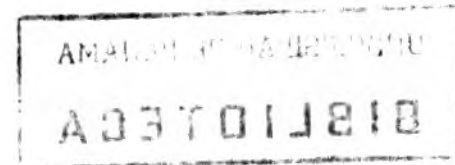




UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE ALGUNAS TECNICAS NO LINEALES
DE OPERADORES EN ESPACIOS DE BANACH



Por:

José De La Montaña López G.

Tesis presentada como uno de
los requisitos para optar por el
grado de Maestro en Ciencias
con Especialización en Matemá-
tica Educativa.

Panamá, República de Panamá

1990

7.14

UNIVERSIDAD DE PANAMA



ULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
rograma Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, _____

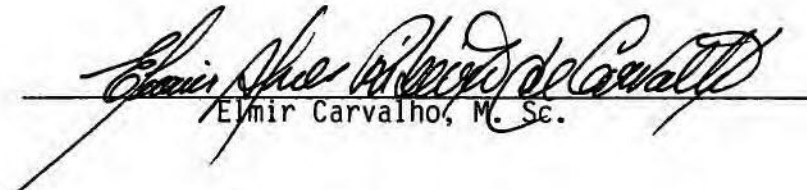
ABR 20 1990

Obs del autor


240 770

Aprobado por:

Director de Tesis


Elmir Carvalho, M. Sc.

Miembro del Jurado


Enrique Willianson, M. Sc.

Miembro del Jurado


Juan Nole, M. Sc.

Fecha

4 de abril de 1990

"1989, Año del 25 Aniversario de la gesta
Patriótica del 9 de Enero de 1964"
Ciudad Universitaria Octavio Méndez Perera
ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA, R. DE P

DEDICATORIA

Con mucho amor dedico este trabajo de investigación a mi esposa Ledalancie Fraiz de López y a mi hijo José De La Montaña López Fraiz, quienes con su dedicación, consejos, esfuerzo y comprensión me proporcionaron el apoyo moral y espiritual para lograr la meta deseada.

AGRADECIMIENTO

Expreso el más sincero agradecimiento al profesor Elmir Carvalho por su valiosa cooperación en la dirección de este trabajo, así como también al profesor Ramiro Gómez y a la Secretaria Graciela de Quezada, quien con su encomiable labor me llevaron a la feliz culminación de este trabajo.

CONTENIDO

	PAGINA
INTRODUDUCCION.....	ix
CAPITULO I. PRELIMINARES.....	1
1-1. ESPACIOS METRICOS.....	2
- Convergencia de Sucesiones.....	7
- Sucesión de Cauchy.....	7
- Espacio Métrico Completo.....	8
- Espacio Métrico Compacto.....	9
1-2. ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.....	11
- Definición de Norma.....	11
- Continuidad de Funciones.....	13
1-3. ESPACIOS DE BANACH.....	15
- Definición.....	15
- Ejemplos de Espacios de Banach.....	15
- Desigualdad Triangular y la Pro- piedad de Completitud.....	15
1-4. ESPACIOS DE HILBERT.....	16
-Producto Interno.....	16
- Espacio Pre-Hilbertiano.....	17
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz.....	18
- La Norma en un espacio con producto interno.....	20
- Ley del Paralelogramo.....	21
- Conjuntos Convexos.....	22
- Definición de Espacio de Hilbert.....	22

1-5.	OBSERVACIONES SOBRE EL ANALISIS FUNCIO-	
	NAL NO LINEAL.....	23
	- Definición de Punto Fijo.....	25
	- Ejemplos de Funciones que contienen	
	punto fijo.....	25
	- Teorema de punto fijo de Browder.....	26
	- Definición de Función Contractiva....	27
CAPITULO II.	ALGUNAS TECNICAS PARA OBTENER PUNTO FIJO	
	DE CIERTOS OPERADORES NO LINEALES.....	31
	- Operador Continuo.....	32
	- Operador Acotado.....	32
	- Conjunto de Operadores Compactos.....	33
	- Función α - Condensada.....	35
	- Función Debilmente F-Contractiva.....	36
	- Teorema para encontrar punto fijo a	
	una aplicación α - condensada y	
	debilmente F -contractiva.....	37
	- Operador de contracción de Banach....	39
	- Espacio de Banach Uniformemente	
	Convexo.....	40
	- Teorema de punto fijo de Browder y	
	Kirk para funciones no expansivas....	41
	- Teorema de Minty para aplicaciones	
	homeomorfas.....	45
	- Teorema de Zarantonello para aplica-	
	ciones homeomorfas.....	45

CAPITULO III. GENERALIZACIONES DE ALGUNOS DE LOS RE-	
SULTADOS DE BROWDER.....	47
- Definiciones y Proposiciones Básicas.	49
- Topología Débil.....	53
- Teorema de Browder para la conver-	
gencia débil.....	56
- Teorema de Opial para la conver-	
gencia débil.....	66
- Teorema de Dotson para conjuntos	
convexos.....	69
- Demostración del teorema de Browder	
para la convergencia débil.....	71
CONCLUSION.....	73
REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.....	75

INTRODUCCION

La presente investigación tratará sobre algunas técnicas de operadores no lineales en espacios de Banach. El propósito fundamental de este trabajo consiste en describir de diversas maneras algunas técnicas, para que nos faciliten manipular con mayor destreza dentro del campo del análisis la teoría de operadores y especialmente en los espacios de Banach.

Puesto que una de las iniciativas que surgen dentro del estudio de la enseñanza de la matemática, consiste en buscar nuevas maneras de presentar los contenidos matemáticos a enseñar en todos los niveles y en especial a nivel superior con el propósito de lograr mejores resultados en el aprendizaje. Es por ello que la propuesta de estudio que se presenta en este trabajo está orientada dentro de la dinámica que mueve a todo sistema educativo.

La descripción de los contenidos que se desarrollarán en esta investigación, es la siguiente:

En el primer Capítulo se hace una breve descripción de las definiciones, proposiciones y teoremas más importantes que nos permitirán dar las bases necesarias para desarrollar la teoría correspondiente a los operadores no lineales y que permitan enmarcar este estudio dentro de los espacios de Banach.

En el Segundo Capítulo, se describen las técnicas sobre operadores no lineales que se han considerado para este estudio tales como las contractivas, de compacidad, analiticidad y monotónicas, cada una de ellas estará acompañada de su respectiva teoría y de ejemplificación correspondiente.

En el Tercer y último capítulo se hace una revisión de los principales resultados de Browder y otros autores, a los cuales se les aplica técnicas similares a las utilizadas por ellos, obteniendo así algunos resultados nuevos.

Finalmente se presentan algunas consideraciones que el autor del presente estudio consideró sugerir.

CAPITULO I
PRELIMINARES

ESPACIOS METRICOS

Definición 1.1.

Un espacio métrico es un par (M, d) formado por un conjunto M no vacío y una aplicación $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$, llamada distancia en M (o métrica) denotada por $d(x, y)$ para todo $x, y \in M$ que cumple los siguientes axiomas:

$$d_1) \quad d(x, y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y.$$

$$d_2) \quad \text{Para todo los } x, y \in M, \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$d_3) \quad \text{Para todo los } x, y, z \in M, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{desigualdad triangular}).$$

Los elementos de un espacio métrico pueden ser de naturaleza arbitraria: números, puntos, vectores, funciones, conjuntos, etc. Sin embargo los llamaremos siempre los puntos de M .

Cuando no se preste a dudas se denota el espacio métrico con el mismo símbolo que el conjunto base.

Ejemplos.

1. La recta real \mathbb{R} .

Sea $M = \mathbb{R}$ y d la aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} definida por:

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto es inmediato comprobar que d es una métrica en \mathbb{R} , y se conoce como métrica natural o usual de \mathbb{R} .

Al espacio métrico (\mathbb{R}, d) lo designaremos simplemente por la recta real \mathbb{R} .

2. El espacio euclideo \mathbb{R}^n .

Sea $M = \mathbb{R}^n$ y d' la aplicación de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} definida por:

$$d'(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad \text{para todo}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Los axiomas d_1, d_2 son inmediatos. Probaremos d_3 .

Sean $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

Hagamos $a_i = x_i - z_i$ y $b_i = z_i - y_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Entonces

$$\begin{aligned} [d'(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{de } (*) \text{ se obtiene}$$

$$[d'(x, y)]^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

$$[d'(x, y)]^2 \leq [d'(x, z) + d'(z, y)]^2 \quad (**)$$

Finalmente, extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros de (**) se obtiene la desigualdad triangular (d_3).

La métrica d' definida en esta forma se conoce como la métrica euclídea.

El par (\mathbb{R}^n, d') se conoce como el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n .

3. La métrica del máximo en \mathbb{R}^n .

Sea $M = \mathbb{R}^n$ y d'' la aplicación de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} definida por:

$$d''(x, y) = \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad \text{para todo } x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En este ejemplo probaremos los axiomas d_1, d_2, d_3 .

$$d_1) \quad d''(x, y) = 0 \iff \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0$$

Como $\text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq |x_i - y_i| \quad \forall i=1, \dots, n$ se tiene que

$$d''(x, y) = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$d''(x, y) = 0 \iff x_i - y_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$d''(x, y) = 0 \iff x_i = y_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$d''(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$d_2) \quad d''(x, y) = \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i|$$

entonces $d''(x, y) = d''(y, x)$.

$$d_3) \quad d''(x, z) = \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i|$$

Como $\forall i=1, \dots, n; |x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ y

además $\forall i=1, \dots, n; |x_i - y_i|$ está acotada por el máximo al igual que $|y_i - z_i|$, es decir:

$$|x_i - y_i| \leq \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$|y_i - z_i| \leq \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i| \quad \forall i=1, \dots, n$$

Sumando miembro a miembro tenemos:

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|$$

$$\text{Luego} \quad \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|$$

Por consiguiente $d''(x, z) \leq d''(x, y) + d''(y, z)$

Observación.

Sean d' , d'' las métricas dadas anteriormente. Cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ existe un entero positivo n tal que:

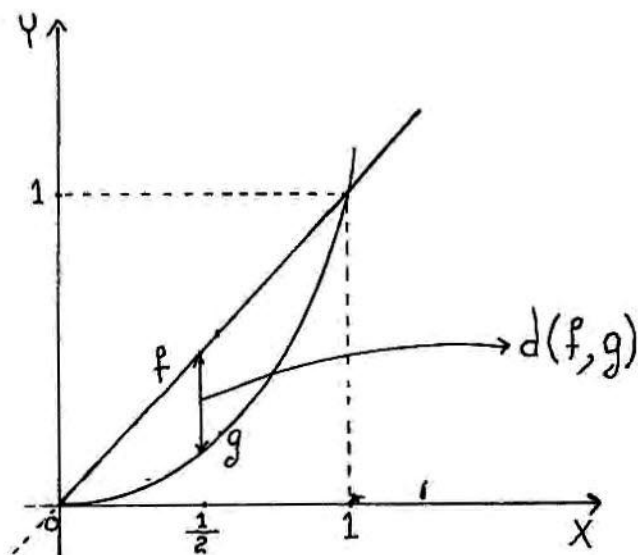
$$d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq n d''(x, y).$$

Ejemplo.

Sea $B(X; \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las funciones acotadas. Se sabe que la suma, la diferencia y el producto de funciones acotadas son funciones acotadas.

En $B(X; \mathbb{R})$ definimos una métrica poniendo para $f, g \in B(X; \mathbb{R})$ arbitrarias $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Esta métrica recibe el nombre de métrica de la convergencia uniforme o métrica del supremo.

Sea $X = [a, b]$. Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas, la distancia $d(f, g)$ es la longitud de la mayor cuerda vertical que se puede trazar uniendo la gráfica de f a la de g . Así, por ejemplo, en el espacio métrico $B([0, 1], \mathbb{R})$ la distancia de la función $f(x) = x$ a la función $g(x) = x^2$ es $d(f, g) = 1/4$.



En el caso que $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y se identifica a una lista (x_1, \dots, x_n) donde $x_1 = f(x_1)$, $x_2 = f(x_2)$, \dots , $x_n = f(x_n)$.

Así para $X = \{1, 2, \dots, n\}$ tenemos que $B(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ y la métrica del supremo coincide con la métrica del máximo.

Definición 1.2.

Una sucesión en un espacio métrico M , es una función que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, asigna un elemento $x_n \in M$.

Definición 1.3.

Diremos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $x \in M$ y la denotamos $x_n \longrightarrow x$ ó $\lim_n x_n = x$ cuando $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, es decir $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Definición 1-4.

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de M se llama una sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$, existe un n_0 , tal que $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$ se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposición 1.1.

En un espacio métrico M , toda sucesión convergente es de Cauchy.¹

1. Fernández, José L. y De La Torre Molné, Graciela. Análisis Matemático. Editorial Pueblo y Educación, 1983. Pág.: 37-38.

Definición 1.5.

Un espacio métrico M es completo si toda sucesión de elementos de M converge a un elemento de M .

Proposición 1.2.

El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es un espacio métrico completo.

Demostración.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n donde $x_n = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^m)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_0 , tal que

$$d(x_r, x_s) = \left[\sum_{i=1}^m (\alpha_r^i - \alpha_s^i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \quad \text{siempre que}$$

$$r, s \geq n_0$$

Por tanto, para cada $i=1, \dots, m$

$$|\alpha_r^i - \alpha_s^i| < \varepsilon \quad \text{siempre que } r, s \geq n_0.$$

Es decir cada sucesión componente $(\alpha_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Como \mathbb{R} es completo², existe un número real α^i tal que $\alpha^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^i$, para $1 \leq i \leq m$.

A continuación verificaremos que el punto $x = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$

2. Haaser, Norman y Sullivan, Joseph A. Análisis Real. Editorial Trillas; México, 1978. Pág.: 54-55.

es el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces para cada $i=1, \dots, m$ existe un entero positivo n_i tal que:

$$|\alpha_n^i - \alpha^i| < \varepsilon / \sqrt{m}, \text{ siempre que } n \geq n_i$$

Sea $n_0 = \text{Máx} \{n_i : i=1, \dots, m\}$, entonces para $n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x) = \left[\sum_{i=1}^m (\alpha_n^i - \alpha^i)^2 \right]^{1/2} < \left[\sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m} \right]^{1/2} \leq \varepsilon$.

Por consiguiente R^m es un espacio métrico completo.

Definición 1.6.

Una colección $\{U_i : i \in I\}$ de conjunto abierto en un espacio métrico M , es un cubrimiento abierto de un conjunto A en M si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Una sub-colección $\{U_i, i \in F, F \text{ finito}\}$ de conjuntos en el cubrimiento abierto $\{U_i, i \in I\}$ se llama sub-cubrimiento abierto finito de A si $A \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i$.

Definición 1.7.

Un subconjunto A de un espacio métrico M es compacto si todo cubrimiento abierto de A contiene un sub-cubrimiento abierto finito.

Se dice que un espacio métrico M es compacto si, como conjunto, M es compacto.

Teorema 1.1.

Sea M un espacio métrico; en él, las siguientes condiciones son equivalentes.

1. M es compacto
2. M es secuencialmente compacto (esto es, toda sucesión de puntos $d \ni M$ contiene una subsucesión convergente).
3. M es completo y acotado.³

Definición 1.8. Continuidad en espacios métricos.

Sean (M, d_1) y (N, d_2) dos espacios métricos.

Se dice que una función f de M en N es continua en el punto $a \in M$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ siempre que $d_1(x, a) < \delta$.

3. Haasér, Norman y Sullivan, Joseph A. Análisis Real. Editorial Trillas; México, 1978. Pág.: 112-114.

ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

Definición 1.9.

Sea E un espacio vectorial real. Una norma en E es una función real $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{K}$ (\mathbb{K} puede ser \mathbb{C} ó \mathbb{R}) que asocia a cada vector $x \in E$ el número real $\|x\|$ llamado la norma de x , de manera que se cumplan las propiedades siguientes:

$$N_1) \quad \|x\| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x = 0.$$

$$N_2) \quad \text{Para todo } x \in E \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$N_3) \quad \text{Para todos los } x, y \in E \text{ se tiene que}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{desigualdad triangular}).$$

Al par $(E, \| \cdot \|)$ formado por un espacio vectorial E y una norma en E se llama espacio normado. Un mismo espacio vectorial puede tener diferentes normas.

Todo espacio normado es métrico con la distancia asociada a la norma definida por $d(x,y) = \|x-y\|$. Un espacio normado se considera métrico con la distancia asociada a la norma.

No toda distancia d en un espacio vectorial E proviene de una norma. Para que esto ocurra tiene que cumplir las propiedades siguientes:

$$1) \quad \text{Para todos los } x, y \in E \text{ y } \lambda \in \mathbb{K}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \quad (\text{homogeneidad positiva para homotecia}).$$

$$11) \quad \text{Para todos los } x, y, z \text{ en } E, \quad d(x+z, y+z) = d(x,y) \\ (\text{invarianza para traslaciones}).$$

Si d es una métrica sobre un espacio vectorial E que verifica estas dos propiedades, entonces la función

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x \longmapsto d(0, x) = \|x\|$ es una norma en E , y d es la distancia asociada a esta norma.

Una propiedad que tiene el valor absoluto de un número real y que se cumple en todo espacio vectorial normado E es la siguiente.

Para todos los x, y en E

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x-y\|.$$

Ejemplos de espacios normados.

1. El valor absoluto (o módulo) de un número real hace de \mathbb{R} un espacio vectorial normado.
2. En el espacio vectorial $B(X; \mathbb{R})$ se define $\|f\| = \sup \left\{ |f(x)| ; x \in X \right\}$

Veamos que es una norma.

Está claro que $\|f\| \geq 0$.

Si $\|f\| = 0$, entonces para todo $x \in X$, $|f(x)| = 0$. Luego $f = 0$ y se cumple N_1 . Por otra parte N_2 se satisface trivialmente.

Para comprobar N_3 , tenemos $f, g \in B(X, \mathbb{R})$. Se tiene que

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|, \text{ luego}$$

$$\|f+g\| = \sup \left\{ |f(x) + g(x)| : x \in X \right\} \leq \|f\| + \|g\|.$$

Suele llamarse norma del supremo o norma uniforme a esta norma.

Por consiguiente $(B(X; \mathbb{R}); \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

3. En el espacio \mathbb{R}^n se pueden definir las siguientes normas: Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$a) \quad \|x\| = \text{Máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$b) \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{norma euclídeana}),$$

Entonces $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

La definición de función continua en un espacio normado se generaliza de la siguiente manera.

Definición 1.10.

Una función f de un espacio normado $(E, \|\cdot\|_1)$ en un espacio normado $(F, \|\cdot\|_2)$ es continua en el punto $a \in E$, si para cada $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(a)\|_2 < \xi$, siempre que $\|x - a\|_1 < \delta$.

Observación.

Denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio de las funciones lineales continuas.

Proposición 1.3.

En un espacio normado E , la norma es una función continua.

Demostración.

Consideremos $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
 $x \in E \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$ siempre que $\|x - x_0\| < \delta$.

Cómo $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$ y $\|x - x_0\| < \delta$,
 tomemos $\delta = \varepsilon$ y obtenemos que $|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$ siempre
 que $\|x - x_0\| < \delta$.

Definición 1.11.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio li-

neal normado $(E, \| \cdot \|)$ y sea x un vector de E . De acuerdo al
 concepto general de convergencia de una sucesión a un punto
 en un espacio métrico, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 : n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \varepsilon).$$

Definición 1.12.

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E es acotada si

$\exists M > 0$, para todo n tal que $\|x_n\| \leq M$.

ESPACIOS DE BANACH

Definición 1.13.

Se llama espacio de Banach a todo espacio vectorial normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, es un espacio lineal normado $(E, \| \cdot \|)$ que como espacio métrico es completo.

Ejemplos.

1. \mathbb{R} con $\|x\| = |x|$ es de Banach.
2. $B(X, \mathbb{R})$ con $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ es de Banach.
3. Si F es de Banach y E es un espacio vectorial normado cualquiera, $(\mathcal{L}(E, F), \| \cdot \|)$ es de Banach.

En los espacios de Banach se cumplen propiedades como la desigualdad triangular y la de completitud. Mostraremos la de completitud.

En efecto, sea $f_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ una sucesión de Cauchy en E^n , i.e. supongamos que $\|f_j - f_k\| \longrightarrow 0$, cuando $j, k \longrightarrow \infty$.

Luego, para $\varepsilon > 0$, podemos hallar un número N suficientemente grande tal que

$$\|f_j - f_k\|^2 = (\alpha_{1j} - \alpha_{1k})^2 + \dots + (\alpha_{nj} - \alpha_{nk})^2 < \varepsilon^2 \quad (*)$$

cuando $j, k \geq N$.

En particular, $|\alpha_{1j} - \alpha_{1k}| < \varepsilon$, $j, k \geq N$.

Luego, la sucesión (α_{1j}) es una sucesión de Cauchy de números reales, la cual posee un límite. Así existe un número real α_1 tal que $\alpha_{1j} \longrightarrow \alpha_1$ cuando $j \longrightarrow \infty$.

De manera similar, podemos mostrar que para cada $l = 2, \dots, n$, $\alpha_{lj} \longrightarrow \alpha_l$ cuando $j \longrightarrow \infty$.

Sea $f = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Entonces $f \in E^n$. Haciendo $k \longrightarrow \infty$ en (*), tenemos:

$$(\alpha_{1j} - \alpha_1)^2 + \dots + (\alpha_{nj} - \alpha_n)^2 \leq \varepsilon^2, \text{ para } j \geq N$$

Mas, esto es precisamente $|f_j - f|^2$. Por consiguiente

$$|f_j - f| \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \longrightarrow \infty.$$

ESPACIOS DE HILBERT

Definición 1.-14.

Un producto interno sobre un espacio vectorial E es una forma sesquilineal (bilineal en el caso real), hermitiana (simétrica en el caso real), positiva, o sea es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ (donde \mathbb{K} es $(\mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R})$, que asocia a cada par ordenado $(x, y) \in E \times E$ el escalar $\langle x, y \rangle$ y que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es sesquilineal, esto es, para cualesquiera $x, y, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es hermitiana, esto es, para cualesquiera $x, y \in E$ se tiene.

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es positiva, esto es, para todo $x \in E$.
Se tiene

$$\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \text{ si y sólo si } x = 0.$$

Observaciones.

- La barra que aparece en algunas de las propiedades anteriores, denotan el complejo conjugado.
- $\langle x, 0 \rangle = 0 = \langle 0, y \rangle$

Definición 1.15.

Un espacio vectorial provisto de un producto interno, se llama espacio pre-hilbertiano.

Ejemplos.

- En \mathbb{K}^n , para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, la expresión $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ define un producto interno, que se llama producto escalar usual de \mathbb{K}^n .
- Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2,$$
entonces \mathbb{R}^2 es un espacio pre-hilbertiano.

Otra propiedad importante del producto interno aparece en la desigualdad de la siguiente proposición. La desigualdad fue introducida por primera vez por el matemático francés August Louis Cauchy (1789-1857) en relación con las sumas de productos de números reales o complejos, y fue generalizada en 1859 por el matemático ruso Victor Jacovlevich Bunyakovski (1804-1889) para integrales. La aportación de Bunyakovski pasó desapercibida en Occidente, y la desigualdad hubo de ser redescubierta en forma independiente por el matemático alemán Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). En la bibliografía de habla inglesa, la desigualdad se conoce diversamente como desigualdad de Schwarz, de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz⁴.

Proposición 1.4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sea E un espacio con producto interno, entonces, para todo $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

donde la igualdad se cumple si, y sólo si, x y y son linealmente dependientes.

4. Haaser, Norman y Sullivan, Joseph A. Análisis Real. Editorial Trillas; México, 1978. Pág. 386.

Demostración.

Si x y y son vectores linealmente independientes en E , entonces para cada $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 < \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$$

si ponemos $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, obtenemos.

$$0 < \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}.$$

Por tanto

$$|\langle x, y \rangle|^2 < \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

de donde se deriva la desigualdad de Schwarz,

$$|\langle x, y \rangle| < |x| |y|.$$

A continuación supongamos que x y y son linealmente dependientes.

Si $y = 0$, entonces se ve con claridad que

$$|\langle x, y \rangle| = 0 = |x| |y|.$$

si $y \neq 0$, entonces $x = \lambda y$

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle \lambda y, y \rangle| = |\lambda| |\langle y, y \rangle| = |\lambda| |y| |y|$$

$$|\langle x, y \rangle| = |x| |y|.$$

Teorema 1.2.

Sea E un espacio con producto interno, entonces $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define una norma en E .

Demostración.

Las propiedades N_1 y N_2 se deducen de la definición de producto interno. Probaremos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad |x+y|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ \implies |x+y|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \implies |x+y|^2 &= |x|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + |y|^2 \\ \implies |x+y|^2 &= |x|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + |y|^2 \\ \implies |x+y|^2 &= |x|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + |y|^2. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \implies |x+y|^2 &\leq |x|^2 + 2 |x| |y| + |y|^2 \\ \implies |x+y|^2 &\leq (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Observación.

En un espacio pre-hilbertiano la métrica se denota por $d(x, y) = |x-y| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$.

Proposición 1.5.

En un espacio pre-hilbertiano E es válida la ley del paralelogramo.

$$\forall x, y \in E, |x+y|^2 + |x-y|^2 = 2 [|x|^2 + |y|^2] .$$

Demostración.

$\forall x, y \in E$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 + |x-y|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \\ &\quad + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \\ &\quad - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle . \\ \implies |x+y|^2 + |x-y|^2 &= 2 \langle x, x \rangle + 2 \langle y, y \rangle \\ &= 2 |x|^2 + 2 |y|^2 \\ &= 2 [|x|^2 + |y|^2] . \end{aligned}$$

Un producto interno está completamente determinado por la norma definida en un espacio pre-hilbertiano. La fórmula de polarización (proposición 1.6) permite obtener el producto interno a partir de la norma.

Proposición 1.6.

En todo espacio pre-hilbertiano E ⁵.

5. Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons Inc. New York, 1978. Pág.: 130-134.

a) Complejo: $\forall x, y \in E$, se tiene:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2]$$

b) Real: $\forall x, y \in E$, se tiene

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

Definición 1.16. Conjunto Convexo.

Diremos que un subconjunto A de un espacio vectorial E es convexo si, para cualesquiera $x, y \in A$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Observaciones.

1. Todo subespacio vectorial de E es convexo.
2. La intersección de una familia cualquiera de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Definición 1.17. Espacio de Hilbert.

Un espacio pre-hilbertiano completo se llama espacio de Hilbert.

Observaciones.

1. Si un espacio pre-hilbertiano no es un espacio de Hilbert significa que, como espacio normado es un espacio de Banach.
2. Cualquier espacio lineal normado (pre-hilbertiano) de dimensión finita es un espacio completo (Hilbert).

3. Un subespacio S de dimensión finita de un espacio normado E , es cerrado en E (decimos que un subespacio S de un espacio normado E es cerrado si y sólo si, toda sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en S que es convergente en E , converge a un punto en S).

Ejemplo. Espacio de Hilbert.

Sobre el espacio vectorial \mathbb{C}^n de la n -uplas de números complejos; la expresión $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ define un producto interno y por tanto \mathbb{C}^n con este producto interno definido es un espacio de Hilbert.

Lo que se conviene llamar análisis funcional no lineal es un conjunto de métodos, algunos de ellos ya conocidos por los matemáticos del siglo pasado, que se aplican a problemas específicos. Con el apareamiento de los conceptos de espacios de funciones y la formulación del análisis funcional en este siglo, estos métodos fueron puestos en forma abstracta unificada, mostrando claramente los puntos esenciales de los resultados del pasado y posibilitando el tratamiento de problemas nuevos. Con el objeto de introducir uno de estos métodos presentaremos uno de los ejemplos más simples de aplicación, que es precisamente el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 .$$

Con el auxilio del teorema fundamental del cálculo es posible mostrar que el problema (1) es equivalente a la siguiente ecuación integral.

$$(2) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(\xi)) ds \quad \text{que es una ecuación}$$

integral no lineal de Volterra.

Así si $x(t)$ es una solución del problema de Cauchy entonces también es solución de la ecuación (2) de Volterra y reciprocamente.

Resultados sobre la solución del problema de Cauchy o de la ecuación integral (2) eran conocidos por los matemáticos del siglo pasado, antes de surgir el espacio de funciones y de los teoremas de punto fijo del análisis funcional no lineal. Con el lenguaje para estos nuevos conceptos y teorías es posible escribir las demostraciones de estos resultados de modo más simple, pero esencialmente equivalentes. Sin embargo, la abstracción de estos nuevos conceptos nos permite tratar otros problemas más complicados de modo conciso y elegante.

Uno de los resultados más antiguos sobre la solución del problema de Cauchy, es el teorema de Picard, cuya demostración original usa el método de las aproximaciones sucesivas que es un método conceptualmente bastante simple.

Supongamos que se desee obtener la solución (o soluciones) x de una ecuación de la forma $f(x) = b$, en donde f es, por ejemplo, una aplicación continua, definida en una parte

cerrada de \mathbb{R}^n y tomando valores en \mathbb{R}^n . Escribiéndose $\varphi(x) = f(x) + x - b$, observamos que φ es continua y la ecuación original equivale a encontrar x tal que $\varphi(x) = x$. Para resolver ésta última ecuación, tomemos un punto arbitrario x_0 y consideremos la sucesión de puntos

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_{n+1} = \varphi(x_n), \dots$$

llamados las aproximaciones sucesivas de la solución buscada. Si esta sucesión converge en el dominio de φ , entonces $a = \lim x_n$ será tal que

$a = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(a)$ esto significa que a es una solución de la ecuación $\varphi(x) = x$ y por consiguiente de la ecuación $f(x) = b$.

Estas observaciones de carácter intuitivo encuentran su formulación en el principio de punto fijo para contracciones.

Definición 1.18.

Un punto fijo de una aplicación $f : M \rightarrow M$ es un punto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Ejemplos.

El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es el único punto fijo de la aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = -x$.

La aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ posee dos puntos fijos que son precisamente el cero y el uno.

Los puntos fijos de una función real de variable real son las abscisas de los puntos del plano en que la gráfica de

f interseca la diagonal $y = x$.

Hay aplicaciones que no poseen puntos fijos como por ejemplo la traslación $x \longrightarrow x + a$, $a \neq 0$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

También la aplicación $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida

por $f(x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, no posee punto fijo. En efecto si

$f(x) = x$ tenemos que

$$x = \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \text{ de donde se concluye que } \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2 \text{ lo que}$$

es imposible.

Nada impide que una aplicación tenga infinitos puntos fijos como es el caso de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (y,x)$.

Un famoso resultado de topología, llamado el teorema de punto fijo de Brouwer, dice que si $B = B[0,1]$ es la bola unitaria de \mathbb{R}^n , entonces toda aplicación continua $f : B \longrightarrow B$ posee (por lo menos) un punto fijo.

Existen varias demostraciones de este hecho, pero en todas ellas se utilizan técnicas no triviales. Sin embargo en el caso $n=1$ es de fácil demostración. Para esto probaremos que toda función continua $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ posee un punto fijo; consideremos la función continua

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \varphi(x) = f(x) - x.$$

Como $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$\varphi(0) = f(0) \geq 0$ y $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$, luego por el teorema del valor intermedio⁶, debe existir un $x \in (0,1)$ tal que $\varphi(x) = 0$, esto es $f(x) = x$.

Observación.

En los siguientes resultados vamos a representar las métricas de la misma forma, ya sobre entendiendo que cada una está en su espacio.

Definición 1.19.

Sean M, N espacios métricos. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice una contracción cuando existe una constante c , con $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \text{ para cualquiera que sean } x, y \in M.$$

Es fácil mostrar que toda contracción es uniformemente continua.

Ejemplo.

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real derivable en el intervalo I . Si existe una constante c tal que $|f'(x)| \leq c < 1$, entonces f es una contracción.

6. Leithold, Louis. El Cálculo con Geometría analítica. Segunda Edición. Harla. México. Pág. 313-314.

En efecto por el teorema del valor medio, dados x, y en I , existe un punto z entre x y y tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$ y por consiguiente $|f(x) - f(y)| \leq c |x-y|$, como queriamos mostrar.

El método de las aproximaciones sucesivas puede ser usado para probar la existencia y unicidad de solución de una ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie. Más precisamente de la ecuación de Fredholm

$$Y(t) = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t K(t,s) Y(s) ds$$
 en donde $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación continua. Y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, $|M| \geq |K|$; dada $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ existe una única función $\mu \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ que es solución de la ecuación integral de Fredholm.

Demostración.

$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ es un espacio métrico completo.

Sea $T : E \longrightarrow E$ definida por:

$$(T_x)(t) = f(t) + \lambda \int_{t_0}^t K(t,s) x(s) ds \text{ con}$$

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, t \in [a,b].$$

Observemos que si $u, v \in E$, entonces:

$$(T_u)(t) - (T_v)(t) = \lambda \int_{t_0}^t K(t,s) [u(s) - v(s)] ds$$

y

$$|(T_u)(t) - (T_v)(t)| \leq |\lambda| M(b-a) |u-v|$$

O sea

$$\|T_u - T_v\| \leq |\lambda| M(b-a) |u-v|,$$

esto significa que T es una aplicación contractiva con

$$c = |\lambda| M(b-a) < 1.$$

Una vez que un punto fijo de T es precisamente la solución de nuestro problema, se concluye la demostración.

Observaciones.

La condición de Lipschitz no es condición necesaria para la existencia de solución del problema de Cauchy. Tampoco es necesaria para la unicidad. Existen condiciones más debiles ligadas a los nombres de Osgood, Nagumo, Kamke, Perrom y otros. Consulte por ejemplo el libro de J. Hale, "Ordinary Diffential Equations".

Con respecto a la existencia de solución del problema de Cauchy, hay mucho más que añadir. Por ejemplo la mera continuidad de f es condición suficiente para la existencia de solución del problema de Cauchy en espacios de dimensión finita. En el caso de dimensión infinita, hay ejemplos de funciones continuas para las cuales la ecuación integral de Volterra ligado al problema de Cauchy no tiene solución. El primer ejemplo fue dado por Dieudonné. Posteriormente York presentó un ejemplo en espacios de Hilbert y Cellina en espacios de Banach reflexivos y recientemente Gudunov produjo ejemplos en espacios de Banach arbitrarios.

Las técnicas de contractividad y de analiticidad y sus

variantes dominaron el panorama de las ecuaciones diferenciales hasta inicio de la década de 1,930, cuando Schawder aisló una clase importante de operadores no lineales, denominados operadores compactos. En la actualidad las técnicas que dominan el campo de aplicaciones son las de compacidad y monotonidad.

CAPITULO II
ALGUNAS TECNICAS PARA OBTENER PUNTO FIJO DE
CIERTOS OPERADORES NO LINEALES

En este capítulo trabajaremos principalmente con algunas técnicas para obtener punto fijo de ciertos operadores no lineales, es decir, exhibiremos las técnicas contractivas, de compacidad, analiticidad y monotónicas. Con el objeto de introducir estos métodos, definiremos en el transcurso del capítulo algunos conceptos que nos serán útiles para el desenvolvimiento y mayor comprensión de las técnicas anteriormente mencionadas.

Definición 2.1.

Sea E un espacio de Banach real. Sea $M \subset E$ y sea $\phi : M \rightarrow E$ un operador. El operador ϕ es continuo en $x_0 \in M$ si $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ ($x_n \in M$) implica que $\|\phi(x_n) - \phi(x_0)\| \rightarrow 0$.

Definición 2.2.

Sea E un espacio de Banach real. Sea $M \subset E$ y sea $\phi : M \rightarrow E$ un operador. El operador ϕ se dice acotado si para cada subconjunto acotado de M la norma de los vectores imágenes está uniformemente acotada⁷.

Definición 2.3.

Sean E_1, E_2 espacios de Banach reales y sea A

7. Kreyszig, Erwin. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons Inc. New York, 1978. Pág. 249-250.

un operador de E_1 sobre E_2 (si $E_1 = E_2 = E$, entonces A actúa en E). $D(A)$ denota el dominio de definición de A y $R(A)$ su rango. El operador A se llamará compacto sobre el subconjunto $M \subset D(A)$ si la imagen de cada subconjunto acotado de M es relativamente compacto. En particular si $M = E_1$, entonces A es compacto si la imagen de cada bola está contenida en un conjunto compacto.

Observaciones.

1. Un operador compacto es desde luego acotado
2. M es relativamente compacto o precompacto si y sólo si \overline{M} es compacto.

Definición 2.4.

Sean X, Y espacios de Banach y $D \subset X$. Un operador (no necesariamente lineal) $T : D \longrightarrow Y$ es completamente continuo si, para toda sucesión $x_n \longrightarrow x$, se tiene

$$T x_n \longrightarrow T x$$

Observación.

Un operador es completamente continuo si es compacto y continuo.

Sean X, Y espacios vectoriales normados. Un operador K de X a Y es llamado compacto (o completamente continuo) si $D(K) = X$ y para cada sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que $|x_n| \leq c$, la sucesión $\{Kx_n\}$ contiene una subsucesión la cual conver-

ge en Y . El conjunto de los operadores compactos de X a Y lo denotaremos por $K(X, Y)$.

Teorema 2.1.

Sea X un espacio vectorial normado y Y un espacio de Banach. Si $L \in B(X, Y)$ y si existe una sucesión $\{F_n\} \subset K(X, Y)$ tal que $\|L - F_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $L \in K(X, Y)$.

Demostración.

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en X , es decir $\|x_n\| \leq c$. Puesto que F_1 es un operador compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_1}\}$ por cual $\{F_1 x_{n_1}\}$ converge.

Puesto que F_2 es un operador compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_2}\}$ de $\{x_{n_1}\}$ por cual $\{F_2 x_{n_2}\}$ converge. Continuando este proceso existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de

$\{x_{n_{k-1}}\}$ por cual $\{F_n x_{n_k}\}$ converge.

Hagamos $z_k = x_{n_k}$. Así $\{F_n z_k\}$ converge cuando $k \longrightarrow \infty$

para cada F_n .

Ahora $\|Lz_j - Lz_k\| = \|Lz_j - F_n z_j + F_n z_j - F_n z_k + F_n z_k - Lz_k\|$

$$\implies \|Lz_j - Lz_k\| \leq \|Lz_j - F_n z_j\| + \|F_n z_j - F_n z_k\| + \|F_n z_k - Lz_k\|$$

$$\Rightarrow |Lz_j - Lz_k| \leq 2c |L - F_n| + |F_n z_j - F_n z_k|$$

Dado $\xi > 0$, tomaremos n -grande de modo que $2c|L - F_n| < \xi/2$

Puesto que $\{F_n z_k\}$ converge, podemos tomar j y k suficiente grandes de modo que $|F_n z_j - F_n z_k| < \xi/2$.

De aquí, $\{Lz_k\}$ es una sucesión de Cauchy y como Y es un espacio de Banach, se completa la demostración.

Sea $T : X \longrightarrow X$ una función continua que envía un espacio métrico completo (X, d) en si mismo. a continuación presentaremos la existencia y la unicidad de punto fijo para T .

Definición 2.5.

Sea $A \subset X$ un conjunto acotado. Por el número real $\alpha(A)$ denotamos el infimo de todos los números $\xi > 0$ tal que A admite una cobertura finita consistente de subconjuntos con diametro menor que ξ .

Observamos que:

- a) $0 \leq \alpha(A) \leq \text{diam}(A)$ ($\text{diam}(A)$ = diametro de A).
- b) $\alpha(A) = 0 \iff A$ es precompacto.
- c) $\alpha(A \cup B) = \text{Máx} \{ \alpha(A), \alpha(B) \}$.

Definición 2.6.

La función continua T se dice α -condensada si para todo subconjunto acotado A de X , tal que $\alpha(A) > 0$, tenemos que $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$.

Observación.

La función contractiva y la completamente continua son α -condensada⁸.

Definición 2.7.

Una aplicación F definida en un subconjunto de un espacio normado X y con valores reales es semicontinua inferiormente en x_0 si $F(x) \neq -\infty$ y $F(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$.

Definición 2.8.

Sea F una función real semicontinua inferiormente definida en $X \times X$. La función T antes mencionada será débilmente F -contractiva si se cumple la condición

$$F(T(x), T(y)) < F(x, y) \text{ para todo } x, y \in X, x \neq y.$$

Observación.

Esta condición se cumple en especial cuando $F = \|\cdot\|$, es decir $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$ en este caso la aplicación se dice no expansiva.

Si $F(x, y) = d(x, y)$ ($d =$ distancia en X), entonces decimos simplemente T contracción débil.

8. Nussbaum, R.D. The fixed point index and fixed point theorems for K -set-contractions.
Ph. D. dissertation Univ. of Chicago. 1968.

Teorema 2.2.

Sea $T : X \longrightarrow X$, α -condensada y débilmente F-contractiva definida en un espacio métrico completo X . Si para algún $x_0 \in X$, la sucesión $\{x_n\}$ de iteraciones que comienza por x_0 ($x_1 = T(x_0)$, $x_{n+1} = T(x_n)$) es acotada, entonces T tiene un único punto fijo ξ en X .

Demostración.

Probaremos inicialmente que si existe punto fijo este es único.

Supongamos que existen dos puntos x_1 y x_2 , ($x_1 \neq x_2$) tales que $Tx_1 = x_1$

$$Tx_2 = x_2.$$

Luego $F(x_1, x_2) = F(Tx_1, Tx_2)$ y como T es débilmente F-contractiva obtenemos que

$$F(x_1, x_2) = F(Tx_1, Tx_2) < F(x_1, x_2) \text{ la cual es absurdo.}$$

Por consiguiente si existe el punto este es único.

A continuación probaremos la existencia del punto fijo.

Supongamos $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$. Tenemos que $T(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \subset A$,

entonces A es un conjunto invariante. Denotamos por \bar{A} la clausura del conjunto A . \bar{A} también es un conjunto invariante. En efecto, por la continuidad de T , obtenemos que $T(\bar{A}) \subset \overline{T(A)} \subset \bar{A}$.

Ahora probaremos que \bar{A} es compacto, para esto es suficiente mostrar que $\alpha(A) = 0$, puesto que en un espacio mé-

trico completo los conjuntos precompactos son además relativamente compactos.

Supongamos $\alpha(A) > 0$. En este caso $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$ (*) y puesto que $A = T(A) \cup \{x_0\}$, obtenemos que

$$\alpha(A) = \text{Máx} \{ \alpha(T(A)), \alpha(x_0) \} = \text{Máx} \{ \alpha(T(A)), 0 \}$$

$\implies \alpha(A) = \alpha(T(A))$, pero esto contradice (*). De aquí

$$\alpha(A) = 0.$$

Consideremos la función real $\psi : \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longrightarrow F(x, T(x))$ definida por \hat{F} o \hat{T} , donde \hat{F} es la restricción de F en $\bar{A} \times \bar{A}$ y $\hat{T} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A} \times \bar{A}$ tal que $x \longrightarrow (x, T(x))$. Puesto que \hat{T} es continua y \hat{F} es semicontinua inferiormente, entonces ψ es semicontinua inferiormente.

Por lo tanto ψ tiene un punto mínimo, digamos ξ en \bar{A} .

Asumamos ahora que $\xi \neq T(\xi)$; por la débilmente F -contractiva de T tenemos que

$$\psi(T(\xi)) = F(T(\xi), T^2(\xi)) < F(\xi, T(\xi)) = \psi(\xi),$$

es decir ξ no es un punto mínimo.

Por consiguiente $\xi = T(\xi)$.

Observación.

Si la función T satisface la hipótesis del teorema y es contracción débil (o estrictamente no expansiva), es decir $F(x, y) = d(x, y)$, entonces para cada $x_0 \in X$ la sucesión $\{x_n\}$ de iteraciones converge al único punto fijo ξ de T . En efecto, $0 \leq d(x_{n+1}, \xi) \leq d(x_n, \xi)$ y puesto que ξ

es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \xi) = \inf_n d(x_n, \xi) = 0$$

Teorema 2.3. Operador de contracción de Banach.

Sea (M, d) un espacio métrico completo y

$T : M \rightarrow M$ una aplicación tal que, para un entero $n > 0$, y $0 < k < 1$, se tiene

$d(T^n x, T^n y) \leq k d(x, y)$; $x, y \in M$. Entonces, T tiene un único punto fijo.

Observamos que cuando $n=1$, obtenemos una consecuencia del teorema 2.2 y podemos utilizar el principio de contracción para obtener la demostración fácilmente.

Corolario 2.1.

Sea $T : M \rightarrow M$ una aplicación de un espacio métrico completo M en si mismo. Sea $0 < k < 1$ tal que

$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$; $\forall x, y \in M$, entonces allí existe un único punto fijo para T .

Demostración.

Como $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ para $0 < k < 1$, obtenemos que T es α -condensada y contracción débil. Además si $\{x_n\}$ es una sucesión de iteraciones de T , tenemos que

$$d(x_0, x_n) \leq \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) \leq \sum_{i=1}^n d(x_0, x_1) k^i$$

$$\implies d(x_0, x_n) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-k}, \text{ es decir } \{x_n\} \text{ es acotada.}$$

Por el teorema 2.2, T tiene un único punto fijo.

Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo con norma $|\cdot|$ y el elemento cero \ominus .

Sea B un subconjunto no vacío, cerrado, acotado, convexo de E, y supongase (sin pérdida de generalidad) que $\ominus \in B$. $\text{diam}(X)$ denota el diametro del conjunto $X \subset E$ y $a(x) = \inf_{x \in X} |x|$.
Sea $I_1 = (0, 1]$ y $I_2 = (0, 2]$.

Definición 2.9.

Sea $I_1 = (0, 1]$ y $I_2 = (0, 2]$. El espacio de Banach E es uniformemente convexo si existe una función positiva y creciente $\delta : I_2 \rightarrow I_1$ tal que $|x| \leq r$, $|y| \leq r$ y $|x-y| \geq \varepsilon r$, entonces

$$\left| \frac{x+y}{2} \right| \leq (1-\delta(\varepsilon))r, \quad (x, y \in E).$$

Es obvio que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ y $\delta(2) = 1$. Denotaremos la inversa de δ por η , y observemos que $\lim_{y \rightarrow 0} \eta(y) = 0$.

Recordemos que una transformación $F : B \rightarrow B$ es no expansiva si se cumple la desigualdad $|Fx-Fy| \leq |x-y|$ para todo x, y contenidos en B.

A continuación, presentaremos resultados importantes sobre las técnicas contractivas y las cuales hacen uso del bien conocido principio de contracción de Banach.

Teorema 2.4. De Browder y Kirk.

Cada función no expansiva $F : B \rightarrow B$ tiene al menos un punto fijo.

Antes de hacer la demostración del teorema, observemos el siguiente lema.

Lema.

Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo y u, v, w elementos de E tal que $|u-w| \leq R$, $|v-w| \leq R$ y $|w - \frac{u+v}{2}| \geq r > 0$, entonces

$$|u-v| \leq R \gamma\left(\frac{R-r}{R}\right).$$

Para la prueba del lema, necesitamos reescribir la condición $|w - \frac{u+v}{2}| \geq r > 0$ en la forma

$$\left| \frac{(w-u) + (w-v)}{2} \right| \geq \left(1 - \frac{R-r}{R}\right)R, \text{ y obtenemos el resultado}$$

inmediatamente por la definición (2.8).

Demostración del teorema 2-4

Para $\xi \in I_1 = (0, 1]$, sea $F_\xi = (1 - \xi)F$.

Obviamente, F_ξ es una contracción de B , y por el principio de contracción de Banach, existirá para cada $\xi \in I_1$ un $x_\xi \in B$ tal que $x_\xi = F_\xi x_\xi$. De esto obtenemos que

$$|x_\xi - Fx_\xi| = |F_\xi x_\xi - Fx_\xi| = \xi |Fx_\xi| \leq \xi \text{ diam}(B)$$

de aquí

$$\inf_{x \in B} |x - Fx| = 0.$$

$$\text{Sea } C_\varepsilon = \left\{ x : |x - Fx| \leq \varepsilon \right\} \quad \text{y}$$

$$D_\varepsilon = \left\{ x \in C_\varepsilon : |x| \leq a_0 + \varepsilon \right\}, \quad \text{donde } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(C_\varepsilon) = a_0.$$

Es suficiente probar que la intersección de todos los C_ε es no vacía. En efecto si esto fuera falso, se obtiene que $a_0 > 0$, ya que cada C_ε es cerrado.

Tomemos u_1, u_2 en C_ε y observamos que para $i=1,2$.

$$(1) \quad \left| u_1 - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right| \leq |u_1 - Fu_1| + \left| Fu_1 - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right|.$$

$$\implies \left| u_1 - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{2} |u_1 - u_2| \quad \text{y}$$

$$(2) \quad \left| u_1 - \frac{u_1+u_2}{2} \right| < \varepsilon + \frac{1}{2} |u_1 - u_2|$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &\leq \left| u_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_1+u_2}{2} + F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \right| + \\ &+ \left| u_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_1+u_2}{2} + F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \right|, \end{aligned}$$

se verifica la siguiente desigualdad

$$(3) \quad \left| u_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_1+u_2}{2} + F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \right| \geq \frac{1}{2} |u_1 - u_2|$$

para al menos uno de los valores $i=1,2$.

Por el lema y las desigualdades (1), (2) y (3) se obtienen las siguientes relaciones

$$\left\| \frac{u_1+u_2}{2} - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right\| \leq \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \|u_1-u_2\| \right) \eta_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \frac{\|u_1-u_2\|}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{u_1+u_2}{2} - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right\| \leq \sup_{0 < \xi \leq \frac{\text{diam}(B)}{2}} (\varepsilon + \xi) \eta_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \xi}\right).$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{u_1+u_2}{2} - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right\| \leq \text{Máx}_{0 < \xi \leq \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon} \left[\sup (\varepsilon + \xi) \eta_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \xi}\right) \right]$$

$$\sup (\varepsilon + \xi) \eta_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \xi}\right)$$

$$\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon \leq \xi \leq \frac{\text{diam}(B)}{2}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{u_1+u_2}{2} - F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \right\| \leq \text{Máx} \left[2\sqrt{\varepsilon}, \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} + \varepsilon\right) \eta_0(\sqrt{\varepsilon}) \right]$$

$$\text{Sea } \phi(\varepsilon) = \text{Máx} \left[2\sqrt{\varepsilon}, \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} + \varepsilon\right) \eta_0(\sqrt{\varepsilon}) \right], \text{ en-}$$

tonces podemos concluir que si $u_1, u_2 \in C_\varepsilon$, luego

$$\frac{u_1+u_2}{2} \in C_{\phi(\varepsilon)}.$$

$$\text{Obviamente, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(\varepsilon) = 0$$

Tomemos ahora $u_1, u_2 \in D_\varepsilon$. Tenemos las desigualdades

$$\|u_1\| \leq a_0 + \varepsilon \quad \text{y} \quad \|u_2\| \leq a_0 + \varepsilon \quad \text{y} \quad \text{como } \frac{u_1+u_2}{2} \in C_{\phi(\varepsilon)}$$

se obtiene la siguiente relación

$$\left\| \frac{u_1 + u_2}{2} \right\| \geq a(C_{\phi}(\varepsilon)).$$

Utilizando una vez mas nuestro lema, obtenemos la desigualdad

$$\text{diam}(D_{\varepsilon}) = \sup_{u_1, u_2 \in D_{\varepsilon}} \|u_1 - u_2\| \leq (a_0 + \varepsilon) \eta \left[\frac{a_0 + \varepsilon - a(C_{\phi}(\varepsilon))}{a_0 + \varepsilon} \right]$$

y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(D_{\varepsilon}) = 0$. Por el teorema de Cantor⁹, la inter-

sección de todos los D_{ε} es no vacía y así nuestro resultado es provado.

En conclusión podemos decir que en la técnica contractiva el objetivo es utilizar las funciones del tipo Lipschitziana con constante $k < 1$ definidos en espacios de Banach para luego utilizar el teorema de Banach o uno de sus corolarios y así obtener los resultados deseados.

Para comprender con claridad aspectos sobre los operadores monotónicos, consideremos los siguientes resultados.

9. George Simmons. Introduction to Topology And Modern Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. Pag: 70-75.

Teorema 2.5. De Minty

Sea H un espacio de Hilbert real y $T : H \longrightarrow H$ un operador (no necesariamente lineal) continuo y tal que existe una constante $\alpha > 0$, para la cual

$$(1) \quad \langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2; \quad x, y \in H, \quad \text{entonces } T \text{ es un homeomorfismo }^{10}.$$

Es verdad que operadores con la propiedad (1) son bastante naturales, y ya habian sido considerados anteriormente por Vainberg, Kacurovskii y por Zarantonello. Es más, esos autores hacian una hipótesis adicional que T fuese Lipschitziana, lo que hace posible demostrar el resultado usando el principio de contracción. Por otra parte nada nuevo se dice respecto a nuevas técnicas, sin embargo uno de los resultados más generales es el teorema siguiente.

Teorema 2.6. De Zarantonello

Sean H un espacio de Hilbert real y $T : H \longrightarrow H$ un operador Lipschitziano, esto es,

$$(2) \quad \|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\|, \quad x, y \in H, \quad \text{donde } K > 0.$$

Supongamos también que T satisface (1) del teorema anterior. Entonces T es un homeomorfismo.

10. Figueiredo, D.C. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Lecture Series, Nº 48; University of Maryland. 1967. Pág. 130-131..

Demostración.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (1) del teorema 2.5, obtenemos:

$\|Tx - Ty\| \geq \alpha \|x - y\|$, con lo cual se demuestra que T es inyectiva y T^{-1} es continua en $R(T)$. Resta probar que T es sobreyectiva, esto es, para cada $y \in H$, la ecuación $Tx = y$ tiene solución en x , o equivalentemente $x = x - \lambda(Tx - y)$ tiene solución, donde $\lambda \neq 0$.

La idea ahora es escoger λ de modo que el operador $Sx = x - \lambda(Tx - y)$ sea una contracción.

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \|Sx_1 - Sx_2\|^2 &= \|x_1 - \lambda(Tx_1 - y) - x_2 + \lambda(Tx_2 - y)\|^2 \\ \implies \|Sx_1 - Sx_2\|^2 &= \|x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - Tx_2)\|^2 \\ \implies \|Sx_1 - Sx_2\|^2 &= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2 \|Tx_1 - Tx_2\|^2 - \\ &\quad - 2\lambda \langle Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Luego utilizando (1) del teorema 2.5 y (2) del teorema 2.6 con $\lambda > 0$, obtenemos

$$\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leq (1 + k^2 \lambda^2 - 2\alpha \lambda) \|x_1 - x_2\|^2.$$

Por lo tanto basta tomar $0 < \lambda < \frac{2\alpha}{k^2}$ para que S sea

una contracción.

Los operadores que satisfacen la condición (1) del teorema 2.5, son llamados operadores monotónicos.

CAPITULO III

GENERALIZACIONES DE ALGUNOS DE LOS RESULTADOS DE BROWDER

En este capítulo pretendemos generalizar algunos resultados de Browder [02], sobre la convergencia débil de sucesiones de operadores no lineales en espacios de Banach.

Por simplicidad de técnica, laboraremos en espacios de Hilbert. Consideraremos D un subconjunto convexo y cerrado de este espacio y (V_j) una sucesión infinita de aplicaciones de D en D , no necesariamente distintas dos a dos. Haciendo la composición de los n primeros operadores V_j , definimos:

$$S_n(x) = V_n V_{n-1} \dots V_1(x)$$

Tenemos como principal objetivo investigar la convergencia de la sucesión $\{S_n(x)\}$ para un punto que es un punto fijo para todas las aplicaciones V_j .

Browder ha trabajado con sucesiones $\{V_j\}$ de operadores no expansivos. Queremos extender algunos de sus resultados para la clase más general de aplicaciones Cuasi-no expansivas (Vease def. 3-5. y nota 1.1).

Presentaremos inicialmente algunas definiciones y proposiciones básicas a fin de facilitar la lectura que sigue.

De manera general, omitiremos ejemplos, puesto que los conceptos aquí presentados ya son conocidos por aquellos que investigan en esta área.

Estos ejemplos pueden ser encontrados en Figueiredo [10] y Opial [22].

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES BASICAS

Definición 3.1. Espacio de Banach Estrictamente Convexo.

Un espacio de Banach X es estrictamente convexo si, para cualquiera pares de vectores x, y en X , tales que

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, \text{ se tiene que } x = \lambda y, \text{ con } \lambda > 0.$$

Proposición 3.1.

Todo espacio de Banach uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Definición 3.2. Espacio Dual o Conjugado.

Sea X un espacio de Banach. El conjunto de todas las funcionales lineales, continuas definidas sobre X es llamado dual o conjugado de X .

Observación.

Al espacio dual lo denotaremos por X^* .

Definición 3.3. Espacio de Banach Reflexivo.

Un espacio de Banach X es reflexivo si la aplicación canónica de X en su bidual X^{**} es suryectiva.

Proposición 3.2.

Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. ¹¹

11. Larsen, Ronald. Funtional Analysis. Marcel Dekker, Inc. New York. 1973. Pág.: 217.

Proposición 3.3.

Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

Definición 3.4. Conjunto de los puntos fijos.

Sea U una aplicación de un subconjunto D de X en X . El conjunto de los puntos fijos de U en D es el conjunto de todos los puntos x en D , tales que $U(x) = x$.

Observación.

Usaremos la notación $F(U)$ para tal conjunto.

Definición 3.5. Aplicación Cuasi-No-Expansiva.

Una aplicación V de un subconjunto D de un espacio de Banach X en X se llama cuasi no expansiva si las siguientes condiciones se verifican:

1. V tiene al menos un punto fijo en D
2. $|V(x)-p| \leq |x-p|$, para todo x en D y todo p en $F(V)$.

Nota 1.1.

El concepto de aplicación cuasi-no-expansiva lo introdujo Tricomí [32], para funciones reales y estudiada mas tarde por Díaz y Metcalf [07] y Dotson [08], para aplicaciones en espacios de Banach.

Observeamos que toda aplicación no expansiva $U : D \longrightarrow X$, es cuasi-no-expansiva, desde que $F(U) \neq \emptyset$ y que una aplicación lineal cuasi-no-expansiva en un subespacio D es no ex-

pansiva en este subespacio.

No obstante, existen aplicaciones continuas y discontinuas no lineales cuasi-no-expansivas las cuales no satisfacen las condiciones de no-expansividad como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.

Sea U una aplicación definida en el conjunto de los números reales \mathbb{R} de la siguiente manera:

$$U(0) = 0$$

$$U(x) = \frac{x}{2} \operatorname{Sen} \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Mostraremos que U satisface las condiciones de cuasi-no-expansividad, sin embargo U no cumple las condiciones de no-expansividad.

$$\text{Como } U(0) = 0 \implies 0 \in F(U) \implies F(u) \neq \emptyset.$$

$$\text{Sea } x \in F(u) \implies U(x) = x$$

$$x \neq 0$$

$$\implies x = \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$\implies 2x = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$\implies \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2 \quad \text{¡imposible!}$$

$$\implies F(U) = \{0\},$$

$$\text{Sea } x \in \mathbb{R} \text{ y } p = 0$$

$$\implies |U(x) - p| = |U(x) - 0| = |U(x)| = \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \left| \frac{x}{2} \right|$$

$$\implies |U(x) - p| \leq \left| \frac{x}{2} \right| < |x| = |x - p|.$$

Por consiguiente U es cuasi-no-expansiva.

Sin embargo U no satisface las condiciones de no-expansiva.

Escogiendo $x = \frac{2}{\pi}$, $y = \frac{6}{7\pi}$, tenemos:

$$\|U(x) - U(y)\| = \left| \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{6} \right|$$

$$\implies \|U(x) - U(y)\| = \left| \frac{1}{\pi} + \frac{3}{14\pi} \right| = \frac{17}{14\pi}$$

Por otro lado

$$\|x-y\| = \left| \frac{2}{\pi} - \frac{6}{7\pi} \right| = \frac{8}{7\pi} = \frac{16}{14\pi}$$

Luego existen x, y en $X = \mathbb{R}$ tales que:

$\|U(x) - U(y)\| > \|x-y\|$ y por consiguiente U no satisface la condición de no-expansividad.

Definición 3.6. Sucesión Admisible.

Una sucesión de aplicaciones $\{v_j\}$, donde cada v_j es definida en un subconjunto D de un espacio normado X en si mismo es una sucesión admisible, si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $0 \in D$
2. $v_j(0) = 0$, para todo j .
3. Existen dos aplicaciones continuas estrictamente crecientes ϕ, ψ , definidas en el conjunto de los números reales positivos \mathbb{R}^+ con valores en \mathbb{R}^+ , con $\phi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ y tales que

$$\phi(\|v_j(x)\|) + \psi(\|x-v_j(x)\|) \leq \phi(\|x\|) \text{ para todo } x \in D \text{ y}$$

para todo j .

TOPOLOGIA DEBIL

Definición 3.7.

Llamamos topología fuerte la topología métrica inducida por la norma en un espacio de Banach X .

Trabajando en X^* , dual de X , podemos introducir otra topología, la topología débil en X , de la siguiente manera:

Definición 3.8.

Dado $\varepsilon > 0$ y una sucesión finita de elementos f_1, f_2, \dots, f_n de X^* sea

$$V(f_1, f_2, \dots, f_n; \varepsilon) = \left\{ x \in X; \left| \langle f_i, x \rangle \right| < \varepsilon, \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

donde $\langle f_i, x \rangle$ indica el valor que la funcional $f_i \in X^*$ asume en $x \in X$.

Denotaremos por \mathcal{V} la familia de todos los conjuntos $V(f_1, f_2, \dots, f_n; \varepsilon)$ para cualquier ε y cualquier sucesión finita f_1, f_2, \dots, f_n . La familia \mathcal{V} constituye una base de vecindad de cero en X . La topología definida por la base \mathcal{V} es llamada, topología débil de X .

Definición 3.9. Convergencia Débil

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio de Banach X es débilmente convergente hacia $x \in X$ si

$$\langle \cdot, x_n \rangle \text{ converge hacia } \langle \cdot, x \rangle \text{ para todo } f \text{ en } X^*, \text{ dual}$$

de X .

Observación.

Usaremos las siguientes notaciones.

" \longrightarrow " , para indicar la convergencia fuerte.

" \rightharpoonup " , para indicar la convergencia débil.

Proposición 3.4. Smulyan, Eberlein.

Un espacio de Banach X es reflexivo si y solamente si toda sucesión acotada de elementos de X , contiene una subsucesión que es débilmente convergente.

El segmento que une a los vectores x e y que pertenecen a X es el conjunto de todos los vectores

$$z = (1-t)x + ty, \text{ donde } 0 \leq t \leq 1.$$

Un subconjunto D de un espacio vectorial X es convexo si el segmento $z = (1-t)x + ty$ pertenece a D cualesquiera que sean x, y en D .

Proposición 3.5. Mazur

Todo subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach es necesariamente débilmente cerrado.

Definición 3.10. Aplicación Convexa.

Sea D un subconjunto convexo de un espacio vectorial X (real). Una aplicación

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si:

$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ para todo $x, y \in D$
y $t \in [0, 1]$.

Definición 3.11. Aplicación Demi-Cerrada.

Una aplicación $U : D \rightarrow X$, definida en un subconjunto D de un espacio de Banach X con valores en X es demi-cerrada si para cualquiera sucesión $\{x_n\}$ en D , tal que

$x_n \rightarrow x_0$ en D y $U(x_n) \rightarrow y$ en X , entonces

$U(x_0) = y$.

Nota 1.2.

Fue demostrado por Browder [10] que si X es uniformemente convexo, D es convexo y cerrado, $U : D \rightarrow X$ es no-expansiva, entonces $I - U$ es demi-cerrada.

El primer resultado de este capítulo es una extensión del trabajo de Browder [02], y garantiza la convergencia de la sucesión $\{S_n(x)\}$, composiciones de un número n de aplicaciones V_j no-lineales y cuasi-no expansivas, hacia un punto común a todas ellas. Al reemplazar la condición de cuasi-no-expansividad por la condición de no-expansividad, fue necesario introducir una condición adicional, (a), para la sucesión auxiliar $\{U_k\}$ de aplicaciones de un subconjunto D de X en X , conforme podemos constatar a continuación.

Teorema 3-1.

Sea X un espacio de Hilbert, D un subconjunto convexo y cerrado de X , el cual contiene el origen, $\{V_j\}$ una sucesión admisible de aplicaciones cuasi-no-expansivas de D en D .

Sea $\{U_k\}$ una sucesión (finita o infinita) de aplicaciones continuas cuasi-no-expansivas de D en X , tal que, para todo k se cumple la siguiente condición:

(a) $(I-U_k)$ es demi-cerrado.

Sea F el conjunto de puntos fijos comunes a todas las aplicaciones U_k , esto es, $F = \bigcap_k F(U_k)$.

Supongamos que $0 \in F$ y para todo j y todo f en F , $V_j(f) = f$.

Supongamos también satisfecha la condición de recurrencia.

(R) para cada D_0 acotado en D , cada entero k y cada

$\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $m(\varepsilon, k)$, tal que, de cada conjunto de enteros sucesivos $\{m+1, \dots, n+m(\varepsilon, k)\}$, podemos escoger un entero j , tal que, para todo x en \mathbb{D}_0 , tenemos:

$$\|V_j(x) - U_k(x)\| < \varepsilon$$

Para $x \in \mathbb{D}$, sea $S_n(x) = V_n V_{n-1} \dots V_1(x)$.

Entonces, para cada $x \in \mathbb{D}$ la sucesión $\{S_n(x)\}$ converge débilmente hacia un elemento f de F .

La demostración del teorema 3-1., se hará a través de una serie de Lemas, usando la misma técnica de Browder [02].

Repetiremos algunos lemas usados por Browder, procurando dar mayor claridad a las demostraciones y modificando otros, obteniendo así nuevos resultados adaptados a la situación de nuestro problema.

El primer lema es debido a Browder y una vez que el mismo no depende de la expansividad de los operadores V_j , podemos utilizarlo en nuestro teorema.

Lema 3-1. (Browder, [02])

Sea \mathbb{D} un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach X y $\{V_j\}$ una sucesión admisible de aplicaciones de \mathbb{D} en \mathbb{D} .

Consideremos $S_n = V_n V_{n-1} \dots V_1$, para cada entero positivo n y $U_n = S_n(U_0)$, para U_0 arbitrario en \mathbb{D} .

Entonces tenemos que $\|U_n - U_{n-1}\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostración:

Por la admisibilidad de $\{V_j\}$ sabemos que existen dos aplicaciones continuas estrictamente crecientes, ϕ y Ψ de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R}^+ con $\phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, tales que, para todo $x \in \mathbb{D}$ y todo j ,

$$\phi(\|V_j(x)\|) + \Psi(\|x - V_j(x)\|) \leq \phi(\|x\|) \quad (3-1)$$

Haciendo $j = n$, $x = U_{n-1}$, y teniendo en cuenta que $U_{n-1} = S_{n-1}(U_0) = V_{n-1} \dots V_1(U_0)$, tenemos que

$$U_n = S_n(U_0) = V_n V_{n-1} \dots V_1(U_0) = V_n(U_{n-1}) = V_n(x)$$

reemplazando estos valores en (3-1), se tiene.

$$\phi(\|U_n\|) + \Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) \leq \phi(\|U_{n-1}\|)$$

de donde

$$\Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) \leq \phi(\|U_{n-1}\|) - \phi(\|U_n\|) \quad (3-2)$$

Sumando en n de 1 a N , tenemos:

$$\sum_{n=1}^N \Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) \leq \phi(\|U_0\|) - \phi(\|U_N\|) \leq \phi(\|U_0\|) \quad (3-3)$$

Haciendo $N \longrightarrow \infty$, sigue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) < \infty \quad (3-4)$$

Siendo la relación (3-4) consecuencia de (3-3) y de propiedades de la aplicación Ψ que garantizan ser la sucesión de sumas parciales de tal serie monótona, no decreciente, acotada superiormente por $\phi(\|U_0\|)$ y por tanto, convergente.

A partir de (3-4) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|U_{n-1} - U_n\|) = 0 \quad (3.5)$$

y por (3-5) y propiedades de Ψ , concluimos finalmente que $\|U_{n-1} - U_n\| \longrightarrow 0$.

El siguiente lema es una variación de un resultado de Browder [02], donde el autor exige la no-expansividad de cada aplicación de la sucesión $\{U_k\}$.

Adoptando a nuestro caso, constatamos que es suficiente exigir la continuidad de cada U_k , sin necesidad de que se le imponga la condición de no-expansividad, obteniendo de la misma forma la convergencia de la sucesión $\{u_n - U_k(u_n)\}$ hacia cero, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Lema 3-2.

Sea \mathbb{D} un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach X .

Consideremos $\{V_j\}$ una sucesión admisible de aplicaciones de \mathbb{D} en \mathbb{D} y $\{U_k; k \in A\}$ una sucesión (finita o infinita) de aplicaciones continuas de \mathbb{D} en X .

Supongamos que las dos sucesiones $\{V_j\}$ y $\{U_k\}$ satisfacen la condición de recurrencia (R) del teorema 3-1.

Sea $U_n = S_n(U_0)$, para U_0 elemento arbitrario de \mathbb{D} . Entonces para cada k en A , se tiene:

$$\|U_n - U_k(U_n)\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Demostración:

Fijando k en A y $\varepsilon > 0$, queremos demostrar que: $\exists N(\varepsilon, k)$, entero positivo, tal que

$$\|U_n - U_k(U_n)\| < \varepsilon \quad \text{para } n \geq N(\varepsilon, k).$$

Por la admisibilidad de $\{v_j\}$, garantizamos que $\{U_n\}$ es acotada. En efecto, sea $U_0 \in D$. Tenemos entonces que

$$U_n = S_n(U_0) = v_{n-1} \dots v_1(U_0), \quad \text{donde } U_n = v_n(U_{n-1}).$$

Una vez que $\{v_j\}$ es admisible, para $j = n \geq 2$ y $x = U_{n-1}$ se tiene:

$$\phi(\|v_n(U_{n-1})\|) + \Psi(\|U_{n-1} - v_n(U_{n-1})\|) \leq \phi(\|U_{n-1}\|).$$

Siendo $U_n = v_n(U_{n-1})$, sigue que:

$$\phi(\|U_n\|) + \Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) \leq \phi(\|U_{n-1}\|) \quad (3-6)$$

Una vez que Ψ es estrictamente creciente, con $\Psi(0) = 0$, sigue que

$$\Psi(\|U_{n-1} - U_n\|) \geq \Psi(0) = 0 \quad (3-7)$$

Las relaciones (3-6) y (3-7) verifican

$$\phi(\|U_n\|) \leq \phi(\|U_{n-1}\|)$$

y por tanto, $\|U_n\| \leq \|U_{n-1}\|$, $n \geq 2$.

Así, por la condición de recurrencia (\mathbb{R}), para $k \in A$ y $\varepsilon > 0$ fijos, existe un entero positivo $m(\varepsilon/2, k)$, tal que,

de cada bloque de enteros sucesivos $\{n+1, \dots, n+m(\varepsilon/2, k)\}$ podemos escoger un entero j , para el cual

$$\|V_j(x) - U_k(x)\| < \varepsilon/2, \text{ para todo } x \text{ en } D.$$

Para dicho j tenemos:

$$\begin{aligned} \|U_{j-1} - U_k(U_{j-1})\| &\leq \|U_{j-1} - V_j(U_{j-1})\| + \|V_j(U_{j-1}) - U_k(U_{j-1})\| \\ &\leq \|U_{j-1} - V_j(U_{j-1})\| + \varepsilon/2 \end{aligned} \quad (3-8)$$

Por el lema 3-1, sigue que:

$$\|U_n - U_{n-1}\| = \|V_n(U_{n-1}) - U_{n-1}\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \quad (3.9)$$

Así podemos escoger un entero $N(\varepsilon, k)$, tal que, para todo $m \geq N(\varepsilon, k)$.

$$\|U_m - V_{m+1}(U_m)\| < \frac{\varepsilon}{6m(\varepsilon/2, k)} < \varepsilon/6 \quad (3-10)$$

Para $n \geq N(\varepsilon, k)$, podemos escoger, como anteriormente un entero j del bloque $\{n+1, \dots, n+m(\varepsilon/2, k)\}$.

Así, tenemos

$$\|U_n - U_k(U_n)\| \leq \|U_n - U_{j-1}\| + \|U_{j-1} - U_k(U_{j-1})\| + \|U_k(U_{j-1}) - U_k(U_n)\| \quad (3-11)$$

Por otro lado,

$$\|U_n - U_{j-1}\| < \sum_{s=n}^{j-2} \|U_s - U_{s+1}\| \leq \sum_{s=n}^{n+m(\varepsilon, k)-2} \|U_s - V_{s+1}(U_s)\| \quad (3.12)$$

y a partir de (3-10) y (3-12) obtenemos que

$$\|U_n - U_{j-1}\| \leq m(\varepsilon/2, k) \frac{\varepsilon}{6m(\varepsilon/2, k)} < \frac{\varepsilon}{6} \quad (3-13)$$

Por otro lado, considerando (3-8) y (3-10) tenemos:

$$\begin{aligned} \|U_{j-1} - U_k(U_{j-1})\| &\leq \|U_{j-1} - V_j(U_{j-1})\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{4\varepsilon}{6} \end{aligned} \quad (3-14)$$

Además, por (3-13) y por la continuidad de U_k

$$\|U_k(U_n) - U_k(U_{j-1})\| < \varepsilon/6 \quad (3-15)$$

Por (3-11) llevando en cuenta también (3-13), (3-14) y (3-15) sigue finalmente que

$$\|U_n - U_k(U_n)\| < \varepsilon$$

y por la arbitrariedad de ε

$$\|U_n - U_k(U_n)\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty, \text{ para}$$

cada k fijo en A .

Dada una aplicación $U : D \longrightarrow X$ y una sucesión débilmente convergente en D , necesitamos garantizar que su límite débil sea un punto fijo de U en D . En [02] Browder, utiliza el hecho de ser la aplicación no expansiva y trabaja con espacios de Hilbert. Una vez que no más tenemos la no-expansividad del operador, se hizo necesario imponer otra condición (a) y se obtiene un nuevo Lema que garantiza la convergencia deseada, para un espacio de Banach X cualquiera.

Lema 3-3.

Sea D un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach X y sea U una aplicación continua de

\mathbb{D} en X .

Consideremos $\{V_n\}$ una sucesión en \mathbb{D} , tal que:

$$V_n \longrightarrow V \text{ y } \|V_n - U(V_n)\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

Supongamos también que

a) $I-U$ es demicerrado

Entonces $V \in \mathbb{D}$ y $U(V) = V$

Demostración:

Una vez que \mathbb{D} es un conjunto convexo y cerrado en X , (X espacio de Banach), tenemos por la proposición 3-5 (Mazur) que \mathbb{D} es débilmente cerrado.

Luego, como por hipótesis $V_n \longrightarrow V$, tenemos que $V \in \mathbb{D}$.

Además, $(I-U)(V_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y como por (a) $I-U$ es demi-cerrado, se concluye que

$$(I-U)(v) = 0, \text{ o sea } U(v) = v.$$

El siguiente resultado es un teorema de Browder [02]. Mostraremos que dicho teorema es un corolario de Lema 3-3, que acabamos de probar.

Corolario 3-1.

Sea \mathbb{D} un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert y U una aplicación no expansiva de \mathbb{D} en X .

Consideremos $\{V_n\}$ una sucesión en \mathbb{D} , tal que:

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{y} \quad \|(I-U)v_n\| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

Entonces, $v \in D$ y $U(v) = v$.

Demostración:

X es un espacio de Hilbert y a consecuencia de la proposición 3-3 es uniformemente convexo. Una vez que U es no expansiva sigue que $I-U$ es demicerrado (vease nota 1-2). Tenemos pues, satisfechas las hipótesis del Lema 3-3, lo que garantiza la tesis.

Debilitando las condiciones en X e imponiéndose la condición (a) del Lema 3-3, obtuvimos un nuevo resultado, del cual el Lema 5 de Browder [02] pasa a ser una consecuencia inmediata, utilizándose argumentos similares al del Corolario 3-1.

Lema 3-4.

Sea D un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach reflexivo y $\{v_j\}$ una sucesión admisible de aplicaciones de D en D .

Consideremos $\{U_k\}$ una sucesión (finita o infinita) de aplicaciones continuas de D en X , tal que, para todo k , la siguiente condición se satisface:

(a) $(I-U_k)$ es demicerrado.

Sea F el conjunto de los puntos fijos comunes a todas las aplicaciones U_k , o sea, $F = \bigcap_k F(U_k)$.

Supongamos que $o \in F$ y para todo j y para todo f en F ,

$$V_j(f) = f.$$

Supongamos también que se cumple la condición (R) del teorema 3-1.

Sea $S_n(x) = V_n V_{n-1} \dots V_1(x)$, para $x \in D$ y $U_n = S_n(U_0)$ para U_0 elemento arbitrario en D .

Entonces cada límite débil de la sucesión $\{U_n\}$ es elemento de F . En particular si F es constituido apenas por el punto cero, entonces $\{U_n\}$ converge débilmente hacia cero.

Demostración:

Con un razonamiento análogo al que se hizo en el Lema 3-2, se concluye de la admisibilidad de la sucesión $\{V_j\}$, que $\{U_n\}$ es una sucesión acotada.

Podremos entonces considerar $\{V_s = U_{n_s}\}$ una subsucesión de $\{U_n\}$, débilmente convergente, con límite débil v , una vez que X es reflexivo.

Por el Lema 3-2,

$V_s - U_k(V_s) \longrightarrow 0$, cuando $s \longrightarrow \infty$ y por el Lema 3-3 v es un punto fijo de U_k , para todo k en A esto es

$$F = \bigcap_k F(U_k).$$

Si F es el conjunto constituido apenas por el punto cero, entonces cada subsucesión débilmente convergente de la sucesión acotada $\{U_n\}$, converge débilmente hacia cero.

Luego, la sucesión principal $\{U_n\}$ converge débilmente hacia cero.

Nota 1-3.

Hasta el momento no hemos necesitado de la no-expansividad de la sucesión $\{V_j\}$ y $\{U_k\}$ y fue posible omitir esta hipótesis en los lemas anteriores.

Sin embargo, si agregamos esta condición para V_j en los Lemas (3-2) y (3-4) podríamos garantizar el acotamiento de $\{U_n\}$ sin la necesidad de exigir la admisibilidad de $\{V_j\}$ admitiendo solamente que $V_j(0) = 0$, para todo j .

En efecto, como $0 \in F$, suponiendo la cuasi-no-expansividad de V_j , tenemos:

$$\|V_j(x)\| \leq \|x\|$$

Haciendo $j = n$ y $x = U_{n-1}$ en la relación arriba tenemos:

$$\|V_n(U_{n-1})\| \leq \|U_{n-1}\|$$

y por tanto, $\|U_n\| \leq \|U_{n-1}\|$, o sea, $\{U_n\}$ es acotada.

El siguiente Lema se debe esencialmente a Opial [22]. Repetiremos su prueba, procurando dar una demostración mas detallada y precisa.

Lema 3-5. (Opial [22])

Sea F un subconjunto convexo cerrado de un espacio de Hilbert X y $\{U_n\}$ una sucesión en X tal que:

- 1) Para cada f en F , $\{\|U_n - f\|\}$ es una sucesión no creciente;
- 2) Cada límite débil de la sucesión $\{U_n\}$ está en F .
Entonces $\{U_n\}$ converge débilmente hacia un punto f_0 de F .

Demostración:

Para cada $f \in F$, considerese la siguiente función definida por:

$$p(f) = \lim_n \|U_n - f\|$$

Vemos fácilmente que p es una aplicación convexa. En efecto;

Sean f_1 y f_2 en F y $t \in [0, 1]$. Como F es convexo, sigue que

$$x = tf_1 + (1-t)f_2 \in F$$

Queremos garantizar que

$$p(x) \leq tp(f_1) + (1-t)p(f_2)$$

Así para todo n

$$U_n - (tf_1 + (1-t)f_2) = t(U_n - f_1) + (1-t)(U_n - f_2)$$

Luego

$$0 \leq \|U_n - (tf_1 + (1-t)f_2)\| \leq t\|U_n - f_1\| + (1-t)\|U_n - f_2\|$$

Pasando al límite, por la definición de p viene que:

$$p(x) \leq tp(f_1) + (1-t)p(f_2).$$

La función p es semi-continua inferiormente puesto que una aplicación convexa definida en un espacio de Banach y asumiendo valores en el conjunto de los números reales es semi-continua inferiormente.

Por la hipótesis (1), sigue que $\{\|U_n - f\|\}$ es acotada para f dado en F y por lo tanto $\|U_n\|$ es acotada por una constante M .

En vista de que, para todo $f \in F$

$$\|f\| - \|U_n\| \leq \|f - U_n\| = \|U_n - f\|$$

Por pasaje al límite, sigue que

$p(f) \geq \|f\| - M$ y por consiguiente, p asume su mínimo en algún punto $f_0 \in F$.

Sea f_0 tal mínimo. Mostraremos que $\{U_n\}$ converge débilmente hacia f_0 .

Como $\{U_n\}$ es acotado, es suficiente probar que cada w límite débil de la sucesión, coincide con f_0 .

Por la condición (2), es suficiente admitir que

$\{v_s\} = \{U_{n_s}\}$ converge débilmente hacia f_1 en F y mostrar que $f_1 = f_0$.

Para cada $t \in [0, 1]$ tenemos que el punto $(1-t)f_0 + tf_1$ es elemento de F , puesto que F es convexo.

Como x es de Hilbert viene:

$$\|v_s - (1-t)f_0 - tf_1\|^2 = \|v_s - f_0\|^2 + 2t \langle v_s - f_0, f_0 - f_1 \rangle + t^2 \|f_0 - f_1\|^2 \quad (*)$$

Cuando $s \rightarrow \infty$, $v_s \rightarrow f_1$, lo que implica,

$$\langle v_s - f_0, f_0 - f_1 \rangle \rightarrow \langle f_1 - f_0, f_0 - f_1 \rangle = - \|f_0 - f_1\|^2$$

Pasando al límite en (*) tenemos:

$$\begin{aligned} p((1-t)f_0 + tf_1)^2 &= p(f_0)^2 - 2t\|f_0 - f_1\|^2 + t^2\|f_0 - f_1\|^2 \\ &\geq p(f_0)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$2t\|f_0 - f_1\|^2 \leq t^2\|f_0 - f_1\|^2, \quad t > 0, \quad \text{lo que implica } f_1 = f_0$$

El próximo lema es un resultado ya conocido de la teoría de puntos fijos de operadores cuasi-no-expansivos. Hay varias demostraciones de este lema. La que presentaremos esta basada en el teorema de Dotson [08]

Lema 3-6.

Sea D un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach X , estrictamente convexo y U una aplicación cuasi-no-expansiva de D en X . Entonces, el conjunto de los puntos fijos de U en D es convexo.

Demostración:

Sean a y b elementos de $F(U)$, $a \neq b$ y $t \in (0,1)$. entonces

$$c = (1-t)a + tb \in D, \quad \text{puesto que } D \text{ es convexo.}$$

Como U es una aplicación cuasi-no-expansiva; tenemos

$$(1) \quad \|U(c) - a\| \leq \|c - a\| \quad \text{y}$$

$$(2) \quad \|U(c) - b\| \leq \|c - b\|$$

Observese que

$$c-a = t(b-a) \quad \text{y} \quad c-b = (1-t)(a-b).$$

Por tanto, sumandose miembro a miembro (1) y (2) y teniendo en consideración la observación anterior, tenemos:

$$|b-a| \leq |b-U(c)| + |U(c)-a| \leq |c-b| + |c-a| = |b-a|$$

Así,

$$|(b-U(c)) + (U(c)-a)| = |b-U(c)| + |U(c)-a|$$

Si $b - U(c) = 0$, entonces

$$|U(c)-a| = |b-a| \leq |c-a| = t|b-a|$$

Lo que implica que $t \geq 1$, contradicción.

Analogamente, si $U(c)-a = 0$, tenemos que $1 < 1-t$, donde $t \leq 0$, lo que es absurdo.

Por tanto, como X es estrictamente convexo, existe $r > 0$, tal que:

$$U(c)-a = r(b-U(c)) \tag{3}$$

Haciendo $S = \frac{r}{1+r}$, y usando (3), tenemos:

$$U(c) = (1-S)a + S(b)$$

donde $U(c)-a = S(b-a)$.

Luego,

$$S|b-a| = |U(c)-a| \leq |c-a| = t|b-a|$$

Lo que verifica.

$$S \leq t \tag{4}$$

Usando la relación $U(c)-b = (1-S)(a-b)$, tenemos:

$$(1-S)|a-b| = |U(c)-b| \leq |c-b| = (1-t)|a-b|$$

donde

$$(1-s) \leq 1-t \quad \text{y por tanto}$$

$$s \geq t \quad (5)$$

de (4) y (5), tenemos que $s = t$ y finalmente

$$U(c) = (1-t)a + tb = c$$

O sea, c es elemento de $F(U)$, lo que lleva a la conclusión de que $F(U)$ es convexo.

Estamos ahora en condición de demostrar el teorema 3-1.

Demostración: (Teorema 3-1).

Sea $U_n = S_n(U_0)$, para U_0 arbitrario en D .

Como $\{V_j\}$ es una sucesión admisible, sabemos que $\{U_n\}$

es acotada.

Por el Lema 3-2, garantizamos que

$$\|U_n - U_k(U_n)\| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty \quad \text{y por el}$$

Lema 3-4, sabemos que para cada punto límite débil de la sucesión $\{U_n\}$ es elemento de F , donde $F = \bigcap_k F(U_k)$

Cada $F(U_k)$ es un conjunto convexo, según lo obtenido en el lema 3-6.

Además, $F(U_k)$ es un conjunto cerrado, puesto que U_k es una aplicación continua para todo k .

Tenemos entonces que F es la intersección de subconjuntos convexos y cerrados de un conjunto convexo y cerrado D en X . Luego F también es convexo y cerrado.

Por hipótesis, para cada f en F , $V_j(f) = f$ y cada V_j es aplicación cuasi-no-expansiva.

Así

$$\|U_{n+1} - f\| = \|V_{n+1}(U_n) - f\| \leq \|U_n - f\|$$

y por tanto, la sucesión $\{\|U_n - f\|\}$ es no creciente.

Aplicando el Lema 3-5, sigue que $\{U_n\}$ converge débilmente hacia un elemento f_0 en F , obteniendo así nuestro resultado.

CONCLUSION

Tratándose de un trabajo de matemática educativa teníamos como primera meta presentar algunas técnicas no lineales en espacios de Banach, con el propósito de proporcionar a los futuros investigadores en esta área alguna facilidad de conocer más rápidamente las técnicas de punto fijo y de la teoría de sobreyectividad. Parte del objetivo fue logrado por medio del teorema de contracción de Banach, 1922 y de los teoremas sobre homeomorfismo de Minty, 1962 y de Zarantonello, por medio de los cuales se hizo la presentación de algunas de las técnicas de manera clara y de fácil comprensión.

A medida que el trabajo se fue desarrollando nos fue posible profundizar mucho más en estas técnicas y de manera natural sobre pasar el objetivo que teníamos como meta. En este sentido nos fue posible generalizar algunos resultados de Browder y con eso producir un trabajo de investigación de mayor rigurosidad matemático desde el punto de vista del análisis, esperando con esto proseguir investigando en este campo, ya que es un campo muy fértil.

Además, se espera que este trabajo sirva de fuente de información para todos aquellos investigadores que desean trabajar en este campo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [01] Belluce, L. P. e Kirk, W.A. Fixed Point Theorems for Certain classes of nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 141-146.
- [02] Browder, F. E. Convergence Theorems for sequences of Nonlinear operators in Banach Spaces. Math. Zeitschr. 100(1967), 201-255.
- [03] Browder, F. E. Semicontractive and Semiactretive nonlinear mappings in Banach Spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 74(1969), 660-665.
- [04] Browder, F. E. e Petryshyn, W.V. The Solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach Spaces. Bull Amer. Math. Soc. 72 (1966), 571-575.
- [05] Browder, F. E. e Petryshyn, W. V. Construction of Fixed Points of nonlinear mappings in Hilbert Space. J. Math Anal. and Appl. 20 (1967), 197-228.
- [06] Darbo, G. Punti unite in trasformazioni a condominio non compacto. Rend. Sem. Math. Univ. Padova 24 (1955). 84-92.

- [07] Diaz, J. B. e Metcalf, F. T. On the set of subsequential limit points of successive aproximations. Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), 459-485.
- [08] Dotson, Jr. W. G. Fixed Point of quasicontractive mappings. J. Austral. Math. Soc. 13 (1972), 167-170.
- [09] Dotson, Jr. W. G. On the Mann iterative Process Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 65-73.
- [10] Figueiredo, D. G. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Lecture Series, Nº 48, University of Maryland (1967).
- [12] Gossez, J. P. e Dozzo, E. L. Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings. Pacific J. Math. 40(1972), 565-573.
- [13] Hunig, Chaim Samuel. Análise Funcional E O Problema De Sturm-Liouville. Editorial EgGard Blucher Universidad de São Paulo. 1978.
- [14] Kirk, W. A. Fixed Point Theorems for nonexpansive mappings Satisfying certain boudary conditions. Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 143-149.

- [15] Kirk, W. A. On nonlinear mappings of strongly semi-contractive type. J. Math. Anal. and Appl. 27 (1969), 409-412.
- [16] Krasnosel'skiy, M. A y Zabrevko. Geometrical Methods of nonlinear Analysis. Editorial Springer-Verlag. 1984.
- [17] Kreyszig, Erwin. Introductory Functional Analysis with applications. John Wiley & Sons. Inc. 1978.
- [18] Kuhfittig, P. K. F. Fixed Points of several classes of nonlinear mappings in Banach Spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 300-306.
- [19] Macshane, E. J. e Botts, T. A. Real analysis. D Van Nostrand Company, Inc. New York, 1959.
- [20] Nussbaum, R. D. The fixed point index and fixed point theorems for K-set-Contractions. Ph. D. Dissertation, Univ. of Chicago. 1968.
- [21] Nussbaum, R. D. Asymptotic fixed point theorems for local condensing mappings. Math. Ann. 191. 1971, 181-195.

- [22] Opial, Z. Nonespansive and monotone mappings in Banach Spaces. Lecture notes, Brown University. 1967.
- [23] Opial, Z. Weak convergence of the sequence of successive aproximations for nonexpansive mappings.
Bull. Amer. Math. Soc. 73. 1967, 591-597.
- [24] Petryshyn, W. V. e Williamson Jr. T. E. Strongand weak convergence of the Sequence of Successive aproximations for Quasi-Nonexpasive mappings.
J. Math. Anal. and Appl. 43. 1973, 459-497.
- [25] Petryshyn, W. V. Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert Space.
J. Math. Anal. and Appl. 14. 1966, 276-284.
- [26] Petryshyn, W. V. Structure, of fixed points sets of K-set-Contractions. Archive Rat. Mech. an Anal. 40. 1971, 312-328.
- [27] Petryshyn, W. V. Fixed Point Theorems for Varioums Classes of 1-set-Contractive and 1-ball-Contractive mappings in Banach Spaces.
Trans. Amer. Math. Soc. 182, 1973, 323-352.

- [28] Royden, H. L. Real Analysis.
Macmillan Company, New York. 1966.
- [29] Sadovsky, B. N. On a fixed point principle.
Funktional Anal. i Prilozen 1, 1967, 74-76.
- [30] Schaefer, H. Über die Methoden Sukzessiver
Aproximationen. Jahresberichte Deutsch. Math.
Verein. 59, 1967, 131-140.
- [31] Smart, D. R. Fixed Point Theorems.
Cambridge University Press. 1974.
- [32] Tricomi, F. Un Teorema sulla convergenza delle
successive iterate di una funzione di una
variable reale. Giorn. Mat. Bahaglını 54,
1916, 1-9.