

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POST-GRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

EXTENSION DEL TEOREMA DE TYCHONOFF Y
DE LA COMPACTIFICACION STONE-CECH A LA
CATEGORIA DE LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS DIFUSOS.

Por:

Jorge Eliezer Hernández Urieta

Tesis presentada como uno de los requisitos para
optar por el grado de Maestro en Ciencias con
Especialización en Matemática.

Panamá

1981

TM

UNIVERSIDAD DE PANAMA



ABR. 2 1982

Observación del Acta

Aprobado por:

Director de Tesis

[Signature]
José Reategui C. Ph. D.

Miembro del Jurado

[Signature]
Jorge Rojo Ph. D.

Miembro del Jurado

[Signature]
Arsenio Cornejo M.Sc.

Fecha

[Signature]
12 febrero 1982

183424

DEDICATORIA

A mis padres, Elena y Teodoro Hernández, que con amor cultivaron en mí el deseo de superación; a mis hermanos que me apoyaron en todo momento; a mi esposa, Edith, que con paciencia y amor me alentó a lo largo de mi camino; dedico éste mi trabajo de graduación.

AGRADECIMIENTO

Queremos extender nuestro más sincero reconocimiento al Profesor, José Reátegui, por su dedicación, apoyo y asesoría; a mis amigos, que de una manera u otra han contribuido a la culminación de este trabajo de graduación.

INDICE GENERAL

	Página
INTRODUCCION	xi
CAPITULO I. NOCIONES PRELIMINARES.	
1. Conjuntos Difusos.....	2
2. Puntos Difusos.....	3
3. Operaciones y Relaciones.....	3
4. Topologías Difusas.....	4
5. Ejemplos de Espacios Topológicos Difusos.....	5
6. Bases y Sub-bases.....	6
7. Vecindades.....	6
8. Quasi-Coincidencia.....	6
9. Q-Vecindades.....	7
10. Interior. Adherencia. Punto de Acumulación.....	8
11. Espacios Hausdorff.....	10
12. Sub-espacios.....	10
13. Funciones Generalizadas.....	11
14. D-Continuidad.....	13
15. α -Compacidad.....	13
CAPITULO II. TOPOLOGIA INICIAL Y ULTRA-COMPACIDAD.	
1. Topología Inicial.....	16
2. Ultra-Compacidad.....	26
3. Ultra-Hausdorff.....	30

	Página
CAPITULO III. EL TEOREMA DE TYCHONOFF. ULTRA- COMPACTIFICACION STONE-ČECH.	
1. El Teorema de Tychonoff Difuso...	35
2. Densidad. Ultra-Densidad.....	39
3. Ultra-Compactificación Stone- Čech.....	42
CAPITULO IV. CONCLUSIONES.....	49
BIBLIOGRAFIA.....	54

INTRODUCCION

El trabajo que a continuación presentamos se fundamenta en la teoría de lo difuso. Esta teoría, introducida por L. A. Zadeh [12], generaliza la noción de conjunto ordinario y tiene una visión más amplia de aplicación particularmente en el campo de patrones de clasificación y procesos de información.

Siguiendo los delineamientos de R. Lowen [5-7] y H. W. Martin [8] demostraremos el teorema de Tychonoff y el teorema de ultra-compactificación Stone-Čech, y hacemos un estudio de los funtores \bar{w} y \bar{i} que relacionan las categorías de los espacios topológicos y de los espacios topológicos difusos.

Este trabajo se ha desarrollado a través de cuatro capítulos: En el primero se dan las nociones preliminares, en el cual se define lo que es un conjunto difuso; topología difusa; bases y sub-bases; vecindades; Q-vecindades; interior, adherencia y punto de acumulación de un conjunto difuso; espacios de Hausdorff; subespacios; funciones generalizadas; funciones D-continuas y α -compacidad; además se da una caracterización de los conjuntos abiertos a través de Q-vecindades. En el segundo capítulo nos dedicamos al estudio de la topología inicial $i(\mathcal{T})$ de un espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) , la ultra-compactidad y los espacios topológicos difusos ultra-Hausdorff; además dado el espacio topológico (X, \mathcal{U}) y el espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) se caracteriza la topología $i(\mathcal{T})$ y se estudian las relaciones entre \mathcal{U} , $i(w(\mathcal{U}))$ y \mathcal{T} , $w(i(\mathcal{T}))$. En

el tercero estudiamos la densidad y la ultra-densidad, y demostramos el teorema de Tychonoff y construimos la ultra-compactificación Stone-Čech de un espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) tal que $(X, i(\mathcal{T}))$ es Tychonoff, que son los temas principales de nuestro trabajo. En el cuarto capítulo presentamos las conclusiones, en el cual hacemos ver que la categoría de los espacios topológicos es una sub-categoría plena de la categoría de los espacios topológicos difusos.

Los métodos de investigación seguidos en esta tesis son los mismos que se siguen en la matemática no difusa, puesto que se demuestra en la lógica de lo difuso que ambos métodos son iguales.

CAPITULO I
NOCIONES PRELIMINARES

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados más importantes de la teoría de los conjuntos generalizados o de Zadeh y de la topología de lo difuso, los cuales utilizaremos en el desarrollo de nuestro tema. Para tal propósito, X denota un conjunto (ordinario) no vacío, I el intervalo unitario $[0,1]$ equipado con la topología usual τ_I e I_{τ} es I equipado con la topología:

$$\tau_{\tau} = \{(\alpha, 1] : \alpha \in I\} \cup \{I\}$$

1. Dado un conjunto X , a toda función A de X en I se le llama conjunto difuso en X o conjunto generalizado o conjunto de Zadeh. A la familia de los conjuntos difusos en X se le denota por $G(X)$. Para todo $x \in X$, $A(x)$ es llamado el grado de pertenencia de x en A . El conjunto $\{x \in X : A(x) > 0\}$ es denominado el soporte de A y se denota $\text{sop}(A)$ o A_0 . Si A toma solamente los valores $0,1$ (o sea A es una función característica), A es llamado conjunto crispado. Particularmente, el conjunto crispado que toma el valor 1 en X es denotado por X y el conjunto crispado que toma el valor 0 en X es denotado por \emptyset .

Con el fin de simplificar la escritura y de no causar confusión, adoptaremos la siguiente convención; como es sabido todo subconjunto de X determina una función característica y viceversa, o sea que existe una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de X y las funciones características de X (o conjuntos crispados en X), por consiguiente considerare-

mos todo subconjunto de X como un conjunto crispado y viceversa.

2. Un conjunto difuso en X es llamado punto difuso, si y solo si, toma el valor 0 para todo $y \in X$ excepto para un solo punto $x \in X$. Si el valor para x es λ ($0 < \lambda \leq 1$) denotamos el punto difuso por x_λ , donde el punto x es llamado el soporte de este. Si $\lambda = 1$ el punto difuso x_λ es llamado punto crispado.

Un punto difuso x_λ se dice que está contenido en un conjunto difuso A , o que pertenece a A , y lo denotamos por $x_\lambda \in A$, si y solo si, $\lambda \leq A(x)$.

3. Operaciones y Relaciones.

a. Sea J un conjunto de índices, y sea

$\mathcal{F} = \{A_j : j \in J\}$ una familia de conjuntos difusos en X . Entonces la unión $\bigcup_{j \in J} A_j$ y la intersección $\bigcap_{j \in J} A_j$ son definidas, respectivamente, por las fórmulas siguientes:

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)(x) = \sup \{ A_j(x) : j \in J \}, \text{ para todo } x \in X,$$

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)(x) = \inf \{ A_j(x) : j \in J \}, \text{ para todo } x \in X$$

b. El complemento de A , denotado por A' , es definido por la fórmula siguiente:

$$A'(x) = 1 - A(x), \text{ para todo } x \in X$$

c. Dados los conjuntos difusos A y B , diremos que A está incluido en B , y lo denotaremos $A \subset B$, si y solo si,

$A(x) \leq B(x)$ para todo $x \in X$.

d. Dos conjuntos difusos A y B en X se intersectan, si y solo si, existe un punto $x \in X$ tal que $(A \cap B)(x) \neq \emptyset$.

De las definiciones anteriores se obtiene la siguiente ley, de De Morgan's:

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)' = \bigcap_{j \in J} A'_j$$

4. Una familia τ de conjuntos difusos en X es llamada topología difusa sobre X , si y solo si, satisface los siguientes axiomas:

T.1 $\emptyset, X \in \tau$

T.2 $A \cap B \in \tau$ para todo $A, B \in \tau$

T.3 $\bigcup_{j \in J} A_j$ donde $A_j \in \tau$ y J es un conjunto de índices.

El par (X, τ) es llamado espacio topológico difuso. Todo miembro de τ es llamado conjunto difuso abierto. El complemento de un conjunto difuso abierto es llamado conjunto difuso cerrado.

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías difusas sobre X . Si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces diremos que τ_2 es más fina que τ_1 , o τ_1 es más gruesa que τ_2 .

En este trabajo (X, τ) puede representar un espacio topológico ordinario o un espacio topológico difuso, por consiguiente utilizaremos las frases espacio topológico y espacio topológico difuso, respectivamente, para diferenciar los con-

ceptos.

5. Ejemplos de espacios topológicos difusos.

a. Dado un conjunto X , la familia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es una topología difusa sobre X llamada topología difusa cáptica. El par (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico difuso, llamado espacio topológico difuso cáptico.

b. Consideremos el conjunto X y la familia $\mathcal{T}_d = \{A \in G(X) : A \text{ es crispado}\}$ de conjuntos difusos en X , entonces \mathcal{T}_d es una topología difusa sobre X , que la llamaremos topología difusa discreta. El par (X, \mathcal{T}_d) recibe el nombre de espacio topológico difuso discreto.

c. Para todo conjunto X , la familia $\mathcal{T}_{ud} = G(X)$ es una topología difusa sobre X , que la llamaremos topología difusa ultra-discreta. El par (X, \mathcal{T}_{ud}) recibe el nombre de espacio topológico difuso ultra-discreto.

d. Dado un conjunto X y la familia $\mathcal{T} = \{A \in G(X) : A \text{ es constante}\}$ de conjuntos difusos en X , entonces el par (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico difuso.

e. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Consideremos la familia:

$w(\mathcal{T}) = \{A \in G(X) : A \text{ es } \mathcal{T}\text{-}\mathcal{T}_I \text{ semicontinua inferiormente}\}$ de conjuntos difusos en X , entonces $w(\mathcal{T})$ es una topología difusa sobre X . El par $(X, w(\mathcal{T}))$ es llamado espacio topológico difuso inducido por (X, \mathcal{T}) .

6. Sea (X, τ) un espacio topológico difuso. Una subfamilia β de τ es llamada base de τ , si y solo si, para cada $A \in \tau$ existe $\beta_A \subset \beta$ tal que $A = \bigcup_{B \in \beta_A} B$. Una subfamilia

$\mathcal{L} \subset \tau$ es una sub-base de τ , si y solo si, la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{L} es una base de τ .

7. Sea (X, τ) un espacio topológico difuso. Un conjunto difuso A en X es llamado vecindad del punto difuso x_λ , si y solo si, existe $B \in \tau$ tal que $x_\lambda \in B \subset A$. La familia de todas las vecindades de x_λ es llamado el sistema de vecindades de x_λ , y se denota por Γ_{x_λ}

De la definición anterior se deduce fácilmente la siguiente proposición:

Proposición 1.7.1: Un conjunto difuso A es abierto, si y solo si, es vecindad de cada uno de sus puntos.

8. Se dice que un punto difuso x_λ es quasi-coincidente con A , y se denota $x_\lambda q A$, si y solo si, $\lambda + A(x) > 1$. Un conjunto difuso A es quasi-coincidente con B , y se denota por $A q B$, si y solo si, existe $x \in X$ tal que $A(x) + B(x) > 1$. De estas definiciones se deduce un resultado muy importante que lo expresaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.8.1: [9] $A \subset B$, si y solo si, A y B' no son quasi-coincidentes; particularmente, $x_\lambda \in A$, si y solo si, x_λ no es quasi-coincidente con A' .

9. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Un conjunto difuso A en X es llamado Q -vecindad del punto difuso x_λ , si y solo si, existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $x_\lambda \text{ q } B \subset A$. Una Q -vecindad A es abierta, si A es abierta. La familia de todas las Q -vecindades de x_λ es llamado el sistema de Q -vecindades de x_λ , y se denota por Q_{x_λ} .

Se puede observar que, en general, una Q -vecindad de un punto no contiene a dicho punto, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.9.1: Consideremos el espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) de 5-d, donde $X = I$. Tomemos el conjunto difuso A en X definido por:

$$A : X \longrightarrow I$$

$$A(x) = 1/2, \text{ para todo } x \in X$$

es claro que A es Q -vecindad de $x_{3/4}$ ($x = 1/2$) puesto que $3/4 + A(1/2) > 1$ y $A \in \mathcal{T}$; sin embargo $x_{3/4} \notin A$, puesto que $A(x) < 3/4$.

A continuación presentaremos una proposición que caracteriza los conjuntos difusos abiertos en termino de Q -vecindades.

Proposición 1.9.1: Un conjunto difuso A es abierto, si y solo si, es Q -vecindad de todos los puntos con los cuales él es quasi-coincidente.

Demostración:

La condición necesaria es obvia. Mostraremos la condición suficiente. Sea $x_\lambda \in A$ y sea $0 < \mu < \lambda$, entonces $x_{1-\mu} \text{ q } A$,

por consiguiente existe un abierto U_μ tal que $x_{1-\mu} \in U_\mu \subset A$, de donde se tiene que $x_\mu \in U_\mu$. Sea $U_{x_\lambda} = \bigcup_{\mu < \lambda} U_\mu$, entonces U_{x_λ} es un abierto y $x_\lambda \in U_{x_\lambda} \subset A$, por consiguiente $A = \bigcup_{x_\lambda \in A} U_{x_\lambda}$ y A es abierto.

10. Interior. Adherencia. Punto de Acumulación.

a. Un punto difuso x_λ es un punto interior de un conjunto difuso A , si y solo si, A es una vecindad de x_λ . A la unión de todos los puntos interiores de A se le llama interior del conjunto difuso A , y se denota A° .

Al igual que en la topología general resulta que A° es el mayor abierto contenido en A , por lo tanto $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

b. Un punto difuso x_λ es un punto adherente de un conjunto difuso A , si y solo si, toda Q -vecindad de x_λ es quasi-coincidente con A . A la unión de todos los puntos adherentes de A se le llama adherencia de A , y se denota \bar{A} .

Como en la topología general, obtenemos aquí también, que \bar{A} es la intersección de todos los conjuntos difusos cerrados que contiene A , por lo tanto $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

c. Un punto difuso x_λ es un punto borde de un conjunto difuso A , si y solo si, $x_\lambda \in \bar{A} \cap \bar{A}^c$. La unión de todos los puntos bordes de A es llamado el borde A , y se denota

$\delta(A)$. Así pues:

$$\delta(A) = \bar{A} \cap \bar{A}^c$$

En la topología general se cumple la igualdad $\bar{A} = A \cup \delta(A)$, mientras que aquí solo se cumple $A \cup \delta(A) \subset \bar{A}$, como se muestra en la proposición y en el siguiente ejemplo:

Proposición 1.10.1: $A \cup \delta(A) \subset \bar{A}$

Demostración:

$$\begin{aligned} A \cup \delta(A) &= A \cup (\bar{A} \cap \bar{A}^c) \\ &= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{A}^c) \\ &= \bar{A} \cap (A \cup \bar{A}^c) \end{aligned}$$

por lo tanto $A \cup \delta(A) \subset \bar{A}$.

Ejemplo 1.10.1: En este ejemplo probaremos que

$\bar{A} \not\subset A \cup \delta(A)$. En efecto, consideremos el espacio topológico difuso (X, τ) de 5-d, donde $X = I$. Tomemos el conjunto difuso A en X definido por:

$$A : X \longrightarrow I$$

$$A(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

entonces $\bar{A} = X$ y $A \cup \delta(A) = A$, pero $X \neq A$, por consiguiente $\bar{A} \not\subset A \cup \delta(A)$.

d. Un punto difuso x_λ es un punto de acumulación de un conjunto difuso A , si y solo si, x_λ es un punto adherente de A , y toda Q -vecindad de x_λ y A son quasi-coincidentes en un punto diferente de x si $x_\lambda \in A$. A la unión de todos los puntos de acumulación de A se le llama el conjunto derivado de A , y se denota A^d . Evidentemente $A^d \subset \bar{A}$.

De las definiciones de punto adherente y punto de acumulación, se deduce que $\bar{A} = A \cup A^d$; por consiguiente, podemos afirmar que los puntos difusos de \bar{A} que no pertenecen a $A \cup \delta(A)$ son los puntos de acumulación de A que no están en A .

Así podemos enunciar la siguiente proposición que nos caracteriza los conjuntos cerrados a través de sus puntos de acumulación.

Proposición 1.10.2: [9] Un conjunto difuso A es cerrado, si y solo si, contiene todos sus puntos de acumulación.

11. Un espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) es T_2 (Hausdorff), si y solo si, para cada par de puntos difusos x_λ , y_μ con $x \neq y$, existen Q -vecindades U y V de x_λ e y_μ , respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.

De esta definición y de la definición de punto de acumulación se deduce que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico difuso T_2 , entonces todo punto de acumulación de un punto difuso x_μ en (X, \mathcal{T}) es de la forma x_λ ($\lambda > \mu$).

12. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso y Y un conjunto crispado de X , entonces la familia \mathcal{T}_Y definido por:

$$\mathcal{T}_Y = \{ A/Y : A \in \mathcal{T} \}$$

que es obviamente una topología difusa sobre Y , es denominada la topología difusa relativa, o la relativización de \mathcal{T} a Y . Tal espacio topológico difuso (Y, \mathcal{T}_Y) es llamado subespacio de (X, \mathcal{T}) .

Con el fin de no causar confusión y de simplificar la exposición, adoptaremos las siguientes convenciones:

a. Para referirnos al subespacio (Y, \mathcal{T}_Y) omitiremos la

topología relativa τ_Y y simplemente diremos el subespacio Y .

b. Un conjunto difuso A en Y es considerado como un conjunto difuso en X en el sentido que A toma el valor 0 en $X-Y$. Inversamente, un conjunto difuso en X que toma el valor 0 en $X-Y$ es considerado como un conjunto difuso en Y .

c. Para cada conjunto difuso A en el subespacio (Y, τ_Y) , la adherencia de A con respecto a τ_Y y τ son denotadas por \bar{A}_Y y \bar{A}_X respectivamente.

De la definición de topología relativa y de los conceptos de complementación y Q -vecindad obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.12.1: [9] Sean (Y, τ_Y) un subespacio del espacio topológico difuso (X, τ) y A un conjunto difuso en Y ; entonces:

a. A es τ_Y -cerrado, si y solo si, existe un conjunto difuso τ -cerrado B tal que $A = B/Y$.

b. Un punto difuso y_λ en Y es un punto de acumulación de A con respecto a τ_Y , si y solo si, y_λ es un punto de acumulación de A con respecto a τ .

c. $\bar{A}_Y = Y \cap \bar{A}_X$

d. A es τ_Y -abierto, si y solo si, existe un conjunto difuso τ -abierto B tal que $A = B/Y$.

13. Funciones Generalizadas.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Para cada conjunto difuso A en X definimos el conjunto difuso $f(A)$ en Y mediante

la fórmula:

$$f(A)(Y) = \begin{cases} \sup \{ A(x) : x \in f^{-1}(\{y\}) \} & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

De igual manera, para un conjunto difuso B en Y definimos el conjunto difuso $f^{-1}(B)$ en X mediante la fórmula:

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)), \text{ para todo } x \in X$$

De las definiciones anteriores se obtienen las siguientes propiedades:

Propiedades: [10] Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B conjuntos difusos en X e Y respectivamente;

entonces:

a. $A \subset f^{-1}(f(A))$. $f^{-1}(f(A)) = A$, si y solo si, para todo $y \in Y$ se tiene $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ y A es una función constante en $f^{-1}(\{y\})$.

b. $f(f^{-1}(B)) \subset B$. $f(f^{-1}(B)) = B$, si y solo si, $\text{sop}(B) \subset f(X)$.

c. Para cada punto difuso x_λ en X, $f(x_\lambda)$ es un punto difuso en Y y $f(x_\lambda) = (f(x))_\lambda$.

d. $f(A) \subset B$, si y solo si, $A \subset f^{-1}(B)$.

e. Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de conjuntos difusos en X, entonces $f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$.

f. Si A y B son conjuntos crispados, entonces $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conjuntos crispados en Y y X, respectivamente.

Además $f(A)$ coincide con el conjunto crispado

$\{y \in Y : \exists x \in A, f(x) = y\}$ de Y , y $f^{-1}(B)$ coincide con el conjunto crispado.

$$\{x \in X : f(x) \in B\} \text{ de } X.$$

14. Sean (X, τ) y (Y, \mathcal{U}) dos espacios topológicos difusos y $f : X \longrightarrow Y$ una función; la función f es llamada continua difusa o D -continua, si y solo si, para todo $B \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(B) \in \tau$. La función f es llamada homeomorfismo difuso o D -homeomorfismo, si y solo si, f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son D -continuas.

Proposición 1.14.1: [10] Sean (X, τ) y (Y, \mathcal{U}) dos espacios topológicos difusos y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mathcal{U})$ una función; las siguientes propiedades son equivalentes:

- a. f es D -continua
- b. Para cada A \mathcal{U} -cerrado, $f^{-1}(A)$ es τ -cerrado
- c. Para cada miembro V de una sub-base \mathcal{L} de \mathcal{U} , $f^{-1}(V)$ es τ -abierto.
- d. Para cada punto difuso x_λ en X y para cada Q -vecindad V de $f(x)_\lambda$, existe una Q -vecindad U de x_λ tal que $f(U) \subset V$.
- e. Para cada conjunto difuso A en X , $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- f. Para cada conjunto difuso B en Y ,

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$$

15. α -Compacidad.

Una familia \mathcal{F} de conjuntos difusos en X es llamada

α -cubrimiento de X , si y solo si, para todo $x \in X$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A(x) > \alpha$. Un α -cubrimiento \mathcal{F} de un espacio topológico difuso (X, \mathcal{C}) se dice que es abierto si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$

Sean $0 \leq \alpha < 1$ y (X, \mathcal{C}) un espacio topológico difuso. (X, \mathcal{C}) es α -compacto, si y solo si, todo α -cubrimiento abierto \mathcal{F} de X posee una subfamilia finita que es un α -cubrimiento de X .

CAPITULO II

TOPOLOGIA INICIAL Y ULTRA-COMPACIDAD

1. Topología Inicial.

Definición 2.1.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso, entonces $i(\mathcal{T})$ denota la topología más pequeña (menos fina) sobre X que hace todos los miembros de \mathcal{T} , semi-continuas inferiormente.

Consideremos el espacio topológico (I_r, \mathcal{T}_r) , luego para todo $A \in \mathcal{T}$, $A : X \rightarrow (I_r, \mathcal{T}_r)$.

De la topología general sabemos que existe una topología sobre X , que la denotaremos $\delta(\mathcal{T})$, que es la topología más pequeña sobre X que hace los miembros de \mathcal{T} , $\delta(\mathcal{T}) - \mathcal{T}_r$ continuos.

$\delta(\mathcal{T})$ recibe el nombre de topología inicial sobre X , inducida por la familia $\{X, I_r, \mathcal{T}_r, \mathcal{T}\}$

Proposición 2.1.1: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A : X \rightarrow I$ una función. Entonces $A \in w(\mathcal{T})$, si y solo si, A es $\mathcal{T} - \mathcal{T}_r$ continua.

Demostración:

Recordemos que

$$w(\mathcal{T}) = \left\{ A \in G(X) : A \text{ es } \mathcal{T} - \mathcal{T}_r \text{ semicontinua inferiormente} \right\}$$

Supongamos que $A \in w(\mathcal{T})$. Sea $U \in \mathcal{T}_r$ ($U \neq I$), entonces existe $\alpha \in I$ tal que $U = (\alpha, 1]$, luego como $A \in w(\mathcal{T})$ se tiene que $A^{-1}((\alpha, 1]) \in \mathcal{T}$. Si $U = I$, es obvio que $A^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Por consiguiente A es $\mathcal{T} - \mathcal{T}_r$ continua.

Recíprocamente. Supongamos que A es $\mathcal{T} - \mathcal{T}_r$ continua. Sea $\alpha \in I$, entonces $(\alpha, 1] \in \mathcal{T}_r$, luego $A^{-1}((\alpha, 1]) \in \mathcal{T}$. Por consiguiente $A \in w(\mathcal{T})$.

Proposición 2.1.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Entonces $\delta(\mathcal{T}) = i(\mathcal{T})$.

Demostración:

Solo tenemos que probar que $i(\mathcal{T})$ es la topología inicial sobre X inducida por la familia $\{X, I_{\mathcal{T}}, \tau_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\}$. En efecto:

i. Sea $A \in \mathcal{T}$, entonces $A \in w(i(\mathcal{T}))$, luego por la proposición 2.1.1, A es $i(\mathcal{T}) - \tau_{\mathcal{T}}$ continua.

ii. Sea \mathcal{T}' una topología sobre X que hace todos los miembros de $\mathcal{T}, \mathcal{T}' - \tau_{\mathcal{T}}$ continuos. Sea $A \in \mathcal{T}$, entonces A es $\mathcal{T}' - \tau_{\mathcal{T}}$ continuo, luego por la proposición 2.1.1, $A \in w(\mathcal{T}')$. Pero $i(\mathcal{T})$ es la topología más pequeña sobre X que cumple esta condición. Por lo tanto $i(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}'$.

Así, por (i) y (ii) se tiene que $i(\mathcal{T})$ es la topología inicial sobre X inducida por la familia $\{X, I_{\mathcal{T}}, \tau_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}\}$, o sea, $i(\mathcal{T}) = \delta(\mathcal{T})$

Observación: Como

$$\beta = \{A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \mathcal{T}, \alpha \in I\}$$

es una sub-base de la topología $\delta(\mathcal{T})$ y $\delta(\mathcal{T}) = i(\mathcal{T})$, resulta entonces que β es una sub-base de $i(\mathcal{T})$.

Proposición 2.1.3: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Entonces, para cada $\alpha \in [0, 1)$, la familia $i_{\alpha}(\mathcal{T}) = \{A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \mathcal{T}\}$ es una topología sobre X .

Demostración:

i. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ y $\emptyset^{-1}((\alpha, 1]) = \emptyset$, $X^{-1}((\alpha, 1]) = X$, se tiene que $\emptyset, X \in i_\alpha(\mathcal{T})$.

ii. Sean $B_1, \dots, B_n \in i_\alpha(\mathcal{T})$, entonces existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ tales que $B_i = A_i^{-1}((\alpha, 1])$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Luego
$$\bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n A_i^{-1}((\alpha, 1]) = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^{-1}((\alpha, 1])$$

Como $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n B_i \in i_\alpha(\mathcal{T})$

iii. Sean $\{B_j\}_{j \in J}$ una familia de elementos de $i_\alpha(\mathcal{T})$, entonces para cada $j \in J$ existe $A_j \in \mathcal{T}$ tal que $B_j = A_j^{-1}((\alpha, 1])$. Luego

$$\bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} A_j^{-1}((\alpha, 1]) = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)^{-1}((\alpha, 1]).$$

Como $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$, se tiene que $\bigcup_{j \in J} B_j \in i_\alpha(\mathcal{T})$.

Así pues, de (i), (ii) y (iii) se tiene que $i_\alpha(\mathcal{T})$ es una topología sobre X .

Proposición 2.1.4: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Entonces $i(\mathcal{T}) = \sup_{\alpha \in [0, 1)} i_\alpha(\mathcal{T})$.

Demostración:

Recordemos que la familia

$$\beta = \{ A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \mathcal{T}, \alpha \in I \}$$

es una sub-base para la topología $i(\mathcal{T})$ sobre X .

i. Como $i_\alpha(\mathcal{T}) \subset \beta$, se tiene que $i_\alpha(\mathcal{T}) \subset i(\mathcal{T})$ para todo $\alpha \in [0, 1)$ por consiguiente

$$\sup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\mathcal{T}) \subset i(\mathcal{T})$$

ii. Como $\beta \subset \bigcup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\mathcal{T})$, se tiene que

$$i(\mathcal{T}) \subset \sup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\mathcal{T})$$

Así de (i) y (ii) obtenemos que

$$i(\mathcal{T}) = \sup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\mathcal{T}).$$

Proposición 2.1.5: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\alpha \in [0,1)$, entonces $i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, y por consiguiente $i(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.

Demostración:

Como $i(w(\mathcal{T}))$ es la topología más pequeña sobre X que hace los miembros de $w(\mathcal{T})$ semicontínuos inferiormente, y \mathcal{T} hace los miembros de $w(\mathcal{T})$ semi-contínuos inferiormente, entonces $i(w(\mathcal{T})) \subset \mathcal{T}$. Luego como $i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) \subset i(w(\mathcal{T}))$, se tiene que $i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) \subset \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in [0,1)$.

Recíprocamente. Sea $A \in \mathcal{T}$, entonces A es un conjunto crispado en X y $A \in w(\mathcal{T})$, por consiguiente

$$A^{-1}((\alpha, 1]) \in i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) \text{ para todo } \alpha \in [0,1). \text{ Pero como}$$

$$A^{-1}((\alpha, 1]) = A, A \in i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) \text{ para todo } \alpha \in [0,1). \text{ Luego}$$

$$\mathcal{T} \subset i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) \text{ para todo } \alpha \in [0,1).$$

Así pués, $i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in [0,1)$.

Como $i(w(\mathcal{T})) = \sup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\mathcal{T})$ y $i_{\alpha}(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, se tiene

que
$$i(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$$

Proposición 2.1.6: Sea (X, τ) un espacio topológico difuso. Entonces $\tau \subset \omega(i(\tau))$.

Demostración:

Sea $A \in \tau$, entonces A es $i(\tau)$ - τ_I semicontinua inferiormente, por lo tanto $A \in \omega(i(\tau))$. Así $\tau \subset \omega(i(\tau))$.

Ejemplo 2.1.1: Consideremos el espacio topológico difuso (X, τ) de 5-d, donde $X = I$. Entonces es claro que $i_\alpha(\tau) = \{\emptyset, X\}$ para todo $\alpha \in [0, 1)$, por consiguiente:

$$i(\tau) = \sup_{\alpha \in [0, 1)} i_\alpha(\tau) = \{\emptyset, X\}$$

Luego

$$\omega(i(\tau)) = \tau$$

Ejemplo 2.1.2: Sea $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = (0, 1)$ y $X_2 = (2, 3)$. Para cada $\lambda, \mu \in I$ definimos el conjunto difuso $C_{\lambda, \mu}$ en X por:

$$C_{\lambda, \mu} : X \rightarrow I$$

$$C_{\lambda, \mu}(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x \in X_1 \\ \mu & \text{si } x \in X_2 \end{cases}$$

Es claro que la familia

$$\tau = \{X, \emptyset, C_{2/3, 0}, C_{0, 2/3}, C_{2/3, 2/3}\}$$

es una topología difusa sobre X . Además se tiene que

$$i_\alpha(\tau) = \{\emptyset, X, X_1, X_2\} \quad \text{si } \alpha < 2/3, \text{ e } i_\alpha(\tau) = \{\emptyset, X\}$$

si $\alpha \geq 2/3$; por consiguiente $i(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X, X_1, X_2\}$
 Luego $w(i(\mathcal{T})) = \{C_{i,j} : i, j \in I\}$. Así pues,
 $\mathcal{T} \subsetneq w(i(\mathcal{T}))$.

Proposición 2.1.7: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso y F un conjunto crispado en X . Entonces

$$i(\mathcal{T}_F) = i(\mathcal{T})_F$$

Demostración:

Una sub-base para la topología $i(\mathcal{T})_F$ sobre F es
 $\beta_1 = \{F \cap B^{-1}((\alpha, 1]) : B \in \mathcal{T}, \alpha \in I\}$

y una sub-base para la topología $i(\mathcal{T}_F)$ sobre F es

$$\beta_2 = \{V^{-1}((\alpha, 1]) : V \in \mathcal{T}_F, \alpha \in I\}$$

Mostraremos que $\beta_1 = \beta_2$.

Sea $A \in \beta_1$, entonces existen $B \in \mathcal{T}$ y $\alpha \in I$ tales que:

$$\begin{aligned} A &= F \cap B^{-1}((\alpha, 1]) \\ &= \{x \in F : x \in B^{-1}((\alpha, 1])\} \\ &= \{x \in F : B(x) > \alpha\} \\ &= (B/F)^{-1}((\alpha, 1]). \end{aligned}$$

Luego como $B/F \in \mathcal{T}_F$, se tiene que $A \in \beta_2$. Así $\beta_1 \subset \beta_2$.

Sea $A \in \beta_2$, entonces existen $V \in \mathcal{T}_F$ y $\alpha \in I$ tal que
 $A = V^{-1}((\alpha, 1])$. Como $V \in \mathcal{T}_F$, existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $V = B/F$.

Luego

$$\begin{aligned}
 A &= V^{-1}((\alpha, 1]) \\
 &= (B/F)^{-1}((\alpha, 1]) \\
 &= \{x \in F : B(x) > \alpha\} \\
 &= \{x \in F : x \in B^{-1}((\alpha, 1])\} \\
 &= F \cap B^{-1}((\alpha, 1])
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $A \in \beta_1$. Así $\beta_2 \subset \beta_1$.

Hemos probado así, que $\beta_1 = \beta_2$. Por lo tanto $i(\tau_F) = i(\tau)_F$.

Proposición 2.1.8: Sean (X, τ) un espacio topológico difuso y $\alpha \in [0, 1)$. Entonces (X, τ) es α -compacto, si y solo si, $(X, i_\alpha(\tau))$ es compacto.

Demostración:

Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico difuso α -compacto. Sea \mathcal{H} un cubrimiento abierto de $(X, i_\alpha(\tau))$, luego $\mathcal{H} \subset i_\alpha(\tau)$ y $X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Como $\mathcal{H} \subset i_\alpha(\tau)$, para cada $H \in \mathcal{H}$ existe $A_H \in \tau$ tal que $H = A_H^{-1}((\alpha, 1])$; por consiguiente:

$X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} A_H^{-1}((\alpha, 1])$. Sea $x \in X$, entonces existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $x \in A_H^{-1}((\alpha, 1])$, por lo tanto $A_H(x) > \alpha$; o sea, la familia $\{A_H : H \in \mathcal{H}\}$ es un α -cubrimiento abierto de (X, τ) . Como (X, τ) es α -compacto, existen $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H}$ tal que la familia $\{A_{H_1}, \dots, A_{H_n}\}$ es un α -cubrimiento abierto de (X, τ) .

Sea $x \in X$, entonces existe un j , $1 \leq j \leq n$, tal que, $A_{H_j}(x) > \alpha$,

por lo tanto, $x \in A^{-1}_{H_j}((\alpha, 1]) = H_j$. Así pues $x = \bigcup_{j=1}^n H_j$,

o sea, la subfamilia $\{H_1, \dots, H_n\}$ de \mathcal{H} es un cubrimiento de X , lo que demuestra que $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es compacto.

Supongamos ahora que $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es un espacio topológico compacto. Sea \mathcal{U} un α -cubrimiento abierto de (X, \mathcal{T}) , entonces para todo $x \in X$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A(x) > \alpha$, o sea, $x \in A^{-1}((\alpha, 1])$; por consiguiente $X = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A^{-1}((\alpha, 1])$ y

$A^{-1}((\alpha, 1]) \in i_\alpha(\mathcal{T})$. Por lo tanto la familia $\mathcal{H} = \{A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento abierto de $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$. Como $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es compacto, existen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^n A_j^{-1}((\alpha, 1])$. Sea $x \in X$, entonces existe un j , $1 \leq j \leq n$ tal que $x \in A_j^{-1}((\alpha, 1])$, o sea

$A_j(x) > \alpha$. Así pues la subfamilia $\{A_1, \dots, A_n\}$ de \mathcal{U} es un α -cubrimiento de X . Lo que demuestra que (X, \mathcal{T}) es α -compacto.

Corolario 2.1.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Si $(X, i(\mathcal{T}))$ es compacto, entonces (X, \mathcal{T}) es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Demostración:

Supongamos que $(X, i(\mathcal{T}))$ es compacto. Entonces como $i_\alpha(\mathcal{T}) \subset i(\mathcal{T})$, resulta que $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$. Luego por la proposición 2.1.8, (X, \mathcal{T}) es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Podemos observar que la inversa del corolario anterior no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.3: Sean $X = I$ y \mathcal{T} la topología difusa sobre X generada por la familia

$$\{ \{0\} \} \cup \{ A \in G(X) : A \text{ es constante} \} \cup \{ A \in G(X) : 0 < A(x) \leq x \forall x \in (0, 1] \text{ y } A(0) = 0 \}$$

Entonces es obvio que para todo α , $0 < \alpha < 1$, $i_\alpha(\mathcal{T})$ está generado por la familia

$$e \quad \{ \{0\}, x \} \cup \{ B \subset X : B \subset (\alpha, 1] \}$$

$$i_0(\mathcal{T}) = \{ \emptyset, X, \{0\}, (0, 1] \}$$

Por lo tanto, para todo α , $0 \leq \alpha < 1$, $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es α -compacto. Sin embargo, como $i(\mathcal{T}) = \sup_{\alpha \in [0, 1)} i_\alpha(\mathcal{T})$ es la topología discreta sobre X , $(X, i(\mathcal{T}))$ no es compacto.

Proposición 2.1.9: Sean (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{U}) dos espacios topológicos difusos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es D -continua, entonces $f : (X, i(\mathcal{T})) \rightarrow (Y, i(\mathcal{U}))$ es continua.

Demostración:

Una sub-base para la topología $i(\mathcal{U})$ es

$$\beta = \{ A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \mathcal{U}, \alpha \in I \}$$

Sean $A \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in I$, entonces

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(A^{-1}(\alpha, 1]) &= \{x \in X : f(x) \in A^{-1}((\alpha, 1])\} \\
 &= \{x \in X : A(f(x)) > \alpha\} \\
 &= \{x \in X : f^{-1}(A)(x) > \alpha\} \\
 &= [f^{-1}(A)]^{-1}((\alpha, 1]).
 \end{aligned}$$

Como $A \in \mathcal{U}$ y f es D-continua, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, por consiguiente $[f^{-1}(A)]^{-1}((\alpha, 1]) \in i(\mathcal{T})$. Así f es continua.

Podemos observar que, en general, la inversa de la proposición anterior no es cierta, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.4: Sean $X = Y = I$ y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \{A \in G(X) : A \text{ es constante}\} \\
 \mathcal{T} &= \left\{A_n \in G(X) : A_n(x) = \frac{n}{n+1} ; \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\emptyset, X\}
 \end{aligned}$$

Es claro que (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{U}) son espacios topológicos difusos. Consideremos la función identidad $f : X \longrightarrow Y$.

Sea $A \in \mathcal{U}$ donde $A(y) = 1/3$ para todo $y \in Y$, entonces

$f^{-1}(A)(x) = A(f(x)) = A(x)$, para todo $x \in X$, o sea $f^{-1}(A) = A$, por lo tanto $f^{-1}(A) \notin \mathcal{T}$ y f no es D-continua.

Sin embargo, como $i(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X\}$ y $i(\mathcal{U}) = \{\emptyset, Y\}$ son las topologías cúbicas de X e Y respectivamente, se tiene que f es $i(\mathcal{T})$ - $i(\mathcal{U})$ continua.

Proposición 2.1.10: Sean (X, τ) , (Y, \mathcal{U}) dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es τ - \mathcal{U} continua, si y solo si, f es $w(\tau)$ - $w(\mathcal{U})$ D-continua.

Demostración:

Supongamos que f es τ - \mathcal{U} continua. Sea $A \in w(\mathcal{U})$, entonces $A : Y \longrightarrow I$ es \mathcal{U} - τ_I semicontinua inferiormente, luego como $f : X \longrightarrow Y$ es τ - \mathcal{U} continua, se tiene que $A \circ f : X \longrightarrow I$ es τ - τ_I semi continua interiormente, o sea, $A \circ f \in w(\tau)$. Como $A \circ f = f^{-1}(A)$, $f^{-1}(A) \in w(\tau)$. Así f es $w(\tau)$ - $w(\mathcal{U})$ continua.

Supongamos ahora que f es $w(\tau)$ - $w(\mathcal{U})$ D-continua. Entonces por la proposición 2.1.9, f es $i(w(\tau))$ - $i(w(\mathcal{U}))$ continua, pero como $i(w(\tau)) = \tau$ e $i(w(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, f es τ - \mathcal{U} es continua.

2. ULTRA-COMPACIDAD

Definición 2.2.1: Sea (X, τ) un espacio topológico difuso. Diremos que (X, τ) es ultra-compacto, si y solo si, $(X, i(\tau))$ es compacto.

Proposición 2.2.1: Sea (X, τ) un espacio topológico difuso. Si (X, τ) es ultra-compacto, entonces (X, τ) es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Demostración:

Sea (X, τ) un espacio topológico difuso ultra-com-

pacto, entonces $(X, i(\mathcal{T}))$ es compacto, luego como $i_\alpha(\mathcal{T}) \subset i(\mathcal{T})$ para todo $\alpha \in [0, 1)$, se tiene que $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es compacto, entonces por la proposición 2.1.8, (X, \mathcal{T}) es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Podemos observar que la inversa de la proposición anterior no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1: Sea (X, \mathcal{T}) el espacio topológico difuso del ejemplo 2.1.3. Entonces $(X, i_\alpha(\mathcal{T}))$ es compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$, luego por la proposición 2.1.8, (X, \mathcal{T}) es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$. Sin embargo (X, \mathcal{T}) no es ultra-compacto, puesto que $i(\mathcal{T})$ es la topología discreta sobre $X = I$, o sea $(X, i(\mathcal{T}))$ no es compacto.

Proposición 2.2.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces (X, \mathcal{T}) es compacto, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$.

Demostración:

Supongamos que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico compacto. Como $i(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, se tiene que $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-compacto. Luego por la proposición 2.2.1, $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Supongamos ahora que $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$, entonces por la proposición 2.1.8, $(X, i_\alpha(w(\mathcal{T})))$ es compacto; pero como por la proposición 2.1.5, $i_\alpha(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$, se tiene que (X, \mathcal{T}) es compacto.

Corolario 2.2.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Si $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$, entonces $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Demostración:

Supongamos que $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$, luego por la proposición 2.2.2, (X, \mathcal{T}) es compacto, entonces como $\mathcal{T} = i(w(\mathcal{T}))$ se tiene que $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-compacto, por consiguiente por la proposición 2.2.1, $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Corolario 2.2.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces (X, \mathcal{T}) es compacto, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-compacto.

Demostración:

Esta demostración se deduce de la igualdad $i(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.

Corolario 2.2.3: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-compacto, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$.

Demostración:

La condición necesaria se obtiene de la proposición 2.2.1. Demostraremos la condición suficiente. Supongamos que $(X, w(\mathcal{T}))$ es α -compacto para algún $\alpha \in [0, 1)$, entonces por la proposición 2.2.2 (X, \mathcal{T}) es compacto, luego por el corolario 2.2.2, $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-compacto.

Definición 2.2.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso y F un conjunto crispado en X . Decimos que F es ultra-compacto en X , si y solo si, el subespacio (F, \mathcal{T}_F) es ultra-compacto.

Proposición 2.2.3: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico ultra-compacto y F un conjunto crispado en X . Si F es cerrado, entonces F es ultra-compacto en X .

Demostración:

Supongamos que F es cerrado en X . Como (X, \mathcal{T}) es ultra-compacto, $(X, i(\mathcal{T}))$ es compacto, además por ser F un conjunto crispado y cerrado en X , se tiene que F es cerrado en $(X, i(\mathcal{T}))$. Por lo tanto $(F, i(\mathcal{T})_F)$ es compacto. Luego como por la proposición 2.1.7, $i(\mathcal{T}_F) = i(\mathcal{T})_F$, se tiene que $(F, i(\mathcal{T}_F))$ es compacto, o sea (F, \mathcal{T}_F) es ultra-compacto.

Proposición 2.2.4: Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{U})$ dos espacios topológicos difusos, $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ una función D -continua y F un conjunto crispado en X . Si F es ultra-compacto en X , entonces $f(F)$ es ultra-compacto en Y .

Demostración:

Como $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$ es D -continua, entonces por la proposición 2.1.9, $f : (X, i(\mathcal{T})) \rightarrow (Y, i(\mathcal{U}))$ es continua; además como F es un conjunto crispado y ultra-compacto en X y $i(\mathcal{T}_F) = i(\mathcal{T})_F$, resulta que F es un conjunto compacto en $(X, i(\mathcal{T}))$. Luego $f(F)$ es un conjunto compacto

en $(Y, i(\mathcal{U}))$, o sea $(f(F), i(\mathcal{U})_{f(F)})$ es compacto. Pero $i(\mathcal{U})_{f(F)} = i(\mathcal{U}_{f(F)})$. Por consiguiente $(f(F), \mathcal{U}_{f(F)})$ es ultra-compacto, o sea, $f(F)$ es ultra-compacto en Y .

3. ULTRA-HAUSDORFF

Definición 2.3.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Diremos que (X, \mathcal{T}) es ultra-Hausdorff, si y solo si, $(X, i(\mathcal{T}))$ es Hausdorff.

Proposición 2.3.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Si (X, \mathcal{T}) es Hausdorff, entonces es ultra-Hausdorff.

Demostración:

Supongamos que (X, \mathcal{T}) es Hausdorff. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $x_{1/2}, y_{1/2}$ son puntos difusos en X . Luego como (X, \mathcal{T}) es Hausdorff, existen Q -vecindades abiertas $U \in Q_{x_{1/2}}, V \in Q_{y_{1/2}}$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

$$U \in Q_{x_{1/2}} \implies 1/2 + U(x) > 1 \implies U(x) > 1/2 \implies x \in U^{-1}((1/2, 1])$$

$$V \in Q_{y_{1/2}} \implies 1/2 + V(y) > 1 \implies V(y) > 1/2 \implies y \in V^{-1}((1/2, 1]).$$

Como $U^{-1}((1/2, 1]) \in i(\mathcal{T})$ y $V^{-1}((1/2, 1]) \in i(\mathcal{T})$, se tiene que $U^{-1}((1/2, 1])$ es una vecindad de x , $V^{-1}((1/2, 1])$ es una vecindad de y . Además $U^{-1}((1/2, 1]) \cap V^{-1}((1/2, 1]) = \emptyset$, puesto que $U \cap V = \emptyset$. Por consiguiente $(X, i(\mathcal{T}))$ es Hausdorff, o sea, (X, \mathcal{T}) es ultra-Hausdorff.

Podemos observar, que en general, la inversa de la proposición anterior no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1: Sea (X, \mathcal{T}) el espacio topológico difuso del ejemplo 2.1.3. Entonces $i(\mathcal{T})$ es la topología discreta sobre X , por consiguiente $(X, i(\mathcal{T}))$ es Hausdorff, o sea (X, \mathcal{T}) es ultra-Hausdorff. Sin embargo (X, \mathcal{T}) no es Hausdorff, puesto que para todo par de conjuntos difusos abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.

Corolario 2.3.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces (X, \mathcal{T}) es Hausdorff, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-Hausdorff.

Demostración:

Esta demostración se deduce de la igualdad $i(w(\mathcal{T})) = \mathcal{T}$.

Corolario 2.3.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces (X, \mathcal{T}) es Hausdorff, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es Hausdorff.

Demostración:

La condición suficiente se deduce de la proposición 2.3.1 y del corolario 2.3.1. Demostraremos la condición necesaria. Supongamos que (X, \mathcal{T}) es Hausdorff. Sean x_λ, y_μ dos puntos difusos de X , tal que $x \neq y$. Como (X, \mathcal{T}) es Hausdorff,

existen dos abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$, $y \in V$.

Se tiene entonces que U y V son conjuntos crispados en X con $U(x) = 1$ y $V(y) = 1$. Por consiguiente $U \in Q_{x,\lambda}$ y $V \in Q_{y,\mu}$, además $U \cap V = \emptyset$. Así pues $(X, w(\mathcal{T}))$ es Hausdorff.

Corolario 2.3.3: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces $(X, w(\mathcal{T}))$ es Hausdorff, si y solo si, $(X, w(\mathcal{T}))$ es ultra-Hausdorff.

Demostración:

Esta demostración se deduce de los corolarios 2.3.1 y 2.3.2.

A continuación presentaremos un ejemplo de un espacio topológico difuso ultra-Hausdorff (X, \mathcal{T}) donde existe un conjunto crispado y ultra-compacto F que no es cerrado en (X, \mathcal{T}) .

Ejemplo 2.3.2: Sean (X, \mathcal{T}) el espacio topológico difuso del ejemplo 2.1.3, y F el conjunto crispado en X definido por:

$$F : X \longrightarrow I$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

En el ejemplo 2.3.1 se probó que (X, \mathcal{T}) es ultra-Hausdorff. Como F es un conjunto unitario en X , entonces $(F, i(\mathcal{T}_F))$ es compacto, o sea, (F, \mathcal{T}_F) es ultra-compacto. Sin embargo F no es cerrado en (X, \mathcal{T}) , puesto que $\bar{F} \neq F$, ya

que $x_{1/4} \in \bar{F}$ ($x = 1/4$) y $x_{1/4} \notin F$.

Presentaremos ahora un ejemplo para ilustrar que las topologías difusas ultra-compactas no son minimales entre las topologías difusas ultra-Hausdorff.

Ejemplo 2.3.3: Sean $X = I$ y

$$\tau_1 = w(\tau_I)$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X\} \cup \{A \in G(X) : A(X) \subset \{0, 1/2\} \text{ y } A \in w(\tau_I)\}$$

Es claro que (X, τ_1) y (X, τ_2) son espacios topológicos difusos ultra-Hausdorff, puesto que $i(\tau_1) = i(\tau_2) = \tau_I$, y $\tau_2 \subsetneq \tau_1$. Además (X, τ_1) es ultra-compacto, puesto que $(X, i(\tau_1))$ es compacto. Así pues (X, τ_1) es un espacio topológico difuso ultra-Hausdorff y ultra-compacto. Sin embargo τ_1 no es minimal entre las topologías difusas ultra-Hausdorff de X .

CAPITULO III
EL TEOREMA DE TYCHONOFF
ULTRA-COMPACTIFICACION STONE-CECH

1. EL TEOREMA DE TYCHONOFF DIFUSO.

Definición 3.1.1: Sea $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos difusos. Sea $X = \prod_{j \in J} X_j$ el producto cartesiano de la familia $\{X_j : j \in J\}$ y sea P_j la proyección natural de X en la j -ésima coordenada X_j . Denotemos con $P_\alpha(J)$ la familia de todos los subconjuntos finitos de J . Sea $\beta = \left\{ \bigcap_{j \in F} P_j^{-1}(U_j) : U_j \in \tau_j, F \in P_\alpha(J) \right\}$.

La topología difusa sobre X que tiene a β como base es llamada la topología producto difuso, y se denota $\prod_{j \in J} \tau_j$. El par $(X, \prod_{j \in J} \tau_j)$ es llamado el espacio producto difuso de la familia $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$.

Observación: La topología producto difuso es la topología difusa más gruesa sobre X que hace todas las proyecciones $P_j : (X, \prod_{j \in J} \tau_j) \longrightarrow (X_j, \tau_j)$ D -continuas.

Proposición 3.1.1: Sean $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos difusos y $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \tau_j)$ el espacio producto difuso de la familia $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$. Entonces $i_\alpha(\prod_{j \in J} \tau_j) = \prod_{j \in J} i_\alpha(\tau_j)$ para todo $\alpha \in [0, 1)$, y en consecuencia $i(\prod_{j \in J} \tau_j) = \prod_{j \in J} i(\tau_j)$.



Demostración:

Recordemos que:

$$i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \left\{ A^{-1}((\alpha, 1]) : A \in \prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right\}$$

y

$$\beta = \left\{ P_j^{-1}(B_j^{-1}((\alpha, 1])) : B_j \in \mathcal{C}_j, j \in J \right\}$$

es una sub-base para la topología $\prod_{j \in J} i_\alpha(\mathcal{C}_j)$.

Probaremos que $i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \prod_{j \in J} i_\alpha(\mathcal{C}_j)$. Sea

$H \in i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$, entonces existe $A \in \prod_{j \in J} \mathcal{C}_j$ tal que

$H = A^{-1}((\alpha, 1])$. Luego existe $K \subset J$ tal que para todo

$\lambda \in K, J_\lambda \in P_\alpha(J)$, y para cada $j_\lambda \in J_\lambda$ existe $B_{j_\lambda} \in \mathcal{C}_{j_\lambda}$ con

$$A = \bigcup_{\lambda \in K} \left(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda} P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda}) \right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} H &= \left[\bigcup_{\lambda \in K} \left(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda} P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda}) \right) \right]^{-1}((\alpha, 1]) \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \left(\bigcup_{\lambda \in K} \left(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda} P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda}) \right) \right)(x) > \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in K, \left(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda} P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda}) \right)(x) > \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in K, \forall j_\lambda \in J_\lambda, P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda})(x) > \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in K, \forall j_\lambda \in J_\lambda, B_{j_\lambda}(P_{j_\lambda}(x)) > \alpha \right\} \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in K, \forall j_\lambda \in J_\lambda, P_{j_\lambda}(x) \in B_{j_\lambda}^{-1}((\alpha, 1]) \right\} \\ &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in K, \forall j_\lambda \in J_\lambda, x \in P_{j_\lambda}^{-1}(B_{j_\lambda}^{-1}((\alpha, 1])) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : \exists \lambda \in k, x \in \bigcap_{j_\lambda \in J} \left[P_{j_\lambda}^{-1} (B_{j_\lambda}^{-1} ((\alpha, 1])) \right] \right\} \\
 &= \bigcup_{\lambda \in k} \left(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda} \left[P_{j_\lambda}^{-1} (B_{j_\lambda}^{-1} ((\alpha, 1])) \right] \right)
 \end{aligned}$$

Como $P_{j_\lambda}^{-1} (B_{j_\lambda}^{-1} ((\alpha, 1])) \in \beta$, se tiene que $H \in \prod_{j \in J} i_\alpha (\mathcal{C}_j)$.

Por consiguiente $i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) \subset \prod_{j \in J} i_\alpha (\mathcal{C}_j)$.

Supongamos ahora que $H \in \beta$, entonces existe $j \in J$ y $B_j \in \mathcal{C}_j$ tal que

$$\begin{aligned}
 H &= P_j^{-1} (B_j^{-1} (\alpha, 1]) \\
 &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : P_j (x) \in B_j^{-1} ((\alpha, 1]) \right\} \\
 &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : B_j (P_j (x)) > \alpha \right\} \\
 &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : P_j^{-1} (B_j) (x) > \alpha \right\} \\
 &= \left\{ x \in \prod_{j \in J} X_j : x \in \left[P_j^{-1} (B_j) \right]^{-1} ((\alpha, 1]) \right\} \\
 &= (P_j^{-1} (B_j))^{-1} ((\alpha, 1]).
 \end{aligned}$$

Como $P_j^{-1} (B_j) \in \prod_{j \in J} \mathcal{C}_j$, se tiene que $H \in i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$. Por consiguiente $\beta \subset i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$ y $\prod_{j \in J} i_\alpha (\mathcal{C}_j) \subset i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$.

Hemos probado así que $\prod_{j \in J} i_\alpha (\mathcal{C}_j) = i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$.

Probemos ahora que $i \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \prod_{j \in J} i (\mathcal{C}_j)$. En efecto:

$$i \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right) = \sup_{\alpha \in [0, 1)} i_\alpha \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{\alpha \in [0,1)} \prod_{j \in J} i_{\alpha}(\tau_j) \\
 &= \prod_{j \in J} \sup_{\alpha \in [0,1)} i_{\alpha}(\tau_j) \\
 &= \prod_{j \in J} i(\tau_j)
 \end{aligned}$$

Así pues

$$i\left(\prod_{j \in J} \tau_j\right) = \prod_{j \in J} i(\tau_j).$$

Teorema 3.1.1: (Tychonoff). El espacio producto difuso

$$\left(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \tau_j\right)$$

de la familia $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ no vacía de espacios topológicos difusos es ultra-compacto, si y solo si, para todo $j \in J, (X_j, \tau_j)$ es ultra-compacto.

Demostración:

La condición necesaria se deduce de la proposición 2.2.4, y de que para todo $j \in J$ la proyección $P_j: \prod X_j \longrightarrow X_j$ es D-continua.

Probaremos la condición suficiente. Supongamos que para todo $j \in J, (X_j, \tau_j)$ es ultra-compacto, entonces $(X_j, i(\tau_j))$ es compacto, luego por el teorema de Tychonoff para la topología general se tiene que $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} i(\tau_j))$ es compacto.

Como por la proposición 3.3.1, $\prod_{j \in J} i(\tau_j) = i(\prod_{j \in J} \tau_j)$, se

tiene que $(\prod_{j \in J} X_j, i(\prod_{j \in J} \tau_j))$ es compacto, por lo tanto

$(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} \tau_j)$ es ultra-compacto.

2. DENSIDAD. ULTRA-DENSIDAD.

Definición 3.2.1: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Un conjunto difuso A en X es denso en (X, \mathcal{T}) , si y solo si, $\bar{A} = X$. Si (Y, \mathcal{T}_Y) es un sub-espacio difuso de (X, \mathcal{T}) , entonces (Y, \mathcal{T}_Y) es denso en (X, \mathcal{T}) , si y solo si, Y es denso en X .

Definición 3.2.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso. Un conjunto difuso A en X es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) , si y solo si, para todo $\alpha \in [0, 1)$ $A^{-1}((\alpha, 1])$ es denso en el espacio topológico $(X, i(\mathcal{T}))$. Un subespacio difuso (Y, \mathcal{T}_Y) de (X, \mathcal{T}) es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) , si y solo si, Y es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) .

Proposición 3.2.1: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso y A un conjunto difuso en X . Entonces A es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) , si y solo si, A es denso en $(X, w(i(\mathcal{T})))$.

Demostración:

Supongamos primero que A no es denso en $(X, w(i(\mathcal{T})))$, entonces existe un conjunto difuso B cerrado en $(X, w(i(\mathcal{T})))$ tal que $A \subset B$ y $B \neq X$, por lo tanto existen un número $\alpha \in [0, 1)$ y un punto $x \in X$ tal que $A(x) \leq B(x) < \alpha < 1$. Como B es cerrado en $(X, w(i(\mathcal{T})))$, la función $B : X \rightarrow I$ es semicontinua superiormente relativa a $i(\mathcal{T})$. Luego $B^{-1}([0, \alpha)) \in i(\mathcal{T})$ y $B^{-1}([0, \alpha)) \neq \emptyset$. Además como $A \subset B$, se

tiene que $A^{-1}((\alpha, 1]) \cap B^{-1}([0, \alpha)) = \emptyset$. Por consiguiente $A^{-1}((\alpha, 1])$ no es denso en $(X, i(\mathcal{T}))$, y A no es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) .

Recíprocamente, supongamos que A no es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) , entonces existe un número $\alpha \in [0, 1)$ tal que $A^{-1}((\alpha, 1])$ no es denso en $(X, i(\mathcal{T}))$, por lo tanto existe un conjunto abierto no vacío G en $(X, i(\mathcal{T}))$ tal que $A^{-1}((\alpha, 1]) \cap G = \emptyset$, luego $G \subset A^{-1}([0, \alpha])$. Tomemos un número β , $\alpha < \beta < 1$ y definamos la función

$$B : X \longrightarrow I$$

$$B(x) = \begin{cases} \beta & \text{si } x \in G \\ 1 & \text{si } x \notin G \end{cases}$$

Entonces es claro que B es un conjunto difuso cerrado en $(X, w(i(\mathcal{T})))$. Además $A \subset B$ y $B \neq X$. Por consiguiente, A no es denso en $(X, w(i(\mathcal{T})))$.

Corolario 3.2.1: Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso y A un conjunto difuso en X . Si A es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) , entonces A es denso en (X, \mathcal{T}) .

Demostración:

Supongamos que A es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) entonces por la proposición 3.2.1, A es denso en $(X, w(i(\mathcal{T})))$. Luego como por la proposición 2.1.6, $\mathcal{T} \subset w(i(\mathcal{T}))$, se tiene que A es denso en (X, \mathcal{T}) .

Podemos observar que la inversa del corolario anterior,

en general, no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1: Sea $X = (0,1)$ y \mathcal{T} la topología difusa definida por:

$$= \{\emptyset, X\} \cup \{A \in G(X) : A(X) \subset \{0, 1/2\}, \text{ y } A \in w(\mathcal{T}_X)\}$$

donde \mathcal{T}_X es la topología usual de X . Definamos el conjunto difuso A en X por

$$A : X \longrightarrow I$$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Es inmediato que $\bar{A} = X$, luego A es denso en (X, \mathcal{T}) .

Sin embargo, como

$$i(\mathcal{T}) = \{B \subset X : B \in \mathcal{T}_X\} = \mathcal{T}_X$$

y $A^{-1}((0, 1]) = (0, 1/2)$ no es denso en $(X, i(\mathcal{T}))$, se tiene que A no es ultra-denso en (X, \mathcal{T}) .

Corolario 3.2.2: Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y A un conjunto difuso en $(X, w(\mathcal{T}))$. Entonces A es ultra-denso en $(X, w(\mathcal{T}))$, si y solo si, A es denso en $(X, w(\mathcal{T}))$.

Demostración:

Esta demostración se deduce de la proposición 3.2.1 y de la igualdad

$$w(i(w(\mathcal{T}))) = w(\mathcal{T}).$$

3. ULTRA-COMPACTIFICACION STONE-ČECH.

Definición 3.3.1: Sean (X, τ) un espacio topológico difuso y (BX, \mathcal{U}) un espacio topológico que contiene a $(X, i(\tau))$ como subespacio. Definamos la colección $\tau_{\mathcal{U}}$ por $\tau_{\mathcal{U}} = \{A \in G(BX) : A \in w(\mathcal{U}) \text{ y } A/X \in \tau\}$

Proposición 3.3.1: $(BX, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio topológico difuso.

Demostración:

i. Es inmediato que $\emptyset, BX \in \tau_{\mathcal{U}}$, puesto que $\emptyset, BX \in w(\mathcal{U})$, y $\emptyset/X = \emptyset, BX/X = X$.

ii. Sean $A_1, \dots, A_n \in \tau_{\mathcal{U}}$ y sea $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Como para cada $i, 1 \leq i \leq n, A_i \in w(\mathcal{U})$, entonces $A \in w(\mathcal{U})$. Por otro lado, como $A_i/X \in \tau$ y $A/X = \bigcap_{i=1}^n A_i/X$, se tiene que

$A/X \in \tau$. Así pues $A \in \tau_{\mathcal{U}}$.

iii. Sea $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de elementos de $\tau_{\mathcal{U}}$ y sea $A = \bigcup_{j \in J} A_j$. Como para cada $j \in J, A_j \in w(\mathcal{U})$, entonces

$A \in w(\mathcal{U})$. Por otro lado, como $A_j/X \in \tau$ y $A/X = \bigcup_{j \in J} A_j/X$,

se tiene que $A/X \in \tau$. Así pues $A \in \tau_{\mathcal{U}}$.

De (i), (ii) y (iii) se obtiene que $(BX, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio topológico difuso.

Proposición 3.3.2: Si (BX, \mathcal{U}) es un espacio topológico compacto, entonces $(BX, \tau_{\mathcal{U}})$ es un

espacio topológico difuso ultra-compacto.

Demostración:

Por la definición de τ_u tenemos que $\tau_u \subset_w(\mathcal{U})$, por consiguiente $i(\tau_u) \subset \mathcal{U}$. Luego como (BX, \mathcal{U}) es compacto, $(BX, i(\tau_u))$ también es compacto. Por lo tanto (BX, τ_u) es ultra-compacto.

Proposición 3.3.3: Si (BX, \mathcal{U}) contiene a $(X, i(\tau))$ como subespacio denso, entonces (X, τ) es un subespacio ultra-denso de (BX, τ_u) .

Demostración:

Mostraremos primero que (X, τ) es un subespacio de (BX, τ_u) . En efecto:

i. Si $A \in \tau_u$, entonces por definición de τ_u se tiene que $A/X \in \tau$.

ii. Sea $A \in \tau$ y para cada número α definamos los conjuntos $V_\alpha = A^{-1}((\alpha, 1])$ y $V_\alpha^* = BX - (\overline{X - V_\alpha})_{BX}$, luego es inmediato que $V_\alpha \in i(\tau)$, $V_\alpha^* \in \mathcal{U}$ y $V_\alpha = V_\alpha^* \cap X$. Notemos que $V_\alpha^* = BX$ para todo $\alpha < 0$ y que $V_\alpha^* = \emptyset$ para todo $\alpha > 1$. Para cada $x \in BX$ definamos el número $B(x)$ por

$$B(x) = \sup \{ \alpha : x \in V_\alpha^* \}$$

luego es inmediato que $0 \leq B(x) \leq 1$. Así podemos definir el conjunto difuso B en BX por

$$B : BX \longrightarrow I$$

$$x \longrightarrow B(x) = \sup \{ \alpha : x \in V_\alpha^* \}$$

Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \sup \{ \alpha : x \in V_{\alpha}^* \} \\
 &= \sup \{ \alpha : x \in V_{\alpha}^* \cap X \} \\
 &= \sup \{ \alpha : x \in V_{\alpha} \} \\
 &= \sup \{ \alpha : x \in A^{-1}((\alpha, 1]) \} \\
 &= \sup \{ \alpha : x \in A^{-1}((\alpha, 1]) \} \\
 &= \sup \{ \alpha : A(x) > \alpha \} \\
 &= A(x)
 \end{aligned}$$

por consiguiente $B/\chi = A$. Mostraremos ahora que $B \in \omega(\mathcal{U})$.
 Sea $b \in I$, si $b = 1$, entonces $B^{-1}((b, 1]) = \emptyset \in \mathcal{U}$; supongamos
 entonces que $b < 1$. Sea $x \in B^{-1}((b, 1])$, entonces $b < B(x)$;
 tomemos $\lambda \in I$ tal que $b < \lambda < B(x)$, y consideremos el conjunto
 $V_{\lambda}^* \in \mathcal{U}$. Como $B(x) = \sup \{ \alpha : x \in V_{\alpha}^* \}$ y $\lambda < B(x)$, existe un
 número $\alpha \in I$ tal que $\lambda < \alpha$ y $x \in V_{\alpha}^*$. Luego como $\lambda < \alpha$, $V_{\alpha}^* \subset V_{\lambda}^*$
 y por consiguiente $x \in V_{\lambda}^*$. Si $y \in V_{\lambda}^*$, entonces $\lambda \leq B(y)$, por
 lo tanto $b < B(y)$, o sea, $y \in B^{-1}((b, 1])$; por consiguiente
 $V_{\lambda}^* \subset B^{-1}((b, 1])$. Así pues, existe $V_{\lambda}^* \in \mathcal{U}$ tal que
 $x \in V_{\lambda}^* \subset B^{-1}((b, 1])$. Lo que prueba que $B \in \omega(\mathcal{U})$, y $B \in \tau_{\mathcal{U}}$.
 Hemos probado así, que para todo $A \in \tau$ existe $B \in \tau_{\mathcal{U}}$ tal que
 $B/\chi = A$.

De (i) y (ii) se tiene que (X, τ) es un subespacio de
 $(BX, \tau_{\mathcal{U}})$.

Mostraremos ahora que X es ultra-denso en $(BX, \tau_{\mathcal{U}})$.

En efecto, como X es denso en (BX, \mathcal{U}) y $i(\tau_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}$, se tiene

que X es denso en $(BX, i(\mathcal{T}_u))$; además como para todo $\alpha \in [0, 1)$, $X^{-1}((\alpha, 1]) = X$, se tiene que $X^{-1}((\alpha, 1])$ es denso en $(BX, i(\mathcal{T}_u))$ para todo $\alpha \in [0, 1)$. Así pues X es ultra-denso en (BX, \mathcal{T}_u) .

Teorema 3.3.1: (Stone-Čech). Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico difuso tal que $(X, i(\mathcal{T}))$ es Tychonoff [3] y (BX, \mathcal{U}) la compactificación Stone-Čech de $(X, i(\mathcal{T}))$, entonces (BX, \mathcal{T}_u) es ultra-compacto y (X, \mathcal{T}) es un subespacio ultra-denso en (BX, \mathcal{T}_u) . Además si $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es una función D-continua de (X, \mathcal{T}) en el espacio topológico difuso ultra-compacto y ultra-Hausdorff (Y, \mathcal{T}') , entonces existe una función D-continua $\hat{f} : (BX, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ tal que $\hat{f}|_X = f$.

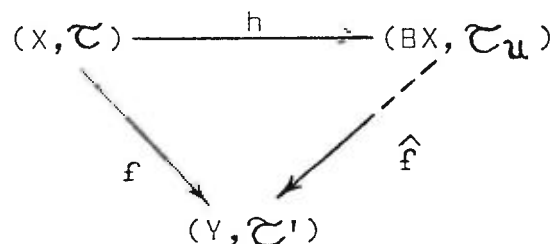
Demostración:

De las proposiciones 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 se obtiene que (BX, \mathcal{T}_u) es ultra-compacto y que (X, \mathcal{T}) es un subespacio ultra-denso de (BX, \mathcal{T}_u) .

Como $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es D-continua, se obtiene por la proposición 2.1.9, que $f : (X, i(\mathcal{T})) \longrightarrow (Y, i(\mathcal{T}'))$ es continua. Además $(Y, i(\mathcal{T}'))$ es compacto y Hausdorff. Luego como (BX, \mathcal{U}) es la compactificación Stone-Čech de $(X, i(\mathcal{T}))$, [3] existe una función continua $\hat{f} : (BX, \mathcal{U}) \longrightarrow (Y, i(\mathcal{T}'))$ tal que $\hat{f}|_X = f$. Mostraremos que $\hat{f} : (BX, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es D-continua. Sea $A \in \mathcal{T}'$, entonces como f es D-continua se tiene que $f^{-1}(A) = A \circ f \in \mathcal{T}$;

además como $\hat{f}^{-1}(A)/_X = (A \circ \hat{f})/_X = A \circ f$ y $A \circ \hat{f} \in w(\mathcal{U})$, se tiene que $\hat{f}^{-1}(A) \in \mathcal{T}_u$. Lo que muestra que f es D -continua.

Observación: En el teorema anterior demostramos que si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico difuso y $(X, i(\mathcal{T}))$ es un espacio topológico Tychonoff, entonces si (BX, \mathcal{U}) es la compactificación Stone-Čech de $(X, i(\mathcal{T}))$, se tiene que (BX, \mathcal{T}_u) es un espacio topológico difuso ultra-compacto que contiene a (X, \mathcal{T}) como subespacio ultra-denso, o sea, (BX, \mathcal{T}_u) es una ultra-compactificación de (X, \mathcal{T}) . Además si $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es una función D -continua de (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico difuso ultra-compacto y ultra-Hausdorff (Y, \mathcal{T}') , entonces existe una función D -continua $\hat{f} : (BX, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ que hace el siguiente diagrama conmutativo.



donde h es la función de embebimiento de X en su compactificado [3]. Esta propiedad de extensión en la topología general caracteriza la compactificación Stone-Čech, por lo cual decimos que (BX, \mathcal{T}_u) es la ultra-compactificación Stone-Čech de (X, \mathcal{T}) .

Ejemplo 3.3.1: Sea (X, τ) un espacio topológico Tychonoff y (BX, \mathcal{U}) su compactificación Stone-Čech. Consideremos el espacio topológico difuso $(X, w(\tau))$, entonces como $i(w(\tau)) = \tau$, se tiene que (BX, \mathcal{U}) es la compactificación Stone-Čech de $(X, i(w(\tau)))$. Luego como (X, τ) es un subespacio de (BX, \mathcal{U}) , se tiene que $\tau_u = \{A \in G(BX) : A \in w(\mathcal{U}) \text{ y } A/x \in w(\tau)\} = w(\mathcal{U})$ y por consiguiente $(BX, w(\mathcal{U}))$ es la ultra-compactificación Stone-Čech de $(X, w(\tau))$.

En general se tiene que $\tau_u \neq w(\mathcal{U})$, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3.2: Sea $X = (0, 1)$ y τ_x la topología usual de X . Sea τ la topología difusa sobre X definida por

$$\tau = \{A \in G(X) : A(X) \subset \{0, 1\} \text{ y } A \in w(\tau_x)\}$$

como $i(\tau) = \tau_x$, se tiene que $(X, i(\tau))$ es un espacio topológico Tychonoff. Sea (BX, \mathcal{U}) la compactificación Stone-Čech de (X, τ_x) , entonces

$$\tau_u = \{A \in G(BX) : A/x \in \tau \text{ y } A \in w(\mathcal{U})\}$$

y (BX, τ_u) es la ultra-compactificación Stone-Čech de (X, τ) .

Por lo tanto $\tau_u \subsetneq w(\mathcal{U})$.

CAPITULO IV
CONCLUSIONES

En esta sección trataremos de precisar algunos resultados para establecer las relaciones y diferencias entre la teoría de los espacios topológicos y la teoría de los espacios topológicos de lo difuso. Recordemos que Top indica la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas.

Lo primero que estableceremos es que la familia formada por los espacios topológicos difusos (objetos) y las funciones D-continuas (morfismos) es una categoría, la cual se denota por Fuz. En efecto:

i. Es claro que si (X, τ) , (Y, τ') y (Z, τ'') son espacios topológicos difusos y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$, $g : (Y, \tau') \longrightarrow (Z, \tau'')$ son funciones D-continuas, entonces la función compuesta $g \circ f : (X, \tau) \longrightarrow (Z, \tau'')$ es D-continua.

ii. Si (X, τ) , (Y, τ') , (Z, τ'') , (W, τ''') son espacios topológicos difusos y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$, $g : (Y, \tau') \longrightarrow (Z, \tau'')$, $h : (Z, \tau'') \longrightarrow (W, \tau''')$ son funciones D-continuas, entonces es inmediato que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

iii. Para cada espacio topológico difuso (X, τ) , la función identidad $I_X : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ es un D-homeomorfismo; por lo tanto para todo espacio topológico difuso (Y, τ') y para toda función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ y $g : (Y, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$ se tiene que:

$$f \circ I_X = f$$

$$I_X \circ g = g$$

Así pues de (i), (ii) y (iii) se obtiene que Fuz es una categoría.

Definamos ahora los funtores

$$\begin{aligned} \bar{w} : \text{Top} &\longrightarrow \text{Fuz} \\ (X, \mathcal{T}) &\longrightarrow (X, w(\mathcal{T})) \\ \bar{w}(f) &= f \\ \bar{i} : \text{Fuz} &\longrightarrow \text{Top} \\ (X, \mathcal{T}) &\longrightarrow (X, i(\mathcal{T})) \\ \bar{i}(f) &= f \end{aligned}$$

Como

$$\bar{w}(f \circ g) = f \circ g$$

y

$$\bar{i}(f \circ g) = f \circ g$$

se tiene que los funtores \bar{w} y \bar{i} son covariantes.

De la proposición 2.1.5, se deduce que $\bar{i}(\bar{w}(X, \mathcal{T})) = (X, \mathcal{T})$; por lo tanto la categoría $\bar{w}(\text{Top})$ es isomorfa a Top. Además de la proposición 2.1.10, se tiene que $\bar{w}(\text{Top})$ es una subcategoría plena de Fuz. Por consiguiente podemos considerar a Top como una subcategoría plena de Fuz. Sin embargo la categoría Fuz es mucho más grande que Top. Para ilustrar esta afirmación, a continuación daremos un ejemplo de un espacio topológico difuso que no se obtiene como espacio topológico difuso inducido por un espacio topológico.

Ejemplo 1: Consideremos el espacio topológico difuso (X, τ) definido en el ejemplo 2.1.2. Entonces se tiene que $w(i(\tau)) \neq \tau$

Supongamos que existe una topología \mathcal{U} , tal que $(X, \mathcal{U}) \in \text{Top}$ y $w(\mathcal{U}) = \tau$. Luego

$$i(w(\mathcal{U})) = i(\tau)$$

entonces por la proposición 2.1.5,

$$\mathcal{U} = i(\tau)$$

Por lo tanto

$$w(\mathcal{U}) = w(i(\tau))$$

o sea

$$\tau = w(i(\tau))$$

lo que es una contradicción.

De las conclusiones hechas anteriormente podemos comprender ahora el por qué de que ciertas propiedades que se cumplen en Top no se cumplen en Fuz; como por ejemplo, sabemos que en Top las topologías compactas son minimales entre las topologías Hausdorff de un conjunto X; sin embargo esto no es cierto en Fuz, o sea que las topologías difusas ultra-compactas no son minimales entre las topologías difusas Hausdorff de un conjunto X, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Consideremos los espacios topológicos difusos (X, τ_1) y (X, τ_2) definidos en el ejemplo 2.3.3. Es claro que (X, τ_1) y (X, τ_2) son Hausdorff, (X, τ_1) es ultra-compacto y $\tau_2 \subsetneq \tau_1$. O sea el espacio topológico

difuso (X, \mathcal{T}_1) es ultra-compacto y Hausdorff, sin embargo \mathcal{T}_1 no es minimal entre las topologías difusas Hausdorff sobre X .

Si bien es cierto que hay ciertas propiedades de Top que no se cumplen en Fuz, también es cierto que hay muchas propiedades y teoremas de Top que se generalizan de una forma natural a Fuz, como por ejemplo, la proposición 2.2.3, la proposición 2.2.4 y el teorema de Tychonoff para el producto de espacios topológicos difusas (Teorema 3.1.1).

Uno de los resultados más importante obtenido en el desarrollo de este trabajo es la construcción de la ultra-compactificación Stone-Čech de un espacio topológico difuso (X, \mathcal{T}) tal que $(X, i(\mathcal{T}))$ es Tychonoff, como lo muestra el teorema 3.3.1. Más aún si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico Tychonoff y (BX, \mathcal{U}) es su compactificación Stone-Čech, entonces la ultra-compactificación Stone-Čech de $(X, w(\mathcal{T}))$ es exactamente $(BX, w(\mathcal{U}))$ como lo muestra el ejemplo 3.3.1.

Por último podemos ver que todos los conceptos definidos en Fuz, cuando se restringen a $\bar{w}(\text{Top}) = \text{Top}$ coinciden con los conceptos correspondientes en Top, como por ejemplo la α -compacidad (proposición 2.2.2), la ultra-compacidad (Corolario 2.2.2), Hausdorff (Corolario 2.3.2), ultra-Hausdorff (Corolario 2.3.1).

BIBLIOGRAFIA

1. BOURBAKI, N. Elementos de Mathematique. Livre III, Topologie Générale. Hermann, Paris, 1949.

2. GANTNER, T.E. R. C. Steinlage, and R. H. Warren, "Compactness in fuzzy topological spaces", J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), 547-562.

3. HU S. T. Introduction to General Topology. Holden-Day, Inc., San Francisco, California, 1966.

4. KELLEY, J. L. General Topology (Graduate Texts Mathematics, 27) Springer-Verlag, New York. Reprint of the 1955 ed. Published by Van Nostrand.

5. LOWEN R. "Fuzzy topological Spaces and fuzzy compactness", J. Math. Appl. 56 (1976), 621-633.

6. LOWEN R. "Initial and final fuzzy topologies and the fuzzy Tychonoff Theorem", J. Math. Anal. Appl. 58 (1977, 11-21).

7. LOWEN R. "A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces", J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), 496-454.

8. MARTIN H. W. "A Stone-Čech ultra-fuzzy compactification", J. Math. Anal. Appl. 73 (1980), 453-456.

9. PU PAO-MING and LIU YING-MING. "Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), 571-599.

10. PU PAO-MING and LIU YING-MING. "Fuzzy topology II. Product and quotient spaces", J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), 20-37.

11. WEISS M. D. "Fixed points, separation, and induced topologies for fuzzy sets", J. Math. Anal. Appl. 50 (1975), 142-150.

12. ZADEH L. A. "Fuzzy sets". Inform and Contr. 8 (1965), 338-353.