UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

"UNA GENERALIZACION DE LA COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH-ALEXANDROFF"

Por:

EGBERT AGARD WHITE

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

Panamá, 1982

UNIVERSIDAD DE PANAMA

Aprobado por:

Director de Tesis ______________________

Oscar Valdivia G., Ph. D.

Miembro del Jurado ______________________

Augusto Arriagada, M.Sc.

Miembro del Jurado ______________________

Jorge Rojo, Ph. D.

Fecha 27 de agosto, 198

"In these days the angel of TOPOLOGY and the devil of ABSTRACT ALGEBRA fight for the soul of each individual mathematical domain".

Hermann Weyl.

"En estos días, el ángel de la TOPOLOGIA y el lucifer del ALGEBRA ABSTRACTA luchan por el alma de cada dominio indivisible de la matemática".

Hermann Weyl.

DEDICATORIA

A mi esposa, Olga, y a nuestras dos encantadoras hijas, Graciela Elizabeth y Vanessa Elizabeth, quienes me dieron el coraje para seguir adelante.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos dejar constancia de nuestro profundo agradecimiento al Doctor Oscar Valdivia G., Director de esta tesis de Graduación.

Al Profesor Julio A. Vallarino, quien confeccionó todas las transparencias que sirvieron como material de apoyo de nuestra sustentación.

Agradecemos al Doctor Jorge Rojo M., por su dedicación, apoyo y asesoría; por sus observaciones, críticas y sugerencias que han contribuído a la culminación de este trabajo de graduación.

Expresamos nuestro más sincero y cordial agradecimiento al Profesor Augusto Arriagada C., por sus delicados consejos, dedicación y asesoría que ha contribuído a la culminación de este trabajo.

A los miembros del Grupo de Estudios "David Hilbert" por proporcionar, como siempre, el incentivo y el ambiente de camaradería y dedicación permanente al trabajo científico.

x

INDICE GENERAL

Página

INTRODUCCION

En 1948, E. Hewitt publicó en [8], el primero de una serie de trabajos sobre el anillo de funciones continuas definida en un espacio topológico y con valores reales, bajo ciertas condiciones.

En 1960, L. Gillman y M. Jerison publican en [3] los resultados obtenidos en [8] tanto para el anillo de funciones continuas como también para funciones continuas y acotadas.

El trabajo que, a continuación presentamos, consiste en la generalización de algunos resultados de [3] al sub-anillo de funciones continuas con soporte compacto, $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$, donde X es un espacio topológico localmente compacto.

Hemos seguido las ideas de G.G. Gould en [5] y el de G. G. Gould y M. Mahowald en [6]; en efecto, la estructura "extraña" presentada en [5] proveerá una nueva definición de conjunto acotado; además, para un espacio X que no es localmente compacto, ni acotado, se construye un espacio $\mathcal{B}(X) \setminus \{\infty\}$, localmente compacto de enorme importancia para el estudio de las medidas de Borel sobre X.

Hemos desarrollado este trabajo a través de cuatro capítulos; en el primero, que hemos denominado preliminares; estudiamos las propiedades de los espacios completamente regulares y la, denominada de Hewitt, que consiste en la compactificación de Stone-Čech-Alexandroff.

El segundo capítulo se caracteriza por dos hechos; en primer lugar, la introducción de la estructura del sistema acotante que generaliza la definición de conjuntos acotados para espacios localmente compactos y el homeomorfismo, denotado por $\wedge$, de X en el producto $\prod_{f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f^*$ donde $\mathbb{R}_f^*$ es una copia de la compactificación de los números reales $\mathbb{R}$, el que permite estudiar la compactificación minimal de X.

En el capítulo tercero, hacemos un estudio de los ideales (fijos y libres) ver [3], del espacio de funciones continuas definidas en X con valores en $\mathbb{R}$, $C(X, \mathbb{R})$, [8] ; una vez definido los términos de filtros, n-filtros y n-ultra-filtros, damos una nueva construcción del compactificado de un espacio X completamente regular, que denotamos por βX, por medio de filtros y n-filtros; finalmente, hacemos una generalización de los ideales y n-filtros al subanillo, $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$, de funciones reales y continuas de soporte acotado; finalizamos este capítulo caracterizando los ideales fijos y libres.

Iniciamos nuestro cuarto capítulo demostrando cómo βX es homeomorfo a la familia de todos los ideales maximales fijos $\mathcal{M}(X)$ dotado de la topología de Stone y luego generalizamos este resultado a $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$. Finalizamos este capítulo demostrando en primer lugar que, ver [2], el cociente de toda clase residual de $C(X, \mathbb{R})$ o de $C^*(X, \mathbb{R})$, espacio de funciones continuas y acotadas definidas en X con valores en $\mathbb{R}$, generado por un ideal maximal M_p es isomorfo al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Siguiendo el lineamiento de G. G. Gould en [5] , generalizamos este resultado para el subanillo $\mathfrak{A}(X, \mathbb{R})$.

Concluímos esta introducción, expresando que nuestro trabajo ejemplifica una síntesis de estructuras topológicas algebraicas.

CAPITULO I

PRELIMINARES

En este capítulo establecemos propiedades de los espacios completamente regulares, de la topología débil así como los teoremas de caracterización de la compactificación de Čech-Alexandroff que utilizaremos en el presente trabajo.

1. NUCLEOS, ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES.

Definición 1.1.1: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Con $n(X)$ definiremos la familia de todos los subconjuntos de X de la forma $n(f) = f^{-1}(0)$ donde f es un elemento de $C(X,\mathbb{R})$, anillo de funciones reales y contínuas definidas sobre X. A cada $n(f)$ llamamos núcleo de f y a $n(X)$ familia de núcleos.

En otras palabras

$$n(X)=\left\{n(f)\subseteq X : f\in C(X,\mathbb{R})\right\}, n(f)=\left\{x\in X : f(x) = 0\right\}$$

Proposición 1.1.1: (HEWITT). Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $n(X)$ la familia de núcleos.

(1) X y el subconjunto vacío pertenecen a $n(X)$.

(2) $n(f)$ es un cerrado de X para todo $f\in C(X,\mathbb{R})$.

(3) Para todo $f\in C(X,\mathbb{R})$ y $n\geqslant 1$, $f^{-1}(0)=(f^n)^{-1}(0)=(|f|^n)^{-1}(0)$.

(4) Para todo $N\in n(X)$ existe $f\in C(X,\mathbb{R})$ tal que $0\leqslant f\leqslant 1$ y $N = f^{-1}(0)$.

(5) Si $n(f)$, $n(g)\in n(X)$ entonces $n(f)\cap n(g) = n(f^2+g^2)$.

(6) $n(X)$ es estable bajo la intersección numerable.

(7) Todo núcleo, $n(f)$, es un G_δ

(8) Si $n(f)$, $n(g) \in n(X)$ entonces $n(f) \cup n(g) = n(fg)$.

<u>Demostración.</u> (1) Resulta como consecuencia inmediata del hecho de que las funciones $\mathbb{O}$, 1, constantes sobre X de valor 0 y 1 respectivamente, son continuas y $X = \mathbb{O}^{-1}(0)$, $\emptyset = 1^{-1}(0)$.

(2) Como $\{0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ y $f \in C(X, \mathbb{R})$ entonces $f^{-1}(0)$ es un cerrado de X.

(3) En efecto, para cualquier $x \in n(f)$, $f(x) = 0$ si y solamente si, $f^n(x) = 0$, si y solamente si, $|f|(x) = 0$, si y solamente si $|f|^n(x) = 0$

(4) Como $N \in n(X)$ existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $|f|^{-1}(0) = N$ y la función $g = \min(|f|, 1)$ es tal que $\mathbb{O} \leqslant g \leqslant 1$.

(5) Sean $n(f)$, $n(g)$ $n(X)$ entonces f, g $C(X, R)$ y $n(f) \cap n(g) = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f^2+g^2)^{-1}(0) = n(f^2+g^2)$.

(6) Se desea demostrar que si $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots, \in n(X)$ donde $N_i = n(f_i)$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_n \in n(X)$. Como por (4) sabemos que existe $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $\mathbb{O} \leqslant f_n \leqslant 1$, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n = \frac{f_n}{2^n}$; ella es continua y mayorada por $\frac{1}{2^n}$; además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, luego por el Criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente, de lo anterior se deduce que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, $x \in f^{-1}(0)$ si y solamente si $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si y solamente si $x \in N_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, si y solamente si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$.

(7) Se desea demostrar que cada n(f) es una intersección numerable de abiertos; pero esto resulta como consecuencia del hecho de que:

$$n(f) = n(|f|) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X : |f(x)|<\frac{1}{n}\right\}$$

donde $\left\{x \in X : |f(x)|<\frac{1}{n}\right\}$ es un abierto de X.

(8) Sean f, $g \in C(X, \mathbb{R})$ y $n(f), n(g) \in n(X)$; se tiene que $n(f) \cup n(g) = f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = (fg)^{-1}(0) = n(fg)$.

<u>Ejemplo</u> 1.1.1: Con el objeto de ilustrar claramente nuestra definición 1.1.1, nos referiremos a espacios topológicos específicos.

(a) Sea (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto cerrado cualesquiera de dicho espacio; considérese la función f definida por:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \overline{d}(x,A) = \inf_{a\in A}\{d(x,a)\}$$

es claro que f es continua y f(x) = 0 si y solamente si $x \in A = \bar{A}$; por lo tanto, $A = f^{-1}(0)$.

(b) Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico normal y F un conjunto cerrado y G_δ, es decir, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ donde G_n es abierto de X para $n \in \mathbb{N}$. Considérese ahora $F_n = G_n^c$ (complemento de G_n) para cada $n \in \mathbb{N}$; entonces F_n es un cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$ y, $F \cap F_n = \emptyset$. Por el Lema de Urysohn, existe $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tal que:

(a) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, para cada $x \in X$

(b) $f_n[F_n] = \{1\}$

(c) $f_n[F] = \{0\}$

además, $X = F \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$. Sea $g_n = f_n \wedge 2^{-n}$, $|g_n| \leqslant 2^{-n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2$ luego por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = f$ converge uniformemente a f que es continua.

Si $x \in F$ entonces $f_n(x) = 0$ luego $g_n(x) = 0$, por tanto $f(x) = 0$

Si $x \notin F$ entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_i$ luego $f_i(x) = 1$ y $g_i(x) = 2^{-i}$ y $f(x) \neq 0$; pues $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \geqslant \frac{1}{2^i} > 0$;

de aquí se concluye que $n(f) = F$.

Definición 1.1.2: Dado $f \in C(X, \mathbb{R})$, f se denominará una unidad de $C(X, \mathbb{R})$ si $n(f) = \emptyset$; $f \in C^*(X, \mathbb{R})$ se denominará una unidad de $C^*(X, \mathbb{R})$, anillo de funciones continuas y acotadas sobre X, si $|f| \geqslant r$, para $r > 0$.

Definición 1.1.3: Dos subconjuntos A y B de X se dirán completamente separados (el uno del otro) en X si existe $f \in C^*(X, \mathbb{R})$ tal que: $0 \leqslant f \leqslant 1$ y:

$$f(x) = 0, \text{ (para } x \in A)$$

$$f(x) = 1, \text{ (para } x \in B).$$

Definición 1.1.4: Sea A un subconjunto de X; si $n(f)$ es una vecindad de A, diremos que $n(f)$ es una vecindad-núcleo de A.

<u>Definición</u> 1.1.5: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y S un subespacio de X; diremos que S es <u>C-inmerso en X</u> si cada función en $C(S,\mathbb{R})$ puede ser extendida a una función en $C(X,\mathbb{R})$. S se dirá <u>C^*-inmerso en X</u> si cada función en $C^*(S,\mathbb{R})$ puede ser extendida a una función en $C^*(X,\mathbb{R})$.

En otras palabras:

$\forall f\in C(S,\mathbb{R}),\ \exists \tilde{f}\in C(X,\mathbb{R})$ tal que $\tilde{f}/S = f$.

$\forall f\in C^*(S,\mathbb{R}),\ \exists \tilde{f}\in C^*(X,\mathbb{R})$ tal que $\tilde{f}/S = f$.

Un resultado básico que utilizaremos más adelante, es el siguiente:

<u>Teorema</u> 1.1.1. (URYSOHN) Un subespacio S de X es C^*-inmerso en X si y solamente si dos conjuntos completamente separadas en S son completamente separados en X.

Véase demostración en [3].

2. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES.

De la topología general es sabido que si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, una familia $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$ si cada conjunto abierto U (esto es, miembro de $\mathcal{T}$) es la unión de miembros de $\mathcal{C}$. En vista de que nuestras consideraciones topológicas se expresarán en términos de los núcleos y estos son cerrados, es prudente definir la base de la topología en términos de estos últimos.

Definición 1.2.1: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos cerrados de X es una base para los conjuntos cerrados en X si cada conjunto cerrado F de X es una intersección de miembros de $\mathcal{B}$, es decir,

$$F \subseteq X \text{ cerrado}, \exists \{U_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{B}, \; F = \bigcap_{j\in J} U_j$$

Teorema 1.2.1. (de Caracterización). Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos cerrados de X. $\mathcal{B}$ es base de conjuntos cerrados si y solamente si para todo conjunto cerrado F en X y $x \in X\setminus F$ existe un miembro de $\mathcal{B}$ que contiene a F pero no a x.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de conjuntos cerrados; se debe demostrar que para todo $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X\setminus F$ existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \supseteq F$ y $x \notin A$. Como F es cerrado y $\mathcal{B}$ una familia de cerrados en X, entonces por hipótesis,

$$\exists \{A_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{B} \; : \; F = \bigcap_{j\in J} A_j.$$

supongamos que: para todo $j \in J$ $A_j \supseteq F$, $A_j \in \mathcal{B}$ y $x \in A_j$; entonces, de

$$F = \bigcap_{j\in J} A_j \ni x$$

se deduce que $x \in F$ y esto es una contradicción porque $x \in X\setminus F$;

luego existe $k \in J$ con $A_k \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin A_k$ y $F \subseteq A_k$. Recíprocamente, sean F un cerrado de X y $x \in X \setminus F$; entonces existe $A_x \in \mathcal{B}$ con $A_x \supseteq F$ y $x \notin A_x$ por hipótesis. Mostremos ahora que $\bigcap_{x \in X \setminus F} A_x = F$; una inclusión es trivial, la otra resulta porque:

Si existe $y \in \bigcap_{x \in X \setminus F} A_x$ tal que $y \notin F$, entonces $y \in A_x$ para cada $x \in X \setminus F$; luego $y \notin A_y$ contradice que $y \in A_y$. $\blacktriangle$

<u>Teorema</u> 1.2.2. (TYCHONOFF). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico; las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$, F es la intersección de todos los núcleos que lo contienen; es decir:

$$F = \bigcap \left\{ n(f) \; : \; F \subseteq n(f), \; f \in C(X, \mathbb{R}) \right\}$$

(ii) Para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ y x un punto en su complemento, existe una función continua f de X en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = 1, \quad f[F] = \{0\}$$

o simbólicamente:

$\forall\, F \subseteq X$ cerrado $\forall_x \in X \setminus F$, $\exists f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x) = 1$, $f[F] = \{0\}$.

(iii) Para cada $\mathcal{T}'$ topología sobre X y $C[(X, \mathcal{T}), \mathbb{R}] \subseteq C[(X, \mathcal{T}'), \mathbb{R}]$ se tiene $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$

Demostración. Haremos ésta demostración mediante la sucesión de implicaciones

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Sean F un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus F$; por (i)

$$F = \bigcap \left\{ n(f) \ : F \subseteq n(f), \ f \in C(X, \mathbb{R}) \right\}$$

como $x \in X \setminus F$ entonces existe un $f \in C(X, \mathbb{R})$ con $F \subseteq n(f)$ y tal que $f(x) \neq 0$; considérese ahora la función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

g es continua y no nula; para $x \in X \setminus F$, $g(x) = 1$ y $g[F] = \{0\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Sea τ' una topología sobre X tal que $C[(X,\tau), \mathbb{R}] \subseteq C[(X,\tau'), \mathbb{R}]$; debemos demostrar que cada F cerrado con respecto a la topología τ es un cerrado con respecto a la topología τ'; es decir, para cada $x \in X \setminus F$, existe $O'_x \in \tau'$ tal que $x \in O'_x \subseteq X \setminus F$.

Sea $x \in X \setminus F$, por (ii) existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ y $f[F] = \{0\}$. Considérese el abierto subbásico de $\mathbb{R}$ dado por $]\frac{1}{2}, \infty[$; entonces:

$$x \in f^{-1}(]\tfrac{1}{2}, \infty[) = O'_x$$

Como $C[(X,\tau), \mathbb{R}] \subseteq C[(X,\tau'), \mathbb{R}]$, $f \in C[(X,\tau'), \mathbb{R}]$; luego $O'_x \in \tau'$; además, $F \cap O'_x = \emptyset$ implica que $O'_x \subseteq X \setminus F$;

luego $x \in O'_x \subseteq X \setminus F$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Sea $\mathcal{T}'$ la colección de todos los $X \setminus F$ tal que F es un $\mathcal{T}$-cerrado y cumple con (i); esto es:

$$\mathcal{T}' = \left\{ X \setminus F : F \text{ es } \mathcal{T}\text{-cerrado y cumple con (i)} \right\}$$

mostraremos que $\mathcal{T}'$, así definida, es una topología sobre X.

(A) $X \in \mathcal{T}'$

En efecto, $\emptyset = 1^{-1}(0)$ es un $\mathcal{T}$-cerrado y cumple con la propiedad (i) por lo tanto,

$$X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{T}'$$

$\emptyset \in \mathcal{T}'$

Sabemos que $X = 0^{-1}(0)$ luego X es un $\mathcal{T}$-cerrado que cumple con la propiedad (i) por lo tanto

$$\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{T}'$$

(B) Si $X \setminus F_1$, $X \setminus F_2 \in \mathcal{T}'$ entonces $X \setminus (F_1 \cup F_2) \in \mathcal{T}'$

Supongamos que $x \notin F_1 \cup F_2$ entonces $x \notin F_1$ y $x \notin F_2$. $x \notin F_1$ implica que existe $f_1 \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $F_1 \subseteq n(f_1)$ y $x \notin n(f_1)$. $x \notin F_2$ implica que existe $f_2 \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $F_2 \subseteq n(f_2)$ y $x \notin n(f_2)$; de donde:

$$F_1 \cup F_2 \subseteq n(f_1) \cup n(f_2) = n(f_1 f_2) \quad \text{y} \quad x \notin n(f_1 f_2)$$

por lo tanto

$$X \setminus (F_1 \cup F_2) \in \mathcal{T}'$$

(C) Si $\left\{ X \setminus F_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}'$ entonces $\bigcup_{\lambda} (X \setminus F_\lambda) \in \mathcal{T}'$

Sabemos que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus F_\lambda) = X\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$; supongamos que $x\notin\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$; entonces existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $x\notin F_{\lambda_0}$, por lo tanto, existe $f\in C(X,\mathbb{R})$ tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \subseteq F_{\lambda_0}\subseteq n(f)$ y $x\notin n(f)$ luego $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ tiene la propiedad (i), por lo tanto

$X\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\setminus F_\lambda)\in\mathcal{T}'$

Ahora demostraremos que $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$. Sea $f\in C(X,\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}$ cerrado en la topología usual de $\mathbb{R}$ que notaremos por $\mathcal{T}_{us}$

Si $x\in X$ es tal que $x\notin f^{-1}[\mathcal{C}]$, resulta que: $f(x)\in\mathbb{R}$ y $f(x)\notin\mathcal{C}$

Como $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{us})$ es normal y $\{f(x)\}$, $\mathcal{C}$ son cerrados disjuntos de $\mathbb{R}$, existe $g\in C(\mathbb{R},\mathcal{T}_{us})$ tal que:

$$g(f(x)) = 1, \quad y \quad g[\mathcal{C}]=\{0\}$$

Sea $h=g\circ f$; es claro que $h\in C[(X,\mathcal{T}),\mathbb{R}]$; además si $y\in f^{-1}[\mathcal{C}]$ entonces $f(y)\in\mathcal{C}$ luego $h(y) = g(f(y)) = 0$; por lo tanto,

$$f^{-1}[\mathcal{C}]\subseteq h^{-1}(0) \qquad (1)$$

además:

$$h(x) = g(f(x)) = 1 \text{ implica que } x\notin h^{-1}(0) \qquad (2).$$

por (1) y (2) se tiene que:

$$f^{-1}[\mathcal{C}] = \bigcap\left\{ h^{-1}(0) : f^{-1}[\mathcal{C}]\subseteq h^{-1}(0),\ h\in C[(X,\mathcal{T}),\mathbb{R}] \right\}$$

es decir;

f es $\mathcal{T}'$-$\mathcal{T}_{us}$ continua si y solamente si

$f\in[C(X,\mathcal{T}'),\mathbb{R}]$

por lo tanto $C[(X,\mathcal{T}),\mathbb{R}]\subseteq C[(X,\mathcal{T}'),\mathbb{R}]$ de donde por (iii),

$\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$

Recíprocamente, sabemos que todo abierto Θ' con respecto a la topología $\mathcal{T}'$ es de la forma $X \setminus F$ donde F es $\mathcal{T}$-cerrado, por lo tanto se cumple que $\mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}$; luego resulta que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

En conclusión, para cada $F \subseteq X$ con F $\mathcal{T}$-cerrado es:

$$F = \bigcap \left\{ g^{-1}(0) : F \subseteq g^{-1}(0);\ g \in C\left[(X,\mathcal{T}),\mathbb{R}\right] \right\}$$

porque

$$\mathcal{T}' = \left\{ X \setminus F : F = \bigcap \left\{ f^{-1}(0) : F \subseteq f^{-1}(0),\ f \in C\left[(X,\mathcal{T}),\mathbb{R}\right] \right\} \right\}$$

Definición 1.2.2: Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es completamente regular si:

(1) $(X,\mathcal{T})$ es de Hausdorff

(2) $(X,\mathcal{T})$ verifica una cualesquiera de las tres afirmaciones del teorema anterior.

Del teorema 1.2.2. y de la definición 1.2.2. se deducen fácilmente:

Corolario 1.2.1: Todo conjunto cerrado F en un espacio completamente regular es una intersección de vecindades-núcleos de F.

Corolario 1.2.2: Un espacio de Hausdorff $(X,\mathcal{T})$ es completamente regular si y solamente si la familia de núcleos $n(X)$ es una base de conjuntos cerrados.

Ejemplos 1.2.1: (a) Un espacio normal y por lo tanto metrizable, es un espacio completamente regular. Esto resulta como consecuencia inmediata del Lema de Urysohn.

(b) Todo sub-espacio de un espacio completamente regular es un espacio completamente regular.

Sea E un espacio completamente regular y E' un subespacio arbitrario de E; considérese además, F' un cerrado de E'; si $x \in E'$ y $x \notin F'$ entonces existe un cerrado F de E tal que $F \cap E' = F'$; ahora bien, como $x \notin F$ entonces existe una función $\hat{f}$, continua de E en $[0,1]$ tal que $\hat{f}$ es igual a 1 en x y 0 en F; su restricción f a E' es igual a 1 en x y 0 en F'.

(c) Todo espacio localmente compacto es completamente regular.

Sea X un espacio localmente compacto, $p \in X$ y A un cerrado que no contiene a p; como X es localmente compacto, podemos obtener, debido a repetidas aplicaciones, conjuntos abiertos y relativamente compactos V_1, V_2 tales que:

$$p \in V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq V_2 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq A^c.$$

por ser $\bar{V}_2$ compacto, por tanto es normal y existe una función

$$f : \bar{V}_2 \longrightarrow [0,1]$$

tal que f tiene valor uno en p y cero en $\bar{V}_2 \setminus V_1$.

Sea:

$$F : X \longrightarrow [0,1]$$

la función que coincide con f sobre $\bar{V}_2$ e identicamente nula sobre V_2^c; como $F|_{\bar{V}_2}$, $F|_{V_1^c}$ son continuas y coinciden sobre

$\bar{V}_2 \cap V_1^c$ entonces existe una única función continua:

$$F : X \longrightarrow [0,1]$$

De lo anterior se concluye que X es completamente regular.

Teorema 1.2.3: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular; si $f(x) = f(y)$ para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$ entonces $x = y$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que $x, y \in X$, $x \neq y$; como $(X,\mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff entonces $\{y\}$ es un subconjunto cerrado de $(X,\mathcal{T})$; como dicho espacio es completamente regular, existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que:

$$f(x) = 1$$
$$f(\{y\}) = \{0\}$$

luego f separa x de y; es decir, $f(x) \neq f(y)$ y está en contradicción con la hipótesis. ▲

3. TOPOLOGIA DEBIL.

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular, su topología es determinada por las funciones continuas de valor real. Sea X un conjunto y C' un subconjunto de $\mathbb{R}^X$, conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}$; la topología débil inducida por C' sobre X es la mínima topología sobre X tal que todas las funciones en C' resultan continuas; es decir, la topología es inicial.

Sea $\mathcal{J}$ la colección de todas las preimágenes de abiertos en $\mathbb{R}$ bajo elementos de C'; es decir, $U \subseteq X$ pertenece a $\mathcal{J}$ si y solamente si existe $f \in C'$ y un conjunto abierto V en $\mathbb{R}$ tal que $U = f^{-1}[V]$; ahora bien, la topología débil inducida por C' tiene justamente por sub-base a $\mathcal{S}$.

Para obtener la topología débil inducida por C', no es necesario considerar las preimágenes de todos los abiertos de $\mathbb{R}$ puesto que las preimágenes de los conjuntos abiertos básicos en $\mathbb{R}$ o de los conjuntos abiertos sub-básicos bajo elementos de C', ya constituyen una sub-base para la topología débil.

Teorema 1.3.1: Sea C' una subfamilia de $C(Y, \mathbb{R})$ que determina la topología de Y. Una aplicación σ del espacio S en Y es continua si y solamente si la función compuesta $g \circ \sigma$ está en $C(S, \mathbb{R})$ para todo $g \in C'$.

Demostración: La condición necesaria es evidente. Para la condición suficiente, debemos demostrar que σ es continua. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$; por ser g continua, $g^{-1}[F]$ es un conjunto cerrado sub-básico de Y donde $g \in C'$; además,

$$\sigma^{-1}\left[g^{-1}[F]\right] = (g \circ \sigma)^{-1}[F]$$

es un cerrado en S por ser $g \circ \sigma$ continua; por lo tanto, σ es contínua. ▲

Teorema 1.3.2: Sean $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos completamente regulares, $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ el producto cartesiano y para todo $\lambda\in\Lambda$ $\pi_\lambda: X \longrightarrow X_\lambda$ la proyección canónica. Si $\mathcal{T}$ es la topología inicial determinada por los Π_λ entonces $(X,\mathcal{T})$ es completamente regular.

<u>Demostración</u>: Recordemos que una base para la topología $\mathcal{T}$ está dada por $\bigcap_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(\Theta_{\lambda_k})$ donde $\Theta_{\lambda_k} \in \mathcal{T}_k$ y $\lambda_k \in \Lambda$. Probaremos que todo cerrado $F \subseteq X$ con respecto a la topología $\mathcal{T}$ tiene la propiedad (i) del teorema 1.2.2. Sea $x \in X \setminus F \in \mathcal{T}$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ con $\Theta_{\lambda_k} \in \mathcal{T}_{\lambda_k}$ tal que

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(\Theta_{\lambda_k}) \subseteq X \setminus F$$

por lo tanto, para $k = 1,2,\ldots,n$ $\Pi_{\lambda_k}(x) \in \Theta_{\lambda_k}$ de donde resulta: $\Pi_{\lambda_k}(x) \notin X_{\lambda_k} \setminus \Theta_{\lambda_k}$ y este conjunto es cerrado; como cada uno de los espacios $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es completamente regular ellos verifican la propiedad (i) del teorema 1.2.2; esto significa que para $k = 1,2,\ldots,n$ existe $N_{\lambda_k} = n(f_{\lambda_k}) \in n(X_{\lambda_k})$ tal que $X_{\lambda_k} \setminus \Theta_{\lambda_k}$ esta contenido en N_{λ_k} y $\Pi_{\lambda_k}(x) \notin N_{\lambda_k}$; luego,

$$F \subseteq \left(\bigcap_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(\Theta_{\lambda_k})\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(X_{\lambda_k} \setminus \Theta_{\lambda_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(N_{\lambda_k}).$$

como para todo λ, Π_{λ_k} es $\mathcal{T}-\mathcal{T}_{\lambda_k}$ continua entonces para cualquier k, $\Pi_{\lambda_k}^{-1}(N_{\lambda_k}) \in n(X,\mathcal{T})$ y de (8) de la proposición 1.1.1. se concluye que: $N = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_{\lambda_k}^{-1}(N_{\lambda_k})$ también es elemento de $n(X,\mathcal{T})$.

Luego $F \subseteq N$ pero $x \notin N$. ▲

Observación 1.3.1: Si examinamos la demostración del teorema 1.3.1; nos damos cuenta que no depende de ninguna propiedad especial de $\mathbb{R}$; luego podemos establecer, de manera más general, los siguientes términos:

(*) Sea Φ una familia de aplicaciones que determinan la topología de un espacio X; una aplicación σ de un espacio S en X es continua si y solamente si $\varphi \circ \sigma$ es continua para cada $\varphi \in \Phi$

Si, en particular $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ entonces la proposición puede enunciarse de la siguiente manera:

(**) Una aplicación σ de un espacio S en $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es continua si y solamente si $\Pi_\lambda \circ \sigma$ es continua para toda proyección Π_λ.

4. COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH-ALEXANDROFF.

En esta sección procederemos a la construcción del espacio βX conocida como la Compactificación de Stone-Čech de X; el procedimiento que utilizaremos será mediante la inmersión de X, como un subconjunto denso en un producto de rectas reales; de este método, debido a Hewitt, obtendremos ϑX denominada la Compactificación real de X, que es el βX obtenido mediante procedimientos algebraicos.
Estableceremos sin demostración (ver [3]) los resultados siguientes.

Teorema 1.4.1: Sea φ una aplicación de un conjunto A en un conjunto B; para cada aplicación g de un conjunto B en un conjunto E, es decir elemento de E^B la compuesta $g \circ \varphi$ es una aplicación de A en E; luego φ induce una aplicación $\varphi' : E^B \longrightarrow E^A$ definida por:

$$\varphi' g = g \circ \varphi$$

y tal que:

(1) φ' es inyectiva si y solamente si φ es suryectiva.

(2) φ' es suryectiva si y solamente si φ es inyectiva.

Teorema 1.4.2: Sea Θ una aplicación continua de X en Y y Θ' el homomorfismo inducido $g \longrightarrow g \circ \Theta$ de $C(Y, \mathbb{R})$ en $C(X, \mathbb{R})$ (resp. $C^*(Y, \mathbb{R})$ en $C^*(X, \mathbb{R})$) :

(a) Θ' es un monomorfismo si y solamente si $\Theta[X]$ es denso en Y.

(b) Θ' es un epimorfismo si y solamente si Θ es un homeomorfismo cuya imagen es C-inmerso (resp. C^*-inmerso) en Y.

Lema 1.4.1: El único homomorfismo no nulo del campo de los números reales en sí mismo es la identidad.

Examinemos ahora el problema recíproco;esto es, determinar cuando un homomorfismo dado de $C(Y,\mathbb{R})$ en $C(X,\mathbb{R})$ es inducido por algún homomorfismo de X en Y? la respuesta a esta pregunta está dada por el lema anterior que, al mismo tiempo, hace trivial la demostración del siguiente lema:

<u>Lema</u> 1.4.2. (a)' Todo homomorfismo no nulo h de $C(Y, \mathbb{R})$ (resp. $C^*(Y, \mathbb{R})$) en $\mathbb{R}$ es sobre.

(b)' La correspondencia entre los homomorfismo de $C(Y, \mathbb{R})$ (resp. $C^*(Y, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ y los ideales maximales reales, es uno a uno.

<u>Definición</u> 1.4.1. Con $P = \mathbb{R}^{C(X, \mathbb{R})}$ y $P_* = \mathbb{R}^{C^*(X, \mathbb{R})}$ denotaremos todas las <u>aplicaciones definidas</u> en $C(X, \mathbb{R})$ (resp. $C^*(X, \mathbb{R})$) con valores en $\mathbb{R}$. Cada punto $p \in P$ es una familia de números reales.

$$p = (p_f)_{f \in C(X, \mathbb{R})}$$

donde el número real p_f es el <u>valor de p en f</u>. Para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$, π_f <u>denotará la proyección</u> de P sobre $\mathbb{R}$ definida por:

$$\pi_f(p) = p_f$$

Luego P es un producto cartesiano de copias de R o sea

$$P = \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f \quad \text{con} \quad \mathbb{R}_f = \mathbb{R}$$

Consideramos la topología débil en P inducida por la familia $\{\pi_f\}_{f \in C(X, \mathbb{R})}$

Análogamente, consideramos en P_* la topología débil inducida por la familia de todas las funciones π_{*f}; $f \in C^*(X, \mathbb{R})$.

Teorema 1.4.3: (a) La aplicación σ definida por:

$$\sigma x = (f(x))_{f \in C(X,\mathbb{R})} \qquad x \in X$$

es un homeomorfismo de X en P y $\sigma[X]$ es C-inmerso en P.

$(a)_*$ La aplicación σ_* definida por:

$$\sigma_* x = (f(x))_{f \in C^*(X,\mathbb{R})}$$

es un homeomorfismo de X en P_* y $\sigma_*[X]$ es C^*-inmerso en P_*.

Demostración: Por definición de σ, $\pi_f \circ \sigma = f$ para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$; mediante observación 1.3.1. (**) se tiene que σ es continua y, por el teorema 1.4.2., existe un homomorfismo inducido σ' de $C(P,\mathbb{R})$ en $C(X,\mathbb{R})$ tal que:

$$\sigma' \circ \pi_f = \pi_f \circ \sigma = f.$$

luego σ' es un epimorfismo; finalmente, por el teorema 1.4.2. (b) se tiene que σ es un homeomorfismo cuyo imagen $\sigma[X]$ es C-inmerso en P.

La demostración de $(a)_*$ es similar. ▲

Del teorema anterior se concluye que σ es un homeomorfismo de X sobre $\sigma[X]$; nuevamente por el teorema 1.4.2. (b) el homomorfismo σ' inducido por σ, es un isomorfismo de $C(\sigma[X]R)$ sobre $C(X,\mathbb{R})$ y está definido por:

$$\sigma' g = g \circ \sigma$$

donde $g \in C(\sigma[X]R)$. Sea f una función de X en $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = g(\sigma x) \qquad (x \in X)$$

luego $f \in C(X, \mathbb{R})$. Observamos, g determina f y recíprocamente porque σ es un homeomorfismo. Pero acabamos de definir

$\sigma x = (f(x))_{f \in C(X,\mathbb{R})}$; luego

$i\sigma x = (f(x))_{f \in C(X,\mathbb{R})}$ y $\Pi_{f_0}[i\sigma x] = \Pi_{f_0}\left[f(x)_{f \in C(X,\mathbb{R})}\right] = f_0(x)$

donde i es la inclusión de $\sigma[X]$ en P; además, hemos visto que $f = g \circ \sigma$ $(x \in X)$; por lo tanto,

$$\Pi_f\ [i\sigma x] = f(x) = g(\sigma x)$$

$$\Pi_f\ i[\sigma x] = g[\sigma x]$$

por lo tanto $\qquad \Pi_f \circ i = g.$

De lo anterior se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.4.4: (a) La aplicación $f \longrightarrow \Pi_f|cl\,\sigma[x]$ es un isomorfismo de $C(X,\mathbb{R})$ sobre $C(cl\sigma[X]\mathbb{R})$.

(b) La aplicación:

$$f \longrightarrow \Pi_{*\,f}|cl\,\sigma_*[x]$$

es un isomorfismo de $C^*(X,\mathbb{R})$ sobre $C^*(cl\,\sigma_*[x])$ ▲

Las clausuras de $\sigma[X]$ y $\sigma_*[X]$ servirán como modelos para υX y βX respectivamente cuando se demuestra que el primero es real compacto y el segundo es compacto.

<u>Teorema</u> 1.4.5: La clausura de $\sigma_*[X]$ en P_* es un compacto luego es un modelo de βX.

<u>Demostración</u>: Como $f \in C^*(X,\mathbb{R})$ entonces $f[X]$ es acotada en $\mathbb{R}$ luego la clausura de $\tau[X]$ es

un compacto de $\mathbb{R}$, además $\prod_{f\in C^*(X,\mathbb{R})} cl_{\mathbb{R}}\, f[X]$ es un compacto de $P_* = \prod_{f\in C^*(X,\mathbb{R})} \mathbb{R}_f$.

Sea $\hat{X} = \prod_{f\in C^*(X,\mathbb{R})} cl_{\mathbb{R}}\, f[X]$; es claro que $\sigma_*^{\sim}[X] \subseteq \hat{X}$ y sabemos que $\sigma_*^{\sim}[X]$ es C^*-inmerso en P_*; por lo tanto, en $\hat{X}$; como $cl_{P_*}\sigma_*^{\sim}[X] \subseteq \hat{X}$ y $\hat{X}$ es compacto en P_*, resulta que $cl_{P_*}\sigma_*^{\sim}[X]$ es también compacto en P_*.

Ahora demostraremos que esta clausura es una compactificación de $\sigma_*^{\sim}[X]$; es decir, ella es compacta en P_* y $\sigma_*^{\sim}[X]$ es denso en $cl_{P_*}\sigma_*^{\sim}[X]$.

En efecto, del hecho de que $\sigma_*^{\sim}$ es un homeomorfismo de X en $\hat{X}$, sigue que el homomorfismo inducido $\sigma_*^{\sim !}$ es un monomorfismo de $C(\hat{X},\mathbb{R})$ en $C(X,\mathbb{R})$ y por el teorema 1.4.2. (a) $\sigma_*^{\sim}[X]$ es denso en $\hat{X}$. Luego $\sigma_*^{\sim}[X]$ es denso en $cl_{P_*}\sigma_*^{\sim}[X]$. Esta compactificación de $\sigma_*^{\sim}[X]$ lo designamos con $\beta(\sigma_*^{\sim}[X])$.

<u>Observación</u> 1.4.1: Como $\sigma^{\sim}[X]$ es homeomorfo a X, $\beta(\sigma_*^{\sim}[X])$ es un modelo de βX. ▲

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que $cl_P\sigma^{\sim}[X] = \upsilon(\sigma^{\sim}[X])$; es decir, es una real-compactificación de $\sigma^{\sim}[X]$ mediante una caracterización algebraica de $cl_P\sigma^{\sim}[X]$.

Definición 1.4.2: Para cada $x \in X$, el punto σx de P, que es una aplicación de $C(X,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$, es determinada mediante su valor en el punto f, $(\sigma x)_f$, es definida por:

$$(\sigma x)_f = f(x).$$

Por ser $C(X,\mathbb{R})$ un anillo, se tiene que:

$$(\sigma x)_{f+g} = (\sigma x)_f + (\sigma x)_g$$

$$(\sigma x)_{fg} = (\sigma x)_f \cdot (\sigma x)_g \qquad f,g \in C(X,\mathbb{R})$$

luego σx es un homomorfismo de $C(X,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$; además, por ser σx una aplicación sobre y $\mathbb{R}$ un campo entonces el núcleo es el ideal maximal M_x.

Sea:

$$H = \left\{ p \in P \ : \ p \text{ es homomorfismo de } C(X,\mathbb{R}) \text{ sobre } \mathbb{R} \right\}$$

por el lema 1.4.2. (a) estos son homomorfismos no nulos en $\mathbb{R}$; luego

$$p_{f+g} = p_f + p_g$$

$$p_{f.g} = p_f \cdot p_g \qquad f,g \in C(X,\mathbb{R});\ p \in H.$$

por el lema 1.4.2. (b), H está en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los ideales reales maximales en $C(X,\mathbb{R})$ que son los núcleos de estos homomorfismo.

Teorema 1.4.6: $H = cl_p \sigma[X]$.

Demostración: (Ver [3]).

Establecemos sin demostración.

Teorema 1.4.7: La clausura, H, de $\sigma[X]$ en P es una compactificación real y por tanto

$$H = \upsilon(\sigma[X])$$

Como $\sigma[X]$ es homeomorfo a X, $\upsilon(\sigma[X])$ es un modelo de υX.

Demostración: (Ver [3]).

CAPITULO II

COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH-ALEXANDROFF DE UN ESPACIO COMPLETAMENTE REGULAR.

En este capítulo introducimos una nueva estructura que generalizará la definición de conjuntos acotados para espacios localmente compactos; se estudia la topología del conjunto extendido $\mathbb{R}^*$ de los números reales, la compactificación de Stone-Čech-Alexandroff de un espacio completamente regular y estableceremos las propiedades de la compactificación local $\mathcal{L}(X)$ de un espacio completamente regular X.

Hemos generalizado algunos resultados de la bibliografía utilizada, las que aparecen en los teoremas 2.2.2, 2.2.3.

SISTEMAS ACOTANTES.

De la topología general es sabido que para los espacios localmente compactos, un conjunto se dirá acotado si él está contenido en algún subconjunto compacto del espacio. Con el objeto de generalizar esta noción, introducimos la estructura de sistema acotante sobre un espacio completamente regular.

<u>Definición</u> 2.1.1: Dado un espacio topológico, $(X,\mathcal{T})$, completamente regular, una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos B_i de X se denomina un <u>sistema acotante</u> si ella satisface las siguientes condiciones:

(B-1) $\bigcup_i B_i = X$

(B-2) Dados $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ existe $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $B_i \cup B_j \subseteq B_k$

(B-3) Dado B_i en $\mathcal{B}$ existen B_j en $\mathcal{B}$ y $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que:

$$f(x) = 1 \qquad (x \in B_i)$$
$$f(x) = 0 \qquad (x \notin B_j)$$

<u>Observación</u> 2.1.1: De (B-1) se deduce que el sistema acotante $\mathcal{B} = \{B_i\}$ cubre a X.

Dados $B_1, B_2, \ldots, B_n$ elementos de $\mathcal{B}$, de (B-2) se concluye que existe B_k elemento de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq B_k$.

De (B-3) se deduce que B_i es un subconjunto de B_j porque $B_i \cap B_j^c = \emptyset$ y además se tiene

$$B_i \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq B_j.$$
$$B_j^c \subseteq f^{-1}(\{0\}).$$

<u>Definición</u> 2.1.2: Un subconjunto de X se dice <u>acotado</u> (con respecto a $\mathcal{B}$) si está contenido en algún miembro de $\mathcal{B}$.

<u>Ejemplo</u> 2.1.1. (a). En espacios localmente compacto, los conjuntos compactos forman un sistema acotante.

Sea (X, d) un espacio localmente compacto; definimos $\mathcal{B} = \{B_i\}$ la familia de todos los subconjuntos compactos de X. Como toda $x \in X$ está contenida en una vecindad compacta por ser X localmente compacto, se cumple (B-1).

Si B_i, B_j son dos compactos, se cumple (B-2).

Ahora demostraremos (B-3). Como X es localmente compacto entonces por (1.2.1.(c)) es completamente regular.

Sean $B_i \subseteq X$ compacto, $a \notin B_i$; entonces para cada $x \in B_i$ existen vecindades compactas V_x, V_a disjuntas; luego $\{V_x\}_{x \in B_i}$ es un recubrimiento de B_i por lo tanto

$$B_i \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n} = B_k$$

de donde $B_i \subseteq \mathring{B}_k$. Sea $F = (\mathring{B}_k)^c$ cerrado, entonces como X es completamente regular, para todo $x \in B_i$ existe f_x elemento de $C(X, \mathbb{R})$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x[F] = \{0\}$.

Considérese ahora el abierto $U_x = f_x^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$, $B_i \subseteq \bigcup_{x \in B_i} U_x$; como B_i es un compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tal que $B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} U_{x_k}$; sea $f = \max_{1 \leq k \leq p} f_{x_k}$; si $x \in F$, $f_{x_k}(x) = 0$ luego $f(x) = 0$. Sea $x \in B_i$, como $B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} U_{x_k}$ existe k elemento de $\{1, 2, \ldots, p\}$ tal que $x \in U_{x_k}$ y $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$; por lo tanto, para cada $x \in B_i$, $1 < 2f(x) \leq 2$.

Sea $g = 2f \wedge 1$ entonces:

1) Si $x \in F$, $2f(x) = 0$ luego $g(x) = \min\{2f(x), 1\} = 0$, por lo tanto, $g(x) = 0$, para todo $x \in F$.

2) Si $x \in B_i$, $g(x) = 1$, por lo tanto, $g(B_i) = \{1\}$. En conclusión, dado B_i compacto existen B_k compacto y $g \in C(X, \mathbb{R})$ tal que verifican (B-3).

<u>Ejemplo</u> 2.1.1. (b). Para un espacio métrico, la familia de todas las bolas abiertas (resp. bolas cerradas) forman un sistema acotante.

Sea (X, d) un espacio métrico cualesquiera donde el conjunto X es distinto del vacío y $\mathcal{B} = \{B(x,\varepsilon)\}_{\substack{x\in X \\ \varepsilon>0}}$ la familia de todas las bolas abiertas; es claro que $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B(x,\varepsilon)$ luego se cumple (B-1). Sean $B = B(x_0, \varepsilon_0)$ y $B' = B(x_1,\varepsilon_1)$ donde $B, B' \in \mathcal{B}$, x_0, x_1 pertenecen a X y $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ arbitrarios dados; considérese $B(x_1, \varepsilon_2)$ donde $\varepsilon_2 = d(x_0,x_1) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ entonces $B(x_1,\varepsilon_2)\in\mathcal{B}$ y $B \cup B' \subseteq B(x_1,\varepsilon_2)$, cumpliéndose así (B-2).

Sea $B(x_0, \varepsilon_0) = B \in \mathcal{B}$ donde $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ arbitrarios dados; ahora procederemos a verificar (B-3); tomemos $B' = B(x_0, 2\varepsilon_0)$ y considerese la función

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longrightarrow g(z) = d(z,(B')^c) = \inf\left\{ d(z,y) : y \in (B')^c \right\}$$

es claro que $g \in C(X,\mathbb{R})$ y si $z \in B'$ entonces $z \notin (B')^c$ que es un cerrado por lo tanto $d(z, y) \neq 0$, es decir, $g(z) \neq 0$ y $g((B')^c) = \{0\}$. Sea ahora $z \in B$ entonces $d(z,x_0) < \varepsilon_0$ y $\varepsilon_0 < d(z,y)$; es decir, $1 < \frac{1}{\varepsilon_0} d(z,y)$; luego $z \in B$ implica que $1 \leq g(z)$.

Sea $f(z) = \min\left\{ g(z), 1 \right\}$ entonces es claro que:

(i) $f \in C(X, \mathbb{R})$

(ii) $f(B) = \{1\}$

(iii) $f\left[(B')^c\right] = \{0\}$

luego se cumple (B-3).

<u>Observación</u> 2.1.2: De los ejemplos 2.1.1.(a) y 2.1.1.(b) se sigue que en un espacio completamente regular existe un sistema acotante.

Considérese la siguiente <u>afirmación</u> .

(B-3)' Dado B_i en $\mathcal{B}$ existe B_j en $\mathcal{B}$, cuyo interior contiene a la clausura $\bar{B}_i$.

<u>Proposición</u> 2.1.1. Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico completamente regular y $\mathcal{B}$ un sistema acotante. Entonces: Si $(X,\mathcal{T})$ es normal, (B-3) es equivalente a (B-3)'.

<u>Demostración</u>. Como $(X,\mathcal{T})$ es un espacio normal y $\mathcal{B}$ un sistema acotante definido en X entonces dado B_i en $\mathcal{B}$ existen B_j en $\mathcal{B}$ y $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que:

$$f(x) = 1 \qquad (x \in B_i)$$

$$f(x) = 0 \qquad (x \notin B_j)$$

es decir, $B_i \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq B_j$ luego $\bar{B}_i \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq B_j$; por lo tanto se tiene $\bar{B}_i \subseteq \overset{\circ}{B}_j$.

Recíprocamente, por ser $(X,\mathcal{T})$ normal y $\bar{B}_i \subseteq \overset{\circ}{B}_j$: $B_j \cap (\overset{\circ}{B}_j)^c = \emptyset$

por lo tanto, $\bar{B}_i$ y $(\overset{\circ}{B}_j)^c$ son dos cerrados disjuntos luego por el Lema de Urysohn existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ para

$x \in B_i$ y, $f(x) = 0$ para $x \notin B_j$; lo que demuestra que (B-3)' implica (B-3). ▲

Teorema 2.1.1. (GOULD). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico completamente regular y $\mathcal{B}$ un sistema acotante; entonces:

(a) La unión finita de conjuntos acotados es acotado.

(b) Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.

(c) Todo punto posee una vecindad acotada.

(d) Todo conjunto compacto es acotado.

(e) La clausura de un conjunto acotado es acotado.

Demostración. (a) Sea $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una familia finita de conjuntos acotados; luego $A_i \subseteq B_i$ para $1 \leq i \leq n$; por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq B_k$ a causa de la observación 2.1.1.

(b) Inmediato.

(c) Sea $x \in X$; por (B-1), existe B_h elemento de $\mathcal{B}$ $x \in B_h$; de donde, por (B-3) existen B_k en $\mathcal{B}$ y f en $C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(y) = 1$ para $y \in B_h$ y $f(y) = 0$ para $y \notin B_k$. Sea $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ una vecindad abierta de la unidad de $\mathbb{R}$ y $\Theta = f^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$; entonces $x \in B_h \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$, es decir, $x \in B_h \subseteq \Theta$. Para demostrar que $\Theta \subseteq B_k$, es suficiente observar que si $y \in f^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[)$

entonces $\frac{1}{2} < f(y) < \frac{3}{2}$ luego $f(y) \neq 0$ lo que implica que $y \notin f^{-1}(\{0\})$; es decir, $y \notin B_k^c$ o sea $y \in B_k$.

(d) Sea $A \subseteq X$ compacto y $x \in A$; por (c) existe una vecindad acotada B_x del punto x; además, $\{B_x\}_{x \in A}$ es un recubrimiento abierto de A y, por ser compacto, existen $x_1, x_2, \dots, x_p \in A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_{x_i}$; finalmente por (a) se concluye la demostración.

(e) Sea A un subconjunto acotado de (X, τ) entonces $\exists B_i : A \subseteq B_i$; para $B_i \in \mathcal{B}$ existen $B_j \in \mathcal{B}$ y f en $C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ para $x \in B_i$, $f(x) = 0$ para $x \notin B_j$; luego $A \subseteq B_i \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq B_j$, por lo tanto, $\bar{A} \subseteq \bar{B}_i \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq B_j$, de donde $f(x) = 1$ en $\bar{A} \subseteq B_j$. ▲

Corolario 2.1.1. Sean (X, τ) un espacio topológico completamente regular, $\mathcal{B}$ un sistema acotante y $\mathbb{C}$ la familia de todos los conjuntos acotados de $(X, \mathcal{B})$; entonces $\mathbb{C}$ es una bornología.

Demostración. $\mathbb{C}$ es una bornología porque se cumplen (a) y (b) del teorema anterior y, para todo $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ está en $\mathbb{C}$ por la condición (B-1)

2. LA COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH-ALEXANDROFF DE UN ESPACIO COMPLETAMENTE REGULAR.

<u>Definición</u> 2.2.1. Con $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ denotaremos el sub-anillo de $C(X,\mathbb{R})$ cuyos miembros se anulan en el complemento de algún conjunto acotado; o sea:

$$\mathcal{K}(X,\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(X,\mathbb{R}) : \underset{A \subseteq X}{\exists B_i \in \mathcal{B}},\ f(x) = 0,\ \forall_x \in A^c,\ A \subseteq B_i \right\}$$

Análogamente, las familias de funciones continuas definidas en X con valores en $\mathbb{R}^*$, el compactificado de $\mathbb{R}$ mediante dos puntos, serán denotadas respectivamente por $C(X,\mathbb{R}^*)$ y $\mathcal{K}(X,\mathbb{R}^*)$.

<u>Observación</u> 2.2.1. Los conjuntos $C(X,\mathbb{R}^*)$ y $\mathcal{K}(X,\mathbb{R}^*)$ no son necesariamente anillos.

Denotemos con G el espacio de todas las aplicaciones $\alpha : f \longrightarrow \alpha(f)$ definidas en $\mathcal{K}(X,\mathbb{R}^*)$ con valores en $\mathbb{R}^*$ o sea:

$$G = \left\{ \alpha \mid \alpha : \mathcal{K}(X,\mathbb{R}^*) \longrightarrow \mathbb{R}^*,\ \alpha \text{ es una función} \right\}$$

entonces $G = \prod_{f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R}^*)} \mathbb{R}^*_f$ donde $\mathbb{R}^*_f = \mathbb{R}^*$.

Considérese ahora el espacio topológico $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es la topología usual definida sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; denotemos con $\mathcal{T}'$ la familia de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{T}^*$ la topología sobre $\mathbb{R}^*$ generada por $\mathcal{T}'$ y la familia de intervalos de la forma $(a, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, a)$; de esta manera inducimos sobre G una topología producto.

El espacio producto G es compacto por el Teorema de Tychonoff.

Teorema 2.2.2. El espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se identifica con un subespacio de G mediante la aplicación canónica $x \longrightarrow \hat{x}$, donde $\hat{x}$ es la aplicación $f \longrightarrow \hat{x}(f) = f(x)$, es decir

$$X \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longrightarrow \hat{x} \longrightarrow \hat{x}(f) = f(x)$$

que es un homeomorfismo de X sobre $\wedge X$.

Demostración. Se demostrará que la aplicación

$\wedge : X \longrightarrow G$ es un homeomorfismo.

Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $\wedge(x_1) = \wedge(x_2)$; denotemos con $\hat{x}_i = \wedge(x_i)$ con $i=1,2$; entonces $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ significa que $f(x_1) = f(x_2)$ y, como el espacio es completamente regular, se tiene, por el teorema 1.2.3., que $x_1 = x_2$ y, por lo tanto, $\wedge$ es inyectiva.

Para demostrar que $\wedge$ es continua, recordemos que un punto de G es una familia $\{\alpha(f)\}_{f\in\mathcal{R}}$ con $\alpha \in G$.

Para todo $g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$, la proyección

$$\pi_g : \prod_{f\in\mathcal{R}(X,\mathbb{R}^*)} \mathbb{R}^*_f \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

es tal que $$\{\alpha(f)\}_{f\in\mathcal{R}(X,\mathbb{R}^*)} \longrightarrow \pi_g(\{\alpha(f)\}_{f\in\mathcal{R}}) = \alpha(g)$$

Si Θ es un abierto de $\mathbb{R}^*$ entonces un abierto sub-básico canónico de G será de la forma:

$$\pi_g^{-1}(\Theta) = \left\{ \{\alpha(f)\}_{f\in\mathcal{R}} : \pi_g(\{\alpha(f)\}_{f\in\mathcal{R}}) = \alpha(g) \in \Theta \right\}$$

por lo tanto

$$\wedge^{-1}(\pi_g^{-1}(\Theta)) = \left\{ x \in X : \hat{x} = \{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} \in \pi_g^{-1}(\Theta) \right\} =$$

$$= \left\{ x \in X : \pi_g (\{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}}) = g(x) \in \Theta \right\} = \left\{ x \in X : g(x) \in \Theta \right\} =$$

$$= g^{-1}(\Theta).$$

que es un abierto.

Ahora demostraremos que la aplicación $\wedge$ es abierta.

Como $(X, \mathcal{T})$ es completamente regular, su topología es la inicial inducida por la familia $C(X, \mathbb{R}) \subseteq C(X, \mathbb{R}^*)$; luego un abierto basal de esta topología es de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\Theta_i)$, para $f_i \in C(X, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$ y Θ_i un abierto de $\mathbb{R}$; ahora bien,

$$\wedge\left(\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\Theta_i)\right) = \left\{ \hat{x} : \{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\Theta_i) \right\} =$$

$$= \left\{ \hat{x} = \{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : f(x) \in \Theta_i;\ i = 1,2,\ldots,n \right\} = \{\hat{x} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : f_i(x) \in \Theta_i \} = \bigcap_{i=1}^{n} \{ \hat{x} =$$

$$= \{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : \pi_i(\{f(x)\}) \in \Theta_i \} = \bigcap_{i=1}^{n} (\pi^{-1}(\Theta_i) \cap \wedge(X)),$$

que es un abierto puesto que $\pi_i^{-1}(\Theta_i)$ es un abierto sub-básico de $C(X, \mathbb{R})$ y $\wedge(X)$ es un abierto sub-básico de si mismo. De lo anterior se concluye que $\wedge$ es una aplicación abierta y se concluye que $\wedge : X \longrightarrow G$ es un homeomorfismo sobre su imagen. $\blacktriangle$

<u>Teorema</u> 2.2.3. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico completamente regular; la topología inducida sobre $\wedge X$, dada por la topología producto en G coincide con la topología $\wedge\mathcal{T}$ definida por:

$$\wedge\mathcal{T}=\left\{\wedge(U) : U\in\mathcal{T}\right\}$$

<u>Demostración</u>. Sea $U\in\mathcal{T}$; como nos basta representar U por un abierto básico, podemos suponer $U=\bigcap_{i=1}^{n} f_r^{-1}(U_r)$ con U_r elemento de la familia $\mathcal{V}(f_r(x_0))$ de vecindades abiertas donde $1\leqslant r\leqslant n$ y $f_r\in C(X,\mathbb{R})$; ahora bien:

$$\wedge U=\wedge\left(\bigcap_{r=1}^{n} f_r^{-1}(U_r)\right)=\left\{(\wedge x)\in G : x\in\bigcap_{r=1}^{n} f_r^{-1}(U_r)\right\}=$$

$$=\left\{\{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : x\in\bigcap_{r=1}^{n} f_r^{-1}(U_r)\right\}=\left\{(\wedge x)=\right.$$

$$\left.=\{f(x)\}_{f\in\mathcal{R}} : f_r(x)\in U_r;\ 1\leqslant r\leqslant n\right\}=\bigcap_{r=1}^{n}\prod_{f_r}^{-1}(U_r)\cap(\wedge X)=$$

$$=\left(\prod_{f\in\mathcal{R}} V_f\right)\cap(\wedge X) \text{ con } V_f=\begin{cases} U_r : f=f_r : 1\leqslant r\leqslant n\\ \mathbb{R}^* : f\neq f_r.\end{cases}$$

etc. ▲

<u>Definición</u> 2.2.2. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular con un sistema acotante $\mathcal{B}$; llamaremos <u>$\mathcal{B}$ - compactificación de X o compactificación de X con respecto al sistema acotante $\mathcal{B}$</u> a la clausura de $\wedge(X)$ en G que denotaremos por $\mathcal{B}(X)$, es decir:

$$\mathcal{B}(X) = cl_G \wedge(X).$$

Esta definición tiene sentido puesto que G es un compacto, por el Teorema de Tychonoff.

Observación 2.2.2. El espacio $\mathcal{B}(X)$ es la generalización de la compactificación de Stone-Cech-Alexandroff y comparte junto con ésta, las mismas propiedades pero con algunas modificaciones que se presentan en lo que sigue.

Definición 2.2.3. Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio completamente regular y $\mathcal{B}$ un sistema acotante definido en X.

(i) $\mathcal{B}$ es degenerado si el espacio X es acotado.

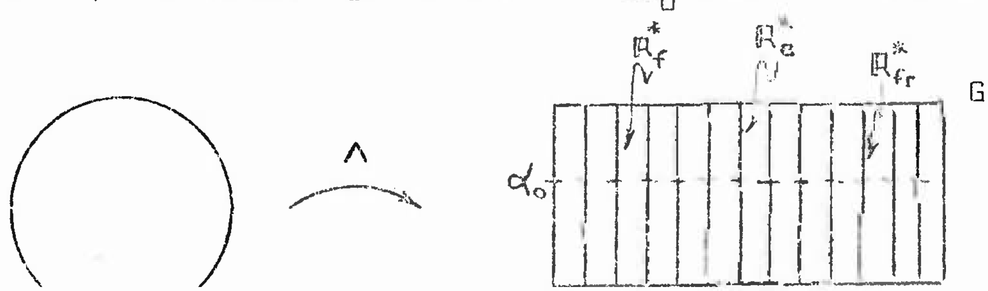
(ii) $\mathcal{B}$ es esencial si el espacio X es no acotado.

Teorema 2.2.4. (GOULD). Sea α_0 la aplicación de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$ en $\mathbb{R}^*$ definida por

$$\alpha_0(f) = 0 \qquad (f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*))$$

α_0 como elemento de G es elemento de $\mathcal{B}(X)$ si y solamente si el sistema acotante es esencial.

Para una representación geométrica de α_0 véase la figura 1.



Demostración. Supongamos que β no es esencial; entonces β es degenerada. Considérese la función e que es identicamente uno para todo $x \in X$; es claro que $e \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$; considérese la vecindad V de α_0 definida por:

$$V = \left\{ \alpha \in G : |\alpha(e) - \alpha_0(e)| < \tfrac{1}{2} \right\}$$

se desea demostrar que $V \cap (\wedge X) = \emptyset$, lo que implicaría que $\alpha_0 \notin \beta(X)$; para esto, supongamos lo contrario; entonces existe $\alpha' = \wedge x \in \wedge X$ tal que $(\wedge x) \in V$; pero esto significa que $\alpha' = \wedge x \in G$. En $\mathbb{R}^*_e$ se tiene que $|\alpha'(e) - \alpha_0(e)| = |1-0| > \frac{1}{2}$ que es una contradicción; luego $\alpha_0 \notin cl_G(\wedge X) = \beta(X)$. Por lo tanto, hemos demostrado que si $\alpha_0 \in \beta(X)$ entonces β es esencial. Ahora demostraremos que recíprocamente, si β es esencial entonces $\alpha_0 \in \beta(X)$.

Supongamos ahora que β es esencial, una vecindad típica de α_0 es:

$$W = \left\{ \alpha \in G : |\alpha(f_r)| < \varepsilon_r ;\ r = 1, 2, \ldots, n \right\} \quad f_r \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$$

Se desea demostrar que para todo W, vecindad de α_0, se tiene $W \cap (\wedge X) \neq \emptyset$. Sea:

$$K_r = \left\{ x \in X : f_r(x) \neq 0 \right\}$$

entonces cada K_r es un conjunto acotado por ser $f_r \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$ por lo tanto por (B-2) resulta que $\bigcup_{r=1}^{n} K_r$ es un conjunto acotado y $\bigcup_{r=1}^{n} K_r \subseteq X$; por ser β esencial, $\bigcup_{r=1}^{n} K_r$ es un subconjunto propio de X. Finalmente,

$$K_r^c = \left\{ x \in X \ : \ f_r(x) = 0 \right\}$$

por lo tanto

$$\bigcap_{r=1}^{n} K_r^c = X \setminus \bigcup_{r=1}^{n} K_r$$

pero $(\wedge X) \cap W \supseteq (\wedge X) \setminus \bigcup_{r=1}^{n} (\wedge K_r) \neq \emptyset$, luego $\alpha_0 \in cl_G(\wedge X) = \mathcal{B}(X)$. ▲

<u>Corolario</u> 2.2.1. El elemento α_0 de G no es elemento de $\mathcal{B}(X)$ si y solamente si el sistema acotante $\mathcal{B}$ es degenerado.

<u>Definición</u> 2.2.4. Si $\mathcal{B}$ es esencial el punto α_0 definido en el teorema anterior se denomina el <u>punto al infinito de Alexandroff en $\mathcal{B}(X)$</u> y <u>se denotará por ∞</u>.

Con el objeto de demostrar que el punto al infinito de Alexandroff es una generalización de la compactificación de un punto en el caso de que X es localmente compacto, pasemos a demostrar el siguiente:

<u>Teorema</u> 2.2.5. (<u>GOULD</u>). Sea X un espacio localmente compacto y $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos compactos de X entonces: si $\mathcal{B}$ es esencial, $\mathcal{B}(X)$ es la compactificación a un punto de X. Si $\mathcal{B}$ es degenerada (en este caso X es un compacto) entonces $\mathcal{B}(X) = X$.

<u>Demostración.</u> Si $\mathcal{B}$ es esencial, sabemos que $\alpha_0 \in \mathcal{B}(X)$. Debemos demostrar que

$\mathcal{B}(X) = cl_G(\wedge X) = \wedge X \cup \{\alpha_0\}$.

<u>$(\wedge X) \cup \{\alpha_0\} \subseteq \mathcal{B}(X)$.</u>

Esto resulta de dos hechos a saber; en primer lugar, $\wedge X \subseteq \mathcal{B}(X)$; además, $\{\alpha_0\} \subseteq \mathcal{B}(X)$; luego $\wedge X \cup \{\alpha_0\} \subseteq \mathcal{B}(X)$.

<u>$\mathcal{B}(X) \subseteq (\wedge X) \cup \{\alpha_0\}$</u>

Sea $\alpha_1 \in G$; si $\alpha_1 \in \mathcal{B}(X)$ y $\alpha_1 \neq \alpha_0$ entonces $\alpha_1 \in \wedge X$; es decir, existe $x_1 \in X$ tal que $\alpha_1 = \wedge x_1$, o sea para todo f_i en $\mathcal{K}(X, \mathbb{R}^*)$ se tiene que $\alpha_1(f_i) = (\wedge x_1)(f_i) = f_i(x_1)$.

Sea $\alpha_1 \in G$ tal que $\alpha_1 \in \mathcal{B}(X)$ y $\alpha_1 \neq \alpha_0$; entonces existe $f_1 \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ tal que $\alpha_1(f_1) \neq \alpha_0(f_1) \neq 0$. Supongamos que $\alpha_1(f_1)$ es finito y $\varepsilon = \frac{1}{2} |\alpha_1(f_1)|$ entonces la bola cerrada de centro $\alpha_1(f_1)$ y radio ε, $\overline{B[\alpha_1(f_1), \varepsilon]}$, es vecindad de $\alpha_1(f_1)$ en $\mathbb{R}^*$ y la imagen inversa, $\pi_{f_1}^{-1} \overline{[B(\alpha_1(f_1), \varepsilon)]}$, de esta bola cerrada bajo la proyección π_f es una vecindad subbásica cerrada de α_1 en G que tiene la topología producto; por lo tanto,

$$\pi_{f_1}^{-1} \overline{[B(\alpha_1(f_1), \varepsilon)]} \cap \wedge X = \{x \in \wedge X : |f_1(x) - \alpha_1(f_1)| \leq \varepsilon\}$$

que notaremos, de ahora en adelante, con V_1. Como V_1 es la traza sobre $\wedge X$ de una vecindad de α_1 y recordando que $\alpha_1 \in cl_G \wedge X$, es claro que V_1 es distinto del vacío; además, como $f_1 \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ entonces su soporte es un cerrado y acotado contenido en un elemento del sistema acotante que es un compacto, luego es un compacto. Mostremos ahora que $V_1 \subseteq \Lambda$(soporte de f_1) en efecto, sea $x' \in V_1$, entonces $|f_1(x') - \alpha_1(f_1)| \leqslant \varepsilon$; es decir, $\alpha_1(f_1) - \varepsilon \leqslant f_1(x') \leqslant \alpha_1(f_1) + \varepsilon$

como $\varepsilon = \frac{1}{2}|\alpha_1(f_1)|$ entonces:

1 $$\alpha_1(f_1) - \frac{1}{2}|\alpha_1(f_1)| \leqslant f_1(x') \leq \alpha_1(f_1) + \frac{1}{2}|\alpha_1(f_1)|$$

ahora bien, de la desigualdad anterior, surgen los siguientes dos casos:

<u>1er. Caso</u>: $\alpha_1(f_1) > 0$.

En este caso,

$$\alpha_1(f_1) - \frac{1}{2}\alpha_1(f_1) = \frac{1}{2}\alpha_1(f_1)$$
$$\alpha_1(f_1) + \frac{1}{2}\alpha_1(f_1) = \frac{3}{2}\alpha_1(f_1).$$

<u>2do. Caso</u>: $\alpha_1(f_1) < 0$.

Se tiene:

$$\alpha_1(f_1) - \frac{1}{2}\alpha_1(f_1) = -\frac{1}{2}\alpha_1(f_1)$$
$$\alpha_1(f_1) + \frac{1}{2}\alpha_1(f_1) = -\frac{3}{2}\alpha_1(f_1).$$

De lo anterior se deduce que para $x' \in V_1$ se tiene que $f_1(x') \neq 0$ y, por lo tanto, $V_1 \subseteq \Lambda$ (soporte de f_1) que es un compacto; pero V_1 es un cerrado, luego compacto.

Considérese la familia de conjuntos

$$V_i = \{\Lambda x \in \Lambda X : |f_i(x) - \alpha_1(f_i)| \leqslant \varepsilon_i\} \quad (\varepsilon_i > 0)$$

observamos que

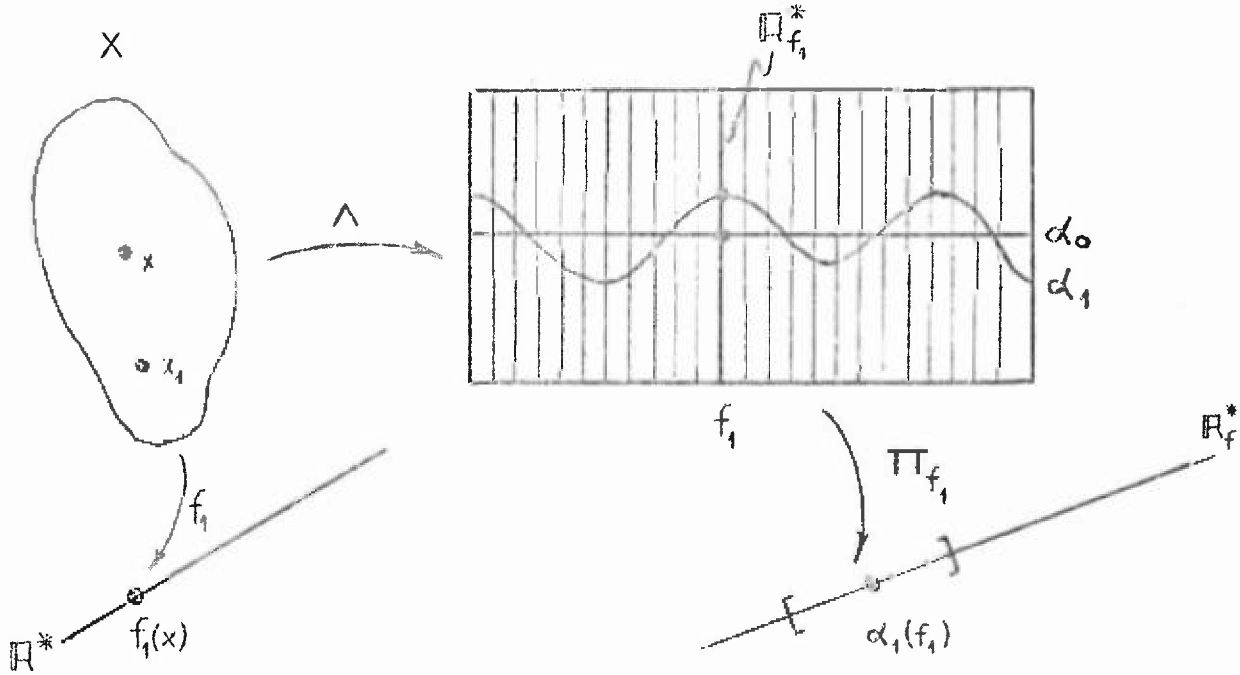
$$V_i = \pi_{f_i}^{-1}(\overline{B(\alpha_1(f_i), \varepsilon_i)}) \cap (\wedge X) = \{\wedge x \in \wedge X : |f_i(x) - \alpha_1(f_i)| \leq \varepsilon_i\}$$

luego cualquier intersección finita de tales V_i es la traza de una vecindad de α_1 sobre $\wedge X$; además, como V_1 es un conjunto de la forma V_i y sabiendo que $\alpha_1 \in \mathcal{B}(X) = cl_G \wedge X$ entonces se tiene que para cualquier subconjunto finito J de I, $\bigcap_{i \in J} V_i \cap V_1$ es distinto del vacío; además, como para cualquier

i

i, V_i es un subconjunto cerrado de $\wedge X$ y V_1 es un compacto entonces $\bigcap_{i \in I} V_i \cap V_1$ tiene la propiedad de la intersección finita; por ser V_1 compacto, por lo tanto $\bigcap_{i \in J} V_i$ es distinto del vacío. En vista de que $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es separante (ver anexo) existe un único punto $\wedge x \in \wedge X$ tal que $\alpha_1(f_i) = f_i(x_1)$ para todo $f_i \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}^*)$.

Si $\mathcal{B}$ es degenerado, entonces X es acotado, esto es, existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $X \subseteq B_i$; por ser $\mathcal{B}$ un sistema acotante, cada $B_i \subseteq X$, por lo tanto, $X = B_i$ es compacto, por lo tanto $\mathcal{B}(X) = X$.



3. COMPACTIFICACION LOCAL DE X.

<u>Teorema 2.3.1.</u> (<u>GOULD</u>). Un subconjunto A de X es acotado si y solamente si la clausura de ΛA en $\mathcal{B}(X)$ excluye a ∞.

<u>Demostración</u>.

<u>1er. caso</u>: $\mathcal{B}$ es degenerado. Luego X es acotado y, por el teorema 2.1.1. (b) también A es acotado. Como $\Lambda A \subseteq \Lambda X$ entonces $cl_G \Lambda A \subseteq cl_G \Lambda X = \mathcal{B}(X)$ y, como $\mathcal{B}$ es degenerado, A es acotado y $\alpha_0 \notin \mathcal{B}(X)$; por lo tanto, se concluye que $\alpha_0 \notin cl_G \Lambda A \subseteq \mathcal{B}(X)$ (1).

Sabemos además que $cl_G \wedge A = cl_G (\wedge A) \cap \beta(X) = cl_{\beta(X)} (\wedge A)$ (2)

por lo tanto, de (1) y (2) se concluye que $\alpha_0 \notin cl_{\beta(X)} (\wedge A)$.

Por el corolario 2.2.1. sabemos que $\alpha_0 \notin cl_{\beta(X)} (\wedge A)$ si y solamente si β es degenerado luego en conclusión hemos demostrado que A es acotado si y solamente si la clausura de $\wedge A$ en $\beta(X)$ excluye a ∞.

<u>2do. Caso</u>: β es esencial. El caso es distinto del anterior; puesto que β es esencial, se tiene que $\alpha_0 \in cl_{\beta(X)} (\wedge A)$;

ahora bien, sabemos, por hipotesis, que A es acotado; luego existe $B_i \in \beta$ tal que $A \subseteq B_i$; pero, por la definición 2.1.1., dado $B_i \in \beta$ existen $B_j \in \beta$, $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f[A] = \{1\}$ y $f[B_j^c] = \{0\}$.

Considérese la vecindad W de α_0 definida por:

$$\omega = \pi_f^{-1} (]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[) = \{\alpha \in G : |\alpha(f)| < \tfrac{1}{2}\}$$

$$\omega \cap (\wedge A) = \pi_f^{-1}(]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[) \cap (\wedge A) = \{\hat{x} : x \in A, |f(x)| < \tfrac{1}{2},$$
$$y\ |f(x)| = 1\}$$

es claro que $\omega \cap (\wedge A) = \emptyset$, por consiguiente, A es acotado, lo cual implica que $cl_{\beta(X)} (\wedge A)$ excluye a α_0.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\alpha_0 \notin cl_{\beta(X)} (\wedge A)$; entonces existe V vecindad basal de α_0 en $\beta(X)$ tal que $V \cap (\wedge A) = \emptyset$.

Sea $V = \bigcap_{i=1}^{p} \pi_{g_i}^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ con $g_i \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$; $i = 1,2,\ldots,p$;

entonces: $V \cap (\wedge A) = \phi$ implica $[\bigcap_{i=1}^{p} g_i^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)] \cap A = \phi$, entonces:

$A \subseteq [\bigcap_{i=1}^{p} g_i^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)]^c \subseteq (\bigcap_{i=1}^{p} g_i^{-1}(0))^c = \bigcup_{i=1}^{p} g_i^{-1}(\{0\})^c$;

pero, $g_i \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, p$ implica que $A_i = g_i^{-1}(\{0\})$ es acotado por consiguiente, $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ es acotado por ende, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ es acotado. $\triangle$

Definición 2.3.1. Al espacio localmente compacto $\mathcal{B}(X) \setminus \{\infty\}$ que denotamos con $\mathcal{L}(X)$, llamamos la Compactificación local de X. Observamos que si $\mathcal{B}$ es degenerada entonces $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(X)$.

Ahora estableceremos las principales propiedades de $\mathcal{L}(X)$ en el siguiente:

Teorema 2.2.2. (GOULD). Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico completamente regular con un sistema acotante $\mathcal{B}$ entonces:

(a) $\mathcal{L}(X)$ es localmente compacto.

(b) $\wedge X$ es denso en $\mathcal{L}(X)$.

(c) Un subconjunto $A \subseteq X$ es acotado si y solamente si la clausura de $\wedge A$ en $\mathcal{L}(X)$ es compacta.

(d) Cada miembro de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^*)$ tiene una extensión única a $\mathcal{C}[\mathcal{L}(X), \mathbb{R}^*]$

Demostración. (a). Como X es un espacio completamente regular, a causa del Teorema de

Compactificación de Stone-Čech, admite una compactificación $\mathcal{P}(X)$, y, como ella es maximal, admite $\mathcal{P}(X)$; además, $\mathcal{P}(X)\setminus\{\infty\}$ es un abierto de $\mathcal{P}(X)$; luego $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(X)/\{\infty\}$ es localmente compacto.

(b) <u>1er. Caso</u>: $\mathcal{P}$ es esencial. Sabemos que $(\wedge X) \subseteq \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$; además, $cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge X) = cl_G(\wedge X) \cap \mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X)$ por ser $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$; luego $cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge X) = \mathcal{L}(X)$ lo cual demuestra que $(\wedge X)$ es denso en $\mathcal{L}(X)$.

<u>2do. Caso</u>: $\mathcal{P}$ degenerado. En este caso $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(X)$ y $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge X) = \mathcal{L}(X)$, luego $cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge X) = \mathcal{L}(X)$.

En conclusión, $\wedge X$ es denso en $\mathcal{L}(X)$.

(c) <u>1er. Caso</u>: $\mathcal{P}$ es degenerado. Como $A \subseteq X$ entonces $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A) \subseteq cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge X) = \mathcal{P}(X)$. Como $\mathcal{P}$ es degenerado, $\alpha_0 \notin \mathcal{P}(X)$ luego $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A) \not\ni \alpha_0$; esto es, $\alpha_0 \notin cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A) = cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge A)$. Finalmente, $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A)$ es un compacto luego $cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge A)$ es compacta.
Recíprocamente como $\mathcal{P}$ es degenerado, $\alpha_0 \notin \mathcal{P}(X)$, luego $cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge A) = cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A)$ excluye a ∞; luego, a causa del teorema 2.3.1, $A \subseteq X$ es acotado.

<u>2do. Caso</u>: $\mathcal{P}$ es esencial. Como $A \subseteq X$ es acotado, por el teorema 2.3.1. se tiene que $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A)$ excluye a ∞ por lo tanto $cl_{\mathcal{P}(X)}(\wedge A) = cl_{\mathcal{L}(X)}(\wedge A)$ es compacta. Recíprocamente, como $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\alpha_0\}$ y $cl_{\mathcal{L}(X)} A$ es compacto, entonces $cl_{\mathcal{L}(X)} \wedge A$ excluye $\{\alpha_0\}$, luego $A \subseteq X$ es acotado.

(d) Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^*)$ donde X es completamente regular y $\mathbb{R}^*$ compacto; por (b) sabemos que $\wedge X \subseteq \mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ donde $\wedge X$ es denso en $\mathcal{S}(X)$ luego existe una única extensión $\bar{f} \in \mathcal{C}[\mathcal{S}(X), \mathbb{R}^*]$.

CAPITULO III

IDEALES Y N-FILTROS

En este capítulo estableceremos algunas propiedades de los ideales (fijos y libres), los n-filtros y los n-ultrafiltros; además, generalizaremos algunos resultados obtenidos en la nueva construcción de βX, dados en [3] por el anillo $C(X,\mathbb{R})$, para $\mathcal{R}(X,\mathbb{R})$ gracias al sistema acotante definido en el capítulo anterior. Hemos generalizado algunos resultados de la bibliografía utilizada, las que aparecen en teoremas 3.1.1, 3.1.2, así como el lema 3.4.3.

1. CONJUNTOS DE BAIRE, DE BOREL, CONJUNTOS UNITARIOS.

Definición 3.1.1. Si f es una función del espacio A en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^*$), llamaremos:

Conjunto positivo de f, que denotaremos con, $P(f)$, al conjunto $\{x \in A : f(x) \geq 0\}$.

Conjunto negativo de f, denotada por $N(f)$, al conjunto $\{x \in A : f(x) \leq 0\}$.

Conjunto unitario de f, denotada por $\mathbb{E}(f)$ al conjunto $\{x \in A : f(x) = 1\}$.

Con pos (f) designaremos

$$\{x \in A : f(x) > 0\}$$

Con neg (f) designaremos

$$\{x \in A : f(x) < 0\}$$

Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones f_i, la familia de núcleos $\{n(f_i) : f_i \in \mathcal{F}\}$

será denotada por $\mathfrak{Z}(\mathfrak{F})$, la familia de conjuntos positivos por $P(\mathfrak{F})$, la familia de conjuntos negativos por $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ y la familia de conjuntos unitarios por $\mathfrak{E}(\mathfrak{F})$.

Teorema 3.1.1. Sean $(X,\mathfrak{T})$ un espacio topológico completamente regular, $\mathfrak{B}$ un sistema acotante y $A \in \mathfrak{E}[\mathfrak{K}(X,\mathbb{R})]$. Entonces los conjuntos A, pos f, neg f son acotados donde $f \in \mathfrak{K}(X,\mathbb{R})$. En particular, A es un G_δ.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las definiciones que preceden.

Sea X un espacio localmente compacto; del curso de Teoría de la Medida (ver 14) recordamos que los conjuntos de Borel son los miembros del σ-anillo generado por los conjuntos compactos de X y los conjuntos de Baire son los miembros del σ-anillo generado por los subconjuntos compactos y G_δ de X. La generalización a subconjuntos de un espacio completamente regular con un sistema acotante se hará de la siguiente manera. ▲

Definición 3.1.2. Dado un espacio topológico $(X,\mathfrak{T})$ completamente regular y $\mathfrak{B}$ un sistema acotante, se tiene: la familia S de conjuntos de Borel es un σ-anillo generado por la clase $\mathfrak{C}$ de todos los subconjuntos de X cerrados y acotados. La familia S_0 de conjuntos de Baire es el σ-anillo generado por la clase $\mathfrak{E}[\mathfrak{K}(X,\mathbb{R})]$.

Observación 3.1.1. De ahora en adelante, solamente consideraremos espacios topológicos completamente regulares.

Teorema 3.1.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathfrak{C}[\mathcal{R}(X, \mathbb{R})]$

(b) A es la traza sobre X de un miembro A^* de $\mathfrak{C}[\mathcal{R}(\mathcal{L}(X), \mathbb{R})]$.

(c) A es la traza sobre X de un subconjunto A^* compacto y G_δ de $\mathcal{L}(X)$.

Demostración. Mediante la cadena de implicaciones $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (a)$, haremos nuestra demostración. Para la primera implicación, sea $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ entonces existe $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $A = f^{-1}(\{1\})$. Como $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ entonces existe $g \in \mathcal{R}(\mathcal{L}(X), \mathbb{R})$ tal que $(g/\wedge X) \circ \wedge = f$; por ser $g \in \mathcal{R}[\mathcal{L}(X), \mathbb{R}]$ tenemos que $A^* = g^{-1}(\{1\}) \in \mathfrak{C}[\mathcal{R}(\mathcal{L}(X), \mathbb{R})]$.

Afirmación. $\wedge A = A^* \cap (\wedge X)$. Esto es lo que significa la afirmación (b). En efecto, $x \in A$ implica que $f(x) = 1$ luego $g(\wedge x) = 1$ por lo tanto $\wedge x \in A^*$; ahora bien, $A \subseteq X$ y $x \in A$ implica que $\wedge x \in A^*$ y $\wedge x \in \wedge X$ luego $\wedge x \in A^* \cap \wedge X$ donde $\wedge A \subseteq A^* \cap \wedge X$.

Recíprocamente, sea $y \in A^* \cap \wedge X$ con $y = \wedge x$, $x \in X$; como $y \in A^*$ entonces $g(y) = 1$ pero como $(g/\wedge X) \circ \wedge = f$ se tiene que

$f(x) = 1$ o sea $x \in A$ y por tanto $y = \wedge x \in \wedge A$, o sea se ha probado la afirmación. En conclusión, (a) $\Longrightarrow$ (b).

La implicación (b) $\Longrightarrow$ (c) es inmediata tomando en consideración el teorema 3.1.1.

La demostración de la implicación (c) $\Longrightarrow$ (a) es inmediata tomando en cuenta el teorema (ver [7]) siguiente:

Si f es una función continua de valor real sobre X y c es un número real entonces cada uno de estos tres conjuntos:
$\{ x : f(x) \geqslant c \}, \{ x : f(x) = c \}, \{ x : f(x) \leq c \}$
es un conjunto cerrado y G_δ. Si, recíprocamente D es un compacto G_δ entonces existe una función f en $C^*(X, [0,1])$ tal que $D = \{ x : f(x) = 0 \}$. ▲

<u>Teorema</u> 3.1.3. (<u>GOULD</u>). Un subconjunto A de X es la traza de un subconjunto compacto de $\mathcal{L}(X)$ si y solamente si es cerrado y acotado.

<u>Demostración</u>. Supongamos que A es cerrado y acotado en X; aplicando el teorema 2.3.2. (c) y del hecho de que $\wedge$ es un homeomorfismo, se tiene que $\wedge A$ es un cerrado y $\mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} \wedge A$ es compacto; por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} \wedge A = \wedge A$.

Por consiguiente, $\wedge A = \wedge X \cap \wedge A = \wedge X \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} \wedge A$.

Observamos que un subconjunto A de X es cerrado si y solamente si $\wedge A = \wedge X \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} \wedge A$.

Recíprocamente, sabemos por hipotesis que existe $B \subseteq \mathcal{S}(X)$ tal que $\wedge A = \wedge X \cap B$ donde B es un compacto de $\mathcal{S}(X)$; además $cl_{\mathcal{S}(X)}(\wedge A) \subseteq cl_{\mathcal{S}(X)}(\wedge X) \cap cl_{\mathcal{S}(X)} B$ luego por teorema 2.3.2. (b) $cl_{\mathcal{S}(X)}(\wedge A) \subseteq \mathcal{S}(X) \cap cl_{\mathcal{S}(X)} B = cl_{\mathcal{S}(X)} B$; de lo anterior se deduce que $cl_{(X)}(\ A)$ es un compacto. De lo anterior se deduce que $\wedge A \subseteq \wedge X \cap cl_{\mathcal{S}(X)} \wedge A \subseteq \wedge X \cap B = \wedge A$, por lo tanto, $B = cl_{\mathcal{S}(X)} \wedge A$.

Finalmente, cl $(\wedge A)$ compacto implica por teorema 2.3.2. (c) que A es acotado; de la observación anterior se tiene que A es cerrado, concluyendo así la demostración.

<u>Teorema</u> 3.1.4. (<u>GOULD</u>). Un subconjunto A de X es un conjunto de Baire (resp. de Borel) si y solamente si es la traza sobre X de un subconjunto de Baire (resp. de Borel) en $\mathcal{S}(X)$.

<u>Demostración</u>. Denotemos con H la familia de todos los subconjuntos de $\mathcal{S}(X)$ tales que su traza sobre $\wedge X$ son miembros de S_0; con $S_0(\mathcal{S}(X))$ indicaremos los subconjuntos de Baire de $\mathcal{S}(X)$.

$$H = \left\{ A^* \subseteq \mathcal{S}(X) : A^* \cap (\wedge X) \in S_0 \right\}$$

<u>H es σ-anillo</u>

Sean A_1^*, $A_2^* \in H$, entonces $A_1^* \cap (\wedge X) \in S_0$, $A_2^* \cap (\wedge X) \in S_0$ luego,

$$(A_1^* \cap (\wedge X)) \setminus (A_2^* \cap (\wedge X)) = (A_1^* \setminus A_2^*) \cap (\wedge X) \in S_0$$

por ser S_0 un σ-anillo, se tiene que $A_1^* \setminus A_2^* \in H$.

Sea $A_n^* \in H$ entonces $A_n^* \cap (\wedge X) \in S_0$; por ser S_0 un σ-anillo, se tiene que:

$$\bigcup_n (A_n^* \cap (\wedge X) = \left(\bigcup_n A_n^*\right) \cap (\wedge X) \in S_0$$

por lo tanto, $\bigcup_n A_n \in H$; de esta manera, que H es el σ-anillo generado por la clase $\mathfrak{G}[\mathfrak{K}(\mathfrak{L}X, \mathbb{R})]$, luego por el teorema 3.1.2. (c), H contiene a los subconjuntos compactos y G_δ de $\mathfrak{L}(X)$, luego contiene a todos los subconjuntos de Baire de $\mathfrak{L}(X)$.

(1) $S_0(\mathfrak{L}(X)) \subseteq H = \{A^* \subseteq \mathfrak{L}(X) \,/\, A^* \cap (\wedge X) \in S_0\}$

Sea H' la familia de todos los conjuntos $\wedge A$ subconjuntos de $\wedge X$ tales que $\wedge A = A^{**} \cap (\wedge X)$, donde A^{**} es subconjunto de Baire de $\mathfrak{L}(X)$.

$$H' = \{\wedge A \subseteq \wedge X \,/\, \wedge A = A^{**} \cap (\wedge X),\ A^{**} \in S_0(\mathfrak{L}(X)).\}$$

H' es σ-anillo

Sean $\wedge A_1$, $\wedge A_2 \in H'$ entonces, $\wedge A_1 \setminus \wedge A_2 = (A_1^{**} \setminus A_2^{**}) \cap (\wedge X) \in H'$; si $A_n \in H$, $\bigcup_n (\wedge A_n) = (\bigcup_n A_n^{**}) \cap (\wedge X)$ por ser S_0 un σ-anillo en $\mathfrak{L}(X)$, luego H' contiene a $\mathfrak{G}[\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})]$; esto es,

(2) $\mathfrak{G}[\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})] \subseteq H' = \{\wedge A = A^{**} \cap (\wedge X) \,/\, A^{**} \in S_0(\mathfrak{L}(X))$

De (1) y (2) se concluye que $S_0(X) \in H$; además,

$$\begin{aligned}
\wedge A \in H' &\Longrightarrow \wedge A = A^{**} \cap (\wedge X) \text{ con } A^{**} \in S_0(\mathfrak{L}(X)) \\
&\Longrightarrow A = A^{**} \cap (\wedge X) \text{ con } A^{**} \in H \\
&\Longrightarrow A = A^{**} \cap (\wedge X) \text{ con } A^{**} \cap (\wedge X) \in S_0 \\
&\Longrightarrow \wedge A \in S_0
\end{aligned}$$

Esto es, $H' \subseteq S_0$. De lo anterior se concluye que $H' = S_0$.

El argumento anterior se aplica, sin modificación, al caso de los conjuntos de Borel. ▲

2. NUEVA CONSTRUCCION DE βX.

Definición 3.2.1. Una familia $\mathfrak{F} \subseteq n(X)$ se denomina un n-filtro en X si ella satisface las siguientes condiciones:

(i) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$

(ii) Si $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$

(iii) Si $N_1 \in \mathfrak{F}$, $N_2 \in n(X)$ con $N_1 \subset N_2$ entonces $N_2 \in \mathfrak{F}$.

Definición 3.2.2. Un ideal propio de C(X, $\mathbb{R}$) es un subconjunto I de C(X, $\mathbb{R}$) que satisface las siguientes condiciones:

(1) $\mathbb{O} \in I$, $(I \neq \emptyset)$

(2) Para todo f, g en I, f-g pertenece a I

(3) Para todo f en I, para todo g en C(X, $\mathbb{R}$), $f.g \in I$

(4) $1 \notin I$.

Ejemplo 3.2.1. Sea X = $\mathbb{R}$; considérese el ideal principal I, generada por i, en C($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$) donde i es la identidad sobre $\mathbb{R}$; entonces:

$$I = \langle i \rangle = \{ if : f(x) = x\, g(x) \text{ para algún } g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \}$$

es un ideal propio de C($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$) y n(I) es un n-filtro en C($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$).

Notación. Con $\mathfrak{Z}(X)$ y $\mathfrak{X}(X)$ denotaremos las siguientes familias de conjuntos.

$$\mathcal{J}(X) = \{ I \subseteq C(X, \mathbb{R}) : I \text{ es ideal propio} \}$$
$$\mathfrak{X}(X) = \{ \mathfrak{F} = n(X) : \text{ es un n-filtro} \}$$

Proposición 3.2.1. Si I es un ideal propio de $C(X, \mathbb{R})$ entonces:

(a) $\mathcal{J}(I) = \{ n(f) : f \in I \} \in \mathfrak{X}(X)$

(b) Si $\mathfrak{F}$ es un n-filtro en $C(X, \mathbb{R})$ entonces:

$\{ f : n(f) \in \mathfrak{F} \} \in \mathcal{J}(X)$.

Demostración. Directa utilizando las definiciones ver [3] Capítulo II. ▲

Observación 3.2.1. El análogo de la proposición 3.2.1. (a), en general, es falso al reemplazar $C(X, \mathbb{R})$ por $C^*(X, \mathbb{R})$. Ver contraejemplo en [3] Cap.II.

Observación 3.2.1. (a) Definimos la transformación

$$n : \mathcal{J}(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X)$$

por $n(I) = \{ n(f) : f \in I \}$. Se observa claramente por la proposición 3.2.1. (a) que $n(I) \in \mathfrak{X}(X)$. Análogamente definimos la transformación

$$\overleftarrow{n} : \mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$$

por $\overleftarrow{n}(\mathfrak{F}) = \{ f \in C(X, \mathbb{R}) : n(f) \in \mathfrak{F} \}$; igualmente se observa que $\overleftarrow{n}(\mathfrak{F}) \in \mathcal{J}(X)$ por la proposición 3.2.1. (b).

Se deduce, utilizando las definiciones anteriores, que existen transformaciones que tienen las propiedades siguientes:

$$\vec{n}[\overleftarrow{n}[\mathfrak{F}]] = \mathfrak{F} \quad \text{y} \quad \overleftarrow{n}[\vec{n}[I]] \supset I$$

Definición 3.2.3. Por un n-ultra-filtro entenderemos un n-filtro maximal; esto es, un n-filtro que no está contenido en ningún otro.

Notación. Con $\mathcal{M}(X)$ y $\mathcal{U}(X)$ denotaremos las siguientes familias:

$\mathcal{M}(X) = \{ I : I \text{ es ideal maximal de } C(X, \mathbb{R}) \}$

$\mathcal{U}(X) = \{ \mathcal{F}' : \mathcal{F}' \text{ es un n-ultra filtro sobre } X. \}$

Observación 3.2.1. (b) Las transformaciones que hemos definido en la observación 3.2.1. (a) podemos extender a los conjuntos $\mathcal{M}(X)$ y $\mathcal{U}(X)$ de la manera siguiente: $n : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$

$$I \longrightarrow n(I)$$

donde $n(I) = \{ n(f) : f \in I. \}$ Ahora demostraremos que $n(I)$ es un n-filtro maximal sobre X.

Ya sabemos que $n(I)$ es un n-filtro por observación 3.2.1. (a). Sea $\mathcal{F}'$ un n-filtro sobre X tal que $n(I) \subseteq \mathcal{F}'$, entonces

$\overleftarrow{n}[n(I)] \subseteq \overleftarrow{n}(\mathcal{F}')$, pero $I \subseteq \overleftarrow{n}[n(I)] \subseteq \overleftarrow{n}(\mathcal{F}')$

y como I es un ideal maximal, resulta que $I = \overleftarrow{n}(\mathcal{F}')$.

De aquí se obtiene que $\mathcal{F}' = n[\overleftarrow{n}(\mathcal{F}')] = n(I)$.

Análogamente, $\overleftarrow{n} : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$

$$\mathcal{F} \longrightarrow \overleftarrow{n}(\mathcal{F})$$

donde $\overleftarrow{n}(\mathcal{F}) = \{ f \in C(X, \mathbb{R}) : n(f) \in \mathcal{F} \}$. Ya sabemos que $\overleftarrow{n}(\mathcal{F})$ es un ideal propio a causa de la observación 3.2.1. (a), ahora demostraremos que es maximal.

Sea $\mathcal{J}$ un ideal tal que $\overleftarrow{n}(\mathcal{F}) = \mathcal{J}$, entonces $n[\overleftarrow{n}(\mathcal{F})] \subseteq n(\mathcal{J})$; luego por las propiedades anteriores

$\mathcal{J} \subseteq n(J)$, pero $\mathcal{J}$ es un n-filtro maximal, se tiene que $\mathcal{J} = n(J)$. De aquí resulta que $\overleftarrow{n}(\mathcal{J}) = \overleftarrow{n}[n(J)] \supset J$ pero como J es un ideal maximal, deducimos que $\overleftarrow{n}(\mathcal{J}) = J$.

Teorema 3.2.1. La aplicación $n : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ es biyectiva y su inversa es $\overleftarrow{n}$.

Demostración. $\overleftarrow{n}$ es surjectiva. Para todo $\mathcal{J}$ elemento de $\mathcal{U}(X)$ se tiene que $n[\overleftarrow{n}(\mathcal{J})] = \mathcal{J}$, donde $\overleftarrow{n}(\mathcal{J})$ es elemento de $\mathcal{M}(X)$.

$\overleftarrow{n}$ es injectiva. Basta considerar dos ideales maximales I e J; se demuestra fácilmente que si $n(I) = n(J)$, entonces $I = J$.

De lo anterior se concluye que n es biyectiva; además

$$I = (\overrightarrow{n})^{-1}\left[n(I)\right] = \overleftarrow{n}(J) \quad \text{con} \quad n(I) = J.$$

donde $\overleftarrow{n} : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ tal que para cada $\mathcal{J} \in \mathcal{U}(X)$ se tiene que $\overleftarrow{n}(\mathcal{J})$ es un elemento de $\mathcal{M}(X)$. ▲

Proposición 3.2.2. Si $\mathcal{J}$ es un n-ultra filtro sobre X, I un ideal maximal de $C(X, \mathbb{R})$ entonces

$\overrightarrow{n}[\overleftarrow{n}(\mathcal{J})] = \mathcal{J}$; $I \subseteq \overleftarrow{n}[\overrightarrow{n}(I)]$

Demostración. Inmediata. ▲

Observación 3.2.2. De las observaciones anteriores se deduce que $n \circ \overleftarrow{n} = i_{\mathfrak{X}(X)}$.

En general, $\overleftarrow{n} \circ n \neq i_{J(X)}$ ver, [3].

Definición 3.2.4. Sea T un espacio completamente regular, X un sub-espacio denso en T y $\mathcal{J}$ un n-filtro (o filtro) sobre X; $p \in T$ es un punto adherente a $\mathcal{J}$ en T si toda vecindad de p en T intercepta cada miembro de $\mathcal{F}$; es decir,

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad \forall V \in \mathcal{V}(p,T), \; V \cap F \neq \emptyset.$$

p es un punto límite de $\mathcal{F}$ en T si toda vecindad V de p en T contiene un miembro de $\mathcal{F}$; esto es:

$$\forall V \in \mathcal{V}(p,T) \quad \exists F \in \mathcal{F} \; : F \subseteq V.$$

Lema 3.2.1. Si X es denso en T, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Toda aplicación continua f de X en un compacto Y posee una extensión $\tilde{f}$ continua de T en Y.

(2) X es C^*-inmerso en T.

(3) Cualquier par de núcleos disjuntos en X tienen clausura disjunta en T.

(4) Para todo par de núcleos N_1, N_2 en X $cl_T(N_1 \cap N_2) = cl_T N_1 \cap cl_T N_2$

(5) Todo punto de T es límite de un único n-ultra filtro sobre X.

Demostración. (Véase [3], cap. VI).

Teorema 3.2.2. (de Compactificación de Stone-Čech).

Todo espacio completamente regular X admite una compactificación βX con las siguientes propiedades:

(I) (Stone). Toda aplicación continua f definida en X con valores en un compacto Y admite una extensión continua $\tilde{f}$ de βX en Y ($\tilde{f}$ se denomina la extensión de Stone de f).

(II) (Stone-Čech). Toda función f en $C^*(X,\mathbb{R})$ tiene una extensión a una función f^β en $C(\beta X,\mathbb{R})$

(III) (Čech). Para todo par de núcleos disjuntos en X, sus clausuras en βX son disjuntas.

(IV) Dado dos núcleos cualesquiera N_1, N_2 de X, se tiene:

$$cl_{\beta X}(N_1 \cap N_2) = cl_{\beta X} N_1 \cap cl_{\beta X} N_2.$$

(V) n-filtros distintos en X tienen límites distintos en βX; además, βX es único en el sentido siguiente: Si T es una compactificación de X que satisface una cualesquiera de las propiedades de (I) a (IV) entonces existe un homeomorfismo entre βX y T que deja fijo a X.

Demostración. Resumida. Unicidad de βX en el sentido dado. Del lema anterior, sabemos que si T satisface una cualesquiera de las propiedades de (I) a (V), entonces satisface todas ellas. Considérese la aplicación id_X : $X \longrightarrow X \subseteq T$; ella es continua en el espacio compacto. Como βX satisface (I) entonces existe $\tilde{f}$: $\beta X \dashrightarrow T$ continua tal que $\tilde{f}/X = id_X$; además, la identidad es una aplicación continua de X en βX y, como T satisface (I), entonces admite una extensión $\hat{f} : T \longrightarrow \beta X$ continua.

Demostremos ahora que $\hat{f} \circ \tilde{f} = id_{\beta X}$, $\tilde{f} \circ \hat{f} = id_T$. La restricción $\hat{f} \circ \tilde{f}/_X$ coincide con la aplicación $id_X : X \longrightarrow X$ y, como X es denso en βX entonces $\hat{f} \circ \tilde{f} = id_{\beta X}$. Analogamente, como $\tilde{f} \circ \hat{f}/X$ coincide con $id_X : X \longrightarrow X$ y X es denso en T, entonces $\tilde{f} \circ \hat{f} = id_T$; por lo tanto, $\tilde{f}$ es un homeomorfismo con inverso $\hat{f}$.

<u>Demostración del (I) al (V).</u>

Haciendo $T = \beta X$ en el lema 3.2.1., obtenemos la validez de I), II), III), IV); además, todo punto de βX es límite de un único n-ultra-filtro en X; de aquí se deduce que dos n-filtros distintos en X tienen límites distintos en βX.

<u>Construcción de βX.</u>

Sea $\mathfrak{X}(X) = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ es un n-filtro sobre $X\}$, $\mathcal{U}_p = \{N \in n(X) : p \in N\}$ tal que $p = \lim \mathcal{U}_p$ y $\mathfrak{X}_X(F)$ el subconjunto de $\mathfrak{X}(X)$ que consiste de todos los n-ultra-filtros fijos; sabemos que existe una biyección entre $\mathfrak{X}_X(F)$ y X, por consiguiente como a cada $p \in X$ se le asocia un único n-ultra-filtro fijo $\mathcal{U}_p$, entonces $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in X}$ coincide con $\mathfrak{X}_X(F)$.

Ahora queremos describir $\mathfrak{X}(X)$ como una familia indiciada con un conjunto que sea extensión de X.Los puntos βX son definidos como los elementos del conjunto de índices, extensión de X; además, se representa la familia de todos los ultrafiltros sobre X con límite p por $\{\mathcal{U}^p\}_{p \in \beta X}$; en caso que $p \in X$, entonces $\mathcal{U}^p$ coincide con $\mathcal{U}_p$. Introduzcamos una topología en βX de manera que $p \in \beta X$ sea límite del n-ultra-filtro $\mathcal{U}^p$; definiendo $\bar{N} = \{p \in \beta X : N \in \mathcal{U}^p\}$, βX se hace un espacio topológico al demostrar que la familia $\mathcal{C}_\beta = \{\bar{N} : N \in n(X)\}$ es una base de cerrados para una topología en βX; lo anterior, es una consecuencia de la demostración de los siguientes puntos a saber: (a) $\bar{X} = \beta X$, (b) X es subespacio de βX y (c) X es denso en βX y βX es compacto. Para mayores detalles, ver [3] cap. VI.

Con el objeto de introducir algunos ejemplos de Compactificación, consideramos lo siguiente:

Lema 3.2.2. Sea S' un subespacio de X no necesariamente denso entonces:

(1) S' es C^*-inmerso en X si y solamente si $cl_{\beta X} S' = \beta S'$.

(2) Todo conjunto compacto en X es C^*-inmerso en X.

(3) Si S' es un abierto y cerrado en X entonces $cl_{\beta X} S'$ y $cl_{\beta X}(X \setminus S')$ son conjuntos abiertos y complementarios en βX.

(4) Un punto aislado en X es aislado en βX; y, X es abier-

to en βX si y solamente si X es localmente compacto. Ver demostración [3] Cap. VI.

Ejemplo 3.2.1. (a) Compactificación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Sabemos que $\mathbb{N}$ es un abierto de $\beta\mathbb{N}$ por ser localmente compacto; además, por el lema 3.2.2. (3) si D es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces $cl_{\beta\mathbb{N}} D$ es un abierto en $\beta\mathbb{N}$. Sea N_1 el conjunto de todos los enteros positivos impares entonces N_1 es C^*-inmerso en $\mathbb{N}$, luego por el lema 3.2.2. (1) $cl_{\beta\mathbb{N}} N_1 = \beta N_1$; de igual manera, sea N_2 el conjunto de todos los enteros positivos pares, entonces $cl_{\beta\mathbb{N}} N_2 = \beta N_2$, $\beta\mathbb{N} = \beta N_1 \cup \beta N_2$ y $\beta N_1 \cap \beta N_2 = \emptyset$.

Ejemplo 3.2.1. (b) Compactificación del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Resulta como consecuencia inmediata del hecho que toda aplicación f de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$ en $\beta\mathbb{Q}$ es continua, luego tiene una extensión de Stone $\tilde{f}$ de $\beta\mathbb{N}$ sobre $\beta\mathbb{Q}$

Ejemplo 3.2.1. (c) Compactificación del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Sea $\mathbb{R}^+$ el subespacio de todos los números reales no negativos y $\mathbb{R}^-$ el subespacio de los números reales no positivos; como la clausura de un conjunto conexo es siempre conexo, entonces $\beta\mathbb{R}^+$,

$\beta\mathbb{R}^-$, $\beta\mathbb{R}$ son conexos; además $\mathbb{R}^+$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^-$ luego $\beta\mathbb{R}^+$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{R}^-$; por consiguiente, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^+$ es homeomorfo a $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^-$, por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$ son homeomorfos. Como $\mathbb{R}^+$ es localmente compacto, entonces por el Lema 3.2.2. (4) se tiene que $\mathbb{R}^+$ es abierto en $\beta\mathbb{R}^+$ por consiguiente, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^+ - \mathbb{R}^+ = \beta\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}^+$ es un cerrado en $\beta\mathbb{R}^+$ luego, es compacto. Finalmente para

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

existe

$$\tilde{f} : \beta\mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

y tal que $\tilde{f}\ (\beta\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}) = \tilde{f}(\beta\mathbb{R}) - \tilde{f}(\mathbb{R}) = f(\beta\mathbb{R}) \setminus f(\mathbb{R}) =$

$$= \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left[0, \frac{\pi}{2}\right[= \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

y $\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cap \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} = \emptyset$ implica que $f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) \cap f^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \emptyset$.

3. TEOREMAS DE SEPARACION PARA NUCLEOS Y CONJUNTOS UNITARIOS.

Los teoremas desarrollados en esta sección generalizarán el resultado de Čech dado en el teorema 3.2.2. (IV).

<u>Lema</u> 3.3.1. Si A es el conjunto unitario de $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ entonces existe $h \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ cuyos valores están contenidos en $[0,1]$, tal que $A = \mathfrak{C}(h)$.

<u>Demostración</u>. Sea $g(x) = \max\,(f(x),\ 0) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } 0 > f(x) \end{cases}$

definamos $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = g(x)$ si $(g(x) \leqslant 1)$ y $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ si $(g(x) > 1)$; h, así definida, satisface las condiciones que se requieren puesto que para todo $x \in X$

$$h(x) \leqslant 1 \quad \text{si} \quad g(x) \leqslant 1$$

$$h(x) < 1 \quad \text{si} \quad g(x) > 1$$

luego $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$; además, $n(g)$ $n(h)$ luego h es a soporte acotado $h^{-1}(x) = \{x \in X : h(x) = 1\} = \{x \in X : g(x) = 1\} = \{x \in X : f(x) = 1\} = A$; pero $A = f^{-1}(1)$; por lo tanto, $A = \mathfrak{C}(h)$. $\triangle$

<u>Lema</u> 3.3.2. Cada punto de un espacio localmente compacto posee un sistema fundamental de vecindades compactas y G_δ.

<u>Demostración</u>. Sea $x \in E$ un punto de un espacio localmente compacto; entonces dada una vecindad abierta V del punto x en E existe una vecindad compacta

U de x en E tal que $U \subseteq V$. Considérese ahora el compactificado $\hat{E}$ de E mediante el punto al infinito de Alexandroff; en vista de que $\hat{E}$ es normal y U, V^c son dos cerrados disjuntos por el Lema de Urysohn existe $f\colon \hat{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que

$$\begin{array}{llll} (a) & 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 & & (x \in E) \\ (b) & f(x) = 1 & & (x \in U) \\ (c) & f(x) = 0 & & (x \in V^c) \end{array}$$

Como $\mathbb{E}(f)$ es un cerrado en $\hat{E}$, se tiene que es una vecindad compacta; por (b) y (c) se tienen que $U \subseteq f^{-1}(1)$ y $V^c \subseteq f^{-1}(0)$ luego U, V^c son vecindades compactas y $\mathbb{E}(f)$ es un G_δ; finalmente, $U \cap V^c = \emptyset$ si y solamente si $U \subseteq V$, por lo tanto $\mathbb{E}(f) \subseteq V$. ▲

Lema 3.3.3. En un espacio completamente regular, X con un sistema acotante $\mathcal{B}$, los núcleos de $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ forman una base para los conjuntos cerrados.

Demostración. Considérese en X un conjunto cerrado F y $x \in X \setminus F$; por el teorema 2.2.1. (c) existe $V' \in \mathcal{V}(x_0, \mathcal{T})$ acotada y abierta tal que $V' \cap (X-F) = V \subseteq V'$ donde V es abierta y acotada, además, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ para $x \notin V$; luego $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$, $n(f) \supseteq F$; $x_0 \notin n(f)$

$n(f) = F$

Teorema 3.3.1. Sean A y B dos conjuntos unitarios disjuntos de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ entonces existe un miembro de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ cuyo valor es cero sobre A y uno sobre B.

Demostración. De la hipótesis del teorema, podemos hacer las siguientes deducciones a saber. Existe $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y K un conjunto acotado que posee las siguientes características:

(a) El rango de f está dentro de $[0,1]$.

Es consecuencia inmediata del lema 3.3.1.

(b) A es el conjunto unitario de $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

En efecto, $A = \{ x \in X : f(x) = 1 \} = f^{-1}(1)$.

(c) $f = 0$ sobre el complemento de K.

Es una consecuencia de la definición 2.1.1., puesto que dado A acotado existe K acotado y $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ si $x \in A$ y $f(x) = 0$ si $x \notin K$.

Como A y B son acotados, por el teorema 2.1.1., se tiene que $A \cup B$ es acotado; podemos asumir, sin pérdida de generalidad que: $A \cup B \subseteq K$. En este caso se observa claramente que $A \subseteq K$ y $f(x) = 1$ para cada x elemento de A y, $f(x) = 0$ para cada x elemento del complemento de K.

Considérese la función continua $f_1 = 1 - f$; es claro que el rango de f_1 está contenido en el intervalo cerrado $[0,1]$ y $A = n(f_1)$; además, $f_1(x) = 1$ para cada $x \in K$ donde K es un conjunto acotado luego por la definición 2.2.1. (B-3) y por el lema 3.3.1. existe K_1 acotado y $h \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que

$$h(x) = 1, \quad (x \in K)$$
$$h(x) = 0, \quad (x \notin K_1)$$

y $K \subseteq K_1$, $h(x) \in [0,1]$.

Considérese ahora la función $\varphi = f_1 . h$; como $A = n(f_1)$, es claro que φ se anula sobre A y sobre el complemento de K_1 por ser h nulo en ésta región; finalmente, sobre $K \setminus A$, $0 < \varphi(x) \leqslant 1$ y $\varphi > 0$ sobre B. Considérese ahora la función continua g_1 cuyo rango está dentro $[0,1]$ y B su conjunto unitario; la función $g = 1 - g_1$ tiene por núcleo el conjunto B. Finalmente, la función:

$$\psi = \frac{\varphi}{\varphi + g}$$

está bien definida puesto que A y B son disjuntos, es continua sobre X,

$$\psi(x) = 0 \qquad (x \in A)$$
$$\psi(x) = 1 \qquad (x \in B)$$

y se anula en el complemento de K_1. ▲

<u>Teorema</u> 3.3.2. (<u>GOULD</u>). Si A y B son núcleos de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y K un conjunto unitario de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tales que $A \cap K$ y $B \cap K$ son disjuntos entonces:

$$\operatorname{cl}_{\mathcal{L}(X)} (A \cap K) \bigcap \operatorname{cl}_{\mathcal{L}(X)} (B \cap K) = \emptyset$$

Demostración. Mostraremos, en primer lugar, que $A \cap K$ es un conjunto unitario de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

Sea $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $A = n(f)$ y $g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que g se anula en el complemento de un conjunto acotado, digamos C, además K es el conjunto unitario de g; por el lema 3.3.1. podemos asumir que cada una de estas funciones tienen como rango $[0,1]$. Además, la función $(1-f)g$ tiene como conjunto unitario a $A \cap K$, es continua y se anula en el complemento de C. De manera similar, $B \cap K$ es un conjunto unitario de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ luego $A \cap K$ y $B \cap K$ son conjuntos unitarios en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ disjuntos y, por el lema 3.3.1, existe $h \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que

$$h(x) = 0 \qquad (x \in A \cap K)$$

$$h(x) = 1 \qquad (x \in B \cap K)$$

Como X es completamente regular, por el teorema 2.3.2. (d) existe $\tilde{h}$ extensión de h, definida en $\mathcal{L}(X)$ con valores en $\mathbb{R}^*$ tales que $n(h)$ contiene a $cl_{\mathcal{L}(X)}(A \cap K)$ y $\mathbb{E}(\tilde{h})$ contiene a $cl_{\mathcal{L}(X)}(B \cap K)$; como $n(\tilde{h}) \cap \mathbb{E}(\tilde{h}) = \emptyset$ entonces

$$cl_{\mathcal{L}(X)}(A \cap K) \bigcap cl_{\mathcal{L}(X)}(B \cap K) = \emptyset. \quad \blacktriangle$$

Teorema 3.3.3. (GOULD). Si $f, g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y si $a \in \mathcal{L}(X)$ es tal que $a \in cl_{\mathcal{L}(X)} n(f)$ y $a \in cl_{\mathcal{L}(X)} n(g)$ entonces $a \in cl_{\mathcal{L}(X)} n(f) \bigcap cl_{\mathcal{L}(X)} n(g))$.

Demostración. Supongamos que $a \notin cl_{\mathcal{L}(X)}(n(f) \cap n(g))$, entonces por el teorema 2.3.2. sabemos que $\mathcal{L}(X)$ es localmente compacto, luego por el lema 3.3.2. existe una vecindad V y G_δ de $\underline{a}$ en $\mathcal{L}(X)$ tal que $V \cap n(f) \cap n(g) = \emptyset$; ahora bien, por el teorema 3.1.2. la traza K de V sobre X es el conjunto unitario de alguna función $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$; como $K \cap n(f) \cap n(g) = \emptyset$ entonces $K \cap n(f)$ y $K \cap n(g)$ son disjuntos; por lo tanto, por el teorema 3.3.2,

$$\mathrm{cl}_X (K \cap n(f)) \cap \mathrm{cl}_X (K \cap n(g)) = \emptyset$$

de donde

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} (K \cap n(f)) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} (K \cap n(g)) = \emptyset$$

lo cual es una contradicción. ▲

4. TEOREMAS SOBRE IDEALES Y n-FILTROS.

Notación. De ahora en adelante, el anillo $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ será denotada por $\mathcal{R}$ por ser conveniente. Si I es un ideal propio de $\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{B}(I)$ es la familia de todos los núcleos con $f \in I$.

Teorema 3.4.1. (GOULD). (a) Si I es un ideal propio de $\mathcal{R} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, la familia de núcleos $\mathcal{B}(I)$ posee las siguientes propiedades:

(i) Si $N_1, N_2 \in \mathcal{B}(I)$ entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{B}(I)$

(ii) Si $N_1 \in \mathcal{B}(I)$, $N_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ y $N_2 \supseteq N_1$ entonces $N_2 \in \mathcal{B}(I)$

(iii) Ningún miembro de $\mathcal{B}(I)$ es vacío.

(b) Si $\mathcal{B}$ es esencial en X entonces las propiedades (i), (ii), (iii) también se cumplen en $\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

Si $\mathcal{B}$ es degenerado en X entonces $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ no verifica (iii); esto es, $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$.

Demostración. Para la demostración de la parte (a), (véase [3] capítulo II).

Si $\mathcal{B}$ es esencial la demostración de (i), (ii) resulta igual que la parte (a); para demostrar (iii) basta considerar un $n(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ con $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; esto significa que existe A acotado tal que $A^c \subseteq n(f)$ luego $X \setminus n(f) \subseteq A \subseteq B_i$; por ser $\mathcal{B}$ esencial, X es no acotado luego $n(f) \neq \emptyset$ puesto que de serlo, tendríamos una contradicción con la hipotesis; luego $\emptyset$ no es elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$.

De lo anterior se concluye que $\mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ es un n-filtro en X.

Si $\mathcal{B}$ es degenerado, la demostración de (i) e (ii) resulta igual a la parte (a); sin embargo, $\mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ no satisface (iii); esto es, $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$, es decir, $\emptyset = n(\mathbb{1}) \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$; pero lo anterior equivale a $\mathbb{1} \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ lo cual es correcto puesto que existe $B_i \in \mathcal{B}$ con $A \subseteq B_i$: $\mathbb{1}(x) = 0$, $\forall x \in \emptyset$, y $X \subseteq B_i$.

Definición 3.4.1. (a) Una subfamilia de $\mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ que satisface las condiciones del teorema 3.4.1. se denomina un N-filtro sobre X. Si la subfamilia es propia de $\mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ entonces el N-filtro se denomina N-filtro propio. El N-filtro $\mathfrak{B}(I)$ se dice generada por el ideal I.

Del teorema 3.4.1. deducimos:

(1) Si el sistema acotante $\mathcal{B}$ es degenerada, entonces todos los ideales propios de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ generan N-filtros propios; esto se debe al hecho que $\emptyset \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$ y, por lo tanto, si un miembro f de I posee un núcleo vacío entonces su inverso $\frac{1}{f}$ existe y es miembro de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ y por lo tanto, el ideal no es propio.

(2) No es evidente demostrar que si el sistema acotante $\mathcal{B}$ es esencial los N-filtros generados por un ideal propio son siempre propios; nos dedicaremos a realizar ésta demostración en varias etapas.

Lema 3.4.1. Si $\mathfrak{B}$ es un N-filtro, la familia $I(\mathfrak{B})$ de miembros de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ cuyos núcleos son miembros de $\mathfrak{B}$ es un ideal.

Si $\mathcal{B}$ es esencial, este ideal puede ser todo $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$.

$I(\mathfrak{B}) = \{f \in \mathfrak{K}(X, \mathbb{R}) : n(f) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))\}$

Demostración. La primera parte de este lema es la proposición 3.2.1.

Para la demostración de la segunda parte, observamos que si $\mathcal{B}$ es esencial, $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico localmente compacto pero no compacto, $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos compactos de X y $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$ el N-filtro de X entonces:

$I(\mathfrak{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})) = \{f \in \mathfrak{K}(X, \mathbb{R}) / N(f) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))\}$

por consiguiente, es inmediato que $I(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ entonces $N(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$ luego $f \in I(\mathcal{B})$; esto es, $\mathcal{R}(X, \mathbb{R}) \subseteq I(\mathcal{B})$. De esta manera concluimos que $I(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

<u>Definición</u> 3.4.2. (a) El ideal $I(\mathcal{B})$ del lema anterior se denomina <u>ideal generado por el N-filtro $\mathcal{B}$</u>.

(b) Cualquier ideal generado por algún N-filtro se denomina un <u>N-ideal</u>.

<u>Lema</u> 3.4.2. Si $\mathcal{B}$ es esencial, $\mathcal{B}$ un N-filtro, $\mathcal{B}$ un N-filtro propio y N_0 un miembro de $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{B}$ entonces la familia de miembros de $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ que conjuntos del tipo $N_0 \cap N$ con $N \in \mathcal{B}$ es un N-filtro.

$$\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R})) = \{M \in \mathcal{B}(\mathcal{R}) / \exists\, N \in \mathcal{B},\ N_0 \cap N \subseteq M\}$$

<u>Demostración</u>. Sean $M_1, M_2 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$; entonces:

$$M_1 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists\, N_1 \in \mathcal{B} : N_0 \cap N_1 \subseteq M_1$$

$$M_2 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists\, N_2 \in \mathcal{B} : N_0 \cap N_2 \subseteq M_2$$

luego, $(N_0 \cap N_1) \cap (N_0 \cap N_2) = N_0 \cap (N_1 \cap N_2) \subseteq M_1 \cap N_2 \Longrightarrow$ $M_1 \cap M_2 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$.

Sean $M_1 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$, $M_2 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ con $M_1 \subseteq M_2$

$M_1 \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists N_1 \in \mathcal{B} : N_0 \cap N_1 \subseteq M_1 \subseteq M_2$; esto es $\exists N_1 \in \mathcal{B} : N_0 \cap N_1 \subseteq M_2$ lo cual implica que $M_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$.

Supongamos que $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ entonces existe $N \in \mathcal{B}$ tal que $N_0 \cap N = \emptyset$; pueo $N, N_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ implica que

$\emptyset = N_0 \cap N \in \mathcal{B}(\to\leftarrow)$; luego $\emptyset \notin \mathcal{B}(\mathcal{R})$ y así, $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ es un N-filtro. ▲

Definición 3.4.3. Si $\mathcal{B}$ es esencial, el N-filtro construído en el lema anterior se denomina N-filtro generado por N_0 y $\mathcal{B}$.

Lema 3.4.3. (a) Sea X un conjunto distinto del vacío, $\mathcal{F}$ un filtro (resp. n-filtro) en X y A un conjunto distinto del vacío que no pertenece a $\mathcal{F}$. Si A es una parte de X tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \emptyset$ entonces existe

$$(\mathcal{F} : A) = \{ G \subseteq X \,/\, \exists F \in \mathcal{F} : A \cap F \subseteq G \}$$

filtro (n-filtro) generado por el filtro $\mathcal{F}$ (resp. n-filtro) y el conjunto A.

Lema 3.4.3. (b) Si $\mathcal{B}$ es esencial, I ideal propio de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, f_0 no es elemento del ideal propio I; si I' es el ideal generado por $f_0 \in I$ entonces el N-filtro generado por I' es igual al N-filtro generado por $N(f_0)$ y $\mathcal{B}(I)$.

Demostración. Existencia del generado; esto es, demostraremos que $\forall\, h \in I$, $N(f_0) \cap N(h) \neq \emptyset$. En vista de que $f_0 \in (X, \mathbb{R})$, existe $B_i \in \mathcal{B}$, existe $A_1 \subseteq B_i$ tal que $A_1^c \subseteq N(f_0)$ (1). Si $h \in I$, como $I \subseteq \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ entonces $h \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, por lo tanto, existe $B_j \in \mathcal{B}$ tal que

$A_2^c \subseteq B_j$ con $A_2^c \subseteq N(h)$; (2) pero $A_1 \cup A_2$ es acotado y $\mathcal{B}$ es esencial luego:

$\emptyset \neq X \setminus (A_1 \cup A_2) = A_1^c \cap A_2^c = N(f_0) \cap N(h)$; por lo tanto, $\forall\ h \in I$, $N(f_0) \cap N(h) \neq \emptyset$ lo cual por el Lema 3.4.3. (a), nos asegura la existencia del N-filtro generado por $N(f_0)$ y $\mathcal{B}(I)$.

Sea:

$$H = \{ N \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R})) / \exists h \in I : N(h) \cap N(f_0) \subseteq N \}$$

el N-filtro generado por $N(f_0)$ y (I); demostremos que $H = \mathcal{B}(I)$.

Sea $N \in H$ entonces $\exists\ h \in I$: $N(f_0) \cap N(h) \subseteq N$; pero $f_0^2 + h^2 \in I$ implica que $N(f_0) \cap N(h) = N(f_0^2 + h^2) \in \mathcal{B}(I)$; ahora bien, como $N(f_0) \cap N(h) \in \mathcal{B}(I)$ y $N(f_0) \cap N(h) \subseteq N$ implica que $N \in \mathcal{B}(I)$; esto es, $H \subseteq \mathcal{B}(I)$.

Recíprocamente, sea $N(h) \in \mathcal{B}(I')$, entonces $h \in I'$; pero $h \in I' \Longrightarrow h = g + l \cdot f_0$ donde $g \in I$ y $l \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; esto significa que $N(f_0) \cap N(g) \subseteq N(h)$; esto es, $N(h) \in H$, es decir, $\mathcal{B}(I') \subseteq H$, concluyendo así que $H = \mathcal{B}(I')$. ▲

Lema 3.4.4. Sea E un espacio topológico localmente compacto, $K \subseteq E$ compacto y G_δ. Si f es una función definida en K con valores en $[0, +\infty]$, contínua con la topología inducida por E sobre K entonces existe $\bar{f}$ extensión de la función f sobre E tal que:

(a) $\bar{f}$ es continua sobre E.

(b) $\bar{f}$ no toma el valor infinito sobre K^c.

Demostración. Sabemos de la topología general, que $[0, 1]$ y $[0, +\infty]$ son homeomorfos; este hecho nos permite hacer esta demostración con el espacio imagen $[0, 1]$ en lugar de $[0, +\infty]$.

Como E es un espacio localmente compacto, él esta inmerso en el compacto $\hat{E}$ (compactificado de Alexandroff); además, por ser K un compacto y G_δ de E, estas propiedades se conservan en $\hat{E}$. En vista de que $\hat{E}$ es un compacto, él es normal luego por Urysohn, existe una función continua $\hat{f}$ extensión de f definida en $\hat{E}$ con valores en $[0, 1]$. Definamos una función troncadura h sobre $\hat{E}$ con valores en $[0, 1]$ y tal que $h^{-1}(1) = K$, compacto y G_δ de E; esto nos permite construir una nueva función $\bar{f} = \hat{f} \cdot h$ continua que es una extensión de f y satisface las condiciones requeridas.

Teorema 3.4.2. (GOULD). Si I es un ideal propio de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ entonces existe un miembro de $\mathcal{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$ que no es miembro de $\mathcal{B}(I)$. ($\mathcal{B}(I)$ es un N-filtro propio).

Demostración. Se desea demostrar que si I es un ideal propio de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ entonces $\mathcal{B}(I)$ es un ideal propio de $\mathcal{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$; esto es, existe un miembro de $\mathcal{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$ que no es miembro de $\mathcal{B}(I)$. Para hacer esto, demostraremos que es falsa la siguiente afirmación:
Todo miembro de $\mathcal{B}(\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}))$ es un miembro de $\mathcal{B}(I)$; es decir, $I = \mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$.

Sea $f_0 \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ donde $f_0 \neq \mathbb{0}$; entonces existe $B_i \in \mathcal{B}$ y $A \subseteq B_i$ tal que $f_0(x) = 0$ para todo $x \in A^c$; es decir, $A^c \subseteq N(f_0)$ luego $X \setminus N(f_0) \subseteq A \subseteq B_i$, por lo tanto, $X \setminus N(f_0)$ es un conjunto acotado; además, por la definición de sistema acotante, dado $B_i \in \mathcal{B}$ existen $B_j \in \mathcal{B}$, $h \in C(X, \mathbb{R})$; $\mathbb{0} \leqslant h \leqslant \mathbb{1}$ tal que $B_i \subseteq E(h)$, $B_j^c \subseteq N(h)$ por lo tanto, $X \setminus N(f_0) \subseteq B_i \subseteq E(h)$; además como suponemos que $\mathcal{B}(I) = \mathcal{B}(\mathcal{R}(X, \mathbb{R}))$, dado h, debe existir un g_0 tal que $n(g_0) = n(h)$ y, por ser I un ideal entonces $g = g_0^2 \in I$, por lo tanto, $n(g) = n(h)$ g es positiva sobre $X \setminus N(h)$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{E}(h)$. Considérese ahora dos extensiones $\bar{g}$ y $\bar{h}$ de g y h respectivamente sobre $\mathcal{L}(X)$; observamos que la restricción de $\bar{g}$ sobre $\mathbb{E}(\bar{h})$ es continua y no negativa. Definamos:

$$f(x) = \frac{1}{\bar{g}(x)}, \quad (x \in \mathbb{E}(\bar{h}), \quad 0 < \bar{g}(x) < +\infty)$$

$$f(x) = +\infty, \quad (x \in \mathbb{E}(\bar{h}), \quad \bar{g}(x) = 0)$$

$$f(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{E}(\bar{h}), \quad \bar{g}(x) = +\infty)$$

entonces f es una función continua y no negativa definida en $\mathbb{E}(h)$ con valores en $\mathbb{R}$; además, $\mathbb{E}(\bar{h})$ es un G_δ y cerrado en $\mathcal{L}(X)$ que es localmente compacto, luego un sistema acotante $\mathcal{B}$ son los subconjuntos compactos de $\mathcal{L}(X)$; de lo anterior se deduce que $\mathbb{E}(\bar{h})$ es un cerrado en un compacto, luego compacto. Del lema 3.4.4. se tiene que existe $\bar{f}$ extensión de f a $\mathcal{L}(X)$ que satisface las condiciones mencionadas del lema. Si consideramos ahora la función contracción f_1 de $\bar{f}$ a X, ella posee las siguientes propiedades:

(a) f_1 es continua y de valor finito.

(b) $f_1(x)\ g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{E}(h)$ por lo tanto, para todo $x \in X \setminus N(f_0)$.

Finalmente, la función $h \cdot f_1 = \hat{f}$ posee las propiedades (a) y (b) que han sido satisfecho por f_1; en efecto, es claro que $\hat{f}$ es continua y de valor finito cumpliéndose así (a); además,

$\hat{f}(x)\ g(x) = h(x) \cdot f_1(x)\ g(x) = f_1(x) \cdot g(x) \qquad (x \in \mathbb{E}(h))$

Como $\hat{f}$ y h son elementos de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ entonces $\hat{f} \in \mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$.

Como $g \in I$, el producto $\varphi = g \cdot \hat{f}$ es también un elemento de I; demostremos que ahora $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in X$: $f_0(x) \neq 0$. En efecto, $f_0(x) \neq 0$ si y solamente si $x \in X \setminus N(f_0) \subseteq \mathbb{E}(h)$ por lo tanto, $f_0(x) \neq 0$ implica que $x \in \mathbb{E}(h)$, lo cual tiene dos implicaciones a saber:

(i) $h(x) = 1$; (ii) $f_1(x) \cdot g(x) = 1$; ahora bien,

$$\varphi(x) = g(x) \cdot \hat{f}(x) = g(x)\ h(x) \cdot f_1(x) = g(x) \cdot h(x) = 1.$$

Además, $\varphi \in I$ luego $f_0 \cdot \varphi \in I$; pero $f_0 \cdot \varphi = f_0$ si y solamente si $f_0 \in I$; en conclusión, para todo $f_0 \in \mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ se tiene que $f_0 \in I$, de donde $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R}) \subseteq I$; pero I es un ideal propio de $\mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$ lo cual significa que $I = \mathfrak{K}(X, \mathbb{R})$. De lo anterior se deduce que como $\varphi = \mathbb{1}$ cuando $f_0 \neq \mathbb{0}$ entonces por (b) $f_0 \cdot \varphi = f_0 \in I$ ($\rightarrow\leftarrow$).

El teorema que acabamos de demostrar, nos permite establecer algunas propiedades entre ideales maximales y N-filtros.

<u>Teorema</u> 3.4.3. Todo ideal maximal es un N-ideal.

<u>Demostración</u>. De la definición de ideal maximal se sabe que todo ideal maximal es un ideal propio; además por el teorema 3.4.2. si M es el ideal propio antes mencionado, entonces $\mathfrak{B}(M)$ es un N-filtro propio de $\mathfrak{B}(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}))$. Si M' es el N-ideal generado por N-filtro $\mathfrak{B}(M)$ entonces es obvio que $M \subseteq M'$ donde M' es propio porque N-filtros propios generan N-ideales propios; pero recordemos, que M es ideal maximal, por lo tanto, $M = M'$. $\blacktriangle$

<u>Definición</u> 3.4.4. Un N-filtro propio se dice <u>maximal</u> en $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ si y solamente si no está propiamente contenido en otro N-filtro propio.

<u>Teorema</u> 3.4.4. Un N-filtro propio $\mathfrak{B}$ es maximal en $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ si y solamente si o bien

(a) Dado un miembro cualesquiera A de $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ que no es miembro de $\mathfrak{B}$ y dado un miembro cualesquiera B de $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ existe un miembro C de $\mathfrak{B}$ tal que $A \cap C \subseteq B$.

o bien

(b) Si A es un miembro de $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ que no es miembro de $\mathcal{B}$, el N-filtro generado por A y $\mathcal{B}$ es $\mathcal{B}(\mathcal{R})$.

<u>Demostración</u>. Se deduce fácilmente del Lema 3.4.2. utilizando las definiciones. ▲

<u>Teorema</u> 3.4.5. El N-filtro generado por un ideal maximal M de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es maximal. Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es un N-filtro maximal, el genera un ideal maximal.

<u>Demostración</u>. Como M es un ideal maximal, considérese A y B definido de la misma manera que el teorema 3.4.4. y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$. Sean f, g $\in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ de manera que $N(f) = A$ y $N(g) = B$; además, existe h en M y $\lambda \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $g = \lambda f + h$; además, por la propiedad 1.1.1, $N(f) \cap N(g) \subseteq N(\lambda f + h) = N(g)$; es decir, $A \cap C \subseteq B$ donde $B = N(h)$; del teorema anterior, se concluye la demostración.

Recíprocamente sea $\mathcal{B}$ el N-filtro maximal y M el ideal generado por $\mathcal{B}$; es claro que $\mathcal{B}$ es propio, puesto que M es propio. Sea $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ donde $f \notin M$; entonces $N(f) \notin \mathcal{B}$, por causa del lema 3.4.3. sabemos que si M' es el ideal generado por f y M; y, $\mathcal{B}'$ es el N-filtro generado por N(f) y $\mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(M')$ y, por ser maximal, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ por lo tanto, $M' = \mathcal{R}$ en virtud del teorema 3.4.2. ▲

5. CARACTERIZACION DE IDEALES FIJOS Y LIBRES.

En esta sección, generalizaremos algunos resultados de [3].

Definición 3.5.1. Un ideal maximal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es fijo si los miembros del N-filtro correspondiente, poseen intersección no vacía. Se dice libre si la intersección es vacía.

Teorema 3.5.1. (HEWITT). Si $p \in X$, la familia M_p de miembros de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, que se anulan en un punto es un ideal maximal fijo. Recíprocamente, si M es un ideal fijo entonces $M = M_p$ para algún p elemento de X.

Demostración. Debemos demostrar que $M_p = \{f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}) : f(p) = 0\}$ para algún p X es un ideal maximal fijo. Sea $\mu_p : \mathcal{R}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \mu_p(f) = f(p)$$

μ_p, así definida, es un homomorfismo de anillos; además, $\ker \mu_p = M_p$; por lo tanto, M_p es un ideal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

Se comprueba fácilmente que μ_p es un epimorfismo; por consiguiente, el cociente de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ por M_p es isomorfo a $\mathbb{R}$ que es un campo; por lo tanto, M_p es un ideal maximal. La demostración de que M_p es ideal fijo es inmediato.

Recíprocamente, sea M un ideal maximal fijo, se tiene, por definición, que $\emptyset \neq \bigcap_{f \in M} f^{-1}(0)$; por lo tanto, existe, al menos, un $p \in X$ tal que $p \in \bigcap_{f \in M} f^{-1}(0)$; de lo anterior se deduce que $M \subseteq M_{\{p\}} = M_p$; ahora bien, como M es un ideal maximal, se tiene que $M = M_p$. ▲

<u>Definición</u> 3.5.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y $\mathfrak{M}(X)$ el conjunto de todos los ideales maximales de $C(X, \mathbb{R})$; si $\mathcal{G} = \{M_p \in \mathfrak{M} : f \in M_p\}$ con $f \in C(X, \mathbb{R})$ es una base de cerrados para una topología, la topología definida por $\mathcal{G}$ sobre $\mathfrak{M}$ se denomina la <u>topología de Stone sobre $\mathfrak{M}$</u> .

<u>Teorema</u> 3.5.2. (<u>GOULD</u>). Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio localmente compacto, todos los ideales maximales de $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ son fijos.

<u>Demostración</u>. Sea N un núcleo de $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ donde N no es elemento de $\mathcal{B}(M)$ y M es ideal maximal; $X \setminus N$ es relativamente compacto, es decir, $\overline{X \setminus N}$ es compacto. Sea $\{N_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una subfamilia finita de $\mathcal{B}(M)$, entonces $\hat{N}_1 \cap \hat{N}_2 \cap \hat{N}_3 \cap \ldots \cap \hat{N}_r \cap \overline{X \setminus N}$ es distinto del vacío por el teorema 3.4.1.; además, como cada $\hat{N}_r$ es cerrado y $\overline{X \setminus N}$ es compacto entonces $\bigcap_{\hat{N} \in \mathcal{B}(M)} \hat{N} \cap (\overline{X \setminus N})$ es distinto del vacío por lo tanto es un ideal fijo. ▲

<u>Teorema</u> 3.5.3. (<u>GOULD</u>). Si X es un espacio que no es localmente compacto y

$\underline{a} \in \mathcal{L}(X) \setminus X$ entonces la familia M_a de todos los $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tales que la clausura en $\mathcal{L}(X)$ de $N(f)$ contiene a $\underline{a}$ es un ideal maximal libre.

$$M_a = \left\{ f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R}) \,/\, a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} N(f) \right\}$$

es libre.

<u>Demostración</u>. Denotemos por $\mathcal{F} = \left\{ N(f) \,/\, f \in M_a \right\}$; se desea demostrar que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita; en efecto, sean $N(f_1), N(f_2), \ldots, N(f_n) \in \mathcal{F}$ entonces $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M_a$, por lo tanto, $a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} N(f_i)$, $\forall_i$, implica que

$a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} N(f_i) = \mathrm{cl}(\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i))$, por el teorema 3.3.3.,

por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} N(f_i) \neq \emptyset$.

Pasemos ahora a demostrar que $\mathcal{F}$ es un N-filtro. Sea $N(f) \in \mathcal{F}$, $N(h) = N \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ y $N \supseteq N(f)$; como $N \supseteq N(f)$ entonces $\mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} N \supseteq \mathrm{cl}_{(X)} N(f) \ni a$; por lo tanto, $N = N(h) \in \mathcal{F}$

Sea $N(f) \in \mathcal{F}$; si $N(f) = \emptyset$ entonces $a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{L}(X)} \emptyset = \emptyset$ lo cual es una contradicción, luego $\mathcal{F}$ es un N-filtro.

Para demostrar que $\mathcal{F}$ es maximal, consideramos un núcleo N_0 tal que $N_0 \notin \mathcal{F}$ y $N \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$; se debe demostrar que N contiene la intersección de N_0 con algún miembro

$N_1 \in \mathcal{F}$; esto es, $N_0 \cap N_1 \subseteq N_1$.

Como $N_0 \notin \mathcal{F}$ entonces $a \notin cl_{\mathcal{L}(X)} N_0$; esto es,

$a \in (cl_{\mathcal{L}(X)} N_0)^c$ que es un abierto, por lo tanto, un elemento de la familia $\mathcal{V}(a)$; por el teorema 3.3.2., existe una vecindad V compacta y G_δ tal que $V \subseteq (cl_{\mathcal{L}(X)} N_0)^c$ y $V \cap N_0 = \emptyset$; sea $A = V \cap X = \mathbb{E}(f)$ de algún $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y $N \cap N_0 = g^{-1}(0)$ para $g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, entonces $(1-f) \cdot g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; demostremos que $A \subseteq N((1-f) \cdot g) = N_1$; en efecto,

$x \in A \Longrightarrow (X \in V \wedge x \in X) \Longrightarrow f(x) = 1$

$x \in A \Longrightarrow (1-f)(x) = 0 \Longrightarrow ((1-f)\ g)(x) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x \in N\ ((1-f)\ g) = N_1$; por lo tanto, $A \subseteq N_1$. Pero, como $A = X \cap V$

$$cl_{\mathcal{L}(X)} A = cl_{\mathcal{L}(X)} (X \cap V) \subseteq cl_{\mathcal{L}(X)} X \cap cl_{\mathcal{L}(X)} V = cl_{\mathcal{L}(X)} V = \overline{V} = V;$$

por lo tanto,

$$V \cap cl_{\mathcal{L}(X)} A \neq \emptyset \Longrightarrow a \in \overline{cl_{\mathcal{L}(X)} A} = cl_{\mathcal{L}(X)} A \Longrightarrow a \in N_1.$$

De lo anterior se concluye que $N_1 \in \mathcal{F}$ y $(1-f) \cdot g \in M_a$.

Demostraremos, finalmente, que $N_1 \cap N_0 = N \cap N_0 \subseteq N$.

Sea $x \in N_1 \cap N_0$ entonces $x \in N_1 \wedge x \in N_0$.

Como $x \in N_1$, $((1-f)\ g)(x) = 0 \Longrightarrow (1-f)(x)\ g(x) = 0 \Longrightarrow (1-f(x))\ g(x) = 0$; de lo anterior se deduce que $(f(x) = 1)$ o $g(x) = 0$. Si $f(x) = 1$ entonces $x \in V$, pero $x \in N_0$ y esto, es una contradicción.

Para $g(x) = 0$ se tiene que $x \in N \cap N_0$ por lo tanto, $x \in N \cap N_0 \subseteq N$ por lo tanto, $\mathcal{F}$ es maximal e $I(\mathcal{F})$ es maximal.

Por último, demostraremos que $I(\mathcal{F}) = M_a$, donde $I(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \ / \ N(f) \in \mathcal{F}\}$; en efecto, $f \in M_a \Longrightarrow N(f) \in \mathcal{F}$ puesto que $f \in M_a \Longrightarrow f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $N(f)$ $f \in I(\mathcal{F})$; por consiguiente, $M_a \subseteq I(\mathcal{F})$.

Recíprocamente,

$$f \in I(\mathcal{F}) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \quad N(f) \in \mathcal{F}$$
$$\Longrightarrow f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \ f \in M_a \ \therefore \ I(\mathcal{F}) \subseteq M_a$$

por lo tanto, $M_a = I(\mathcal{F})$.

<u>Observación</u> 3.5.1. Hemos demostrado, en el capítulo anterior, que $\mathcal{L}(X)$, es localmente compacto; por el lema 3.3.2. existe un sistema fundamental de vecindades del punto p compacta y G_δ que es disjunta de N_0; además, por el teorema 3.1.2. sabemos que la traza sobre X de ésta vecindad, es un conjunto unitario de $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ y que existe una función g de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ cuyo conjunto nulo es $N \cap N_0$. Como $(1-f).g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ella es incluso un miembro de M_p por lo tanto, $N_1 \in \mathcal{Z}$ y $N_1 \cap N_0 = N \cap N_0 \subseteq N$. ▲

<u>Teorema</u> 3.5.4. (<u>GOULD</u>). (a) Todo ideal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ esta contenido en un ideal maximal.

(b) Todo ideal maximal es del tipo M_p.

Demostración. Del teorema 3.5.2. se deduce que todo ideal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ en $\mathcal{L}(X)$ es un ideal fijo; esto significa que la intersección de la clausura en $\mathcal{L}(X)$ de un N-filtro es diferente del vacío, por lo tanto, existe un ideal maximal que la contiene.

Si la intersección del N-filtro es reducido a un punto, entonces se tiene la solución. ▲

CAPITULO IV

REPRESENTACION DE $\mathcal{L}(X)$

En este capítulo haremos dos generalizaciones; la primera, consiste en la representación de $\mathcal{L}(X)$ mediante ideales maximales; la segunda, generaliza un resultado de $C(X, \mathbb{R})$ en el cual el anillo clase-residuo generado por un ideal maximal es un campo. Finalizaremos este capítulo poniendo en evidencia un isomorfismo existente entre la $\mathbb{Q}$-completación $\vartheta(X)$ de X y el espacio de todos los ideales maximales de $C(X, \mathbb{R})$.

1. REPRESENTACION DE $\mathcal{L}(X)$ MEDIANTE IDEALES MAXIMALES.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico completamente regular; sabemos, de las referencias que se indican:

1) Cada ideal fijo maximal de $C(X, \mathbb{R})$ es de la forma:

$$M_p = \{ f \in C(X, \mathbb{R}) \ / \ f(p) = 0 \} \ (p \in X) \qquad [12]$$

<u>Teorema</u> 4.1.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es compacto.

(2) Todo ideal en $C(X, \mathbb{R})$ es fijo.

(2^*) Todo ideal en $C^*(X, \mathbb{R})$ es fijo.

(3) Todo ideal maximal en $C(X, \mathbb{R})$ es fijo.

(3^*) Todo ideal maximal en $C^*(X, \mathbb{R})$ es fijo.

(véase [3]).

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio compacto, cada ideal fijo maximal de $C(X, \mathbb{R})$ es de la forma M_p; es decir,

$$\mathcal{M}(X) = \{ M \subseteq C(X, \mathbb{R}) \ / \ M \text{ es maximal} \}$$

aún más, la aplicación:

$$\begin{aligned} \mu : X &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ p &\longmapsto \mu(p) = M_p \end{aligned}$$

es una biyección. (ver [12]).

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio compacto y si para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ y para cada $p \in X$ indicamos:

$$F_{f,p} = \left\{ M_p \in \mathcal{M}(X) \;/\; f \in M_p \right\}$$

$$F_{f,p} = \left\{ M_p \in \mathcal{M}(X) \;/\; f(p) = 0 \right\}$$

entonces: $\Omega = \left\{ F_{f,p} \;/\; f \in C(X, \mathbb{R}),\ p \in X \right\}$

es una base de cerrados para la topología de Stone, que denotaremos por $\mathcal{T}_{St}$, sobre $\mathcal{M}(X)$, tal que

$$X \underset{\mu}{\cong} \mathcal{M}$$

El teorema de Gould que se desarrolla a continuación, generaliza ésta situación.

<u>Definición</u> 4.1.1. Si $\mathfrak{M}$ es la familia de ideales maximales de $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ y si f_i es un miembro de $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ entonces denotemos con A_i a la familia $\{ M \in \mathfrak{M} : f_i \in M \}$

<u>Teorema</u> 4.1.2. (<u>GOULD</u>) (a) La familia $\{A_i\}$ forma una base de conjuntos cerrados para la topología $\mathfrak{F}$ sobre $\mathfrak{M}$

(b) El espacio $\mathfrak{M}$ con la topología $\mathfrak{F}$ es homeomorfo a $\mathcal{L}(X)$.

<u>Demostración</u>. En $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, todo ideal maximal es primo por ser semi-regular; en vista de que cada ideal maximal en un semi-regular, genera un campo de clase residual.

Sean $A_i = \{M \in \mathcal{M} / f_i \in M\}$, $A_j = \{M \in \mathcal{M} / f_j \in M\}$ y $A_k = \{M \in \mathcal{M} / f_k = f_i \cdot f_j \in M\}$ y $M \in A_i \cup A_j$ entonces $M \in A_i$ o $M \in A_j$; si $M \in A_i$ entonces $f_i \in M$ y si $M \in A_j$, se tiene $f_j \in M$; esto implica que para $p \in X$, $(f_i \cdot f_j)(p) = f_i(p) \cdot f_j(p) = 0 = f_k(p)$ siendo $f_k = f_i \cdot f_j$ luego $M \in A_k$; de lo anterior se deduce que $A_i \cup A_j \subseteq A_k$.

Recíprocamente, si $M \in A_k$ entonces $f_k = f_i \cdot f_j \in M$; pero, como M es maximal y $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es semi-regular, (ver teorema 4.2.2.) por lo tanto M es primo, luego $f_i \cdot f_j \in M$ implica que $(M \in A_i) \vee (M \in A_j)$; es decir, $M \in A_i \cup A_j$, luego $A_k = A_i \cup A_j$.

(b) Acabamos de demostrar que $\Omega = \{A_i\}$ es base de cerrados para una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{M}$. Para $\alpha \subseteq \Omega$, sea $F_\alpha = \bigcap_{A_i \in \alpha} A_i$; entonces $\{F_\alpha\}$, es decir la familia de las intersecciones arbitrarias de elementos de Ω, constituirá la familia de los cerrados de la topología $\mathcal{T}$ que define la base de cerrados Ω. Gracias a los teoremas 3.5.1. y 3.5.4., se puede establecer una correspondencia

$$\varphi : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathfrak{M}$$
$$a \longmapsto \varphi(a) = M_a$$

donde es evidente que φ es biyectiva. Ahora bien,

$$\varphi^{-1}(A_i) = \left\{a \in \mathcal{L}(X) \,/\, \varphi(a) \in A_i\right\} = \left\{a \in \mathcal{L}(X) \,/\, M_a \in A_i\right\}$$
$$= \left\{a \in \mathcal{L}(X) \,/\, f_i \in M_a\right\} = \left\{a \in \mathcal{L}(X) \,/\, f_i(a) = 0\right\}$$
$$= \left\{a \in \mathcal{L}(X) \,/\, a \in \overline{N(f_i)}\right\} = \overline{N(f_i)}$$

lo anterior significa que $A_i = \varphi(\overline{N(f_i)})$; esto es, que cada A_i es la imagen bajo φ de un subconjunto cerrado $\overline{N(f_i)}$ de $\mathcal{L}(X)$. Luego, $\varphi^{-1}(F_\alpha) = \varphi^{-1}(\bigcap_{A_i \in \alpha} A_i) =$

$= \bigcap_{A_i \in \alpha} \varphi^{-1}(A_i) = \bigcap_{A_i \in \alpha} \overline{N(f_i)}$ cerrado en $\mathcal{L}(X)$; por lo tanto, F_α es la imagen de un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}(X)$.

Recíprocamente, sea B un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}(X)$ y $x_0 \in \mathcal{L}(X) \setminus B$; por el teorema 3.3.1, existe una vecindad V de B y $\tilde{f}_i \in \mathcal{R}(\mathcal{L}(X), \mathbb{R})$ tal que $f_i = 0$ sobre V y $\tilde{f}_i(x_0) = 1$; de lo anterior se deduce que $x_0 \notin \overline{n(f_i)}$; esto es $f_i \notin M_{x_0}$. Además, por el teorema 2.3.2. (b), X es denso en $\mathcal{L}(X)$ y V es una vecindad de B, luego $\varphi(B) \subseteq A_i$; es decir, $\varphi(B)$ es la intersección de todos los conjuntos A que contienen a B; en conclusión, la topología de $\mathfrak{M}$ definida mediante las imágenes de φ de los cerrados de $\mathcal{L}(X)$ es idéntica a $\mathfrak{F}$.

2. CAMPOS ORDENADOS GENERADOS POR IDEALES MAXIMALES DE $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$.

Del teorema 3.5.1. (c) hemos visto que todo anillo de clase residual de C o C* generado por un ideal maximal fijo

M_p es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.

En ([3]-14 E) se presenta un ejemplo de un campo-clase-residual de un anillo de funciones continuas que es isomorfo con un campo cociente de un anillo clase residual de otro anillo de funciones; el primer anillo es $C(\mathbb{N})$ donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales; el segundo es $C(\Sigma)$ donde $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\sigma\}$ y $\sigma \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo es demostrar que el anillo clase residual generado por el ideal maximal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es un campo.

A pesar de que no se ha especificado, todos los anillos dados en los ejemplos citados, son conmutativos y con unidad. Para obviar esta dificultad en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; introducimos la siguiente definición:

<u>Definición</u> 4.2.1. (a) Un miembro e de un anillo conmutativo $\mathcal{R}$ se denomina una <u>unidad local de f</u> en $\mathcal{R}$ si $e \cdot f = f$.

(b) Un anillo conmutativo $\mathcal{R}$ se denomina <u>semi-regular</u> si cada f_i en $\mathcal{R}$ posee una unidad local e_i.

<u>Teorema</u> 4.2.1. Dado un ideal I de un anillo semi-regular $\mathcal{R}$ y g un miembro de $\mathcal{R}$ que no esta en I entonces el ideal generado por I y g es el conjunto:

$$\{ f : f = h + sg,\ h \in I,\ s \in \mathcal{R} \}$$

<u>Demostración</u>. Denotemos por $\langle I \cup \{g\} \rangle = I'$ el ideal

generado por I e g; veamos que forma tienen los elementos de I'; para $n \in \mathbb{Z}$ un elemento típico es $s \in \mathcal{H}$ $h \in I$: $h + sg + ng = h + (n+S)\, g = f$, es un elemento de I'; como el anillo $\mathcal{H}$ es semi-regular, luego se tiene $ng = n(eg) = (ne)g = f$, y, por consiguiente

$$sg + ng = sg + (n.e)\, g = (s + n.e)\, g = r'\, g$$

donde $r' = s + n.e \in \mathcal{H}$ ▲

<u>Corolario</u> 4.2.1. Todo ideal maximal de un anillo semi-regular genera un campo de clase residual.

<u>Demostración</u>. Ver [4] . ▲

<u>Teorema</u> 4.2.2. (<u>GOULD</u>). $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es un anillo semi-regular.

<u>Demostración</u>. Sea $\emptyset \neq E \subseteq X$ acotado; sabemos que existe $e \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $e(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{E}$; por lo tanto, esta función es la unidad local de f si el soporte de f está contenido en $\mathbb{E}$. ▲

<u>Definición</u> 4.2.2. Dado un ideal maximal M en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; la <u>clase de equivalencia módulo M</u> de $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ será denotada por M(f); en particular, $M(\mathbf{0})$ se denotará por 0.

Definición 4.2.3. (a). Dado un ideal maximal M y un elemento f en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; decimos que $M(f) \geqslant 0$ si existe g en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tales que $g \geqslant 0$ y $M(f) = M(g)$.

(b) Dado dos elementos f y g en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; decimos que $M(f) \geqslant M(g)$ si $M(f - g) \geqslant 0$.

Con las dos definiciones antes mencionadas, estamos en capacidad de imponer un orden total sobre $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})/M$.

Teorema 4.2.3. (GOULD). (a) Si $M(f) \geqslant 0$ y $M(g) \geqslant 0$, entonces se tiene las siguientes relaciones:

(i) $M(f + g) \geqslant 0$, (ii) $M(f \cdot g) \geqslant 0$.

(b) Para todo $f \in \mathcal{R}$, o bien $M(f) \geqslant 0$ o bien $M(-f) \geqslant 0$.

(c) Si tanto $M(f) \geqslant 0$ como $M(-f) \geqslant 0$ entonces $M(f) = 0$.

Demostración. (i) En efecto, sean f, $g \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y M un ideal maximal en dicho anillo; entonces, existen $\varphi_1, \varphi_2 \in M$ tales que

$$f = \varphi_1 + h_1$$

$$g = \varphi_2 + h_2$$

donde $h_1, h_2 \geqslant 0$; por lo tanto, por ser $M(f) \geqslant 0$ y $M(g) \geqslant 0$;

$$f + g = (\varphi_1 + \varphi_2) + (h_1 + h_2)$$

donde $\varphi_1 + \varphi_2 \in M$ y $h_1 + h_2 \geqslant 0$;

luego:

$$M(f + g) = M(\varphi_1 + \varphi_2) + M(h_1 + h_2) = M(h_1 + h_2)$$

de donde por la definición 4.2.3. (a) se tiene $M(f + g) \geqslant 0$.

(ii) Sabemos que:

$$f \cdot g = \varphi_1 \varphi_2 + h_1 h_2 + \varphi_1 h_2 + \varphi_2 h_1$$

donde el primer, tercer y cuarto término son elementos de M; luego,

$$M(f \cdot g) = M(h_1 \cdot h_2) \geqslant 0$$

por lo tanto, se concluye la demostración.

(b) Considérese:

$$f^+ = \sup (f, \mathbb{O}), f^- = - \inf (f, \mathbb{O})$$

entonces, es evidente que f^+, f^- son elementos de $\mathfrak{R}$; por ser $\mathfrak{R}/M$ un dominio de integridad y $M(f^+ \cdot f^-) = 0$ entonces se tiene o bien $M(f^+) = 0$ o bien $M(f^-) = 0$ y $f^+, f^- \geqslant 0$.

<u>1er. Caso</u>: $M(f^-) = 0$.

En efecto como $f = f^+ - f^-$, $M(f) = M(f^+) - M(f^-) = M(f^+) \geqslant 0$, luego $M(f) \geqslant 0$.

<u>2do. Caso</u>: $M(f^+) = 0$.

Como $f = f^+ - f^-$ y $M(f) = M(f^+) - M(f^-) = - M(f^-)$ entonces $M(-f) = M(f^-) \geqslant 0$ concluyendo así la demostración.

(c) Demostremos, en primer lugar que para cada $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$, $f^+ \in M$ o $f^- \in M$.

Notemos que: $f^+ \cdot f^- = \mathbb{O} \in M$, luego $M(f^+ \cdot f^-) = M(\mathbb{O}) = 0$.

Como $\mathcal{R}/_M$ es dominio de integridad y $M(f^+) \cdot M(f^-) = 0$, entonces o bien $M(f^+) = 0$ o bien $M(f^-) = 0$ lo cual es equivalente a $f^+ \in M$ o bien $f^- \in M$.

Caso (a). Supongamos que $f^- \in M$.

En este caso, recordamos que por (b) se tiene $M(f) = M(f^+) \geqslant 0$. Supongamos, por hipotesis, que $M(-f) \geqslant 0$ entonces es claro que $M(f) \leqslant 0$ entonces existe $h \geqslant 0$ tal que:

$$M(f^+) = M(f) = M(-h)$$

es decir, existe $g \in M$ tal que $g = f^+ + h$.

Observamos que

$$x \in N(g) \text{ si y solo si } g(x) = 0$$

$$x \in N(g) \text{ si y solo si } f^+(x) + h(x) = 0$$

$$(f^+(x) \geqslant 0,\ h(x) \geqslant 0\ )$$

$$x \in N(g) \text{ si y solo si } f^+\ (x) = 0 \wedge h(x) = 0$$

$$x \in N(g) \text{ si y solo si } x \in N(f^+) \wedge x \in N(h)$$

$$x \in N(g) \text{ si y solo si } x \in (N(f^+) \cap N(h))$$

por consiguiente:

$$N(g) = N(f^+) \cap N(h) \subseteq N(f^+)$$

luego por el teorema 3.4.3, se tiene que $f^+ \in M$.

En resumen, $f^+ \in M$ y $f^- \in M$ entonces $f^+ - f^- = f \in M$ por lo tanto $M(f) = 0$. ▲

Teorema 4.2.4. (GOULD). El campo de clase residual ideado por el ideal maximal M de $\mathcal{R}(X,\mathbb{R})$ y ordenado de acuerdo a la definición 4.2.3, contiene un subconjunto isomorfo a la recta real.

<u>Demostración</u>. Sea $f_1 \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $M(f_1)$ es la identidad en $\mathfrak{R}/M$; como M es un ideal maximal, entonces M es un N-ideal, luego $M(\lambda f_1) \neq 0$ para cualquier $\lambda \neq 0$. Considérese ahora la aplicación

$$\varphi : \langle M(f_1) \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \cdot M(f_1) = M(\ f_1) \longmapsto \lambda$$

<u>φ es bien definida</u>.

En efecto, si $M(\lambda f_1) = M(\mu f_1)$ entonces $M(\lambda f_1) - M(\mu f_1) = M(0)$ luego $M((\lambda - \mu)f_1) = M(0)$ implica que $\varphi[M((\lambda - \mu)f_1)] = \varphi[M(0)]$ por lo tanto, $\lambda - \mu = 0$, esto es $\lambda = \mu$.

<u>$\langle M(f_1) \rangle$ es campo de unidad $M(f_1)$</u>.

$\varphi(M(\lambda f_1) + M(\mu f_1) = \ (M(\lambda + \mu)f_1) = \lambda + \mu =$
$\varphi(M(\lambda f_1)) + \varphi(M(\mu f_1))$

$\varphi(M(\lambda f_1) \cdot M(\mu f_1)) = \varphi(M(\lambda \cdot \mu)f_1) = \lambda \cdot \mu =$
$\varphi(M(\lambda f_1)) \cdot \varphi(M(\mu f_1))$.

<u>φ es injectiva</u>.

$\varphi(M(\lambda f_1)) = \varphi(M(\mu f_1)) \Longrightarrow \varphi(M(\lambda - \mu)f_1) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lambda = \mu \Longrightarrow M(\lambda f_1) = M(\mu f_1)$.

<u>φ es epimorfismo</u>.

Esto resulta del hecho puesto que para cada $\mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(M(\mu f_1)) = \mu$

Además, $\varphi(M(f_1)) = \varphi(M(1 \cdot f_1)) = 1$; luego, φ es un isomorfismo de campos.

Sea $M(f_1)$ la unidad de $\mathfrak{R}/M$ ($= \{ g + M \ / \ g \in \mathfrak{R} \}$);

se demostrará ahora lo siguiente:

(i) $M(f_1) \geqslant 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $M(\lambda f_1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \lambda \geqslant 0$.

<u>Demostración</u>. Sabemos que $f_1 = f_1^+ - f_1^-$ y que por el teorema 4.2.3., o bien $f_1^+ \in M$ o bien $f_1^- \in M$. Supongamos que $f_1^+ \in M$, entonces como $f_1^+ = - f_1^-$ entonces:

$M(f_1) = M(f_1^+ - f_1^-) = M(f_1^+ + f_1^+) = M(2 f_1^+) = M = \square$ puesto que $f_1^+ \in M$; luego, $M(f_1) = \square$ ($\longrightarrow \longleftarrow$) puesto que $M(f_1)$ es la unidad de $\mathcal{R}/M$.

Si $f_1^+ \notin M$ entonces se tiene que $f_1^- \in M$; pero entonces,

$M(f_1) = M(f_1^+ - f_1^-) = M(f_1^+) - M(f_1^-) = M(f_1^+) - \square =$

$= M(f_1^+) \geqslant 0$ puesto que $f_1^+ \geqslant 0$; luego $M(f_1) \geqslant 0$.

De la demostración que acabamos de hacer, se tiene que $M(f_1) = M(f_1^+)$; luego $M(\lambda f_1) = M(\lambda f_1^+)$. Supongamos que $0 \leq M(\lambda f_1) = M(\lambda f_1^+)$; entonces existe $h \geqslant 0$ tal que $M(\lambda f_1^+) = M(h)$; por lo tanto, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda f_1^+ - h = \mu$. Sea $x \in X \setminus \operatorname{sop}(\mu)$; entonces $(\lambda f_1^+ - h)(x) = \mu(x) = 0$ por lo tanto, $\lambda f_1^+(x) = h(x) \geqslant 0$; pero, como $f_1^+(x) \geqslant 0$, por consiguiente, $\lambda \geqslant 0$.

Recíprocamente, $\lambda \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda f_1^+ \geqslant 0 \Longrightarrow M(\lambda f_1^+) \geqslant 0$; pero $M(\lambda f_1) = M(\lambda f_1^+) \geqslant 0$, por lo tanto, $M(\lambda f_1) \geqslant 0$.

Para concluir, sólo nos resta demostrar que φ es un isomorfismo de orden. En efecto, sea $M(\lambda f_1)$ elemento de $\langle M(f_1) \rangle$ tal que $M(\lambda f_1) \leqslant M(\mu f_1)$ entonces

$M(\mu f_1 - \lambda f_1) \geqslant 0$; por lo tanto, $M((\mu - \lambda)f_1) \geqslant 0$ y, por (i), se tiene que $\mu - \lambda \geqslant 0$; esto es, $\lambda \leqslant \mu$; de lo anterior se deduce que $\varphi(M(\lambda f_1)) \leqslant \varphi(M(\mu f_1))$ luego
$\langle M(\lambda f_1)\rangle \underset{\varphi}{\cong} \mathbb{R}$ ▲

<u>Definición</u> 4.2.4. (a) Si el subconjunto $\{M(\lambda f_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ de $\mathcal{R}/M$ es idéntico a $\mathcal{R}/M$ entonces M se denomina un <u>ideal real</u>.

(b) Si $\{M(\lambda f_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{R}/M$, M se denomina un <u>ideal hyper-real</u>.

<u>Ejemplo</u> 4.2.1. (a) Todo ideal maximal en C^* es real; esto es, si el ideal maximal es fijo o libre.

<u>Ejemplo</u> 4.2.1. (b) Todo ideal libre maximal en $C(X, \mathbb{R})$ es hyper-real.

<u>Ejemplo</u> 4.2.1. (c) Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, entonces todo ideal libre y maximal en $C(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ es hyper real.

<u>Definición</u> 4.2.5. Un subconjunto S de un conjunto totalmente ordenado A se dice <u>cofinal</u> si para cada $x \in A$ existe $s \in S$ tal que $s \geqslant x$.

Un cuerpo $\mathbb{K}$ totalmente ordenado se dice <u>arquimediano</u> si $\{n\, e \,/\, n \in \mathbb{N} \quad e \in \mathbb{K}\}$ es cofinal.

Sea M un ideal maximal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; diremos que <u>M es</u>

arquimediano si el cuerpo $\{M(\lambda f_1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ es arquimediano. $(M(f_1))$ indica la unidad en $\mathcal{R}/M$.

Definición 4.2.6. Un espacio vectorual ordenado $(E, +, ., \leqslant)$ tal que $(E, \leqslant)$ es un reticulado se denomina un Espacio de Riesz.

Lema 4.2.1. Si E es un Espacio de Riesz entonces son equivalentes:

(i) $E = \{0\}$ o $E \cong \mathbb{R}$

(ii) E es arquimediano y totalmente ordenado.

Teorema 4.2.5. (GOULD). Un ideal maximal M es real si y solamente si es arquimediano.

Demostración. Sea M un ideal maximal y real cualesquiera de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; como M es real, entonces $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})/M = \{\lambda M(f_1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Sea $M(f_1) \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})/M$; entonces existe $n \in \mathbb{N} : \lambda \leqslant n$; esto es, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - \lambda \geqslant 0$, luego $(n - \lambda) M(f_1) = M((n - \lambda) f_1) \geqslant 0$ lo cual implica que $M(n(f_1)) \geqslant M(\lambda(f_1))$; esto significa que $\{n M(f_1) /, n \in \mathbb{N}\}$ es colineal, luego M es arquimediano.

Recíprocamente, sea M un ideal maximal arquimediano; de las definiciones 4.2.1. y 4.2.2. se tiene claro que $\{M(\lambda f_1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un espacio de Riesz y que es distinto de $M = M(0)$ pues al menos $M(f_1)$ es otro elemento de él; en conclusión $\{M(\lambda f_1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un espacio de Riesz totalmente ordenado distinto de $\{0\}$, luego por el lema 4.2.1., es isomorfo a $\mathbb{R}$; por lo tanto:

$$\mathcal{R}/M = \{M(\lambda f_1) / \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

lo cual implica que M es real.

<u>Teorema</u> 4.2.6. (<u>GOULD</u>). Todo ideal maximal fijo de $\mathcal{R}$ es real.

<u>Demostración</u>. Sea M_p un ideal fijo maximal; por el teorema 3.5.1. la aplicación $M_p(f)$

$M_p(f) \longrightarrow f(p)$ es un isomorfismo de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})/M_p$ en $\mathbb{R}$

luego por la definición 4.2.4, M_p es real.

Hemos visto que todo espacio X, completamente regular, posee una compactificación βX y que $C^*(X, \mathbb{R})$ y $C^*(\beta X, \mathbb{R})$ son algebraicamente isomorfos. Al preguntar cual es el análogo de ésta propiedad en el anillo $C(X, \mathbb{R})$, Hewitt introduce la noción de Q-espacio (real compacto) y se demuestra que estos espacios juegan un papel análogo en $C(X, \mathbb{R})$. ▲

<u>Definición</u> 4.2.7. Un espacio completamente regular X se dice un <u>Q-espacio con respecto a su sistema acotante β</u> si todo ideal libre y maximal en $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ es hyper-real.

Recordamos que un campo $\mathbb{K}$ se dice arquimediano si:

$$\forall a \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N} : a \leq n$$

donde e es la identidad de $\mathbb{K}$. Un campo totalmente ordenado $\mathbb{K}$ no es arquimediano si existen elementos infinitamente grandes; esto es,

$$\exists\, a \in \mathbb{K} : a > n\, e, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Un elemento b de $\mathbb{K}$ se dice infinitamente pequeño si:

$$b > 0 \quad \wedge \quad b < \frac{1}{n}\, e, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

esto es equivalente a $\frac{1}{b} > n\, e$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; esto es, $\frac{1}{b}$ es infinitamente grande.

Luego un cuerpo totalmente ordenado no es arquimediano si existen elementos en $\mathbb{K}$ infinitamente grandes, si y solamente si existen elementos en $\mathbb{K}$ infinitamente pequeños.

<u>Teorema</u> 4.2.7. (<u>GOULD</u>). Si $a \in \mathcal{J}(X)\setminus X$ y M_a es un ideal maximal libre definida por: $M_a = \left\{ f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \;/\; a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{J}(X)} N(f) \right\}$

entonces:

(a) $M_a(f) = 0$ implica que $\bar{f}(a) = 0$

(b) Si $M_a(f)$ no es infinitamente grande, entonces $M_a(f)$ difiere por un elemento pequeño o nulo, del número real $\bar{f}(a)$.

(c) Si $M_a(f)$ es infinitamente grande y positivo (resp. negativo) entonces $\bar{f}(a) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

<u>Demostración</u>. (a) Como $M_a(f) = 0$, entonces $M_a(f) = M_a$, por lo tanto, si $f \in M_a$ entonces $a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{J}(X)} N(f)$. Pero, como $a \in \mathrm{cl}_{\mathcal{J}(X)} N(f)$ entonces existe

$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq N(f)$ tal que $a = \lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha$; luego,

$\bar{f}(a) = \bar{f}\left(\lim_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha\right) = \lim_{\alpha\in\Lambda} \bar{f}(x_\alpha) = \lim_{\alpha\in\Lambda} f(x_\alpha) = \lim_{\alpha\in\Lambda} 0 = 0$

(b) <u>Primer caso</u>: $0 < M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1)$.

Supongamos que $M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1)$ no es infinitamente pequeño, entonces existe n_0 tal que

$$M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1) \geqslant \frac{1}{n_0} M_a(f_1)$$

O sea: $M_a(f) - \bar{f}(a)\, f_1) \geqslant M_a(\frac{1}{n_0} f_1)$ $(*)$

Como: $\bar{f}(a)$ y $\bar{f}_1(a) = 1$ son finitos y como la función " $M_a(h) \longmapsto \bar{h}(a)$ " preserva el orden de los elementos finitos, resulta que de $(*)$ se deduce que:

$0 = \bar{f}(a) - \bar{f}(a) = \bar{f}(a) - \bar{f}(a) \,.\, 1 = \bar{f}(a) - \bar{f}(a)\, \bar{f}_1(a) =$

$$\equiv \overline{(f - \bar{f}(a)\, f_1)}\,(a) \geqslant \frac{1}{n_0}\, \bar{f}_1(a) = \frac{1}{n_0}$$

o sea: $0 \geqslant \frac{1}{n_0}$, con $n_0 \in \mathbb{N}$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Luego: si $0 < M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1)$, él es un elemento infinitamente pequeño de $\mathcal{R}/M_a$

<u>Segundo caso</u>: $0 < \bar{f}(a)\, M_a(f_1) - M_a(f)$

la demostración es análoga.

Y como siendo $M_a(f)$ no infinitamente grande sólo puede ocurrir que:

$$M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1) = 0$$

o bien $0 < M_a(f) - \bar{f}(a)\, M_a(f_1)$ y finito

o bien que $0 < \bar{f}(a)\, M_a(f_1) - M_a(f)$ y finito se tiene que: la diferencia entre el real $\bar{f}(a)$ y $M_a(f)$ es infinitamente pequeño o nulo en $\mathcal{R}/M_a$.

Corolario 4.2.1. Un espacio completamente regular X es un $\mathbb{Q}$-espacio (con respecto a $\mathcal{B}$) si y solamente si para todo punto a en $\mathcal{S}(X) - X$ existe un miembro f de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $\bar{f}(a) = +\infty$.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{S}(X) \setminus X$, M_a un ideal libre y maximal; como X es $\mathbb{Q}$-espacio entonces, M_a es hyper-real, por lo tanto, $\mathcal{R}(X, \mathbb{R}) / M_a$ no es arquimediano y además, existe $M_a(f)$ infinitamente grande y, por la proposición 4.2.7., $\bar{f}(a) = +\infty$.

Recíprocamente, sea M un ideal libre y maximal de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$; necesariamente, existe $a \in \mathcal{S}(X) - X$ con $M = M_a$; ahora bien, por hípotesis sabemos que existe $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ tal que $\bar{f}(a) = +\infty$; pero, esto implica que $M_a(f)$ es infinitamente grande, esto es, $\mathcal{R}(X, \mathbb{R}) / M$ no es arquimediano, es decir, M_a es hyper-real.

Definición 4.2.6. El conjunto de todos los $\wedge x$ perteneciente a $\mathcal{S}(X)$ tales que para toda f en $\mathcal{R}(\wedge X, \mathbb{R})$ y la extensión $\bar{f}$ a $\mathcal{S}(X)$ se tiene $\bar{f}(\wedge x)$ es finito, se denomina la Q-completación $\vartheta(X)$ de X.

Teorema 4.2.6. (GOULD). La Q-completación $\vartheta(X)$ de X es isomorfa al espacio de todos los ideales maximales $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$. El espacio $\vartheta(X)$ es un Q-espacio.

CONCLUSIONES

A continuación, exponemos cómo se han utilizado las referencias bibliográficas y las principales modificaciones que hemos introducido en las demostraciones.

Capítulo I: <u>Preliminares</u>.

Con el objeto de caracterizar los espacios completamente regulares hemos establecido el teorema 1.2.2. que da condiciones de equivalencia, las que hemos logrado mediante una síntesis de los resultados dados en el capítulo III de [3] y en [12].

Para generalizar la compactificación de Stone-Čech-Alexandroff, construimos βX en el teorema 1.4.5.; además, caracterizamos algebraicamente $cl_p \sigma[X]$ en los teoremas 1.4.6. y 1.4.7.; las demostraciones de estos teoremas han sido modificados de los que aparecen en el capítulo XI de [3].

Capítulo II: <u>Compactificación de Stone-Čech-Alexandroff de un espacio completamente regular</u>.

Se considera un espacio completamente regular con un sistema acotante y se generaliza el concepto de compactificación de Stone-Cech-Alexandroff que establecemos en los teoremas 2.2.2., 2.2.3., 2.2.4. y 2.2.5. También se han modificado las demostraciones de estos resultados que aparecen en [5].

El resultado para la compactificación local de un espacio completamente regular con un sistema acotante que aparece en [5] ha sido establecido en el teorema 2.3.2. con algunas modificaciones.

Capítulo III: Ideales y N-filtros.

Se ha dado una nueva construcción de βX, usando los filtros y n-filtros que se ha presentado en el teorema 3.2.2. mejorando los resultados del capítulo VI de [3].

Igualmente se han caracterizado los ideales fijos y libres sintetizando algunos resultados del capítulo II de [3].

Luego se ha generalizado los resultados anteriores para un espacio completamente regular con un sistema acotante mejorando los resultados de [5] y [8] que han sido establecidos en los teoremas 3.5.2., 3.5.3. y 3.5.4.

Capítulo IV: Representación de $\mathcal{L}(X)$.

Mejorando los resultados de [5] y de [8] se representa $\mathcal{L}(X)$ mediante ideales maximales y que ha sido establecido en el teorema 4.1.1.

También hemos modificado los resultados de [3] y [5] sobre campos ordenados generados por ideales maximales de $\mathcal{R}(X, \mathbb{R})$ y se ha establecido en el teorema 4.2.4.

Finalmente, se han modificado algunos resultados de [5] y de [6] para establecer el teorema 4.2.8. que permite definir un Q-espacio.

ANEXO

<u>Teorema</u>. $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ es separante.

<u>Demostración</u>. Sean $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$; como $C^*(X, \mathbb{R})$ es separante existe $f \in C^*(X, \mathbb{R})$ tal que $\mathbb{0} \leqslant f \leqslant \mathbb{1}$ y $f(x_1) = f(x_2)$; lo anterior significa que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ no pueden ser ambos ceros a la vez; esto significa que $|f(x_2) - f(x_1)| > 0$.

Considérese la función:

$$g = \frac{1}{|f(x_1) - f(x_2)|} \, |f - f(x_1)| \wedge \mathbb{1}$$

es claro que $\mathbb{0} \leqslant g \leqslant \mathbb{1}$ y, $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 1$. Como $(X, \mathcal{T})$ es completamente regular y $\mathcal{B}$ un sistema acotante, por el teorema 2.1.1. (c) $x_2 \in X$ luego existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x_2 \quad B_i$ y, por la definición 2.1.1. (B-3), dado B_i existe $B_j \in \mathcal{B}$ y $h \in C(X, \mathbb{R})$ tal que:

$$x_2 \in B_i \subseteq h^{-1}(1); \qquad B_j^c \subseteq h^{-1}(0)$$

definamos ahora la función $k = g \, . \, h$; para cada $z \in B_j^c$,

$$k(z) = g(z) \, . \, h(z) = g(z) \, . \, 0 = 0$$

lo cual significa que $k \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ puesto que el soporte de k es el acotado B_j. Además,

$$k(x_1) = g(x_1) \, . \, h(x_1) = 0 \, . \, k(x_1) = 0$$

$$k(x_2) = g(x_2) \, . \, h(x_2) = 1 \, . \, 1 \quad = 1$$

luego $k(x_1) = 0 \neq 1 = k(x_2)$ concluyendo así la demostración. $\triangle$

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, NICOLAS — Elements de mathematique, Livre III, Topologie generale. Hermann, Paris, 1965. Deuxieme edition.

[2] ―――――――― — Ibid. Libre VI, Integration. Hermann, Paris 1965. Deuxieme edition.

[3] GILLMAN, LEONARD y MEYER, JERISON — Rings of Continuous Functions. (Graduate Texts in Mathematics, 43), Springer-Verlag, New York, 1976.

[4] GODEMENT, ROGER — Cours d'algebre, Hermann, Paris 1966. Quatrieme tirage.

[5] GOULD, G. G. — A Stone-Čech-Alexandroff-type Compactification and its application to measure theory. Proceedings of the London Mathematical Society (3) 14 (1964) 221-44.

[6] GOULD, G. G. y MARX, MAHOWALD — Measures on Completely regular spaces. Journal of London Mathematical Society 37 (1962) 103-11.

[7] HALMOS, PAUL R. — Measure Theory. Princeton, D. Van Nostrand Inc., 1965. Tenth printing.

[8] HEWITT, EDWIN — Rings on Real-Valued continuous functions (I). Trans. American Mathematical Society 64 (1948) 54-99.

[9] ―――――――― — Linear functionals on spaces of continuous functions. Fundamente Mathematica 37 (1950) 161-89.

[10] KELLEY, JOHN E. General Topology (Graduate Texts in Mathematics, 27) Springer-Verlag, 1955. First edition.

[11] NACHBIN, LEOPOLDO <u>Topological Vector Spaces of Continuous Functions.</u> Proceedings. National Academy of Science. U.S.A. 40 (1954), 471-474.

[12] ROJO, JORGE Seminario. Programa de Maestria, Universidad de Panamá, 1981.

[13] SHIROTA, TAYRA <u>On locally convex Vector Spaces of Continuous functions.</u> Proceedings. Japan Academy, Japan, 30 (1954), 294-299.

[14] VALDIVIA, OSCAR Medida e Integración. Programa de Maestría, Universidad de Panamá, 1980.

[15] WILANSKY, ALBERT Topology for Analysis. Ginn and Company, Waltham, Mass. 1970.