

UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERECTORIA DE INVESTIGACION Y POST-GRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

$\alpha$ -COMPACIDAD Y  $\alpha$ -COMPACTIFICACION A UN PUNTO  
EN LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS DIFUSOS

Por:  
MARIA GUADALUPE TEJADA DE CASTILLO

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar  
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización  
en Matemática

Panamá

- 1981 -

TM

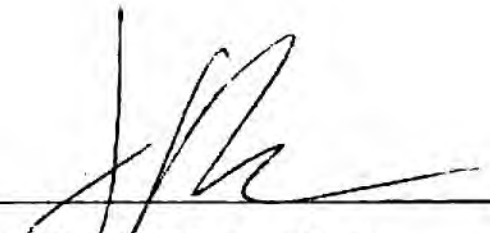


ABR. 2 1982

Obsequio del QTA

Aprobado por:

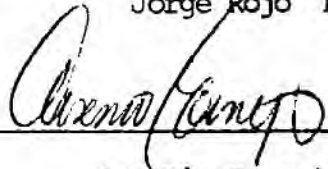
Director de Tesis

  
José Reátegui C. Ph. D.

Miembro del Jurado

  
Jorge Rojo Ph. D.

Miembro del Jurado

  
Arsenio Comejo M.Sc.

Fecha

5 febrero 1982

183 928,

A mis hijas,  
Cristel y Claris  
A mi esposo,  
Luis Carlos

## CONTENIDO

	Página
INTRODUCCION	i
CAPITULO I. PRELIMINARES.	
1. Conjuntos Difusos.....	1
2. Topología Difusa.....	3
3. Vecindades. Q-Vecindades.....	6
4. Interior. Adherencia. Puntos de Acumulación.....	7
5. Espacio de Hausdorff. Sub-espacios	10
6. Densidad. Continuidad.....	11
7. Categoría Fuz.....	13
CAPITULO II. $\alpha$ -COMPACIDAD.	
1. $\alpha$ -Compacidad.....	15
2. $\alpha$ -Compacidad Local.....	23
CAPITULO III. TEOREMA DE TYCHONOFF. $\alpha$ -COMPACTIFICACION A UN PUNTO.	
1. Teorema de Tychonoff.....	24
2. $\alpha$ -Compactificación a un punto....	30

	Página
CONCLUSIONES .....	35
BIBLIOGRAFIA.....	38

## INTRODUCCION

El presente trabajo se fundamenta en una teoría en vías de desarrollo, inspirada en sus orígenes por L.A. ZADEH [8], la Teoría de lo Difuso.

Esta teoría proporciona un marco conceptual más amplio que el de la teoría conjuntista y a su vez ofrece mayores perspectivas de aplicación, sobre todo, en el campo de patrones de clasificación y procesos de información.

Analizaremos las nociones de  $\alpha$ -compacidad y  $\alpha$ -compactificación a un punto, introducidas por Gantner y Steinlage [2] en la teoría general difusa tal como fué introducida y usada por ZADEH. Una generalización de esta teoría ha sido introducida por Goguen en el sentido de tomar los conjuntos difusos con imágenes en un reticulado completamente distributivo. Los resultados de este análisis los describiremos en los capítulos II y III.

El capítulo I, dedicado a nociones preliminares, como son los conjuntos generalizados de ZADEH o conjuntos difusos y sus propiedades, así como también la topología difusa y otras nociones concernientes a ella, se presentan en forma de definiciones, haciendo énfasis en lo que se verifica en la teoría conjuntista y no en la teoría de lo difuso.

En el capítulo II, relativo a la  $\alpha$  y  $\alpha^*$ -compacidad y a

la  $\alpha$ -compacidad local, reemplazaremos el axioma de Hausdorff introducido por Gantner y Steinlage [2] por uno [6], que no solamente nos parece más natural, sino que es estrictamente más general. Tal generalidad se demuestra en las conclusiones.

Se presenta una equivalencia entre la compacidad de un espacio topológico ordinario  $(X, T)$  y la  $\alpha$ -compacidad del espacio topológico difuso  $(X, W(T))$ , para todo  $0 \leq \alpha < 1$ .

Se demuestra que las topologías difusas  $\alpha$ -compactas no son minimales entre las topologías difusas de Hausdorff.

Además, se modifica apropiadamente, la definición de  $\alpha$ -compacidad local, para así introducir en el tercer capítulo, una generalización, que nos parece más natural, de la compactificación a un punto en esta nueva teoría.

En el tercer capítulo se estudia el Teorema de Tychonoff para la  $\alpha$ -compacidad, cuya demostración se apoya en el Teorema de Alexander (T.3.1.1.) relativo a sub-bases.

Dos importantes resultados se obtienen del análisis de la  $\alpha$ -compactificación a un punto. De una parte, con el axioma de Hausdorff introducido se generaliza un teorema fundamental de la topología general sobre la compactificación a un punto (T.3.2.3.), obteniéndose una equivalencia, lo cual difiere de lo presentado por los autores [2] que prueban solamente en un sentido. De otra parte, los diferentes grados de

compacidad en topología de lo difuso, permiten una doble compactificación, de interés en esta teoría y sobre lo cual incidiremos en las conclusiones.

En las conclusiones, al referirnos a la doble compactificación, dejaremos un tema abierto a la investigación. Además, prestaremos especial atención a la restricción de la  $\alpha$ -compacidad a los espacios topológicos generales.

La metodología utilizada para la elaboración de la presente tesis fué la de exposición de trabajos personales y discusiones así como la revisión periódica por parte del profesor tutor.

Deseo expresar mi especial agradecimiento al Doctor José Reátegui C., por su valiosa orientación crítica. A mis compañeros de estudio por sus constantes estímulos, gracias.

## CAPITULO I

### PRELIMINARES

#### 1. CONJUNTOS DIFUSOS

En el presente trabajo  $X$  denota un conjunto ordinario, no vacío,  $I$  el intervalo  $[0,1]$  de la recta real.

Sea  $B \subset X$  un sub-conjunto de  $X$ , se define la función característica de  $B$  por  $\chi_B: X \rightarrow I$  tal que

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Si consideramos la familia  $\mathcal{F}_X$  de todas las funciones características de  $X$ , podemos establecer una correspondencia biunívoca entre  $\mathcal{F}_X$  y las partes de  $X, \mathcal{P}(X)$ . Por consiguiente, no haremos distinción entre los sub-conjuntos de  $X$  y las funciones características asociadas.

Consideremos el conjunto de todas las aplicaciones  $A$ , de  $X$  en el intervalo  $I$ , el cual se denota por  $\mathcal{G}(X)$ .

**Definición 1.1.1:** A los elementos de  $\mathcal{G}(X)$  se les llama conjuntos generalizados o conjuntos difusos en  $X$ . Para cada  $x \in X$ ,  $A(x)$  es el grado de pertenencia de  $x$  en  $A$ .

Definición 1.1.2: Se dice que  $A \in \mathcal{G}(X)$  es un punto difuso en  $X$ , si existe un  $x \in X$  tal que  $A(x) = \lambda > 0$  y  $A(y) = 0$  para todo  $y \in X$ ,  $y \neq x$ , el cual se denota por  $x_\lambda$ , donde el punto  $x$  se denomina soporte de éste.

Definición 1.1.3: Si  $A \in \mathcal{G}(X)$ , el conjunto  $\{x \in X : A(x) > 0\}$  se denomina soporte de  $A$  y se denota  $\text{Sup } A$  ó  $A_0$ .

Definición 1.1.4: Si  $A \in \mathcal{G}(X)$  toma los valores en  $\{0, 1\}$  se denomina conjunto crispado. A la familia de los conjuntos crispados en  $X$ , se le denota por  $\mathcal{C}(X)$ . En particular, si el conjunto crispado toma siempre el valor 1, se denota por  $X$ ; y si toma siempre el valor 0 se denota por  $\emptyset$ .

Observación: Los conjuntos crispados de  $X$ , son las funciones características de  $X$ .

Sean,  $J$  un conjunto de índices y  $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$  una familia de conjuntos difusos en  $X$ .

Definición 1.1.5: La unión  $\bigcup_{j \in J} A_j$  y la intersección  $\bigcap_{j \in J} A_j$  de la familia  $\mathcal{A}$  se definen de la siguiente manera:

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)(x) = \text{Sup}_{j \in J} \{A_j(x)\} \quad \text{para } x \in X.$$

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)(x) = \inf_j \{A_j(x)\} \text{ para } x \in X.$$

Definición 1.1.6: El punto difuso  $x_\lambda$  está contenido en el conjunto difuso  $A$ , o pertenece a  $A$ , si  $\lambda \leq A(x)$ , lo cual se denota por  $x_\lambda \in A$ . El conjunto  $A$  está incluido en el conjunto  $B$ , denotado por  $A \subset B$  si  $A(x) \leq B(x)$  para todo  $x \in X$ . Claramente, todo conjunto difuso  $A$  puede expresarse como la unión de todos los puntos difusos que pertenecen a  $A$ .

Definición 1.1.7: El complemento de  $A$ , denotado por  $A'$  se define por:

$$A'(x) = 1 - A(x) \text{ para } x \in X.$$

Definición 1.1.8: Dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$  en  $X$  se intersectan, si existe un punto  $x \in X$  tal que  $(A \cap B)(x) \neq 0$ .

## 2. TOPOLOGIA DIFUSA

Definición 1.2.1: Una familia  $\mathcal{Z}$  de conjuntos difusos en  $X$ , es una topología difusa sobre  $X$ , si satisface los siguientes axiomas:

$$(O_1) \quad \emptyset, X \in \mathcal{Z}$$

(O<sub>2</sub>) Si  $A, B \in \mathcal{Z}$  entonces  $A \cap B \in \mathcal{Z}$

(O<sub>3</sub>) Para toda familia  $\{A_j\}_{j \in J}$  tal que  $A_j \in \mathcal{Z}$  se tiene  $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{Z}$

Si  $\mathcal{Z}$  es una topología difusa sobre  $X$ , al par  $(X, \mathcal{Z})$  se le denomina espacio topológico difuso. Los elementos de  $\mathcal{Z}$  se llaman los abiertos difusos, y los complementos de éstos son los cerrados difusos de la topología  $\mathcal{Z}$ .

Ejemplo 1.2.1: Sea  $X$  un conjunto no vacío, y sea

$$\mathcal{Z} = \{A : X \rightarrow [0, 1] / A(x) = \lambda \ \forall x \in X, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Claramente  $\mathcal{Z}$  es una topología difusa sobre  $X$ . Los abiertos los denotaremos por  $C_\lambda$ , con  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Definición 1.2.2: Si  $\mathcal{Z}_1$  y  $\mathcal{Z}_2$  son dos topologías difusas sobre  $X$ , se dice que  $\mathcal{Z}_2$  es más fina que  $\mathcal{Z}_1$ , si  $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2$ .

Ejemplo 1.2.2: Dado  $X$ ,  $\mathcal{Z}_c = \{\emptyset, X\}$  es una topología difusa denominada topología difusa caótica sobre  $X$ .

$\mathcal{Z}_d = \{\chi_B / B \subset X\} = \mathcal{C}(X)$  es una topología difusa que denominaremos topología difusa discreta sobre  $X$ .

$\mathcal{Z}_{ud} = \{A : X \rightarrow [0, 1]\} = \mathcal{G}(X)$  es una topología difusa que denominaremos topología difusa ultra-discreta sobre  $X$ .

Además

$$\mathcal{Z}_c \subset \mathcal{Z}_d \subset \mathcal{Z}_{ud}$$

Definición 1.2.3: Sea  $(X, \mathcal{Z})$  un espacio topológico difuso.

Una sub-familia  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{Z}$  es una base de  $\mathcal{Z}$  si para cada  $A \in \mathcal{Z}$ , existe  $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}$  tal que  $A = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_A} L$ . Una sub-

familia  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{Z}$  es una sub-base de  $\mathcal{Z}$  si la familia

$\mathcal{L} = \{ \bigcap S / S \in \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ sub-conjunto finito de } \mathcal{B} \}$  es una base de  $\mathcal{Z}$ .

Sea  $(X, T)$  un espacio topológico ordinario y consideremos la familia  $\mathcal{W}(T) = \{ f : X \rightarrow I \text{ semicontinua inferiormente} \}$ , la cual verifica los axiomas de la topología difusa. Al espacio  $(X, \mathcal{W}(T))$  se le llama espacio topológico difuso inducido por  $(X, T)$ .

La envolvente superior de una familia de funciones reales continuas en un espacio topológico ordinario  $X$ , es una función semi-continua inferiormente en  $X$ , sin embargo, en los espacios uniformizables, la recíproca es cierta, en particular, en los espacios topológicos completamente regulares [1] de allí que:

Lema 1.2.1 [1] : Si  $(X, T)$  es un espacio topológico completamente regular, para toda  $h \in \mathcal{W}(T)$ , existe una familia  $\mathcal{F}$  de funciones  $T$ -continuas en  $X$ , tal que

$$h = \text{Sup} \{ f / f \in \mathcal{F} \}$$

Ejemplo 1.2.3 : Del lema anterior se deduce que la familia

$\mathcal{L} = \{ f : X \rightarrow I \text{ } T\text{-continua} \}$  forman una base de la topología difusa  $\mathcal{W}(T)$  sobre  $X$ .

### 3. VECINDADES. Q-VECINDADES

Definición 1.3.1: Se dice que un punto  $x_\lambda$  es quasi-coincidente con A, y se denota por  $x_\lambda q A$  si  $\lambda + A(x) > 1$ .

Observación: Tal noción significa que  $x_\lambda$  no pertenece al complemento de A.

Definición 1.3.2: Se dice que A es quasi-coincidente con B, y se denota por  $A q B$  si existe un  $x \in X$  tal que  $A(x) + B(x) > 1$ . En este caso se dice que A es quasi-coincidente con B en x.

Se deduce, que si  $A q B$  en x, entonces  $A(x) > 0$  y  $B(x) > 0$  es decir, A y B se intersectan en x.

Definición 1.3.3: Un conjunto difuso A en  $(X, \mathcal{Z})$  es una vecindad del punto difuso  $x_\lambda$ , si existe un  $B \in \mathcal{Z}$  tal que  $x_\lambda \in B \subset A$ . Si A es un conjunto abierto, entonces se dice que la vecindad A es abierta. La familia de todas las vecindades de  $x_\lambda$ , se llama el sistema de vecindades de  $x_\lambda$ , y se denota  $\Gamma x_\lambda$

Definición 1.3.4: Un conjunto difuso A en  $(X, \mathcal{Z})$  es una Q-vecindad del punto difuso  $x_\lambda$ , si existe un  $B \in \mathcal{Z}$  tal que  $x_\lambda q B \subset A$ . La familia de todas las Q-vecinda-

des de  $x_\lambda$  se llama el sistema de Q-vecindades de  $x_\lambda$  y se denota por  $Qx_\lambda$

Observación: Una Q-vecindad de un punto difuso, generalmente no contiene el punto. En el ejemplo 1.2.1, considérese el abierto A tal que  $A(x) = 1/2$  para todo  $x \in X$  y el punto difuso  $x_{2/3}$ .

En la topología general, A y el complemento de A,  $A^c$  no se intersectan, en la topología difusa A no es quasi-coincidente con  $A^c$ .

Definición 1.3.5: Sea  $Qx_\lambda$  (resp.  $\Gamma x_\lambda$ ) el sistema de Q-vecindades (resp. sistema de vecindades) de un punto difuso  $x_\lambda$  en  $(X, Z)$ . Una sub-familia  $\mathcal{M}x_\lambda$  (resp.  $\mathcal{L}x_\lambda$ ) de  $Qx_\lambda$  (resp.  $\Gamma x_\lambda$ ) es una base de Q-vecindades (resp. base de vecindades) si para cada  $A \in Qx_\lambda$  (resp.  $A \in \Gamma x_\lambda$ ), existe un  $B \in \mathcal{M}x_\lambda$  (resp.  $B \in \mathcal{L}x_\lambda$ ) tal que  $B \subset A$ .

#### 4. INTERIOR. ADHERENCIA. PUNTOS DE ACUMULACION

Sea A un conjunto difuso en  $(X, Z)$

Definición 1.4.1: Un punto difuso  $x_\lambda$  es un punto interior de A si A es una vecindad de  $x_\lambda$ . El interior de A, denotada por  $\overset{\circ}{A}$ , es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.

Se deduce que  $\overset{\circ}{A}$  es el más grande abierto contenido en  $A$  y  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ .

Definición 1.4.2: Un punto difuso  $x_\lambda$  es un punto adherente de  $A$  si, para toda  $Q$ -vecindad  $V$  de  $x_\lambda$ , se tiene  $V \cap A \neq \emptyset$ . La cerradura de  $A$ , denotada por  $\bar{A}$ , es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ .

Se deduce que  $\bar{A}$  es el más pequeño cerrado que contiene a  $A$  y  $(\bar{A})^\circ = \overset{\circ}{A}$ . Además  $A$  es cerrado si y solo si  $A = \bar{A}$ .

Definición 1.4.3: Un punto difuso  $x_\lambda$  es un punto borde de  $A$  si  $x_\lambda \in \bar{A} \cap \bar{A}^c$ . La unión de los puntos bordes de  $A$ , se llama el borde de  $A$  y se denota  $\delta(A)$ . Es claro que  $\delta(A) = \bar{A} \cap \bar{A}^c$ .

Observación: Es importante señalar que en un espacio topológico difuso, se cumple la inclusión estricta  $A \cup \delta(A) \subset \bar{A}$ . En efecto, en el espacio  $X = [0, 1]$  con la topología  $\mathcal{T} = \{A : [0, 1] \rightarrow I / A(x) = \lambda, \forall x \in X\}$  basta considerar el conjunto  $A$  tal que  $A(x) = 3/4$  si  $0 \leq x \leq 1/2$  y  $A(x) = 2/3$  si  $1/2 < x \leq 1$  y observar que  $\bar{A} = C_{3/4}$ ,  $\delta(A) = C_{1/3}$  y que  $A \cup \delta(A) = A \neq \bar{A}$ .

Definición 1.4.4: Un punto difuso  $x_\lambda$  es un punto de acumulación de  $A$  si  $x_\lambda$  es un punto adherente de  $A$  y cualquier  $Q$ -vecindad  $U$  de  $x_\lambda$  es tal que  $U \cap A$  en un punto cuyo soporte sea diferente de  $x$  si  $x_\lambda \in A$ . La unión de los puntos de acumulación de  $A$ , se denomina la derivada del conjunto  $A$  y se denota por  $A^d$ . Es evidente que  $A^d \subset \bar{A}$ .

Si  $x_\lambda \in \bar{A}$  entonces  $x_\lambda \in A$  ó  $x_\lambda \notin A$ ; si  $x_\lambda \notin A$ , se tiene  $x_\lambda \in A^d$ , de donde  $\bar{A} \subset A \cup A^d$ . La inclusión inversa es trivial, luego  $\bar{A} = A \cup A^d$ . De aquí se desprende que  $A$  es cerrado si y solo si  $A$  contiene todos sus puntos de acumulación.

Se caracterizan los conjuntos abiertos en términos de vecindades y  $Q$ -vecindades de la siguiente manera:

Proposición 1.4.1: Un conjunto  $A$  es abierto si y solo si  $A$  es vecindad de cada uno de sus puntos. La demostración es inmediata.

Proposición 1.4.2: Un conjunto  $A$  es abierto si y solo si él es  $Q$ -vecindad de cada uno de sus puntos con quien es quasi-coincidente.

Demostración: La condición necesaria se sigue de la definición de quasi-coincidencia. Mostremos que la condición es suficiente. Sea  $x_\lambda \in A$  tal que  $\lambda < A(x)$ . Entonces

$x_{1-\lambda} \notin A$  de donde existe un abierto  $Ux_\lambda$  tal que  $x_{1-\lambda} \notin Ux_\lambda \subset A$  y se obtiene  $x_\lambda \in Ux_\lambda \subset A$ . Sea  $V_x = \bigcup_{\lambda \in A(x)} Ux_\lambda$ , luego  $V_x \subset A$  de donde  $\bigcup_{x \in A} V_x = A$  es abierto.

## 5. ESPACIO DE HAUSDORFF. SUB-ESPACIOS

Definición 1.5.1: Un espacio difuso  $(X, \mathcal{Z})$  es un espacio de Hausdorff si para cualquier  $x_\lambda \in X$ ,  $y_\mu \in X$ , con  $x \neq y$ , existen  $U \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ ,  $V \in \mathcal{Q}_{y_\mu}$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ .

Observación: Si  $(X, T)$  es un espacio topológico ordinario de Hausdorff, se deduce fácilmente que el espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{W}(T))$  también es de Hausdorff y viceversa.

Definición 1.5.2: Sean  $(X, \mathcal{Z})$  un espacio topológico difuso y  $Y \subset X$ , entonces la familia  $\mathcal{U}$ , definida por  $\mathcal{U} = \{A/\gamma : A \in \mathcal{Z}\}$  la cual es una topología sobre  $Y$ , se denomina la topología difusa relativa a  $Y$ . Al espacio  $(Y, \mathcal{U})$  se le llama sub-espacio de  $(X, \mathcal{Z})$ .

Para simplificar la exposición, utilizaré los términos de espacio y sub-espacio en un mismo argumento, pero, bajo las siguientes convenciones.

i) Un conjunto difuso  $A$  en  $Y$  es considerado como un conjunto difuso en  $X$ , en el sentido que  $A$  toma el valor 0 en  $X \setminus Y$ ; inversamente, un conjunto difuso en  $X$  que toma el valor 0 en  $X \setminus Y$ , puede ser considerado como un conjunto difuso en  $Y$ .

ii) Para un conjunto difuso  $A$  en  $(Y, \mathcal{U})$  la cerradura de  $A$  respecto a  $\mathcal{U}$  y a  $\mathcal{Z}$  son denotados respectivamente por  $\bar{A}_{\mathcal{U}}$  y  $\bar{A}_{\mathcal{Z}}$

Proposición 1.5.1 [6] : Sean  $(Y, \mathcal{U})$  un sub-espacio de  $(X, \mathcal{Z})$  y  $A \in \mathcal{G}(Y)$ , entonces

i)  $A$  es  $\mathcal{U}$ -cerrado si y solo si existe un  $B$   $\mathcal{Z}$ -cerrado tal que  $A = B|_Y$

ii) Un punto difuso  $y_\lambda$  en  $Y$  es un punto de acumulación de  $A$  con respecto a  $\mathcal{U}$ , si y solo si,  $y_\lambda$  es un punto de acumulación de  $A$  con respecto a  $\mathcal{Z}$ .

$$\text{iii) } \bar{A}_Y = Y \cap \bar{A}_X$$

## 6. DENSIDAD. CONTINUIDAD

Definición 1.6.1: Un conjunto difuso  $A$  en  $X$  es denso en

$(X, \mathcal{Z})$  si  $\bar{A}_X = X$ . Si  $(Y, \mathcal{U})$  es un sub-espacio de  $(X, \mathcal{Z})$ , entonces  $(Y, \mathcal{U})$  es denso en  $(X, \mathcal{Z})$  si  $\chi_Y$  es denso en  $(X, \mathcal{Z})$ .

Definición 1.6.2: Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $A \in \mathcal{G}(X)$  y  $B \in \mathcal{G}(Y)$ . Definimos:

i) El conjunto difuso  $f^{-1}(B)$  de  $X$  como:

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)) \text{ para } x \in X$$

ii) El conjunto difuso  $f(A)$  de  $Y$  como:

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{A(x)\} & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Lema 1.6.1 [7]: Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función, entonces

1. Para cualquier punto difuso  $x_\lambda$  en  $X$ ,  $f(x_\lambda)$  es un punto difuso en  $Y$  y  $f(x_\lambda) = (f(x))_\lambda$

2. Sea  $\{A_j / j \in J\}$  una familia de conjuntos difusos en  $X$ , entonces  $f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$

3. Sea  $A \in \mathcal{C}(X)$ , entonces  $f(A) \in \mathcal{C}(Y)$ .

Definición 1.6.3: Sea  $f : (X, \mathcal{Z}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{Z}_2)$ . Se dice que la función  $f$  es continua difusa (D-continua), si para cualquier  $B \in \mathcal{Z}_2$ ,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{Z}_1$ .

Lema 1.6.2 [7] : Sea  $f : (X, \mathcal{Z}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{Z}_2)$ . Las siguientes propiedades son equivalentes.

1.  $f$  es  $D$ -continua.
2. Para todo  $\mathcal{Z}_2$ -cerrado  $A$ ,  $f^{-1}(A)$  es  $\mathcal{Z}_1$ -cerrado.
3. Para cada  $V$ , elemento de una sub-base  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{Z}_2$ ,  $f^{-1}(V)$  es  $\mathcal{Z}_1$ -abierto.
4. Para cada punto difuso  $x_\lambda$  en  $X$  y cada vecindad  $V$  de  $f(x)_\lambda$ , existe una vecindad  $U$  de  $x_\lambda$  tal que  $f(U) \subset V$ .

## 7. CATEGORIA FUZ

La familia formada por los espacios topológicos difusos (objetos) y las funciones  $D$ -continuas (morfismos) es una categoría, la cual se denota FUZ.

Se puede verificar sin dificultad que los espacios topológicos difusos, las funciones  $D$ -continuas con la ley de composición de morfismos satisfacen los axiomas de una categoría:

Dados los objetos  $X, Y, Z, U$  y los morfismos

$$f : X \rightarrow Y$$

$$g : Y \rightarrow Z$$

$$h : Z \rightarrow U$$

es claro que  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

Para todo objeto  $X$ , la función identidad  $I_X$  es  $D$ -continua, por lo tanto, se deduce que, para todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , se tiene que:

$$I_Y \circ f = f$$

$$f \circ I_X = f$$

TDP, la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas, es una sub-categoría plena de FUZ [4].

## CAPITULO II

### $\alpha$ -COMPACIDAD

#### 1. $\alpha$ -COMPACIDAD

Sea  $(X, \mathcal{Z})$  un espacio topológico difuso.

Definición 2.1.1: Se dice que la familia  $\{A_j\} \subset \mathcal{Z}$  es un cubrimiento abierto de  $X$  si  $X = \bigcup_j A_j$ .

La definición más natural de compacidad difusa sería la siguiente:  $(X, \mathcal{Z})$  es un espacio topológico difuso compacto, si todo cubrimiento abierto admite un sub-cubrimiento finito de  $X$ .

Como todo espacio topológico finito es compacto, esta definición de compacidad en la Categoría FUZ no es la más satisfactoria ya que un espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  donde  $X = \{x\}$ , deja de ser compacto. En efecto sea  $X = \{x\}$  y  $\mathcal{Z} = \{A_n : X \rightarrow I / A_n(x) = \frac{n}{n+1}, X\}_{n \geq 0}$ , la familia  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  es un cubrimiento abierto de  $X$ , pero no admite sub-cubrimiento finito.

Nos proponemos dar una nueva definición de compacidad más acorde con la noción de conjuntos difusos y que ofrece diferentes grados de compacidad. Para ello, veamos algunas nociones preliminares.

Definición 2.1.2: Se dice que la familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -cubrimiento) de  $X$ , para  $0 \leq \alpha < 1$  (respect. para  $0 < \alpha \leq 1$ ), si para cada  $x \in X$ , existe un  $U_x \in \mathcal{U}$  tal que  $U_x(x) > \alpha$  (respect.  $U_x(x) \geq \alpha$ ). Una sub-familia  $\mathcal{V}$  de un  $\alpha$ -cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -cubrimiento)  $\mathcal{U}$  de  $X$  que sea también un  $\alpha$ -cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -cubrimiento) se denomina un  $\alpha$ -sub-cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -sub-cubrimiento) de  $\mathcal{U}$ .

Definición 2.1.3:  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto (respect.  $\alpha^*$ -compacto) si todo  $\alpha$ -cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -cubrimiento) de  $X$  admite un  $\alpha$ -sub-cubrimiento (respect.  $\alpha^*$ -sub-cubrimiento) finito.

Es claro de esta definición que cualquier espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  con  $X$  finito es  $\alpha$ -compacto y  $\alpha^*$ -compacto para todo  $\alpha \in I$ .

Ejemplo 2.1.1: Sea  $X = (0, 1)$  con la topología  $T$  usual y sea

$$\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{W}(T) / A(x) \leq 1/2 \forall x \in X\} \cup \{C_\lambda\}_{\lambda \geq 1/2}$$

i)  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto para  $\alpha \geq 1/2$ . En efecto, cualquier  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$  contiene por lo menos un  $C_\lambda$  con  $\lambda > 1/2$ .

ii)  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha^*$ -compacto para  $\alpha > 1/2$ . La demostración es evidente.

iii)  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\alpha^*$ -compacto para  $\alpha \leq 1/2$ . Consideremos en  $X$  la familia de abiertos  $\{O_n\}_{n \geq 3}$  tal que  $O_n = (\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})$  y asociemos a cada abierto  $O_n$  la función  $A_n^\alpha = \alpha \chi_{O_n}$ , la cual es semi-continua inferiormente. La familia  $\{A_n^\alpha\}_{n \geq 3}$  es un  $\alpha^*$ -cubrimiento de  $X$ , pero no admite un  $\alpha^*$ -sub-cubrimiento finito.

iv)  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\alpha$ -compacto para  $\alpha < 1/2$ . En efecto, sea  $\mu$  tal que  $\alpha < \mu < 1/2$ , y se construye de manera similar que en iii) una familia  $\{A_n^\mu\}_n$  resultando ser un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

Ejemplo 2.1.2: Sean  $X = (0, 1)$  provisto de la topología usual  $\tau$ ,  $0 < \alpha < \beta < 1$  y  $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{W}(\tau) / A(x) \leq \alpha, \forall x \in X\} \cup \{B_n\} \cup X$  donde los conjuntos difusos  $B_n$  son  $\tau$ -continuas y se definen así:

$$B_n(x) = \begin{cases} n(\beta - \alpha)x + \alpha & \text{si } x \in (0, 1/n] \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } x = 1/2 \text{ y lineal en } (\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \text{ y } (\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n}) \\ n(\alpha - \beta)(x-1) + \alpha & \text{si } x \in [\frac{n-1}{n}, 1) \end{cases}$$

donde  $\frac{n-1}{n} > \beta$ .

i)  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto, ya que cualquier  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$  contiene por lo menos un  $B_n \in \mathcal{Z}$

ii)  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\delta$ -compacto para ningún  $\delta > \alpha$ . En efecto

la familia  $\{B_n\}_n$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $X$  que no admite un  $\delta$ -sub-cubrimiento finito.

iii)  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\mu$ -compacto para ningún  $\mu < \alpha$ .

Sea  $\delta$  tal que  $\mu < \delta < \alpha$  y  $A_n : X \rightarrow I$  tal que:

$$A_n(x) = \begin{cases} \delta & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \end{cases} \quad \text{para } n \geq 3$$

La familia  $\{A_n\}_{n \geq 3}$  es un  $\mu$ -cubrimiento de  $X$  que no admite  $\mu$ -sub-cubrimiento finito.

Ejemplo 2.1.3: Sea  $X = (0, 1)$  con la topología usual  $T$  y sea  $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{W}(T) : A(x) \geq \alpha \forall x \in X\} \cup \{\emptyset\}$  con  $0 < \alpha < 1$ .

i)  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha^*$ -compacto. En efecto, todos los abiertos son mayores o iguales a  $\alpha$ .

ii)  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\alpha$ -compacto ya que la familia  $\{A_n\}_{n \geq 3}$  donde

$$A_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \\ \alpha & \text{si } x \in X \setminus \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \end{cases}$$

es un  $\alpha$ -cubrimiento abierto de  $X$  que no admite  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito.

Ejemplo 2.1.4: Se trata ahora de exhibir un espacio topológico difuso que sea  $\alpha$ -compacto para todo  $0 \leq \alpha < 1$ . Tal propósito lo resuelve la proposición siguiente:

Proposición 2.1.1: Sea  $(X, T)$  un espacio topológico ordinario y  $0 \leq \alpha < 1$ .  $(X, T)$  es compacto si y solo si  $(X, W(T))$  es  $\alpha$ -compacto para todo  $\alpha$ .

Demostración: La condición es necesaria. Sea  $\mathcal{U} \subset W(T)$  un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , luego, para todo  $x \in X$ , existe un  $U_x \in \mathcal{U}$  tal que  $U_x(x) > \alpha$ . Por ser  $U_x$  semi-continua inferiormente en  $x$  y  $\alpha < U_x(x)$ , existe una vecindad abierta  $W_x$  de  $x$  tal que para todo  $y \in W_x$ , se tiene  $U_x(y) > \alpha$ . Además  $X = \bigcup_{x \in X} W_x$ , luego existen  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$ .  $\{U_{x_i}\}_{i=1, \dots, n}$  es un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $X$ .

Inversamente, sea  $\{A_j\}_{j \in J}$  un cubrimiento abierto de  $X$ .

$\chi_{A_j}$  es una función  $T$ -semi-continua inferiormente.

$\mathcal{U} = \{\chi_{A_j}\}_{j \in J}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$  para todo  $0 \leq \alpha < 1$ .

Como  $(X, W(T))$  es  $\alpha$ -compacto, existe un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito  $\mathcal{V} = \{\chi_{A_j}\}_{j=1, \dots, n}$  de  $X$ , luego  $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ .

En lo que sigue, el análisis se hará en base a la defini-

ción de  $\alpha$ -compacidad, ya que la  $\alpha^*$ -compacidad no es una generalización natural pues para tal noción no existe el Teorema de Alexander 3.1.1 ni el Teorema de Tychonoff 3.1.2.

Definición 2.1.4: Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos difusos en  $X$ . Se dice que  $\mathcal{F}$  verifica la propiedad de la unión  $\alpha$ -finita ( $\alpha$ -P.U.F.) si para cualquiera subfamilia finita  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ , existe un  $x \in X$  tal que  $\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L(x) \leq \alpha$ .

Proposición 2.1.2:  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto, si y solo si, ninguna familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  que verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

Demostración: Supongamos que  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto. Sea  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  una familia de abiertos que verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. y que es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , luego, existe un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , de donde, para todo  $x \in X$ ,  $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V(x) > \alpha$ , lo cual es una contradicción.

Inversamente, sea  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , luego no verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F., de donde, existe una subfamilia finita  $\mathcal{V}$  tal que para todo  $x \in X$ ,  $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V(x) > \alpha$  resultando ser un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $X$ , entonces  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto.

Teorema 2.1.1: Sea  $F$  un conjunto crispado cerrado de  $(X, \mathcal{Z})$ .

Si  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto entonces  $F$  es  $\alpha$ -compacto como sub-espacio de  $X$ .

Demostración: Sea  $\mathcal{U}$  un  $\alpha$ -cubrimiento de  $F$  y sea

$$\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{Z} : V|_F \in \mathcal{U}\}.$$

La familia  $\mathcal{L} = \mathcal{V} \cup F'$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ . En efecto, si  $y \in F$ , existe un  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U(y) > \alpha$  y si  $y \notin F$  entonces  $F'(y) = 1 > \alpha$ . Como  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto, existe un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito  $\{U_1, \dots, U_n, F'\}$  de  $\mathcal{L}$ . Además  $\{U_1|_F, \dots, U_n|_F\}$  es un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $\mathcal{U}$ . Luego  $F$  es  $\alpha$ -compacto como sub-espacio de  $X$ .

Teorema 2.1.2: Sea  $(X, \mathcal{Z})$  un espacio topológico difuso de Hausdorff y  $Y$  un sub-espacio de  $X$ . Si  $(Y, \mathcal{Z}_Y)$  es  $\alpha$ -compacto, entonces  $Y$  es cerrado en  $(X, \mathcal{Z})$ .

Demostración: Sea  $x_\lambda \notin Y'$ . Para cada  $y_\mu \in Y$ , con  $\mu < 1 - \alpha$ ,

existen  $U_y \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  abierta,  $V_y \in \mathcal{Q}_{y_\mu}$  abierta tal

que  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . Así  $\{V_y|_Y : y \in Y\}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $Y$  admitiendo  $\{V_{y_1}|_Y, V_{y_2}|_Y, \dots, V_{y_n}|_Y\}$  como  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito. Sea  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ , entonces  $U \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = \emptyset$ ; para cada  $z \in Y$ , existe un  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $V_{y_k}(z) > \alpha$  y así  $U(z) = 0$ , de donde  $U \subset Y'$  y  $x_\lambda \notin U$ . Por la proposición 1.4.2  $Y'$  es abierto, o sea  $Y$  es cerrado en  $(X, \mathcal{Z})$ .

Teorema 2.1.3: Sea  $f : (X, \mathcal{Z}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{Z}_2)$  una función D-continua. Si  $A \in \mathcal{C}(X)$  es  $\alpha$ -compacto, entonces  $f(A) \in \mathcal{C}(Y)$  es  $\alpha$ -compacto.

Demostración: Sea  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}_2$  un  $\alpha$ -cubrimiento de  $f(A)$ . Por ser  $f$  D-continua, la familia  $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) / U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{Z}_1$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $A$ , luego, existe  $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$   $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $A$ . Entonces  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento finito de  $f(A)$ .

Corolario 2.1.1: Sea  $f : (X, \mathcal{Z}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{Z}_2)$  una función D-continua. Si  $X$  es  $\alpha$ -compacto, entonces  $f(X)$  es  $\alpha$ -compacto como sub-espacio de  $Y$ .

Observación: En TOP, las topologías compactas son minimales entre las topologías de Hausdorff. Sin embargo, esto no es cierto en FUZ como lo muestra el ejemplo 2.1.5.

Ejemplo 2.1.5: En  $X = [0, 1]$  con la topología usual  $T$ , considérense las topologías  $\mathcal{W}(T)$  y  $\mathcal{Z} = \{\chi_{A_i} / A_i \in T\}$ . Es evidente que  $\mathcal{W}(T)$  es estrictamente más fina que  $\mathcal{Z}$ . Además,  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{W}(T)$  son de Hausdorff y  $\alpha$ -compactos para todo  $0 \leq \alpha < 1$ .

## 2. $\alpha$ -COMPACIDAD LOCAL

Definición 2.2.1: Se dice que  $(X, \mathcal{Z})$  es localmente  $\alpha$ -compacto si para todo  $x_\lambda \in X$ , existe una  $U \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  tal que  $\text{Sop } \bar{U}$  es  $\alpha$ -compacto como sub-espacio crispado de  $X$ .

Proposición 2.2.1: Si  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto entonces  $(X, \mathcal{Z})$  es localmente  $\alpha$ -compacto.

Demostración: Para todo  $x_\lambda \in X$ ,  $X \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  y  $\text{Sop } X = X$  es  $\alpha$ -compacto.

Ejemplo 2.2.1: El espacio  $(X, \mathcal{W}(T))$  donde  $X = (0, 1)$  está provisto de la topología usual  $T$ , es localmente  $\alpha$ -compacto para todo  $0 \leq \alpha < 1$  pero no es  $\alpha$ -compacto para ningún  $\alpha$ .

Ejemplo 2.2.2: Sea  $X = (0, 1)$  provisto de la topología usual  $T$  y  $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{W}(T) / A(x) \geq \alpha \forall x \in X\} \cup \{\emptyset\}$  con  $0 \leq \alpha < 1$ . Para todo  $\beta \geq \alpha$ , el espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  no es localmente  $\beta$ -compacto. En efecto, sea  $x_\lambda \in X$  y  $V \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ , luego, existe un  $A \in \mathcal{Z}$  tal que  $x_\lambda \notin A \subset V$ . Puesto que  $\text{Sop } A = X$  y  $\text{Sop } A \subset \text{Sop } V$  entonces  $\text{Sop } V = X$  y  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\beta$ -compacto.

## CAPITULO III

### TEOREMA DE TYCHONOFF. $\alpha$ -COMPACTIFICACION A UN PUNTO

#### 1. TEOREMA DE TYCHONOFF

Sean  $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$  una familia de espacios topológicos difusos y  $X = \prod X_j$  el producto cartesiano de  $\{X_j\}_{j \in J}$ .

Sea  $K$  finito,  $K \subset J$ , para cada  $U_k \in \tau_k$  se define el conjunto difuso  $\prod_{k \in K} U_k$  de  $X$  así:

$$\prod_{k \in K} U_k = \bigcap p_k^{-1}(U_k)$$

donde  $p_k : X \rightarrow X_k$  es la  $k$ -ésima proyección.

**Definición 3.1.1:** La topología generada por los conjuntos de la forma  $p_j^{-1}(U_j)$  se denomina topología producto sobre  $X$  y se denota por  $\tau$ . Al par  $(X, \tau)$  se le llama espacio producto de los espacios topológicos difusos  $(X_j, \tau_j)$ ,  $j \in J$

Puesto que la familia  $\mathcal{L} = \left\{ \prod_{k \in K} U_k : K \text{ finito } K \subset J \right\}$  es base de la topología  $\tau$ , se tiene que la topología producto es la topología difusa menos fina sobre  $X$  para la cual cada proyección  $p_j : (X, \tau) \rightarrow (X_j, \tau_j)$  es  $D$ -continua.

Mostremos que el Teorema de Alexander, relativo a subbases, el cual es útil y profundo, se verifica para la

$\alpha$ -compacidad.

Teorema 3.1.1: Sea  $\mathcal{B}$  una sub-base de la topología  $\mathcal{Z}$  de  $X$  y  $0 \leq \alpha < 1$ . Si todo  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$  de elementos de  $\mathcal{B}$  admite un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito, entonces,  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto.

Demostración: Mostremos que cualquier familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  que verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

i) Sea  $\mathcal{F} = \{ \mathcal{A} : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{Z} \text{ y } \mathcal{A} \text{ verifica } \alpha\text{-P.U.F.} \}$ .

$\mathcal{F}$  no es vacío ya que  $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ ; además está parcialmente ordenado por la inclusión  $\subset$ . Sea  $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{F}$  una sub-colección totalmente ordenada y sea  $\mathcal{X} = \bigcup_{\mathcal{H} \in \tilde{\mathcal{X}}} \mathcal{H}$  luego  $\mathcal{X}$  verifica  $\alpha$ -P.U.F. y

$\mathcal{U} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$ , de donde  $\mathcal{X}$  es una cota superior de  $\tilde{\mathcal{X}}$ . Por lo tanto  $(\mathcal{F}, \subset)$  es un conjunto inductivo y por el lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  tiene un elemento maximal  $\mathcal{D}$ .

ii) Como  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{Z}$ , para probar que  $\mathcal{U}$  no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , basta probarlo para  $\mathcal{D}$ . Por hipótesis sobre la base  $\mathcal{B}$ , se tiene que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$  tiene la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. y siendo una sub-familia de  $\mathcal{B}$ , no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , de donde existe un  $p \in X$  tal que, para todo  $U \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ ,  $U(p) \leq \alpha$ . Mostremos pues que  $D(p) \leq \alpha$  para todo  $D \in \mathcal{D}$ .

iii) Mostremos que  $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$  es un filtro de conjuntos difusos abiertos, relativo a la inclusión.  $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{D} \neq \emptyset$  pues

$x \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$ .

a. Para todo  $A \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$ ,  $A \neq \emptyset$  ya que de ser vacío, para todo  $x \in X$ ,  $A(x) = 0 \leq \alpha$  y así  $A \in \mathcal{D}$ .

b. Sea  $A \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$  y  $B \in \mathcal{Z}$  tal que  $A \subset B$ .  $\mathcal{D} \cup \{A\}$  no verifica  $\alpha$ -P.U.F. por ser  $\mathcal{D}$  maximal, de donde existe

$\{D_1, D_2, \dots, D_n\} \subset \mathcal{D}$  tal que para todo  $x \in X$

$$(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \cup A)(x) > \alpha$$

y como  $A \subset B$  se tiene que

$$(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \cup B)(x) > \alpha$$

y así  $B \notin \mathcal{D}$ , luego  $B \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$ .

c. Sean  $A, B \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$ .  $\mathcal{D} \cup \{A\}$  y  $\mathcal{D} \cup \{B\}$  no verifican la propiedad  $\alpha$ -P.U.F., así existe  $\{D_1, D_2, \dots, D_n, \dots, D_{n+m}\} \subset \mathcal{D}$  tal que, para todo  $x \in X$ .

$$(D_1 \cup \dots \cup D_n \cup A)(x) > \alpha$$

$$(D_{n+1} \cup \dots \cup D_{n+m} \cup B)(x) > \alpha$$

Sea  $D = \bigcup_{i=1}^{n+m} D_i$ , luego, para todo  $x \in X$ , se tiene que:

$$(D \cup A)(x) > \alpha$$

$$(D \cup B)(x) > \alpha$$

entonces:

$$[D \cup (A \cap B)](x) > \alpha$$

de donde  $A \cap B \notin \mathcal{D}$ , es decir,  $A \cap B \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$

iv) Por ser  $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$  un filtro, dado  $D \in \mathcal{D}$  y

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{Z}$  tal que  $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset D$ , entonces existe un  $A_k$ , con  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $A_k \in \mathcal{D}$

Sea  $D \in \mathcal{D}$ , luego  $D \neq X$  por ser  $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{D}$  un filtro. Como  $\mathcal{S}$  es una sub-base,  $D = \bigcup (S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_{n_j}})$  con  $S_{j_k} \in \mathcal{S}$  para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n_j\}$ . Además, para todo  $j \in J$ , se tiene

$$S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_{n_j}} \subset D$$

luego existe un  $k_j \in \{1, 2, \dots, n_j\}$  tal que  $S_{j_{k_j}} \in \mathcal{D}$  y así

$$S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_{n_j}} \subset S_{j_{k_j}}$$

de donde

$$D \subset \bigcup_{j \in J} S_{j_{k_j}} \quad \text{con } S_{j_{k_j}} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$$

Por ii se tiene

$$S_{j_{k_j}}(p) \leq \alpha$$

luego

$$D(p) \leq \sup \{S_{j_{k_j}}(p)\} \leq \alpha \quad \text{para todo } D \in \mathcal{D},$$

entonces  $\mathcal{U}$  no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

Por la proposición 2.1.2 se tiene que  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto.

Observación: En el ejemplo 3.1.1 veremos que para la

$\alpha^*$ -compacidad, el espacio topológico difuso

$(X, \mathcal{Z})$  satisface vacuamente la hipótesis del Teorema 3.1.1, sin embargo  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\alpha^*$ -compacto.

Ejemplo 3.1.1: Sea  $X = (0, 1)$  provisto de la topología usual  $\mathcal{T}$ . Considérese en  $X$  la topología difusa  $\mathcal{Z}$  generada por la familia  $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{W}(\mathcal{T}) : A(x) < \alpha \forall x \in X\}$  con  $0 < \alpha \leq 1$ . Claramente  $X$  no tiene  $\alpha^*$ -cubrimiento de miembros de  $\mathcal{S}$ . La familia  $\{A_n\}_{n \geq 3}$  donde  $A_n$  es un abierto tal que:

$$A_n(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in (\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}) \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus (\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}) \end{cases}$$

es un  $\alpha^*$ -cubrimiento de  $X$  que no admite  $\alpha^*$ -sub-cubrimiento finito.

Teorema 3.1.2: (TYCHONOFF). Sea  $(X, \mathcal{T})$  el espacio producto de la familia  $\{(X_j, \mathcal{Z}_j)\}_{j \in J}$  de espacios topológicos difusos.  $(X, \mathcal{T})$  es  $\alpha$ -compacto si y solo si, para cada  $j \in J$ ,  $(X_j, \mathcal{Z}_j)$  es  $\alpha$ -compacto.

Demostración: La implicación directa se sigue del corolario 2.1.1 y del hecho de que las proyecciones  $p_j : X \rightarrow X_j$  son  $D$ -continuas y suryectivas.

La implicación inversa se basa en el Teorema 3.1.1. Mostremos que todo  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , formado por elementos

de la sub-base  $\mathcal{A} = \{p_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{Z}_j\}_{j \in J}$  admite un  $\alpha$ -subcubrimiento finito, lo cual es equivalente a mostrar que toda familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$  que verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

Considérese la familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$  que verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. Sea  $\mathcal{M}_j = \{A \in \mathcal{Z}_j : p_j^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ ; para todo  $j \in J$ ,  $\mathcal{M}_j$  verifica la propiedad  $\alpha$ -P.U.F. En efecto, sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{M}_j$  y  $\{p_j^{-1}(A_1), \dots, p_j^{-1}(A_n)\} \subset \mathcal{U}$ , luego existe un  $x \in X$  tal que  $\bigcup_{k=1}^n p_j^{-1}(A_k)(x) \leq \alpha$ , es decir  $\bigcup_{k=1}^n A_k(x_j) < \alpha$

Para todo  $j \in J$ ,  $\mathcal{M}_j$  no es  $\alpha$ -cubrimiento de  $X_j$  puesto que  $(X_j, \mathcal{Z}_j)$  es  $\alpha$ -compacto, entonces existe un  $q_j \in X_j$  tal que  $A(q_j) \leq \alpha$  para todo  $A \in \mathcal{M}_j$ .

Sea  $q = (q_j)_{j \in J} \in X$  y  $\mathcal{U}_j = \{p_j^{-1}(A) : A \in \mathcal{M}_j\}$  para  $j \in J$ . Como  $\mathcal{U} = \bigcup_j \mathcal{U}_j$  se tiene que, para todo  $j \in J$  y  $p_j^{-1}(A) \in \mathcal{U}_j$ ,  $p_j^{-1}(A)(q) = A(p_j(q)) = A(q_j) \leq \alpha$ , de donde  $\mathcal{U}$  no es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ .

Observación: El espacio producto de dos espacios topológicos difusos  $\alpha^*$ -compactos no es necesariamente  $\alpha^*$ -compacto [2].

2.  $\alpha$ -COMPACTIFICACION A UN PUNTO

Sean  $(X, \mathcal{Z})$  un espacio topológico difuso y  $0 \leq \alpha < 1$ .

Consideremos la colección  $\mathcal{K}_\alpha = \{K \in \mathcal{C}(X) : K \text{ es } \mathcal{Z}\text{-cerrado y } \alpha\text{-compacto como sub-espacio de } X\}$  y un objeto  $w \notin X$ .

Definamos  $X^* = X \cup w$  y para cada  $K \in \mathcal{K}_\alpha$ ,  $K_w : X^* \rightarrow I$  tal que:

$$K_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = w \\ K(x) & \text{si } x \in X \end{cases}$$

y para cada  $U \in \mathcal{Z}$ ,  $U^* : X^* \rightarrow I$  tal que

$$U^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = w \\ U(x) & \text{si } x \in X \end{cases}$$

La topología generada en  $X^*$  por

$$\mathcal{A}_\alpha = \{U^* : U \in \mathcal{Z}\} \cup \{K_w : K \in \mathcal{K}_\alpha\}$$

se denota por  $\mathcal{Z}_\alpha^*$ . Claramente  $(X, \mathcal{Z})$  es un sub-espacio de  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$ .

Teorema 3.2.1: Para  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  es  $\alpha$ -compacto.

Demostración: Sea  $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_\alpha$  un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X^*$  formado por abiertos prebásicos. Entonces existe por lo

menos un  $K_w$  en  $\mathcal{U}$  tal que  $K_w(x) = 1 > \alpha$  para todo  $x \in X \setminus K$ . Como  $K$  es  $\alpha$ -compacto, existen  $U_1, U_2, \dots, U_n$  elementos de  $\mathcal{U}$  tal que  $\{U_1/K, U_2/K, \dots, U_n/K\}$  es un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $K$ . Así se tiene que  $\{U_1, U_2, \dots, U_n, K_w\}$  es un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito de  $X^*$ .

Por el Teorema 3.1.1, se sigue que  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  es  $\alpha$ -compacto.

Teorema 3.2.2:  $X$  es denso en  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  si y solo si  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\alpha$ -compacto.

Demostración: La implicación es necesaria. Supongamos que  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto. Entonces  $X \in \mathcal{K}_\alpha$  y  $X_w$  es un abierto de  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$ , de donde  $X_w^i = X$ , es decir,  $X_w^i$  es la función característica de  $X$  en  $X^*$ . Además  $\bar{X}_w^i = X$  y así  $X$  no es denso en  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$ .

Inversamente, si  $X$  no es denso en  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  entonces  $\bar{X}$  es un conjunto difuso de la forma

$$\bar{X}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ \beta & \text{si } x = w, \quad \beta < 1 \end{cases}$$

Sea  $A = \bar{X}^i$ , luego  $A$  es un conjunto difuso abierto, donde:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ 1 - \beta & \text{si } x = w \end{cases}$$

y por ser  $A$  abierto, existen  $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subset \mathcal{K}_\alpha$  tal que  $\bigcap_{i=1}^n K_i \subset A$  entonces  $\beta = 0$ . Esto implica que  $X = \bigcup_{i=1}^n K_i$ , es decir,  $X$  es  $\alpha$ -compacto.

**Teorema 3.2.3:**  $(X, \mathcal{Z})$  es localmente  $\alpha$ -compacto y Hausdorff si y solo si  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  es Hausdorff.

**Demostración:** Supongamos que  $(X, \mathcal{Z})$  es localmente  $\alpha$ -compacto y Hausdorff. Si  $x_\lambda \in X$ ,  $y_\mu \in X$ ,  $x \neq y$ , entonces, existen  $U \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  abierta,  $V \in \mathcal{Q}_{y_\mu}$  abierta tal que  $U \cap V = \emptyset$ , luego  $U^* \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ ,  $V^* \in \mathcal{Q}_y$  y  $U^* \cap V^* = \emptyset$  en  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$ .

Sean  $x_\lambda \in X$ ,  $w_\mu$ , por ser  $(X, \mathcal{Z})$  localmente  $\alpha$ -compacto, existe un  $\bar{w} \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  abierta tal que  $\text{Sop } \bar{w} = K$  es  $\alpha$ -compacto. Como  $X$  es Hausdorff,  $K$  es cerrado, entonces  $K_w$  es un abierto de  $X^*$  y  $K_w \cap \bar{w}^* = \emptyset$ .

Inversamente, supongamos que  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  es Hausdorff. Sean  $x_\lambda \in X$  y  $w_\mu$ ; entonces existen  $U \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  abierta y  $V \in \mathcal{Q}_{w_\mu}$  abierta tal que  $U \cap V = \emptyset$ , de donde  $U \subset V'$ . Como  $U \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ , se tiene que  $V' \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$ . Además,  $V' \in \mathcal{C}(X)$  es cerrado y  $\alpha$ -compacto. Luego para  $x_\lambda \in X$ , existe  $V' \in \mathcal{Q}_{x_\lambda}$  tal que  $\text{Sop } V' = V'$  es  $\alpha$ -compacto, es decir,  $(X, \mathcal{Z})$  es localmente  $\alpha$ -compacto.

Sean  $x_\lambda \in X$ ,  $y_\mu \in X$ ,  $x \neq y$ , entonces existen  $U^* \in Q_{x_\lambda}$  y  $V^* \in Q_{y_\mu}$  tal que  $U^* \cap V^* = \emptyset$  en  $X^*$ . Si  $w \notin U^*$  y  $w \notin V^*$  se tiene que  $U \cap V = \emptyset$  en  $X$ . Si  $w \in U^*$ , entonces para  $x_\lambda$  y  $w_1$  existen  $\hat{U} \in Q_{x_\lambda}$  y  $\hat{V} \in Q_{w_1}$  tales que  $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$  en  $X^*$ . Además  $U^* \cap \hat{U} = \emptyset \in Q_{x_\lambda}$  y  $w \notin \hat{U}^*$  luego  $\hat{U}^* \cap V^* = \emptyset$  de donde  $\hat{U} \cap V = \emptyset$  en  $X$ . Entonces  $(X, \mathcal{Z})$  es Hausdorff.

Ejemplo 3.2.1: Consideremos el espacio topológico difuso

$(X, \mathcal{W}(T))$  donde  $X = (0,1)$  provisto de la topología usual  $T$ . Los conjuntos crispados  $K$ , cerrados y  $\alpha$ -compactos como sub-espacios de  $X$  son aquellos tales que  $\text{Sop } K = [a,b] \subset (0,1)$ . Toda  $Q$ -vecindad de  $w_\mu$  en  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  es de la forma:

$$K_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = w \\ K'(x) & \text{si } x \in X \end{cases}$$

entonces, el  $\alpha$ -compactificado  $(X^*, \mathcal{W}(T)_\alpha^*)$  de  $(X, \mathcal{W}(T))$  no es homeomorfo a  $(S^1, \mathcal{W}(\mathcal{Z}))$  donde  $\mathcal{Z}$  es la topología usual de la esfera  $S^1$ .

Nótese que los conjuntos crispados  $K$ , cerrados y  $\alpha$ -compactos de  $X$ , lo son para todo  $0 \leq \alpha < 1$ , resultando que  $(X^*, \mathcal{W}(T)_\alpha^*)$  es  $\beta$ -compacto para todo  $0 \leq \beta < 1$ . Sin embargo, como muestra el ejemplo 3.2.2, un espacio  $\alpha$ -compactificado puede aún ser  $\beta$ -compactificado para  $\beta \neq \alpha$ . En este sentido, diremos que el espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  admite una

doble compactificación  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\alpha\beta}^*)$ .

Ejemplo 3.2.2: Consideremos los intervalos  $(0,1)$ ,  $(2,3)$  de la recta real y  $X = (0,1) \cup (2,3)$  provisto de la topología usual  $T$ . Sea la topología difusa sobre  $X$  generada por las familias  $\{A \in \mathcal{W}(T) : A(x) = 0 \ \forall x \in (2,3)\}$  y  $\{B \in \mathcal{W}(T) : B(x) = 0 \ \forall x \in (0,1) \text{ y } B(x) \leq \delta \ \forall x \in (2,3) \text{ donde } \delta \text{ es tal que } 0 < \delta < 1.$

El espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  no es  $\beta$ -compacto para  $\beta > \delta$  y  $(2,3)$  es  $\mathcal{Z}$ -cerrado y no  $\alpha$ -compacto como sub-espacio crispado de  $X$ .

El espacio topológico difuso  $(X^*, \mathcal{Z}_{\beta}^*)$  no es  $\alpha$ -compacto para  $\alpha < \delta$  puesto que  $(0,1) \cup \{w_1\} \cup \mathcal{U}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X^*$  donde  $\mathcal{U}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $(2,3)$  que no admite  $\alpha$ -subcubrimiento finito.

Entonces, el espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  admite una doble compactificación  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\beta\alpha}^*)$ .

## CONCLUSIONES

El análisis y las investigaciones realizadas durante la preparación de este trabajo nos llevan a las conclusiones que a continuación se describen.

En un espacio topológico ordinario  $(X, \mathcal{Z})$  el grado de pertenencia de un punto  $x$  en  $X$  es 0 ó 1. Esto nos permite interpretar la noción de  $\alpha$ -cubrimiento de un espacio topológico difuso en un espacio topológico  $(X, \mathcal{Z})$  de la siguiente manera:

Una familia  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$  es un  $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , si para todo  $x \in X$  existe un  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U(x) = 1 > \alpha$ , es decir, para todo  $x \in X$ , existe un  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U$ .

De igual manera, la noción de  $\alpha$ -compacidad se interpreta así:

El espacio topológico  $(X, \mathcal{Z})$  es  $\alpha$ -compacto si para todo  $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$   $\alpha$ -cubrimiento de  $X$ , existe un  $\alpha$ -sub-cubrimiento finito  $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ , es decir, para todo  $x \in X$ , existe  $U_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $U_j(x) = 1 > \alpha$ , o sea  $x \in U_j$ .

Se tiene entonces, que la noción de  $\alpha$ -compacidad en FUZ, restringida a TOP, coincide con la compacidad conocida.

De lo dicho anteriormente podemos afirmar que la  $\alpha$ -compactificación a un punto en FUZ, restringida a TOP, coincide con la noción de compactificación de Alexandroff.

La doble compactificación de un espacio topológico difuso nos ofrece resultados atrayentes como se muestra posteriormente; sin embargo, en un espacio topológico ordinario ésta no es de gran interés.

En el ejemplo 3.2.2 el espacio topológico difuso  $(X^*, \mathcal{Z}_\beta^*)$  no es  $\alpha$ -compacto para  $\alpha < \beta$ . El  $\alpha$ -compactificado  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\beta\alpha}^*)$  de  $(X^*, \mathcal{Z}_\beta^*)$  contiene a  $(0,1) \cup \{w_1\}$  como abierto. De otra parte, el  $\alpha$ -compactificado  $(X^*, \mathcal{Z}_\alpha^*)$  de  $(X, \mathcal{Z})$  resulta ser  $\beta$ -compacto para  $\beta > \alpha$ , luego, no es de interés una doble compactificación de  $(X, \mathcal{Z})$  en esta dirección. Además,  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\alpha\beta}^{**})$  no contiene a  $(0,1) \cup \{w_1\}$  como abierto. De este ejemplo se desprende que:

1.  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\alpha\beta}^{**})$  no es homeomorfo a  $(X^{**}, \mathcal{Z}_{\beta\alpha}^*)$
2. Es posible una doble compactificación de  $(X, \mathcal{Z})$  en una dirección, resultando sin interés una doble compactificación en la otra dirección.

Se deja como tema abierto a la investigación la búsqueda de las condiciones bajo las cuales, un espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  admita una doble compactificación en las dos direcciones y que ellas sean homeomorfas.

Demostraremos a continuación la generalidad a la cual hicimos mención en la introducción.

El axioma de Hausdorff introducido por Gantner y Steinla-

ge es el siguiente:

Un espacio topológico difuso  $(X, \mathcal{Z})$  es de Hausdorff si para todo  $x, y$  elementos de  $X$ ,  $x \neq y$ , existen dos abiertos  $U$  y  $V$  tales que  $U(x) = V(y) = 1$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

Este axioma implica el axioma de Hausdorff utilizado, dado en la definición 1.5.1, y la demostración es trivial. La recíproca no es cierta como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Sean  $X = \{-1\} \cup (0, 1) \cup \{2\}$  y  $\mathcal{Z}$  la topología generada por la familia  $\mathcal{A} = \{x_1 \mid \forall x \in (0, 1), A^{-1}, A^2, B_n^{-1}, B_n^2\}_{n \geq 2}$

donde

$x_1$  son los conjuntos crispados de  $X$ , de soporte  $\{x\}$ ,  $x \in (0, 1)$

$A^{-1}$  son los conjuntos crispados de  $X$ , de soporte  $\{-1\} \cup F$ , donde  $F$  es parte finita de  $(0, 1)$

$A^2$  son los conjuntos crispados de  $X$ , de soporte  $\{2\} \cup F$ , donde  $F$  es parte finita de  $(0, 1)$

$$B_n^{-1} = -1 \frac{n}{n+1} \cup \chi_{(0, \frac{1}{n})} \text{ para } n \geq 2$$

$$B_n^2 = 2 \frac{n}{n+1} \cup \chi_{(\frac{1}{n}, 1)} \text{ para } n \geq 2$$

$(X, \mathcal{Z})$  es un espacio topológico difuso que verifica el axioma de Hausdorff dado en el texto. Sin embargo, no verifica el axioma de Gantner y Steinlage puesto que no existen abiertos  $U$  y  $V$  disjuntos tales que  $U(-1) = V(2) = 1$ .

BIBLIOGRAFIA

1. BOURBAKI, N. Eléments de Mathématique. Livre III. Topologie Générale. Hermann, Paris 1949.
2. GANTNER, T.E. R. C. STEINLAGE, R. H. WARREN  
"Compactness in Fuzzy Topological Spaces". J. Math. Anal. Appl. 62, 547-562 (1978).
3. KELLY, J. L. General Topology (Graduate Texts in Mathematics, 27). Springer Verlag, New York. Reprint of the 1955 ed. Published by Van Nostrand.
4. LOWEN, R. "A comparison of Different Compactness Notions in Fuzzy Topological Spaces". J. Math. Anal. Appl. 64, 446-454 (1978).
5. MARTIN, H. "A Stone-Čech Ultrafuzzy Compactification". J. Math. Anal. Appl. 73, 453-456 (1980).
6. PU PAO MING YING-MING LIU. "Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence". J. Math. Anal. Appl. 76, 571-599 (1980).

7. PU PAO MING            YING-MING LIU. "Fuzzy Topology II.  
Product and Quotient Spaces". J.  
Math. Anal. Appl. 77, 20-37 (1980).
  
8. ZADEH, L. A.            "Fuzzy Sets" Information and Control  
8, 338-353 (1965).