



UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE LA CONJETURA DE LA ORBITA PERIODICA

POR:

JOSE RAFAEL FERNANDEZ DE LEON

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar  
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización  
en Matemática

TM

UNIVERSIDAD DE PANAMA



Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Despacho del Vicerrector

22 ABR. 1986

Aprobado por:

Director de Tesis:

Oscar Valdivia G.  
Oscar Valdivia G., Ph. D.

Miembro del Jurado:

Alvaro Pino N.  
Alvaro Pino N., M. Sc.

Miembro del Jurado:

Silverio R. Vergara B.  
Silverio Vergara, M. Sc.

Fecha:

12 de noviembre de 1985

abs del autor

216372

Cincuentenario de la Universidad

1935 - 1985

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira

ESTAFETA UNIVERSITARIA

PANAMA, R. DE P.

DEDICATORIA

Dedico este humilde trabajo a quienes se constituyeron en el soporte de este logro y que sin ellos no hubiese sido posible.

Es por esto que:

Quiero dedicarlo a mis amados padres Rafael y Rosa de los cuales obtuve la perseverancia y positivismo hacia el trabajo.

Quiero dedicarlo a mis adorados hijos Karina, José y Kirania que fueron la fuente de energía que impulso mis esfuerzos.

Quiero dedicarlo a mi amantísima esposa Miriam, quien en todo momento supo comprenderme para llevar adelante este trabajo.

Quiero dedicarlo a mis queridos compañeros Julio, Silverio y Dixiana que en todo momento me infundieron ánimo y cooperaron en todo lo que estaba a su alcance para la terminación de este trabajo y,

Quiero dedicarlo a todos mis maestros y profesores que en una forma u otra contribuyeron para que este momento fuese una realidad.

A G R A D E C I M I E N T O

Quiero expresar en estas líneas mi mas profundo agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la culminación de este paso de la realización académica de la Universidad de Panamá. Por esto,

Quiero expresar a mi profesor Dr. OSCAR VALDIVIA, asesor y guía, mi agradecimiento por sus sabias enseñanzas, atinados consejos e infinita paciencia para el logro de este trabajo, y

Quiero expresar a mis profesores JORGE ROJO, AUGUSTO ARRIAGADA Y JOSE GARRIDO, mi agradecimiento por sus esfuerzos para hacer este sueño una realidad.

TABLA DE CONTENIDOS

Introducción .....	i
<u>Capítulo 1.</u> Preliminares .....	1
1.1 Teorema de la función inversa .....	2
1.9 Teorema del Rango .....	10
1.18 Caracterización de Sub-variedades diferenciables ...	18
1.19 Variedad de Stiefel .....	19
<u>Capítulo 2.</u> Sistemas Dinámicos .....	22
2.2 Flujo Global en una variedad diferenciable .....	23
2.8 Flujo Local en una variedad diferenciable .....	27
2.11 Caracterización de flujo local .....	28
2.12 Caracterización de flujo global .....	32
2.14 Caracterización de líneas de flujo .....	36
<u>Capítulo 3.</u> Construcción de una variedad diferenciable compacta de dimensión 4 .....	38
3.1 El octágono $D$ , la función $\Psi$ y sus propiedades .....	39
3.3 Los conjuntos $A$ y $H$ . Propiedades .....	41
3.4 La función $\rho$ .....	43
3.5 La función $F$ .....	43
3.7 Construcción de una sub-variedad diferenciable $M$ de dimensión 4 .....	46
3.8 Construcción de una sub-variedad diferenciable compac- ta $M$ .....	49
<u>Capítulo 4.</u> Construcción de un campo vectorial diferen- ciable .....	51

La función $\sigma$ .....	53
La función K .....	54
La función p y sus propiedades .....	54
La función L .....	56
La función q y sus propiedades .....	56
4.1 El campo vectorial X .....	57
4.2 Campo vectorial sobre la variedad M .....	57
4.3 Campo vectorial no trivial .....	58
<u>Capítulo 5. Orbitas del campo vectorial</u> .....	61
5.2 Invarianza bajo rotaciones rígidas alrededor del ori- gen de las funciones $\psi, \rho, \sigma, F$ y el campo vectorial X .	62
5.3 Invarianza bajo una involución T de las funciones $\psi, \rho, F$ la variedad M y el campo vectorial X .....	64
5.4 Orbitas en M del campo vectorial cuando $\psi > 0$ .....	68
5.4 La función del primer retorno de las órbitas difeo- mórficas a una circunferencia es no acotada localmente ..	71
5.5 Orbitas en M del campo vectorial cuando $\psi = 0$ .....	72
5.6 Orbitas en M del campo vectorial cuando $\psi = 0$ .....	73
Conclusiones .....	74
Bibliografía .....	76

## INTRODUCCION

En 1952, G. REEB ([9]) en su tesis doctoral demostró que en una foliación de codimensión 1 sobre una variedad diferenciable con hojas compactas, la función volúmen de la hoja es una función localmente acotada. A si mismo, dió un ejemplo de una foliación con hojas compactas sobre una variedad diferenciable no compacta tal que la función volúmen de la hoja es localmente no acotada.

Para el caso de un flujo sobre una variedad diferenciable con órbitas difeomórficas a una circunferencia, la función volúmen se sustituye por la función del tiempo del primer retorno. En efecto, en 1972, D.B.A. EPSTEIN ([4]) construyó un flujo analítico real sobre una variedad diferenciable no compacta de dimensión 3, con función de tiempo del primer retorno no acotada. Además sugirió que sobre una variedad diferenciable compacta de dimensión 3, cualquier flujo con órbitas difeomórficas a la circunferencia, debe tener función del primer retorno acotada. A esta conjetura se le llama "CONJETURA DE LA ORBITA PERIODICA" y se esperaba que la respuesta fuera afirmativa.

Posteriormente, EDWARDS, MILLET y SULLIVAN ([6]), así como VOGT ([16]), trataron de extender los métodos de demostración de ([4]) a foliaciones de codimensión 2 con hojas compactas.

D. SULLIVAN en ([12]) y ([13]) construyó un ejemplo de

un flujo sobre una variedad diferenciable compacta de dimensión 5 con órbitas difeomórficas a una circunferencia, pero con función del tiempo del primer retorno no acotada. También SULLIVAN en estos artículos da una construcción de un flujo analítico real debido a THURSTON.

En ([3]), EPSTEIN y VOGT construyeron un flujo cuyo campo vectorial asociado es polinomial, sobre una variedad diferenciable compacta de dimensión 4, con órbitas difeomórficas a una circunferencia cuya función del primer retorno es localmente no acotada.

Este trabajo titulado "SOBRE LA CONJETURA DE LA ORBITA PERIODICA" está dividido en 4 capítulos. En el Capítulo 1, "PRELIMINARES", se tratan teoremas y conceptos fundamentales para el desarrollo del mismo, como son el teorema de la función inversa ( Teorema 1.1 ); el Teorema del Rango (Teorema 1.9); el Teorema de caracterización de Submersiones (Proposición 1.17); el Teorema de caracterización de Inmersiones (Proposición 1.11) y el teorema de caracterización de Sub-variedades determinadas por un valor regular (Teorema 1.18). En el desarrollo del capítulo se incluyen las definiciones de conjunto Independiente de funciones diferenciables en un punto de una variedad diferenciable (Definición 1.2); para mostrar corolarios importantes que se deducen del teorema de la función inversa; se define el rango de una función diferenciable entre variedades diferencia-

bles (Definición 1.8) ; los no menos importantes conceptos de Inmersión, Inmersión Difeomórfica, Submersión y punto regular (Definiciones 1.10, 1.12 y 1.15) y finaliza con un ejemplo de la variedad de Stiefel (Ejemplo 1.19).

En el Capítulo 2, "SISTEMAS DINAMICOS" , se definen los conceptos de flujo Global (Definición 2.2); Líneas de flujo y órbitas (Definición 2.5); y órbita Maximal (Definición 2.10). El capítulo finaliza con tres importantes Teoremas que facilitan el trabajo que se desarrolla; como son el teorema de existencia de flujo local determinado por un campo vectorial (Teorema 2.11); el teorema de flujo global determinado por un campo vectorial de soporte compacto (Teorema 2.12) y el teorema de clasificación de líneas de flujo (Proposición 2.14).

En el Capítulo 3, "CONSTRUCCION DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE COMPACTA DE DIMENSION 4", se comienza a preparar el terreno para lo que es la parte medular de este trabajo.

Así iniciamos el mismo definiendo una región octogonal  $D$  y una función polinomial real  $\Psi$  (Definición 3.1) y estudiamos las propiedades de esta función dentro de la región octogonal (Proposición 3.2). Se construye además una corona poligonal y se estudian sus propiedades (Proposición 3.3).

A continuación se define una función real y diferenciable sobre la corona poligonal (Definición 3.4). Para alcanzar el objetivo de este capítulo, que es la construcción de u-

na variedad diferenciable compacta de dimensión 4, definimos una función diferenciable  $F$  de  $\mathbb{R}^7$  en  $\mathbb{R}^3$  (Definición 3.5) de tal manera que la proyección sobre las dos primeras coordenadas de  $\mathbb{R}^7$  de la imagen inversa  $M$  del origen de  $\mathbb{R}^3$ , coincida con la corona poligonal (Proposición 3.6). Finaliza el mismo con la demostración de que el origen de  $\mathbb{R}^3$  es un valor regular de  $F$  (Teorema 3.7) y  $M$  es una sub-variedad diferenciable compacta de codimensión 3 (Teorema 3.8).

El Capítulo 4, " CONSTRUCCION DE UN CAMPO VECTORIAL ", comienza con la construcción de un campo vectorial  $X$  sobre  $\mathbb{R}^7$  (Definición 4.1), al cual se le imponen las condiciones deseadas. Se prueba entonces que cuando se restringe éste a la variedad  $M$ , sigue siendo un campo vectorial (Teorema 4.2), el cual es no trivial; es decir no tiene puntos singulares (Teorema 4.3).

En el Capítulo 5, "ORBITAS DEL CAMPO VECTORIAL SOBRE LA VARIEDAD  $M$ ", se verifica que las funciones  $\psi$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  y  $F$  y el campo vectorial  $X$  son invariantes bajo rotaciones rígidas alrededor del origen en cualquiera de los planos  $\mathbb{R}_u^2$  y  $\mathbb{R}_w^2$  (Teorema 5.2). A continuación se construye una Involution de  $\mathbb{R}^7$  que deja invariantes a  $\psi$ ,  $\rho$ ,  $F$ ,  $M$  y el campo vectorial  $X$  (Teorema 5.3). Para finalizar el capítulo, se prueba que si  $\psi > 0$  en  $M$ , cada órbita es difeomorfa a una circunferencia y cuando  $\psi$  tiende a cero, la función del primer retorno tiende al infinito (Teorema 5.4) y que si  $\psi = 0$

las órbitas son difeomorfas a la circunferencia (Teoremas 5.5 y 5.6)

CAPITULO 1  
PRELIMINARES

En este Capítulo se demuestra el Teorema de la función Inversa en variedades diferenciables y Corolarios que se deducen de éste; el Teorema del Rango en variedades diferenciables y se definen los conceptos de Inmersión Difeomórfica, Inmersión, Submersión, puntos regulares y valores regulares. Al final del mismo se demuestra un importante teorema que es de gran ayuda para el trabajo que se presenta, como es el de construcción de Subvariedades diferenciables y seguidamente se da un ejemplo donde se aplica el mismo.

TEOREMA 1.1 ( de la función Inversa ).

Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $n$ ,  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable y  $p \in M$  tal que  $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un isomorfismo. Entonces existe  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$  tal que  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto  $f(U_p)$  de  $N$ .

Demostración: Sean  $p \in M$ ,  $f(p) \in N$  y  $(V, \psi)$  una carta local alrededor de  $f(p)$ ,  $\psi$  con funciones coordenadas  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Sea  $(U, \varphi)$  una carta local alrededor de  $p$ ,  $\varphi$  con funciones coordenadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  y tal que  $U \subset f^{-1}(V)$ . Como  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right\}_{1 \leq i \leq n}$  y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right\}_{1 \leq j \leq n}$  son bases de los espacios tangentes  $T_p M$  y  $T_{f(p)} N$  respectivamente y  $(df)_p \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \varphi_i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial \psi_j} \Big|_{f(p)}$   $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ; la matriz Jacobiana de  $f$  en  $p$  está

dada por:

$$J(f_p) = \left( \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \varphi_i} \Big/ \Big|_p \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ la cual es}$$

no singular pues  $(df)_p$  es un isomorfismo.

Sean ahora  $U_1 = \varphi(U)$ ,  $V_1 = \psi(V)$  y  $\tilde{f} : U_1 \rightarrow V_1$  con  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  tal que para cada  $x$  en  $U_1$ ,  $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_n(x))$ , donde  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tilde{f}_i = \pi_i \circ \tilde{f}$ , con  $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección canónica sobre el  $i$ -ésimo factor.

$\tilde{f}$  es una función diferenciable y la matriz Jacobiana de  $\tilde{f}$  es en  $\varphi(p)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \pi_i} \Big/ \Big|_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq j, i \leq n} &= \left( \frac{\partial(\pi_j \circ \tilde{f})}{\partial \pi_i} \Big/ \Big|_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq j, i \leq n} \\ &= \left( \frac{\partial(\pi_j \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i} \Big/ \Big|_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq j, i \leq n} \\ &= \left( \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i} \Big/ \Big|_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq j, i \leq n} \\ &= \left( \frac{\partial(\psi_j \circ f)}{\partial \varphi_i} \Big/ \Big|_p \right)_{1 \leq j, i \leq n} \end{aligned}$$

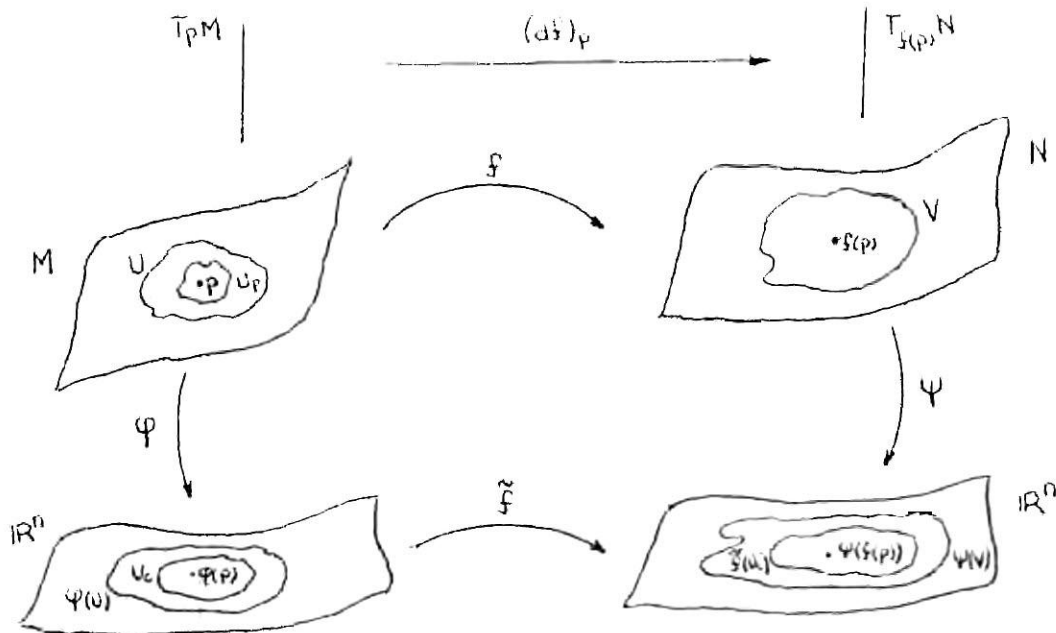
$= J(f_p)$ , la cual es no singular.

Por el teorema de la función Inversa en  $\mathbb{R}^n$ , existe  $U_0$  vecindad abierta de  $\varphi(p)$  en  $\mathbb{R}^n$  contenida en  $U_1$  tal que:

(a)  $\tilde{f}|_{U_0}$  es inyectiva.

(b)  $\tilde{f}(U_0)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

(c)  $\tilde{f}^{-1} : \tilde{f}(U_0) \rightarrow U_0$  es diferenciable.



Sea  $U_p = \tilde{\varphi}^{-1}(U_0)$ , entonces  $U_p$  es una vecindad abierta de  $p$  en  $M$ .

$f|_{U_p}$  es inyectiva:- En efecto, si  $p$  y  $q$  son elementos de  $U_p$  tales que  $f(p) = f(q)$ , entonces  $\psi(f(p)) = \psi(f(q))$ ; luego  $\psi \circ f(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(p))) = \psi \circ f(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(q)))$ ; así  $\tilde{f}(\varphi(p)) = \tilde{f}(\varphi(q))$ .

Por (a)  $\tilde{f}|_{U_0}$  es inyectiva y  $\varphi(p), \varphi(q) \in U_0$ , resulta que  $\varphi(p) = \varphi(q)$ ; de donde  $p = q$ .

$f(U_p)$  es abierto en  $N$ :- En efecto,  $\tilde{f}(U_0)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  por (b) y como  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , se tiene que:

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(U_0) = \psi \circ f(\tilde{\varphi}^{-1}(U_0)) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n,$$

es decir  $\psi \circ f(U_p)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $\psi^{-1} \circ \psi \circ f(U_p) = f(U_p)$  es abierto en  $N$ .

$f^{-1} : f(U_p) \rightarrow U_p$  es diferenciable:- En efecto, como

$$\tilde{f}^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}$$

$$= \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} \quad \text{es diferenciable}$$

por (c), se tiene que  $f^{-1} : f(U_p) \rightarrow U_p$  también lo es.

Luego se probó que existe  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$  tal que  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto  $f(U_p)$  de  $N$ .

DEFINICION 1.2 Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un conjunto  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  de funciones diferenciables definidas en alguna vecindad de  $p \in M$ , se llama un conjunto INDEPENDIENTE en  $p$ , si y sólo si las diferenciales  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_n$  forman un conjunto linealmente independiente en  $T_p^*M$ .

COROLARIO 1.3 Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un conjunto independiente de funciones en  $p \in M$ . Entonces las funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  forman un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración : Sea  $U$  un abierto de  $M$  que contiene a  $p$  y en el cual están definidas las funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

Definimos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\forall q \in U \quad \varphi(q) = (\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q))$ , entonces  $\varphi$  es una función diferenciable en  $U$ . Por otro

lado, la aplicación dual,  $(\delta\varphi)_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}^*\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p^*M$  es tal que  $\forall i = 1, \dots, n$   $(\delta\varphi)_{\varphi(p)}(d\bar{\pi}_i) = d(\bar{\pi}_i \circ \varphi) = d\varphi_i$ .

Como  $\{d\bar{\pi}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es base de  $T_{\varphi(p)}^*\mathbb{R}^n$  y  $\{d\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es linealmente independiente en  $T_p^*M$  y lo genera,  $\{d\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es base en  $T_p^*M$ . Es decir,  $(\delta\varphi)_{\varphi(p)}$  lleva una base en otra base; así,  $(\delta\varphi)_{\varphi(p)}$  es un isomorfismo; de donde se tiene que  $(d\varphi)_p$  es un isomorfismo. Por el teorema 1.1, existe  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$  tal que  $\varphi : U_p \longrightarrow \varphi(U_p)$  es un difeomorfismo sobre el abierto  $\varphi(U_p)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $(U_p, \varphi)$  es una carta local alrededor de  $p$ ; de donde  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  forman un sistema de coordenadas en  $U_p$ .

COROLARIO 1.4 Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  con  $m < n$  un conjunto independiente de funciones en  $p \in M$ . Entonces  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  forman parte de un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Sea  $(U, \psi)$  una carta local alrededor de  $p$ ,  $\psi$  con funciones coordenadas  $\psi_1, \dots, \psi_n$  y tal que las funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  están definidas en  $U$ . Entonces

$$\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_m, d\psi_1, \dots, d\psi_n\} \text{ genera a } T_p^*M.$$

Escojamos  $n-m$  de las funciones  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , digamos

$$\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_{n-m}} \text{ de tal manera que}$$

$$\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_m, d\psi_{i_1}, \dots, d\psi_{i_{n-m}}\} \text{ sea una base de } T_p^*M. \text{ En-}$$

tonces  $\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_m, d\psi_{i_1}, \dots, d\psi_{i_{n-m}}\}$  es linealmente independiente en  $T_p^*M$ , así  $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_{n-m}}$  forman un

conjunto independiente en  $p \in M$ . Por Corolario 1.3,

$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_{n-m}}$  forman un sistema de coor-

denadas en una vecindad abierta de  $p$ ; luego  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  forma parte de un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

COROLARIO 1.5 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables,

$f: M \rightarrow N$  una función diferenciable,  $p \in M$  tal que  $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es suryectiva y  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $f(p)$ . Entonces las funciones  $\varphi_1 \circ f, \dots, \varphi_n \circ f$  forman parte de un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Como  $(df)_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es suryectiva, la aplicación dual  $(\delta f)_{f(p)}: T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  es inyectiva; en efecto, si  $w, w' \in T_{f(p)}^* N$  son tales que  $(\delta f)_{f(p)}(w) = (\delta f)_{f(p)}(w')$ , entonces,  $\forall v \in T_p M$ ,  $(\delta f)_{f(p)}(w)(v) = (\delta f)_{f(p)}(w')(v)$ ,

$$\text{luego } w((df)_p(v)) = w'((df)_p(v)).$$

Como  $(df)_p$  es suryectiva, resulta que

$$w((df)_p(v)) = w'((df)_p(v)), \quad \forall (df)_p(v) \in T_{f(p)} N;$$

de allí que  $w = w'$ .

Ahora bien,  $\{d\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es un conjunto independiente

en  $T_{f(p)}^*N$  y  $(\delta f)_{f(p)}$  es inyectiva, es decir, lleva conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes y  $(\delta f)_{f(p)}(d\varphi_i) = d(\varphi_i \circ f)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; entonces  $\{d(\varphi_i \circ f) / i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $T_p^*M$ ; luego  $\{\varphi_i \circ f / i = 1, \dots, n\}$  es un conjunto independiente en  $p$ . Por Corolario 1.4, las funciones  $\varphi_1 \circ f, \dots, \varphi_n \circ f$  forman parte de un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

COROLARIO 1.6 Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  funciones diferenciables en una vecindad abierta de  $p \in M$  tal que  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_k$  generan  $T_p^*M$ . Entonces un subconjunto del conjunto  $\{\varphi_i / 1 \leq i \leq k\}$  forma un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Escojamos un subconjunto del conjunto  $\{\varphi_i / 1 \leq i \leq k\}$ , digamos  $\{\varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_n}\}$  de tal manera que el conjunto  $\{d\varphi_{k_1}, \dots, d\varphi_{k_n}\}$  sea base de  $T_p^*M$ . Entonces  $\{d\varphi_{k_1}, \dots, d\varphi_{k_n}\}$  es un conjunto linealmente independiente en  $T_p^*M$ ; es decir,  $\{\varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_n}\}$  es un conjunto independiente en  $p$ . Por Corolario 1.3, el conjunto  $\{\varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_n}\}$  forma un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

COROLARIO 1.7 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables,

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable,  $p \in M$  tal que  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es inyectiva y  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $f(p)$ . Entonces un subconjunto del conjunto  $\{\varphi_i \circ f / i = 1, 2, \dots, n\}$  forma un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Como  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es inyectiva, existe  $(df)^{-1} : (df)_p(T_p M) \longrightarrow T_p M$ , la cual podemos extender a  $T_{f(p)} N$ . Sea  $h \in T_p^* M$  y consideremos la aplicación dual  $(\delta f)_{f(p)} : T_{f(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M$ , entonces  $\forall w \in T_p M$

$$\begin{aligned} (\delta f)_{f(p)}(h \circ (df)^{-1})(w) &= h((df)^{-1}(df(w))) \\ &= h(w), \end{aligned}$$

así:  $h = (\delta f)_{f(p)}(h \circ (df)^{-1})$  con

$h \circ (df)^{-1} \in T_{f(p)}^* N$ ; de donde resulta que

$(\delta f)_{f(p)}$  es suryectiva; es decir lleva generadores en generadores. Como  $\{d\varphi_i\}_{1 \leq i \leq n}$  genera a  $T_{f(p)}^* N$  y

$$(\delta f)_{f(p)}(d\varphi_i) = d(\varphi_i \circ f) \text{ para } i = 1, \dots, n;$$

el conjunto  $\{d(\varphi_i \circ f) / i = 1, \dots, n\}$  genera a  $T_p^* M$ . Por

Corolario 1.6, un subconjunto del conjunto

$$\{\varphi_i \circ f / i = 1, \dots, n\}$$

forma un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

DEFINICION 1.8 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente,  $f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable y  $p \in M$ . Definimos el Rango de  $f$  en  $p$ , el cual denotamos por  $\text{rg}_p f$ , como el número natural:

$$\text{rg}_p f = \text{rg}((df)_p).$$

TEOREMA 1.9 (Del Rango).

Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$  respectivamente,  $f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable,  $p \in M$  tal que  $\text{rg}_p f = r$ . Entonces existen  $(U_*, \varphi_*)$  y  $(V_*, \psi_*)$  cartas locales alrededor de  $p$  y  $f(p)$  respectivamente tales que

$$\psi_* \circ f \circ \varphi_*^{-1} : \varphi_*(U_*) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi_*(V_*) \subset \mathbb{R}^n$$

es diferenciable y

$$(\psi_* \circ f \circ \varphi_*^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0), \\ \forall (x_1, \dots, x_m) \in \varphi_*(U_*)$$

Demostración: Sea  $p \in M$ . Como  $f$  es diferenciable en  $p$ , existen  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  cartas locales alrededor de  $p$  y  $f(p)$  respectivamente, con  $f(U) \subset V$  y tal que

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es di-}$$

ferenciable;  $\varphi$  y  $\psi$  escogidas de manera tal que  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$  y  $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $\tilde{f} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$  tal que  $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U)$ ,  $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_n(x))$ , donde  $\forall i = 1, \dots, n$   $\tilde{f}_i = \bar{\pi}_i \circ \tilde{f}$  con  $\bar{\pi}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  la proyección canónica sobre el  $i$ -ésimo

simo factor. La matriz Jacobiana de  $f$  en  $p$  es

$$J(f_p) = \left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} \Big|_o \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Como  $\text{rg}_p f = r$ , existe una submatriz de  $J(f_p)$  no singular en  $o \in \mathbb{R}^m$ , la cual podemos considerar sin pérdida de generalidad, como la matriz formada por las  $r$  primeras filas y las  $r$  primeras columnas de la matriz  $J(f_p)$ , es decir, la matriz

$$\left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} \Big|_o \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

Sea  $h : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U)$   
 $h(x) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m)$ .  $h$  es una función diferenciable y la matriz Jacobiana de  $h$  en  $o \in \mathbb{R}^m$  es

$$J(h_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} \Big|_o & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_r} \Big|_o \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_{r+1}} \Big|_o & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_m} \Big|_o \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_1} \Big|_o & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_r} \Big|_o \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_{r+1}} \Big|_o & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial x_m} \Big|_o \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\det(J(h_o)) = \det \left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} \Big|_o \right)_{1 \leq i, j \leq r}$ , el cual es distinto de cero; por Teorema 1.1, existe  $U_o \subset \varphi(U)$  vecindad abierta de  $\varphi(p) = o \in \mathbb{R}^m$  tal que  $h : U_o \longrightarrow h(U_o)$  es un difeomorfismo sobre el abierto  $h(U_o)$  de  $\mathbb{R}^m$ . Luego

$h \circ \varphi: U \longrightarrow h(U_0)$  es un difeomorfismo. Por otro lado, como  $h$  es un difeomorfismo, tiene sentido considerar

$$g = \tilde{f} \circ h^{-1}: h(U_0) \longrightarrow \Psi(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

Además como  $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_n(x))$  y

$$h(x) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m) \text{ para}$$

$x = (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , si hacemos

$$(z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_m) = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m),$$

donde  $(z_1, \dots, z_m) \in h(U_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} g(z_1, \dots, z_m) &= (\tilde{f} \circ h^{-1})(z_1, \dots, z_m) \\ &= \tilde{f}(h^{-1}(z_1, \dots, z_m)) \\ &= \tilde{f}(x_1, \dots, x_m) \\ &= (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_r(x), \tilde{f}_{r+1}(x), \dots, \tilde{f}_n(x)) \\ &= (z_1, \dots, z_r, \tilde{f}_{r+1}(x), \dots, \tilde{f}_n(x)) \end{aligned}$$

Pero  $\forall r+1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x) &= (\bar{\pi}_i \circ \tilde{f})(x) \\ &= \bar{\pi}_i(g \circ h(x)) \\ &= \bar{\pi}_i \circ g(h(x)) \\ &= \bar{\pi}_i \circ g(\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_{r+1}(x), \dots, x_m) \\ &= \bar{\pi}_i(g(z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_m)) \\ &= g_i(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Así  $\forall z = (z_1, \dots, z_m)$ ,  $g(z) = (z_1, \dots, z_r, g_{r+1}(z), \dots, g_n(z))$ .

$g$  es una función diferenciable y la matriz Jacobiana de  $g$  en  $o \in \mathbb{R}^m$  es

$$J(g_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \cdot & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_1} \Big|_o & \dots & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_r} \Big|_o & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \Big|_o & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_m} \Big|_o \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial z_1} \Big|_o & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial z_r} \Big|_o & \frac{\partial g_n}{\partial z_{r+1}} \Big|_o & \frac{\partial g_n}{\partial z_m} \Big|_o \end{pmatrix}$$

Como  $\text{rg}(\tilde{f}) = r$  en una vecindad del origen y

$$\text{rg}(\tilde{f}) = \text{rg}(g)$$

$$= \text{rg}(J(g_0)), \text{ se tiene que}$$

$$\text{rg}(J(g_0)) = r \text{ y por tanto la matriz } \left( \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right)_{\substack{r+1 \leq i \leq n \\ r+1 \leq j \leq m}} \text{ se}$$

anula en dicha vecindad del origen; es decir:

$$(*) \quad \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \Big|_0 = 0 \quad \forall \quad r+1 \leq i \leq n, \quad r+1 \leq j \leq m \text{ en esa}$$

vecindad. Sea ahora  $\Phi: \Psi(V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \Psi(V),$$

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - g_{r+1}(y_1, \dots, y_r, 0, 0, \dots, 0), \dots, y_n - g_n(y_1, \dots, y_r, 0, 0, \dots, 0)).$$

$\Phi$  es una función diferenciable y su matriz Jacobiana en  $0 \in \mathbb{R}^n$  es

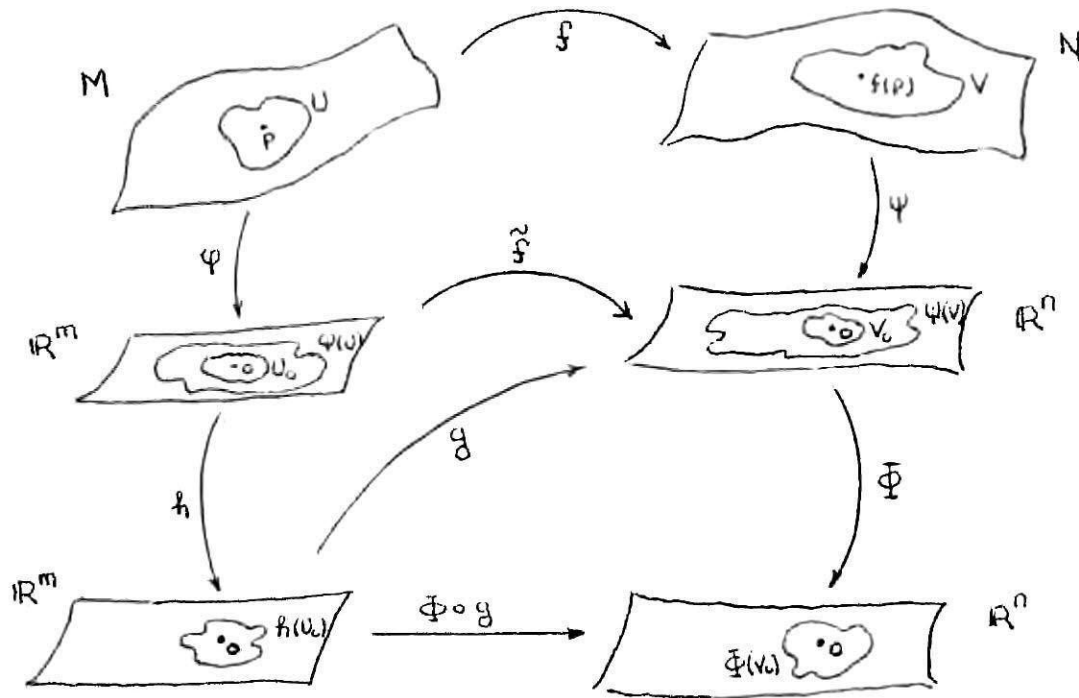
$$J(\Phi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \\ & & & ? & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Luego  $\det(J(\Phi_0)) = 1$ ; por Teorema 1.1, existe  $V_0 \subset \Psi(V)$  vecindad abierta de  $\Psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Phi: V_0 \longrightarrow \Phi(V_0)$  es un difeomorfismo sobre el abierto  $\Phi(V_0)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Así,

$$\Phi \circ \psi: V \longrightarrow \Phi(V_0) \text{ es un difeomorfismo.}$$

Ahora,  $\Phi \circ \tilde{f} \circ h^{-1}: h(U_0) \longrightarrow \Phi(V_0)$  es diferenciable, de allí que  $\Phi \circ \tilde{f} \circ h^{-1} = \Phi \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ h^{-1}$ ;

es decir,  $\tilde{\Phi} \circ \tilde{f} \circ h^{-1} = (\Phi \circ \Psi) \circ f \circ (h \circ \varphi)^{-1}$  es diferenciable.



Pero  $\tilde{\Phi} \circ \tilde{f} \circ h^{-1} = \tilde{\Phi} \circ g$ , así  $\forall z = (z_1, \dots, z_m) \in h(U_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \circ g(z_1, \dots, z_m) &= \tilde{\Phi}(g(z_1, \dots, z_m)) \\ &= \tilde{\Phi}(z_1, \dots, z_r, g_{r+1}(z), \dots, g_n(z)) \\ &= (z_1, \dots, z_r, g_{r+1}(z) - g_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0), \\ &\quad \dots, g_n(z) - g_n(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)). \end{aligned}$$

Si tomamos  $|z_j| < \epsilon$ ,  $\forall 1 \leq j \leq m$ , entonces por (\*)

$$g_i(z_1, \dots, z_m) - g_i(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) = 0, \quad \forall r+1 \leq i \leq n.$$

Luego tomando  $\psi_* = \tilde{\Phi} \circ \psi$ ,  $\varphi_* = h \circ \varphi$ ,  $U_* = h(U_0)$  y

$V_* = \psi(V_0)$  se tiene el teorema.

**DEFINICION 1.10** Sean M y N variedades diferenciables y

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable, en-

tonces:

(a)  $f : M \rightarrow N$  se dice que es una INMERSION DIFEOMORFICA si y sólo si,  $f(M)$  es una subvariedad diferenciable de  $N$  y  $f : M \rightarrow f(M)$  es un difeomorfismo.

(b)  $f : M \rightarrow N$  se dice que es una INMERSION si y sólo si,  $\forall p \in M$ , existe  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$  tal que  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es una inmersión difeomórfica.

PROPOSICION 1.11 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable, entonces,  $f$  es una Inmersión si y sólo si  $\forall p \in M$ ,  $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es Inyectiva.

Demostración: Supongamos que  $f$  es una inmersión y sea  $p \in M$ , entonces existe  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$  tal que  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es una Inmersión Difeomórfica; es decir,  $f(U_p)$  es una subvariedad diferenciable de  $N$  y  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es un difeomorfismo.

Consideremos  $(df)_p : T_p U_p = T_p M \rightarrow T_{f(p)} f(U_p) \subset T_{f(p)} N$ .

Como  $f : U_p \rightarrow f(U_p)$  es un difeomorfismo, de las relaciones:

$$\begin{aligned} (df \circ df^{-1})_{f(p)} &= d(f \circ f^{-1})_{f(p)} \\ &= \text{Id}_{T_{f(p)} f(U_p)} \\ \text{y } (df^{-1} \circ df)_p &= d(f^{-1} \circ f)_p \\ &= \text{Id}_{T_p M} \end{aligned}$$

se tiene que  $(df)_p : T_p U_p \longrightarrow T_{f(p)} f(U_p)$  es un isomorfismo ; luego  $\forall p \in M$ ,  $(df)_p$  es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que  $\forall p \in M$ ,  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es inyectiva y sea  $q \in M$ , entonces  $(df)_q : T_q M \longrightarrow (df)_q(T_q M)$  es un isomorfismo y como  $f : M \longrightarrow N$  es diferenciable, por Teorema 1.1, existe  $U_q$  vecindad abierta de  $q$  en  $M$  tal que  $f : U_q \longrightarrow f(U_q)$  es un difeomorfismo sobre el conjunto abierto  $f(U_q)$  de  $N$ . Pero  $f(U_q)$  es una subvariedad de  $N$  pues es un conjunto abierto en  $N$ . Luego  $f : U_q \longrightarrow f(U_q)$  es una Inmersión Difeomórfica y por tanto  $f$  es una Inmersión.

DEFINICION 1.12 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable.  $f$  se dice que es una SUBMERSION si y sólo si  $\forall p \in M$ ,  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es suryectiva.

COROLARIO 1.13 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables,

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable,  $p \in M$  y  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un sistema de coordenadas en una vecindad de  $f(p)$ . Si  $f$  es una Inmersión, entonces un subconjunto del conjunto  $\{\varphi_i \circ f / 1 \leq i \leq n\}$  forma un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Es inmediato, aplicando la proposición 1.11 y el corolario 1.7 .

COROLARIO 1.14 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables,

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable,  $p \in M$

y  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un sistema de coordenadas en una vecindad de  $f(p)$ . Si  $f$  es una Submersión, entonces las funciones  $\varphi_1 \circ f, \dots, \varphi_n \circ f$  forman parte de un sistema de coordenadas en una vecindad abierta de  $p$ .

Demostración: Es inmediato aplicando la definición 1.12 y el corolario 1.5 .

DEFINICION 1.15 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable, entonces:

(a) Un punto  $p \in M$  se dice que es un PUNTO REGULAR si y sólo si  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es suryectiva.

(b) Un punto  $q \in N$  se dice que es un VALOR REGULAR de  $f$  si y sólo si para cada  $p \in f^{-1}(q)$ ,  $p$  es un punto regular.

OBSERVACION 1.16 Si  $q \in N$  es tal que  $f^{-1}(q) = \emptyset$ , entonces  $q$  es un valor regular de  $f$ , pues si suponemos que  $q$  no es valor regular de  $f$ , entonces existe  $p \in f^{-1}(q)$  tal que  $(df)_p$  no es suryectiva; pero entonces  $p \in \emptyset$ , lo cual es una contradicción.

COROLARIO 1.17 Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y

$f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable, entonces:

(a)  $f$  es una Submersión si y sólo si  $\forall p \in M$ ,

$p$  es un punto regular.

(b)  $f$  es una Submersión si y sólo si,  $\forall q \in N$ ,  
 $q$  es un valor regular de  $f$ .

Demostración: (a) Se deduce inmediatamente de las definiciones 1.12 y 1.15.

(b) Se deduce de Corolario 1.17(a) y de la definición 1.15(b).

TEOREMA 1.18 ( Construcción de Subvariedades ).

Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensiones  $n+k$  y  $n$  respectivamente y  $f : M \longrightarrow N$  una función diferenciable. Si  $q \in N$  es un valor regular de  $f$ , con  $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ , entonces  $f^{-1}(q)$  es una Subvariedad diferenciable de  $M$ , de Codimensión  $n$ .

Demostración: Sea  $q \in N$  un valor regular de  $f$  y  $p \in f^{-1}(q)$ , entonces  $p$  es un punto regular y por tanto,  $(df)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$  es suryectiva; luego  $\text{rg}_p f = \text{rg}((df)_p)$   
 $= n$  en una vecindad de  $p$ .

Por el Teorema 1.9, existen  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  cartas locales alrededor de  $p$  y  $q$  respectivamente tales que:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es una}$$

función diferenciable tal que  $\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \in \varphi(U)$

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n), \text{ donde } \varphi \text{ y } \psi \text{ son}$$

escogidas de tal manera que  $\varphi(p) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k}$  y

$\psi(q) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}^{-1}(0) &= (\varphi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})^{-1}(0) \\
 &= (\varphi \circ f^{-1} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(0) \\
 &= \varphi(f^{-1}(q))
 \end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}^{-1}(0) &= \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = x \in \mathbb{R}^{n+k} / \tilde{f}(x) = 0 \} \\
 &= \{ (x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} / (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \} \\
 &= \{ (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \} \\
 &= 0 \times \mathbb{R}^k \\
 &= \mathbb{R}^k.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{De allí que } \varphi(f^{-1}(q) \cap U) &= \varphi(f^{-1}(q)) \cap \varphi(U) \\
 &= \tilde{f}^{-1}(0) \cap \varphi(U) \\
 &= \mathbb{R}^k \cap \varphi(U).
 \end{aligned}$$

Luego  $f^{-1}(q)$  es una Subvariedad diferenciable de dimensión  $k$  y así,  $\text{Codim}(f^{-1}(q)) = n+k-k = n$ .

### EJEMPLO 1.11 ( VARIEDAD DE STIEFEL )

Consideremos el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ , entonces un  $k$ -MARCO ORTONORMAL de  $\mathbb{R}^n$  es una colección ordenada de  $k$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x^1, \dots, x^k)$  tal que  $\langle x^i, x^j \rangle = \delta_{ij}$ ,

$$\forall i, j = 1, \dots, k. \text{ Sea } V_{n,k} = \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{nk} / \langle x^i, x^j \rangle = \delta_{i,j}$$

$\forall i, j = 1, \dots, k \}$ . Para  $i \leq j$  definimos las funciones

$$f_{ij}; \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$\forall (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, f_{ij}(x^1, \dots, x^k) = \begin{cases} \langle x^i, x^j \rangle & \text{si } i \neq j \\ \langle x^i, x^j \rangle - 1 & \text{si } i = j \end{cases};$$

quedan definidas así  $\frac{k(k+1)}{2}$  funciones diferenciables de valor real. Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  definida  $k$ -veces  $\frac{k(k+1)}{2}$  veces

por  $\forall (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ,  $f(x^1, \dots, x^k) = (f_{ij}(x^1, \dots, x^k))_{i \leq j}$ .

Entonces  $f$  es una función diferenciable y

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n / f(x^1, \dots, x^k) = (0, \dots, 0) \} \\ &= \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n / (f_{ij}(x))_{i \leq j} = (0, \dots, 0) \} \\ &= \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n / f_{ij}(x) = (0, \dots, 0) \ 1 \leq i, j \leq k \} \\ &= \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n / \begin{array}{l} \langle x^i, x^j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \\ \langle x^i, x^j \rangle - 1 = 0 \text{ si } i = j \end{array} \right\} \\ &= \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n / \langle x^i, x^j \rangle = \delta_{ij} \ 1 \leq i, j \leq k \} \\ &= V_{n,k} \end{aligned}$$

Sea entonces  $x \in V_{n,k}$ ,  $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{nk}$  y  $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ; la matriz Jacobiana de  $f$  en  $x \in V_{n,k}$  es

$$J(f_x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1^1/x} \dots \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n^1/x} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1^2/x} \dots \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n^2/x} & \dots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1^k/x} \dots \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n^k/x} & \dots & \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_1^i/x} \dots \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_n^i/x} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1^1/x} \dots \frac{\partial f_{12}}{\partial x_n^1/x} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1^2/x} \dots \frac{\partial f_{12}}{\partial x_n^2/x} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1^k/x} \dots \frac{\partial f_{12}}{\partial x_n^k/x} & \dots & \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_1^i/x} \dots \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_n^i/x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{in}}{\partial x_1^1/x} \dots \frac{\partial f_{in}}{\partial x_n^1/x} & \frac{\partial f_{in}}{\partial x_1^2/x} \dots \frac{\partial f_{in}}{\partial x_n^2/x} & \dots & \frac{\partial f_{in}}{\partial x_1^k/x} \dots \frac{\partial f_{in}}{\partial x_n^k/x} & \dots & \frac{\partial f_{in}}{\partial x_1^i/x} \dots \frac{\partial f_{in}}{\partial x_n^i/x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_1^1/x} \dots \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_n^1/x} & \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_1^2/x} \dots \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_n^2/x} & \dots & \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_1^k/x} \dots \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_n^k/x} & \dots & \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_1^i/x} \dots \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_n^i/x} \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz de  $\frac{k(k+1)}{2}$  filas y  $nk$  columnas. Es-

cribamos ahora esta matriz en una forma más sencilla, donde la raya "—" indica que esos elementos no son cero en determinada fila y "○" indica ceros en la fila en que se encuentra; así tenemos:

$$J(f_x) = \begin{pmatrix} f_{11} & \text{---} & \text{○} & \text{○} & \dots & \text{○} \\ f_{12} & \text{---} & \text{---} & \text{○} & \dots & \text{○} \\ f_{13} & \text{---} & \text{○} & \text{---} & \dots & \text{○} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1k} & \text{---} & \text{○} & \text{○} & \dots & \text{---} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{kk} & \text{○} & \text{○} & \text{○} & \dots & \text{---} \\ & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^k} \end{pmatrix}$$

La matriz  $J(f_x)$  tiene entonces  $\frac{k(k+1)}{2}$  filas linealmente independientes, de allí que  $\text{rg}_x f = \text{rg}((df)_x) = \frac{k(k+1)}{2}$ ; es decir  $(df)_x : T_x \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  es suryectiva; luego  $\forall x \in V_{n,k}$ ,  $(df)_x$  es suryectiva, esto es,  $V_{n,k}$  es un conjunto de puntos regulares y como  $V_{n,k} = f^{-1}(0)$ , 0 es un valor regular de  $f$ ; por Teorema 1.18,  $V_{n,k}$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  de codimensión  $\frac{k(k+1)}{2}$ .  $V_{n,k}$  se llama **VARIEDAD de STIEFEL**.

CAPITULO 2  
SISTEMAS DINAMICOS

En este Capítulo se definen los conceptos de Curva Integral, Flujo Global, Flujo Local y Orbita. Seguidamente se demuestra el importante Teorema de Existencia de Flujo Global y se caracterizan las Líneas de Flujo.

DEFINICION 2.1 Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X : M \rightarrow TM$  un campo vectorial diferenciable. Una Curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es una CURVA INTEGRAL de  $X$ , si  $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$(d\alpha)_s \left( \frac{d}{dt} / s \right) = X(\alpha(s)), \text{ donde } \frac{d}{dt} / s \in T_s \mathbb{R}$$

es una base.

DEFINICION 2.2 Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una aplicación diferenciable  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  se llama SISTEMA DINAMICO o FLUJO GLOBAL en  $M$ , si  $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall p \in M$  se tiene que

- (a)  $\tilde{\Phi}(0, p) = p$
- (b)  $\tilde{\Phi}(t, \tilde{\Phi}(s, p)) = \tilde{\Phi}(t+s, p)$

Observación 2.3 Fijemos  $t \in \mathbb{R}$  y consideremos la aplicación  $\tilde{\Phi}_t : M \rightarrow M$  definida por  $\forall p \in M, \tilde{\Phi}_t(p) = \tilde{\Phi}(t, p)$ ; entonces para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\Phi}_t$  es una función diferenciable y podemos pensar en la familia de aplicaciones diferenciables  $\{\tilde{\Phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de parámetro real. Además como

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(p) &= \tilde{\Phi}(0, p) \\ &= p \\ &= \text{Id}_M(p), \quad \forall p \in M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \quad \bar{\Phi}_{t+s}(p) &= \bar{\Phi}(t+s, p) \\
&= \bar{\Phi}(t, \bar{\Phi}(s, p)) \\
&= \bar{\Phi}(t, \bar{\Phi}_s(p)) \\
&= \bar{\Phi}_t(\bar{\Phi}_s(p)) \\
&= (\bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s)(p) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ y } \forall p \in M.
\end{aligned}$$

Luego (a) y (b) de la definición 2.2 quedarían

$$(a') \bar{\Phi}_0 = \text{Id}_M$$

$$(b') \bar{\Phi}_{t+s} = \bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s$$

PROPOSICION 2.4. La familia de funciones diferenciables de parámetro real  $\{\bar{\Phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es una familia de difeomorfismos.

Demostración: En efecto,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_{-t} = \bar{\Phi}_0$$

$$\text{y } \bar{\Phi}_{-t} \circ \bar{\Phi}_t = \bar{\Phi}_0 ; \text{ así } \bar{\Phi}_t \text{ es una biyec-}$$

ción y para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\bar{\Phi}_t)^{-1} = \bar{\Phi}_{-t}$  es una función diferenciable, de allí que  $\{\bar{\Phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es una familia de difeomorfismos.

PROPOSICION 2.5 Sean  $M$  una variedad diferenciable y

$\bar{\Phi}: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  una función diferenciable;

$\bar{\Phi}$  es un flujo Global en  $M$  si y sólo si la

función  $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Dif}(M)$  definida por  $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Psi(t) = \bar{\Phi}_t$  es un homomorfismo del grupo abe-

liano  $(\mathbb{R}, +)$  en el grupo  $(\text{Dif}(M), \circ)$  de los

difeomorfismos de  $M$  en  $M$ .

Demostración: Supongamos que  $\bar{\Phi}$  es un flujo Global en  $M$  y

$$\begin{aligned} \text{sean } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ entonces } \Psi(t_1+t_2) &= \bar{\Phi}_{t_1+t_2} \\ &= \bar{\Phi}_{t_1} \circ \bar{\Phi}_{t_2} \\ &= \Psi(t_1) \circ \Psi(t_2), \text{ luego} \end{aligned}$$

$\Psi$  es un homomorfismo de  $(\mathbb{R}, +)$  en  $(\text{Dif}(M), \circ)$ .

Recíprocamente, sea  $\Psi: \mathbb{R} \longrightarrow \text{Dif}(M)$  definido por  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$\Psi(t) = \bar{\Phi}_t$  un homomorfismo, definimos  $\bar{\Phi}: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  por

$$\forall (t, p) \in \mathbb{R} \times M, \quad \bar{\Phi}(t, p) = \Psi(t)(p); \text{ entonces}$$

$$\bar{\Phi}(0, p) = \Psi(0)(p)$$

$$= p$$

$$\begin{aligned} \text{y } \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in M, \quad \bar{\Phi}(t+s, p) &= \Psi(t+s)(p) \\ &= \Psi(t) \circ \Psi(s)(p) \\ &= \Psi(t)(\bar{\Phi}(s, p)) \\ &= \bar{\Phi}(t, \bar{\Phi}(s, p)). \end{aligned}$$

Como  $\bar{\Phi}$  es una función diferenciable,  $\bar{\Phi}$  es un flujo Global en  $M$ .

Observación 2.4 Veamos un punto de vista diferente que se obtiene considerando el flujo global  $\bar{\Phi}: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  como una familia de curvas diferenciables de  $\mathbb{R}$  en  $M$ , con parámetro en  $M$ . Fijemos  $p \in M$  y consideremos la aplicación

$\alpha_p: \mathbb{R} \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_p(t) = \bar{\Phi}(t, p), \forall t \in \mathbb{R}$ . Entonces para cada  $p$  en  $M$ ,  $\alpha_p$  es una curva diferenciable y se obtiene la familia de curvas diferenciables  $\{\alpha_p\}_{p \in M}$  de parámetro en  $M$ , llamadas CURVAS DIFERENCIABLES del FLUJO  $\bar{\Phi}$ .

DEFINICION 2.5 Sean  $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  un flujo Global y  $p \in M$ . La curva diferenciable  $\alpha_p : \mathbb{R} \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_p(t) = \Phi(t, p)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , se llama LINEA de FLUJO y  $\alpha_p(\mathbb{R})$  se llama ORBITA en  $M$  que pasa por  $p$ .

Observación 2.6 El hecho de que  $\alpha_p(\mathbb{R})$  se llama Orbita en  $M$  que pasa por  $p$  se justifica porque

$$\begin{aligned}\alpha_p(0) &= \Phi(0, p) \\ &= p\end{aligned}$$

PROPOSICION 2.7 Sean  $M$  una variedad diferenciable y

$\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  un flujo Global, entonces por cada punto de  $M$  pasa una única Orbita.

Demostración: En  $M$  consideremos la relación binaria " $\sim$ ", definida por  $\forall p, q \in M$ ,  $p \sim q$  si y sólo si  $\exists t \in \mathbb{R}$  tal que  $p = \Phi_t(q)$ .

" $\sim$ " es una relación de equivalencia en  $M$ :

(a) " $\sim$ " es Reflexiva pues  $\exists 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\Phi_0(p) = \Phi(0, p)$   
 $= p$ ,

es decir  $p \sim p$ .

(b) " $\sim$ " es Simétrica pues

$$\begin{aligned}p \sim q &\text{ si y sólo si } \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } p = \Phi_t(q) \\ &\text{ si y sólo si } \exists -t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \Phi_{-t}(p) = \Phi_0(q) \\ &= q\end{aligned}$$

si y sólo si  $q \sim p$ .

(c) " $\sim$ " es Transitiva pues  $p \sim q$  y  $q \sim h$  implican que existen  $t, s \in \mathbb{R}$  tales que  $p = \Phi_t(q)$  y  $q = \Phi_s(h)$ , luego existen

$t, s \in \mathbb{R}$  tales que  $p = \Phi_t(\Phi_s(h))$ , entonces existe  $t+s \in \mathbb{R}$  tal que  $p = \Phi_{t+s}(h)$ ; de donde  $p \sim h$ .

Sea ahora  $[p]$  la clase de equivalencia de  $p$ , entonces

$$\begin{aligned} [p] &= \{q \in M / p \sim q\} \\ &= \{q \in M / q \sim p\} \\ &= \{q \in M / \exists t \in \mathbb{R}, q = \Phi_t(p)\} \\ &= \{q \in M / \exists t \in \mathbb{R}, q = \alpha_p(t)\} \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \alpha_p(t) \\ &= \alpha_p(\mathbb{R}), \text{ de donde se tiene la} \end{aligned}$$

unicidad.

DEFINICION 2.8 Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ ; una aplicación diferenciable  $\Phi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$  se llama un FLUJO LOCAL en  $M$ , si  $\forall t, s \in (-\epsilon, \epsilon)$  y  $\forall p \in U$  se tiene que:

- (a)  $\Phi(0, p) = p$
- (b)  $\Phi(t, \Phi(s, p)) = \Phi(t+s, p)$  siempre que  $t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Observación 2.9 Fijemos  $p \in U$  y consideremos la aplicación  $\alpha_p: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_p(t) = \Phi(t, p)$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Entonces para cada  $p \in U$ ,  $\alpha_p$  es una curva diferenciable y se obtiene la familia de curvas diferenciables  $\{\alpha_p\}_{p \in U}$  de parámetro en  $U$ , llamadas Curvas diferenciables del Flujo Local  $\Phi$ .

DEFINICION 2.10 Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $p \in U$  y  $\Phi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$  un flujo Local. La cur-

va diferenciable  $\alpha_p : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_p(t) = \bar{\Phi}(t, p)$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$  se llama LINEA DE FLUJO LOCAL y  $\alpha_p((-\epsilon, \epsilon))$  se llama ORBITA MAXIMAL en  $M$  que pasa por  $p$ .

TEOREMA 2.11 ( De existencia de Flujo Local ).

Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $X : M \longrightarrow TM$  un campo vectorial diferenciable y  $p \in M$  fijo. Entonces existen una vecindad abierta  $U_p$  de  $p$  en  $M$ ,  $\epsilon > 0$  y una única función diferenciable

$$\bar{\Phi} : (-\epsilon, \epsilon) \times U_p \longrightarrow M \text{ tal que}$$

(a)  $\forall q \in U_p$ , la curva diferenciable  $\alpha_q : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_q(t) = \bar{\Phi}(t, q)$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$  es curva Integral de  $X$  con  $\alpha_q(0) = q$  y tal que otra curva Integral en  $M$  cuyo dominio contiene  $0 \in \mathbb{R}$ , coincide en la intersección de los dominios con  $\alpha_q$ .

(b) Las aplicaciones diferenciables  $\bar{\Phi}_t : U_p \longrightarrow M$  definidas para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  por  $\bar{\Phi}_t(q) = \bar{\Phi}(t, q)$

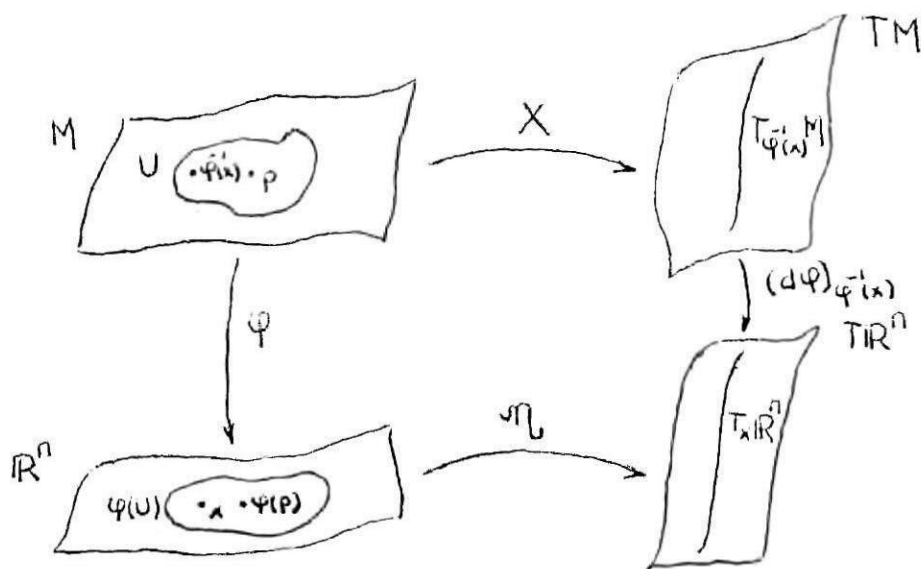
$\forall q \in U_p$  verifican:

$$(b_1) \bar{\Phi}_{t+s} = \bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s \text{ en } \bar{\Phi}_s^{-1}(U_p), \text{ donde } t, s, t+s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

$$(b_2) \bar{\Phi}_{-t} = \bar{\Phi}_t^{-1} \text{ en } \bar{\Phi}_t(U_p) \cap U_p \text{ para cada } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Demostración: Sea  $(U, \varphi)$  una carta local alrededor de  $p$ ,  $\varphi$  con funciones coordenadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Como  $X \in C^\infty(M, TM)$ , entonces  $X/U \in C^\infty(U, TU)$ ; luego existen  $a_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$  tales que  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} / p$ . Por otro lado,  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  es abierto

y  $\varphi(p) = x_0 \in \varphi(U)$ . Definimos  $\eta: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\forall x \in \varphi(U)$   
 $\eta(x) = (d\varphi)_{\varphi^{-1}(x)} \circ X_{\varphi^{-1}(x)}$ , donde  $(d\varphi)_{\varphi^{-1}(x)} : T_{\varphi^{-1}(x)}M \rightarrow T_x\mathbb{R}^n$ ,  
entonces  $\eta \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$ , de allí que existen  $\eta_j \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ ,  
 $j = 1, \dots, n$  tal que  $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} / x_0$ .



Por Teorema de existencia de Flujo Local en  $\mathbb{R}^n$ , existe un conjunto abierto  $U_0 \subset \varphi(U)$  con  $x_0 \in U_0, \epsilon > 0$  y una aplicación diferenciable  $\Psi: (-\epsilon, \epsilon) \times U_0 \rightarrow \varphi(U)$  tal que para cada  $x \in U_0$ ,  $\Psi / (-\epsilon, \epsilon) \times \{x\}$  es una solución del sistema de ecuaciones  $\frac{df_i}{dt} = \eta_i(f_1(t), \dots, f_n(t))$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sujeto a la condición inicial  $f_i(0) = x_i$ ; esto es, si  $\alpha_x: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \varphi(U)$  es definida por  $\alpha_x(t) = \Psi(t, x)$ , entonces  $\forall 1 \leq i \leq n$  se tiene

(A)  $\frac{d}{dt} (\pi_i \circ \alpha_x)(t) = \eta_i(\pi_1 \circ \alpha_x(t), \dots, \pi_n \circ \alpha_x(t)), \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$

(B)  $(\pi_i \circ \alpha_x)(0) = \pi_i(x)$ .

Además  $\alpha_x$  es la única función de  $(-\epsilon, \epsilon)$  en  $\varphi(U)$  que satisface (A) y (B).

$\Psi$  es un FLUJO LOCAL en  $\mathbb{R}^n$ .

En efecto,  $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times U_0 \longrightarrow \varphi(U)$  es diferenciable y además si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_0$ , entonces

$$\begin{aligned} \Psi(0, x) &= (\pi_1 \circ \Psi(0, x), \dots, \pi_n \circ \Psi(0, x)) \\ &= (\pi_1 \circ \alpha_x(0), \dots, \pi_n \circ \alpha_x(0)) \\ &= (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ahora, para  $t = 0$ ,  $\Psi(0, \Psi(s, x)) = \Psi(s, x)$ ; por la unicidad de la solución,  $\Psi(t, \Psi(s, x)) = \Psi(t+s, x)$ ;  $\forall t, s, t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$  y  $x \in U_0$ ; luego  $\Psi_t : U_0 \longrightarrow \Psi_t(U_0)$  definida por  $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$  es un difeomorfismo para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Sea  $U_p = \varphi^{-1}(U_0)$ , entonces  $U_p$  es una vecindad abierta de  $p$  en  $M$ . Definimos  $\Phi_t = \varphi^{-1} \circ \Psi_t \circ \varphi : U_p \longrightarrow M$ , entonces  $\Phi$  es una función diferenciable para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Sea ahora  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U_p \longrightarrow M$  la función definida por

$\Phi(t, q) = \Phi_t(q)$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\forall q \in U_p$ ,  $\Phi$  resulta una función diferenciable y además si  $t, s, t+s \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\begin{aligned} \Phi_{t+s} &= \varphi^{-1} \circ \Psi_{t+s} \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \Psi_t \circ \Psi_s \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \Psi_t \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \Psi_s \circ \varphi \\ &= \Phi_t \circ \Phi_s \text{ en } \Phi_s^{-1}(U_p); \end{aligned}$$

y para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\begin{aligned}\Phi_t^{-1} &= (\varphi^{-1} \circ \Psi_t \circ \varphi)^{-1} \\ &= \varphi^{-1} \circ \Psi_t^{-1} \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \Psi_{-t} \circ \varphi \\ &= \Phi_{-t} \text{ en } \Phi_t(U_p) \cap U_p.\end{aligned}$$

Probaremos que  $\alpha_q: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$  definida por  $\alpha_q(t) = \Phi(t, q)$ ,  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$  es la única curva Integral de  $X$  con  $\alpha_q(0) = q$ .

Supongamos que  $\alpha_q$  es una curva integral de  $X$ , entonces

$$\begin{aligned}\alpha_q(0) &= \Phi(0, q) \\ &= q ; \text{ es decir, de ser curva}\end{aligned}$$

Integral, pasa por  $q$ . Veamos que es una curva Integral:

Como para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \alpha_q)(0) &= \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \Phi(0, q)) \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \Phi_0(q)) \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \varphi^{-1} \circ \Psi_0 \circ \varphi(q)) \\ &= \frac{d}{dt}(\pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \Psi_0 \circ \varphi(q)) \\ &= \frac{d}{dt}(\pi_i \circ \Psi_0(\varphi(q))) \\ &= \frac{d}{dt}(\pi_i \circ \alpha_{\varphi(q)}(0)).\end{aligned}$$

Si  $\varphi(q) = x' = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ , entonces

$$\frac{d}{dt}(\varphi_i \circ \alpha_q(0)) = \eta_i(\pi_1 \circ \alpha_{x'}(0), \dots, \pi_n \circ \alpha_{x'}(0))$$

$$\begin{aligned}
&= \eta_i(\pi_1(x'), \dots, \pi_n(x')) \\
&= \eta_i(x'_1, \dots, x'_n) \\
&= \eta_i(\varphi(q)) \\
&= \pi_i \circ \eta(\varphi(q)) .
\end{aligned}$$

Como  $\eta(\varphi(q)) = (d\varphi)_q \circ X_q$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi(q)) &= (d\varphi)_q \left( \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} /_q \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(q) (d\varphi)_q \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} /_q \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(q) \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\pi_j \circ \varphi)}{\partial \varphi_i} /_q \frac{\partial}{\partial \pi_j} /_{\varphi(q)} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial \pi_i} /_{\varphi(q)} ;
\end{aligned}$$

de allí que  $\pi_i(\eta(\varphi(q))) = a_i(q)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ; de donde

$$\frac{d}{dt} (\varphi_i \circ \alpha_q) = a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n; \text{ así}$$

$\alpha_q$  es una curva Integral de  $X$ .

Además, dos de estas curvas Integrales coinciden en la intersección de sus dominios de definición, pues el conjunto de las  $t$  para la que ambas soluciones coinciden es, por razones de continuidad, cerrado; pero también es abierto. Así queda definida en la unión de todos los intervalos de definición de las curvas Integrales que cumplen  $\alpha_q(0) = q$ , una curva Integral Maximal univocamente determinada. Finalmente, la unicidad de  $\bar{\Phi}$  se sigue de la unicidad local de  $\Psi$ .

**TEOREMA 2.12** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $X : M \rightarrow TM$

un campo vectorial diferenciable de soporte com-

pacto. Entonces existe un único flujo Global determinado por  $X$ .

Demostración: Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $M$  tal que  $\bar{U}$  es compacto y  $\text{Sop}(X) = \bar{U}$ . Sea  $p \in \bar{U}$ , entonces por el teorema 2.11, existen  $U_p$  vecindad abierta de  $p$  en  $M$ ,  $\epsilon_p > 0$  y una única función diferenciable  $\Phi_p : (-\epsilon_p, \epsilon_p) \times U_p \rightarrow M$  tal que se verifican (a) y (b) del teorema antes citado. Luego  $\{U_p\}_{p \in \bar{U}}$  es un cubrimiento abierto de  $\bar{U}$  que es compacto; entonces existe un subcubrimiento abierto finito de  $\{U_p\}_{p \in \bar{U}}$ , digamos  $\{U_{p_i}\}_{1 \leq i \leq k}$  que cubre a  $\bar{U}$ .

Sea ahora  $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \{\epsilon_{p_i}\}$  y  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , definamos

$$\Phi_t : M \rightarrow M \text{ por } \forall q \in M, \Phi_t(q) = \begin{cases} \Phi_{p_i}(t, q) & \text{si } q \in \bigcup_{i=1}^k U_{p_i} \\ q & \text{si } q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{p_i} \end{cases}$$

Resulta entonces que para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\Phi_t$  está bien definida, es única y diferenciable; además si  $q \in \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$ ,

$$\Phi_0(q) = \Phi_{p_i}(0, q)$$

$$= q$$

y si  $q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$ ,  $\Phi_0(q) = q$ ; es decir  $\forall q \in M$ ,  $\Phi_0(q) = q$ , así  $\Phi_0 = \text{Id}_M$ .

Sea ahora  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  definida por  $\forall (t, q) \in \mathbb{R} \times M$ ,

$$\Phi(t, q) = \Phi_t(q), \text{ donde para un entero positivo } n \text{ lo su-$$

ficientemente grande de tal manera que  $t/n \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\Phi_t$

es dada por  $\Phi_t = \Phi_{t/n}^n$ .

$\bar{\Phi}$  está bien definida pues si  $m$  es otro entero positivo lo suficientemente grande tal que  $t/m \in (-\epsilon, \epsilon)$ , entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\Phi}_{t/m})^m &= ((\bar{\Phi}_{t/mn})^n)^m \\ &= (\bar{\Phi}_{t/mn})^{nm} \\ &= (\bar{\Phi}_{t/mn})^{mn} \\ &= ((\bar{\Phi}_{t/mn})^m)^n \\ &= (\bar{\Phi}_{t/n})^n. \end{aligned}$$

Además  $\bar{\Phi}$  es una función diferenciable tal que  $\forall q \in M$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(0, q) &= \bar{\Phi}_0(q) \\ &= \text{Id}_M(q) \\ &= q. \end{aligned}$$

Probaremos ahora que  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s = \bar{\Phi}_{t+s}$ .

Sean  $q \in M$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$  y  $n$  un entero positivo lo suficientemente grande tal que  $(t+s)/n \in (-\epsilon, \epsilon)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}, \quad \bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s(q) &= \bar{\Phi}_{t/n}^n \circ \bar{\Phi}_{s/n}^n(q) \\ &= (\underbrace{\bar{\Phi}_{t/n} \circ \dots \circ \bar{\Phi}_{t/n}}_{n \text{ veces}}) \circ (\underbrace{\bar{\Phi}_{s/n} \circ \dots \circ \bar{\Phi}_{s/n}}_{n \text{ veces}}) \\ &= q \\ &= \bar{\Phi}_{(t+s)/n} \circ \dots \circ \bar{\Phi}_{(t+s)/n}(q) \\ &= \bar{\Phi}_{(t+s)/n}^n(q); \text{ así si} \end{aligned}$$

$$q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}, \quad \bar{\Phi}_t \circ \bar{\Phi}_s(q) = \bar{\Phi}_{t+s}(q).$$

Supongamos que  $q \in \bigcup_{i=1}^k U_{p_i}$ , entonces

$$\begin{aligned}\Phi_t \circ \Phi_s(q) &= \Phi_{t/n}^n \circ \Phi_{s/n}^n(q) \\ &= (\underbrace{\Phi_{t/n} \circ \dots \circ \Phi_{t/n}}_{n \text{ veces}}) \circ (\underbrace{\Phi_{s/n} \circ \dots \circ \Phi_{s/n}}_{n \text{ veces}})(q)\end{aligned}$$

Como  $\forall v, w \in (-\epsilon, \epsilon)$   $\Phi_{v+w} = \Phi_{p_i}((v+w), q)$

$$\begin{aligned}&= \Phi_{p_i}(v, \Phi_{p_i}(w, q)) \\ &= \Phi_v \circ \Phi_w(q), \forall q \in \bigsqcup_{i=1}^k U_{p_i}, \text{ se}\end{aligned}$$

tiene que

$$\begin{aligned}\Phi_t \circ \Phi_s(q) &= (\Phi_{t/n} + \dots + t/n) \circ (\Phi_{s/n} + \dots + s/n)(q) \\ &= \Phi_{(t/n + \dots + t/n) + (s/n + \dots + s/n)}(q) \\ &= \Phi_{(t/n + s/n) + \dots + (t/n + s/n)}(q) \\ &= \Phi_{(t+s)/n + \dots + (t+s)/n}(q) \\ &= \Phi_{(t+s)/n} \circ \dots \circ \Phi_{(t+s)/n}(q) \\ &= \Phi_{(t+s)/n}^n(q) \\ &= \Phi_{t+s}(q).\end{aligned}$$

Luego  $\forall q \in \bigsqcup_{i=1}^k U_{p_i}$ ,  $\Phi_t \circ \Phi_s(q) = \Phi_{t+s}(q)$ . Así  $\forall q \in M$

$$\Phi_t \circ \Phi_s(q) = \Phi_{t+s}(q),$$

es decir  $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ ; por lo tanto  $\Phi$  es un flujo Global en  $M$  determinado por el campo Vectorial  $X$ .

**COROLARIO 2.13** Sean  $M$  una variedad diferenciable Compacta y  $X : M \rightarrow TM$  un campo vectorial diferenciable no trivial. Entonces existe un único flujo Global en  $M$  determinado por  $X$ .

Demostración: Como  $M$  es una variedad diferenciable Compacta y  $X : M \rightarrow M$  es no trivial, el soporte del campo vectorial es compacto; por el teorema 2.12, existe un único flujo Global en  $M$  determinado por  $X$ .

PROPOSICION 2.14 Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $p \in M$

y  $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$  una línea del flujo Global

$\bar{\Phi} : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ . Entonces  $\alpha_p$  es

(a) una Inmersión inyectiva, o bien

(b) una Inmersión periódica. En (b) se dan

los casos:

(b<sub>1</sub>)  $\alpha_p$  es una inmersión y  $\exists s > 0$  tal que  $\alpha_p(t+s) = \alpha_p(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ; o bien

(b<sub>2</sub>)  $\alpha_p$  es constante, es decir,  $\alpha_p(t) = p$   
 $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Demostración: Probaremos primero que  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $d_{\bar{\Phi}_{t_0}}(\dot{\alpha}_p(0)) = \dot{\alpha}_p(t_0)$ .

En efecto, sea  $f \in C^\omega(M, \mathbb{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} d_{\bar{\Phi}_{t_0}}(\dot{\alpha}_p(0))(f) &= \dot{\alpha}_p(0)(f \circ \bar{\Phi}_{t_0}) \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \bar{\Phi}_{t_0}(\alpha_p(0))) \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \bar{\Phi}_{t_0}(p)) \\ &= \frac{d}{dt} (f(\alpha_p(t_0))) \\ &= \dot{\alpha}_p(t_0)(f); \text{ luego} \end{aligned}$$

$$d_{\bar{\Phi}_{t_0}}(\dot{\alpha}_p(0)) = \dot{\alpha}_p(t_0)$$

Como  $\bar{\Phi}_{t_0}$  es un difeomorfismo para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(d\bar{\Phi}_{t_0})_p : T_p M \longrightarrow T_{\bar{\Phi}_{t_0}(p)} M \text{ es un isomor-}$$

fismo. Luego si  $\dot{\alpha}_p(0) \neq 0$ , se tiene que

$$d\bar{\Phi}_{t_0}(\dot{\alpha}_p(0)) = \dot{\alpha}_p(t_0)$$

$$\neq 0, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \text{ es decir,}$$

$\alpha_p$  es una inmersión. Pero si  $\dot{\alpha}_p(0) = 0$ , entonces

$$d\bar{\Phi}_{t_0}(\dot{\alpha}_p(0)) = \dot{\alpha}_p(t_0)$$

$$= 0, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}, \text{ es decir}$$

en este caso,  $\alpha_p$  es constante y  $\alpha_p(t_0) = p, \forall t_0 \in \mathbb{R}$ .

Supongamos entonces que  $\alpha_p$  es una inmersión no inyectiva, es decir,  $\alpha_p$  es una inmersión y existen  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , escogidos tal que  $t_1 < t_2$  y  $\alpha_p(t_1) = \alpha_p(t_2)$ , entonces

$$\bar{\Phi}_{t_1}(p) = \bar{\Phi}_{t_2}(p)$$

$$\text{luego } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \bar{\Phi}_{t-t_1}(\bar{\Phi}_{t_1}(p)) = \bar{\Phi}_{t-t_1}(\bar{\Phi}_{t_2}(p))$$

$$\text{así,} \quad \bar{\Phi}_t(p) = \bar{\Phi}_{t+(t_2-t_1)}(p),$$

$$\text{es decir,} \quad \alpha_p(t) = \alpha_p(t+(t_2-t_1)); \text{ hacien-}$$

do  $s = t_2 - t_1 > 0$ , resulta  $\alpha_p(t) = \alpha_p(t+s), \forall t \in \mathbb{R}$ ; luego

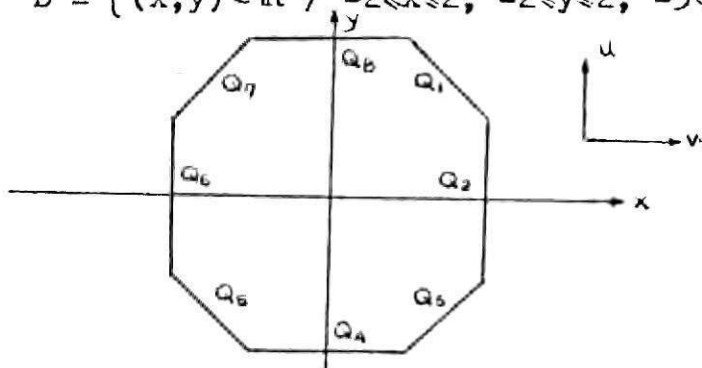
se cumple  $(b_1)$ .

CAPITULO 3  
CONSTRUCCION DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE  
COMPACTA DE DIMENSION 4

En este Capítulo construiremos una variedad diferenciable Compacta de dimensión 4, utilizando una función diferenciable de  $\mathbb{R}^7$  en  $\mathbb{R}^3$ , de tal manera que el cero de  $\mathbb{R}^3$  sea un valor regular de ésta.

DEFINICION 3.1 Definimos el octágono D que se muestra a continuación por:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -3 \leq x+y \leq 3, -3 \leq x-y \leq 3 \}$$



y una función  $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$   
 $\Psi(x,y) = (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)$ ;  
 $\Psi$  así definida resulta una función diferenciable.

PROPOSICION 3.2 Sean D y  $\Psi$  como en la definición 3.1, entonces:

- (a)  $\Psi > 0$  en  $\overset{\circ}{D}$
- (b) Si I es cualquier intervalo en el plano con un extremo en el origen y el otro extremo en la frontera de D e I es parametrizado linealmente,  $\Psi/I$  tiene derivada no nula, excepto posiblemente en los extremos.

(c)  $d\psi \neq 0$  en  $\overset{\circ}{D} \setminus \{(0,0)\}$

(d) Si  $0 < r < 1296$ ,  $\psi^{-1}(r) \cap D$  es una curva simple cerrada.

Demostración:

(a) Sea  $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ , entonces  $-2 < x < 2$ ,  $-2 < y < 2$ ,  $-3 < x+y < 3$ ,  $-3 < x-y < 3$ , así,  $4-x^2 > 0$ ,  $4-y^2 > 0$ ,  $9-(x+y)^2 > 0$  y  $9-(x-y)^2 > 0$ , luego

$\psi(x,y) = (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) > 0$ , de donde  $\psi > 0$  en  $\overset{\circ}{D}$ .

(b) Sea  $\Gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por, para cada  $(x,y) \in \text{Fr}(D)$  fijo,  $\Gamma(t) = (tx, ty)$ ,  $\forall t \in [0,1]$ . Denotemos para cada  $(x,y)$  en la frontera de  $D$ ,  $I_{(x,y)} = \Gamma([0,1])$ , entonces  $I_{(x,y)}$  es parametrizado linealmente; así  $\psi/I_{(x,y)} = \psi \circ \Gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  es dado por  $\forall t \in [0,1]$

$$(\psi \circ \Gamma)(t) = (4-(tx)^2)(4-(ty)^2)(9-(tx+ty)^2)(9-(tx-ty)^2),$$

$$\begin{aligned} \text{luego } (\psi \circ \Gamma)'(t) = & -2t(x-y)^2(4-x^2t^2)(4-y^2t^2)(9-(x+y)^2t^2) \\ & -2t(x+y)^2(4-x^2t^2)(4-y^2t^2)(9-(x-y)^2t^2) \\ & -2ty^2(4-x^2t^2)(9-(x+y)^2t^2)(9-(x-y)^2t^2) \\ & -2tx^2(4-y^2t^2)(9-(x+y)^2t^2)(9-(x-y)^2t^2), \end{aligned}$$

donde  $\forall 0 < t < 1$  nos quedan al menos tres términos negativos, como son los casos  $x = y$  o  $x = -y$ ; luego  $(\psi \circ \Gamma)'(t) < 0$

$\forall t \in (0,1)$ , es decir  $\psi/I_{(x,y)}$  tiene derivada no nula, excepto posiblemente en los extremos.

(c) Puesto que  $\forall (x,y) \in \overset{\circ}{D} \setminus \{(0,0)\}$ ,  $d\psi(x,y) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} dy$ ; por (b),  $d\psi(x,y) \neq 0$ ; así  $d\psi \neq 0$  en  $\overset{\circ}{D} \setminus \{(0,0)\}$ .

(d) Sea  $0 < r < 1296$ , entonces

$$\psi^{-1}(r) \cap D = \{ (x,y) \in \overset{\circ}{D} \setminus \{(0,0)\} / \psi(x,y) = r \}.$$

Como  $d\psi \neq 0$  en  $\overset{\circ}{D} \setminus \{(0,0)\}$ , entonces  $r$  es un valor regular de  $\psi$  y  $\psi^{-1}(r) \cap D \neq \emptyset$ , por teorema 1.18  $\psi^{-1}(r) \cap D$  es una subvariedad diferenciable de dimensión 1; es decir una curva; como  $(\psi/\overset{\circ}{I}(x,y))' < 0$ ,  $\psi$  es estrictamente decreciente en  $\overset{\circ}{I}(x,y)$ , así  $\psi$  es inyectiva en  $\overset{\circ}{I}(x,y)$  y por lo tanto  $\psi^{-1}(r) \cap D$  es una curva simple. Como además  $\psi^{-1}(r) \cap D$  es compacta, ella es difeomorfa a la circunferencia; de allí  $\psi^{-1}(r) \cap D$  es una curva simple cerrada.

PROPOSICION 3.3 Sean  $A = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \psi(x,y) \leq 1\}$  y

$$H = \{ (x,y,u_1,u_2,w_1,w_2) \in \mathbb{R}^6 / (x,y) \in A, \\ u_1^2 + u_2^2 = 4 - x^2, w_1^2 + w_2^2 = 4 - y^2 \}.$$

Si  $\pi_H : \mathbb{R}_A^2 \times \mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_w^2 \longrightarrow \mathbb{R}_A^2$  es la proyección sobre el plano  $\mathbb{R}_A^2$ , entonces la proyección del conjunto  $H$  sobre  $A$  tiene las siguientes propiedades:

(a) La imagen inversa de un punto de  $Q_2$  o  $Q_6$  bajo  $\pi_H$  es un círculo en el plano  $\mathbb{R}_w^2$ .

(b) La imagen inversa de un punto de  $Q_4$  o  $Q_8$  bajo  $\pi_H$  es un círculo en el plano  $\mathbb{R}_u^2$ .

(c) La imagen inversa de cualquier otro punto de  $A$  bajo  $\pi_H$  es un toro en  $\mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_w^2$ .

Demostración:

(a) Sea  $(2, t) \in Q_2$ , entonces  $-1 \leq t \leq 1$ , luego

$$\begin{aligned}
 \pi_H^{-1}(2, t) &= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / \pi_H(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) = (2, t) \} \\
 &= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / (x, y) = (2, t), -1 \leq t \leq 1 \} \\
 &= \{ (2, t, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 4 - (2)^2 \\
 &\quad w_1^2 + w_2^2 = 4 - t^2 \} \\
 &= \{ (2, t, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 0, \\
 &\quad w_1^2 + w_2^2 = 4 - t^2 \} \\
 &= \{ (2, t, 0, 0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / w_1^2 + w_2^2 = 4 - t^2, -1 \leq t \leq 1 \}.
 \end{aligned}$$

Para  $Q_6$  se procede en forma análoga.

(b) Sea  $(t, 2) \in Q_8$ , entonces  $-1 \leq t \leq 1$ , luego

$$\begin{aligned}
 \pi_H^{-1}(t, 2) &= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / \pi_H(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) = (t, 2) \} \\
 &= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / (x, y) = (t, 2), -1 \leq t \leq 1 \} \\
 &= \{ (t, 2, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 4 - t^2, \\
 &\quad w_1^2 + w_2^2 = 4 - (2)^2 \} \\
 &= \{ (t, 2, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 4 - t^2, \\
 &\quad w_1^2 + w_2^2 = 0 \} \\
 &= \{ (t, 2, u_1, u_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 4 - t^2, -1 \leq t \leq 1 \}.
 \end{aligned}$$

Para  $Q_4$  se procede en forma análoga.

(c) Sea  $(t_1, t_2) \in A$  tal que  $(t_1, t_2) \notin Q_2 \cup Q_6 \cup Q_4 \cup Q_8$ , entonces  $t_1 \neq \pm 2$ ,  $t_2 = \pm 2$ ; luego:

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_H^{-1}(t_1, t_2) &= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / \pi_H(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) = (t_1, t_2) \} \\
&= \{ (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / (x, y) = (t_1, t_2) \} \\
&= \{ (t_1, t_2, u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^6 / u_1^2 + u_2^2 = 4 - t_1^2 \\
&\quad w_1^2 + w_2^2 = 4 - t_2^2 \}
\end{aligned}$$

DEFINICION 3.4 Sea  $\rho: A \rightarrow \mathbb{R}$  la función diferenciable definida por  $\forall (x, y) \in A$ ,

$\rho(x, y) = (1 - \psi(x, y))(9 - (x+y)^2)(9 - (x-y)^2)$  y tal que  $z^2 = \rho(x, y)$ . El efecto de esta ecuación es que a cada punto del conjunto  $H \subset \mathbb{R}^6$ , le corresponden dos puntos distintos en  $\mathbb{R}^7$ , correspondientes a las dos soluciones de  $z$ , excepto si  $\psi(x, y) = 1$  o si  $(x, y) \in Q_1 \cup Q_3 \cup Q_5 \cup Q_7$ , donde obtenemos únicamente un punto en  $\mathbb{R}^7$ .

DEFINICION 3.5 Sea  $\xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in \mathbb{R}^7$ , definimos la función  $F: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por:

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= (F_1(\xi), F_2(\xi), F_3(\xi)), \text{ donde} \\
F_1(\xi) &= u_1^2 + u_2^2 - 4 + x^2, \\
F_2(\xi) &= w_1^2 + w_2^2 - 4 + y^2, \\
F_3(\xi) &= z^2 - \rho(x, y).
\end{aligned}$$

La función  $F$  así definida resulta diferenciable, pues sus funciones coordenadas  $F_1, F_2$  y  $F_3$  son diferenciables ya que son polinomiales.

PROPOSICION 3.6 Sean  $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  como en la definición 3.5 y  $M = F^{-1}(\theta)$ , donde  $\theta = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ , entonces la proyección de  $\mathbb{R}^7$  sobre las dos primeras coordenadas aplica  $M$  sobre  $A$ ; es decir, si  $\bar{\pi} : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}_A^2$  es definida por,

$$\bar{\pi}(x,y,u_1,u_2,w_1,w_2,z) = (x,y), \quad \forall (x,y,u_1,u_2,w_1,w_2,z) \text{ en } \mathbb{R}^7, \text{ entonces } \bar{\pi}(M) = A.$$

Demostración: Sea  $\xi = (x,y,u_1,u_2,w_1,w_2,z) \in M$ , entonces  $F(\xi) = (0,0,0)$ ; es decir,  $F_1(\xi) = F_2(\xi) = F_3(\xi) = 0$ , de a-

llí que

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 - 4 + x^2 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 - 4 + y^2 = 0 \\ z^2 - \rho(x,y) = 0 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = 4 - x^2 \\ w_1^2 + w_2^2 = 4 - y^2 \\ z^2 = \rho(x,y) \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 & (A) \\ 4 - y^2 \geq 0 & (B) \\ \rho(x,y) \geq 0 & (C). \end{cases}$$

De (A), (B) y (C) se tiene que  $\rho(x,y)(4-x^2)(4-y^2) \geq 0$ , es decir,  $(1-\psi(x,y))(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)(4-x^2)(4-y^2) \geq 0$ , entonces  $(1-\psi(x,y))\psi(x,y) \geq 0$ . Supongamos que  $1-\psi(x,y) \leq 0$  y  $\psi(x,y) \leq 0$ , entonces se tendría que  $1 \leq \psi(x,y) \leq 0$ , esto es,  $1 \leq 0$ , lo cual es una contradicción; luego  $1 - \psi(x,y) \geq 0$  y  $\psi(x,y) \geq 0$ ,

de allí que  $0 \leq \Psi(x,y) \leq 1$  (D).

Por otro lado, es fácil verificar que  $\Psi(x,y) = \Psi(-x,y)$   
 $= \Psi(x,-y)$   
 $= \Psi(-x,-y)$

y que  $\rho(x,y) = \rho(-x,y)$   
 $= \rho(x,-y)$   
 $= \rho(-x,-y)$ .

Supongamos que  $(x,y) \notin A$ , entonces por la aplicación de las simetrías,  $x \rightsquigarrow -x$ ;  $y \rightsquigarrow -y$ , sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x + y > 3$ . De (A) y (B) se tiene que  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ; así si  $x + y > 3$ , se debe tener que  $1 \leq x \leq 2$  y  $1 \leq y \leq 2$ , es decir,  $-1 \leq x - y \leq 1$ . Se tiene entonces que  $9 - (x + y)^2 < 0$  y  $9 - (x - y)^2 > 0$ ; así

$$(9 - (x + y)^2)(9 - (x - y)^2) < 0 \quad (E).$$

Por (C),  $\rho(x,y) = (1 - \Psi(x,y))(9 - (x + y)^2)(9 - (x - y)^2) \geq 0$ ; y como por (E),  $(9 - (x + y)^2)(9 - (x - y)^2) < 0$ , se debe tener que

$$1 - \Psi(x,y) \leq 0$$

de allí que  $\Psi(x,y) \geq 1$ ;

pero por (D),  $0 \leq \Psi(x,y) \leq 1$ , resulta entonces que  $\Psi(x,y) = 1 = (4 - x^2)(4 - y^2)(9 - (x + y)^2)(9 - (x - y)^2) \leq 0$ , de donde  $1 \leq 0$ , lo cual es una contradicción; de allí que  $(x,y) \in A$ ; luego  $\overline{\Pi}(M) \subset A$ .

Supongamos ahora que  $(x,y) \in A$ , entonces:  $4 - x^2 \geq 0$ ,  $4 - y^2 \geq 0$ ,  $9 - (x + y)^2 \geq 0$ ,  $9 - (x - y)^2 \geq 0$  y  $0 \leq \Psi(x,y) \leq 1$ ; luego  $1 - \Psi(x,y) \geq 0$ , de donde  $\rho(x,y) \geq 0$ . Luego existe

$$\xi = (x, y, \sqrt{4-x^2}, 0, \sqrt{4-y^2}, 0, \sqrt{\rho(x,y)}) \in \mathbb{R}^7 \text{ tal que}$$

$$F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), F_3(\xi))$$

$$= (0, 0, 0) ;$$

de allí que  $\xi \in M$ , es decir  $A \subset \Pi(M)$ . Se tiene entonces que

$$\Pi(M) = A$$

TEOREMA 3.7 Sea  $F : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$  como en la definición 3.5 ,  
entonces  $\theta = (0, 0, 0)$  es un valor regular de  $F$ .

Demostración: Mostraremos que  $M = F^{-1}(\theta)$  es un conjunto de puntos regulares; es decir, que  $(dF)_{\xi} : T_{\xi} \mathbb{R}^7 \rightarrow T_{F(\xi)} \mathbb{R}^3$  es suryectiva para cada  $\xi \in M$ . Sea  $\xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in M$ , entonces la matriz Jacobiana de  $F$  en  $\xi$  es:

$$J(F)_{\xi} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2u_1 & 2u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & 2w_1 & 2w_2 & 0 \\ -\frac{\partial \rho}{\partial x} & -\frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Ninguna de las dos primeras filas de la matriz Jacobiana de  $F$  en  $\xi$  pueden ser ceros, puesto que si lo fueran, entonces tendríamos:  $x = u_1 = u_2 = 0$

$$y = w_1 = w_2 = 0, \text{ pero como } \xi \in M, \text{ se}$$

tiene que  $-4 = 0$ , lo cual es una contradicción; luego las dos primeras filas de la matriz Jacobiana de  $F$  en  $\xi$  son linealmente independientes; de allí que el rango de esta matriz es 2 ó 3.

Afirmamos que si  $\text{rg}(dF)_{\xi} = 2$ ,  $(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) = 0$ .

En efecto, supongamos que  $\text{rg}((dF)_\xi) = 2$ , entonces existen  $\alpha$  y  $\beta$  números reales tales que:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x}, -\frac{\partial \rho}{\partial y}, 0, 0, 0, 0, 2z\right) &= \alpha(2x, 0, 2u_1, 2u_2, 0, 0, 0) + \\ &\quad \beta(0, 2y, 0, 0, 2w_1, 2w_2, 0) \\ &= (2\alpha x, 2\beta y, 2\alpha u_1, 2\alpha u_2, 2\beta w_1, 2\beta w_2, 0). \end{aligned}$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} &= 2\alpha x \\ -\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} &= 2\beta y \\ 2\alpha u_1 &= 0 \\ 2\alpha u_2 &= 0 \\ 2\beta w_1 &= 0 \\ 2\beta w_2 &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

De (\*),  $z = 0$ ; es decir  $z^2 = 0$ , de donde,

$$\rho(x,y) = (1-\psi(x,y))(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) = 0.$$

Si  $(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) \neq 0$ , entonces  $1 - \psi(x,y) = 0$ , es decir  $\psi(x,y) = 1$ .

Como  $d\rho(x,y) = (1-\psi(x,y))d\{(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)\} + (9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)(-d\psi(x,y))$  y  $\psi(x,y) = 1$ , entonces  $d\rho(x,y) = -d\psi(x,y)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)$ . Como

$\psi(x,y) = 1 > 0$ , por proposición 3.2(a),  $(x,y) \in \mathring{D}$ ; pero por proposición 3.6,  $(x,y) \in A$ ; luego  $(x,y) \in \mathring{D} \setminus \{(0,0)\}$ . Ahora, por proposición 3.2(c),  $d\psi(x,y) \neq 0$ ; así  $d\rho(x,y) \neq 0$ . Además  $1 = \psi(x,y) = (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)$

$$= (u_1^2 + u_2^2)(w_1^2 + w_2^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) ;$$
 de allí que  $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$  y  $w_1^2 + w_2^2 \neq 0$ . De (\*) tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha u_1 = 0 \\ \alpha u_2 = 0 \\ \beta w_1 = 0 \\ \beta w_2 = 0 , \end{array} \right.$$

es decir,  $\alpha^2(u_1^2 + u_2^2) = 0$  } ; de allí que  $\alpha = \beta = 0$ .  
 $\beta^2(w_1^2 + w_2^2) = 0$  }

Nuevamente de (\*) se tiene que  $\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} = 0$ ; pero entonces tendríamos que  $d\rho(x,y) = 0$ , lo cual es una contradicción. Luego si  $\text{rg}((dF)_\xi) = 2$ ,  $(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) = 0$ .

Mostraremos ahora que  $\text{rg}((dF)_\xi) = 3$ . Supongamos que  $\text{rg}(dF)_\xi = 2$ , entonces por la afirmación anterior,

$(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) = 0$  ; por la aplicación de las simetrías  $x \rightsquigarrow x$ ,  $y \rightsquigarrow y$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x + y = 3$  ; entonces

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) = 0. \text{ Ahora,} \\ d\rho(x,y) &= (1-\psi(x,y))d\{(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)\} \\ &\quad - d\psi(x,y)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) \\ &= d\{(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)\}, \text{ pues } \psi(x,y) = 0 \\ &= (9-(x+y)^2)(-2(x-y)dx + 2(x-y)dy) \\ &\quad + (9-(x-y)^2)(-2(x+y)dx - 2(x+y)dy) \\ &= (9-(x-y)^2)(-6dx - 6dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -6(9-(x-y)^2)(dx + dy) \\
 &= 6((x-y)^2-9)(dx + dy).
 \end{aligned}$$

Ahora,  $x-y \neq \pm 3$ , pues si suponemos que  $x - y = 3$  por ejemplo, entonces como  $x + y = 3$ , se tiene que  $2x = 6$ , es decir  $x = 3$ ; así  $y = 0$ ; pero  $(3,0) \notin A$ ; luego  $x - y \neq \pm 3$  y  $d\rho(x,y) \neq 0$ ; así  $\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} = 6((x-y)^2-9) \neq 0$ . Pero entonces de (\*) tenemos que:

$$\begin{cases}
 -\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial x} = 2\alpha x \neq 0 \\
 -\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial y} = 2\beta y \neq 0 \\
 \alpha \neq 0 \text{ y } \beta \neq 0.
 \end{cases}
 \quad ; \text{ de allí que}$$

Nuevamente de (\*) se obtiene que  $u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = 0$ .

Se debe tener entonces que  $\begin{cases} 4 - x^2 = 0 \\ 4 - y^2 = 0 \end{cases}$ ; es decir  $\begin{matrix} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \end{matrix}$ ;

pero  $(\pm 2, \pm 2) \notin A$ , pues por la proposición 3.6,  $\bar{\pi}(\xi) = (x,y) \in A$ .

Luego  $\text{rg}((dF)_\xi) = 3$ , es decir  $dF_\xi$  es suryectiva para cada  $\xi \in M$ , esto es,  $M = F^{-1}(\theta)$  es un conjunto de puntos regulares y  $\theta = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$  es un valor regular de  $F$ ; por el Teorema 1.18,  $M$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^7$  de dimensión 3.

**TEOREMA 3.8**  $M$  es una subvariedad diferenciable Compacta.

**Demostración:** Como  $F : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable,  $F$  es continua y  $\theta = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$  es cerrado, luego  $M = F^{-1}(\theta)$  es cerrado en  $\mathbb{R}^7$ .

Probaremos ahora que  $M$  es Acotado.

En efecto, sea  $\xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in M$ , entonces

$$|\xi| = \sqrt{x^2 + y^2 + u_1^2 + u_2^2 + w_1^2 + w_2^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} |\xi| &= \sqrt{x^2 + y^2 + 4 - x^2 + 4 - y^2 + \rho(x, y)} \\ &= \sqrt{8 + \rho(x, y)} \quad . \end{aligned}$$

Como por proposición 3.6,  $\bar{\Lambda}(\xi) = (x, y) \in A$ ,  $\Psi(x, y) \leq 1$  y se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(x, y) &= (1 - \Psi(x, y))(9 - (x+y)^2)(9 - (x-y)^2) \\ &\leq (9 - (x+y)^2)(9 - (x-y)^2) \\ &< 81 \quad ; \end{aligned}$$

así  $|\xi| < \sqrt{89}$ ; por tanto existe  $r = \sqrt{89}$  tal que

$\xi \in B(0, \sqrt{89})$ , con  $0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^7$ ; de allí que  $M$  es Acotado. Como  $M$  es un subconjunto Cerrado y Acotado de  $\mathbb{R}^7 = \mathbb{R}_A^2 \times \mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_w^2 \times \mathbb{R}$ ,  $M$  es compacto.

CAPITULO 4  
CONSTRUCCION DE UN CAMPO VECTORIAL  
DIFERENCIABLE

En este Capítulo se quiere construir un Campo Vectorial diferenciable en  $\mathbb{R}^7$ , de tal manera que sobre la variedad diferenciable Compacta  $M$  que construimos en el Capítulo anterior, el Flujo Global determinado por este Campo Vectorial, nos de en  $M$  Orbitas difeomórficas a la circunferencia. Vamos a encontrar las ecuaciones del Campo Vectorial con las propiedades requeridas. Para eso se van a encontrar los valores de  $x, y, u_1, u_2, w_1, w_2$  y  $z$  que se deben usar.

Como se quiere que el Campo Vectorial preserve las superficies de nivel de  $\Psi$  y  $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \dot{y}$  se consigue que  $\dot{\Psi} = 0$ , haciendo  $(\dot{x}, \dot{y})$  proporcionales a  $(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x})$ . Además se quiere que  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$  cuando  $\Psi = 0$ ; así definimos

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \psi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad , \text{ entonces } \Psi \text{ es constante sobre las } \text{órbitas}.$$

Ahora, por la proposición 3.2,  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$  en  $M$  si y sólo si  $\Psi = 0$ ; así las órbitas en el plano  $\mathbb{R}_A^2$  son curvas simples cerradas en  $A$ , excepto cuando  $\Psi = 0$ .

Para encontrar el valor de  $z$  que se debe usar, como

$$z^2 = \rho(x, y), \text{ entonces } 2z\dot{z} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \dot{y}.$$

Además de  $\rho(x, y) = (1 - \psi(x, y))(9 - (x+y)^2)(9 - (x-y)^2)$  se tiene que  $\ln \rho(x, y) = \ln(1 - \psi(x, y)) + \ln(9 - (x+y)^2) + \ln(9 - (x-y)^2)$ , así,  $\frac{1}{\rho} (\frac{\partial \rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \dot{y}) = \frac{1}{1 - \psi(x, y)} (-\frac{\partial \psi}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y}) + \frac{-2(x+y)\dot{x} - 2(x+y)\dot{y}}{9 - (x+y)^2} + \frac{-2(x-y)\dot{x} + 2(x-y)\dot{y}}{9 - (x-y)^2}.$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \dot{y} &= \rho(x,y) \left( \frac{1}{1-\psi(x,y)} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \dot{y} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(x+y)(\dot{x}+\dot{y})}{9-(x+y)^2} - \frac{2(x-y)(\dot{x}-\dot{y})}{9-(x-y)^2} \right) \\
 &= \rho(x,y) \left[ \frac{1}{1-\psi(x,y)} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(x+y)}{9-(x+y)^2} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{-2(x-y)}{9-(x-y)^2} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \\
 &= \rho(x,y) \left[ \frac{-2(x+y)\psi}{9-(x+y)^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{2(x-y)\psi}{9-(x-y)^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \\
 &= 2 \rho(x,y) \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{(x+y)\psi}{9-(x+y)^2} + \frac{(y-x)\psi}{9-(x-y)^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \sigma(x,y) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{(x+y)\psi}{9-(x+y)^2} + \frac{(y-x)\psi}{9-(x-y)^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (**);$$

$\sigma$  es una función polinomial con coeficientes enteros;

luego  $2z\dot{z} = 2\rho(x,y)\sigma(x,y)$ ; luego  $z\dot{z} = z^2\sigma(x,y)$ ; así

$$\dot{z} = z\sigma(x,y) \quad (***)$$

Vamos a definir ahora a  $u_1$  y  $u_2$ .

1 plano  $\mathbb{R}_u^2$ , consideremos el flujo dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -pu_2 \\ \dot{u}_2 = pu_1 \end{cases}, \text{ donde } p = \dot{\phi} \text{ es la velocidad angular.}$$

Como  $u_1^2 + u_2^2 = 4 - x^2$ , se tiene que

$$\frac{d(u_1^2 + u_2^2)}{dt} = -2x\dot{x} = -2x\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ es decir}$$

que los radios de los círculos en el plano  $\mathbb{R}_u^2$  cambian con el tiempo; de allí que las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = Ku_1 - pu_2 \\ \dot{u}_2 = pu_1 + Ku_2 \end{cases} \quad \text{combinan ambas una ve-}$$

locidad angular y una velocidad radial. Estas ecuaciones dan origen en M a que

$$\begin{aligned} \frac{d(u_1^2 + u_2^2)}{dt} &= 2u_1\dot{u}_1 + 2u_2\dot{u}_2 \\ &= 2(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2) \\ &= 2(u_1(Ku_1 - pu_2) + u_2(pu_1 + Ku_2)) \\ &= 2(Ku_1^2 - pu_1u_2 + pu_1u_2 + Ku_2^2) \\ &= 2K(u_1^2 + u_2^2) \\ &= 2K(4 - x^2) ; \text{ luego} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2K(4 - x^2) &= -2x\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \text{ así definimos} \\ K(x,y) &= -x \frac{\partial \psi}{\partial y} (4-x^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2). \quad (****) \end{aligned}$$

Como queremos que la función de velocidad angular  $p$  tenga las siguientes propiedades:

$$(a) \quad p(x,y) > 0 \text{ si } 0 < y \leq 2$$

$$(b) \quad p(x,y) = p(-x,y) = -p(x,-y) ,$$

definimos  $p(x,y) = (9 + x^2 - y^2)y$  (\*\*\*\*\*).

Así, para  $0 < y \leq 2$ , se tiene que  $0 < y^2 \leq 4$ , entonces

$$\begin{aligned} -4 &\leq -y^2 < 0 , \\ \text{así} \quad x^2 - 4 &\leq x^2 - y^2 < x^2 , \end{aligned}$$

de allí que  $x^2 + 5 \leq 9 + x^2 - y^2$  ;

como  $x^2 + 5 > 0$ , se tiene que  $9 + x^2 - y^2 > 0$ ;

y por hipótesis  $y > 0$ , luego  $p(x,y) = (9+x^2-y^2)y > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Ahora,} \quad p(-x,y) &= (9 + (-x)^2 - y^2)y \\ &= (9 + x^2 - y^2)y \\ &= p(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad -p(x,-y) &= -(9 + x^2 - (-y)^2)(-y) \\ &= (9 + x^2 - y^2)y \\ &= p(x,y) ; \end{aligned}$$

así,  $p(-x,y) = p(x,y) = -p(x,-y)$  , luego  $p$  cumple las propiedades requeridas.

Vamos a definir ahora a  $w_1$  y  $w_2$ .

En el plano  $\mathbb{R}_w^2$ , consideremos el flujo dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -qw_2 \\ \dot{w}_2 = qw_1 \end{cases}, \text{ donde } q = \dot{\theta} \text{ es la ve-}$$

locidad angular. Como  $w_1^2 + w_2^2 = 4 - y^2$ , se tiene que

$$\frac{d(w_1^2 + w_2^2)}{dt} = -2y\dot{y}$$

$$= -2y(-\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x})$$

$$= 2y(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}), \text{ es decir que los}$$

radios de los círculos en el plano  $\mathbb{R}_w^2$  cambian con el tiempo; de allí que las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = Lw_1 - qw_2 \\ \dot{w}_2 = qw_1 + Lw_2 \end{cases}$$

combinan ambas una velocidad angular y una velocidad radial.

Estas ecuaciones dan origen en M a que

$$\begin{aligned} \frac{d(w_1^2 + w_2^2)}{dt} &= 2w_1 \dot{w}_1 + 2w_2 \dot{w}_2 \\ &= 2(w_1 \dot{w}_1 + w_2 \dot{w}_2) \\ &= 2(w_1(Lw_1 - qw_2) + w_2(qw_1 + Lw_2)) \\ &= 2L(w_1^2 + w_2^2) \\ &= 2L(4 - y^2) ; \end{aligned}$$

$$\text{así } 2L(4 - y^2) = 2y \psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad ; \quad \text{de donde}$$

$$(\text{*****}) \quad L(x,y) = y \frac{\partial \Psi}{\partial x} (4-x^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2).$$

Como se quiere que la función velocidad angular  $q$  tenga

las siguientes propiedades:

$$(d) \quad q(x,y) > 0 \text{ si } 0 < x \leq 2$$

$$(e) \quad q(x,y) = -q(-x,y) = q(x,-y)$$

$$(f) \quad q = p \text{ en } x + y = 3 ,$$

definimos  $q(x,y) = (9 - x^2 + y^2)x$  (\*\*\*\*\*); así para

$0 < x \leq 2$ , se tiene que  $0 < x^2 \leq 4$ , entonces  $-4 \leq -x^2 < 0$ ;

$$\text{así } y^2 - 4 \leq y^2 - x^2 < y^2 ,$$

$$\text{de donde } 0 < y^2 + 5 \leq 9 - x^2 + y^2 ,$$

$$\text{es decir } 9 - x^2 + y^2 > 0 \text{ y como por hipótesis } x > 0 ,$$

se tiene que  $q(x,y) = (9 - x^2 + y^2)x > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Además} \quad q(x,-y) &= (9 - x^2 + (-y)^2)x \\ &= (9 - x^2 + y^2)x \\ &= q(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \quad -q(-x,y) &= -(9-(-x)^2+y^2)(-x) \\
 &= (9-x^2+y^2)x \\
 &= q(x,y) ;
 \end{aligned}$$

$$\text{de donde } q(x,y) = -q(-x,y) = q(x,-y).$$

Por otro lado si suponemos que  $x + y = 3$  y  $p(x,y) \neq q(x,y)$ , entonces,  $p(x,y) - q(x,y) \neq 0$ ,

$$\text{luego } (9+x^2-y^2)y - (9-x^2+y^2)x \neq 0$$

$$\text{entonces } (9+x^2-(3-x)^2)(3-x) - (9-x^2+(3-x)^2)x \neq 0$$

$$\text{así } (9+x^2-9+6x-x^2)(3-x) - (9-x^2+(2-x)^2)x \neq 0$$

$$\text{luego } 6x(3-x) - 6x(3-x) \neq 0$$

así  $0 \neq 0$ , lo cual es una contradicción; luego  $q$  verifica (d), (e) y (f).

DEFINICION 4.1 Definimos el Campo Vectorial diferenciable

$$\begin{aligned}
 X : \mathbb{R}^7 &\longrightarrow T\mathbb{R}^7 \text{ por: para cada } \xi = (x,y,u_1,u_2,w_1,w_2,z) \\
 &\text{en } \mathbb{R}^7,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X(\xi) &= (\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial x} - (\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial y} + (Ku_1 - pu_2) \frac{\partial}{\partial u_1} + (pu_1 + Ku_2) \frac{\partial}{\partial u_2} \\
 &\quad + (Lw_1 - qw_2) \frac{\partial}{\partial w_1} + (qw_1 + Lw_2) \frac{\partial}{\partial w_2} + z \sigma(x,y) \frac{\partial}{\partial z}, \text{ don-} \\
 &\text{de } K,p,L,q,\sigma \text{ fueron definidas anteriormente.}
 \end{aligned}$$

TEOREMA 4.2 Sea  $\xi \in M$ , entonces  $X(\xi) \in TM$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 X/M : M &\longrightarrow TM \text{ es un Campo Vectorial diferen-} \\
 &\text{ciable sobre } M.
 \end{aligned}$$

Demostración: Sean  $\xi = (x,y,u_1,u_2,w_1,w_2,z) \in M$  y  $F$  la función de la Definición 3.5 ; por el Teorema 3.7,  $(dF)_\xi$  es suryectiva para cada  $\xi \in M$ , y como  $T_\xi M = \text{Ker}((dF)_\xi)$ , basta

probar que  $(dF)_\xi(X(\xi)) = \theta$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
 (dF)_\xi(X(\xi)) &= \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2u_1 & 2u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & 2w_1 & 2w_2 & 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x} & -\frac{\partial p}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Ku_1 - pu_2 \\ pu_1 + Ku_2 \\ Lw_1 - qw_2 \\ qw_1 + Lw_2 \\ z\sigma \end{pmatrix} \\
 &= (2x \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2u_1 (Ku_1 - pu_2) + 2u_2 (pu_1 + Ku_2), \\
 &\quad -2y \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2w_1 (Lw_1 - qw_2) + 2w_2 (qw_1 + Lw_2), \\
 &\quad -\frac{\partial p}{\partial x} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2z^2 \sigma) \\
 &= (0, 0, 0) \\
 &= \theta ;
 \end{aligned}$$

luego  $X(\xi) \in TM$ .

**TEOREMA 4.3** Sea  $X : M \rightarrow TM$  el campo Vectorial diferenciable del Teorema 4.2, entonces  $X(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in M$ .

**Demostración:** Sea  $\xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in M$  tal que  $X(\xi) = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 &(\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial x} - (\psi \frac{\partial \psi}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial y} + (Ku_1 - pu_2) \frac{\partial}{\partial u_1} + (pu_1 + Ku_2) \frac{\partial}{\partial u_2} + (Lw_1 - qw_2) \frac{\partial}{\partial w_1} + \\
 &(qw_1 + Lw_2) \frac{\partial}{\partial w_2} + (z\sigma) \frac{\partial}{\partial z} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Como  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$  es base de  $T_\xi M$ , se tiene que:

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \dot{y} = -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \dot{u}_1 = Ku_1 - pu_2 = 0 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = pu_1 + Ku_2 = 0 \\ \dot{w}_1 = Lw_1 - qw_2 = 0 \\ \dot{z} = z = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Por (A),  $\dot{u}_2 = \dot{u}_1 = 0$ , así  $0 = \dot{u}_2 u_1 - \dot{u}_1 u_2$

$$\begin{aligned} &= (pu_1 + Ku_2)u_1 - (Ku_1 - pu_2)u_2 \\ &= pu_1^2 + Ku_1 u_2 - Ku_1 u_2 + pu_2^2 \\ &= p(u_1^2 + u_2^2). \end{aligned}$$

Si suponemos que  $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ , entonces  $p(x, y) = 0$ , de donde  $(9 + x^2 - y^2)y = 0$ ; luego  $y = 0$ , pues si  $9 + x^2 - y^2 = 0$ , entonces  $x^2 = y^2 - 9 \geq 0$ , de allí que  $y \geq 3$  ó  $y \leq -3$ ; pero entonces  $(x, \pm 3) \notin A$ . También de (A) se tiene que  $\dot{w}_2 = \dot{w}_1 = 0$ ,

así:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{w}_2 w_1 - \dot{w}_1 w_2 \\ &= (qw_1 + Lw_2)w_1 - (Lw_1 - qw_2)w_2 \\ &= qw_1^2 + Lw_1 w_2 - Lw_1 w_2 + qw_2^2 \\ &= q(w_1^2 + w_2^2). \end{aligned}$$

Como  $w_1^2 + w_2^2 = 4 - y^2$  y  $y = 0$ , se tiene que  $w_1^2 + w_2^2 \neq 0$ ,

así que  $q(x, y) = (9 - x^2 + y^2)x = 0$ ; entonces  $x = 0$ , pues si  $9 - x^2 + y^2 = 0$ , se tiene que  $y^2 = x^2 - 9 \geq 0$ , de allí que  $x \geq 3$  ó  $x \leq -3$ ; pero entonces  $(\pm 3, y) \notin A$ . En resumen, si  $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ ,  $x = y = 0$ , pero  $(0, 0) \notin A$ , entonces se debe tener que  $u_1^2 + u_2^2 = 0$ , pero entonces  $4 - x^2 = 0$ , de allí que  $x = \pm 2$ ; de allí que  $w_1^2 + w_2^2 = 0$ , es decir  $4 - y^2 = 0$ , esto

es  $y = \frac{1}{2}$  ; y así  $(x,y) \notin A$ , lo cual es una contradicción.

De donde  $\forall \xi \in M, x(\xi) \neq 0$ .

CAPITULO 5  
ORBITAS DEL CAMPO VECTORIAL

En este Capítulo se verifica que las órbitas del flujo Global asociado al campo Vectorial  $X$ , construido en el Capítulo anterior sobre la Variedad Diferenciable Compacta  $M$  son difeomorfias a una circunferencia y que la función del primer retorno de las mismas es no acotada (localmente.)

DEFINICION 5.1 Si una función transforma un objeto tal como una función, una forma diferencial o un campo vectorial a su negativo, decimos que el objeto es Anti-invariante.

TEOREMA 5.2 Las funciones  $\psi, \rho, \sigma, F$ , definidas anteriormente y el Campo Vectorial  $X$  son invariantes bajo rotaciones rígidas alrededor del origen en cualquiera de los planos  $\mathbb{R}_u^2$  o  $\mathbb{R}_w^2$ .

Demostración: Sea  $R : \mathbb{R}_u^2 \longrightarrow \mathbb{R}_u^2$  una rotación rígida alrededor del origen en el plano  $\mathbb{R}_u^2$ , entonces  $R$  es definida por  $\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}_u^2$ ,

$$R(u_1, u_2) = (u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha, -u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha).$$

Para ver que  $\psi$  es invariante bajo  $R$ , basta que se pruebe que si  $c \in \mathbb{R}$ ,  $R(\psi^{-1}(c)) \subset \psi^{-1}(c)$ .

En efecto, supongamos que  $(x, y) \in R(\psi^{-1}(c))$  y  $(x, y) \notin \psi^{-1}(c)$ , entonces  $\exists (u_1, u_2) \in \psi^{-1}(c)$  tal que  $R(u_1, u_2) = (x, y)$  y

$\psi(x, y) \neq c$ , luego  $\psi(u_1, u_2) = c$  con  $x = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha$ ,  
 $y = -u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha$  y  $\psi(x, y) \neq c$ ; de allí que

$$\psi(u_1, u_2) \neq \psi(x, y) ; \quad \text{es}$$

decir,  $\Psi(u_1, u_2) \neq \Psi(u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha, -u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha)$ ; pero si  $\alpha = 2\pi$ , se tiene que  $\Psi(u_1, u_2) \neq \Psi(u_1, u_2)$ , lo cual es una contradicción; así  $R(\Psi^{-1}(c)) \subset \Psi^{-1}(c)$ ; de allí que  $\Psi$  es invariante bajo  $R$ . La prueba de que  $\rho$  y  $\sigma$  son invariantes bajo  $R$  se hacen en forma análoga.

Sea  $F : \mathbb{R}_A^2 \times \mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_w^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$\forall \xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in \mathbb{R}^7,$$

$$F(\xi) = (u_1^2 + u_2^2 - 4 + x^2, w_1^2 + w_2^2 - 4 + y^2, z^2 - \rho(x, y)), \text{ entonces}$$

$F/\mathbb{R}_u^2 : \mathbb{R}_u^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es dada por  $F(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 4$ .

$$\text{Luego } F \circ R(u_1, u_2) = F(R(u_1, u_2))$$

$$= F(u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha, -u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha)$$

$$= (u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha)^2 + (-u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha)^2 - 4$$

$$= u_1^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + u_2^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 4$$

$$= u_1^2 + u_2^2 - 4$$

$$= F(u_1, u_2), \text{ de allí que } F \text{ es invariante}$$

bajo rotaciones rígidas alrededor del origen en el plano  $\mathbb{R}_u^2$ .

Sea  $X : \mathbb{R}_A^2 \times \mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_w^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^7$ , el campo vectorial

definido por  $\forall \xi = (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in \mathbb{R}^7$

$$X(\xi) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dot{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dot{w}_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \dot{w}_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

entonces  $X/\mathbb{R}_u^2 : \mathbb{R}_u^2 \longrightarrow \mathbb{R}_u^2$  es dada por

$$X(u_1, u_2) = (Ku_1 - pu_2, pu_1 + Ku_2), \text{ la cual es una}$$

transformación lineal. Si denotamos por  $V_X$  la matriz asociada a  $X$ , tenemos

$$V_X = \begin{pmatrix} K & -p \\ p & K \end{pmatrix}, \text{ la cual es un múltiplo escalar de una rotación rígida de } \mathbb{R}_u^2 \text{ alrededor del origen; luego basta probar que } V_X \circ R = R \circ V_X. \text{ En efecto,}$$

$$\begin{aligned} R \circ V_X &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & -p \\ p & K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K \cos \alpha - p \operatorname{sen} \alpha & -p \cos \alpha - K \operatorname{sen} \alpha \\ K \operatorname{sen} \alpha + p \cos \alpha & -p \operatorname{sen} \alpha + K \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \text{y } V_X \circ R &= \begin{pmatrix} K & -p \\ p & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K \cos \alpha - p \operatorname{sen} \alpha & -K \operatorname{sen} \alpha - p \cos \alpha \\ p \cos \alpha + K \operatorname{sen} \alpha & -p \operatorname{sen} \alpha + K \cos \alpha \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

de donde  $V_X \circ R = R \circ V_X$ , es decir  $V_X$  conmuta con la matriz de rotación; luego  $X$  es invariante bajo rotaciones rígidas alrededor del origen en el plano  $\mathbb{R}_u^2$ . Las demostraciones para el plano  $\mathbb{R}_w^2$  son análogas a las del plano  $\mathbb{R}_u^2$ .

**TEOREMA 5.3** Sea  $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$  la involución definida por

$$\forall \xi \in (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z), T(\xi) = (-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z),$$

entonces  $\Psi$ ,  $\rho$ ,  $F$ ,  $M$  y el campo vectorial  $X$  son invariantes bajo  $T$ .

Demostración: Sea  $\Pi: \mathbb{R}_A^2 \times \mathbb{R}_U^2 \times \mathbb{R}_W^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_A^2$ , definida por  $\forall (x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in \mathbb{R}^7$ ,  $\Pi(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) = (x, y)$ ;

entonces:

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= \Psi \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= \Psi(-x, -y) \\ &= \Psi(x, y) ; \text{ es decir, } \Psi \text{ es in-} \end{aligned}$$

variante bajo  $T$ .

$$\begin{aligned} \text{Como } \rho \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= \rho \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= \rho(-x, -y) \\ &= \rho(x, y) , \text{ se tiene que } \rho \end{aligned}$$

es invariante bajo  $T$ .

$$\begin{aligned} \text{Además } F \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= F(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= F(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z), \text{ es} \end{aligned}$$

decir  $F$  es invariante bajo  $T$ .

Ahora bien, si  $(x', y', u_1', u_2', w_1', w_2', z') \in T(M)$ , entonces existe  $(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) \in M$  tal que

$$\begin{aligned} T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= (x', y', u_1', u_2', w_1', w_2', z') , \text{ enton-} \\ \text{ces } (-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) &= (x', y', u_1', u_2', w_1', w_2', z') , \text{ es de-} \\ \text{cir } \begin{cases} -x = x' , u_2 = u_1' , w_2 = w_1' , z = z' , \\ -y = y' , u_1 = u_2' , w_1 = w_2' . \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{luego } \begin{cases} u_1'^2 + u_2'^2 = u_2^2 + u_1^2 = 4 - x^2 = 4 - x'^2 \\ w_1'^2 + w_2'^2 = w_2^2 + w_1^2 = 4 - y^2 = 4 - y'^2 \\ z'^2 = z^2 = (x, y) = (-x', -y') = (x', y') \end{cases}$$

de donde se deduce que  $(x', y', u_1', u_2', w_1', w_2', z') \in M$

de allí que  $T(M) \subset M$ , es decir que  $M$  es invariante bajo  $T$ .

Para ver que el campo vectorial  $X$  es invariante bajo  $T$ , observemos que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \text{ es Anti-invariante pues} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \circ \pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \circ \pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(-x, -y) \\ &= -2(4-y^2) \{ (4-x^2)(9-(x+y)^2)(-(x-y)) + \\ &\quad + (9-(x-y)^2)(-(x+y)) + \\ &\quad + (9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)(-x) \} \\ &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

En forma análoga se prueba que  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  es Anti-invariante; de allí que  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  son Anti-invariantes.

Además  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  es Anti-invariante pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} \circ \pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \circ \pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x}(-x, -y) \\ &= -(1 - \Psi(-x, -y)) [(9-(x+y)^2) \\ &\quad (-2(x-y)) + (9-(x-y)^2)(-2(x+y))] \\ &\quad + (9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(-x, -y) \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

En forma análoga se prueba que  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$  es Anti-invariante; de a-

11f que  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$  son Anti-invariantes.

$\sigma$  es invariante bajo  $T$  pues

$$\begin{aligned}\sigma \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= \sigma \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= \sigma(-x, -y) \\ &= \sigma(x, y).\end{aligned}$$

$p$  es Anti-invariante pues

$$\begin{aligned}p \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= p \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= p(-x, -y) \\ &= (9 + (-x)^2 - (-y)^2)(-y) \\ &= -(9 + x^2 - y^2)y \\ &= -p(x, y).\end{aligned}$$

$q$  es Anti-invariante pues

$$\begin{aligned}q \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= q \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= q(-x, -y) \\ &= (9 - (-x)^2 + (-y)^2)(-x) \\ &= -(9 - x^2 + y^2)x \\ &= -q(x, y).\end{aligned}$$

$K$  es invariante bajo  $T$  pues

$$\begin{aligned}K \circ \Pi \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= K \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\ &= K(-x, -y) \\ &= -x \frac{\partial \Psi}{\partial y}(-x, -y) [(4 - (-y)^2)(9 - (-x - y)^2) \\ &\quad (9 - (-x + y)^2)] \\ &= x \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) (4 - y^2)(9 - (x + y)^2) \\ &\quad (9 - (x - y)^2) \\ &= K(x, y).\end{aligned}$$

L es invariante bajo T pues

$$\begin{aligned}
 L \circ T \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= L \circ \Pi(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\
 &= L(-x, -y) \\
 &= -y \frac{\partial \Psi}{\partial x}(-x, -y) [(4 - (-x)^2) \\
 &\quad (9 - (-x-y)^2) (9 - (-x+y)^2)] \\
 &= L(x, y)
 \end{aligned}$$

Utilizando las demostraciones anteriores probaremos que X es invariante bajo T.

En efecto,

$$\begin{aligned}
 X \circ T(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z) &= X(-x, -y, u_2, u_1, w_2, w_1, z) \\
 &= [\Psi(-x, -y) \frac{\partial \Psi}{\partial y}(-x, -y)] \frac{\partial}{\partial(-x)} - \\
 &\quad [\Psi(-x, -y) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(-x, -y)] \frac{\partial}{\partial(-y)} + \\
 &\quad [K(-x, -y)u_2 - p(-x, -y)u_1] \frac{\partial}{\partial u_2} + \\
 &\quad [p(-x, -y)u_2 + K(-x, -y)u_1] \frac{\partial}{\partial u_1} + \\
 &\quad [L(-x, -y)w_2 - q(-x, -y)w_1] \frac{\partial}{\partial w_2} + \\
 &\quad [q(-x, -y)w_2 + L(-x, -y)w_1] \frac{\partial}{\partial w_1} + \\
 &\quad [z \sigma(-x, -y)] \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= \frac{\Psi \partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Psi \partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + (Ku_1 - pu_2) \frac{\partial}{\partial u_1} + (Ku_2 + pu_1) \frac{\partial}{\partial u_2} \\
 &\quad + (Lw_1 - qw_2) \frac{\partial}{\partial w_1} + (Lw_2 + qw_1) \frac{\partial}{\partial w_2} + z \sigma \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= X(x, y, u_1, u_2, w_1, w_2, z).
 \end{aligned}$$

**TEOREMA 5.4** En M, si  $\Psi > 0$ , cada órbita es difeomorfa a una circunferencia. Además cuando  $\Psi$  tiende a cero, la función del primer retorno tiende al infinito.

Demostración: Sea  $\xi(t) = (x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), w_1(t), w_2(t), z(t))$  un punto en M moviéndose bajo el flujo en el tiempo t. Como

$(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$  en  $M$  pues  $\Psi > 0$  y las curvas de nivel de  $\Psi$  en  $A$  son curvas simples cerradas, tenemos que  $(x(t), y(t))$  recorre tales curvas de nivel, moviéndose siempre en la misma dirección, contraria a las manecillas del reloj.

Sea  $2\lambda > 0$  el tiempo del primer retorno de  $(x(t), y(t))$ . Por la simetría de  $\Psi$ ,  $x(\lambda) = -x(0)$  y  $y(\lambda) = -y(0)$ . Además si  $z(0) = 0$ , entonces  $z(0)^2 = 0$ ; de allí que

$$[1 - \Psi(x(0), y(0))] [9 - (x(0) + y(0))^2] [9 - (x(0) - y(0))^2] = 0.$$

Como  $\Psi > 0$ ,  $x(0) + y(0) \neq \pm 3$  y  $x(0) - y(0) \neq \pm 3$ , se tiene que

$$1 - \Psi(x(0), y(0)) = 0$$

de donde  $\Psi(x(0), y(0)) = 1$ ; como  $\Psi$  es constante sobre cada órbita,  $\Psi(x(t), y(t)) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{de allí que} \quad z(t)^2 = 0,$$

$$\text{así} \quad z(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además si  $z(0) > 0$ , como  $z(t)^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , entonces  $z(t) > 0$  o  $z(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Pero si  $z(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $z(0) < 0$ , lo cual es una contradicción; así si  $z(0) > 0$ , entonces  $z(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . También si  $z(0) < 0$ , como  $z(t)^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $z(t) > 0$  o  $z(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Si suponemos que  $z(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $z(0) > 0$ , lo que es una contradicción. Luego si  $z(0) < 0$ , entonces  $z(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Además como  $z(t)^2 = \rho(x(t), y(t))$ ,  $z$  es determinado salvo su signo por  $(x(t), y(t))$  y como

$$z(0)^2 = [1 - \Psi(x(0), y(0))] [9 - (x(0) + y(0))^2] [9 - (x(0) - y(0))^2];$$

como  $x(\lambda) = -x(0)$  y  $y(\lambda) = -y(0)$ , se tiene que  $z(0) = z(\lambda)$ .

$$\begin{aligned} \text{Adem\u00e1s } u_1(\lambda)^2 + u_2(\lambda)^2 &= 4 - x(\lambda)^2 \\ &= 4 - (-x(0))^2 \\ &= 4 - x(0)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } w_1(\lambda)^2 + w_2(\lambda)^2 &= 4 - y(\lambda)^2 \\ &= 4 - (-y(0))^2 \\ &= 4 - y(0)^2. \end{aligned}$$

Como  $u_1(0)^2 + u_2(0)^2 = 4 - x(0)^2$  y  $w_1(0)^2 + w_2(0)^2 = 4 - y(0)^2$

se tiene que  $u_1(\lambda)^2 + u_2(\lambda)^2 = u_1(0)^2 + u_2(0)^2$

$$\text{y } w_1(\lambda)^2 + w_2(\lambda)^2 = w_1(0)^2 + w_2(0)^2.$$

Luego  $u_1(0) = -u_1(\lambda)$ ,  $u_2(0) = -u_2(\lambda)$  y  $w_1(0) = -w_1(\lambda)$ ,

$w_2(0) = -w_2(\lambda)$ . De all\u00ed que existe una rotaci\u00f3n  $R$  al-

rededor del origen en el plano  $\mathbb{R}_u^2$  y una rotaci\u00f3n  $S$  alrededor del origen en el plano  $\mathbb{R}_w^2$  que dependen de  $\xi(0)$  tal que

$$\begin{aligned} RST(\xi(0)) &= RST(x(0), y(0), u_1(0), u_2(0), w_1(0), w_2(0), z(0)) \\ &= RS(-x(0), -y(0), u_2(0), u_1(0), w_2(0), w_1(0), z(0)) \\ &= R(-x(0), -y(0), u_2(0), u_1(0), -w_1(0), -w_2(0), z(0)) \\ &= (-x(0), -y(0), -u_1(0), -u_2(0), -w_1(0), -w_2(0), z(0)) \\ &= (x(\lambda), y(\lambda), u_1(\lambda), u_2(\lambda), w_1(\lambda), w_2(\lambda), z(\lambda)) \\ &= \xi(\lambda). \end{aligned}$$

Adem\u00e1s  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} RST(\xi(t)) &= RST(x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), w_1(t), w_2(t), z(t)) \\ &= RS(-x(t), -y(t), u_2(t), u_1(t), w_2(t), w_1(t), z(t)) \\ &= R(-x(t), -y(t), u_2(t), u_1(t), -w_1(t), -w_2(t), z(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-x(t), -y(t), -u_1(t), -u_2(t), -w_1(t), -w_2(t), z(t)) \\
&= (x(t+\lambda), y(t+\lambda), u_1(t+\lambda), u_2(t+\lambda), w_1(t+\lambda), w_2(t+\lambda), \\
&\quad z(t+\lambda)) \\
&= \xi(t+\lambda).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\text{RSTRST}(\xi(t)) &= \text{RST}(\text{RST}(\xi(t))) \\
&= \text{RST}(-x(t), -y(t), -u_1(t), -u_2(t), -w_1(t), -w_2(t), z(t)) \\
&= (x(t), y(t), u_1(t), u_2(t), w_1(t), w_2(t), z(t)) \\
&= \xi(t) ; \text{ de allf que RSTRST es la identidad.}
\end{aligned}$$

Como  $\text{RST}(\xi(t)) = \xi(t+\lambda)$ , si tomamos  $t = \lambda$ , tenemos

$$\text{RST}(\xi(\lambda)) = \xi(\lambda+\lambda),$$

es decir  $\text{RST}(\xi(\lambda)) = \xi(2\lambda)$ . Pero  $\xi(\lambda) = \text{RST}(\xi(0))$ ,

$$\begin{aligned}
\text{de allf que} \quad \xi(2\lambda) &= \text{RST}(\text{RST}(\xi(0))) \\
&= \text{RSTRST}(\xi(0)) \\
&= \xi(0).
\end{aligned}$$

Luego la órbita es una curva simple cerrada, con tiempo de primer retorno igual a  $2\lambda$ .

Asf se ha probado que si  $\Psi > 0$  en  $M$ , las órbitas a través de cada punto en  $M$  son difeomorfas a una circunferencia.

Veamos ahora que el tiempo del primer retorno tiende a infinito cuando  $\Psi$  tiende a cero.

En efecto, puesto que  $\dot{x} = \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  y  $\dot{y} = -\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ , cuando  $\Psi$  tiende a cero,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  también tienden a cero. Ahora bien, la longitud de la órbita de un punto  $(x, y)$  en  $A$  no tiende a cero cuando  $\Psi$  tiende a cero, sino tiende a  $8 + 4\sqrt{2}$ ,

que es el perímetro del octágono D.

Como  $\dot{x} = Hy$ ,  $\dot{y} = -Hx$  tienden a cero cuando  $\Psi$  tiende a cero, donde H es la velocidad angular en el plano  $\mathbb{R}_A^2$ , se tiene que H tiende a cero; como la función del primer retorno es dada por  $2\pi/H = 2\lambda$ , tenemos que  $\lambda$  tiende al infinito.

**TEOREMA 5.5** Si  $x + y = \pm 3$  o  $x - y = \pm 3$  para un punto en M, entonces la órbita a través de este punto es una circunferencia.

Demostración: Supongamos que  $x + y = 3$ , entonces como

$$\Psi(\tilde{x}, y) = (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) \quad y$$

$$\rho(x, y) = (1-\Psi(x, y))(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2), \text{ tenemos}$$

que  $\Psi(x(t), y(t)) = \rho(x(t), y(t)) = 0$ ; donde  $x(t)$ ,  $y(t)$  son independientes de t. Además como  $z^2 = \rho(x, y)$ , se tiene que  $z(t) = 0 \quad \forall t$ .

$$\text{Por otro lado, } K(x, y) = -x \frac{\partial \Psi}{\partial y} (4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2) \\ y \quad L(x, y) = y \frac{\partial \Psi}{\partial x} (4-x^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2);$$

$$\text{así } K(x(t), y(t)) = L(x(t), y(t)) = 0 \quad \forall t.$$

Como  $X(\xi(t)) = (\tilde{x}, -\tilde{y}, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{z})$ , a través de

$$\text{la órbita y } \dot{\tilde{x}} = \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \dot{u}_1 = Ku_1 - pu_2, \\ \dot{u}_2 = pu_1 + Ku_2, \quad \dot{w}_1 = Lw_1 - qw_2, \quad \dot{w}_2 = qw_1 + Lw_2$$

y  $\dot{z} = z\sigma$ , se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{y}} = \dot{z} = 0, \quad \dot{u}_1 = -pu_2 \\ \dot{u}_2 = pu_1, \quad \dot{w}_1 = -qw_2 \quad y \quad \dot{w}_2 = qw_1.$$

Por (f) del Capítulo 4,  $p = q$  o  $p = -q$  a través de la ór-

bita; luego la velocidad angular en el plano  $\mathbb{R}_u^2$  y  $\mathbb{R}_w^2$  es igual a  $|p|$ , que no es cero por (a) del mismo Capítulo. Así después del tiempo  $2\pi/|p|$ , el punto vuelve a la posición de partida; de allí que la órbita a través de este punto es difeomorfa a una circunferencia.

**TEOREMA 5.6** Si  $x = \pm 2$  o  $y = \pm 2$  para un punto en  $M$ , entonces la órbita a través de este punto es una circunferencia.

Demostración: Supongamos que  $x = 2$ , entonces como

$u_1^2 + u_2^2 = 4 - x^2$ , tenemos que  $u_1 = u_2 = 0$ . Además por ser

$\Psi(x,y) = (4-x^2)(4-y^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)$ , tenemos que

$\Psi(x,y) = 0$ ; de allí que  $\dot{x} = \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$  y  $\dot{y} = -\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$ .

Puesto que  $x(t), y(t)$  son independientes de  $t$ , de  $z^2 = \varphi(x,y)$

se deduce que  $z(t)$  es constante, luego  $\dot{z} = 0$ . Además de

$L(x,y) = y \frac{\partial \Psi}{\partial x} (4-x^2)(9-(x+y)^2)(9-(x-y)^2)$  se tiene que

$L(x,y) = 0$ . En resumen tenemos que  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$

y  $L(x,y) = 0$ ; como  $X(\xi(t)) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{z})$ , a través de la órbita las siguientes ecuaciones se satisfacen

$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$ ,  $L(x,y) = 0$ ; y tenemos entonces en ésta las ecuaciones  $\dot{w}_1 = -qw_2$  y  $\dot{w}_2 = qw_1$ , donde  $w_1^2 + w_2^2 = 4 - y^2$  y  $q$  es la velocidad angular en el plano  $\mathbb{R}_w^2$ , la cual no es cero por (d) del Capítulo 4. Así después del tiempo  $2\pi/q$ , el punto vuelve a la posición de partida, de allí que la órbita a través de este punto es difeomorfa a una circunferencia.

## CONCLUSIONES

### CAPITULO 1. PRELIMINARES

Para introducir los conceptos de Conjunto Independiente, Rango de una función diferenciable, Inmersión Difeomórfica, Inmersión, Submersión, Punto Regular y Valor Regular hemos utilizado las referencias ([1]), ([2]), ([7]), ([10]), ([11]), ([14]) y ([15]). Para establecer el Teorema 1.1, de la función inversa, el Teorema 1.9 del Rango y el Teorema 1.18 de Caracterización de Sub-variedades, hemos modificado los lineamientos de ([1]), ([10]) y ([14]).

### CAPITULO 2. SISTEMAS DINAMICOS

Iniciamos este Capítulo con Curvas Integrales y Flujos, siguiendo las ideas de ([1]), ([8]) y ([15]). Para la introducción de conceptos tales como Líneas de Flujo, Orbita, etc. hemos utilizado la referencia ([1]) y establecemos el Teorema 2.11, Caracterización de Flujos Locales y el Teorema 2.12, Caracterización de Flujos Globales, modificando los lineamientos de ([8]), ([10]) y ([14]). Se demuestra luego la Proposición 2.14, la cual establece que dada una Línea de un Flujo Global, entonces ésta es, o bien una Inmersión inyectiva o bien una Inmersión periódica, modificando los lineamientos de ([1]).

### CAPITULO 3. CONSTRUCCION DE UNA VARIEDAD

#### DIFERENCIABLE COMPACTA DE DIMENSION 4.

A través de todo este Capítulo se utilizaron las re-

ferencias ([3]), ([4]), ([5]), ([6]), ([9]), ([13]), ([16]) y ([17]). Se utilizan los conceptos de Valor Regular y Punto Regular, para demostrar los teoremas 3.7 y 3.8, que establecen la existencia de una Sub-variedad diferenciable que resulta Compacta.

#### CAPITULO 4. CONSTRUCCION DE UN CAMPO VECTORIAL

Las referencias para este Capítulo son las siguientes: ([3]), ([4]), ([12]) y ([13]). Se construye un Campo Vectorial diferenciable y utilizando la referencia ([3]) se prueban los teoremas 4.2 y 4.3, que establecen que este Campo Vectorial es no trivial sobre la variedad diferenciable del Capítulo 3, haciendo modificaciones a los lineamientos de ([3]).

#### CAPITULO 5. ORBITAS SOBRE EL CAMPO VECTORIAL

En lo que respecta a las órbitas del campo vectorial sobre la variedad diferenciable, hemos utilizado las referencias ([3]), ([12]) y ([13]) para dar una demostración constructiva de los teoremas 5.4, 5.5 y 5.6 que establecen que en la variedad diferenciable construida en el Capítulo 3, todas las órbitas generadas por el campo vectorial del Capítulo 4, son difeomórficas a una circunferencia y tienen la función del primer retorno no acotada.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BROCKER, T      Introducción a la Topología Diferencial  
 JANICH, K      (Traducción del Alemán por J. Vásquez),  
 Editorial AC, Madrid, España (1977)
- [2] CAMACHO, C      Teoria Geometrica das Folheacoes, Projecto  
 NETO, A      Euclides, Instituto de Matemática Pura y  
 Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1979)
- [3] EPSTEIN, D      A Counterexample to the Periodic Orbit  
 VOGT, E      Conjecture in Codimension 3, Annals of  
 Mathematics, 108 (1978), 539-552 .
- [4] EPSTEIN, D      Periodic Flows on 3-Manifolds, Ann. of  
 Math. 95 (1972), 68-92
- [5] \_\_\_\_\_      Foliations with all leaves Compact, Ann.  
 Inst. Fourier, 26 (1976), 265-282
- [6] EDWARDS, R      Foliations with all leaves Compact, Topology  
 MILLET, K      16 (1977), 13-32  
 SULLIVAN, D
- [7] LIMA, E      Variedades Diferenciavéis, Instituto de  
 Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro,  
 Brasil (1978)
- [8] PALIS, J      Introducao aos Sistemas Dinamicos, Edito-  
 de MELO, W      rial Edgar Blucher, Ltda. Rio de Janeiro,  
 Brasil (1979)
- [9] REEB, G      Sur certaines propriétés topologiques  
des-variétés feuilletées. Act. Sc. et  
 Ind-1183, Hermann, París (1952)
- [10] SINGER, I      Lectures Notes on elementary Topology and  
 THORPE, J      Geometry, Springer-Verlag, New York,  
 United States of America (1967)

- [11] SOTOMAYOR, J Lições de equações diferenciais ordinárias, Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1979)
- [12] SULLIVAN, D A new Flow, Bull. A.M.S 82 (1976), 331-332
- [13] \_\_\_\_\_ A Counterexample to the Periodic Orbit Conjecture, Publ. I.H.E.S. 46 (1976), 5-14
- [14] WARNER, F Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company, Illinois, United States of America (1971)
- [15] VALDIVIA, O Introducción a la Topología Diferencial, Universidad de Panamá, Panamá (1984)
- [16] VOGT, E Foliations of codimension 2 with all leaves Compact. Manuscripta Math. 18, (1976), 187-212
- [17] \_\_\_\_\_ A periodic flow with infinite Epstein hierarchy, to appear in Manuscripta Math. (Received December 5, 1977)