - \frac{a^2}{r_0} e^{i\varphi_0}},$$

donde $\lambda = \frac{a}{r_0} e^{2\pi i}$. Entonces:

$$e^{i\Psi} = \frac{ae^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}}{r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0}} \quad (2.1.2)$$

Derivando en ambos miembros de la expresión (2.1.2) con respecto a la variable φ , resulta:

$$\begin{aligned} i e^{i\Psi} \frac{d\Psi}{d\varphi} &= \frac{(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})(aie^{i\varphi}) - (ae^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})(r_0 ie^{i\varphi})}{(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})^2} \\ &= \frac{ar_0 ie^{2i\varphi} - a^2 ie^{i(\varphi + \varphi_0)} - ar_0 ie^{2i\varphi} + r_0^2 ie^{i(\varphi + \varphi_0)}}{(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})^2} \\ &= \frac{ie^{i(\varphi + \varphi_0)}(r_0^2 - a^2)}{(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})^2}, \end{aligned}$$

y por la igualdad (2.1.2) se tiene:

$$\frac{ae^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}}{r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0}} \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{e^{i(\varphi + \varphi_0)}(r_0^2 - a^2)}{(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})^2},$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{e^{i(\varphi + \varphi_0)}(a^2 - r_0^2)}{(r_0 e^{i\varphi_0} - ae^{i\varphi})(r_0 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0})} \\ &= \frac{e^{i(\varphi + \varphi_0)}(a^2 - r_0^2)}{r_0^2 e^{i(\varphi + \varphi_0)} - ar_0 e^{2i\varphi_0} - ar_0 e^{2i\varphi} + a^2 e^{i(\varphi + \varphi_0)}} \\ &= \frac{e^{i(\varphi + \varphi_0)}(a^2 - r_0^2)}{e^{i(\varphi + \varphi_0)} \left[r_0^2 + a^2 - ar_0 \frac{(e^{2i\varphi_0} + e^{2i\varphi})}{e^{i(\varphi + \varphi_0)}} \right]} \\ &= \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2 + a^2 - ar_0 \left[\frac{e^{2i\varphi_0} + e^{2i\varphi}}{e^{i\varphi} e^{i\varphi_0}} \right]} \\ &= \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2 + a^2 - ar_0 \left[\frac{e^{i\varphi_0}}{e^{i\varphi}} + \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi_0}} \right]} \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{i\varphi_0}}{e^{i\varphi}} + \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi_0}} &= e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + e^{i(\varphi - \varphi_0)} \\
 &= \cos(\varphi_0 - \varphi) + i\text{Sen}(\varphi_0 - \varphi) + \cos(\varphi - \varphi_0) + i\text{Sen}(\varphi - \varphi_0) \\
 &= \cos[-(\varphi - \varphi_0)] + i\text{Sen}(\varphi_0 - \varphi) + \cos(\varphi - \varphi_0) + i\text{Sen}[-(\varphi_0 - \varphi)] \\
 &= 2\cos(\varphi - \varphi_0) + i\text{Sen}(\varphi_0 - \varphi) - i\text{Sen}(\varphi_0 - \varphi) \\
 &= 2\cos(\varphi - \varphi_0) .
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \\
 d\psi &= \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi ,
 \end{aligned}$$

entonces, volviendo a la expresión (2.1.1), y teniendo en cuenta que $A(\psi) = \alpha(\varphi)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 u(r_0, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\psi) d\psi \\
 u(r_0, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \alpha(\varphi) d\varphi
 \end{aligned}$$

(2.1.3)

La expresión (2.1.3) es la solución del problema de Dirichlet para el círculo de radio "a", y es una expresión analítica explícita, en términos de los valores de frontera $\alpha(\psi)$. Este resultado se conoce universalmente como fórmula o ecuación de Poisson.

2.2.- ORIGENES DEL PROBLEMA DE DIRICHLET.

En este párrafo, presentaremos los detalles históricos acerca de cómo surgió el problema de Dirichlet, como resultado del estudio de ciertos problemas de la Física-Matemática, para lo cual es preciso remontarnos al siglo XVII.

Todo comienza con los estudios realizados por Isaac Newton (1642-1727), acerca de la "Gravitación Universal", publicados junto con otros descubrimientos en el año 1687 en su obra "Principia", constituyendo esto el acontecimiento, acaso, más grande de la historia de la ciencia en aquella época. En esta obra Newton enuncia la "Ley de la gravitación universal", que dice lo siguiente: "Si dos partículas de masas m y m' son colocadas a una distancia "d", una de la otra, ellas ejercen una fuerza mutua de atracción cuya intensidad está dada por la ecuación:

$$|F| = K \frac{mm'}{d^2}$$

y las línea de acción de estas fuerzas coinciden con la recta determinada por los puntos donde están las partículas.

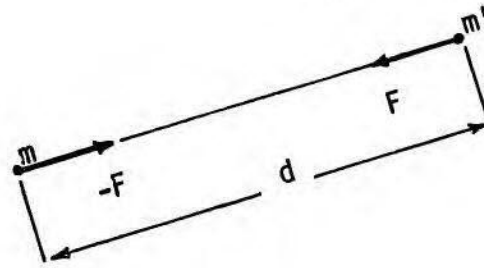


Fig. 6

Posteriormente, Newton utilizó esta ley para deducir las "Leyes de Kepler" a partir de tres leyes básicas de la mecánica: la ley de inercia, la ley de acción y reacción y la ley que relaciona la fuerza con las aceleraciones. La comunidad científica de la época reconoció, así, la importancia de las nuevas teorías del movimiento introducidas por Galileo y Newton, que permitieron deducir matemáticamente las leyes que Kepler obtuviera empíricamente, después de un profundo trabajo de análisis de las observaciones astronómicas acumuladas por Ticho Brahe, al final del siglo XVI.

Gracias a la "Ley de la gravitación universal" comenzaron a ser estudiados otros fenómenos físicos relacionados con esta materia, tales como los llamados campos de fuerzas gravitacionales creados por distribuciones de masas; los campos de fuerza electromagnéticos y eléctricos, creados por distribuciones de carga, y conjuntamente con estos, el desarrollo de la teoría del potencial. El estudio y desarrollo de estos temas durante el siglo XVIII y principios del siglo XIX constituyó el camino hacia el surgimiento del problema de Dirichlet. Entre las personalidades del campo científico, particularmente, matemáticos, físicos y astrónomos, que hicieron las contribuciones más impor-

tantes en torno a los temas mencionados destacan: Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Poisson, Green y Gauss.

Leonard Euler (1707-1783), matemático y físico nacido en Basilea, Suiza. En la época de Galileo, Newton, Descartes, Kepler y Huighens, carecían de precisión los conceptos fundamentales de la mecánica acerca de la fuerza, masa y trabajo; Euler introduce ciertos avances al respecto: consideró la masa como el "factor propio" de los cuerpos en movimiento; factor que multiplicado por la aceleración expresa la fuerza aplicada en la dirección del movimiento. Llamó "esfuerzo" a la fuerza multiplicada por el espacio recorrido y llamó trabajo al peso multiplicado por el espacio recorrido. Euler precedió a Lagrange en la "noción de potencial", noción fundamental de esa base de nuestra Mecánica Clásica que es la "Mecánica de Lagrange", y noción a la que Laplace dió la forma conocida de

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Es por este motivo que el historiador alemán Hoppe reclama para Euler el título de creador de la "noción de potencial", título otorgado por los historiadores de la ciencia a Lagrange, quien sin duda alguna, dió al concepto la necesaria precisión y madurez que le permitió darle fundamental importancia en la primera parte de su "Mecánica".

Alexis Claude Clairaut (1713-1765), matemático francés, en 1743, escribió su célebre "Teoría de la figura de la Tierra", y en 1752, publicó su "Teoría de la Luna". En estas obras, aplica las matemáticas al problema de la atracción gravitacional y a la configuración de la Tierra, lo que le sitúa en los orígenes de la "teoría del potencial".

Jean Le Rod D'Alembert (1717-1783), matemático y físico francés, también realizó investigaciones relacionadas con los campos de fuerzas. En 1743, publicó su "Tratado de Dinámica" en el cual se encuentra el principio que lleva su nombre, cuyo enunciado es el siguiente: "en un sistema, las fuerzas internas de inercia son iguales y opuestas a las fuerzas que producen la aceleración". En 1747, D'Alembert aplicó su principio a uno de los problemas considerados como de los más importantes de la Física-Matemática: "el problema de las cuerdas vibrantes", lo que le condujo a la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para la que dió la solución: $u = f(x+t) + g(x-t)$, donde f y g son funciones arbitrarias. Posteriormente, el problema de las cuerdas vibrantes, así como el problema de Dirichlet y otros, formarían un núcleo de importantes problemas de la Física-Matemática conocidos como "problemas con condiciones de contorno". D'Alembert realizó también muchos trabajos relacionados con la mecánica celeste.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813), fue, tal vez, el mejor matemático del siglo XVIII. Sus investigaciones abarcaron diversos campos del área científica, destacándose más sus contribuciones en Matemática y Física. En astronomía, publicó un trabajo en el que trató el difícil problema de calcular el efecto gravitatorio de tres cuerpos. Además, en su "Mecanique Analytique", fundamentó toda la mecánica sobre la conservación de la energía en forma de los principios de las velocidades virtuales y de acción mínima. En esta obra, aparecen importantes formulaciones acerca de los campos, de fuerzas, su relación con los potenciales y algunas de sus propiedades.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), matemático, físico, astrónomo y filósofo francés. Mejoró el desarrollo de los problemas de la atracción, adaptando el método del "potencial" de Lagrange y completó la obra de Newton en uno de sus aspectos más importantes, al demostrar que los movimientos planetarios eran estables y que las perturbaciones producidas por influencias recíprocas o por intervención de cuerpos extraños, como los cometas, eran temporales. Laplace desarrolló sus discusiones analíticas en su obra más importante, "Mecánica Celeste", publicada de 1799 a 1825; en ella, acumuló los trabajos de Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler y Lagrange sobre la figura de la Tierra, la teoría de la Luna, el problema de los tres cuerpos y las perturbaciones de los planetas. En un artículo muy técnico de 1782, titulado: "Theorie des attractions des spheroides et de la figure des planetes", que fue

incluido también en la "Mecánica Celeste", desarrolló Laplace el concepto extremadamente útil de "potencial", es decir: de una función cuya derivada direccional en cualquier punto es igual a la componente del campo en la dirección dada. La célebre ecuación de Laplace: $\Delta V = 0$, o "laplaciano" de una función, la cual siempre verifica la función potencial en la región exterior a la que se encuentran las masas, (Ver más adelante el parágrafo 2.5), así como el concepto de "potencial", aparecen desarrollados en la "Mecánica Celeste", en conexión con el problema de la atracción de un esferoide sobre una partícula.

Simeon DIONISIO POISSON (1781-1840), matemático y físico francés, dedicó gran parte de su labor de investigación al campo de la electricidad y el magnetismo. Considerando la acción eléctrica como un conjunto de atracciones y repulsiones; aplicó a sus estudios la teoría del potencial de Euler, Lagrange y Laplace, y dió, así, a la teoría de la electricidad nuevos recursos de abundantes consecuencias. Entre sus publicaciones más importantes sobre el tema de la electricidad están: "Teoría de la distribución de la electricidad en la superficie de los conductores" y "Teoría de la distribución de la electricidad en una esfera hueca electrizada por influencia". Las investigaciones de Poisson lo colocan en los orígenes de la teoría de los potenciales electrostáticos. Poisson, trabajando con potenciales volumétricos, extendió la ecuación de Laplace al interior de la distribución de las masas, con un importante resultado conocido como la ecuación de Poisson:

$$\Delta V = -4\pi \rho(x,y,z),$$

donde "V" es la función potencial y " ρ " es la densidad de distribución de la masa. (Ver más adelante el párrafo 2.5).

George Green (1793-1841), matemático inglés, atraído por la teoría de Poisson se dedicó al estudio de la electricidad. En 1828, publicó su "Ensayo sobre la aplicación del Análisis Matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo", trabajo que fue prácticamente desconocido hasta que Lord Kelvin, (W. Thomson), lo hizo reimprimir en 1846. En la citada obra, Green desarrolló las investigaciones de Poisson en electricidad y magnetismo, introduciendo el concepto de "función potencial" en este campo, pero fueron Hamilton (1834) y sobre todo Gauss (1839), quienes le dieron todo su valor a esta adaptación. La célebre teoría de Gauss, aunque desarrollada por un camino distinto, está íntimamente ligada a las obras de Poisson y de Green, destacándose por sus aplicaciones a la teoría del potencial.

2.2.1 Campo de fuerzas creado por una partícula de masa m.

El campo de fuerzas creado por una partícula de masa m_0 colocada en el origen de R^3 está dado por la ecuación:

$$F(P) = \frac{-m_0 P}{||P||^3}, \quad (2.2.1.1)$$

donde $P = (x,y,z)$ es el punto del espacio sobre el cual actúa el campo y

$$\|P\| = d(0,P) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Obsérvese que $F: \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es una función continua y, además de eso, tiene derivadas parciales de todos los órdenes en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

La fórmula (2.2.1.1), antes expresada, puede obtenerse fácilmente utilizando la "Ley de la Gravitación Universal":

Consideremos dos partículas A_0 y A , de masas m_0 y m , colocadas en los puntos 0 (origen) y $P \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, respectivamente.

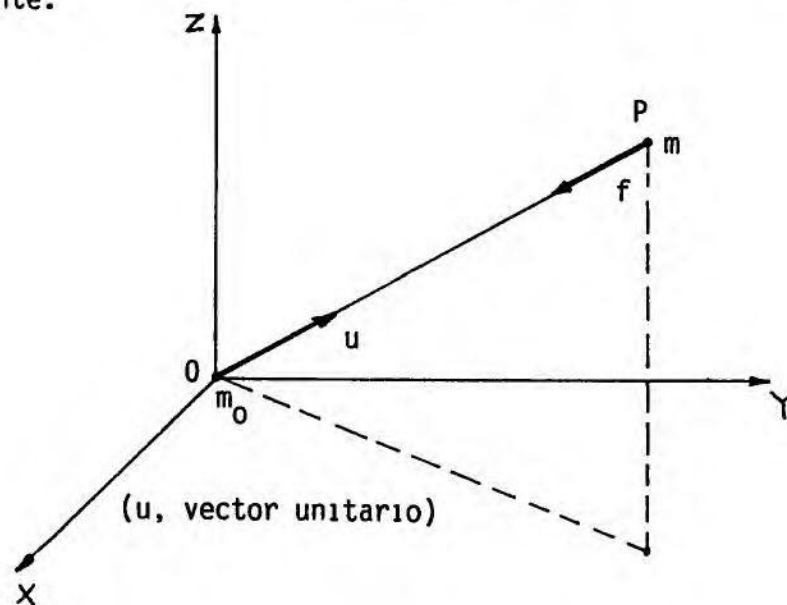


Fig. 7

La fuerza que ejerce A_0 sobre A es:

$$\vec{f} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u},$$

donde $r = d(A_0, A)$ y G es la constante gravitacional.

Fijemos la partícula A_0 en el origen O y expresemos la fuerza \vec{f} de atracción en la siguiente forma:

$$\vec{f} = m \left(\frac{-G m_0 \vec{u}}{r^2} \right),$$

donde $-G \frac{m_0 \vec{u}}{r^2}$ es un vector que depende solamente de la posición del punto P .

Sea:

$$F(P) = \frac{-G m_0 \vec{u}}{r^2}, \quad (2.2.1.2)$$

entonces, la función $F(P)$ define un campo vectorial llamado "campo vectorial y gravitatorio",

$$F: \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P \longrightarrow F(P) = \frac{-G m_0}{r^2} \vec{u},$$

tal que la partícula A de masa " m " sufrirá en el interior del mismo una fuerza igual a:

$$\vec{f} = m \cdot F(P)$$

Sustituyendo \vec{u} por $\frac{P}{||P||}$ en la ecuación (2.2.1.2), obtenemos:

$$F(P) = \frac{-G m_0}{r^2} \frac{P}{||P||},$$

y así,

$$F(P) = \frac{-Gm_0 P}{r^3}, \quad ||P|| = r$$

Haciendo $G = 1$, lo cual es posible tomando un sistema adecuado de unidades, resulta que:

$$F(P) = \frac{-m_0 P}{r^3}, \quad ||P|| = r$$

2.2.2 Campo de fuerzas creado por una distribución volumétrica de Masa.

Consideremos, ahora, una distribución volumétrica de masa con densidad " ρ ", esto es, se da una cierta región Ω en \mathbb{R}^3 y una función $\rho: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es continua. Por la "Ley de la Gravitación Universal", el campo de fuerzas gravitacionales creado en $\mathbb{R}^3 - \Omega$ está dado por la integral triple:

$$F(P) = - \iiint_{\Omega} \frac{\rho(Q)(P-Q)}{||P-Q||^3} d\Omega, \quad (2.2.2.1)$$

donde $Q = (x_0, y_0, z_0)$ recorre la región Ω , $P = (x, y, z)$ es el punto del espacio sobre el cual actúa el campo y

$$\|P-Q\| = d(P,Q) = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{1/2}$$

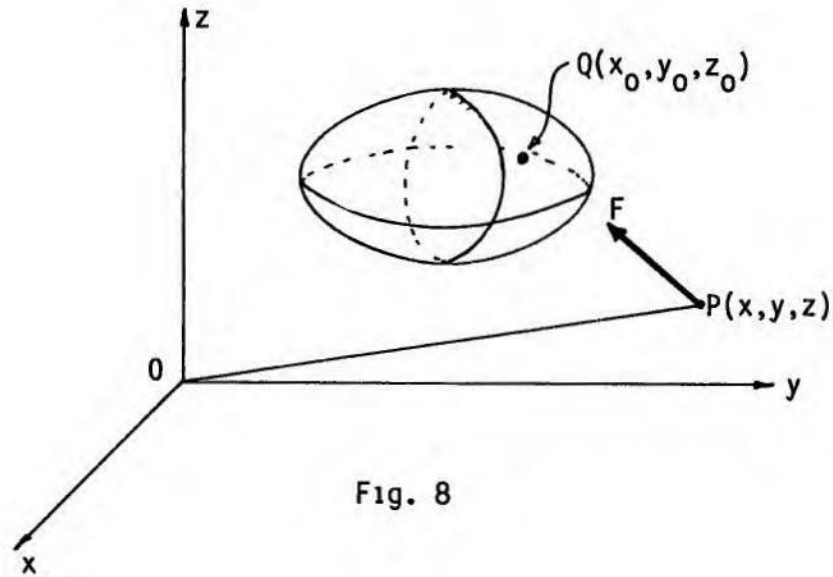


Fig. 8

La fórmula (2.2.2.1) puede deducirse con relativa facilidad utilizando la "Ley de la Gravitación Universal" y algunas de las propiedades de la Integral de Riemann:

Sea Ω una región volumétrica de \mathbb{R}^3 y $\rho: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos, ahora, una partición de la región Ω en volúmenes elementales $\Delta\Omega_1, 1 = 1, \dots, n$, y sea $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un punto dentro del volumen elemental $\Delta\Omega_1$. El campo de fuerzas que ejerce una partícula de masa Δm_1 situada en el punto Q_1 sobre cualquier punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \Omega$ es igual a:

$$F_1(P) = \frac{-\Delta m_1 (P-Q_1)}{\|P-Q_1\|^3}, \quad P \notin \Omega_1 \quad (2.2.2.2)$$

Si consideramos a Δm_1 la masa del volumen elemental $\Delta \Omega_1$, entonces:

$$\Delta m_1 = \rho(Q_1) \Delta \Omega_1,$$

y como el campo de fuerzas que puede producir el volumen elemental $\Delta \Omega_1$ es igual al que se produciría si la masa Δm_1 estuviera concentrada en el punto Q_1 , resulta que:

$$F_1(P) = \frac{-\rho(Q_1)(P-Q_1)\Delta \Omega_1}{\|P-Q_1\|^3} \quad (2.2.2.3)$$

Una aproximación del campo de fuerzas generado por la región Ω sobre cualquier punto $P \in \mathbb{R}^3 - \Omega$ es:

$$\sum_{i=1}^n F_1(P) = - \sum_{i=1}^n \frac{\rho(Q_i)(P-Q_i) \Delta \Omega_i}{\|P-Q_i\|^3}, \quad (2.2.2.4)$$

que representa una suma integral.

El campo de fuerzas $F(P)$ que ejerce la región Ω sobre cualquier punto $P \in \mathbb{R}^3 - \Omega$ es igual al límite de la sumatoria (2.2.2.4) cuando "n" crece indefinidamente:

$$\begin{aligned} F(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_1(P) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\rho(Q_i)(P-Q_i) \Delta \Omega_i}{\|P-Q_i\|^3} \\ &= - \iiint_{Q \in \Omega} \frac{\rho(Q)(P-Q) d\Omega}{\|P-Q\|^3} \end{aligned}$$

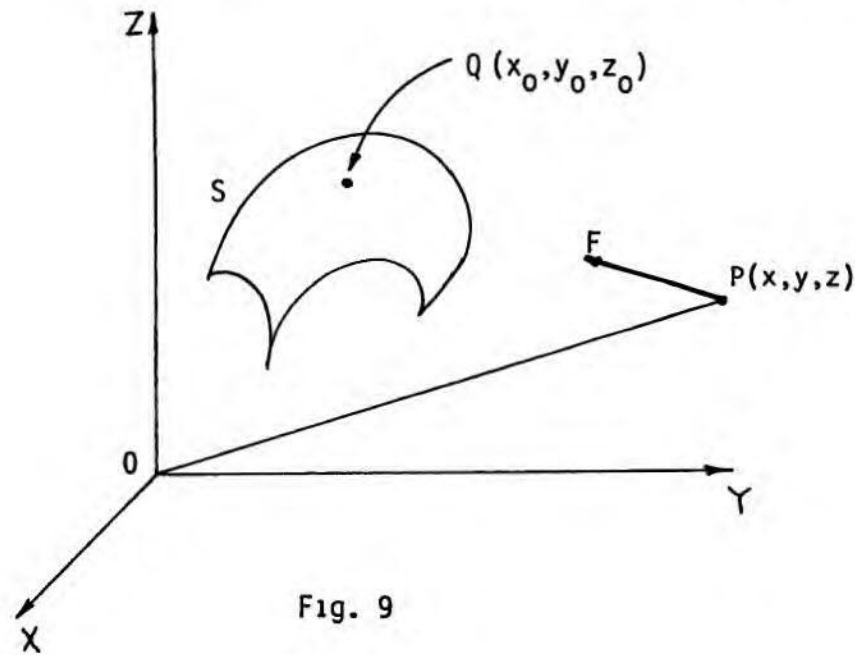
2.2.3 Campo de fuerzas generado por una distribución superficial de masa.

Consideremos, esta vez, una distribución superficial de masa con densidad σ , es decir, se da una cierta superficie S en \mathbb{R}^3 y una función continua $\sigma: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Nuevamente, la Ley de la Gravitación Universal nos dice que el campo de fuerzas creado en $\mathbb{R}^3 - S$ está dado por la integral doble:

$$F(P) = - \iint_S \frac{\sigma(Q)(P-Q)}{\|P-Q\|^3} ds, \quad (2.2.3.1)$$

donde $Q = (x_0, y_0, z_0)$ recorre la superficie S , $P = (x, y, z)$ es el punto sobre el cual actúa el campo y

$$\|P-Q\| = d(P,Q) = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}$$



Para deducir la fórmula (2.2.3.1), se procede de manera análoga al caso anterior:

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 y $\sigma: \bar{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos una partición de la superficie S en áreas elementales ΔS_1 , $i = 1, \dots, n$, y sea Q_i un punto en la superficie elemental ΔS_1 . El campo de fuerzas que ejerce una partícula de masa Δm_1 situada en el punto Q_1 sobre cualquier otro punto $P \in \mathbb{R}^3 - S$ es igual a:

$$F_1(P) = \frac{-\Delta m_1(P-Q_1)}{\|P-Q_1\|^3}, \quad P \neq Q_1 \quad (2.2.3.2)$$

Si consideramos a Δm_1 la masa de la superficie elemental ΔS_1 , entonces:

$$\Delta m_1 = \sigma(Q_1) \Delta S_1,$$

y como el campo de fuerzas que puede producir la superficie elemental ΔS_1 es igual al que se produciría si la masa Δm_1 estuviera concentrada en el punto Q_1 , resulta que:

$$F_1(P) = \frac{-\sigma(Q_1)(P-Q_1) \Delta S_1}{\|P-Q_1\|^3} \quad (2.2.3.3)$$

Una aproximación del campo de fuerzas generado por la región S sobre cualquier punto $P \in \mathbb{R}^3 - S$ es:

$$\sum_{i=1}^n F_1(P) = - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma(Q_i)(P-Q_i) \Delta S_i}{\|P-Q_i\|^3}, \quad (2.2.3.4)$$

que representa una suma integral.

El campo de fuerzas $F(P)$ que ejerce la región S sobre cualquier punto $P \in \mathbb{R}^3 - S$ es igual al límite de la sumatoria (2.2.3.4) cuando "n" crece indefinidamente

$$\begin{aligned} F(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_1(P) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma(Q_i)(P-Q_i) \Delta S_i}{\|P-Q_i\|^3} \\ &= - \iint_{Q \in S} \frac{\sigma(Q)(P-Q) ds}{\|P-Q\|^3} \end{aligned}$$

2.3.- LOS POTENCIALES NEWTONIANOS.

En 1773, Lagrange observó que los campos de fuerzas (2.2.1.1), (2.2.2.1) y (2.2.3.1), antes mencionados, se derivan de un potencial, es decir, que existe una función real "V" definida en \mathbb{R}^3 , esceptuando los puntos donde están las masas, cuyo gradiente es precisamente el campo. Así, para el campo de fuerzas dado por (2.2.1.1), el potencial es:

$$V(P) = \frac{m}{\|P\|}, \quad V: \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (2.3.1)$$

para el campo de fuerzas dado por (2.2.2.1), el potencial volumétrico es:

$$V(P) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{\|P-Q\|} d\Omega, \quad V: \mathbb{R}^3 - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (2.3.2)$$

y para el campo de fuerzas dado por (2.2.3.1), el potencial de superficie, conocido como "potencial de distribución simple" es:

$$V(P) = \iint_S \frac{\sigma(Q)}{\|P-Q\|} ds, \quad V: \mathbb{R}^3 - S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.3)$$

En el caso del campo de fuerza gravitacional (2.2.1.1), podemos ver, de manera general, que proviene de un potencial de la forma:

$$V(X) = \frac{m}{\|X\|} + C,$$

donde $V: \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

En efecto, sea $\vec{F}(X)$ el vector campo en el punto M de coordenada X, producido por una partícula de masa m colocada en el origen 0 de \mathbb{R}^3 , y $d\vec{X}$ un desplazamiento elemental cualquiera de M.

Supongamos que el campo vectorial $\vec{F}(X)$ deriva de un potencial "V", o sea, que existe $V: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que: $\vec{F}(X) = \text{grad } V(X)$. Como $\text{grad } V(X) \cdot d\vec{X} = dV$, entonces:

$$\vec{F}(X) \cdot d\vec{X} = dV$$

Por otro lado, $\vec{X} = \vec{OM} = r\vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario en la dirección de \vec{OM} y $r = ||\vec{X}||$. De aquí se deduce que:

$$d\vec{X} = r d\vec{u} + dr\vec{u},$$

y tomando en cuenta que:

$$\vec{F}(\vec{X}) = \frac{-m\vec{u}}{r^2},$$

resulta:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{-m\vec{u}}{r^2} \cdot (rd\vec{u} + dr\vec{u}) \\ &= \frac{-m(\vec{u} \cdot d\vec{u})}{r} - \frac{m(\vec{u} \cdot \vec{u})dr}{r^2} \\ &= 0 - \frac{m dr}{r^2}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} V &= -m \int r^{-2} dr \\ &= \frac{-mr^{-1}}{-1} + C \\ &= \frac{m}{r} + C, \quad r = ||\vec{X}|| \end{aligned}$$

El potencial volumétrico (2.3.2) puede deducirse en la siguiente forma:

Consideremos un campo de fuerzas F_1 generado por un cuerpo de masa elemental Δm_1 :

$$F_1(P) = \frac{-\Delta m_1(P-Q_1)}{\|P-Q_1\|^3},$$

entonces, el potencial correspondiente es igual a:

$$V_1(P) = \frac{\rho(Q_1)\Delta\Omega_1}{\|P-Q_1\|},$$

donde $\Delta m_1 = \rho(Q_1)\Delta\Omega_1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^n V_1(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho(Q_i)\Delta\Omega_i}{\|P-Q_i\|} \text{ y}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_1(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\rho(Q_i)\Delta\Omega_i}{\|P-Q_i\|}, \text{ luego,}$$

$$V(P) = \iiint_{Q \in \Omega} \frac{\rho(Q)d\Omega}{\|P-Q\|}$$

Para el caso del potencial de superficie (2.3.3), el procedimiento es análogo al caso anterior, por lo cual omitimos su presentación.

No es difícil probar que los potenciales (2.3.2) y (2.3.3) son en realidad funciones continuas definidas en todo \mathbb{R}^3 , es decir, que las integrales impropias convergen cuando P es elemento de Ω o P es elemento de S . Sobre esto haremos mayor énfasis en el párrafo (2.5), cuando abordemos el tema de la ecuación de Poisson.

2.4.- EL POTENCIAL DE DOBLE CAPA.

El gran acontecimiento de la Ley de la Gravitación Universal de la Mecánica Celeste estimuló a los científicos de la época a que buscaran principios generales análogos, en otros campos de la Física. Así, Coulomb en 1790, introdujo la hoy conocida "Ley de Coulomb" que rige la atracción y repulsión de partículas magnéticas, y posteriormente, durante el desarrollo evolutivo de las investigaciones en torno al magnetismo, surgió, de modo natural, la noción de dipolo magnético, que está medido por una función llamada momento de dipolo o densidad de magnetización.

2.4.1 Potencial generado por una partícula magnética.

Todos estamos familiarizados con la noción de lo que es un magneto simple, como por ejemplo un imán o una varilla imantada corta, y sabemos que estos objetos poseen dos polos con cargas opuestas. Una manera natural de concebir un campo generado por una partícula magnética es, quizá, tomar el campo producido por dos partículas de igual masa y de cargas opuestas, e interpretar esto como el campo generado por una partícula magnética. Pero entonces, la distancia entre las partículas pareciera crear un elemento de dificultad, ya que a medida que las partículas están más cerca el campo tiende a cero. Sin embargo, podemos, resolver esto, si al mismo tiempo que la distancia entre las partículas se aproxima a cero, hacemos que las cargas aumenten infinitamente, de manera que el producto de la carga por la distancia, o momento, se aproxime a

un límite o simplemente se mantenga constante.

Consideremos dos cargas eléctricas opuestas: $-e$ y $+e$, concentradas en dos puntos Q y Q' de \mathbb{R}^3 . El potencial en un punto $P \in \mathbb{R}^3$ es igual a:

$$V' = \frac{e}{r'} - \frac{e}{r}, \quad (2.4.1.1)$$

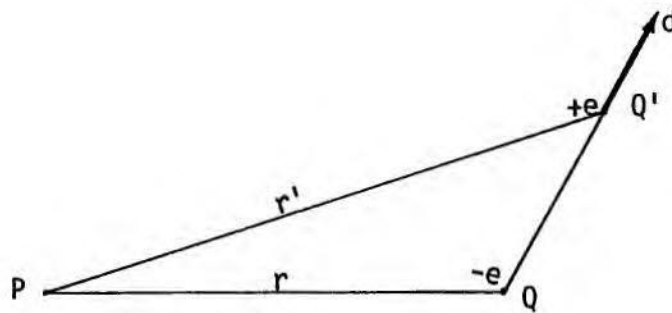


Fig. 10

o en términos del momento del par de cargas: $\mathcal{M} = e|QQ'|d$, de módulo $|\mathcal{M}| = e|QQ'|$, donde d es un vector unitario en la dirección QQ' , se tiene que: como $e = \frac{\mathcal{M}}{|QQ'|}$,

$$V' = \mathcal{M} \frac{1/r' - 1/r}{|QQ'|}, \quad (2.4.1.2)$$

Si Q' se aproxima a Q conservándose sobre la recta de dirección " d ", y al mismo tiempo " e " aumenta de modo que se mantenga constante el momento \mathcal{M} , el límite resultante no es otra cosa que el producto de \mathcal{M} por la derivada direc-

cional de la función $1/r$ de ξ , η y γ , en la dirección del vector d . En efecto:

$$\begin{aligned}
 \lim_{Q \rightarrow Q'} V' &= \mu \lim_{Q \rightarrow Q'} \frac{1/r' - 1/r}{|QQ'|} \\
 &= \mu D_d(1/r)(\xi, \eta, \gamma) \\
 &= \mu \frac{\partial}{\partial d} (1/r)(\xi, \eta, \gamma) \\
 &= \mu \langle \nabla(1/r)(\xi, \eta, \gamma), \vec{d} \rangle \\
 &= \mu \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(1/r), \frac{\partial}{\partial \eta}(1/r), \frac{\partial}{\partial \gamma}(1/r) \right], (l, m, n) \right\rangle \\
 &= \mu \left[l \frac{\partial}{\partial \xi}(1/r) + m \frac{\partial}{\partial \eta}(1/r) + n \frac{\partial}{\partial \gamma}(1/r) \right] \\
 &= v,
 \end{aligned}$$

donde l , m y n son los cosenos directores del vector unitario d .

Este límite:

$$v = \mu \frac{\partial}{\partial d} (1/r)(\xi, \eta, \gamma),$$

se denomina "doblete de momento μ y de eje d ", y representa el potencial generado por una partícula magnética.

2.4.2 Potencial generado por una distribución superficial de dobletes o partículas magnéticas.

Consideremos una superficie regular S y sobre ella una distribución de partículas magnéticas (dobletes), con

sus ejes siempre normales a la superficie y apuntando hacia el mismo lado. Sea " μ " una función continua sobre S que depende de la posición del punto Q en la superficie. Dividamos la superficie S en partes elementales ΔS y en un punto de cada uno de estos trozos de superficie coloquemos una partícula magnética, cuyo momento es el producto del valor de la función μ en ese punto por el área del elemento ΔS , y cuyo eje tiene la dirección positiva de la normal η . Denotemos por V' el potencial del campo generado por estas partículas:

$$V' = \sum \mu \frac{\partial}{\partial \eta} (1/r) \Delta S$$

El límite de tal distribución, a medida que la cuerda máxima de los elementos ΔS se aproxima a cero se llama "Potencial de doble capa", de momento μ sobre S , y está dado por la integral doble:

$$V = \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial \eta} (1/r) ds$$

Si y es un punto perteneciente a S y x es un punto exterior a S , entonces:

$$V(x) = \iint_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{||x-y||} ds,$$

donde: $V: \mathbb{R}^3 - S \longrightarrow \mathbb{R}$

En el caso de una distribución de dipolos a lo largo de una curva plana cerrada simple, tenemos el potencial de doble capa en \mathbb{R}^2 , dado por la integral:

$$V(x) = \int_C \mu(y) \frac{\partial}{\partial \gamma} \log \frac{1}{\|x-y\|} dc,$$

donde: $V: \mathbb{R}^2 - C \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.5.- LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y DE POISSON.

En 1785, Laplace, trabajando con coordenadas esféricas, y cuatro años más tarde con coordenadas cartesianas, demostró que los potenciales newtonianos satisfacen la ecuación: $\Delta V = 0$, en todos los puntos "x" donde no hay masas.

En realidad, esta demostración no encierra mayores dificultades, ya que en los casos de los potenciales (2.3.2) y (2.3.3) los integrandos de las integrales involucrados son continuos y no presentan singularidades cuando se consideran solamente los puntos (x,y,z) de \mathbb{R}^3 que están fuera de las distribuciones de masas, lo cual permite derivar formalmente bajo el signo de integración.

Tomemos, por ejemplo, el potencial volumétrico:

$$V(x,y,z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(a,b,c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}} da db dc, \quad (2.5.1)$$

con $V: \mathbb{R}^3 - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, donde ρ es una función continua en todos los puntos $(a,b,c) \in \Omega$. Si consideramos solamente los puntos (x,y,z) de \mathbb{R}^3 , tales que $(x,y,z) \notin \Omega$, tenemos que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}},$$

es una función cuyo denominador nunca se anula, y es continua con respecto a x, y y z . De esto, resulta que la integral (2.5.1) es propia y además es permitido derivar bajo el signo de integral. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(a,b,c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}} \right] da db dc \\ &= - \iiint_{\Omega} \frac{\rho(a,b,c)(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} da db dc \end{aligned}$$

Nótese que el integrando en esta última integral tampoco presenta singularidades y es continuo con respecto a los parámetros x, y y z , por lo que podemos derivar nuevamente bajo el signo de integración. Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= - \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(a,b,c)(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \right] da db dc \\ &= - \rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \frac{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] - 3(x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{5/2}} da db dc \\ &= - \rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right] da db dc, \end{aligned}$$

donde $r = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}$. Resultados análogos se obtienen para $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(y-b)^2}{r^5} \right] da db dc$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(z-c)^2}{r^5} \right] da db dc$$

Sumando miembro a miembro las tres igualdades, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}{r^5} \right] da db dc \\ &= -\rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right] da db dc \\ &= -\rho(a,b,c) \iiint_{\Omega} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right] da db dc \\ &= 0 \end{aligned}$$

En 1813, Poisson demostró que el potencial volumétrico (2.3.2) de la sección (2.3) satisface la ecuación:

$$\Delta v = -4 \pi \rho(x) \quad (2.5.2)$$

en los puntos $x \in \Omega$. Obsérvese que para esto, Poisson tuvo que derivar una integral impropia bajo el signo de integración, lo cual realizó sin mayores consideraciones. Esto se debió, sin lugar a dudas, a que en aquella época el "Análisis" todavía no alcanzaba el "rigor" que alcanzaría posteriormente, en la segunda mitad del siglo XIX. Hoy sabemos que la demostración de Poisson no es válida para cualquier función " ρ " continua, es decir, que

la mera continuidad de la función ρ no garantiza la existencia de las segundas derivadas del potencial volumétrico V . Le tocaría a Holder, muchos años después, en 1882, introducir una clase de funciones hoy conocidas como "Holder-continuas", y mostrar que si " ρ " es Holder-continua, queda garantizada la existencia de las segundas derivadas del potencial V , y entonces la ecuación (2.5.2) es válida. Una función $\rho: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es Holder-continua de exponente α , $0 < \alpha < 1$, si existe una constante $K > 0$, tal que:

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq K|x-y|^\alpha,$$

para todos los puntos x, y en Ω .

A continuación, presentamos una demostración de que el potencial volumétrico V verifica la ecuación de Poisson:

$\Delta V = -4\pi \rho(x, y, z)$, en cualquier punto $P(x, y, z)$ interior a la región Ω en la cual se concentran las masas.

Sea $V: \mathbb{R}^3 - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ el potencial volumétrico definido por:

$$V(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(a, b, c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}} da db dc \quad (2.5.3)$$

donde $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3: a^2 + b^2 + c^2 < R^2\}$, ρ es una función continua sobre Ω y $\rho(a, b, c) = 0$, si $a^2 + b^2 + c^2 \geq R^2$.

Demostraremos que para todo punto $P(x, y, z)$ interior a la región de integración Ω la función potencial antes definida satisface la ecuación de Poisson.

En tal sentido, introducimos el siguiente cambio de variables:

$$a - x = \xi \quad ; \quad b - y = \gamma \quad ; \quad c - z = \delta,$$

para obtener una nueva representación del potencial (2.5.3):

$$V(x,y,z) = \iiint_D \frac{P(x+\xi, y+\gamma, z+\delta)}{(\xi^2 + \gamma^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\gamma d\delta \quad (2.5.4)$$

donde, como de momento sólo nos interesan los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que se encuentran en la región acotada: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, y como $P(x+\xi, y+\gamma, z+\delta) = 0$, si $(x+\xi)^2 + (y+\gamma)^2 + (z+\delta)^2 \geq R^2$, el dominio de integración "D" de la integral (2.5.4) resulta ser la esfera:

$$D = \left\{ (\xi, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3: \xi^2 + \gamma^2 + \delta^2 \leq (2R)^2 = 4R^2 = L^2 \right\}$$

El dominio "D" está bien determinado, ya que los puntos (a,b,c) pertenecen a la esfera Ω de radio R, y, como sólo estamos considerando los puntos (x,y,z) de \mathbb{R}^3 , tales que $(x,y,z) \in \Omega$, tenemos que:

$$(\xi^2 + \gamma^2 + \delta^2)^{1/2} = [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{1/2} \leq 2R,$$

entonces,

$$\xi^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \leq R^2 = L^2$$

La integral (2.5.4) es impropia, pues tiene una singularidad en el origen de coordenadas. Ahora bien, lo primero que haremos es verificar la existencia de la función potencial y de las componentes del campo de fuerzas gravitacionales en las direcciones

de los ejes de coordenadas.

En lo que se refiere a la existencia de estas funciones, basta demostrar que las mismas poseen mayorantes integrables:⁽¹⁾

En el caso de la función potencial:

$$V(x,y,z) = \iiint_D \frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\zeta,$$

el integrando de la misma posee el mayorante integrable:

$\rho^*/(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$, con $\rho^* = \max |\rho|$. Utilizando coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\rho^* d\xi d\eta d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}} &= \rho^* \iiint_D \frac{r^2 dr \text{Sen}\phi d\phi d\theta}{r} \\ &= \rho^* \iiint_D r dr \text{Sen}\phi d\phi d\theta \\ &= \rho^* \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \text{Sen}\phi d\phi \right) d\theta \right] r dr \\ &= \rho^* \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} 2 d\theta \right] r dr \\ &= \rho^* \int_0^L 4\pi r dr \\ &= 4\pi \rho^* \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^L \\ &= 2\pi \rho^* L^2 \end{aligned}$$

(1) Ver [15], Kellogg, Oliver D, "Foundations of Potential Theory. "Cap. VI, Parag. 2).

Con respecto a las funciones componentes del campo de fuerzas gravitacionales en las direcciones de los ejes de coordenadas:

$$X = - \iiint_D \frac{\xi \cdot P(x + \xi, y + \eta, z + \delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

$$Y = - \iiint_D \frac{\eta \cdot P(x + \xi, y + \eta, z + \delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

$$Z = - \iiint_D \frac{\delta \cdot P(x + \xi, y + \eta, z + \delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta,$$

se demuestra, de manera análoga, la convergencia de dichas integrales en la región D, con respecto a los parámetros x, y y z, en virtud de que sus integrandos poseen mayorantes integrables de la forma $P^* / (\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)$, donde $P^* = \max |P|$.

En vista de lo anterior, queda demostrado que tanto el potencial volumétrico V, como el campo de fuerzas gravitacionales, están definidos en todo el espacio.

Por otro lado, la función potencial y las componentes del campo de fuerzas gravitacionales son funciones continuas en todo el espacio R^3 . (1)

Hasta ahora, tenemos conocimientos acerca de la existencia y la continuidad de la función potencial y de las componentes del

(1) Véase [15] Kellogg, Oliver D., "Foundations of Potential Theory", (Cap. VI, Pág. 3, Pág. 150).

Campo de fuerzas gravitacionales, pero no sabemos nada sobre la relación entre el potencial volumétrico y las componentes del campo de fuerzas gravitacionales.

Concretamente nos referimos a lo siguiente:

- a) Si las componentes del campo de fuerzas gravitacionales son, en efecto, las derivadas parciales de la función potencial con respecto a los parámetros x, y y z respectivamente.
- b) Si las componentes del campo de fuerzas gravitacionales se pueden obtener derivando la función potencial bajo el signo de integración.

Con relación al punto (a), se demuestra que, efectivamente:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = - \iiint_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y = - \iiint_D \frac{\eta \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = Z = - \iiint_D \frac{\delta \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta^{(1)} \quad (2.5.7)$$

Con respecto al punto (b), mostraremos que:

$$\iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

(1) Véase [15] Kellog, Oliver D., "Foundations of Potential Theory", (Cap. VI, Parag. 3, Pags. 151-152).

En efecto, como $a-x = \xi$, implica que $\partial x = -\partial \xi$, podemos escribir:

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.8)$$

y como,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] - \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}},$$

entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] + \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}},$$

luego,

$$\begin{aligned} - \iiint_D \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] d\xi d\eta d\delta &= - \iiint_D \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \right] d\xi d\eta d\delta + \\ &- \iiint_D \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Gauss-Ostrogradski a la primera integral del segundo miembro de la igualdad anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
 - \iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta &= - \iint_{\Sigma} \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} \cos(\eta, \xi) d\Sigma + \\
 &\quad - \iiint_D \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta,
 \end{aligned}$$

y como $P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)$ se anula en la superficie Σ de la esfera D , entonces:

$$- \iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta,$$

finalmente, por la igualdad (2.5.8), resulta:

$$\iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial x} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.9)$$

De manera análoga se demuestra que:

$$\iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial y} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\eta \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

y

$$\iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial z} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\delta \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

Combinando las igualdades (2.5.5) y (2.5.9), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \iiint_D \frac{\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta \\ &= - \iiint_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \\ &= \iiint_D \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}} d\xi d\eta d\delta, \end{aligned}$$

o sea: las derivadas de primer orden de la función potencial se pueden obtener derivando bajo el signo de la integral.

Para probar la existencia de las derivadas parciales de segundo orden del potencial volumétrico, es necesario establecer las condiciones bajo las cuales es posible derivar nuevamente bajo el signo de integración. Para ello, utilizaremos los siguientes teoremas sobre integrales impropias dependientes de un parámetro:

Teorema 2.5.1

$$\begin{aligned} \text{Sea } F(x) &= \int_{\Omega} f(x,y) dy \\ &= \int_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) dy_1, \dots, dy_n \quad (2.5.10) \end{aligned}$$

una integral impropia dependiente del parámetro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{G}$, donde las regiones Ω y G están limitadas y tienen una frontera suave a trozos. Si,

- 1) La integral $F(x) = \int_{\Omega} f(x,y)dy$ converge uniformemente sobre \bar{G} y la función $f(x,y)$ es continua sobre $\bar{\Omega} \times \bar{G}$, a excepción de los puntos singulares (x,y_0) .
- 11) La derivada $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)$ es continua sobre $\bar{G} \times \bar{\Omega}$, a excepción de los puntos singulares (x,y_0) y la integral:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)dy$$

converge uniformemente sobre \bar{G} , entonces, se tiene la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x,y)dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)dy,$$

o sea, "es legítimo derivar bajo el signo de la integral."⁽¹⁾

Teorema 2.5.2. (Criterio de Weierstrass)

Si la función $f(x,y)$ es continua sobre $\bar{G} \times \bar{\Omega}$, a excepción de los puntos singulares (x,y_0) y satisface sobre $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ la desigualdad:

$$|f(x,y)| \leq \varphi(y), \quad (x \in \bar{G}),$$

donde la integral:

$$\int_{\Omega} \varphi(y)dy < \infty$$

(1) Ver [4], Bugrov, Ya. S. "Matemáticas Superiores". (Cap. 2, Parg. 2.15), para mayores detalles sobre el teorema (2.5.1).

converge, entonces, la integral (2.5.10) converge uniformemente sobre \overline{G} .⁽¹⁾

Consideremos, ahora, la primera derivada parcial de la función potencial "V" con respecto a la variable x:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \iiint_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta; \quad (2.5.11)$$

esta integral es impropia, pues su integrando tiene una singularidad en el origen de coordenadas.

El integrando de la integral (2.5.11) es una función continua sobre D, salvo para $(\xi, \eta, \delta) = (0, 0, 0)$, si la función de densidad de masa "ρ" es una función Holder-continua. (Véase pág. 77). En efecto, sea $\epsilon > 0$ y (x_0, y_0, z_0) un punto arbitrario dentro de la región D. Entonces:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} - \frac{\xi \cdot \rho(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} \right| = \\ & = \frac{|\xi|}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} \left| \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta) - \rho(x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\delta) \right| \\ & \leq \frac{|\xi|}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} K |(x+\xi, y+\eta, z+\delta) - (x_0+\xi, y_0+\eta, z_0+\delta)|^\alpha \\ & = \frac{|\xi|}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} K |(x-x_0, y-y_0, z-z_0)|^\alpha \end{aligned}$$

(1) Ver [4], Bugrov, Ya. S. "Matemáticas Superiores". (Cap. 2, Parg. 2.15), para mayores detalles sobre el Teorema (2.5.2).

$$\text{Tomando } \delta_\epsilon = \left[\frac{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2} \epsilon}{K |\xi|} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

resulta,

$$\begin{aligned} \frac{|\xi| K}{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2}} |(x-x_0, y-y_0, z-z_0)| &< \frac{|\xi| K}{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2}} \left\{ \left[\frac{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2} \epsilon}{|\xi| K} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^\alpha \\ &= \frac{|\xi| K}{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2}} \cdot \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2)^{3/2}}{|\xi| K} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

El integrando de la integral (2.5.11) tiene como mayorante integrable a la expresión: $\rho^* / \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2$, donde $\rho^* = \max |\rho|$. En efecto,

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\rho^* d\xi d\eta d\gamma}{\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2} &= \rho^* \iiint_D \frac{r^2 dr \text{ Sen } \phi d\phi d\theta}{r^2} \\ &= \iiint_D dr \text{ Sen } \phi d\phi d\theta \\ &= \rho^* \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \text{Sen } \phi d\phi \right) d\theta \right] dr \\ &= \rho^* \int_0^L \left[\int_0^{2\pi} 2 d\theta \right] dr \\ &= \rho^* \int_0^L 4\pi dr \\ &= 4\pi \rho^* L \end{aligned}$$

Hasta aquí, tenemos que la primera derivada de la función potencial "V" con respecto al parámetro x, (la integral 2.5.11), cumple con la condición (1) del teorema (2.5.1).

A continuación consideramos la función:

$$- \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta, \quad (2.5.12)$$

y como $\partial x = -\partial \xi$, resulta que:

$$\iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta = \iiint_D \frac{\xi \frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta, \quad (2.5.13)$$

y tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} \right] &= \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} + \\ &+ \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} - \frac{3\xi^2 \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} \right] + \\ &- \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} + \frac{3\xi^2 \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} \right] d\xi d\eta d\delta \\ &- \iiint_D \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta + \iiint_D \frac{3\xi^2 \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{5/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.14) \end{aligned}$$

Aquí, por la fórmula de Gauss-Ostrogradski, y teniendo en cuenta que $P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)$ se anula en la frontera Σ de la esfera D , la primera integral del segundo miembro de la igualdad (2.5.14) se anula, de modo que:

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta &= - \iiint_D \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \\ &+ \iiint_D \frac{3\xi^2 \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{5/2}} d\xi d\eta d\delta, \quad (2.5.15) \end{aligned}$$

y por la igualdad (2.5.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} - \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta &= \iiint_D \frac{\xi \frac{\partial}{\partial \xi} P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \\ &= - \iiint_D \frac{P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta + \\ &+ \iiint_D \frac{3\xi^2 \cdot P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{5/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.16) \end{aligned}$$

Obsérvese en las dos últimas integrales de la igualdad anterior lo siguiente: como ρ es Holder-continua, los integrandos de estas integrales son funciones continuas de los parámetros x, y y z , para $(\xi, \eta, \delta) \neq (0, 0, 0)$. Además, dichos integrandos poseen los mayorantes integrables: $\rho^*/(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}$ y $3\rho^*/(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}$, respectivamente, con $\rho^* = \max |\rho|$, luego, las integrales correspondientes convergen uniformemente con respecto a los parámetros x, y y z . Entonces, la función:

$$\frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}}$$

es una función continua de los parámetros x, y y z , excepto cuando $(\xi, \eta, \delta) = (0, 0, 0)$, y la integral impropia:

$$- \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta$$

converge uniformemente con respecto a los parámetros x, y y z . Es decir, se verifica la condición (11) del teorema (2.5.1).

Por lo tanto, en virtud de que se han cumplido las condiciones (1) e (11) del teorema (2.5.1), se tiene la igualdad:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \iiint_D \frac{\xi \cdot \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta = - \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} \rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta, \quad (2.5.17)$$

o sea, es lícito derivar la integral (2.5.11) bajo el signo de la integral.

Combinando las igualdades (2.5.13) y (2.5.17), tenemos que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \iiint_D \frac{\xi \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta = \iiint_D \frac{\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.18)$$

Por un procedimiento análogo se obtienen las igualdades:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \iiint_D \frac{\eta \cdot \frac{\partial}{\partial y} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta = \iiint_D \frac{\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.19)$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \iiint_D \frac{\delta \cdot \frac{\partial}{\partial z} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta = \iiint_D \frac{\delta \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.20)$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (2.5.18), (2.5.19) y (2.5.20), resulta:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \iiint_D \frac{(\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \delta \cdot \frac{\partial}{\partial \delta}) [\rho(x+\xi, y+\eta, z+\delta)]}{(\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{3/2}} d\xi d\eta d\delta \quad (2.5.21)$$

Para abreviar la escritura, hagamos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)] = \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)] = \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)] = \frac{\partial P}{\partial \delta}$$

y

$$r = (\xi^2 + \eta^2 + \delta^2)^{1/2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int_0^L \left[\int_{S_r} \frac{\xi \cdot \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P}{\partial \eta} + \delta \frac{\partial P}{\partial \delta}}{r^3} ds_r \right] dr \\ &= \int_0^L \left[\int_{S_r} \frac{\xi}{r} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial P}{\partial \delta} ds_r \right] dr, \end{aligned}$$

donde S_r es la superficie de la esfera de radio r con centro en el origen de coordenadas y ds_r es el diferencial de área de dicha esfera.

Por otro lado, $\frac{\partial P}{\partial r} = \langle (\frac{\partial P}{\partial \xi}, \frac{\partial P}{\partial \eta}, \frac{\partial P}{\partial \delta}), r_o \rangle$, siendo $r_o = (\frac{\xi}{r}, \frac{\eta}{r}, \frac{\delta}{r})$ un vector unitario en la dirección del radio, luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int_0^L \left[\int_{S_r} \frac{\partial P}{\partial r} ds_r \right] dr \\ &= \int_0^L \left[\int_{S_r} \frac{\partial}{\partial r} [P(x+\xi, y+\eta, z+\delta)] ds_r \right] dr \end{aligned}$$

Como el elemento de area $ds_r = r^2 d\Omega$, donde $d\Omega$ es el elemento de área de la esfera unitaria Ω , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \int_0^L \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial \rho(x + \xi_0 r, y + \eta_0 r, z + \delta_0 r)}{\partial r} d\Omega \right] dr \\ &= \iint_{\Omega} \left[\int_0^L \frac{\partial \rho(x + \xi_0 r, y + \eta_0 r, z + \delta_0 r)}{\partial r} dr \right] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \left[\underbrace{\rho(x + \xi_0 L, y + \eta_0 L, z + \delta_0 L)}_{(*)} - \rho(x + \xi_0 0, y + \eta_0 0, z + \delta_0 0) \right] d\Omega \\ &= - \iint_{\Omega} \rho(x, y, z) d\Omega \\ &= -4 \pi \rho(x, y, z) \end{aligned}$$

Aquí, es preciso aclarar que:

$$\iint_{\Omega} \rho(x + \xi_0 L, y + \eta_0 L, z + \delta_0 L) d\Omega = 0,$$

puesto que $\rho(x + \xi, y + \eta, z + \delta) = 0$, siempre que $\xi^2 + \eta^2 + \delta^2 \geq L^2$.

Como $\xi = \xi_0 L$, $\eta = \eta_0 L$, $\delta = \delta_0 L$, donde $(\xi_0, \eta_0, \delta_0) \in \Omega$, y además,

$$\begin{aligned} (\xi_0 L)^2 + (\eta_0 L)^2 + (\delta_0 L)^2 &= \xi_0^2 L^2 + \eta_0^2 L^2 + \delta_0^2 L^2 \\ &= (\xi_0^2 + \eta_0^2 + \delta_0^2) L^2 \\ &= L^2, \end{aligned}$$

entonces: $\rho(x + \xi_0 L, y + \eta_0 L, z + \delta_0 L) = 0$

Comentarios.

Posiblemente, como consecuencia del estudio de los problemas presentados en este capítulo, relacionados con la noción de potencial, fue que apareció por primera vez el problema de Dirichlet, como una cuestión de determinar un potencial V en una región Ω , conociendo su valor en la frontera $\partial\Omega$.

Por otro lado, es importante señalar que muchos de los desarrollos matemáticos logrados hasta finales de la primera mitad del siglo XIX adolecían de fallas, y en algunos casos, inclusive, se demostró posteriormente su falacidad. Esto se debió, en gran parte, a las limitaciones que presentaba, en particular, el "Análisis Matemático" en la época. En la segunda mitad del siglo XIX, gracias a las contribuciones efectuadas por grandes matemáticos como Riemann, Cauchy, Dirichlet, Weierstrass, Schwarz y otros, que le imprimieron al Análisis el "rigor" necesario para garantizar la consistencia de las demostraciones, las dificultades antes señaladas fueron superadas.

CAPITULO III

"DESARROLLO HISTORICO DEL PROBLEMA DE DIRICHLET DURANTE EL SIGLO XIX"

En este capítulo, nos ocupamos del aspecto fundamental de esta investigación: "el desarrollo histórico del problema de Dirichlet durante el siglo XIX. En tal sentido, presentamos un estudio cronológico analítico y crítico de los más importantes métodos ideados para resolver el problema de Dirichlet en la mencionada época. Aunque los métodos estudiados no fueron los únicos creados para darle solución al citado problema, consideramos que son los más importantes debido a la gran influencia que ejercieron en el desarrollo y la evolución de la Matemática durante los siglos XIX y XX.

3.1 El Método de Fourier.

Este método se aplica a regiones Ω que tienen cierto tipo de simetría, como por ejemplo, rectángulos, franjas, discos, esferas y cilindros. El mismo consiste en utilizar la separación de variables independientes para descomponer la ecuación de Laplace en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden ser resueltas explícitamente. A continuación, utilizando las soluciones de estas ecuaciones, intentar resolver el problema de Dirichlet en la forma de una serie cuyos coeficientes se escogen de modo que se cumplan las condiciones de frontera. Vamos a ilustrar este método con un ejemplo muy parecido al que presentó Fourier en 1822, en su libro "Teoría Analítica del Calor".

Sea $\bar{\Omega}$ un cuerpo homogéneo en \mathbb{R}^3 , con una temperatura inicial $u_0(x)$ en cada punto $x \in \bar{\Omega}$. Supongamos que la superficie del cuerpo se mantiene a una temperatura $f(x)$, que no varía con el tiempo, en cada punto $x \in \partial\Omega$. Se demuestra que la temperatura $u(x,t)$ del punto "x" en el instante "t" satisface la siguiente ecuación diferencial, conocida como ecuación del calor:⁽¹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \Delta_x u(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

donde K es una constante que depende de las propiedades físicas del cuerpo y Δ_x es el Laplaciano relativo a la variable x. Además de esto, la temperatura $u(x,t)$ debe satisfacer la condición inicial,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

y la condición de frontera,

$$u(x,t) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \text{ y } t \geq 0.$$

El llamado régimen estacionario corresponde a la temperatura del cuerpo cuando $t \rightarrow \infty$; así, definimos la temperatura de equilibrio como:

$$U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t),$$

(1) Ver [4], Bugrov Ya. S., "Matemáticas Superiores", Capítulo V, Parag. 5.1.

La cual debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\Delta U = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1.1)$$

$$U = f, \quad x \in \partial\Omega \quad (3.1.2)$$

Fourier consideró el caso en que Ω es una región de \mathbb{R}^3 limitada por los planos $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. La función f dada en la frontera $\partial\Omega$ es igual a cero en los planos $x_1 = 0$ y $x_1 = 1$, y en el plano $x_2 = 0$, $f(x_1, 0, x_3) = g(x_1)$, con $g(0) = g(1) = 0$.

Suponiendo que el material es homogéneo, la solución "U" no depende de x_3 , y el problema puede ser tratado en el plano (x_1, x_2) . Reescribamos, entonces, la condición de frontera (3.1.2) del siguiente modo:

$$U(x_1, 0) = g(x_1), \quad 0 < x_1 < 1 \quad (3.1.3)$$

$$U(0, x_2) = U(1, x_2) = 0, \quad x_2 > 0 \quad (3.1.4)$$

La separación de variables consiste en encontrar soluciones de la forma:

$$U(x_1, x_2) = \phi(x_1) \psi(x_2), \quad (3.1.5)$$

que al reemplazarlas en la ecuación (3.1.1) resulte que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0$$

donde,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \phi''(x_1) \psi(x_2)$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \psi''(x_2)\phi(x_1),$$

entonces:

$$\phi''(x_1)\psi(x_2) + \psi''(x_2)\phi(x_1) = 0,$$

luego,

$$\psi''(x_2)\phi(x_1) = -\phi''(x_1)\psi(x_2),$$

por lo tanto,

$$\frac{\psi''(x_2)}{\psi(x_2)} = -\frac{\phi''(x_1)}{\phi(x_1)} \quad (3.1.6)$$

Aquí, el primer miembro de la igualdad (3.1.6) es función únicamente de la variable x_2 y el segundo miembro lo es sólo de la variable x_1 . Fijando, por ejemplo, cierto valor de la variable x_1 y variando a x_2 , (o lo contrario), se obtiene que ambos miembros de la igualdad (3.1.6) se mantienen constantes al variar sus argumentos, de modo que podemos igualarlos a una constante " λ ":

$$\frac{\psi''(x_2)}{\psi(x_2)} = -\frac{\phi''(x_1)}{\phi(x_1)} = \lambda$$

De esta última expresión se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones $\phi(x_1)$ y $\psi(x_2)$:

$$\phi''(x_1) + \lambda \phi(x_1) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\psi''(x_2) - \lambda \psi(x_2) = 0 \quad (3.1.8)$$

En virtud de la condición de frontera (3.1.4) y de que la solución buscada es de la forma:

$$U(x_1, x_2) = \phi(x_1) \psi(x_2),$$

tenemos que:

$$U(0, x_2) = \phi(0) \psi(x_2) = 0$$

$$U(1, x_2) = \phi(1) \psi(x_2) = 0,$$

de lo cual resulta que:

$$\phi(0) = \phi(1) = 0,$$

porque si $\psi(x_2) = 0$, entonces tendríamos que $U(x_1, x_2) \equiv 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, resolvemos, ahora, la ecuación (3.1.7); primero, buscando soluciones particulares de la forma:

$$\phi(x_1) = e^{kx_1},$$

con "k" constante. Entonces:

$$\phi'(x_1) = ke^{kx_1}$$

y

$$\phi''(x_1) = k^2 e^{kx_1},$$

y reemplazando en la ecuación (3.1.7), tenemos:

$$k^2 e^{kx_1} + \lambda e^{kx_1} = 0,$$

entonces,

$$e^{kx_1}(k^2 + \lambda) = 0,$$

luego,

$$k^2 + \lambda = 0,$$

de modo que:

$$k = \pm \sqrt{-\lambda} = \pm \sqrt{\lambda} i,$$

es decir:

$$k_1 = \alpha + \beta i = 0 + \sqrt{\lambda} i$$

$$k_2 = \alpha - \beta i = 0 - \sqrt{\lambda} i$$

Las soluciones particulares pueden escribirse en la forma.

$$y_1(x_1) = e^{(\alpha + i\beta)x_1} \quad \text{y} \quad y_2(x_1) = e^{(\alpha - i\beta)x_1},$$

y como $\alpha = 0$, resulta que:

$$y_1(x_1) = e^{i\beta x_1} = \cos \beta x_1 + i \operatorname{Sen} \beta x_1, \quad \text{y}$$

$$y_2(x_1) = e^{-i\beta x_1} = \cos \beta x_1 - i \operatorname{Sen} \beta x_1$$

Entonces, las partes reales e imaginarias de estas funciones complejas también son soluciones particulares, de modo que podemos tomar:

$$y_1(x_1) = \cos \beta x_1 \quad \text{y} \quad y_2(x_1) = \operatorname{Sen} \beta x_1$$

La solución general de la ecuación (3.1.7) tendrá la forma:

$$y = Ay_1(x_1) + By_2(x_1),$$

de modo que:

$$\phi(x_1) = A \cos \beta x_1 + B \operatorname{Sen} \beta x_1,$$

y tomando en cuenta que $\phi(0) = \phi(1) = 0$, tenemos:

$$\phi(0) = A \cos \beta(0) + B \operatorname{Sen} \beta(0) = 0,$$

luego $A = 0$, y como:

$$\phi(1) = A \cos \sqrt{\lambda} + B \operatorname{Sen} \sqrt{\lambda} = 0,$$

resulta que:

$$\phi(1) = B \operatorname{Sen} \sqrt{\lambda} = 0,$$

donde $\operatorname{Sen} \sqrt{\lambda} = 0$, ya que si $B = 0$, $\phi(x_1) = 0$, y entonces, $U(x_1, x_2) \equiv 0$. Por lo tanto,

$$\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

o bien,

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y la solución de la ecuación (3.1.7) es:

$$\phi_n(x_1) = B_n \operatorname{Sen}(n\pi x_1) \tag{3.1.9}$$

Procediendo de manera análoga con la ecuación (3.1.8):

$$\psi''(x_2) - \lambda \psi(x_2) = 0,$$

la ecuación característica correspondiente es:

$$k^2 - \lambda = 0,$$

entonces,

$$k^2 = \lambda, \quad \lambda > 0$$

luego,

$$k_1 = \sqrt{\lambda}$$

$$k_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Las soluciones particulares son las funciones:

$$y_1(x_2) = e^{\sqrt{\lambda} x_2}$$

y

$$y_2(x_2) = e^{-\sqrt{\lambda} x_2}$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que:

$$\frac{y_2(x_2)}{y_1(x_2)} = \frac{e^{-\sqrt{\lambda} x_2}}{e^{\sqrt{\lambda} x_2}} = e^{-2\sqrt{\lambda} x_2} \neq \text{cte.},$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación (3.1.8) tiene la forma:

$$\Psi_n(x_2) = p_n e^{\sqrt{\lambda} x_2} + q_n e^{-\sqrt{\lambda} x_2},$$

donde,

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

o sea,

$$\Psi_n(x_2) = p_n e^{n \pi x_2} + q_n e^{-n \pi x_2}$$

Como $U(x_1, x_2)$ no puede crecer indefinidamente cuando $x_2 \rightarrow \infty$, debemos tomar $p_n = 0$. De esta manera, la expresión:

$$U_n(x_1, x_2) = b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1), \quad (3.1.10)$$

donde $b_n = B_n q_n$, satisface la ecuación (3.1.1):

$$\Delta U = 0,$$

y las condiciones de frontera (3.1.4). En efecto,

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_1^2} = -n^2 \pi^2 b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1)$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_2^2} = n^2 \pi^2 b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1),$$

luego,

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_2^2} = 0 \end{array}$$

Con relación a las condiciones de frontera (3.1.4), resulta que:

$$U_n(0, x_2) = b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi \cdot 0) = 0$$

y

$$U_n(1, x_2) = b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi) = 0,$$

es decir: $U(0, x_2) = U(1, x_2) = 0$.

Pero la expresión (3.1.10) no satisface la condición de frontera (3.1.3), puesto que:

$$U_n(x_1, 0) = b_n \text{ Sen}(n \pi x_1),$$

que necesariamente no es igual a $g(x_1)$.

La idea básica de Fourier fue, entonces, procurar expresar la solución del problema en la forma de una suma de términos del tipo del miembro derecho de la ecuación (3.1.10):

$$U(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \pi x_2} \text{ Sen}(n \pi x_1) \quad (3.1.11)$$

e intentar determinar los coeficientes " b_n " de tal modo que la condición (3.1.3) fuese también satisfecha.

Fourier determinó que si los coeficientes " b_n " eran de la forma:

$$b_n = 2 \int_0^1 g(x_1) \text{ Sen}(n \pi x_1) dx_1,$$

entonces se verificaba que

$$g(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ Sen}(n \pi x_1), \quad (3.1.12)$$

por lo tanto:

$$U(x_1, 0) = g(x_1), \quad 0 < x_1 < 1$$

En realidad, la situación resuelta en esta forma por Fourier no es más que el desarrollo de una función "g" en series de senos, y los coeficientes,

$$b_n = 2 \int_0^1 g(x_1) \text{Sen}(n \pi x_1) dx_1,$$

se conocen como "los coeficientes de Fourier". Nace así, la teoría de las series de Fourier, que hoy constituye una rama importante y fértil de la Matemática.

Volviendo a nuestro problema, la expresión (3.1.11) satisface también la condición (3.1.4), ya que cada término de la serie cumple con esa condición, por ser términos que tienen la forma de los de la expresión (3.1.10).

Queda por verificar que la expresión (3.1.11) cumple con la condición (3.1.1), para lo cual debe tenerse cierto cuidado, ya que no siempre se puede derivar término a término una serie. Es oportuno señalar, en este momento, que los criterios de convergencia uniforme para series de funciones fueron desarrollados en una época posterior a Fourier, (1768-1830).

Para que la función (3.1.11) cumpla con la condición (3.1.1), es preciso que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1) \quad (3.1.13)$$

y sus derivadas hasta de segundo orden con respecto a x_1 y a x_2 , converjan uniformemente en la región: $[0,1] \times]0, +\infty[$.

En efecto, dicha serie y sus derivadas hasta de segundo orden cumplen con esta propiedad. Es claro que:

$$|b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1)| \leq |b_n|,$$

ya que: $|\text{Sen}(n \pi x_1)| \leq 1$ y,

$$e^{-n \pi x_2} < 1, x_2 > 0.$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge, entonces, la serie (3.1.13) es una serie mayorante, y en consecuencia, converge uniformemente. (Criterio de Weierstrass).

Como la serie (3.1.13) es una serie de funciones continuas, de su convergencia uniforme se deduce que su suma: $U(x_1, x_2)$, es una función continua en la región $[0, 1] \times]0, +\infty[$.

Por otro lado:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi b_n e^{-n \pi x_2} \text{Cos}(n \pi x_1)$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1),$$

convergen uniformemente. En efecto, como $x_2 > 0$, tomemos un x_0 tal que $0 < x_0 < x_2$. Como $e^{-n \pi x_2}$ es decreciente,

$$e^{-n \pi x_2} < e^{-n \pi x_0},$$

además, como $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$, esto implica que: $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$, y la

sucesión $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Entonces,

$$\exists M > 0: |b_n| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego,

$$|n \pi b_n e^{-n \pi x_2} \cos(n \pi x_1)| \leq M n \pi e^{-n \pi x_0}$$

y

$$|n^2 \pi^2 b_n e^{-n \pi x_2} \operatorname{Sen}(n \pi x_1)| \leq M n^2 \pi^2 e^{-n \pi x_0}$$

Pero las series formadas por números positivos:

$$\pi M \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \pi x_0}$$

y

$$\pi^2 M \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n \pi x_0},$$

convergen, lo cual comprobaremos aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\left| \frac{(n+1) e^{-(n+1) \pi x_0}}{n e^{-n \pi x_0}} \right| = (1+1/n) e^{-\pi x_0} \rightarrow e^{-\pi x_0} < 1$$

$$\left| \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1) \pi x_0}}{n^2 e^{-n \pi x_0}} \right| = (1+1/n)^2 e^{-\pi x_0} \rightarrow e^{-\pi x_0} < 1,$$

en consecuencia, las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \pi b_n e^{-n \pi x_2} \cos(n \pi x_1)$$

y

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 b_n e^{-n\pi x_2} \text{Sen}(n\pi x_1),$$

son series mayorantes que convergen uniformemente para todo $x_2 > 0$, ya que $0 < x_0 < x_2$ fue escogido de manera arbitraria. Por lo tanto, queda comprobada la legitimidad de las derivadas:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n e^{-n\pi x_2} \text{Cos}(n\pi x_1) \quad (3.1.14)$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 b_n e^{-n\pi x_2} \text{Sen}(n\pi x_1) \quad (3.1.15)$$

Con un procedimiento idéntico, se demuestra que es legítimo derivar dos veces término a término la serie (3.1.13) con respecto a la variable x_2 . Así,

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n e^{-n\pi x_2} \text{Cos}(n\pi x_1) \quad (3.1.16)$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 b_n e^{-n\pi x_2} \text{Sen}(n\pi x_1) \quad (3.1.17)$$

Finalmente, sumando miembro a miembro las igualdades (3.1.15) y (3.1.17), resulta que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

con lo cual queda comprobado que la función (3.1.11):

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \pi x_2} \text{Sen}(n \pi x_1),$$

cumple también con la condición (3.1.1).

Obsérvese que las series (3.1.14), (3.1.15) (3.1.16) y (3.1.17) convergen uniformemente en la región $[0, 1] \times]0, +\infty[$, por lo tanto, sus sumas respectivas son funciones continuas en dicha región.

En resumen, la función (3.1.11) es armónica en la región $[0, 1] \times]0, +\infty[$ y cumple con las condiciones de frontera (3.1.3) y (3.1.4), por consiguiente, es la solución del problema de Dirichlet planteado.

3.2 El Método de la Función de Green.

La historia comienza en 1828, cuando Green utilizando el "Teorema de la Divergencia", descubierto por Gauss quince años antes, demostró sus tres famosas identidades. (Ver Cap. I).

Obsérvese que la identidad (III) ofrece la representación de una función "u(x)" como la suma de tres potenciales: un potencial de volumen con densidad $\Delta u(y)$, un potencial de capa simple en $\partial \Omega$ con densidad $\frac{\partial u(y)}{\partial \gamma}$, y un potencial de doble capa en

$\partial\Omega$ con densidad $u(y)$. El razonamiento de Green para hallar la solución del problema de Dirichlet fue el siguiente: si "u" es armónica, entonces, puede representarse como la suma de dos potenciales de superficie, porque en tal caso, la densidad del potencial volumétrico, $\Delta u(y)$, es igual a cero, o sea,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{||x-y||} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{||x-y||} ds \quad (3.2.1)$$

Desafortunadamente, esta representación no es buena para escribir la solución del problema de Dirichlet, pues ella involucra, a la vez, los valores de "u" en la frontera y los valores desconocidos de $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ en la frontera. Aquí, surge una pregunta natural: ¿Cómo expresar la función "u" utilizando solamente un potencial de doble capa? El asunto se resuelve en la siguiente forma: usando las identidades (II) y (III), para "u" y "v" armónicas en Ω , tenemos que:

$$\iint_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta}) ds = 0, \quad (3.2.2)$$

y entonces

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{||x-y||} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} ds - \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{||x-y||} \right) ds + \\ + \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \eta} ds - \iint_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} ds \quad (3.2.3)$$

Es importante hacer notar que para poder escribir los dos últimos términos de la igualdad anterior, es necesario que $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sean continuas en $\partial\Omega$; en otras palabras, que u y v están en $C^1(\bar{\Omega})$. Agrupando convenientemente los términos del segundo miembro de la igualdad (3.2.3), obtenemos:

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} - v(y) \right) ds + \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v(y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \right) ds \quad (3.2.4)$$

Por otro lado, si escogemos a " $v(y)$ " de modo que: para cada $x \in \Omega$ tengamos que " v " es armónica y que,

$$v(y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|}, \quad y \in \partial\Omega,$$

el potencial de capa simple desaparecerá. De hecho, la función " v " no solo depende de " y ", sino también de " x ", por lo que la denotaremos por " $v(x,y)$ ", y quedará definida así: para cada $x \in \Omega$ fijo, $v(x,y)$ como función de " y " satisface las siguientes condiciones:

$$(i) \quad \Delta_y v(x,y) = 0$$

$$(ii) \quad v(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|}, \quad y \in \partial\Omega$$

La función Green para el problema de Dirichlet queda definida por:

$$G(x,y) = v(x,y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{||x - y||}, \quad (3.2.5)$$

y la solución del problema de Dirichlet estará representada por la función:

$$u(x) = \iint_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y) ds, \quad (3.2.6)$$

que es una excelente expresión, pues ella involucra solamente valores de "u" en la frontera, además del conocimiento de la función de Green, que depende solamente de la región Ω .

Green debió sentirse muy satisfecho con lo que había logrado, pues la solución del problema de Dirichlet para una función particular "f" dada en la frontera le parecía muy obvia, en virtud de ciertas consideraciones de la Física. Se sabe que buena parte del "Análisis" de la primera mitad del siglo XIX estaba estructurada con argumentos de la Física, lo que no se debe considerar como una deficiencia. Matemáticos o físicos como Fourier y Green obtuvieron resultados válidos y probaron los mismos a su manera. Los matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX le imprimieron el "rigor" al Análisis y desarrollaron las demostraciones que hoy aceptamos como buenas. Ellos demostraron que los resultados de sus predecesores no eran válidos en la generalidad que se pensaba, y que eran necesarias ciertas restricciones para garantizar su validez. Pero vale

la pena preguntarnos: ¿Habrían podido Green y otros producir sus bellos resultados sin haber utilizado la intuición física y la informalidad en sus pruebas?

A pesar de eso, la ética de los días de hoy nos obliga a hacer las siguientes críticas al trabajo de Green: en primer lugar, la dificultad del problema de Dirichlet no se reduce a la determinación de la función de Green, pues para determinarla o, por lo menos, demostrar su existencia, tenemos entre manos un problema de Dirichlet del mismo tipo que el original. Recordemos, sin embargo, que para algunas regiones, pocas en verdad, es posible determinar explícitamente la función de Green; esto ocurre cuando Ω es un semi-espacio o una esfera. Segundo, en la deducción de la fórmula (3.2.6) se admitió que la solución "u" del problema de Dirichlet estuviese en $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, y pedir la diferenciabilidad de "u" en todo $\bar{\Omega}$ es algo extraño al problema de Dirichlet. Por lo tanto, la validez de la fórmula solo se tendría si la solución fuese derivable también en la frontera $\partial\Omega$, lo que no se sabe, y por lo general, no siempre es verdad. Las dificultades del método de la función de Green fueron percibidas por los matemáticos del siglo XIX, pero no fue hasta 1898, cuando Liapunov, matemático ruso, descubrió las condiciones que deben ser impuestas a la frontera de la región Ω , para que la función de Green exista y también para la validez de la fórmula (3.2.6). En un estudio detallado de esta fórmula efectuado por Liapunov, demostró que para una amplia clase de superficies

llamadas "superficies de Liapunov"⁽¹⁾, esta representa la solución del problema interior de Dirichlet, bajo condiciones muy generales.

A continuación, presentamos como ejemplo, el problema interior de Dirichlet para la esfera, aplicando el método de la función de Green para determinar la solución "u", y de inmediato, la comprobación de que la misma resuelve a satisfacción el problema de Dirichlet.

Sea "f" una función continua, de valores conocidos, definida sobre la superficie Σ de una esfera Ω . Se requiere encontrar en el interior de la esfera, la función armónica $u(x,y,z)$ que adquiera en la superficie de la esfera los valores de "f" dados.

Para simplificar el estudio, el centro de la esfera se ubicará en el origen de coordenadas. Sea $X(x_0, y_0, z_0)$ el punto donde se quiere hallar el valor de la función buscada "u", y $OX = \rho$, la distancia del punto X al origen de coordenadas.

(1) Ver [29] Tijonov A., Samarsky A.; "Ecuaciones de la Física Matemática", Cap. IV, párrafos (4) y (5).

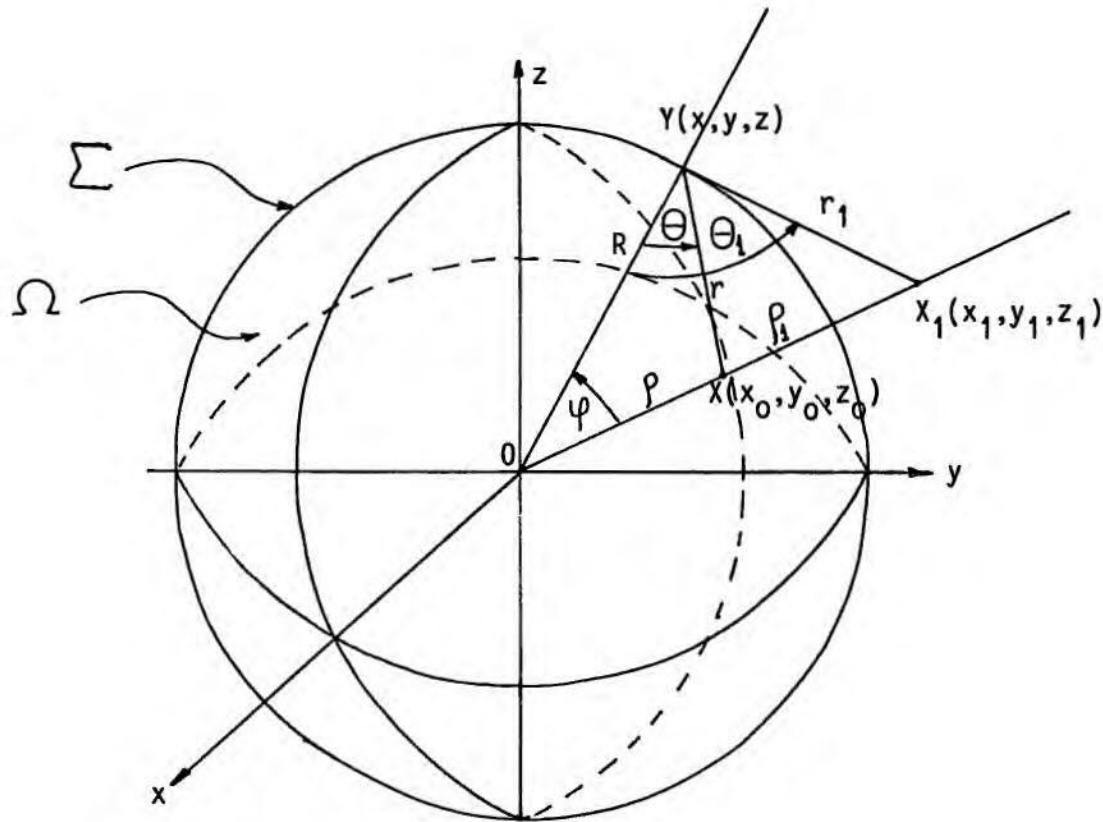


Fig. 11

Tomando un punto $X_1(x_1, y_1, z_1)$ sobre la prolongación del rayo OX , cuyas coordenadas están relacionadas con las del punto X por medio de la inversión con respecto a la esfera Ω :

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g(X) = g(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{R}{p}\right)^2 (x_0, y_0, z_0) = (x_1, y_1, z_1) = X_1,$$

donde " p " representa la distancia del punto X al origen de coordenadas O y R es el radio de la esfera Ω . Llamemos " p_1 " a la distancia del punto X_1 al origen de coordenadas.

Por la transformación "g", tenemos que:

$$x_1 = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 x_0 ; \quad y_1 = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 y_0 \quad \text{y} \quad z_1 = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 z_0,$$

entonces, como:

$$\rho = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \rho_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^4 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \right]^{1/2} \\ &= \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2} \\ &= \frac{R^2}{\rho^2} (\rho) \\ &= \frac{R^2}{\rho} \end{aligned}$$

es decir: $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}$.

Luego, las distintas ρ y ρ_1 de los puntos X y X_1 al origen de coordenadas están ligadas por la relación:

$$\rho \rho_1 = R^2, \quad (3.2.7)$$

de modo que al aumentar la longitud ρ , la longitud ρ_1 disminuye. Esto es, al alejarse el punto X del centro de la esfera, el punto X_1 , por el contrario, se aproxima a él, y cuando el punto X alcanza la superficie de la esfera, éste coincide con el punto X_1 , pues en tal caso, $\rho = R$, y entonces:

$$\rho_1 = \frac{R^2}{R} = R$$

Sean $XY = r$ y $X_1Y = r_1$, las distancias de X y X_1 a un punto arbitrario $Y(x,y,z)$ de la superficie de la esfera, y, $\theta = \sphericalangle OYX$, $\theta_1 = \sphericalangle OYX_1$, los ángulos que forman los vectores \overrightarrow{XY} y $\overrightarrow{X_1Y}$ con el radio OY , (Véase figura 11). Los triángulos $\triangle OXY$ y $\triangle OX_1Y$ son semejantes, pues poseen un ángulo común en el vértice O , y además, por (3.2.7), tenemos que:

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1},$$

o sea,

$$\frac{OX}{OY} = \frac{OY}{OX_1},$$

luego, por la semejanza de los citados triángulos, podemos escribir:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}, \quad (3.2.8)$$

de donde obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} \quad (3.2.9)$$

Obsérvese que esta última igualdad es válida solamente cuando el punto Y está en la superficie de la esfera. Sea, ahora,

$$r_1 = [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]^{1/2},$$

la distancia del punto X_1 al punto arbitrario $Y(x,y,z)$, no necesariamente sobre la superficie de la esfera. Entonces:

$$\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1},$$

es una función armónica de (x,y,z) , dentro y fuera de la esfera Ω , excepto en el punto X_1 , y en particular, es armónica sobre la superficie " Σ ", de la esfera, sobre la cual adquiere los mismos valores que la función $\frac{1}{r}$, pues, si el punto Y está sobre la superficie de la esfera, entonces tiene lugar, como ya se ha explicado, la igualdad (3.2.9).

Escogiendo la función $v(X,Y)$ tal que:

$$v(X,Y) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & Y \in \Sigma \\ \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1}, & Y \notin \Sigma, \end{cases}$$

ella es armónica con respecto a Y en todo $\bar{\Omega}$, y no sólo depende de $Y(x,y,z)$, sino también de $X(x_0,y_0,z_0)$, pues cuando $Y \in \Sigma$, se tiene que:

$$\begin{aligned} v(X,Y) &= \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}}, \end{aligned}$$

y cuando $Y \notin \Sigma$, entonces:

$$\begin{aligned} v(X,Y) &= \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} \\ &= \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{\left[\left(x - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 x_0\right)^2 + \left(y - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 y_0\right)^2 + \left(z - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 z_0\right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Luego, la función $v(X,Y)$ cumple con todas las condiciones exigidas para la determinación de la función de Green. No debe olvidarse que las posiciones de los puntos X y X_1 son fijas y que ρ , ρ_1 y R son magnitudes constantes. La función de Green para el problema de Dirichlet es entonces:

$$G(X,Y) = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r},$$

la cual se anula en la frontera, y la solución del problema interior de Dirichlet para la esfera se da mediante la integral:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u(x,y,z) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ds, \quad (3.2.10)$$

tomada sobre la superficie Σ de la esfera Ω .

Como no conocemos el comportamiento de "u" en la frontera de la esfera, consideremos, ahora, la función:

$$u(X) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{P} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ds, \quad (3.2.11)$$

donde $X = (x_0, y_0, z_0)$, $Y = (x, y, z)$ y $f: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, de valores conocidos, definida sobre la frontera Σ de la esfera Ω . Queda por verificar, si la función (3.2.11) resuelve totalmente el problema interior de Dirichlet para la esfera, lo cual se resume en dos puntos:

- a) La función "u" es armónica en el interior de la esfera Ω .
- b) Dada la función continua $f: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, para todo $A \in \Sigma$,
 $\lim_{X \rightarrow A} u(X) = f(A)$,

Para la verificación del punto (a), comencemos por el cálculo de las derivadas normales:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r_1} \right)$$

Supongamos que el punto Y no está en la frontera de Ω , como indica la figura 12:

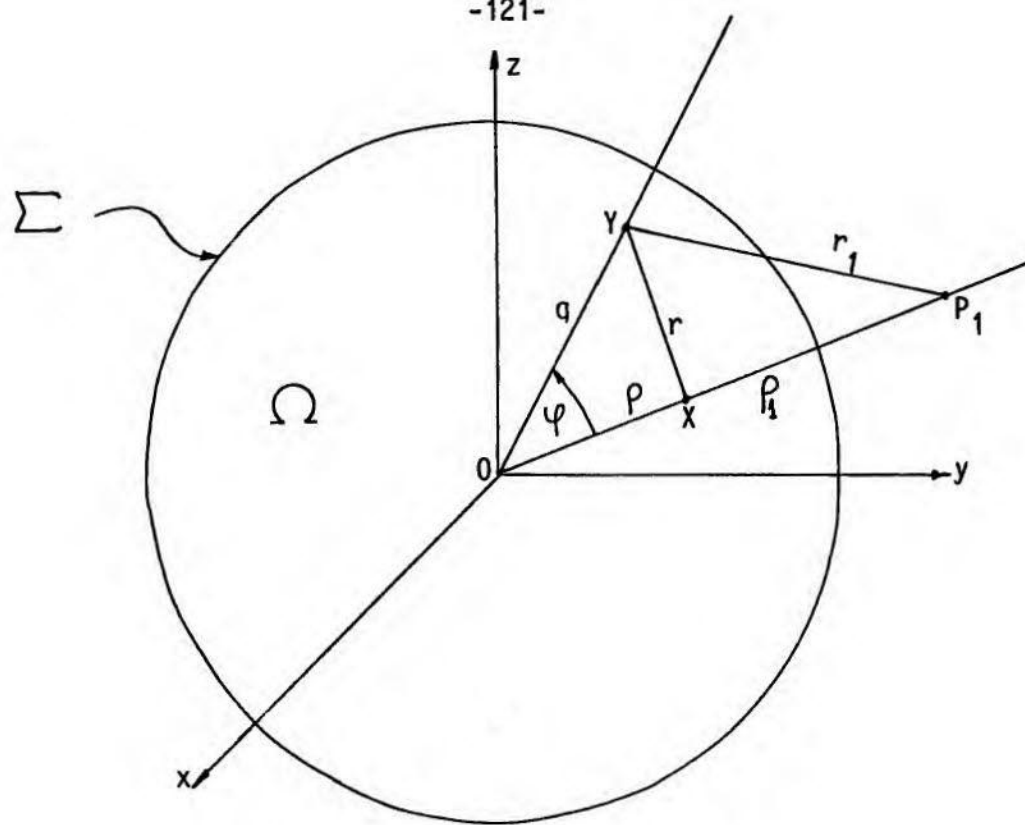


Fig. 12

Del triángulo $\triangle OYX$, por el teorema del coseno, tenemos:

$$r^2 = q^2 + \rho^2 - 2q\rho \cos \varphi ,$$

y derivando parcialmente con respecto a q:

$$2r \frac{\partial r}{\partial q} = 2q - 2\rho \cos \varphi ,$$

luego,

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{q - \rho \cos \varphi}{r} .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial q} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial q} \\ &= \frac{\rho \cos \varphi - q}{r^3}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\rho \cos \varphi - q}{r^3}$$

Pero cuando $Y \in \Sigma$,

$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \eta}$ y $q = R$, donde η es la normal unitaria a la superficie de la esfera en el punto Y . Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\rho \cos \varphi - R}{r^3}$$

De manera análoga, del triángulo $\triangle OYP_1$, por la ley del coseno,

$$r_1^2 = q^2 + \rho_1^2 - 2q \rho_1 \cos \varphi,$$

y derivando parcialmente con respecto a q :

$$2r_1 \frac{\partial r_1}{\partial q} = 2q - 2\rho_1 \cos \varphi,$$

luego,

$$\frac{\partial r_1}{\partial a} = \frac{a - \rho_1 \cos \varphi}{r_1},$$

y,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial r_1}{\partial a} \\ &= - \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial a} \\ &= \frac{\rho_1 \cos \varphi - a}{r_1^3}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r_1} \right) = \frac{\rho_1 \cos \varphi - a}{r_1^3}$$

Pero cuando $Y \in \Sigma$, ocurre que:

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad a = r, \quad \rho_1 = \frac{R^2}{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{1}{r},$$

de donde:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{\rho^3}{R^3} \cdot \frac{1}{r^3},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{\rho^3 \frac{R^2}{\rho} \cos \varphi - R}{R^3} \\ &= \frac{\rho^3}{R^3} \cdot \frac{R^2 \cos \varphi - \rho R}{\rho r^3} \\ &= \frac{\rho^2}{R^2} \cdot \frac{R \cos \varphi - \rho}{r^3}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{r_1} \right) = \frac{\rho^2}{R^2} \cdot \frac{R \cos \varphi - \rho}{r^3}$$

Luego, para cuando $\gamma \in \Sigma$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) &= \frac{R}{\rho} \frac{\rho^2}{R^2} \frac{R \cos \varphi - \rho}{r^3} - \frac{\rho \cos \varphi - R}{r^3} \\ &= \frac{\rho \cos \varphi}{r^3} - \frac{\rho^2}{R r^3} - \frac{\rho \cos \varphi}{r^3} + \frac{R}{r^3} \\ &= \frac{R}{r^3} - \frac{\rho^2}{R r^3} \\ &= \frac{R^2 - \rho^2}{R r^3} \end{aligned}$$

De lo anterior resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3} = \frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} \right) \quad (3.2.12)$$

A continuación, demostramos la siguiente identidad:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = -\frac{1}{r} + 2R \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3} = -\frac{1}{r} - 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.2.13)$$

Para la primera igualdad, tomemos en cuenta que cuando $\gamma \in \Sigma$,

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R \rho \cos \varphi,$$

así,

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = -\frac{1}{r} + 2R \frac{R - \rho \cos \varphi}{r^3}$$

$$\iff \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = \frac{-r^2 + 2R^2 - 2R \rho \cos \varphi}{r^3}$$

$$\iff R^2 - \rho^2 = -R^2 - \rho^2 + 2R \rho \cos \varphi + R^2 + R^2 - 2R \rho \cos \varphi$$

$$\iff R^2 - \rho^2 = R^2 - \rho^2$$

Para la segunda igualdad, recordemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\rho \cos \varphi - R}{r^3},$$

entonces,

$$-\frac{1}{r} + 2R \left[\frac{R - \rho \cos \psi}{r^3} \right] = -\frac{1}{r} - 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right),$$

por lo tanto,

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = -\frac{1}{r} - 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.2.14)$$

con lo cual queda demostrada la identidad (3.2.13). Ahora bien, multiplicando la igualdad (3.2.14) por $\frac{1}{R}$, obtenemos,

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} \right) = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{r} - 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) \right], \quad (3.2.15)$$

y combinando las expresiones (3.2.12) y (3.2.15), resulta,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{r} - 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \quad (3.2.16)$$

Entonces, reemplazando el resultado (3.2.16) en la ecuación (3.2.11), tenemos que:

$$\begin{aligned} u(X) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ds \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} f(Y) \left[\frac{1}{r} + 2R \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right) ds, \end{aligned}$$

en otras palabras, la ecuación (3.2.11) toma la forma:

$$u(X) = -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r}\right) ds \quad (3.2.17)$$

La expresión (3.2.17) representa a la función (3.2.11) como la suma de dos potenciales newtonianos; uno de capa simple con densidad $-f/4\pi R$, y otro de doble capa con densidad $-f/2\pi$, los cuales son funciones armónicas en el interior de la esfera Ω . Con esto, concluye la demostración del punto (a).

Para la verificación del punto (b), debemos mostrar que para todo $A \in \Sigma$,

$$\lim_{X \rightarrow A} u(X) = f(A)$$

En efecto, en la igualdad (3.2.17), sea:

$$W(X) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r}\right) ds$$

y

$$V(X) = -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds .$$

Como $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \cos(r, \eta)$, entonces:

$$W(X) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\cos(r, \eta)}{r^2} ds$$

Para el potencial de doble capa W , se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow A} W(X) = W^- &= -2\pi \left[\frac{-f(A)}{2\pi} \right] + W(A) \quad (1) \\ &= f(A) + \iint_{\Sigma} \frac{-f(Y)}{2\pi} \cdot \frac{-1}{2Rr} \\ &= f(A) + \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds, \end{aligned}$$

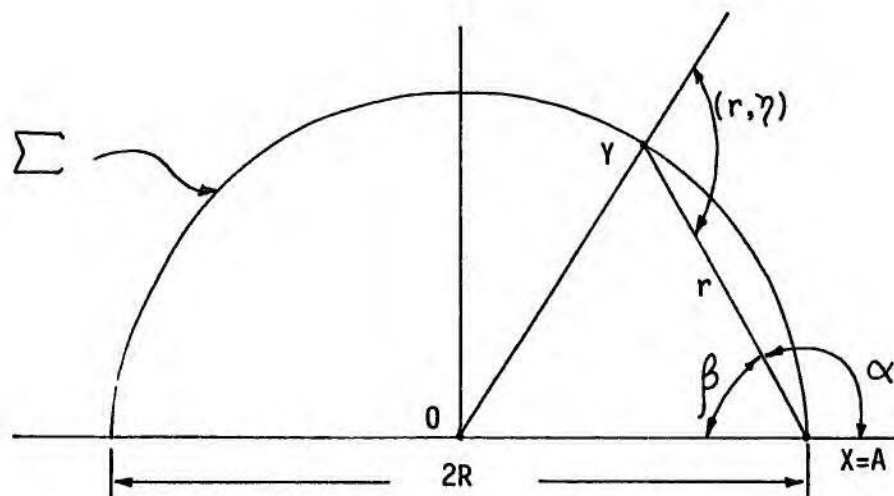


Fig. 13

pues, en el límite, cuando X se encuentra muy próximo a $A \in \Sigma$,

$$\cos(r, \gamma) = \cos(\alpha) = -\cos(\beta) = -\frac{r}{2R}, \quad (\text{Véase figura 13}).$$

(1) Véase [30]; "Trejo César, "Análisis vectorial con teoría del potencial y aplicaciones". Cap. VI, parag. 8, pag. 219.

Como el potencial de capa simple V es continuo sobre Σ ,

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow A} V(X) &= V^- = V(A) \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds, \quad A \in \Sigma \end{aligned}$$

Sumando los límites W^- y V^- se obtiene:

$$\begin{aligned} W^- + V^- &= u^- = f(A) + \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds - \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r} ds \\ &= f(A), \end{aligned}$$

es decir:

$$\lim_{X \rightarrow A} u(X) = f(A), \text{ para todo } A \in \Sigma,$$

con lo cual queda demostrado el punto (b).

Si para todo $A \in \Sigma$, definimos:

$$u(A) = f(A),$$

tenemos que la fórmula (3.2.11):

$$u(X) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} f(Y) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ds,$$

constituye, sin lugar a dudas, la solución del problema de Dirichlet para la esfera.

Como detalle adicional de importancia, observemos que: si en la igualdad anterior reemplazamos el factor:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

por

$$\frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3},$$

lo cual es factible en virtud de la igualdad (3.2.12) del desarrollo del ejemplo anterior, obtenemos la ecuación:

$$u(X) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \frac{f(Y)}{r^3} ds,$$

conocida como la "ecuación de Poisson", que representa otra versión de la solución del problema interior de Dirichlet para la esfera.

3.3 El Principio de Dirichlet.

En el año 1847, Lord Kelvin, (William Tompson, matemático inglés), y Dirichlet, en la década siguiente, introdujeron las ideas del "Cálculo de Variaciones" en la resolución del problema de Dirichlet. Como vimos en el caso de la conducción del calor (Método de Fourier), la solución de la ecuación de Laplace corresponde a una situación de equilibrio, y físicamente, equilibrio implica un mínimo, (o por lo menos un valor estacionario), de

energía potencial. Así, surge el siguiente problema variacional:

"Minimizar el funcional,

$$\phi(U) = \int_{\Omega} \dots \int ||\nabla U||^2 dx_1, dx_2, \dots, dx_n,$$

con "U" variando en la clase de funciones "admisibles",

$$\mathcal{J} = \{U \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : U = f \text{ en } \partial\Omega\}$$

Este es el llamado "Principio de Dirichlet", que posiblemente halla sido el primer problema variacional con integrales múltiples. Cabe aclarar que el Cálculo de Variaciones iniciado por Iohanis Bernoulli con el problema de la Braquistocrona, en 1696, y desarrollado por Euler en 1744, era principalmente aplicado a la minimización de funcionales definidos por integrales simples (esto es, funcionales definidos sobre conjuntos de funciones de una variable).

A continuación, examinamos los argumentos que sirvieron de base para la aplicación del Cálculo Variacional en la búsqueda de una solución para el problema de Dirichlet. De manera específica, daremos respuesta a la pregunta: ¿Qué relación guarda el Problema Variacional con el Problema de Dirichlet? En verdad guardan mucha relación, pues los dos problemas son equivalentes; lo que probaremos de inmediato, por medio de la siguiente proposición:

Proposición 3.3.1.

- 1) Si existe $U_0 \in \mathcal{J}$, tal que $\phi(U_0) < \infty$ y $\phi(U_0) = \min \{ \phi(U) : U \in \mathcal{J} \}$, entonces: $\Delta U_0 = 0$.
- 11) Si $U_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\phi(U_0) < \infty$ y U_0 es solución del

"Problema de Dirichlet," entonces: U_0 minimiza a ϕ .

Demostración:

i) En vista del caracter minimizante de U_0 tenemos:

$$\phi(U_0) \leq \phi(U_0 + th),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, con $h = 0$ en $\partial\Omega$.

Nótese que $U_0 + th \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, ya que, como $t \in \mathbb{R}$, $th \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, entonces, $U_0 + th \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Además, como $h = 0$ en $\partial\Omega$, $U_0 + th = U_0 = f$ en $\partial\Omega$.

De aquí sigue que: como $\phi(U_0) < \infty$, entonces,

$$0 \leq 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h). \quad (3.3.1)$$

En efecto,

$$\phi(U_0) \leq \phi(U_0 + th)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \iiint_{\Omega} \|\nabla U_0\|^2 \, dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} \|\nabla(U_0 + th)\|^2 \, dx dy dz \\ & = \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial(U_0+th)}{\partial x}, \frac{\partial(U_0+th)}{\partial y}, \frac{\partial(U_0+th)}{\partial z} \right) \right\|^2 \, dx dy dz \\ & = \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + t \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y} + t \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} + t \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\|^2 \, dx dy dz \\ & = \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\|^2 \, dx dy dz \end{aligned}$$

$$= \iiint_{\Omega} \left\langle \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\rangle dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\left\langle \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right\rangle + 2t \left\langle \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\rangle + t^2 \left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\rangle \right] dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 dx dy dz + 2t \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz + t^2 \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 dx dy dz$$

$$\iff \phi(u_0) \leq \phi(u_0) + 2t \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz + t^2 \phi(h),$$

y como $\phi(u_0) < \infty$, resulta:

$$\iff 0 \leq 2t \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz + t^2 \phi(h)$$

Pero, la desigualdad (3.3.1), (de segundo grado en t), es válida para todo $t \in \mathbb{R}$, sí y solo si:

$$\iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz = 0 \tag{3.3.2}$$

En efecto, probaremos que si:

$$\iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz \neq 0,$$

entonces, existen valores de "t" para los cuales,

$$0 > 2t \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h).$$

En primer lugar, observemos que:

$$\phi(h) = \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dx dy dz \geq 0,$$

ya que $\|\nabla h\|^2 \geq 0$. Pero si $\phi(h) = 0$, la desigualdad (3.3.1) toma la forma:

$$0 \leq 2t \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz,$$

y entonces, solamente se verificará para cuando "t" y

$\iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz$ tengan el mismo signo, es decir: la desigualdad (3.3.1) no sería cierta para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, la demostración se hará bajo el supuesto de que $\phi(h) > 0$.

Supongamos que:

$$\iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz > 0,$$

entonces,

$$0 \leq 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t \left[2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t \phi(h) \right]$$

$$\Leftrightarrow t \leq 0 \wedge t \leq \frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)}$$

$$\vee$$

$$t \geq 0 \wedge t \geq \frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)}$$

$$\Leftrightarrow t \leq \frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)} \vee t \geq 0.$$

(Obsérvese que: $\frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)} < 0$)

Luego, para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)} < t < 0,$$

ocurre que:

$$0 > 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h)$$

De manera análoga, si partimos del supuesto de que:

$$\iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz < 0,$$

resultará que para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$0 < t < \frac{-2 \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz}{\phi(h)},$$

$$0 > 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h).$$

En resumen, hemos probado que: siempre que,

$$\iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz \neq 0,$$

existen valores de "t" para los cuales la desigualdad (3.3.1) no se verifica.

Ahora bien, si $\iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz = 0$, la desigualdad (3.3.1) toma la forma:

$$0 \leq t^2 \phi(h),$$

la cual es válida para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que $\phi(h) > 0$, y además, $t^2 \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Entonces, por la igualdad (3.3.2), y utilizando la primera identidad de Green, resulta:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta U_0) h \, dx dy dz = 0 \tag{3.3.3}$$

Esto se deduce de que: por la primera identidad de Green podemos escribir:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta U_0) h \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} h \frac{\partial U_0}{\partial \gamma} \, dx dy,$$

pero como $\iint h \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dx dy = 0$, puesto que $h = 0$ en $\partial\Omega$, y, por (3.3.2), $\iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz = 0$, resulta:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u_0) h dx dy dz = 0,$$

para todo "h", lo que finalmente implica, por el Lema fundamental del cálculo variacional, que:

$$\Delta u_0(x,y,z) = 0,$$

para todo $(x,y,z) \in \Omega$. Aquí concluye la demostración de la parte (1) de la proposición (3.3.1).

(ii) Si $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ y u_0 es solución del problema de Dirichlet, entonces:

$$u_0 = f \text{ en } \partial\Omega \text{ y,}$$

u_0 es armónica en Ω :

$$\Delta u_0(x,y,z) = 0, \text{ para todo } (x,y,z) \in \Omega$$

Sea $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tal que $h = 0$ en $\partial\Omega$, entonces:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u_0) h dx dy dz = 0, \text{ para todo } h$$

Luego, por la primera identidad de Green:

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u_0) h dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla h dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} h \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dx dy;$$

pero,

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u_0) dx dy dz = 0 \quad \text{y,}$$

$$\iint_{\partial\Omega} h \frac{\partial u_0}{\partial \eta} dx dy = 0, \text{ por ser } h = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

entonces:

$$\iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz = 0,$$

lo que nos permite escribir que:

$$0 \leq 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

puesto que: $\phi(h) = \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dx dy dz \geq 0$, por ser $\|\nabla h\|^2 \geq 0$, y además, $t^2 \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como por hipótesis, $\phi(U_0) < \infty$,

$$\begin{aligned} \phi(U_0) &\leq \phi(U_0) + 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \phi(h) \\ &= \iiint_{\Omega} \|\nabla U_0\|^2 \, dx dy dz + 2t \iiint_{\Omega} \nabla U_0 \cdot \nabla h \, dx dy dz + t^2 \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\left\langle \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right\rangle, \left(\frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) \right] + \\ &\quad + 2t \left\langle \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right\rangle, \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \rangle + \\ &\quad + t^2 \left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\rangle \right] \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left\langle \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right\rangle + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) + \\ &\quad + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \rangle \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) + t \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\|^2 \, dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + t \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + t \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial z} + t \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\|^2 dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} \left\| \left(\frac{\partial (u_0 + th)}{\partial x}, \frac{\partial (u_0 + th)}{\partial y}, \frac{\partial (u_0 + th)}{\partial z} \right) \right\|^2 dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} \|\nabla (u_0 + th)\|^2 dx dy dz \\
 &= \Phi(u_0 + th)
 \end{aligned}$$

Luego, $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + th)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tal que $h = 0$ en $\partial\Omega$, donde es claro que $u_0 + th \in \mathcal{J}$. Haciendo $U = u_0 + th \in \mathcal{J}$, tenemos que:

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + th) = \Phi(U), \text{ para todo } U \in \mathcal{J}, \text{ por lo tanto:}$$

$$\Phi(u_0) = \min \{ \Phi(U) : U \in \mathcal{J} \}$$

En resumen, con la parte (1) de la proposición, queda demostrada la condición necesaria:

Problema Variacional \Rightarrow Problema de Dirichlet, y con la parte (11) de la proposición, queda demostrada la condición suficiente:

Problema de Dirichlet \Rightarrow Problema Variacional.

La base del enfoque variacional consiste en la afirmación de que el valor mínimo de la integral de Dirichlet:

$$\Phi(U) = \iiint_{\Omega} \|\nabla U\|^2 dx dy dz,$$

se alcanza para la función armónica que resuelve el problema de Dirichlet. De acuerdo con esto, la solubilidad del problema de

Dirichlet se reduce a la existencia de $U_0 \in \mathcal{S}$ que minimiza a Φ .

Los primeros matemáticos que estudiaron este problema no percibieron su verdadera dificultad. La idea de este enfoque variacional fue enunciada por primera vez por Gauss; Dirichlet expuso este enfoque en sus clases, en las cuales estaba presente Riemann, quien desarrolló esta teoría y, bajo el nombre de "Principio de Dirichlet", la puso como base de la teoría geométrica de las funciones de variable compleja. El error de Dirichlet y otros matemáticos, entre ellos Riemann, consistió en creer que el hecho de que Φ estuviera acotada inferiormente para U variando en \mathcal{S} , ($\Phi(U) \geq 0$ para todo $U \in \mathcal{S}$), implicaba la existencia de la función $U_0 \in \mathcal{S}$, tal que $U_0 = \min \{ \Phi(U) : U \in \mathcal{S} \}$. Riemann, en su tesis de 1857 sobre integrales elípticas, necesitó del "principio de Dirichlet" para demostrar su famoso teorema sobre representación conforme, y lo utilizó para afirmar que el problema de Dirichlet siempre tenía solución.

El trabajo de Riemann produjo una profunda impresión en los matemáticos de la época, pero en 1870, Weierstrass demostró que las afirmaciones que constituían la base de la teoría variacional no eran convincentes. El problema consistía en que de los razonamientos de Riemann no se desprendía la existencia de alguna función U_0 en la cual se alcanzase el extremo inferior de Φ . Para esto, presentó ejemplos de funcionales limitados inferiormente que no asumen su mínimo. Un ejemplo simple de esta situación es el siguiente:

Sea,

$$\phi(h) = \int_0^1 h^2(t) dt,$$

con h variando en la clase de funciones:

$$\mathcal{S} = \{ h \in C[0,1] : h(0) = 0 \text{ y } h(1) = 1 \}$$

Es claro que el $\inf \{ \phi(h) : h \in \mathcal{S} \} = 0$, pero no existe $h \in \mathcal{S}$, tal que $\phi(h) = 0$. Aquí, $C[0,1]$ designa el espacio de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$.

Existe otra dificultad en el enfoque variacional del problema de Dirichlet, que es importante señalar. El problema consiste en que el enfoque variacional se fundamenta en la equivalencia demostrada entre el Problema Variacional y el Problema de Dirichlet, que presenta como hipótesis básica el hecho de que la función $u_0 \in \mathcal{S}$ en la cual se realiza el extremo del funcional ϕ , que representa la solución del problema de Dirichlet, debe tener integral de Dirichlet finita en el interior de la región Ω . Esto es:

$$\phi(u_0) < \infty$$

Sin embargo, Hadamard presentó un ejemplo de una función continua sobre la frontera del círculo, que no puede ser extendida al interior de éste, de forma que la integral de Dirichlet sea finita, es decir, que no existe una función U en la clase \mathcal{S} , tal que $\phi(U) < \infty$. La función de Hadamard, continua, que da los valores en la frontera del círculo de radio R , se puede escribir por medio de la serie:

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sen}(n! \varphi)}{n^2},$$

que converge uniformemente. (La suma de una serie que converge uniformemente y tiene términos continuos, es también continua). La solución $U(x,y)$ del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

tal que en la frontera del círculo toma los valores dados:

$$U(R \cos \varphi, R \text{ Sen } \varphi) = f(\varphi),$$

tiene integral de Dirichlet igual a:

$$\Phi(U) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} = \infty \quad (1)$$

Resulta claro, pues, que para la función de frontera de Hadamard " $f(\varphi)$ ", no es posible resolver el problema de Dirichlet mediante el principio variacional.

Después de la observación de Weierstrass, el principio de Dirichlet entró en crisis. Por tres décadas los matemáticos alvergaron serias dudas acerca de que se pudiera producir un método

(1) Ver [13]; Godunov, S.K.; "Ecuaciones de la Física-Matemática", Cap. III, parag. 21, pag. 276.

correcto para demostrar la solubilidad del problema de Dirichlet. En este período, otros métodos fueron creados para resolverlo, al menos para ciertos tipos de regiones Ω . H.A. Schwarz creó el método "alternante",⁽¹⁾ trabajando el problema en dos dimensiones, el cual tiene notable importancia por sus conexiones con la teoría de variable compleja. El método de Schwarz permite encontrar con relativa facilidad la existencia de una solución para el problema de Dirichlet y la validez del principio de Dirichlet para regiones poligonales con un número finito de lados. H. Poincaré, por su parte, creó el método del "barrido".⁽²⁾

No fue hasta fines del siglo, en 1899, cuando Hilbert mostró las condiciones que deben ser impuestas a la región Ω , a los valores de frontera y a las funciones admisibles, bajo las cuales siempre es posible la aplicación del principio de Dirichlet.⁽³⁾

-
- (1) Ver [13]; Godunov, S.K., "Ecuaciones de la Física-Matemática", Cap. III, parag. 22, pags. 287 a 298.
- (2) Ver [15]; Kellogg Oliver D.; "Foundations of Potential Theory", Cap. XI, pags. 283-284 y [8], Courant-Hilbert. (T.II).
- (3) Ver [15], Kellogg, Oliver D., "Foundations of Potential Theory", Cap. XI, pag. 280 y [30], Trejo, César A., "Análisis Vectorial con Teoría del Potencial y Aplicaciones". Cap. VII, pag. 249.

3.4 El Método de las Ecuaciones Integrales.

Este método consiste en procurar obtener una solución del problema de Dirichlet en la forma de un potencial de doble capa, reduciendo así el problema a la determinación de la función de densidad " μ " en la frontera. Vamos a estudiar el caso de una región plana Ω con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. En este caso, el potencial de doble capa con densidad μ sobre $\partial\Omega$ se expresa como:

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|x-y|} ds \quad (3.4.1)$$

¿Cómo determinar a μ ? La idea fue posiblemente utilizada por primera vez por Neumann, en 1870, y consiste en lo siguiente: se puede probar que la integral en (3.4.1) converge para cualquier x en \mathbb{R}^2 , inclusive para $x \in \partial\Omega$; mientras que, la función de x así definida tiene una discontinuidad del tipo de salto en $\partial\Omega$. Esta discontinuidad de la función $U(x)$ se debe al hecho de que:

$$U_1(x) = -\pi \mu(x) + U(x) \quad (3.4.2)$$

$$U_e(x) = \pi \mu(x) + U(x), \quad (3.4.3)$$

para $x \in \partial\Omega$, donde:

$$U_1(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} U(y) \quad \text{y} \quad U_e(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \notin \bar{\Omega}}} U(y) \quad (1)$$

(1) Ver [8], Courant-Hilbert, "Methods of Mathematical Physics, Tomo II, Cap. IV, parag. 1.

Como se quiere que la función U , armónica en Ω , sea continua en $\bar{\Omega}$ e igual a f en $\partial\Omega$, de (3.4.2) obtenemos que:

$$f(x) = -\pi \mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \log \frac{1}{|x-y|} ds \quad (3.4.4)$$

Aquí vale la pena aclarar que la función (3.4.2):

$U_1(x) = -\pi \mu(x) + U(x)$, definida en $\partial\Omega$, es continua en todo punto $x \in \partial\Omega$ (1). Entonces, la ecuación (3.4.4) puede ser escrita como:

$$\mu(x) - \int_{\partial\Omega} K(x,y) \mu(y) ds = g(x), \quad (3.4.5)$$

donde, $K(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \log \frac{1}{|x-y|}$ y $g(x) = -\frac{1}{\pi} f(x)$.

La expresión (3.4.5) es conocida como una ecuación integral de Fredholm, pues fue él quien en 1900 realizó los primeros estudios importantes sobre la solubilidad de estas ecuaciones.

En lo que se refiere al método de la alternativa de Fredholm para resolver el problema de Dirichlet, al obtener la ecuación (3.4.5), todo se reduce a la solubilidad de dicha ecuación. Utilizando la "alternativa de Fredholm, la solubilidad de la ecuación (3.4.5) para una función "g" definida en $\partial\Omega$, equivale a probar que la única función continua $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\varphi(x) - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \log \frac{1}{|x-y|} ds = 0, \quad (3.4.6)$$

(1) Ver [30], César Trejo, "Análisis Vectorial con Teoría del Potencial y Aplicaciones", Cap. VIII, parag. 8.6.

es la función idénticamente nula: $\varphi(x) \equiv 0$.

La ecuación (3.4.6) es la ecuación homogénea asociada a la ecuación (3.4.5).

El método de Fredholm para la solución del problema de Dirichlet no es aplicable a regiones que tengan vértices o puntos singulares, pues esto ocasionaría singularidades en el núcleo "K", lo cual no permitiría la compacidad del operador lineal T. De hecho, este método es aplicable a regiones muy limitadas, por lo que nuestro verdadero interés en el mismo es de carácter histórico, por su relación con los orígenes del "Análisis Funcional" y sus posteriores desarrollos. Es interesante señalar, que además de las importantes contribuciones de Riesz y Schauder con respecto a la generalización de la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm, después de Fredholm, se inició el estudio de las ecuaciones integrales singulares, cuyos núcleos presentan singularidades, las cuales se conocen como ecuaciones de Noether en honor al matemático que las estudió inicialmente, obteniendo importantes resultados.

3.5 La unicidad en el problema de Dirichlet.

Hasta ahora, hemos tratado la cuestión acerca de la existencia de una solución para el problema de Dirichlet, a continuación, abordaremos el problema de la unicidad de la solución para dicho problema.

La primera identidad de Green:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v \, d\tau + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\tau = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} \, ds,$$

puede ser utilizada para probar que no existe más de una solución para el problema de Dirichlet en la clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. En efecto, si u_1 y u_2 son dos soluciones del problema con los mismos valores de frontera, y ambas soluciones pertenecen a la clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, entonces, la función $w = u_1 - u_2$ es armónica en Ω , w se anula en $\partial\Omega$ y $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Luego, en virtud de la citada identidad de Green, con $u = v = w$, resulta que:

$$\iiint_{\Omega} w \Delta w \, d\tau + \iiint_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, d\tau = \iint_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \eta} \, ds$$

En esta expresión, $\iiint_{\Omega} w \Delta w \, d\tau = 0$, puesto que w es armónica en

Ω , y $\iint_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \eta} \, ds \stackrel{\Omega}{=} 0$, por ser $w = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto:

$$\iiint_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, d\tau = 0,$$

lo que implica que $\nabla w = 0$ en Ω , de lo cual se desprende que w es constante en la región Ω . Como $w \in C^1(\bar{\Omega})$ y $w = 0$ en $\partial\Omega$, resulta que $w = 0$ en $\bar{\Omega}$, y de aquí, implicamos que:

$$u_1 = u_2 \text{ en } \bar{\Omega}$$

Por otro lado, también es posible demostrar la unicidad del problema de Dirichlet en la clase $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Para tal propósito, utilizaremos el "Principio del Máximo" para las funciones armónicas, cuyo enunciado es el siguiente:

Si $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en Ω y continua

en $\bar{\Omega}$, donde Ω es un abierto conexo acotado, entonces u toma sus valores máximo y mínimo en la frontera de Ω .

Esto es:

$$\min_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq u(y) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x),$$

para todo $y \in \bar{\Omega}$ (1).

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema de Dirichlet, con $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tales que u_1 y u_2 toman los mismos valores en la frontera $\partial\Omega$. Entonces, $w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, w es armónica en Ω y $w = 0$ en $\partial\Omega$. Por el principio del máximo, tenemos que:

$$\min_{x \in \partial\Omega} w(x) = 0 \leq w(y) \leq \max_{x \in \partial\Omega} w(x) = 0,$$

para todo $y \in \bar{\Omega}$. Luego, $w(y) = 0$ para todo $y \in \bar{\Omega}$. Por lo tanto, $w = 0$ en $\bar{\Omega}$, lo cual implica que:

$$u_1 = u_2 \text{ en } \bar{\Omega}$$

3.6 Ejemplos de Zaremba y Lebesgue sobre la existencia de regiones en las que el problema de Dirichlet no tiene solución.

A pesar de que los métodos ideados por los matemáticos del siglo XIX para resolver el problema de Dirichlet sólo eran aplicables a ciertos tipos de regiones muy particulares, ellos siempre creyeron en la posibilidad de encontrar una solución del problema para cualquier región Ω , y que las dificultades para llegar a tal generalización eran inherentes a los métodos que se habían utilizado, y

(1) Véase demostración de este teorema en [13]; Godunov, S.K., "Ecuaciones de la Física-Matemática, Cap. I, parag. 2.

no al problema en sí. Hoy, sabemos que existen regiones en las cuales el problema de Dirichlet no tiene solución; los dos primeros ejemplos acerca de este hecho fueron presentados por Zaremba y por Lebesgue, en 1911 y en 1913, respectivamente.

El ejemplo de Zaremba es el siguiente: considérese el disco abierto $D_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$ y designemos por ∂D_1 su frontera. Sea la región $\Omega = D_1 - \{0\}$ y su frontera $\partial \Omega = \partial D_1 \cup \{0\}$. Sea, además, "f" una función definida en la frontera de Ω , en la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \partial D_1 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Zaremba mostró que de existir una función "u", solución del problema de Dirichlet para la región Ω , esto es, una función "u" continua en $\bar{\Omega}$ y armónica en Ω , la misma, necesariamente, tendría que ser armónica en el punto $x = 0$. El razonamiento es como sigue: supongamos que "u" no es armónica en el punto $x = 0$, entonces, dicho punto representa un "punto singular aislado" de la función u, por ser esta armónica en cualquier entorno del punto $x = 0$, contenido en la región Ω . Además, por ser u continua en $\bar{\Omega} = \bar{D}_1$, es acotada en cualquier vecindad de "0" contenida en Ω , lo que contradice el hecho de que "u" tiene una singularidad para $x = 0$. Luego, "u" es armónica en $x = 0$, y más aún, lo es en D_1 . Entonces, como "u" es continua en D_1 , aplicando el teorema del máximo para funciones armónicas, resulta:

$$u(y) = 0, \text{ para todo } y \in \overline{D}_1,$$

lo cual implica que "u" no puede ser igual a 1 en el origen, o sea, "u" no asume los valores de frontera dados. Por lo tanto, el problema de Dirichlet no tiene solución para la región Ω dada.

Con relación al ejemplo de Lebesgue, nos referiremos al mismo sin entrar en los detalles de la demostración. Considérese la curva ABCD en el plano (x_1, x_2) , (Fig. 14), donde el tramo AB está dado por la ecuación $x_2 = e^{-1/x_1}$, esto es, la curva ABCD tiene un contacto de orden infinito con el eje x_1 en el origen.

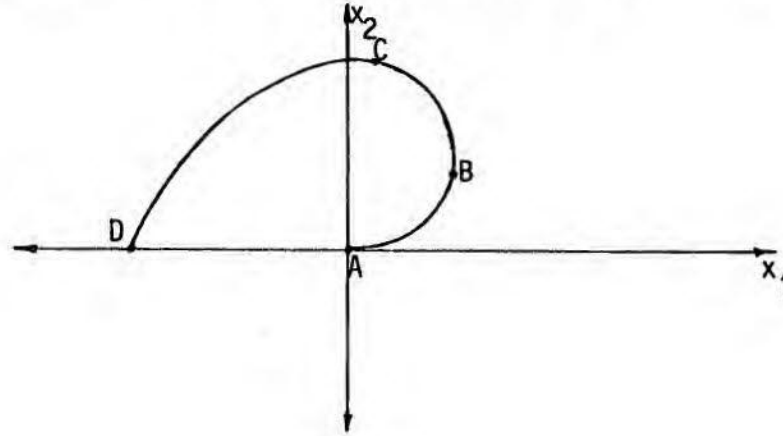


Fig. 14

Lebesgue consideró la región Ω en \mathbb{R}^3 , cuya frontera $\partial\Omega$ se obtiene mediante la rotación de la curva ABCD en torno al eje x_1 . Es posible mostrar que para ciertas funciones continuas en $\partial\Omega$, el problema de Dirichlet no tiene solución en la región Ω (1).

(1) Ver [8], Courant-Hilbert; "Methods of Mathematical Physics", Tomo II, Cap. IV, page. 303-305.

Obsérvese que la región de Lebesgue es homeomorfa a una esfera en \mathbb{R}^3 , para la cual el problema de Dirichlet siempre tiene solución.

Luego de estos acontecimientos científicos, el rumbo de las investigaciones en torno al problema de Dirichlet cambiaría, en el sentido de que la orientación de las mismas se encaminaría a encontrar nuevos métodos de solución aplicables a regiones, cada vez, de tipo más general, y también al estudio de la aplicación de dichos métodos a clases más amplias de ecuaciones diferenciales parciales.

"CONCLUSIONES"

- 1.- A pesar de que los matemáticos y físicos creyeron siempre en la posibilidad de encontrar un método general que diera solución al problema de Dirichlet para cualquier tipo de región, hasta finales del siglo XIX se crearon métodos aplicables solamente a clases muy particulares de regiones. Lo más que pudo lograrse fue la fundamentación de cada método, en el sentido de establecer, de manera precisa, los tipos de regiones en las cuales su aplicación era válida.
- 2.- En cada método ideado para resolver el problema de Dirichlet se utilizaron distintos recursos y propiedades matemáticas; pero la solución, en cada caso, depende del tipo de región en la que se aplica el método, la frontera que limita la región en cuestión y los valores de frontera dados.
- 3.- En el estudio de los distintos métodos ideados para resolver el problema de Dirichlet, se observa que los matemáticos y físicos que se interesaron en el problema tuvieron que utilizar una amplia gama de recursos matemáticos, lo cual contribuyó, definitivamente, al desarrollo de la matemática de la época.
- 4.- Lo que podemos señalar como el aporte más interesante de este trabajo de investigación, es el destacar la importancia histórica que tuvo el estudio del problema de Dirichlet durante el siglo XIX para el desarrollo posterior de la matemática, en vista de que cada método ideado para resolverlo dió origen a un nuevo campo de inves-

tigación dentro de esta disciplina científica. Así nacieron: la Teoría de las Series de Fourier, el Cálculo de Variaciones con Integrales Múltiples y la Teoría de las Ecuaciones Integrales de Fredholm; ubicándose estas dos últimas en los orígenes del "Análisis Funcional", una de las ramas de la matemática más fructíferas del siglo XX.

- 5.- El problema de Dirichlet es un ejemplo de cómo un problema ocupó la atención de los matemáticos durante todo el siglo XIX, en la búsqueda de una solución general para el mismo; hecho que pone de manifiesto que el estudio de los problemas matemáticos requiere de muchas horas de dedicación y de un adecuado proceso de maduración para obtener resultados válidos y consistentes. Esto indica que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es un proceso complejo, que requiere de la utilización de recursos didácticos apropiados y de que el estudiante disponga del tiempo suficiente para absorber y madurar los conocimientos, lo cual va en función del nivel de complejidad del material objeto de estudio.
- 6.- A través del estudio de la evolución histórica del problema de Dirichlet, hemos podido alcanzar una comprensión más profunda acerca de su naturaleza, sus características, sus aplicaciones y sus proyecciones. Esto sugiere: que por medio del estudio del desarrollo histórico de un problema, esto es, el estudio de su origen y evolución, analizando los errores cometidos y las rectificaciones hechas, hasta llegar a un resultado superior en el que queda establecido el marco de generalidad para su validez; se obtiene un conocimiento más firme, más profundo e integral del problema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. y otros. "La matemática: su contenido, métodos y significado", (Tomo II), Alianza Editorial S.A., Madrid, (1985).
- [2] Annequin, R. y Boutigny, J. "Curso de Ciencias Físicas, Mecánica I", Edit. Reverté S.A., Barcelona, (1986).
- [3] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera", Edit. Limusa-Wiley S.A., Méjico, (1967).
- [4] Bugrov, Ya.S. y Nicolski, S.M. "Matemáticas Superiores", Edit. Mir, Moscú, (1985).
- [5] Collette, Jean-Peul. "Historia de las Matemáticas", Edit. Romont S.A., Méjico, (1986).
- [6] Conway, John B. "Functions of a complex variable", Springer-Verlag, Berlín, (1982).
- [7] Cotlar, Mischa y Gignoli, Roberto. "Nociones de Espacios Normados y sus aplicaciones al Análisis", (Vol. I y II), Edit. Universal, Buenos Aires, (1971).
- [8] Courant-Hilbert. "Methods of Mathematical Physics", (Vol. I y II), Interscience Publishers, (1962).
- [9] Dieudonné, J. "Fundamentos de Análisis Moderno", Edit. Reverté, Barcelona, (1974).
- [10] Elsgoltz, L. "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional", Edit. Mir, Moscú, (1969).
- [11] Figueiredo, D.G. "A simplified proof of the divergence theorem", American Mathematical Monthly, (Vol. 71), (619-622), (1964).

- [12] Figueiredo, D.G. "O problema de Dirichlet", (Trabalho de Matemática Nº 89), 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Universidad de Brasilia, (1975).
- [13] Godunov, S.K. "Ecuaciones de la Física-Matemática", Edit. Mir, Moscú, (1984).
- [14] Goldfain, I.A. "Elementos de cálculo vectorial", Instituto del Libro, Edit. Ciencia y Técnica, La Habana, (1968).
- [15] Kellogg, Oliver D. "Foundations of Potential Theory", Frederick Ungar Publishing Co., New York.
- [16] Kreyszig, Erwin. "Introductory functional analysis with applications", Edit. John Wiley e Hijos, New York, (1978).
- [17] Makarenko, A., Kiseliov, A. y Krasnov, M. "Ecuaciones Integrales", Edit. Mir, Moscú, (1970).
- [18] Moreno, Luis E. "Perspectiva Histórica de la Matemática y su Desarrollo", Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N., México.
- [19] Petrovski, I.G. "Lecciones de la Teoría de las Ecuaciones Integrales", Edit. Mir, Moscú, (1976).
- [20] Petrovski, I.G. "Partial Differential Equations", Interscience Publishers, (1954).
- [21] Piskunov, N. "Cálculo diferencial e integral", (Tomo II), Edit. Mir, Moscú, (1980).
- [22] Rivnikov, K. "Historia de las Matemáticas", Edit. Mir, Moscú, (1974).
- [23] Riesz, F. y Nagy, B. "Functional Analysis", Frederick Ungar Publishing Co., United States of America, (1965).

- [24] Santaló, Luis A. "Vectores y tensores con sus aplicaciones", Edit. Universitaria, Buenos Aires, (1964).

- [25] Schurmann, Paul F. "Historia de la Física", Edit. Nova, Buenos Aires, (1946).

- [26] Smirnov, V.I. "A course in Higher Mathematics", (Vol. IV), Pergamon Press, (1964).

- [27] Sobolev, S.L. "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", Pergamon Press, (1964).

- [28] Sveshnicov, A.G. y Tikhonov, A.N. "The theory of functions of a complex variable", Edit. Mir, Moscú, (1973).

- [29] Tikonov, A. y Samarsky, A. "Ecuaciones de la Física Matemática", Edit. Mir, Moscú, (1985).

- [30] Trejo, César A. "Análisis vectorial con teoría del potencial y aplicaciones ", Edit. KAPELUSZ, Buenos Aires, (1965).

"APENDICE"

Entre las investigaciones más importantes realizadas con posterioridad al ejemplo de Lebesgue en torno al problema de Dirichlet se encuentran: el método de Perron, (1923), aplicable a regiones más generales que los anteriores, y el método de la proyección ortogonal de H. Weyl, (1940). Además, es importante mencionar los trabajos efectuados por W. Ritz, R. Courant, S. Zaremba, K.O. Friedrichs y F. Rellich.

Los trabajos de Zaremba, Nikolyn y Weyl elevaron el uso sistemático del "Análisis Funcional" en el problema de Dirichlet; proceso que se aceleró en la década de 1950. La utilización de los "espacios completos" condujo de manera natural a la noción de solución generalizada, y los espacios donde tales soluciones debían existir fueron introducidos inicialmente por Sobolev y Friedrichs.

La formalización de la Teoría de las Distribuciones por L. Schwarz, al final de los años cuarenta, desempeñaría un papel importante en el desarrollo de toda la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales después de 1950. Los métodos del "Análisis Funcional" resultaron suficientemente fuertes para atacar las ecuaciones diferenciales parciales más generales que las de Laplace. L. Garding, en 1953, inició el estudio del problema de Dirichlet para ecuaciones elípticas de orden superior a dos. Entre los principales trabajos básicos sobre esta teoría se encuentran los efectuados por C.B. Morrey, L. Nirenberg y F.E. Browder.

Todos estos estudios realizados en el siglo XX en torno al problema de Dirichlet, constituyen un buen material para un interesante trabajo de investigación histórica, debido a la importancia de los mismos en el desarrollo de la Matemática en la presente centuria.