

UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE EL TEOREMA DE HOPF - RINOW

POR:

MARIA DIXIANA ESPINOSA

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar  
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización  
en Matemática

TH



FEB. 2 2 1983

Aprobado por:

Director de Tesis

*Oscar Valdivia G.*

Oscar Valdivia G., Ph. D.

Miembro del Jurado

*Jorge Rojo*

Jorge Rojo Ph. D.

Miembro del Jurado

*Eduardo R. Steele*

Eduardo R. Steele M.Sc.

Fecha

*9 de Agosto de 1982*

*obs. del autor*

*191362*

"I only wish to make a plea for the widest possible use of geometrical thinking at all levels".

M.F. Atiyah.

"Hago votos para que en todos los niveles se utilice el pensamiento geométrico tan ampliamente como sea posible".

DEDICATORIA

Dedico este humilde trabajo a quienes contribuyeron a forjar mi pensamiento:

A mi madre, Hersilia Abadía, de cuyo seno obtuve las virtudes de perseverancia y positivismo hacia el trabajo.

A mi padre, Carlos Espinosa, de quien recibí las primeras enseñanzas en los años de infancia.

A todos mis maestros y profesores, quienes desde los grados primarios hasta mi formación profesional supieron brindarme las mejores instrucciones.

## AGRADECIMIENTO

Al Dr. Oscar Valdivia Gutiérrez, nuestro asesor, guía y amigo, por su incansable cooperación para el logro de este trabajo.

Al profesor Héctor Arazoza, mi especial reconocimiento por su valiosa orientación en la preparación del mismo.

A los profesores del Programa de Maestría en Matemáticas, y en especial al Dr. Jorge Rojo cuyas palabras de estímulo sirvieron de motivación para seguir adelante.

## TABLA DE CONTENIDO

	Pag.
INTRODUCCION .....	ix
CAPITULO I. PRELIMINARES	
1.1 Variedad Diferenciable .....	1
1.2 Campos Vectoriales .....	4
1.3 Partición de la Unidad .....	8
CAPITULO II. METRICA RIEMANNIANA	
2.1 Estructura Riemanniana sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$	16
2.2 Estructura Riemanniana sobre una variedad di- ferenciable .....	18
2.3 Métrica Riemanniana .....	23
2.4 Sistema Normal de Coordenadas .....	28
CAPITULO III. CONEXION Y TENSOR CURVATURA	
3.1 Conexiones .....	33
3.2 Derivada Covariante .....	36
3.3 Paralelismo .....	39
3.4 Conexión compatible con una estructura Rie- manniana .....	42
3.5 Tensor Curvatura .....	46
CAPITULO IV. GEODESICAS Y APLICACION EXPONENCIAL	
4.1 Definición de geodésica utilizando derivada covariante .....	48
4.2 Concepto de geodésica mediante cálculo de va- riaciones .....	50
4.3 Ejemplos de geodésicas .....	54
4.4 Flujos geodésicos y aplicación exponencial .	57
4.5 Curvatura Seccional .....	61
CAPITULO V. TEOREMA DE HOPF-RINOW	
5.1 Variedad Riemanniana Completa .....	67

	Pag.
5.2 Propiedad de una Aplicación Exponencial en una Variedad Riemanniana Completa .....	67
5.3 Existencia de geodésicas con longitud igual a la distancia Riemanniana .....	70
5.4 Aplicaciones del Teorema de Hopf-Rinow ....	75
CONCLUSIONES .....	82
BIBLIOGRAFIA .....	86

## INTRODUCCION

En la Geometría Diferencial, dentro de la teoría de las superficies regulares, se había introducido el concepto de geodésica, que es el análogo de la recta que pasa por dos puntos, en la Geometría Euclidena. Posteriormente se introdujeron los conceptos de aplicación exponencial y de superficie completa.

Un problema que surgió en forma natural fué el de relacionar la completez de una superficie al dominio de la aplicación exponencial. Hopf y Rinow resolvieron este problema en 1931 y 1932 en los importantes trabajos [11] y [12], estableciendo que para una superficie completa, existe una geodésica minimal que une dos puntos arbitrarios. Una versión moderna de estos trabajos se encuentra en [4].

Cuando se introdujo el concepto de estructura Riemanniana, y se generalizaron para variedades Riemannianas, los conceptos de geodésica, aplicación exponencial y completez, también surgió el problema de generalizar el teorema de Hopf-Rinow.

Gracias al "Teorema de la vecindad convexa" de J.H.C. Whitehead, que da la estructura local de una variedad Riemanniana, el matemático francés de Rham estableció también que para una variedad Riemanniana completa, existe una geodésica minimal que une dos puntos arbitrarios.

Se han dado versiones modernas de la construcción de de Rham, por ejemplo, la de J. Cheeger y D. G. Egin, ([3]),

y la de Greene, ([9]).

En el presente trabajo damos una versión del Teorema de Hopf-Rinow, utilizando las ideas introducidas por Cheeger-Ebin y Greene.

En 1964 J. Eells y J. H. Sampson ([8]) introdujeron el concepto de aplicación armónica. Otras versiones de este concepto aparecen en [5] y [22].

Como caso particular de una aplicación armónica tenemos las curvas armónicas que generalizan las geodésicas y aquí aparece en forma natural la energía de una curva armónica, que según el teorema de Hopf-Rinow, la geodésica resulta un mínimo absoluto de esta energía.

Presentamos este resultado en nuestra tesis, como una aplicación.

Estos resultados conducen a otros problemas abiertos de aplicaciones armónicas entre variedades Riemannianas. Ver [22].

Con el objeto de presentar los resultados, arriba mencionados, en forma comprensible, hemos seguido el siguiente ordenamiento.

En el primer capítulo recordamos definiciones de variedades diferenciables y campos vectoriales; luego demostramos el teorema de existencia de Partición de la Unidad.

En el segundo capítulo definimos una estructura Riemanniana y una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable y concluimos con la construcción de un sistema normal de coordenadas.

En el tercer capítulo introducimos: el concepto de conexión de Koszul sobre una variedad diferenciable, la derivada covariante asociada a esta conexión, conexión compatible con una estructura Riemanniana y concluimos demostrando el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana, que establece la existencia de una única conexión simétrica compatible con una estructura Riemanniana.

En el capítulo cuarto damos el concepto de una geodésica sobre una variedad Riemanniana, utilizando la derivada covariante, así como el cálculo de variaciones. Luego estudiamos la aplicación exponencial y la curvatura seccional, haciendo énfasis en el cálculo de esta última.

En el quinto y último capítulo estudiamos la existencia de geodésicas con longitud igual a la distancia Riemanniana, en variedades Riemannianas completas. Demostramos además el Teorema de Hopf-Rinow, analizando sus aplicaciones y terminamos con la discusión de algunos problemas abiertos de aplicaciones armónicas entre variedades Riemannianas.

Finalmente queremos añadir que en la presentación de nuestro trabajo hemos intentado reflejar el pensamiento del eminente matemático inglés M. F. Atiyah.

CAPITULO I  
PRELIMINARES

En este capítulo estableceremos los principales resultados de variedades diferenciables, campos vectoriales y partición de la unidad, que utilizaremos en los capítulos que siguen.

1.1 VARIEDAD DIFERENCIABLE

1.1.1 DEFINICIONES. Sea  $M$  un espacio topológico de Hausdorff con base numerable.

Una carta local en  $M$  de dimensión  $n$  es un par  $(U, \varphi)$  formado por un abierto  $U$  de  $M$  y un homeomorfismo  $\varphi$  de  $U$  en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Decimos que las funciones  $x_i = \pi_i \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $1 \leq i \leq n$  y  $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la proyección canónica, constituyen un sistema de coordenadas locales sobre  $U$ .

Un atlas de dimensión  $n$  de  $M$  es una familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de cartas de dimensión  $n$ , tal que la familia  $\{U_i\}_{i \in I}$  forma un cubrimiento de  $M$ .

Un atlas compatible de clase  $C^k$  es un atlas de  $M$  tal que para todo par de cartas  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  del atlas, con  $U \cap V \neq \emptyset$ , se tiene que la aplicación

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

que llamaremos cambio de cartas, es diferenciable de clase  $C^k$ .

De aquí se deduce que la aplicación

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

también es diferenciable de clase  $C^k$ .

Un atlas de  $M$  es maximal, si no existe otro atlas que lo contenga.

Decimos que  $M$  tiene una estructura diferenciable o que  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , si y solo si,  $M$  tiene un atlas maximal, compatible de dimensión  $n$ .

### 1.1.2 OBSERVACIONES

1. En adelante consideraremos, solamente, atlas compatibles de clase  $C^\infty$ .

2. Se puede comprobar que todo atlas compatible en  $M$  está contenido en un único atlas maximal; así para definir una variedad diferenciable, no es necesario construir un atlas maximal, sino que basta con construir un atlas compatible.

### 1.1.3 EJEMPLOS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

a) Todo espacio euclideo, con el atlas  $(\mathbb{R}^n, \text{Id } \mathbb{R}^n)$  que consta de una sola carta, es una variedad diferenciable.

b) La esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$ , con el atlas  $(U_{kj}, h_{kj})$ , donde

$$U_{kj} = \{x \in S^n / (-1)^j x_k > 0\} \text{ y}$$

$$h_{kj}: U_{kj} \rightarrow \mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$$

es definida por  $h_{kj}(x) = (x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ .

c) Todo subconjunto abierto de una variedad diferenciable posee una estructura de variedad diferenciable.

1.1.4 APLICACION DIFERENCIABLE. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente.

Una aplicación continua  $f: M \rightarrow N$  es diferenciable en el punto  $p \in M$ , si y solo si, cuando para un par de cartas ( y por tanto para todas)  $(U, \varphi)$  de  $M$  y  $(V, \psi)$  de  $N$ , tales que  $p \in U$ ,  $f(p) \in V$  y  $f(U) \cap V \neq \emptyset$ , se tiene que la aplicación  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  es diferenciable en el punto  $\varphi(p)$ .

La aplicación  $f$  es diferenciable, si y solo si, es diferenciable en cada punto  $p \in M$ .

1.1.5 NOTA. La independencia de la elección particular de las cartas locales, es consecuencia de que las funciones de cambio de cartas son diferenciables.

1.1.6 OBSERVACIONES

1. La función identidad de una variedad diferenciable es diferenciable.

2. La composición de dos aplicaciones diferenciables también es diferenciable.

3. A la categoría cuyos "objetos" son las variedades diferenciables y cuyos "morfismos" son las aplicaciones diferenciables, llamaremos Categoría Diferenciable y la designamos con  $C^\infty$ .

4. Con  $C^\infty(M, N)$  designamos el conjunto de aplicaciones diferenciables de  $M$  en  $N$ . Brevemente  $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

## 1.2 CAMPOS VECTORIALES

1.2.1 VECTOR TANGENTE. Consideremos el conjunto de las curvas diferenciables en la variedad diferenciable  $M$ , de dimensión  $n$  y que pasan por el punto  $p \in M$ ,

$$\{ c / c: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M, c(0)=p, \varepsilon>0 \} .$$

Definimos en este conjunto la relación  $R$  por:

$c \tilde{R} \tilde{c} \leftrightarrow$  para alguna carta  $(U, \varphi)$  tal que  $p \in U$

$$\frac{d}{dt} (x_i \circ c) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (x_i \circ \tilde{c}) \Big|_{t=0} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{donde } x_i = \pi_i \circ \varphi .$$

Se comprueba que  $R$  es una relación de equivalencia y que la definición anterior es independiente de la carta local que se seleccione.

A una clase de equivalencia de la relación  $R$  llamamos vector tangente en el punto  $p$ .

1.2.2 ESPACIO TANGENTE. Si denotamos el conjunto  $\{c / c: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M, c(0)=p, \varepsilon>0\}$  por  $\text{cur}(p)$ . Definimos el espacio tangente a  $M$  en el punto  $p$ , el cual denotamos  $T_p M$ , como  $T_p M = \text{cur}(p) / R$ .

$T_p M$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a la variedad  $M$  en el punto  $p$ .

1.2.3 DEFINICION. Sea  $C^\infty(M)$  el conjunto de aplicaciones diferenciables de la variedad diferenciable  $M$ , de dimensión  $n$ , en  $\mathbb{R}$ .

Una derivación de  $C^\infty(M)$  es una aplicación lineal

$X: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple la regla del producto, es

decir, para  $\forall f, g \in C^\infty(M)$  y  $\forall p \in M$  se tiene:

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X(g).$$

Es fácil ver que existe una correspondencia entre los vectores tangentes a la variedad  $M$  en el punto  $p$  y las derivaciones sobre  $C^\infty(M)$ .

Así dos vectores diferentes definen derivaciones diferentes y toda derivación determina un vector tangente sobre  $M$ .

Por último,  $T_p M$  tiene una estructura natural de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , de dimensión  $n$ .

Ver estos resultados en [1] y [2].

1.2.4 VARIEDAD TANGENTE. Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

Definimos en el conjunto  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  una estructura

de variedad diferenciable de dimensión  $2n$  como sigue:

Las cartas en  $TM$  se definen a partir de un atlas de  $M$ .

Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es la familia de abiertos de este atlas, formamos el cubrimiento de  $TM$  con la colección  $\pi^{-1}(U_i)$ , donde  $\pi$  es la aplicación  $\pi: TM \rightarrow M$  que a cada vector tangente a  $M$  le hace corresponder el punto donde el vector es tangente.

Así  $\pi^{-1}(p) = T_p M$  para  $\forall p \in M$ .

Sea ahora  $X_p \in \pi^{-1}(U)$ , definimos la aplicación

$$\bar{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ por}$$

$$\bar{\varphi}(X_p) = (x_1(p), \dots, x_n(p), X^1(p), \dots, X^n(p)),$$

donde las  $n$  primeras coordenadas son las coordenadas  $x_i = \pi_i \circ \varphi$  del punto  $p \in U$  (vistas en 1.1.1) y las  $n$  últimas coordenadas son las componentes del vector  $X_p$  en la base natural  $\{\frac{\partial}{\partial x_i} /_p\}_{1 \leq i \leq n}$ , de  $T_p M$ .

Se prueba que  $\bar{\varphi}$  es un homeomorfismo local.

Concluimos que  $(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi})$  define una carta local en  $TM$ .

Consideremos ahora otra carta local  $(V, \psi)$  en  $M$ , sea  $y_i = \pi_i \circ \psi$  el sistema de coordenadas asociado y  $(\pi^{-1}(V), \bar{\psi})$  la carta que define  $(V, \psi)$  en  $TM$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ ; luego  $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ .

Si  $X_p \in \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$  entonces

$$\bar{\varphi}(X_p) = (x_1(p), \dots, x_n(p), X^1(p), \dots, X^n(p)) \quad y$$

$$\bar{\psi}(X_p) = (y_1(p), \dots, y_n(p), X^1(p), \dots, X^n(p)).$$

Luego la función

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}: \bar{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) \rightarrow \bar{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V))$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$ , pues para las  $n$  primeras componentes se tiene que los cambios de cartas de  $M$  son funciones diferenciables de clase  $C^\infty$ , y para las  $n$  últimas componentes tenemos que si

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} /_p = \sum_{j=1}^n X^j(p) \frac{\partial}{\partial y_j} /_p$$

entonces  $X_p^i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_j} X_p^j$  es una función diferenciable

de clase  $C^\infty$ .

De esto se deduce que los cambios de cartas de  $TM$  son diferenciables de clase  $C^\infty$ .

1.2.5 CAMPO VECTORIAL. Un campo vectorial sobre una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación  $X:M \rightarrow TM$ , tal que a cada punto de la variedad le asocia un vector tangente a la variedad en ese punto. Así para  $\forall p \in M$ ,  $X(p) \in T_p M$ .

Observemos que un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  actúa sobre una función real definida sobre  $M$ , de la siguiente manera:

La función  $X(f):M \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $X(f)(p) = X_p(f)$ , para  $\forall p \in M$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ .

Luego podemos dar la siguiente definición:

Un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es diferenciable si al actuar sobre toda función diferenciable sobre  $M$ , se obtiene una función diferenciable, es decir:

El campo vectorial  $X:M \rightarrow TM$  es diferenciable, si y solo si, para  $\forall f \in C^\infty(M)$  se tiene que  $X(f) \in C^\infty(M)$ .

1.2.7 EXPRESION LOCAL DE UN CAMPO VECTORIAL SOBRE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE. Sea  $(U, \varphi)$  una carta local en la variedad diferenciable  $M$ , de dimensión  $n$ .

Para  $\forall p \in U$ ,  $X(p)$  se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} / p \right\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $T_p M$ .

Así tenemos que  $X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} / p$ .

De aquí se obtiene  $n$  funciones  $X^i: M \rightarrow \mathbb{R}$  que se denominan funciones componentes del campo vectorial  $X$  en el sistema  $(U, x)$ .

Un campo vectorial  $\dot{X}$  es diferenciable, si y solo si, todas las funciones componentes del campo en una carta local, son funciones diferenciables.

### 1.3 PARTICION DE LA UNIDAD.

Recordemos en la siguiente sección algunos conceptos de la Topología General que utilizaremos en la construcción de la partición de la unidad.

1.3.1 DEFINICIONES. Sea  $X$  un espacio topológico y  $V$  un subconjunto de  $X$  ( $V$  puede ser sub-espacio de  $X$ ).

Una familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  de subconjuntos  $A_\alpha \subset X$  es un cubrimiento de  $V$ , si solo si,  $V \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ .

Si para  $V \subset A_\alpha$  es abierto entonces a la familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  llamamos cubrimiento abierto de  $V$ .

La subfamilia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in H}$ ,  $H \subset J$ , es un sub-cubrimiento de  $V$ , si y solo si,  $V \subset \bigcup_{\alpha \in H} A_\alpha$ .

Un cubrimiento  $\{B_\beta\}_{\beta \in K}$  de  $V$  es un refinamiento del cubrimiento  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , si y solo si, para cada  $\beta \in K$  existe  $\alpha \in J$  tal que  $B_\beta \subset A_\alpha$ .

Una familia  $\{C_\gamma\}_{\gamma \in L}$  de subconjuntos  $C_\gamma \subset X$  es localmente finita, si y solo si, para  $V \subset X$  existe una vecindad  $W_p$  de  $p$  tal que  $W_p \cap C_\gamma \neq \emptyset$ , para un número

finito de  $\gamma \in L$ .

Un espacio topológico  $X$  es paracompacto, si y solo si, todo cubrimiento abierto de  $X$  tiene un refinamiento localmente finito.

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una partición de la unidad sobre  $M$  es una familia  $\{\varphi_i\}_{i \in J}$  de funciones  $\varphi_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables de clase  $C^\infty$  tales que:

- i) La familia de los soportes  $\{\text{sop } \varphi_i\}_{i \in J}$  es localmente finita, donde  $\text{sop } \varphi_i = \overline{\{x \in M / \varphi_i(x) \neq 0\}}$ .
- ii)  $\sum \varphi_i(p) = 1$  para  $\forall p \in M$  y  $\varphi_i(p) \geq 0$ .

Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  un cubrimiento de  $M$ .

Una partición de la unidad  $\{\varphi_i\}_{i \in K}$  sobre  $M$  es subordinada al cubrimiento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , si y solo si, para  $\forall i \in K$ ,  $\exists \alpha \in J$  tal que  $\text{sop } \varphi_i \subset U_\alpha$ .

En vista de que toda variedad diferenciable posee un cubrimiento (dominio de las cartas) nos interesa saber si existirá una partición de la unidad subordinada a tal cubrimiento.

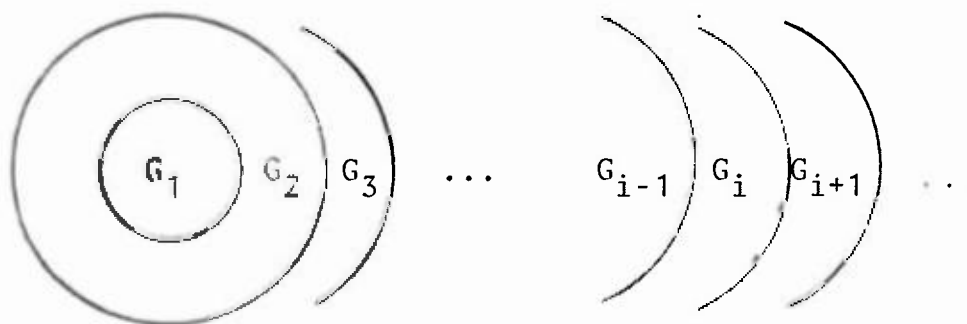
Los lemas siguientes nos conducen a dar una respuesta a esta interrogante.

1.3.2 LEMA. Sea  $X$  un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y con base numerable. Entonces  $X$  es paracompacto.

DEMOSTRACION. Veamos previamente que existe una sucesión  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de conjuntos abiertos de  $X$  tales que:

- i)  $\bar{G}_i$  es compacto, para  $\forall i \in \mathbb{N}$   
 ii)  $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$ , para  $\forall i \in \mathbb{N}$   
 iii)  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$

Vease para una interpretación, la figura siguiente:



Como  $X$  es localmente compacto y con base numerable existe una base numerable  $\{U_i\}_{i=1,2,\dots}$  de la topología de  $X$  que consiste de conjuntos abiertos con cerradura compacta.

Sea  $G_1 = U_1$ . Construimos recursivamente la familia  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  como sigue:

Supongamos que  $G_k = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{j_k}$  y sea  $j_{k+1}$  el mínimo entero mayor que  $j_k$  tal que  $\bar{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$ . Ahora definimos  $G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$ . Se comprueba fácilmente que la sucesión  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  verifica las tres propiedades anteriores.

Sea ahora  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  un cubrimiento abierto arbitrario de  $X$ .

El conjunto  $\overline{G}_i - G_{i-1}$  es compacto y está contenido en el abierto  $G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$ .

Para  $i \geq 3$ , elegimos un sub-cubrimiento finito del cubrimiento abierto  $\{U_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G}_{i-2})\}_{\alpha \in J}$ , del conjunto  $\overline{G}_i - G_{i-1}$ .

También elegimos un sub-cubrimiento finito del cubrimiento abierto  $\{U_\alpha \cap G_3\}_{\alpha \in J}$  del conjunto compacto  $\overline{G}_2$ .

La unión de estos subcubrimientos resulta un cubrimiento finito para todo el espacio  $X$ , el cual denotaremos por  $\{V_\gamma\}_{\gamma \in H}$ . Además para  $V \in \mathcal{M}$ , existe una vecindad  $G_{ip}$  de  $p$  tal que  $G_{ip} \cap V_\gamma \neq \emptyset$ .

Concluimos que el cubrimiento  $\{V_\gamma\}_{\gamma \in H}$  es localmente finito.  $\blacktriangle$

1.3.3 LEMA. Existe una función  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable de clase  $C^\infty$ , no negativa, que sobre el cubo cerrado  $\overline{c(1)}$  vale 1 y sobre el complemento del cubo abierto  $c(2)$  vale 0.

DEMOSTRACIÓN. Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{definida por } f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Definimos también la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

$g$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , no negativa y toma el valor 1 para  $t \geq 1$  y el valor 0 para  $t \leq 0$ .

Sea ahora la función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(t) = g(t+2) \cdot g(2-t),$$

$h$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , no negativa y toma el valor 1 sobre  $[-1, +1]$  y 0 (cero) en el complemento de  $(-2, +2)$ .

Luego la función  $\varphi = (h \circ \pi_1) \cdot \dots \cdot (h \circ \pi_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(donde  $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $1 \leq i \leq n$  es la proyección canónica)

es no negativa, vale 1 sobre el cubo cerrado

$\overline{c(1)} = [-1, +1] \times \dots \times [-1, +1]$  de  $n$  copias, y vale 0 (cero) en el complemento del cubo abierto  $c(2) = (-2, +2) \times \dots \times (-2, +2)$  de  $n$  copias.  $\blacktriangle$

1.3.4 TEOREMA. (Existencia de partición de la unidad).

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un cubrimiento abierto de  $M$ . Entonces existe una partición de la unidad numerable  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots}$  subordinada al cubrimiento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , con  $\text{sop } \varphi_j$  compacto para  $\forall j=1,2,\dots$ .

Si no se requiere soportes compactos, entonces existe una partición de la unidad  $\{\varphi_\alpha\}$  subordinada al cubrimiento  $\{U_\alpha\}$ , esto es,  $\text{sop } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$  con a lo más un número enumerable de los  $\varphi_\alpha$  no idénticamente nulo.

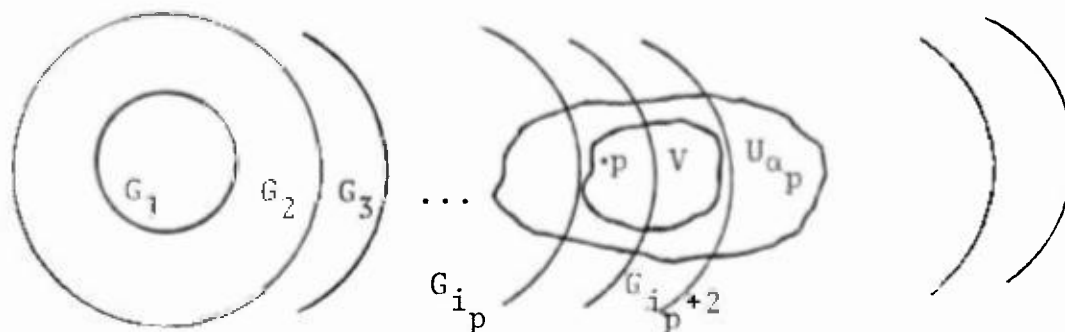
DEMOSTRACION. Como  $M$  es una variedad diferenciable, es localmente compacto, de Hausdorff y con base numerable. Por el lema 1.3.2 existe una sucesión  $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de abierto tales que  $\overline{G_i}$  es compacto para  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Pongamos  $G_0 = \phi$

Para cualquier  $p \in M$  sea  $i_p$  el máximo entero tal que  $p \in M - \overline{G_{i_p}}$ .

Entre los  $\alpha \in A$  elegimos un  $\alpha_p$  tal que  $p \in U_{\alpha_p}$ , y sea  $(V, \tau)$  una carta local alrededor de  $p$  tal que:

$$V \subset (U_{\alpha_p} \cap G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}}) \quad \text{y} \quad \tau(V) \supset \overline{c(2)} .$$



Definimos  $\psi_p: M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \varphi \circ \tau(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

donde  $\varphi$  es la función construida en el lema 1.3.3. Luego  $\psi_p$  vale 1 en una vecindad  $W_p$  de  $p$  (pre-imagen por  $\tau$  del cubo cerrado de radio 1) y tiene soporte compacto contenido en  $V$ .

Ahora para cada  $i \geq 1$ , elegimos un conjunto finito de puntos  $p \in M$  cuyas correspondientes vecindades  $W_p$  cubran  $\overline{G_i} - G_{i-1}$  el cual es compacto.

Ordenamos las funciones  $\psi_p$  en una sucesión  $\{\psi_j\}_{j=1,2,\dots}$ .

La familia  $\{\text{sop } \psi_j\}_{j=1,2,\dots}$  de los soportes es localmente finita.

Sea ahora la función  $\psi = \sum \psi_j$ .

Se observa que  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , pues cada término lo es, y además  $\psi(p) > 0$  para  $\forall p \in M$ .

Finalmente para cada  $j=1,2,\dots$  definimos

$$\varphi_j: M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad \varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi(x)}$$

Luego la familia  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots}$  de funciones es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  y es tal que  $\text{sop } \varphi_j$  es compacto para  $\forall j=1,2,\dots$ .

Así queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Si no se requieren soportes compactos para la partición de la unidad que deseamos construir, se procede de la siguiente manera:

Caso 1: Si para  $\alpha \in A$  fijo, ningún  $\text{sop } \varphi_j$  está contenido en  $U_\alpha$  donde  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots}$  es la partición de la unidad construída anteriormente. Entonces definimos  $\varphi_\alpha$  idénticamente nulo.

Caso 2: Si dado  $\alpha \in A$ , existe un número natural  $j$  tal que  $\text{sop } \varphi_j \subset U_\alpha$ , definimos  $\varphi_\alpha = \varphi_j$ .

Para ver que el  $\text{sop } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$  observamos que si  $\square$  es una familia de conjuntos cerrados localmente finita,

entonces  $\overline{\bigcup_{A \in \square} A} = \bigcup_{A \in \square} A$ , sin embargo es claro

que el soporte de  $\varphi_\alpha$  no es necesariamente compacto.

Así resulta que la familia  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una partición de la unidad subordinada a  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , con lo que queda demostrada la segunda afirmación del teorema.  $\blacktriangle$

1.3.5 COROLARIO. Sean  $G$  un abierto en una variedad diferenciable  $M$ ,  $A$  cerrado con  $A \subset G$ . Entonces existe una función  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable de clase  $C^\infty$  tal que

i)  $0 \leq \varphi(p) \leq 1$  para  $\forall p \in M$ .

ii)  $\varphi(p) = 1$  para  $\forall p \in A$ .

iii)  $\text{sop } \varphi \subset G$

DEMOSTRACION. La familia  $\{M-A, G\}$  es un cubrimiento de  $M$ , luego por el teorema anterior existe una partición de la unidad  $\{\psi, \varphi\}$  subordinada a este cubrimiento tal que :  $\text{sop } \psi \subset M-A$  y  $\text{sop } \varphi \subset G$ .

Se comprueba fácilmente que la función  $\varphi$  verifica las condiciones i) ii) y iii).

Vease [23].  $\blacktriangle$

---

CAPITULO II  
METRICA RIEMANNIANA

Con el objeto de introducir los conceptos de estructura y métrica Riemanniana sobre una variedad diferenciable, discutiremos estos conceptos previamente en abiertos del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Además estableceremos algunos de los resultados que se utilizarán en los capítulos que siguen:

2.1 ESTRUCTURA RIEMANNIANA SOBRE UN ABIERTO DE  $\mathbb{R}^n$ .

2.1.1 DEFINICION. Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  una aplicación diferenciable de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  con  $k > 1$  y tal que la derivada  $Df(u)$  tiene rango  $n$ , para  $\forall u \in U$ ; sea también  $B$  el espacio lineal de todas las aplicaciones bilineales de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $u \in U$  definimos la aplicación  $g: U \rightarrow B$  por  $g(u)(z, w) = \langle Df(u)(z), Df(u)(w) \rangle$  para  $\forall z, w \in \mathbb{R}^n$ .

Se concluye fácilmente que  $g$  es diferenciable.

2.1.2 OBSERVACIONES

1. Para  $\forall u \in U$   $g(u)$  es simétrica, es decir,

$$g(u)(z, w) = g(u)(w, z) \text{ para } \forall z, w \in \mathbb{R}^n.$$

2. Para  $\forall u \in U$   $g(u)$  es definida positiva, así,

$$\|z\|^2 = g(u)(z, z) > 0 \text{ con } g(u)(z, z) = 0, \text{ si y solo si, } z=0.$$

Concluimos con estas observaciones que  $g(u)$  es un producto interno sobre  $\mathbb{R}^n$ , que lo denotaremos  $g(u) = \langle \cdot, \cdot \rangle_u$ . Este nuevo producto interno nos permite definir una es-

estructura geométrica sobre  $U$ , diferente de la euclídeana, que se denomina Estructura Riemanniana.

Las ideas centrales de la geometría euclídeana: distancia y ángulo, son definidas en términos de este producto interno como veremos a continuación.

2.1.3 DEFINICION. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas diferenciables en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es decir, las aplicaciones  $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow U$  son diferenciables; luego para  $\forall t \in \mathbb{R}$   $D\alpha(t)$  y  $D\beta(t)$  son aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  distintas de cero.

Si para  $s, t \in \mathbb{R}$  se tiene  $\alpha(s) = \beta(t)$  es decir,  $\alpha$  y  $\beta$  pasan por un mismo punto, y además  $D\alpha(s)(1) = X$  y

$$D\beta(t)(1) = Y$$

entonces definimos el ángulo  $\theta$  comprendido entre los vectores  $X$  e  $Y$  por la relación:

$$||X||_u \cdot ||Y||_u \cos \theta = \langle X, Y \rangle_u$$

$$\text{donde } ||X||_u^2 = \langle X, X \rangle_u$$

$$||Y||_u^2 = \langle Y, Y \rangle_u .$$

2.1.4 DEFINICION. Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  una curva seccionalmente diferenciable sobre un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $x = \gamma(a)$ ,  $y = \gamma(b)$  definimos la distancia de  $x$  a  $y$ , que denotamos con  $d(x, y)$ , por:

$d(x, y) = \inf L(\gamma_i)$ , donde  $\{\gamma_i\}_{i \in I}$  es la familia de todas las curvas seccionalmente diferenciables que unen  $x$  e  $y$ ; también para  $\forall i \in I$ ,  $L(\gamma_i)$  denota la longitud de  $\gamma_i$ .

## 2.2 ESTRUCTURA RIEMANNIANA SOBRE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE.

2.2.1 DEFINICIONES. Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  la variedad tangente.

Denotamos con  $I(T_p M)$  el conjunto de todas las formas bilineales, simétricas y definidas positiva sobre  $T_p M$  y sea  $I(TM) = \bigcup_{p \in M} I(T_p M)$ .

Una Estructura Riemanniana sobre  $M$  es una función

$\langle , \rangle : M \rightarrow I(TM)$ , que también designamos con  $g$ , tal que

$\langle , \rangle(p) = \langle , \rangle_p$ , donde  $\langle , \rangle_p$  es un elemento de  $I(T_p M)$

Una estructura Riemanniana  $\langle , \rangle$  sobre  $M$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , si y solo si, para todo subconjunto abierto  $U$  de  $M$  y todo par de campos vectoriales  $V$  y  $W$  sobre  $U$ , diferenciables de clase  $C^\infty$ , la función  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\Psi(p) = \langle V(p), W(p) \rangle_p$ , es de clase  $C^\infty$ .

A una variedad diferenciable  $M$  con una estructura Riemanniana  $\langle , \rangle$  de clase  $C^\infty$ , o sea, al par  $(M, \langle , \rangle)$  la llamaremos Variedad Riemanniana.

2.2.2 LEMA. Una estructura Riemanniana  $\langle , \rangle$  sobre una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , es de clase  $C^\infty$ , si y solo si, para todo sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  asociado a una carta local  $(U, x)$  de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ , se tiene que la función  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\Psi(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p \quad \text{es diferenciable de clase } C^\infty.$$

DEMOSTRACION. Supongamos que la estructura  $\langle , \rangle$  sobre  $M$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Sean  $p \in M$ ,  $(U, x)$  una carta local alrededor de  $p$  de clase  $C^\infty$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado a esta carta y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$  la correspondiente base

canónica de  $T_p M$ .

Para  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$   $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  son campos vectoriales sobre  $U$ , diferenciables de clase  $C^\infty$ .

Luego como la estructura  $\langle , \rangle$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , la función  $\Psi: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Psi(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  por (2.2.1).

Recíprocamente, sean  $U$  un abierto de  $M$ ,  $V, W$  campos vectoriales sobre  $U$  diferenciables de clase  $C^\infty$  y  $p_0 \in U$ .

Probaremos que la función  $\Psi: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Psi(p_0) = \langle V(p_0), W(p_0) \rangle_{p_0}$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  sobre  $U$ .

Sea  $(U', y)$  una carta local alrededor de  $p_0$ , diferenciable de clase  $C^\infty$ ; consideremos la base canónica

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq n} \quad \text{de } T_p M.$$

Como  $U \cap U'$  es abierto y contiene  $p_0$ , se tiene que  $U \cap U' \neq \emptyset$ , luego los campos vectoriales  $V|_{U \cap U'}$ ,  $W|_{U \cap U'}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$

$$\text{Para } \forall p \in U \cap U' \text{ sean } V(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p$$

$$\text{y } W(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p$$

las expresiones locales de  $V$  y  $W$  en  $U \cap U'$ , donde  $a_i$ ,  $b_j$  son funciones diferenciables de clase  $C^\infty$  sobre  $U \cap U'$ .

Ahora la función  $\varphi: U \cap U' \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$\varphi(p) = \langle V(p), W(p) \rangle_p$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  pues-

to que:

$$\begin{aligned} \text{Para } \forall p \in U \cap U' \quad \varphi(p) &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i} / p, \sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial}{\partial y_j} / p \right\rangle_p \\ &= \sum_i \sum_j a_i(p) b_j(p) \Psi(p) \end{aligned}$$

y por hipótesis la función  $\Psi$  dada por

$$\Psi(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} / p, \frac{\partial}{\partial y_j} / p \right\rangle_p \text{ es diferenciable de clase } C^\infty$$

sobre  $U'$ , luego también lo es sobre  $U \cap U'$ .

Por tanto  $\varphi$  es diferenciable en  $p_0$  y como este punto es arbitrario, concluimos que la función  $\varphi$  es diferenciable de clase  $C^\infty$  sobre  $U$ .  $\blacktriangle$

2.2.3 NOTA. En todo lo que sigue solo consideraremos estructuras Riemannianas de clase  $C^\infty$ .

La existencia de un estructura Riemanniana sobre una variedad diferenciable, se establece en los teoremas siguientes:

2.2.4 TEOREMA. En toda variedad diferenciable paracompacta existe una estructura Riemanniana diferenciable de clase  $C^\infty$ .

DEMOSTRACION. Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , paracompacta y  $\mathcal{U} = \{(U_k, \psi_k)\}_{k \in A}$  un atlas diferenciable sobre  $M$ . La familia  $\{U_k\}_{k \in A}$  es un cubri-

miento abierto de  $M$ , y como  $M$  es paracompacta, existe un refinamiento localmente finito  $\{U_i\}_{i \in J}$  del cubrimiento dado.

Consideremos la partición de la unidad  $\{\lambda_i\}_{i \in J}$  subordinada al cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in J}$ .

Para cada carta local  $(U_i, \Psi_i)$  alrededor de  $p \in M$ , consideremos, el sistema de coordenadas asociado  $(x_1^i, \dots, x_n^i)$  y la base canónica  $\{\frac{\partial}{\partial x_j^i}/p\}$   $1 \leq j \leq n$  de  $T_p U_i \subset T_p M$ .

Definimos el producto interno sobre  $T_p U_i$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j^i}/p, \frac{\partial}{\partial y_k^i}/p \right\rangle_p = \begin{cases} 0 & \text{si } k=j \\ 1 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Para  $k, j = 1, 2, \dots, n$ .

Sean  $V, W$  campos vectoriales sobre  $M$  de clase  $C^\infty$  entonces para  $V, p \in M$  se tienen:

$$V(p) = \sum_{j=1}^n a_j^i(p) \frac{\partial}{\partial x_j^i}/p$$

$$W(p) = \sum_{k=1}^n b_k^i(p) \frac{\partial}{\partial y_j^i}/p$$

las expresiones locales de  $V$  y  $W$  en  $U_i$ .

Ahora definimos  $\langle, \rangle : M \rightarrow I(TM)$  por:

$$\langle V(p), W(p) \rangle = \sum_{ij} \left[ \sum_j \sum_k a_j^i(p) b_k^i(p) \right] \lambda_i(p)$$

si  $p \in U_i$ ; y si  $p \notin U_i$  las funciones  $a_j^i, b_k^i$  no están definidas, pero no se cuentan, ya que  $\lambda_i(p) = 0$ .

Por lo que resulta que  $\langle , \rangle$  es una estructura Riemanniana diferenciable de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ .  $\blacktriangle$

2.2.5 TEOREMA. Toda variedad diferenciable inmersa en un espacio euclideo  $\mathbb{R}^a$ , admite una estructura Riemanniana.

DEMOSTRACION. Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^a$  una inmersión y  $\langle , \rangle$  el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^b$ .

Para  $\forall p \in M$ , la aplicación  $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^a$ , es un homomorfismo inyectivo.

Construiremos una estructura Riemanniana sobre  $M$  de la manera siguiente:

Sean  $V$  y  $W$  campos vectoriales diferenciables de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ .

Definimos  $\langle , \rangle^* : M \rightarrow I(TM)$  por

$$\langle V(p), W(p) \rangle_p^* = \langle T_p f(V(p)), T_p f(W(p)) \rangle.$$

Se comprueba que  $\langle , \rangle^*$  es una estructura Riemanniana.  $\blacktriangle$

2.2.6 OBSERVACIONES.

1. Por el teorema de Whitney, para toda variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  existe una inmersión  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (Ver [2]). Luego podemos aplicar el teorema 2.2.5 para obtener una estructura Riemanniana sobre  $M$ .

2. La construcción del teorema 2.2.5 se generaliza de la manera siguiente:

Sea  $f$  una inmersión de la variedad diferenciable  $M$  en la variedad Riemanniana  $(N, \langle , \rangle)$ .

Entonces para  $\forall p \in M$  se tiene que  $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es un homomorfismo inyectivo.

Definimos  $\langle \cdot, \cdot \rangle^*: M \rightarrow I(TM)$  por

$\langle V(p), W(p) \rangle_p^* = \langle T_p f(V(p)), T_p f(W(p)) \rangle$  para todo par de campos vectoriales  $V$  y  $W$  diferenciables de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ .

Se comprueba que  $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$  es una estructura Riemanniana diferenciable de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ .

3. Sean  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $(U, x)$  una carta local y  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado.

Entonces sobre  $U$  la estructura Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se puede escribir representar por

$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$  donde las funciones  $g_{ij}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$  y además satisfacen las condiciones:

- i)  $g_{ij} = g_{ji}$  porque  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es simétrica.
- ii)  $\det(g_{ij}) > 0$  ya que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es definida positiva.

Concluimos que una estructura Riemanniana sobre  $M$  es un tensor covariante de orden 2.

### 2.3 METRICA RIEMANNIANA.

Recordemos que:

1. Una función  $\gamma$  del intervalo cerrado  $[a, b]$  en la variedad diferenciable  $M$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ , si y solo si, existen un número real  $\epsilon > 0$  y una función  $\gamma_\epsilon: (a-\epsilon, b+\epsilon) \rightarrow M$  diferenciable de clase  $C^\infty$  tal que

la restricción  $\gamma_\epsilon / [a, b] = \gamma$

2. Una aplicación continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es una curva seccionalmente diferenciable de clase  $C^\infty$ , si y solo si, existe una partición finita  $a = b_1 < b_2 < \dots < b_k = b$  tal que la restricción  $\gamma / [b_i, b_{i+1}]$  es diferenciable de clase  $C^\infty$ .

2.3.1 DEFINICIONES. Sea  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , una curva seccionalmente diferenciable.

Se define la longitud de  $\gamma$ , que designamos con  $L(\gamma)$ , por 
$$L(\gamma) = \int_a^b \langle T_t \dot{\gamma}(1), T_t \dot{\gamma}(1) \rangle^{1/2} dt$$

donde  $T_t$  es el homomorfismo de  $\mathbb{R}$  en el espacio tangente  $T_{\gamma(t)}M$ .

Definimos la función  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

Para  $\forall x, y \in M$ , con  $M$  conexo,  $d(x, y) = \inf_{i \in I} \{L(\gamma_i)\}$  donde

$\{\gamma_i\}_{i \in I}$  es la familia de todas las curvas seccionalmente diferenciables que unen  $x$  e  $y$ .

Si  $M$  no es conexo, entonces definimos  $d$ , separadamente, sobre cada componente conexa.

La función  $d$  definida anteriormente tiene las siguientes propiedades:

i) Para  $\forall x, y \in M$ ,  $d(x, y) > 0$

Esto es claro, pues para  $\forall i \in I$ ,  $L(\gamma_i) > 0$  entonces  $\inf \{L(\gamma_i)\} > 0$ .

ii) Para  $\forall x, y \in M$   $d(x, y) = d(y, x)$ .

Se debe a la simetría de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  para  $\forall p \in M$ .

iii) Para  $\forall x, y, z \in M$   $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$

Para ver esta propiedad, consideremos las curvas seccionalmente diferenciables

$$\alpha : [a, b] \rightarrow M \quad y$$

$$\beta : [c, d] \rightarrow M$$

tales que  $\alpha$  une  $x$  e  $y$ ,  $\beta$  une  $y$  e  $z$ .

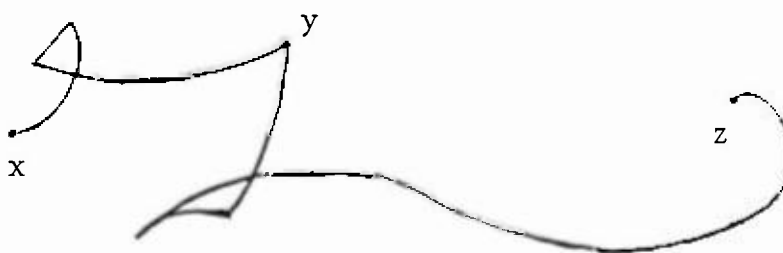
Definimos una nueva curva seccionalmente diferenciable

$$\gamma : [a, b+d-c] \rightarrow M \text{ por}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \beta(t-b+c) & \text{si } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Claramente la curva  $\gamma$  une  $x$  y  $z$ , luego

$$L(\gamma) = L(\alpha) + L(\beta)$$



Así tenemos que:  $d(x, z) \leq \text{Inf} \{L(\gamma)\}$   
 $\leq \text{Inf} \{L(\alpha)\} + \text{Inf} \{L(\beta)\}$   
 $= d(x, y) + d(y, z)$ .

De estas propiedades aún no podemos concluir que la función  $d$  es una métrica, mas del siguiente teorema y su corolario podemos deducir que la función  $d$  es una métrica sobre  $M$ .

2.3.2 TEOREMA. Sean  $\tau$  la topología de  $M$  como variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , y  $\sigma$  la topología sobre  $M$  determinada por la función  $d$  definida en 2.3.1.

Entonces las topologías  $\tau$  y  $\sigma$  coinciden.

DEMOSTRACION. Previamente convenimos que para cualquier carta local  $(U, \Psi)$  con  $\Psi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ , identificamos la topología  $\tau$  restringida a  $U$  con la topología inducida (sobre  $U'$ ) por la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^n$ , que es la topología usual.

Además denotemos por  $d_{riem}$  la función  $d$  definida en 2.3.1;

y por  $d_{euc}$  la función distancia euclídeana  $U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^n$ , es decir:

Para  $\forall u, v \in U$   $d_{euc}(u, v) = \|\Psi(u) - \Psi(v)\|$ .

Así mismo para  $\forall z \in T_u M$  con  $u \in U$ ,  $\|z\|_{riem} = \langle z, z \rangle_u^{1/2}$

y  $\|z\|_{euc} = \|T_u \Psi(z)\|$ .

Sean  $u \in U$  y  $\alpha > 0$  tales que la bola cerrada  $E$  de centro  $u$  y radio  $\alpha$   $\{v \in M / d_{euc}(u, v) \leq \alpha\}$ , está contenida en  $U$ .

Para cada  $v \in E$  consideremos la esfera unitaria

$S_v = \{w \in T_v M / \|w\|_{euc} = 1\}$ .

Luego  $B = \bigcup_{v \in E} S_v$  es un haz fibrado de esferas sobre  $E$  tal que  $B \subset TM$  es compacto.

Así la función  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(z) = \|z\|_{riem}$

es continua y por lo tanto alcanza sus valores máximo y mínimo.

Sean  $H$  y  $h$  los valores máximo y mínimo de  $f$  respecti-

vamente con  $h > 0$ .

Consideremos la curva seccionalmente diferenciable  $\gamma : [0, \rho] \rightarrow M$  que une los puntos  $u$  y  $v$  con  $v \in E$ .

I CASO: Supongamos que  $\text{im}(\gamma) \subset E$ .

Reparametrizando  $\gamma$ , si es necesario, podemos asegurar que  $\|T_t \gamma(1)\|_{\text{euc}} = 1$  para  $\forall t \in [0, \rho]$ .

Luego  $T_t \gamma(1) \in B$  y además

$$L_{\text{riem}}(\gamma) = \int_0^\rho \|T_t \gamma(1)\|_{\text{riem}} dt \geq h \rho \geq h d_{\text{euc}}(u, v).$$

II CASO: Supongamos que  $\text{im}(\gamma) \not\subset E$ .

Entonces:

$$L_{\text{riem}}(\gamma) = \int_0^\rho \|T_t \gamma(1)\|_{\text{riem}} dt \geq h \alpha \geq h d_{\text{euc}}(u, v).$$

En ambos casos tenemos que  $L_{\text{riem}}(\gamma) \geq h d_{\text{euc}}(u, v)$

$$\text{de donde } d_{\text{riem}}(u, v) \geq h d_{\text{euc}}(u, v) \quad (*)$$

Consideremos ahora la curva  $\beta : [0, a] \rightarrow E$  definida por  $\beta(t) = \Psi^{-1} [1/a(\Psi(\beta(t)) - \Psi(u))]$  para  $u, \beta(t) = v \in E$  con  $a = d_{\text{euc}}(u, \beta(t))$

En este caso tenemos:

$$L_{\text{riem}}(\gamma) = \int_0^a \|T_t \gamma(1)\|_{\text{riem}} dt \leq H a$$

$$\text{de donde deducimos que } d_{\text{riem}}(u, v) \leq H d_{\text{euc}}(u, v) \quad (**)$$

De (\*) y (\*\*) resulta

$$h d_{\text{euc}}(u, v) \leq d_{\text{riem}}(u, v) \leq H d_{\text{euc}}(u, v)$$

con lo que concluimos la demostración.  $\blacktriangle$

2.3.3 COROLARIO.  $d_{\text{riem}}$  es una métrica sobre  $M$ .

DEMOSTRACION. Como  $d = d_{\text{riem}}$  tiene las propiedades i), ii) y iii) de 2.3.1 basta probar que:

Para  $\forall x, y \in M$   $d_{\text{riem}}(x, y) = 0$ , si y solo si,  $x = y$

Si  $x = y$  entonces  $d_{\text{riem}}(x, x) = \text{Inf} \{L(\gamma_i)\} = 0$

luego  $d(x, y) = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $x \neq y$ , como  $M$  es un espacio de Hausdorff, existen vecindades  $\tau$ -abiertas  $P$  y  $Q$  de  $x$  e  $y$  respectivamente tales que  $P \cap Q = \emptyset$ .

Por otra lado como las topologías  $\tau$  y  $\sigma$  coinciden, existen números reales  $r, s > 0$  tales que las bolas  $B_r(x)$  y  $B_s(y)$  tienen intersección vacía.

Así  $d_{\text{riem}}(x, y) \geq r + s > 0$  lo que implica que  $d_{\text{riem}}(x, y) > 0$  lo cual es una contradicción.  $\blacktriangle$

2.3.4 DEFINICION. A la métrica  $d = d_{\text{riem}}$  determinada por la estructura Riemanniana  $\langle , \rangle$  sobre  $M$ , llamamos Métrica Riemanniana.

## 2.4 SISTEMA NORMAL DE COORDENADAS.

2.4.1 TEOREMA. Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $p \in M$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormal de  $T_p M$ . Entonces existe un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  alrededor de  $p$  de clase  $C^\infty$  tal que:

i)  $p \longleftrightarrow (0, \dots, 0)$ .

ii)  $v_i \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} /_p$  para  $\forall i=1, \dots, n$ .

iii) Si  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$  entonces

ces  $dg_{ij}/p = 0$  para  $\forall i, j = 1, \dots, n$ .

DEMOSTRACION. Sea  $(U, \Psi)$  una carta local alrededor de  $p$  y  $(z_1, \dots, z_n)$  el sistema de coordenadas asociado.

Consideremos la aplicación  $t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $t(q) = q - \Psi(p)$  para  $\forall q \in \mathbb{R}^n$ .

Es claro que  $t$  es una traslación y por tanto un difeomorfismo.

Luego  $(U, \psi)$  con  $\psi = t \circ \Psi$  es una carta local alrededor de  $p$  y sea  $(y_1, \dots, y_n)$  el sistema de coordenadas asociado, entonces  $\{\frac{\partial}{\partial y_i} / p\}_{i=1,2,\dots,n}$  forman también una base de  $T_p M$  con

$$\frac{\partial}{\partial y_i} / p = \sum \langle \frac{\partial}{\partial y_i} / p, v_j \rangle v_j \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y \langle \frac{\partial}{\partial y_i} / p, v_j \rangle v_j = \delta_{ij}$$

Así el sistema de coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  satisface las condiciones i) y ii).

Para que se cumpla la condición iii) definimos un nuevo sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  alrededor de  $p$  por la relación  $x_i + \sum_{1,m} a_{1m}^i x_1 x_m = y_i$  con  $a_{1m}^i = a_{m1}^i$ .

Por el teorema de la Función Inversa las funciones  $x_i$  son de clase  $C^\infty$  en una vecindad de  $p$ .

Veamos ahora las condiciones que deben satisfacer las constantes  $a$ 's para que se cumpla iii).

Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_k \left[ \delta_{ik} + (\sum_l (a_{il}^k + a_{li}^k) x_l) \frac{\partial}{\partial y_k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_k \left( \sum_l 2a_{il}^k x_l \right) \frac{\partial}{\partial y_k} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora } \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle \\ &+ \sum_{k,1} 2a_{i1}^k x_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle \\ &+ \sum 2a_{j1}^k x_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right\rangle \\ &+ \text{términos cuadrático en } x\text{'s} . \end{aligned}$$

Luego en el punto p tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle + \sum 2a_{iq}^k \delta_{kj} \\ &+ \sum_k 2a_{jq}^k \delta_{ik} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle + 2a_{iq}^j + 2a_{jq}^i . \end{aligned}$$

Por lo tanto, las constantes a's, deben satisfacer la ecuación

$$2a_{iq}^j + 2a_{jq}^i = - \frac{\partial}{\partial x_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle \quad (*)$$

para que se cumpla iii).

$$\text{Sea } a_{jq}^i = -1/4 \left( \frac{\partial}{\partial y_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\rangle \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_q} \right\rangle.$$

De aquí resulta que se verifica (\*).

$$\text{Como } \frac{\partial}{\partial x_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial y_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle.$$

Concluimos que los valores de las a's así definidos satisfacen (\*).

Además estos valores son únicos pues:

$$1) a_{iq}^j + a_{jq}^i = -1/2 \frac{\partial}{\partial y_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle.$$

$$2) a_{ji}^q + a_{qi}^j = -1/2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_q} \right\rangle.$$

$$3) a_{qj}^i + a_{ij}^q = -1/2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\rangle.$$

Haciendo una permutación cíclica de i, j y q y tomando

(1) - (2) y (3) obtenemos:

$$2a_{jq}^i = -1/2 \frac{\partial}{\partial y_q} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_q} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\rangle. \blacktriangle$$

2.4.2 OBSERVACION. Cualquier par de sistemas de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  alrededor de p con

i)  $p \longleftrightarrow (0, \dots, 0)$

ii)  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \Big|_p$  para  $\forall i=1, 2, \dots, n$

iii)  $dg_{ij}(p) = d\bar{g}_{ij}(p) = 0$  para  $\forall i, j=1, 2, \dots, n$

son iguales excepto términos de tercer orden.

En consecuencia  $\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} = 0$  excepto términos de

segundo orden.

2.4.3 DEFINICION. Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  y  $p \in M$ . Un sistema normal de coordenadas en  $p$  es un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  en una vecindad de  $p$  tal que:

i)  $p \longleftrightarrow (0, \dots, 0)$

ii)  $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$  (en  $p$ ) para  $\forall i, j=1, 2, \dots, n$

iii)  $dg_{ij} = 0$  (en  $p$ ) Para  $\forall i, j=1, 2, \dots, n$

2.4.4 NOTA: El teorema 2.4.1 garantiza la existencia de un sistema normal de coordenadas alrededor de todo punto en una variedad Riemanniana.

---

CAPITULO III  
CONEXION Y TENSOR CURVATURA

En este capítulo estudiaremos las conexiones y las propiedades y conceptos asociados, como la derivada covariante, paralelismo y tensor curvatura.

### 3.1 CONEXIONES.

3.1.1 DEFINICION. Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Denotemos por  $\mathfrak{X}(M)$  el espacio de todos los campos vectoriales diferenciables en  $M$ .

Una conexión (Koszul) sobre  $M$  es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

cuyo valor denotamos por  $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$  y que satisface las siguientes condiciones:

Para  $\forall X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M); f, g \in C^\infty(M)$

i)  $\nabla$  es lineal en  $X$ , es decir,

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

ii)  $\nabla$  es aditiva en  $Y$ , o sea,

$$\nabla_X (Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$

iii)  $\nabla_X (f.Y) = f.\nabla_X Y + X(f). Y$

Se sigue que la aplicación

$$\mathfrak{X}(M) \times T_p M \rightarrow T_p M$$

que al par  $(Y, X_p)$  le hace corresponder el vector

$\nabla_{X_p} Y = \nabla_X Y(p)$ ; satisface las siguientes condiciones:

Para  $\forall X, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M); X_p, X'_p \in T_p M; f \in C^\infty(M)$ ,

$a, b \in \mathbb{R}$  y  $p \in M$ .

$$j) \nabla_{aX_p + bX'_p} Y = a\nabla_{X_p} Y + b\nabla_{X'_p} Y$$

$$jj) \nabla_{X_p} (Y_1 + Y_2) = \nabla_{X_p} Y_1 + \nabla_{X_p} Y_2$$

$$jjj) \nabla_{X_p} (f \cdot Y) = f(p) \nabla_{X_p} Y + X_p(f) \cdot Y$$

ju) La aplicación  $M \rightarrow TM$  dada por

$$p \rightarrow \nabla_{X_p} Y \text{ es un campo vectorial.}$$

Recíprocamente, se puede definir una conexión de Koszul como una aplicación  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times T_p M \rightarrow T_p M$  que asocia a todo par  $(Y, X_p) \in \mathfrak{X}(M) \times T_p M$  un vector  $\nabla_{X_p} Y \in T_p M$

y que satisface las condiciones j), jj), jjj) y ju).

Así definimos ahora para  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  el campo vectorial  $\nabla_X Y: M \rightarrow TM$  por  $\nabla_X Y(p) = \nabla_{X_p} Y$ , para  $\forall p \in M$ .

### 3.1.2 EXPRESION LOCAL DEL CAMPO VECTORIAL $\nabla_X Y$ .

Sean  $p \in M$ ,  $(U, \Psi)$  una carta local alrededor de  $p$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado. Los campos vectoriales  $X$  e  $Y$  se pueden representar por

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde  $X^i$  e  $Y^j$  son las funciones componentes de los campos vectoriales  $X$  e  $Y$  respectivamente, en el sistema de coordenadas  $(U, x)$ .

Definimos  $\Gamma_{ij}^k$  por la relación  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

$$\text{Luego } \nabla_X Y = \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y = \sum_{i=1}^n X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y$$

$$\begin{aligned} \text{como } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n X^i \sum_{j=1}^n \left[ Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X^i Y^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

para  $j = k$  y cambiando el orden de las sumatorias

$$\text{obtenemos: } \nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^n X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

esta es la llamada expresión local del campo vectorial  $\nabla_X Y$ .

Formemos ahora para cada campo vectorial  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$

la colección de transformaciones lineales  $\{\nabla Y(p)\}_p \in M$

donde  $\nabla Y(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  se define por

$$\nabla Y(p) (X_p) = \nabla_{X_p} Y = \nabla_X Y(p).$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \nabla Y \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ Y^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

$$\text{para } j = k \quad = \sum_{k=1}^n (Y^k \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial Y^k}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\text{Hagamos } Y^k; i = Y^k \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial Y^k}{\partial x_i}$$

$$\text{Luego } \nabla Y \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^n (Y^k; i) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Así resulta que  $\nabla Y = \sum_{k=1}^n (Y^k; i) dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_k}$  es un tensor del tipo  $\binom{1}{1}$ .

### 3.2 DERIVADA COVARIANTE

3.2.1 DEFINICIONES Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $c: [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable.

Un campo vectorial a lo largo de  $c$  es un campo vectorial  $V: [a, b] \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{c(t)}M$ .

Denotaremos  $V(t)$  por  $V_t$ .

Si  $(U, \Psi)$  es una carta local alrededor de  $c(t)$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  es el sistema de coordenadas asociado, entonces el campo vectorial  $V$  a lo largo de  $c$  se puede escribir localmente como:  $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} / c(t)$ .

$V$  es un campo vectorial diferenciable de clase  $C^\infty$  a lo largo de  $c$ , si y solo si, las funciones  $V^i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$ , para  $\forall i=1, 2, \dots, n$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{X}_c(M)$  el espacio vectorial de los campos vectoriales diferenciables de clase  $C^\infty$  a lo largo de  $c$ .

Sean  $M$  una variedad diferenciable con una conexión  $\nabla$  y  $W$  un campo vectorial definido sobre una vecindad abier-

ta de  $c([a, b])$ . Se llama derivada covariante de  $W$  a lo largo de  $c$  al campo vectorial a lo largo de  $c$ ,

$\frac{D}{dt} : [a, b] \rightarrow TM$ , dado por

$$t \rightsquigarrow \nabla_{\frac{dc}{dt}} W.$$

Al vector  $\nabla_{\frac{dc}{dt}} W$  lo denotaremos  $\frac{DW}{dt}$ .

3.2.2 PROPOSICION. Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión  $\nabla$  y  $c: [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable.

Existe una función  $\Psi : \mathfrak{X}_c(M) \rightarrow \mathfrak{X}_c(M)$ , cuyo valor denotamos  $\Psi(V) = \frac{DV}{dt}$ , para  $V \in \mathfrak{X}_c(M)$  y que cumple las siguientes condiciones:

iguientes condiciones:

i) Si  $V_s = Y_{c(s)}$  para algún campo vectorial  $Y$  de clase  $C^\infty$  definido en una vecindad de  $c(t)$ . Entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

ii) Si  $\frac{dc}{dt} = 0$  entonces  $\frac{DV}{dt} = 0$

iii)  $\Psi(V+W) = \Psi(V) + \Psi(W)$

iv)  $\Psi(f.V) = \frac{df}{dt} V + f \Psi(V)$  para  $V f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

DEMOSTRACION. Definimos  $\Psi: \mathfrak{X}_c(M) \rightarrow \mathfrak{X}_c(M)$  por

$\Psi(V) = \nabla_{\frac{dc}{dt}} V$ . Probaremos que esta función satisface las

condiciones i), ii), iii) y iv).

Supongamos que  $\frac{dc}{dt} \neq 0$ .

Por el teorema de la función implícita existen vecinda-

des abiertas  $W$  de  $c(t)$  y  $R$  de  $t$  tal que  $c$  es un difeomorfismo local de  $R$  sobre  $W$ .

Definimos un campo vectorial  $Y$  sobre la vecindad abierta  $U$  de  $c(t)$  con  $W \subset U$ , de manera que  $Y|_W = V$ .

Así tenemos que  $V_s = Y_{c(s)}$  para  $V_s \in [a, b]$ .

Ahora escogemos una carta local alrededor de  $c(t)$  y sea  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado;

luego el campo vectorial  $Y$  y el vector  $\frac{dc}{dt}$  admiten las representaciones:  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} / c(t)$$

donde  $c_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $c_i = x_i \circ c$ .

$$\begin{aligned} \text{Luego } \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y &= \sum_{i=1}^n \frac{dc_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} / c(t) \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{dc_i}{dt} \frac{dy^k}{dt} + \sum_{ij=1}^n \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc_i}{dt} Y^j(t) \right] \frac{\partial}{\partial x_k} / c(t) \end{aligned}$$

De aquí resulta claramente que  $\nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$  no depende del campo  $Y$ , sino de los valores que toma dicho campo a lo largo de la curva  $c$ , además,  $\nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$  tampoco depende del sistema de coordenadas escogido.

Concluimos que  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$  se cumple i).

Si  $\frac{dc}{dt} = 0$ , por definición de  $\frac{DV}{dt}$  tenemos  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} V$ ,

pero  $\nabla_{\frac{dc}{dt}} V = 0$  y luego se cumple ii).

Las condiciones iii) y iv) resultan inmediatas de las propiedades de la conexión de Koszul  $\nabla$ .  $\blacktriangle$

### 3.3 PARALELISMO.

3.3.1 DEFINICION. Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con una conexión  $\nabla$  y  $c: [a, b] \rightarrow M$  una curva. Un campo vectorial  $V$  a lo largo de  $c$  es paralelo a lo largo de  $c$ , si y solo si,  $\frac{DV}{dt} = 0$ .  $\forall t \in [a, b]$ .

3.3.2 OBSERVACIONES. Siempre que tengamos una curva  $c: [a, b] \rightarrow M$  y un vector  $v \in T_{c(a)}M$ , es posible construir un campo vectorial  $V$  paralelo a lo largo de  $c$  de la manera siguiente:

Para  $\forall t \in (a, b]$ , el vector  $v_t \in T_{c(t)}M$  se obtiene de  $v_a$  por traslación paralela a lo largo de  $c$ .

Luego el campo vectorial  $V$  satisface la condición  $\frac{DV}{dt} = 0$  y como  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} V$  se cumple que

$$\frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{ij=1}^n \frac{dc_i(t)}{dt} \Gamma_{ij}^k(c(t)) V^j(t) = 0 \quad (*)$$

La expresión anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, por lo tanto posee una única solución  $V$  cuyas funciones componentes son

$V^j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Luego para  $\forall t \in (a, b]$  y para alguna carta local  $(U, \psi)$  alrededor de  $c(t)$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado, se tiene la expresión local para el campo vectorial  $V$ :

$$V_t = \sum_{j=1}^n v^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} /_{c(t)} .$$

Por otro lado como el conjunto de soluciones del sistema (\*) forman un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  tenemos que:

$$(V + W)_t = V_t + W_t$$

$$\text{y} \quad (\lambda V)_t = \lambda V_t \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

así podemos definir la función  $\tau_t: T_{c(a)}^M \rightarrow T_{c(t)}^M$  dada por  $\tau_t(V_a) = V_t$ , que resulta una transformación lineal. Claramente  $\tau_t$  es biyectiva y por lo tanto es un isomorfismo entre espacios tangentes.

En forma general, para cualquier curva diferenciable  $c$  en  $M$  tenemos un isomorfismo entre dos cualesquiera espacios tangentes  $T_{c(t_1)}^M$  y  $T_{c(t_2)}^M$ .

3.3.3 PROPOSICION. Sean  $c$  una curva diferenciable en una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , con conexión  $\nabla$ , con  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = X_p$ ,  $Y$  un campo vectorial sobre  $M$ . Entonces  $\nabla_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau_t^{-1} Y_{c(h)} - Y_p)$ .

DEMOSTRACION. Fijemos  $h$  en el dominio de  $c$ , y sea  $Z$  el campo vectorial paralelo a lo largo de  $c$  tal que:

$$\text{i) } Z_0 = \tau_h^{-1} Y_{c(h)} \in T_{c(0)}^M .$$

Así podemos definir también el vector  $Z_h$  por

$$\text{ii) } Z_h = Y_{c(h)}$$

$$\text{pues } Z_h = \tau_h(Z_0) = \tau_h \tau_h^{-1} Y_{c(h)} = Y_{c(h)} .$$

Para todo  $t$  del dominio de  $c$ , escribimos el vector  $Z_t$  y

el campo vectorial  $Y$ , localmente por

$$Z_t = \sum_{i=1}^n Z^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} / c(t)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Como el campo vectorial  $Z$  es paralelo a lo largo de  $c$  entonces

$$\text{iii) } \frac{dZ^k(t)}{dt} + \sum_{ij=1}^n \frac{dc_i}{dt} Z^j(t) \Gamma_{ij}^k c(t) = 0$$

iv) además  $Z^k(h) = Y^k(c(h))$  por ii) .

Por el teorema del valor medio tenemos:

$$\text{v) } Z^k(h) = Z^k(0) + hZ^k(\xi) \text{ para } \xi \in (0, h) .$$

Luego la  $k$ -ésima componente de  $\frac{1}{h} (\tau_h^{-1} Y_{c(h)} - Y_p)$  es

igual a  $\frac{1}{h} (Z^k(0) - Y^k(c(0)))$  aplicando v), iv) y iii)

respectivamente a esta expresión obtenemos

$$\sum_{ij=1}^n \frac{dc_i}{dt} (\xi) Z^j (\xi) \Gamma_{ij}^k (c(\xi)) + \frac{1}{h} [Y^k(c(h)) - Y^k(c(0))]$$

y el límite de esta última expresión cuando  $h \rightarrow 0$  es

$$\sum_{ij=1}^n \frac{dc_i}{dt} (0) Y^j (c(0)) \Gamma_{ij}^k (c(0)) + \frac{dY^k(c(t))}{dt} (0)$$

el cual es la  $k$ -ésima componente del vector  $\nabla_{X_p} Y$ .

Concluimos que  $\nabla_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau_h^{-1} Y_{c(h)} - Y_p)$ . ▲

### 3.4 CONEXION COMPATIBLE CON UNA ESTRUCTURA RIEMANNIANA.

3.4.1 DEFINICION. Sea  $(M, \langle , \rangle)$  una variedad Riemanniana.

Una conexión  $\nabla$  sobre  $M$  es compatible con la estructura

$\langle , \rangle$  si las traslaciones paralelas  $\tau_t: T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(t)}M$  a lo largo de cualquier curva diferenciable  $c: [a, b] \rightarrow M$ , son isometrías. (con respecto a  $\langle , \rangle_{c(a)}$  y  $\langle , \rangle_{c(t)}$ ).

3.4.2 LEMA. Una conexión  $\nabla$  sobre una variedad Riemanniana  $(M, \langle , \rangle)$  de dimensión  $n$  es compatible con la estructura  $\langle , \rangle$ , si y solo si, satisface la siguiente condición:

$$* \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } V \text{ y } W \text{ son campos vectoriales a lo largo de} \\ \text{cualquier curva diferenciable } c: [a, b] \rightarrow M. \\ \text{Entonces } \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION. Supongamos que  $\nabla$  cumple la condición (\*).

Sea  $V$  un campo vectorial a lo largo de  $c$ .

$$\text{Entonces } \frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = 2 \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle = 0 \text{ y por lo tanto}$$

$\langle V, V \rangle$  es constante a lo largo de  $c$ .

Así las traslaciones paralelas  $\tau_t$  preservan la norma; luego son isometrías.

Recíprocamente, supongamos que  $\nabla$  es compatible con la estructura  $\langle , \rangle$ .

Consideremos los campos vectoriales  $P_1, \dots, P_n$  paralelos a lo largo de  $c$  y ortonormales en un punto de  $c$ . Luego  $P_1, \dots, P_n$  son ortonormales en todo punto de  $c$ .

Esto es, para  $\forall t \in [a, b]$  y para  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ .

$$\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

y además  $\|P_i(t)\| = 1$

Así  $P_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n$  forman una base de  $T_{c(t)}M$ .

Sean  $V, W$  campos vectoriales a lo largo de  $c$ .

$$\text{como } V = \sum_{i=1}^n V^i P_i \quad \text{y} \quad W = \sum_{j=1}^n W^j P_j$$

$$\text{Entonces } \frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} P_i(t) \quad \text{y} \quad \frac{DW}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dW^j}{dt} P_j(t)$$

Por tanto, calculando, obtenemos:

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle \quad \blacktriangle$$

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente:

3.4.3 COROLARIO. La conexión  $\nabla$  en la variedad Riemanniana  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimensión  $n$  es compatible con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , si y solo si,  $X_p \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{X_p} Y, Z_p \rangle + \langle Y_p, \nabla_{X_p} Z \rangle$  para  $\forall Y, Z$  campos vectoriales a lo largo de una curva diferenciable  $c$  en  $M$ ,  $X_p \in T_p M$ ,  $p \in M$ .

3.4.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA RIEMANNIANA.

Sobre una variedad Riemanniana  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimensión  $n$  existe una única conexión simétrica compatible con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,

DEMOSTRACION. Para demostrar la existencia, recordemos que en un sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  asociado

a una carta local  $(U, \psi)$  alrededor de  $p \in M$ , tenemos que:

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad \text{por la parte c) de 2.2.6.}$$

Si tomamos otro sistema de coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$  alrededor de  $p$ , se demuestra que vale la relación:

$$\frac{\partial^2 y^k}{\partial y^i \partial y^j} = \sum_{\gamma=1}^n \Gamma_{ij}^{\gamma} \frac{\partial y^k}{\partial x^{\gamma}}$$

ver [ 19 ] .

A los  $\Gamma_{ij}^{\gamma}$  llamamos símbolos de Christoffel

Se demuestra también que vale  $\Gamma_{ij}^{\gamma} = \Gamma_{ji}^{\gamma}$  .

Recordemos también que una conexión clásica sobre una variedad Riemanniana  $M$  de dimensión  $n$  está dada por una asociación de  $n^3$  números reales  $\Gamma_{ij}^k$  a cada sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ , tal que si  $\Gamma_{ij}^k$  es asociado al sistema de coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$ , vale la siguiente relación:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^k} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} .$$

Se demuestra que sobre una variedad Riemanniana  $(M, \langle , \rangle)$  siempre existe una conexión clásica. Ver [ 19 ] .

A esta conexión clásica se le llama conexión de Levi-Civita.

Se comprueba también, sin dificultad, que esta conexión clásica es simétrica y compatible con la estructura  $\langle , \rangle$ .

Para demostrar la unicidad, supongamos que  $\nabla$  es una conexión simétrica y compatible con  $\langle , \rangle$  .

Para una carta local  $(U, \psi)$  y  $(x^1, \dots, x^n)$  su sistema de

coordenadas asociado tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle .$$

Haciendo una permutación cíclica de  $i, j, k$  y utilizando la simetría de la conexión  $\nabla$  resulta

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = [ij, k]$$

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_{k=1}^n g^{kl} [ij, k] .$$

Concluimos que los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^l$  para la conexión escogida  $\nabla$  coinciden con los símbolos de Christoffel para la conexión clásica. Ver [19]

Por consiguiente la conexión  $\nabla$  coincide con la conexión de Levi-Civita; de aquí se deduce que dos conexiones simétricas compatibles con  $\langle , \rangle$  siempre coinciden.  $\Delta$

3.4.5 COROLARIO. Poseen una única conexión simétrica, compatible con su estructura Riemanniana las siguientes variedades:

- a) Esfera Unitaria  $S^n$
- b) Espacio Proyectivo Real (complejo)  $P \mathbb{R}^n$  ( $P \mathbb{C}^n$ )
- c) Variedad de Stiefel  $V_{n,k}$
- d) Variedad de Grassmann  $G_{n,k}$
- e) Grupo de Lie Real  $O(n)$
- f) Grupo de Lie Complejo  $U(n)$

Ver [2] .

DEMOSTRACION. Las variedades a) hasta f) son compactas y por consiguiente poseen una estructura Riemanniana por 2.2.4 y por 3.4.4 existe una única conexión simétrica compatible con cada una de las estructuras Riemannianas obtenidas. ▲

### 3.5 TENSOR CURVATURA.

3.5.1 DEFINICIONES. Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(x,y)$ ,  $M$  una variedad diferenciable con una conexión  $\nabla$  y  $\psi : U \rightarrow M$  una función de clase  $C^\infty$ . Un campo vectorial  $V$  a lo largo de  $\psi$  es una función  $V : U \rightarrow TM$  tal que  $V(x,y) \in T_{\psi(x,y)} M$  para  $V(x,y) \in U$ .

Para cualquier campo vectorial  $V$  a lo largo de  $\psi$  definimos el campo vectorial  $\frac{DV}{\partial x}(x,y)$  como la derivada covariante de  $V$  a lo largo de la curva  $c$ , tal que,  $c : [0,1] \rightarrow M$  y para  $V$   $t \in [0,1]$  es  $c(t) = \psi(t,y)$ .

Similarmente se define el campo vectorial  $\frac{DV}{\partial y}(x,y)$ .

Luego  $\frac{DV}{\partial x} : [0,1] \rightarrow TM$  dada por

$$t \rightarrow V(t,y)$$

$\frac{DV}{\partial y} : [0,1] \rightarrow TM$  dada por

$$t \rightarrow V(x,t)$$

son campos vectoriales a lo largo de  $c$ .

3.5.2 OBSERVACION.  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  son campos vectoriales

de clase  $C^\infty$  pues  $\psi_* \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  y  $\psi_* \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

y si la conexión  $\nabla$  es simétrica, entonces

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{D}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

3.5.3 DEFINICION. Sean  $U \subset \mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(x,y)$ ,  $M$  una variedad diferenciable con conexión  $\nabla$  y  $\psi: U \rightarrow M$  de clase  $C^\infty$ .

Denotemos:  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = V$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = W$

Definimos la aplicación  $R(V,W) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  por

$$R(V,W) T = \frac{D}{dx} \frac{D}{dy} T - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} T$$

Se comprueba que  $R(V,W)$  es lineal.

Luego a la aplicación trilineal

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definida por  $R(V,W,T) = R(V,W) T$  llamamos el tensor curvatura de  $M$ .

CAPITULO IV  
GEODESICAS Y APLICACION EXPONENCIAL

Hemos visto en el capítulo II los significados de distancia y ángulo sobre una variedad Riemanniana. Veremos, en el presente capítulo, cómo se interpreta otro de los conceptos fundamentales de la Geometría Euclidea, como lo es, la línea recta.

El resultado es el concepto de geodésica, el cual discutiremos conjuntamente con la aplicación exponencial y la curvatura seccional, estableciendo las relaciones entre los mismos.

4.1 DEFINICION DE UNA GEODESICA UTILIZANDO DERIVADA COVARIANTE.

4.1.1 DEFINICION. Sean  $(M, \langle , \rangle)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  y  $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'(t)$  el vector velocidad de  $\gamma$ .

Se dice que  $\gamma$  es una geodésica sobre  $M$  si  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ ,

esto es, la derivada covariante del vector velocidad se anula.

4.1.2 ECUACIONES DE UNA GEODESICA. Sean  $(M, \langle , \rangle)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $(x^1, \dots, x^n)$  un sistema de coordenadas alrededor de un punto  $p \in M$  y  $\gamma$  una geodésica en  $M$  que pasa por  $p$ .

Como  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ , de la expresión local de  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$

obtenemos:

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \sum_{ij=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \quad (*)$$

el cual es un sistema de ecuaciones lineales en  $\mathbb{R}^n$ , por lo que posee una única solución, dada las condiciones iniciales.

De esta forma se asegura la existencia de una única geodésica que satisface (\*). Al sistema (\*) se le llama ecuaciones de la geodésica  $\gamma$ .

En resumen hemos establecido el siguiente:

4.1.3 TEOREMA. Para cada punto  $p \in M$  y para cada  $z \in T_p M$ , existe una única geodésica  $\gamma : (-\delta, +\delta) \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = z$  para alguna carta local  $(U, \Psi)$  alrededor de  $p$ .

4.1.4 NOTA. Si  $\gamma$  es una geodésica sobre  $M$  y  $\gamma'(t)$  es el vector velocidad, entonces al vector  $\frac{D}{dt} \gamma'(t)$  llamamos vector aceleración de la curva.

Luego las geodésicas son simplemente curvas de aceleración nula.

4.1.5 REPARAMETRIZACION DE UNA GEODESICA. Sea  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana y  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica sobre  $M$ ,

Si  $V$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $V$  se puede expresar como:  $V = f \frac{d\gamma}{dt}$

para  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\frac{DV}{dt}$  es cero si  $f$  es lineal,

pues,

$$\frac{DV}{dt} \equiv \frac{df}{dt} \frac{dy}{dt} + f \frac{D}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} \frac{dy}{dt} \quad y$$

como  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ , para que  $\frac{DV}{dt} = 0$  debe ser  $f$  lineal.

Por lo tanto, una reparametrización  $\gamma' = \gamma \cdot g$  de una geodésica  $\gamma$  es también una geodésica, solo si  $g$  es lineal.

En otros términos, para toda geodésica  $\gamma$  sobre  $M$  se tiene:

$$\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \text{constante, ya que } \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

Luego  $\gamma$  es parametrizada proporcionalmente por la longitud

$$\begin{aligned} \text{de arco } L(\gamma) &= \int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \\ &= \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| t + C. \end{aligned}$$

## 4.2 CONCEPTO DE GEODESICA MEDIANTE CALCULO DE VARIACIONES.

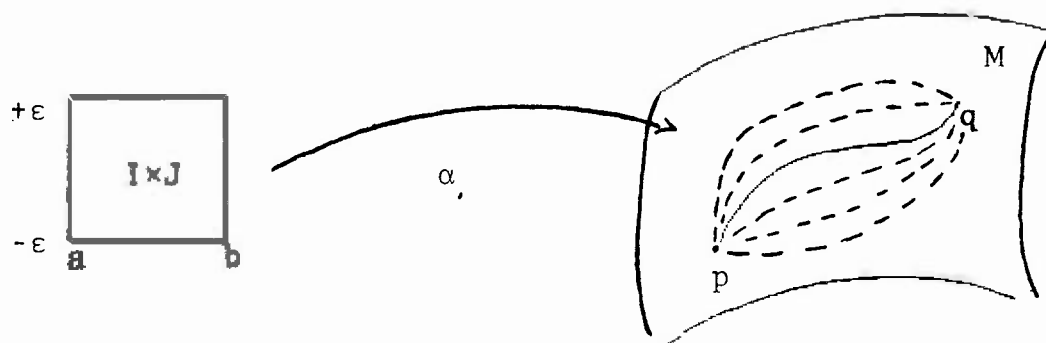
4.2.1 DEFINICION. Sean  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana,  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una curva seccionalmente diferenciable en  $M$  tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ .

Denotemos  $J = [a, b]$ ,  $I = (-\epsilon, +\epsilon)$  para  $\epsilon > 0$ .

Una variación de la curva  $\gamma$  es una aplicación  $\alpha: I \times J \rightarrow M$  que satisface las siguientes condiciones:

- i) Para todo  $t \in J$ ,  $\alpha(0, t) = \gamma(t)$ .
- ii) Para todo  $v \in I$ ,  $\alpha(v, a) = p$  y  $\alpha(v, b) = q$ .
- iii) Para toda partición  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  de  $J$ , la restricción  $\alpha_i = \alpha / I \times J_i$  es diferenciable, donde

$$J_i = [t_{i-1}, t_i].$$



4.2.2 OBSERVACIONES. Partiendo de la definición anterior si  $\alpha$  es tal variación de  $\gamma$  entonces:

1) Para cada  $v \in I$  podemos definir una curva seccionalmente diferenciable  $\gamma_v: J \rightarrow M$  por  $\gamma_v(t) = \alpha(v, t)$ . Obtenemos así una familia  $\{\gamma_v\}_{v \in I}$  de curvas seccionalmente diferenciable sobre  $M$ .

2) Podemos definir también la función longitud  $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\lambda(v) = L(\gamma_v)$  donde  $L(\gamma_v)$  denota la longitud de la curva  $\gamma_v$ .

4.2.3 NOTA. Nos proponemos ahora caracterizar las curvas sobre una variedad Riemanniana  $M$ , para las cuales con cualquier variación  $\alpha$  de las mismas, tenemos que  $D\lambda(0) = 0$ , esto es, que la función longitud  $\lambda$  se hace crítica en  $\gamma$ .

Recordemos por 2.3.1 que para una curva seccionalmente diferenciable  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ ;

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\langle T_t \gamma(1), T_t \gamma(1) \right\rangle_{\gamma(t)}^{1/2} dt$$

en donde la raíz cuadrada nos ocasiona cierta dificultad en los cálculos, y por lo tanto, en lugar de la función

longitud  $\lambda$ , trabajaremos con la función energía  $E$ , que está dada por la expresión

$$2 E(\gamma) = \int_a^b \langle T_t \gamma(1), T_t \gamma(1) \rangle dt .$$

Así definimos la aplicación  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\eta(v) = E(\gamma_v)$  y trasladamos nuestro estudio a caracterizar las curvas  $\gamma$  para las cuales con cualquier variación  $\alpha$  de  $\gamma$ , se obtenga  $D\eta(0) = 0$ .

Para ello veamos los pasos importantes siguientes:

Sean  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $J = [a, b]$ ,  $\gamma: J \rightarrow M$  una curva seccionalmente diferenciable que pasa por  $p \in M$  y  $\alpha$  una variación de  $\gamma$ .

Consideremos la carta local  $(U, \Psi)$  alrededor de  $p$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado. Podemos asegurar que la imagen de  $\gamma_i = \gamma|_{J_i}$  está contenida en  $U$ , haciendo un refinamiento de la partición de  $J$  si es necesario.

También podemos asumir que  $\alpha_i(I \times J_i) \subset U$ .

Consideremos la aplicación  $\beta_i : I \times J_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde

$\beta_i = \Psi \circ \alpha_i$ , claramente  $\beta_i$  es diferenciable.

Además para  $\forall v \in I$  definimos la curva  $\beta_{iV}: J_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\beta_{iV}(t) = \beta_i(v, t)$  que también es diferenciable.

Tomando  $I \times J_i$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y denotando por  $[g_{j1}(x)]$  la matriz de  $g(u)$  para  $u \in U$ ,  $x = \Psi(u)$ , se tiene que:

$$2 E(\gamma_{iV}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( \sum_{j1=1}^n g_{j1}(x) \left( \frac{dx_j}{dt}, \frac{dx_1}{dt} \right) \right) dt$$

donde  $x = \beta_{iV}(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Se deduce de la expresión anterior que  $\gamma$  es un punto crítico para la función  $\eta$ , si y solo si,  $\gamma$  es diferenciable y en cada carta local se tiene:

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} + \sum_{j1=1}^n \Gamma_{j1}^r(x) \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (*)$$

para  $r = 1, 2, \dots, n$  y  $\Gamma_{j1}^r : U' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son los símbolos de Christoffel, dados por:

$$2 \Gamma_{j1}^r(x) = \sum_{s=1}^n g^{rs}(x) D_1 g_{js}(x) + D_j g_{1s}(x) - D_s g_{j1}(x).$$

4.2.4 DEFINICION. Sean  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  una curva seccionalmente diferenciable y  $\alpha: (-\epsilon, +\epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  una variación de  $\gamma$ . Si  $\lambda: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por  $\lambda(v) = L(\gamma_v)$ . Decimos que  $\gamma$  es una geodésica sobre  $M$  si  $\gamma$  es un punto crítico para la función  $\lambda$ .

4.2.5 NOTA. De lo anterior podemos deducir que las geodésicas tienen la propiedad de minimizar localmente la longitud de arco; así se justifica pensar en las geodésicas como las "rectas" de una variedad Riemanniana.

4.2.6 OBSERVACION. La función  $E$  que definimos anteriormente se denomina energía por su relación con la Mecánica Clásica. Se puede suponer una Variedad Riemanniana

na como un espacio que encierra la medida de la energía cinética de una partícula que se mueve sobre  $M$  sin fuerzas externas. La trayectoria recorrida por dicha partícula es una geodésica sobre  $M$ .

#### 4.3 EJEMPLOS DE GEODESICAS.

4.3.1 Sobre la variedad diferenciable  $\mathbb{R}^n$  con el atlas  $\mathcal{U} = (\mathbb{R}^n, \text{Id } \mathbb{R}^n)$  que consta de una sola carta, tenemos que  $[g_{j1}(x)]$  es la matriz identidad para la función  $\text{Id } \mathbb{R}^n$ ; luego los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{j1}^r$  se anulan. Por consiguiente las geodésica sobre  $\mathbb{R}^n$  son las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

que sabemos son las rectas de  $\mathbb{R}^n$ .

4.3.2 Sea la variedad Riemanniana  $(U, g)$  tal que

$$U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \} \quad y$$

$$g(u) (X, Y) = \langle X, Y \rangle_u = \frac{1}{(y)^2} (X_1 Y_1 + X_2 Y_2)$$

para  $u = (x, y) \in U$   $X, Y \in T_u U$ .

Consideremos sobre  $U$  la única carta  $(U, \text{Id}U)$  para el cual la estructura Riemanniana  $g$  tiene matriz:

$$[g_{jk}(u)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \quad y \text{ cuya matriz inversa es}$$

$$[g^{jk}(u)] = \begin{bmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}$$

De donde las funciones correspondientes a los símbolos de Christoffel serán:

$\Gamma^1$	$\Gamma^1$	$\Gamma^1$	$\Gamma^1$	$\Gamma^2$	$\Gamma^2$	$\Gamma^2$	$\Gamma^2$
11	12	21	22	11	12	21	22
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	$\frac{-1}{y}$	$\frac{-1}{y}$	0	$\frac{1}{y}$	0	0	$\frac{1}{y}$

Así resulta que las ecuaciones diferenciales para las geodésicas de  $(U,g)$  son:

$$** \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y} (\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0 \end{array} \right.$$

Aunque resulta difícil resolver este sistema, es posible determinar la imagen de cualquier geodésica como veremos a continuación.

Sean  $(u,v) \in U$  y  $\gamma$  la geodésica que pasa por  $(u,v)$  con vector inicial  $(\xi, \eta) = (\dot{u}, \dot{v})$ .

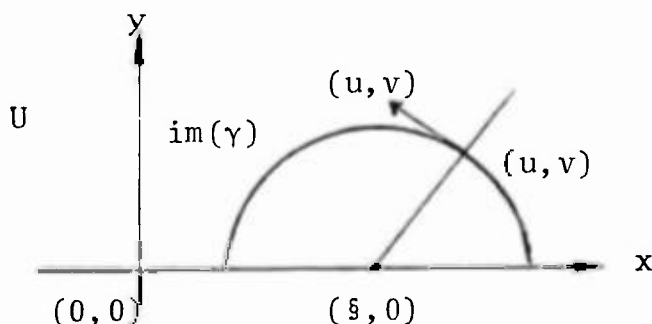
1er. CASO. Supongamos que  $\xi \neq 0$ .

Luego la recta perpendicular a la imagen de  $\gamma$  en  $(u,v)$  intersecta la recta  $y = 0$  en el punto  $(u + v \eta/\xi, 0) = (\hat{s}, 0)$ . Ahora como  $\gamma$  satisface el sistema  $(**)$  y  $(u,v) \in \text{im}(\gamma)$  se tiene que  $\dot{\hat{s}} = 0$ .

De otro lado como esto se cumple para todo punto de la imagen de  $\gamma$ , resulta que  $\hat{s}$  es constante.

Concluimos que  $\text{im}(\gamma)$  es un arco semi-circular cuyo centro es el punto  $(\xi, 0)$  y radio  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  quitando los extremos .

Véase la figura siguiente:

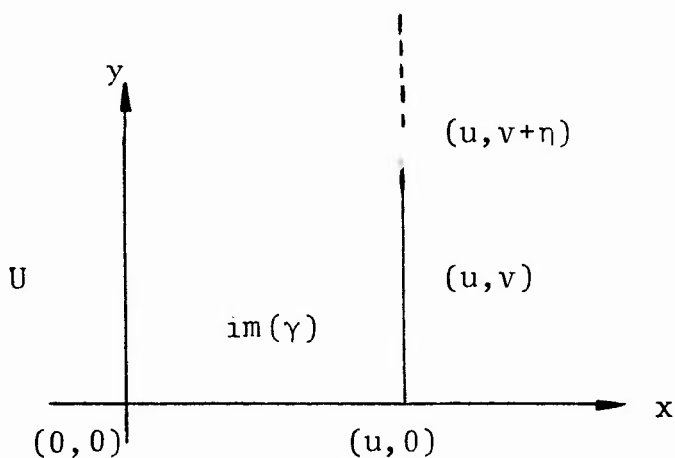


II. CASO: Supongamos que  $\xi = 0$

Luego la recta tangente a la  $\text{im}(\gamma)$  en  $(u, v)$  intersecciona la recta  $y = 0$  en el punto  $(u, 0)$ .

Como  $u = \xi = 0$  resulta que  $u$  es constante para todo  $(u, v) \in \text{im}(\gamma)$  y concluimos que  $\text{im}(\gamma)$  es la recta  $x = u$ , para  $y > 0$ .

Véase la figura siguiente:



#### 4.4 FLUJOS GEODESICOS Y APLICACION EXPONENCIAL.

4.4.1 FLUJO GEODESICO SOBRE TM. Sean  $(M, g)$  una variedad Riemanniana,  $p \in M$ ,  $(U, \psi)$  una carta local alrededor de  $p$  y  $(x_1, \dots, x_n)$  el sistema de coordenadas asociado.

Consideremos las cartas locales  $(\Pi_M^{-1}(U), \bar{\psi})$  alrededor de  $\Pi_M^{-1}(p)$  en  $TM$  y  $(\Pi_{TM}^{-1}(\Pi_M^{-1}(U)), \bar{\bar{\psi}})$  alrededor de  $\Pi_{TM}^{-1}(\Pi_M^{-1}(p))$  en  $T(TM)$ .

Luego las ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x}_r + \sum_{j=1}^n \Gamma_{j1}^r(x) \dot{x}_j \dot{x}_1 = 0 \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, n.$$

con  $x = \psi(u)$  y  $u \in U$  para las geodésicas de  $M$  se pueden expresar como el sistema de ecuaciones de 1er. orden.

$$\begin{cases} \dot{x}_r = y_r \\ y_r = - \sum_{j=1}^n \Gamma_{j1}^r(x) y_j y_1 \end{cases}$$

el cual se puede interpretar para el sistema de coordenadas de la carta  $(\Pi_M^{-1}(U), \bar{\psi})$  como un campo vectorial

$V : TM \rightarrow T(TM)$  sobre  $TM$  dado por

$$V(x, y) = ((x, y), (y, - \sum_{j=1}^n \Gamma_{j1}^r(x) y_j y_1))$$

el cual resulta diferenciable.

El flujo  $\phi : A \rightarrow TM$ , donde  $A$  es abierto de  $\mathbb{R} \times TM$ , correspondiente a las integrales del campo vectorial  $V$ , se denomina flujo geodésico sobre  $TM$ .

#### 4.4.2 OBSERVACIONES.

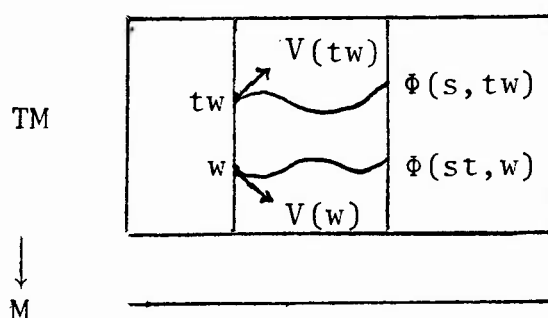
1) Las órbitas del flujo  $\phi$  son curvas diferenciables

sobre  $TM$  que bajo la proyección  $\Pi_M$  resultan geodésicas sobre  $M$ .

2) Para  $V w \in TM$  y para  $V s, t \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\Pi_M(\Phi(st, w)) = \Pi_M(\Phi(s, tw)) .$$

Por esta propiedad, al campo vectorial  $V$  se le llama geodésica Spray sobre  $M$ .



Esta propiedad nos dice intuitivamente que, como quiera que la velocidad de una geodésica es constante, se puede viajar sobre su traza en un tiempo estipulado, ajustando nuestra velocidad apropiadamente .

4.4.3 DEFINICION. Sean  $V$  un Spray sobre una variedad Riemanniana  $M$  y  $\Theta = \{w \in TM / \Phi(1, w) \text{ está definida}\}$ . Se prueba que  $\Theta$  es un abierto de  $TM$ . La aplicación  $\exp: \Theta \rightarrow M$  definida por  $\exp(w) = \Pi(\Phi(1, w))$  se denomina Aplicación Exponencial de  $V$ .

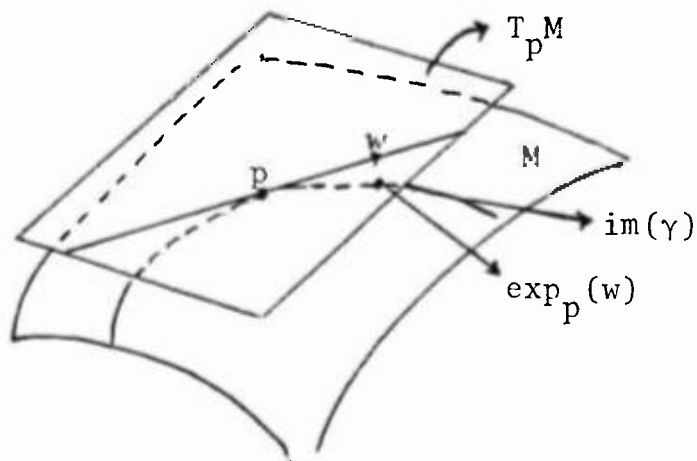
Claramente  $\exp$  es una aplicación diferenciable, puesto que es la compuesta de dos aplicaciones diferenciables.

4.4.4 OTRA DEFINICION DE APLICACION EXPONENCIAL. Sean  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ , con  $\|v\| = 1$ .

Como las geodésicas son curvas de aceleración nula, ellas satisfacen una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Luego por  $p$  y en la dirección de  $v$  pasa una única geodésica de  $M$ , o sea existe una única curva  $\gamma: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  con aceleración nula y tal que  $\gamma(0)=p$  y  $\gamma'(0) = v$ .

Si  $|t| < \varepsilon$  y  $w = tv$  definimos  $\exp_p(w) = \gamma(t)$ .

Se comprueba fácilmente que en una vecindad  $U \subset T_p M$  del origen de  $T_p M$ , la aplicación  $\exp_p: U \rightarrow M$  está bien definida y además es diferenciable de clase  $C^\infty$ .



#### 4.4.5 OBSERVACIONES

1) En vista de que para cada  $p \in M$  podemos definir  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ , entonces la aplicación  $\exp: TM \rightarrow M$  es definida sobre  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ .

2) Para cada  $v \in T_p M$  podemos identificar  $T_v(T_p M)$  con  $T_p M$  y definir la aplicación  $T_v(\exp_p): T_v(T_p M) \rightarrow T_{\exp_p(v)}(M)$ .

3) La aplicación  $T_\theta(\exp_p): T_p M \rightarrow T_{\exp_p(\theta)}(M)$  es la identidad sobre  $T_p M$ .

4) En una vecindad suficientemente pequeña del origen de

$T_p M$ , la aplicación  $\exp_p$  es un difeomorfismo.

5) Si escogemos una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  podemos definir para cada  $z \in T_p M$  un sistema normal de coordenadas alrededor de  $p$ , asignando al punto  $\exp_p(z = \sum_{i=1}^n x^i e_i)$  el sistema normal de coordenadas

$(x_1, \dots, x_n)$ .

Además se cumple que para  $\forall v \in T_p M$   $(\nabla_v \frac{\partial}{\partial x_i}) /_p = 0$

6) Si consideramos en  $T_p M$  el rayo  $c(t) = tv$  que parte del vector nulo  $\theta$  en la dirección del vector  $v$  y asumimos que  $\exp_p$  es definida a lo largo de  $c$ , es fácil verificar que  $d \exp_p(c'(t)) = \dot{\gamma}(t)$  y que  $\|c'(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$ .

Mejor aún, tenemos el siguiente resultado:

4.4.6 LEMA DE GAUSS. Si  $c(t) = tv$  es un rayo que parte del origen de  $T_p M$  y  $w \in T_{c(t)}(T_p M)$  es perpendicular a  $c'(t)$ , entonces  $d \exp_p(w)$  es perpendicular a  $d \exp_p(c'(t))$

DEMOSTRACION. Ver [3].

4.4.7 TEOREMA. Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana,  $p \in M$ . Entonces existe una vecindad  $U$  de  $p$  y un número  $\epsilon > 0$  tales que para  $\forall q \in U$  y para  $\forall v \in T_q M$  con  $\|v\| < \epsilon$ , existe una única geodésica  $\gamma_v: (-2, 2) \rightarrow M$  que satisface las condiciones  $\gamma_v(0) = q$  y  $\gamma'_v(0) = v$ .

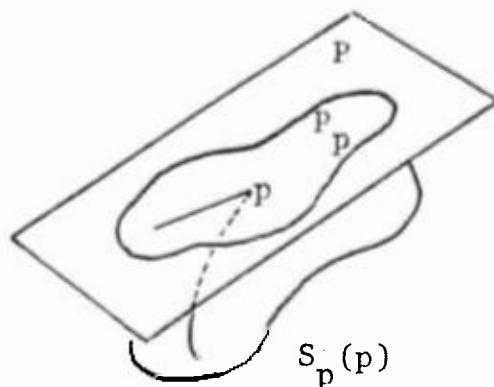
DEMOSTRACION. Notemos primeramente que si  $\alpha: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  es una geodésica en  $M$  parametrizada por  $t$ , la curva  $c: (-\epsilon/s, +\epsilon/s) \rightarrow M$  definida por  $c(t) = \alpha(st)$  es también geodésica.

Por el teorema 4.1.3 existe una vecindad  $U$  de  $p$  y  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  positivos tales que para  $q \in U$  y  $v \in T_q M$  con  $\|v\| < \varepsilon$ , existe una única geodésica  $\gamma_{v/\varepsilon_2} : (-2\varepsilon_2, +2\varepsilon_2) \rightarrow M$  con las condiciones  $\gamma_{v/\varepsilon_2}(0) = q$ ,  $\gamma'_{v/\varepsilon_2}(0) = v$ . Escogemos  $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2$ . Luego si  $\|v\| < \varepsilon$  y  $|t| < 2$  se tiene  $\|v/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1$  y  $|\varepsilon_2 t| < \varepsilon_2$ .

Definimos  $\gamma_v(t) = \gamma_{v/\varepsilon_2}(t\varepsilon_2)$ , luego se tiene que  $\gamma_v(0) = \gamma_{v/\varepsilon_2}(0) = q$  y  $\gamma'_v(0) = \gamma'_{v/\varepsilon_2}(0) = v$ .  $\blacktriangle$

#### 4.5 CURVATURA SECCIONAL.

4.5.1 NOCION DE SUPERFICIE SOBRE UNA VARIEDAD RIEMANNIANA. Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $p \in M$  y  $P$  el sub-espacio de dimensión 2 del espacio tangente  $T_p M$ . Sea también  $O$  una vecindad abierta del vector nulo en  $T_p M$  tal que la aplicación  $\exp_p/O$  sea un difeomorfismo. Claramente  $P \cap O \neq \emptyset$ , por lo tanto denotamos  $P_p = P \cap O$ . De esta manera la aplicación  $\exp_p/P_p$  es también un difeomorfismo. En consecuencia podemos considerar  $\exp_p(P_p)$  como una superficie sobre  $M$ , la cual denotamos por  $S_p(p)$  y cuyo plano tangente en  $p$  es el plano  $P$ .



Como quiera que el Teorema Egregium expresa la función de curvatura Gaussiana  $\kappa$  en términos del producto interno y sus derivadas, de la siguiente manera

$$\kappa = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

ver [1].

podemos utilizarla para calcular la curvatura Gaussiana de  $S_p(P)$ , la cual denotaremos por  $\kappa_p(p)$ .

4.5.2 DEFINICION. Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $p \in M$  y  $P$  un subespacio de  $T_p M$  de dimensión 2. Se define la curvatura seccional de  $M$  en  $p$  en el plano  $P$  como la curvatura Gaussiana de  $S_p(P)$  en  $p$ .

Busquemos a continuación una forma de calcular la curvatura seccional de una variedad Riemanniana  $M$  en un punto; con este objeto establecemos los resultados que siguen:

4.5.3 LEMA: Sean  $(x^1, \dots, x^n)$  un sistema normal de coordenadas alrededor de un punto  $p$  de una variedad Riemanniana  $M$  de dimensión  $n$  y  $Q : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  la función cuadrática definida por:

$$Q(X, Y) = \sum_{ijkl} C_{ij,kl} dx^i(X) dx^j(X) dx^k(Y) dx^l(Y),$$

$$\text{donde } C_{ij,kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$$

Entonces

$$Q(X, Y) = -\frac{1}{3} \langle R(X, Y) Y, X \rangle$$

donde  $R$  es el tensor curvatura riemanniana.

DEMOSTRACION. Como

$$3 Q(X, Y) = \sum_{ijkl} c_{ij,kl} (dx^i \wedge dx^k) \cdot (dx^j \wedge dx^l) (X, Y)$$

desarrollando el miembro derecho y haciendo cambios de índices, respectivamente, obtenemos:

$$3 Q(X, Y) = (c_{ik,jl} + c_{jl,ik} - c_{il,jk} - c_{jk,il}) \cdot dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l (X, Y, X, Y)$$

Además como los símbolos de Christoffel se anulan en  $p$  ya que estamos trabajando con un sistema normal de coordenadas, se tiene que:

$$\begin{aligned} 3Q(X, Y) &= \sum_{ijkl} R_{ijkl}(p) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l (X, Y, X, Y) \\ &= - \sum_{ijkl} R_{ijkl}(p) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l (X, Y, X, Y) \\ &= - \langle R(X, Y) Y, K \rangle . \blacktriangle \end{aligned}$$

4.5.4 TEOREMA. Sean  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana de dimensión 2,  $X, Y \in T_p M$  vectores linealmente independientes y  $A(X, Y)$  el área del paralelogramo generado por  $X$  e  $Y$ .

Entonces la curvatura Gaussiana en  $p$ ,  $\kappa_p$ , coincide con

$$\frac{1}{A(X, Y)^2} \langle R(X, Y) Y, X \rangle .$$

En particular, si  $X, Y$  son ortonormales entonces  $\kappa_p$  coincide con  $\langle R(X, Y) Y, X \rangle$ .

DEMOSTRACION. Sean  $(x, y)$  un sistema de coordenadas aso-

ciado a una carta local alrededor de  $p \in M$ . Para demostrar la afirmación del teorema basta considerar

$X = \frac{\partial}{\partial x} / p$  e  $Y = \frac{\partial}{\partial y} / p$ ; porque cuando cambiamos a cualquier otro par de vectores, el numerador queda multiplicando por el mismo factor como el denominador.

En el caso que estamos considerando se tiene:

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Y,X \rangle &= \langle R(\frac{\partial}{\partial x} / p, \frac{\partial}{\partial y} / p) \frac{\partial}{\partial y} / p, \frac{\partial}{\partial x} / p \rangle \\ &= R_{1212}(p) \end{aligned}$$

Si escribimos:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = E dx \otimes dx + F dx \otimes dy + F dy \otimes dx + G dy \otimes dy$$

donde  $g_{11} = E$ ,  $g_{12} = g_{21} = F$ ,  $g_{22} = G$  entonces

$$A(X, Y)^2 = EG - F^2.$$

Por consiguiente, debemos probar que:

$$4 R_{1212}(EG - F^2) = 4 (EG - F^2)^2 \kappa$$

pero esto se deduce fácilmente de la identidad

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial y^i \partial y^k} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial y^i \partial y^l} \right) \\ &+ \sum_{\alpha, \beta}^n g^{\alpha\beta} (\square_{j1, \alpha} \square_{ik, \beta} \square_{il, \alpha} \square_{jk, \beta}) \end{aligned}$$

Ver [19]. ▲

4.5.5 TEOREMA. Sean  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana y  $W$  un subespacio de dimensión 2 de  $T_p M$ , generado por  $X, Y \in T_p M$ . Sean además  $O \subset W$  una vecindad del vector nulo  $0 \in T_p M$  sobre la cual  $\exp$  es un difeomorfismo,  $i : \exp(O) \rightarrow M$  la inclusión y  $\bar{R}$  el tensor curvatura

Riemanniana para  $\exp(0)$  con la métrica Riemanniana inducida  $i^*\langle , \rangle$ .

Entonces se tiene:

$$\langle \bar{R}(X, Y) Y, X \rangle = \langle R(X, Y) Y, X \rangle$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{A(X, Y)^2} \langle R(X, Y) Y, X \rangle$$

es la curvatura Gaussiana en  $p$  de la superficie  $\exp(0)$ .

DEMOSTRACION. Se deduce sin dificultad que la forma cuadrática  $Q$  asociada con  $(\exp(0), i^*\langle , \rangle)$  es la restricción a  $W$  de la forma cuadrática  $Q$  sobre  $T_p M$ , porque son los segundos términos no nulos en la serie de Taylor de la misma estructura.  $\blacktriangle$

Se deduce fácilmente el siguiente:

4.5.6 COROLARIO. Sean  $(M, \langle , \rangle)$  una variedad Riemanniana,  $X$  e  $Y \in T_p M$  generan un subespacio  $W$  de dimensión 2 de  $T_p M$  y  $0 \in W$  una vecindad del vector nulo  $0$  sobre la cual  $\exp$  es un difeomorfismo. Si  $Q$  es la forma cuadrática sobre  $T_p M$  definida anteriormente, entonces:

$$-\frac{3}{A(X, Y)^2} Q(X, Y) = \frac{1}{A(X, Y)^2} \langle R(X, Y) Y, X \rangle = \kappa$$

donde  $\kappa$  es la curvatura Gaussiana en  $p$  de la superficie  $\exp(0)$ .

4.5.7 OBSERVACIONES.

1) En virtud de la definición 4.5.2,

$\frac{1}{A(X, Y)^2} \langle R(X, Y) Y, X \rangle$  es la curvatura seccional de

M en  $p$  en el plano  $W$ ; por consiguiente por 4.5.5 tenemos una forma de calcular la curvatura seccional de una variedad Riemanniana en un punto.

2) Si los vectores  $X$  e  $Y$  que generan el subespacio  $W$  de  $T_p M$  son ortonormales y la aplicación tangente  $T_{tX} \exp_p$  de  $\exp_p$  en el punto  $tX$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , aplica el vector  $Y$  (suponiendo  $Y$  como un vector tangente a una curva de  $T_p M$  que pasa por  $tX$ ) en un vector del espacio  $T_{\exp_p(tX)} M$ , entonces la relación entre geodésica y curvatura seccional puede expresarse por la fórmula siguiente:

$$T(\exp_p)(tX) = 1 - K(W, p) \frac{t^2}{6} + \dots$$

donde  $K(W, p)$  es la curvatura seccional de  $M$  en el punto  $p$ .

3) La fórmula anterior muestra que si comparamos las geodésicas de un espacio de curvatura nula (el espacio  $T_p M$ ) con las geodésicas que salen de un punto  $p$  de la variedad Riemanniana,  $M$  vemos que estas últimas tienden, en una vecindad de  $p$ , a aproximarse, si  $K(W, p) > 0$ , y a apartarse, si  $K(W, p) < 0$ .

CAPITULO V  
TEOREMA DE HOPF-RINOW

Hemos estudiado en los capítulos anteriores la estructura métrica local de una variedad Riemanniana; analizaremos en este capítulo su estructura global por medio de la condición de completez y deduciremos uno de los más importantes resultados que es el Teorema de Hopf-Rinow, así como sus consecuencias y aplicaciones.

5.1 VARIEDAD RIEMANNIANA COMPLETA.

5.1.1 DEFINICION. Sean  $M$  una variedad Riemanniana y  $d_{riem}$ , la función distancia sobre  $M$ .

Decimos que  $M$  es una Variedad Riemanniana Completa si la estructura de espacio métrico sobre  $M$  determinada por la función  $d_{riem}$  es completa.

5.1.2 EJEMPLOS DE VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPLETAS.

a. Toda variedad Riemanniana compacta es completa. Luego las variedades vistas en 3.4.5 son variedades Riemannianas completas.

b. El espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , con la métrica usual, es una variedad Riemanniana completa.

5.2 PROPIEDAD DE UNA APLICACION EXPONENCIAL EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA COMPLETA.

5.2.1 PROPOSICION. Sean  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $p \in M$ .

Entonces  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ , si y solo si,

para  $\forall v \in T_p M$  con  $\|v\| = 1$ ,  $\varepsilon > 0$  y toda geodésica  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  con  $\gamma(0)=p$  y  $\gamma'(0)=v$  existe una geodésica  $\tilde{\gamma} : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  tal que  $\tilde{\gamma}/(-\varepsilon, +\varepsilon)=\gamma$ .

DEMOSTRACION. Supongamos que  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$  y sea  $v \in T_p M$  con  $\|v\|=1$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  la geodésica que satisface:  $\gamma(0)=p$ ,  $\gamma'(0)=v$ . Luego para  $|t| < \varepsilon$   $\exp_p(w)=\gamma(t)$  con  $w=tv$ .

Definimos  $\tilde{\gamma} : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  por  $\tilde{\gamma}(t)=\exp_p(z)$

para todo  $z \in T_p M$  y  $z = tu$  con  $\|u\|=1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Además la ecuación diferencial de la geodésica  $\gamma$  admite la solución maximal  $\tilde{\gamma}$ ; luego  $\tilde{\gamma}/(-\varepsilon, +\varepsilon)=\gamma$ .

Recíprocamente, sabemos que para  $v \in T_p M$  con  $\|v\|=1$  y toda geodésica  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  que satisface  $\gamma(0)=p$ ,  $\gamma'(0)=v$ , existe  $\tilde{\gamma} : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  tal que  $\tilde{\gamma}/(-\varepsilon, +\varepsilon)=\gamma$ .

Como para  $|t| < \varepsilon$   $\gamma(t)=\exp_p(w)$  con  $w=tv$  podemos definir para  $\forall z \in T_p M$   $\exp_p(z)=\tilde{\gamma}(t)$  para  $t \in \mathbb{R}$  y  $z = tu$  con  $\|u\|=1$ .  $\blacktriangle$

5.2.2 LEMA. Sea  $M$  una variedad Riemanniana completa. Entonces para  $\forall p \in M$ ,  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ .

DEMOSTRACION. Veamos que para  $\forall v \in T_p M$  con  $\|v\|=1$ ,  $\varepsilon > 0$ , la geodésica  $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$  se puede extender a una geodésica  $\tilde{\gamma} : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$ .

Sea  $\alpha = \sup A$  donde

$$A = \{ \beta / \beta > \varepsilon \text{ y } \exists \text{ una geodésica } \gamma_1 : (-\varepsilon, \beta) \rightarrow M \text{ con } \gamma_1 / (-\varepsilon, +\varepsilon) = \gamma \}$$

Si  $\beta_1, \beta_2 \in A$  entonces las extensiones de  $\gamma$  con dominio

$(-\varepsilon, \beta_1)$  y  $(-\varepsilon, \beta_2)$  coinciden sobre  $(-\varepsilon, \min(\beta_1, \beta_2))$ .

Luego existe una geodésica  $\tilde{\gamma}_1: (-\varepsilon, \alpha) \rightarrow M$  tal que

$$\tilde{\gamma}_1 / (-\varepsilon, +\varepsilon) = \gamma.$$

Veamos que  $\alpha = +\infty$  por reducción al absurdo.

Supongamos que  $\alpha < \infty$ .

Si  $\{\beta_i\}$  es una sucesión en  $(0, \alpha)$  tal que  $\beta_i \uparrow \alpha$  entonces  $\{\tilde{\gamma}_1(\beta_i)\}$  es una sucesión de Cauchy en  $M$  cuyo límite denotamos por  $q$ .

Por el teorema 4.4.7 existen  $\varepsilon_0 > 0$  y una vecindad  $U$  de  $q$  tal que para  $\forall q_1 \in U$  y para  $\forall v \in T_{q_1}M$  con  $\|v\|=1$  existe una geodésica  $c: (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0) \rightarrow M$  tal que  $c(0) = q_1$   $c'(0) = v$ .

Tomemos  $i$  tal que  $|\beta_i - \alpha| < \varepsilon_0$ ,  $\tilde{\gamma}_1(\beta_i) \in U$  y supongamos que  $c(0) = \tilde{\gamma}_1(\beta_i)$ ,  $c'(0) = \tilde{\gamma}_1'(\beta_i)$ .

Utilizaremos la geodésica  $c$  para extender  $\tilde{\gamma}_1$  en la forma siguiente:

$$\text{Definamos } \tilde{\gamma}_2: (-\varepsilon, \beta_i + \varepsilon_0) \rightarrow M \text{ por}$$

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(t) & \text{si } t \in (-\varepsilon, \beta_i) \\ c(t - \beta_i) & \text{si } t \in (\beta_i, \beta_i + \varepsilon_0) \end{cases}$$

Debido a la unicidad:  $\tilde{\gamma}_1(t) = c(t - \beta_i)$  si  $t \in (\beta_i - \varepsilon_0, \alpha)$

Concluimos que  $\tilde{\gamma}_2$  es una geodésica definida sobre  $(-\varepsilon, \beta_i + \varepsilon_0)$  de clase  $C^\infty$ , además  $\tilde{\gamma}_2 / (-\varepsilon, +\varepsilon) = \tilde{\gamma}_1 / (-\varepsilon, +\varepsilon) = \gamma$

Pero  $\beta_i + \varepsilon_0 > \alpha$ , lo cual es una contradicción.

Concluimos que  $\alpha = +\infty$ .

La extensión de  $\gamma$  a  $-\infty$  es en forma similar.  $\blacktriangle$

### 5.3 EXISTENCIA DE GEODESICAS CON LONGITUD IGUAL A LA DISTANCIA RIEMANNIANA.

5.3.1 LEMA. Sean  $M$  una variedad Riemanniana,  $p \in M$ ,  $r > 0$ ,  $B_r(\theta) \subset T_p M$  la bola de centro  $\theta$  y radio  $r$  sobre la cual  $\exp_p$  es un difeomorfismo. Entonces.

i) Para  $v \in B_r(\theta)$ ,  $\gamma_v: [0,1] \rightarrow M$  es la única curva que satisfice:  $L(\gamma_v) = d_{\text{riem}}(p, \exp_p(v)) = \|v\|$ .

En particular para cualquier curva  $c$ , si  $L(c) = d_{\text{riem}}(c(0), c(1))$ , entonces  $c$  es una geodésica de clase  $C^\infty$ , excepto una reparametrización.

ii) Si  $q \notin \exp_p(B_r(\theta)) = B_r(p)$ , entonces existe  $q'$  en la frontera de  $B_r(p)$  tal que  $d_{\text{riem}}(p, q) = r + d_{\text{riem}}(q', q)$ . En particular  $d_{\text{riem}}(p, q) \geq r$ .

DEMOSTRACION.

i) Sea  $c: [0,1] \rightarrow M$  una curva seccionalmente diferenciable que va de  $p$  a  $\exp_p(v)$ .

Asumiremos que  $c(t) \in \exp_p(B_r(\theta))$  para  $t \leq t_0$ , esto es  $r c(t) \leq r$ .

Si calculamos  $L(c)$  obtenemos:

$$L(c) = r(c(t_0)) + \int_{t_0}^1 \|c'\| dt \quad \text{con} \quad 0 < t_0 < 1$$

por el teorema del valor medio encontramos un primer valor  $t_1$  para el cual  $r c(t_1) = \|v\|$ .

$$\text{Así} \quad L(c) = \|v\| + \int_{t_1}^1 \|c'\| dt.$$

Luego  $L(c) = ||v|| \iff$  donde quiera que  $c(t)$  es diferenciable tenemos  $c''(t) = \lambda(t) \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$  con  $\lambda(t) > 0$  y  $||c' || = 0$  para  $t \geq t_1$ . Asumimos que  $t_1 = 1$ , además excepto una reparametrización, cada segmento diferenciable de  $c$  es una geodésica radial. Como  $c$  es continua,  $c$  es una geodésica radial.

ii) Si  $c(t)$  es la curva que va de  $p$  a  $q$  y  $q \notin B_r(p)$ , existe  $t_0$  tal que  $c(t_0) \in \partial B_r(p)$ , por i) tenemos

$$L(c) \geq r + d_{\text{riem}}(c(t_0), q) \geq r + d_{\text{riem}}(\partial B_r(p), q).$$

Luego  $d_{\text{riem}}(p, q) = \inf_c L(c) \geq r + d_{\text{riem}}(\partial B_r(p), q)$ , por la desigualdad triangular, la desigualdad también se dá en sentido opuesto.

Así  $d_{\text{riem}}(p, q) = r + d_{\text{riem}}(\partial B_r(p), q)$  y como  $\partial B_r(p)$  es compacto existe  $q' \in \partial B_r(p)$  tal que:

$$d_{\text{riem}}(q', q) = d_{\text{riem}}(\partial B_r(p), q). \blacktriangle$$

5.3.2 LEMA. Si  $M$  es una variedad Riemanniana y  $p \in M$  tal que  $\exp_p$  está definida sobre todo  $T_p M$ . Entonces para cualquier  $q \in M$  existe una geodésica que une  $p$  y  $q$  con la longitud igual a la distancia Riemanniana de  $p$  a  $q$ .

DEMOSTRACION. Sea  $\epsilon > 0$ ,  $B_{2\epsilon}(\theta) \subset T_p M$ ,  $B_{2\epsilon}(p) \subset M$  tal que  $\exp_p: B_{2\epsilon}(\theta) \rightarrow B_{2\epsilon}(p)$  es un difeomorfismo.

Para cada  $v \in B_{2\epsilon}(\theta)$  la geodésica  $c_v: [0, 1] \rightarrow M$  definida por  $c_v(t) = \exp_p(tv)$  es tal que  $c_v(0) = p$ ,  $c'_v(0) = v$  y además  $L(c_v) = d_{\text{riem}}(p, \exp_p(v)) = d_{\text{riem}}(p, c(1))$ .

Sea  $q \in M$ .

1er. CASO:  $q \in B_\epsilon(p)$ .

Si  $q \in B_\epsilon(p)$  se tiene que  $q \in B_{2\epsilon}(p)$ , por lo tanto existe  $w \in B_{2\epsilon}(\theta)$  tal que  $\exp_p(w) = q$ , luego la curva  $c_w: [0,1] \rightarrow M$  definida por  $c_w(t) = \exp_p(tw)$  es la única geodésica tal que  $L(c_w) = d_{\text{riem}}(p, \exp_p(w)) = d_{\text{riem}}(p, q)$ .

2do. CASO:  $q \notin B_\epsilon(p)$ , por la parte ii) de 5.3.1 existe

$q' \in \partial B_\epsilon(p)$  tal que  $d_{\text{riem}}(p, q) = \epsilon + d_{\text{riem}}(q', q)$ .

Para  $v \in T_p M$  con  $\|v\| = 1$  consideremos la geodésica sobre  $M$  dada por  $c(t) = \exp_p(tv)$  y tal que  $\exp_p(\epsilon v) = q'$ .

Vemos que esta geodésica nace en  $p$ , pasa por  $q'$  y va directamente hacia  $q$ , luego se debe tener que  $c(d_{\text{riem}}(p, q)) = q$ .

Para probar esta igualdad, basta ver que para todo  $t$  en

$[\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)]$  se tiene:  $d_{\text{riem}}(c(t), q) = d_{\text{riem}}(p, q) - t$ .

Sea  $S = \{s \in [\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)] \mid d_{\text{riem}}(c(s), q) = d_{\text{riem}}(p, q) - s, s \in S\}$ .

Como  $c(\epsilon) = \exp_p(\epsilon v) = q'$  y  $d_{\text{riem}}(q', q) = d_{\text{riem}}(p, q) - \epsilon$ ,

se tiene, que  $\epsilon \in S$ ; además  $S$  es cerrado en  $[\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)]$

por la continuidad de  $c$  y de la función  $d_{\text{riem}}$ .

Veamos ahora que  $S$  es abierto en  $[\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)]$ .

Sea  $t_0 \in [\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)]$  tal que  $t_0 < d_{\text{riem}}(p, q)$ .

Para  $\delta > 0$  sea  $B_\delta(\theta) \subset T_p M$ ,

Sea también  $\exp_p(B_\delta(\theta)) = B_\delta(c(t_0))$ .

Denotemos  $\partial B_\delta(c(t_0)) = K$

Tomemos  $q'' \in \partial B_\delta(c(t_0))$  tal que;

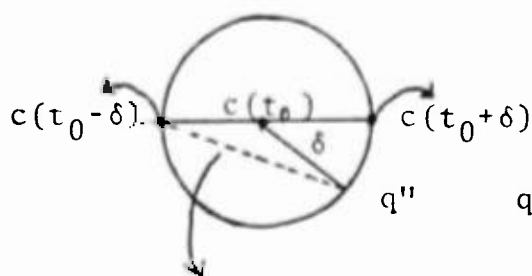
$$d_{\text{riem}}(q'', q) = \inf_{x \in K} d_{\text{riem}}(x, q).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como vimos anteriormente: } d_{\text{riem}}(q'', q) &= d_{\text{riem}}(c(t_0), q) - \delta \\
 &= d_{\text{riem}}(p, q) - t_0 - \delta \\
 &= d_{\text{riem}}(p, q) - (t_0 + \delta).
 \end{aligned}$$

Veamos que  $q'' = c(t_0 + \delta)$  por reducci3n al absurdo.

Si  $q'' \neq c(t_0 + \delta)$ , se tiene que:

$$*) \ d_{\text{riem}}(c(t_0 - \delta), q'') < 2\delta$$



$$\text{Geodésica de longitud} = d_{\text{riem}}(c(t_0 - \delta), q'')$$

Por la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}
 d_{\text{riem}}(p, c(t_0 - \delta)) + d_{\text{riem}}(c(t_0 - \delta), q'') + d_{\text{riem}}(q'', q) &\geq \\
 &\geq d_{\text{riem}}(p, q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{de donde } d_{\text{riem}}(c(t_0 - \delta), q'') + d_{\text{riem}}(q'', q) &\geq \\
 &\geq d_{\text{riem}}(p, q) - t_0 + \delta
 \end{aligned}$$

$$\text{como } d_{\text{riem}}(q'', q) = d_{\text{riem}}(c(t_0), q) - \delta$$

$$\text{y } d_{\text{riem}}(q'', q) = d_{\text{riem}}(p, q) - \alpha - \delta \quad \text{resulta}$$

$$**) \ d_{\text{riem}}(c(t_0 - \delta), q'') > 2\delta$$

lo cual es una contradicción.

Concluimos que  $q'' = c(t_0 + \delta)$  y  $t_0 + \delta \in S$  para  $\delta > 0$

lo suficientemente pequeño.

Como  $[\epsilon, d_{\text{riem}}(p, q)]$  es conexo y  $S$  es abierto y cerrado, coinciden.  $\blacktriangle$

5.3.3 COROLARIO. Si  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ ,

para algún punto  $p$  de una variedad Riemanniana  $M$ . Entonces se tiene que:

i) Para cualquier  $r > 0$ ,  $\{q \in M / d_{\text{riem}}(p,q) \leq r\}$  es compacto.

ii) Cualquier subconjunto cerrado y acotado de  $M$  es compacto.

iii)  $M$  es completo.

DEMOSTRACION.  $B_r(\theta) = \{v \in T_p M / \|v\| \leq r\}$  es un conjunto compacto en  $T_p M$  y  $B_r(p) = \{q \in M / d_{\text{riem}}(p,q) \leq r\}$  es un subconjunto de  $M$  tal que  $\exp_p: B_r(\theta) \rightarrow B_r(p)$  es un difeomorfismo; así se tiene que  $\exp_p(B_r(\theta)) = B_r(p)$  y como  $\exp_p$  es una aplicación continua, lleva compactos de  $T_p M$  en compactos de  $M$ ; luego  $B_r(p)$  es compacto.

ii) Sea  $B \subset M$ ,  $B$  cerrado y acotado, entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B \subset \{q \in M / d_{\text{riem}}(p,q) \leq \epsilon\}$  por i)  $B_\epsilon(p)$  es compacto y como  $B$  es un cerrado contenido en un compacto, se tiene que  $B$  es compacto.

iii) Sea  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$  una sucesión de Cauchy en  $M$ , la cerradura  $\overline{\{x_i / i=1,2,\dots\}}$  es cerrado y acotado, por ii) es compacto, como  $\{x_i / i=1,2,\dots\} \subset \overline{\{x_i / i=1,2,\dots\}}$  se tiene que  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$  es una sucesión de Cauchy en un compacto y por lo tanto converge a un punto  $x \in M$ .

Se concluye así que  $M$  es completo.  $\blacktriangle$

5.3.4 TEOREMA (HOPF-RINOW). Sea  $M$  una variedad Riemanniana completa. Entonces para cualquier par de puntos  $p$  y  $q \in M$  existe una geodésica en  $M$  que los une, y que tie-

ne longitud igual a la distancia Riemanniana de  $p$  a  $q$ .

DEMOSTRACION. Como  $M$  es completa por lema 5.2.2 para todo  $p \in M$ ,  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ . Por 5.3.2 para todo  $q \in M$  existe una geodésica que une  $p$  y  $q$  y cuya longitud es igual a la distancia Riemanniana de  $p$  a  $q$ .  $\blacktriangle$

5.3.5 COROLARIO. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $M$  es un espacio métrico completo.
- ii) Para  $\forall p \in M$ ,  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ .
- iii) Para algún  $p \in M$ ,  $\exp_p$  es definida sobre todo  $T_p M$ .

5.3.6 COROLARIO. Cada una de las afirmaciones i), ii) y iii) anteriores implican el Teorema 5.3.4.

#### 5.4 APLICACIONES DEL TEOREMA DE HOPF-RINOW.

En esta sección introduciremos otra definición de variedad Riemanniana sumergida en un espacio euclideo, lo que es posible, gracias al Teorema de Whitney; luego adaptaremos los resultados de capítulos anteriores.

5.4.1 OTRA DEFINICION DE VARIEDAD RIEMANNIANA. Sean  $n, N$  enteros positivos mayores que 0 tales que  $N > n$ .

Una variedad Riemanniana es un subconjunto  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  ( $n$  indica la dimensión de la variedad) tal que para todo  $p \in M^n$  existe una bola abierta  $B_\varepsilon(p)$  de  $\mathbb{R}^N$  y una aplicación  $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B_\varepsilon(p) \cap M^n$  de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $B_\varepsilon(p) \cap M^n$  tal que:

- i)  $x$  es un homeomorfismo diferenciable.
- ii) La diferencial  $dx_q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  es inyectiva para  $\forall q \in U$ .

## 5.4.2 OBSERVACIONES.

1. Por la definición anterior podemos considerar una variedad Riemanniana como si fuese una "superficie" de dimensión  $n$  en un espacio euclideo de dimensión  $N$  con  $N > n$ .

2. En forma análoga que para superficies:

i) Llamamos a  $x$  una parametrización.

ii) A las coordenadas  $(u_1, \dots, u_N)$  llamamos coordenadas de  $x(u_1, \dots, u_N) \in B_\epsilon(p) \cap M^n$ .

iii) El espacio tangente  $T_{x(q)}M^n = dx_q(\mathbb{R}^n)$  a  $M^n$  en  $x(q)$  está bien definido independientemente de la parametrización  $x$ .

iv) Existe una base  $\{X_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, X_n = \frac{\partial x}{\partial u_N}\}$

de  $T_{x(q)}M^n$  asociada a la parametrización  $x$ .

3. Se demuestra que toda variedad Riemanniana abstracta (vista en el capítulo II) es una variedad Riemanniana según la definición anterior.

4. En base a esta nueva definición los conceptos de: aplicación diferencialbe, campo vectorial diferenciable, derivada covariante, geodésicas y otros son recapturados de la manera siguiente:

5.4.3 DEFINICIONES. Sean  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  una variedad Riemanniana,  $p \in M^n$  y  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función real.

Diremos que  $f$  es diferenciable en  $p$  si existen una bola abierta  $B_\epsilon(p)$  de  $\mathbb{R}^n$  y una función diferenciable

$F: B_\epsilon(p) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la restricción  $F|_{B_\epsilon(p) \cap M^n} = f$ .

Si indicamos con  $(x_1, \dots, x_N)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^N$ ,  $F$  se escribe como  $F(x_1, \dots, x_N)$ .

Se define el gradiente de  $F$  como:

$$\text{grad}.F(p) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)(p) \in \mathbb{R}^N.$$

El cual no necesariamente pertenece a  $T_p M^n$ . Su proyección sobre  $T_p M^n$  es la parte del  $\text{grad} F$  que es "vista de la variedad  $M^n$ ".

Como  $F$  y  $f$  coinciden en  $B_\epsilon(p) \cap M^n$  se define el gradiente de  $f$  como:  $\text{grad}.f(p) = \text{proy. de grad}.F(p)$  sobre  $T_p M^n$ .

Un campo vectorial diferenciable en  $M^n$  es una aplicación diferenciable  $X: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $X(p) \in T_p M^n$ , para todo  $p \in M$ .

Dado un tal campo  $X$  y un vector  $v \in T_p M^n$  definimos la derivada covariante  $D_v X(p)$  de  $X$  respecto a  $v$  en  $p$  como la componente tangencial de la diferencial de  $x$  aplicada a  $v$ . O sea  $D_v X(p) = \text{proy. sobre } T_p M^n \text{ de } dx_p(v)$ .

Una geodésica de  $M^n$  es una curva de  $M^n$  cuyo campo de vectores tangentes tienen derivada covariante nula.

Dado un campo vectorial diferenciable  $X$  en  $M^n$ , para cada  $p \in M^n$  consideremos la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} g: T_p M^n &\rightarrow T_p M^n && \text{dada por:} \\ v &\rightarrow D_v X(p) \end{aligned}$$

Se define la función  $\text{div} X: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  llamada divergencia

por  $\text{div} X(p) = \text{traza de } g$ . Claramente  $\text{div } X$  es diferenciable. Seguidamente definimos el Laplaciano  $\Delta_M^n f$  de una función diferenciable  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\Delta_M^n f = \text{div}(\text{grad} f)$ .

#### 5.4.4 APLICACIONES ARMONICAS ENTRE VARIETADES RIEMANNIANAS

Sean  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  y  $M^m \subset \mathbb{R}^M$  dos variedades Riemannianas,  $D \subset M^n$  un conjunto abierto, conexo y acotado de  $M^n$  cuya frontera  $\partial D$  sea la unión de un número finito de cerraduras de variedades de dimensión  $n-1$  contenidas en  $M^n$  y  $f: \bar{D} \rightarrow M^m$  una aplicación diferenciable, donde  $\bar{D} = D \cup \partial D$ .

Si  $(x_1, \dots, x_N)$  son las coordenadas de  $\mathbb{R}^N$  y  $(y_1, \dots, y_M)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^M$ , podemos escribir:

$$f(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N)) \text{ para } (x_1, \dots, x_N) \in \bar{D}.$$

Se define la energía de  $f$  por :

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} \left( \sum_{i=1}^M |\text{grad } f_i|^2 \right) dM^n = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} e(f) dM^n$$

donde  $e(f) = \sum_{i=1}^M |\text{grad } f_i|^2$  es la densidad de energía de  $f$ .

Si  $F: \bar{D} \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M^m$  es una variación de  $f$ , se concluye

$$\text{que } \frac{dE}{ds} \Big|_{s=0} = - \int_{\bar{D}} (\hat{f}(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial s}) dM^n \text{ para } s \in (-\varepsilon, +\varepsilon),$$

$p \in \bar{D}$ , y donde  $\hat{f}(p)$  es el vector tensión de  $f$  que es da-

do por  $\hat{f}(p) = \text{proy. sobre } T_{f(p)} M^m \text{ de } (\Delta_M^n f_1, \dots, \Delta_M^n f_M)$

y  $\frac{\partial F}{\partial s}$  es el campo variacional de  $F$ .

En resumen damos la siguiente definición:

Una aplicación diferenciable  $f: \bar{D} \subset M^n \rightarrow M^m$  es armónica, si y solo si,  $\hat{f} = 0$ .

En el caso particular en que  $f$  es una aplicación

$f: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}^n$  obtenemos:

$$\frac{dF}{ds} \Big|_{s=0} = - \int_0^1 (\hat{f}(t) \frac{\partial F}{\partial s}) dt \quad \text{para } s \in (-\epsilon, +\epsilon), t \in [0, 1]$$

y  $\hat{f}(t) = \text{proy. de } \frac{d^2 f}{dt^2} \text{ sobre } T_{f(p)} \tilde{M}^n$ , o sea  $\hat{f}(t)$  es la

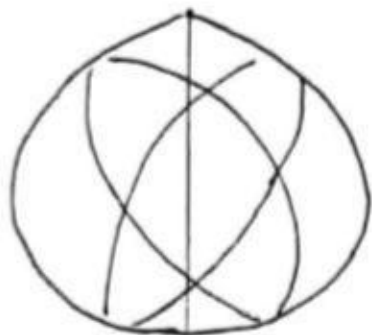
aceleración de  $f$  "vista de la superficie" la cual coincide con la derivada covariante de  $f$ .

Así la definición anterior queda de la siguiente manera:

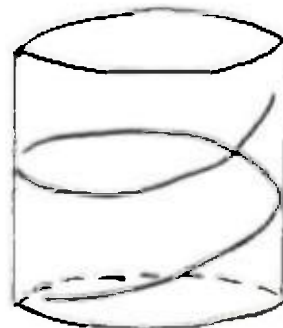
Una aplicación diferenciable  $f: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}^n$  es armónica, si y solo si,  $\hat{f} = 0$ .

Por el argumento anterior  $f$  es armónica, si y solo si, es un punto crítico para la energía de cualquier variación de  $f$ ; luego por 4.2.4 se tiene que las aplicaciones armónicas de un intervalo en una variedad Riemanniana, son precisamente las geodésicas de la variedad que unen dos de sus puntos.

Por ejemplo, en una esfera son los arcos de circunferencia máxima, y en un cilindro son los arcos de alguna hélice sobre el cilindro.



Geodésicas en una esfera.



Geodésicas en un cilindro.

El problema de encontrar "curvas armónicas" (geodésicas) que unan dos puntos dados de una variedad Riemanniana (superficie)  $S$ , está resuelto.

Si  $S$  es completa y  $p$  y  $q \in S$ , entonces existe una geodésica de  $S$  que une  $p$  y  $q$  y tal geodésica es un mínimo absoluto de energía (Teorema de Hopf-Rinow).

Vale la pena mencionar que la geodésica así obtenida no es necesariamente única, porque además de las geodésicas "minimales" pueden existir otras que unen los puntos dados y que no son minimales, sino apenas puntos críticos de la energía.

5.4.5 PROBLEMAS FUNDAMENTALES SOBRE LAS APLICACIONES ARMÓNICAS. En esta sección estableceremos brevemente algunos problemas abiertos sobre aplicaciones armónicas, partiendo de las hipótesis de la sección anterior.

Problema 1. Dada una aplicación continua  $g: \partial D \rightarrow \tilde{M}^m$ , hallar una aplicación  $f: \bar{D} \rightarrow \tilde{M}^m$  continua en  $\bar{D}$  y armónica en  $D$  tal que  $f|_{\partial D} = g$ .

Tal problema, como vemos, envuelve cuestiones de existencia, unicidad y minimización de la energía de  $f$  y aunque parezca problema exclusivo del análisis, la geometría juega un papel fundamental en la solución del mismo.

Como la condición  $\hat{f} = 0$  es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, el interés de la geometría está ligado, de un lado, al hecho de que las condiciones para su solución deben expresarse en térmi-

nos de la geometría de  $M^n$  y  $M^m$  y, de otro lado, la influencia que dicho problema tiene en la solución del problema siguiente.

Problema 2. Suponiendo que  $M^n$  y  $M^m$  sean variedades Riemannianas compactas. Nos preguntamos si toda aplicación  $f: M^n \rightarrow M^m$  se puede deformar continuamente en una aplicación armónica. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1.  $M^n = S^1$

Se tiene que las aplicaciones armónicas  $f: S^1 \rightarrow M^m$  son las geodésicas cerradas de  $M^m$ ; además se prueba que toda variedad Riemanniana compacta contiene una geodésica cerrada no trivial. Ver [22].

Utilizando la notación de la sección 4.5.

$K(W, p) < 0$  significa que las geodésicas que salen de  $p \in \tilde{M}^m$  y son tangentes a  $W$  se apartan más rápidamente que las rectas de  $W$  que salen del origen.

También se demuestra que toda aplicación continua  $f: M^n \rightarrow M^m$  es continuamente deformable en una aplicación armónica que realiza un mínimo absoluto de energía.

Mayores detalles de estos problemas se encuentran en [22].



## CONCLUSIONES

## CAPITULO I. PRELIMINARES

Para los conceptos de variedad diferenciable, campo vectorial que incluimos en el primer capítulo, hemos utilizado las referencias [1], [2] y [21]. Para establecer el Teorema 1.3.4, que de la existencia de una partición de la unidad sobre una variedad diferenciable paracompacta, hemos modificado los lineamientos de [23].

## CAPITULO II. METRICA RIEMANNIANA

Iniciamos este capítulo con una motivación de estructura Riemanniana sobre un abierto de un espacio euclideo, siguiendo las ideas de Robertson. [17].

Para la generalización de este concepto sobre una variedad diferenciable, hemos utilizado las referencias [9], [17] y [19], concluyendo con el teorema 2.2.4, que establece la existencia de una estructura Riemanniana diferenciable, sobre una variedad diferenciable paracompacta.

Después de introducir el concepto de métrica Riemanniana, siguiendo las referencias [9], [17] y [19], hemos demostrado el teorema 2.3.2, el cual establece que, en una variedad Riemanniana, coinciden la topología de la variedad y la topología determinada por la métrica Riemanniana.

Finalmente, modificando los lineamientos de [9], demostramos el teorema 2.4.1, que establece la existencia de un sistema normal de coordenadas.

## CAPITULO III. CONEXION Y TENSOR CURVATURA

A través de todo este capítulo se utilizaron las referencias [1], [17], [19] y [20] y hemos puesto énfasis en la expresión local del campo vectorial  $\nabla_X Y$ .

Utilizando los conceptos de derivada covariante y paralelismo, hemos demostrado la proposición 3.3.3, que caracteriza al vector  $\nabla_{X_p} Y$  como un límite.

Modificando las referencias, hemos demostrado el teorema 3.4.4, que establece la existencia de una única conexión simétrica compatible con una estructura Riemanniana.

Concluimos este capítulo con el corolario 3.4.5, que da ejemplos de variedades Riemannianas, con una única conexión simétrica, compatible con su estructura Riemanniana.

## CAPITULO IV. GEODESICAS Y APLICACION EXPONENCIAL

Las referencias para éste capítulo son las siguientes: [2], [3], [10], [13], [17] y [19].

Se introducen los conceptos de geodésica y aplicación exponencial. El primero, utilizando la derivada covariante, así como el cálculo de variaciones, y el segundo, usando el flujo geodésica y generalización, en forma natural, de su definición en superficies regulares.

Demostramos, además el teorema 4.4.7, que establece la existencia de una única geodésica, que pasa por un punto dado de una variedad Riemanniana y cuyo vector velocidad es el vector tangente al punto dado.

Utilizando el concepto de curvatura seccional, establecemos en el teorema 4.5.5, la forma de calcular esta curvatura en un punto.

#### CAPITULO V. TEOREMA DE HOPF-RINOW

En lo que respecta a superficies regulares, para la versión original del teorema de Hopf-Rinow, hemos utilizado las referencias [11] y [12], y la referencia [4] para una versión moderna.

Para las variedades Riemannianas, hemos utilizado la referencia [17]; y las referencias [3] y [9] para versiones modernas.

En cuanto a la aplicación del teorema de Hopf-Rinow, se utilizaron las referencias [5], [6], [8], [16], [18], y [22].

Iniciamos el capítulo exponiendo algunos ejemplos de variedades Riemannianas completas. Luego, demostramos la proposición 5.2.1, que da una condición necesaria y suficiente para que, sobre una variedad Riemanniana  $M$ , la aplicación  $\exp_p$  esté definida, sobre todo  $T_p M$  para  $p \in M$ .

La demostración del teorema 5.3.4, (Hopf-Rinow) se basa en 5.2.2 y 5.3.3. El primero establece que, para todo punto  $p$  de una variedad Riemanniana completa, la función  $\exp_p$  está definida sobre todo  $T_p M$ ; entonces existe una geodésica que une  $p$  con cualquier otro punto dado,  $q$  con longitud igual a la distancia Riemanniana de  $p$  a  $q$ .

A continuación del teorema, expresamos algunas afirmaciones equivalentes, en el corolario 5.3.5.

En 5.4.4, recordamos el concepto de aplicación armónica entre variedades Riemannianas y observamos que la geodésica, en el teorema de Hopf-Rinow, es un mínimo absoluto de energía de una curva armónica.

Finalmente en 5.4.5, discutimos brevemente dos problemas fundamentales sobre aplicaciones armónicas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Arazoza, H. Notas de Geometría Diferencial. Universidad de Panamá, 1981.
- [2] Bröcker, T. y Jänich; K. Introducción a la Topología Diferencial. (Traducción del Alemán por J. Vázquez). Editorial AC, Madrid, España (1977).
- [3] Cheeger, J. y Ebin, D.G. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Oxford (1975).
- [4] Do Carmo, M. Introdução a Geometria Diferencial Global. Monografias de Matemática do IMPA, Rio de Janeiro, Brasil (1970).
- [5] Do Carmo, M. Aplicações Harmônicas. Atas do Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, Vol. I. (1978), 77-99.
- [6] Do Carmo, M. Alguns Problemas em Aberto em Geometria Riemanniana, Atas do Nono Colóquio Brasileiro de Matemática, Vol. I. (1973), 183-195.
- [7] Do Carmo, M. Superfícies Mínimas em  $R^n$ , Atas do Décimo Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, Vol II. (1978), 505-516.
- [8] Eells, J. and Sampson, J.H. Harmonic maps of Riemannian Manifolds, Am. J. Math (1964), 109-159.
- [9] Greene, J. Notes on Riemannian Geometry. University of California at Berkeley (1981).
- [10] Hicks, N. Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 12 (1963), 137-149 (MR 29 # 1601).
- [11] Hopf, H. and Rinow, W. Über den Begriff der Volständigen differential geometrisch Flächen, Comment Math Helv 3, (1931), 209-225.
- [12] Hopf, H. and Rinow, W. Die Topologischen Gestalten differential geometrisch verwandter Flächen, Math Anna, 107 (1932) 113-123.
- [13] Kobayashi, S. and Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry, Vol. II Interscience Publishers, (1969).

- [14] Lemaire, L. Applications harmoniques des surfaces, C.R. Ac. Sc. Paris, t 280, serie A (1975), 897-899.
- [15] Matsushima, Y. Differentiable Manifolds. Marcel Dekker, Inc. (1972).
- [16] Mitteau, J.C. Sur les applications harmoniques. J of Diff Geom. 9 (1974), 41-54.
- [17] Robertson, S. Riemannian Geometry. Global Analysis and its applications, Vol I. International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy, (1974), 195-232.
- [18] Smith, R.T. Harmonic Mappings of Spheres. Am. J. of Math, 97 N° 2, (1975), 364-385.
- [19] Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. I, II. Publish or Perish, Inc. Boston, Mass. 02108, U.S.A. (1970).
- [20] Valdivia, O. Tópicos de Geometría Diferencial. Universidad de Panamá, (1981).
- [21] Valdivia, O. Introducción a la Topología Diferencial. Universidad de Panamá, (1918).
- [22] Valdivia, O. Metodología de la Investigación Matemática. Universidad de Panamá, (1981).
- [23] Warner, F.W. Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scoot, Foresman and Company. London, (1971).