

**UNIVERSIDAD DE PANAMA**  
**VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO**  
**PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRIA EN MATEMATICA**

**UNA ALTERNATIVA EN LA CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS REALES**

**ARISCELA J. DIAZ**

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL**  
**GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN**  
**MATEMATICA EDUCATIVA**

**PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA**

**1995**

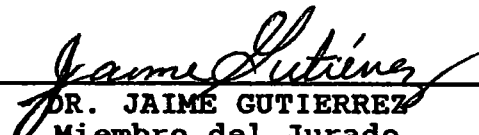


UNIVERSIDAD DE PANAMA  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática


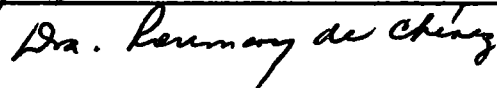
Aprobado por:

  
\_\_\_\_\_  
DR. ROGELIO ROSAS  
Director de Tesis

  
\_\_\_\_\_  
JORGE HERNANDEZ, Ph.D.  
Miembro del Jurado

  
\_\_\_\_\_  
DR. JAIME GUTIERREZ  
Miembro del Jurado

Fecha:

  
\_\_\_\_\_  


Ciudad Universitaria Octavio Méndez Perera

Estafeta Universitaria

Panamá, Rep. de Panamá

3 ABR 1995

F.M.

## DEDICATORIA

A mis padres *Pablo Antonio* y *Elvira* quienes me inculcaron con amor las pautas que me han ayudado a alcanzar, una vez más, otra de mis metas.

A mi querido esposo *Edwin Didier* quien con todo su amor y paciencia me acompaña y está siempre a mi lado cuando más lo necesito.

Y al nuevo rayito de luz que alumbra mi vida y quien es mi inspiración, mi hijo, *Isaac Antonio*.

cop. del autor

274310

## AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al profesor *Rogelio Rosas*, quién siempre estuvo disponible para asesorar y orientar en la elaboración de este trabajo.

A los profesores *Jorge Hernández* y *Jaime Gutiérrez*, mil gracias, pues sus consejos y sugerencias contribuyeron determinadamente en la culminación de este trabajo.

Y a mis compañeros de estudio gracias por todas las horas compartidas.

# CONTENIDO

	Página
<b>INTRODUCCION.</b>	<b>I</b>
<b>CAPITULO 1. AXIOMATIZACION DE LOS NUMEROS REALES.</b>	
1.1. Introducción.	1
1.2. Presentación Axiomática de los Números Reales.	1
<b>CAPITULO 2. CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS REALES.</b>	
2.1. Introducción.	10
2.2. Supuestos.	10
2.3. El conjunto $\mathcal{R}$	13
2.4. Estructura de Cuerpo Ordenado de $\mathcal{R}$ .	18
<b>CAPITULO 3. EL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.</b>	
3.1. Introducción.	30
3.2. El Principio del Extremo Inferior.	30
3.3. El Principio de Continuidad de Cauchy.	33
3.4. El Principio de Completitud de Dedekind.	39
3.5. El Principio de Intervalos Encajados de Cantor.	41

**CAPITULO 4. APLICACIONES.**

**4.1. Introducción. 48**

**4.2. Aplicaciones del Principio de  
Continuidad. 49**

**CONCLUSION 57**

**BIBLIOGRAFIA 59**

## INTRODUCCION

En nuestra práctica como docentes universitarios, nos encontramos muchas veces con dificultades al presentar una construcción de los números reales, siendo las más utilizadas las basadas en : Las sucesiones de Cauchy y las cortaduras de Dedekind.

El presente trabajo proporciona una construcción que utiliza, como números reales, intervalos de  $\mathbb{Q}$  que cumplen ciertas propiedades y cuya relación de orden depende directamente de la inclusión entre conjuntos. Como las propiedades de los conjuntos son manejadas por la mayoría de nuestros estudiantes, estamos seguros que la misma será de mucha utilidad. Se presentan además una serie de equivalencias del Principio de Continuidad y algunas aplicaciones.

Este trabajo esta dirigido a profesores y estudiantes de la Licenciatura en Matemática, así como a investigadores con la convicción de que hacer Matemática Educativa es hacer Matemática.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos. Cada capítulo es antecedido de una breve presentación o

introducción y eventualmente finaliza con conclusiones y observaciones pertinentes.

En el primer capítulo se presenta en forma axiomática el cuerpo de los números reales. Como principio de continuidad se ha escogido la propiedad de que todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  acotado inferiormente posee ínfimo en  $\mathbb{R}$ . En este capítulo se establece un isomorfismo entre cuerpos totalmente ordenados que tienen al menos dos elementos; este isomorfismo nos permitirá en el capítulo dos establecer que el conjunto construido no es más que  $\mathbb{R}$ . También se hace una demostración de la propiedad arquimediana (cuya novedad consiste en no utilizar el método de reducción al absurdo como consecuencia directa del Principio de Continuidad).

En el capítulo dos, que es el central de nuestro trabajo, se hace una construcción rigurosa del conjunto  $\mathfrak{R}$ , cuyos elementos son intervalos de  $\mathbb{Q}$  que cumplen las condiciones de ser abiertos, acotados inferiormente y no acotados superiormente. Se garantiza entonces que  $\mathfrak{R}$  es un cuerpo totalmente ordenado y completo. Para ello se definen las operaciones de adición y multiplicación, así como una relación de orden que depende directamente de la inclusión entre conjuntos; lo que hace posible que una serie de propiedades se obtengan de manera natural. Se demuestra que

$\mathcal{R}$  es completo, es decir, se establece que  $\mathcal{R}$  cumple todos los axiomas establecidos en el primer capítulo y por el isomorfismo se identifica con el conjunto  $\mathbb{R}$ .

El Principio de Continuidad se tratará en el capítulo tres, en el mismo se presentan una serie de equivalencias de este principio observando que cada una de ellas sirve de base para las diferentes construcciones de los números reales que se conocen.

Afirmando más aún la importancia de El Principio de Continuidad pasamos al capítulo cuatro, en el cual se presentan una serie de aplicaciones como los teoremas de Bolzano, Bolzano-Weierstrass, así como un teorema del Punto Fijo. En años recientes varios autores ( ver Hernández [ 12 ] y [ 13 ] entre otros) han insistido en la conveniencia de introducir estos resultados desde el mismo inicio del estudio del Cálculo. Creemos que las demostraciones presentadas aquí son accesibles a nuestros estudiantes novatos y nuestro esfuerzo ha consistido en desarrollar estas demostraciones de la manera más sencilla posible.

Una de las características más notables de este trabajo es el evitar las demostraciones por reducción al absurdo,

característica esta que le confiere cierta originalidad y eleva su valor ya que estamos convencidos que una demostración directa es mucho más elegante y didáctica que una demostración por reducción al absurdo.

Otra de las características que presenta el trabajo es la de brindar material que puede servir como referencia en la construcción de problemas y proyectos en cursos como el de Fundamentos y Análisis Real.

**CAPITULO 1**  
**AXIOMATIZACION DE LOS NUMEROS REALES**

## 1. INTRODUCCION.

Para iniciar nuestro trabajo hemos querido presentar en forma axiomática el cuerpo de los números reales. Este conjunto de axiomas nos daran las pautas ha seguir en la construcción que presentamos en el capítulo siguiente. El punto de partida es la existencia de un conjunto  $\mathbb{R}$  en el cual están definidas una adición, una multiplicación y una relación de orden.

## 2. PRESENTACION AXIOMATICA DE LOS NUMEROS REALES.

1. Existen al menos dos números reales distintos.

**Axiomas de la Adición.**

2. Propiedad Clausurativa.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; a + b \in \mathbb{R}$$

3. Propiedad Asociativa.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a + ( b + c ) = ( a + b ) + c$$

4. Propiedad Conmutativa.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; a + b = b + a$$

5. Existencia de Elemento Neutro.

$$\text{Existe } 0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R}; a + 0 = a$$

El conjunto  $\mathbb{R} - \{ 0 \}$  se denota por  $\mathbb{R}^*$ . De acuerdo al Axioma 1,  $\mathbb{R}^* \neq \emptyset$ .

6. Existencia de Opuestos.

Para todo  $a \in \mathbb{R}$  existe  $-a \in \mathbb{R}$  tal que  $a + (-a) = 0$

Axiomas de la Multiplicación.

7. Propiedad Clausurativa.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; a \cdot b \in \mathbb{R}$$

8. Propiedad Asociativa.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

9. Propiedad Conmutativa.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; a \cdot b = b \cdot a$$

10. Existencia de Elemento Unidad.

$$\text{Existe } 1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R}; a \cdot 1 = a$$

11. Existencia de Inversos.

Para todo  $a \in \mathbb{R}^*$  existe  $a' \in \mathbb{R}$  tal que  $a \cdot a' = 1$

12. Propiedad Distributiva.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**Axiomas de Orden.**

**13. Ley de Tricotomía.**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  se tiene una y sólo una de las siguientes afirmaciones :

$$a < b \text{ ó } a > b \text{ ó } a = b.$$

El conjunto  $\{ x \in \mathbb{R} / x > 0 \}$  se denota  $\mathbb{R}^+$

**14. Compatibilidad de la Adición.**

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^+$ ; si  $a < b$  entonces  $a + c < b + c$

**15. Compatibilidad de la Multiplicación.**

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ; si  $a < b$  entonces  $a \cdot c < b \cdot c$

**Axioma de Continuidad.**

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado y  $B$  un subconjunto no vacío de  $A$ . Un elemento de  $A$ ,  $L$  es cota inferior de  $B$  si: para todo  $x \in B$  resulta  $L \leq x$ . Un elemento  $y$  de  $A$  es ínfimo de  $B$  si :

- a.  $y$  es cota inferior de  $B$
- b. Si  $L$  es cota inferior de  $B$  entonces  $L \leq y$ .

Cambiando  $\leq$  por  $\geq$  y la palabra inferior por superior tenemos los conceptos duales de cota superior y supremo.

$B$  es acotado inferiormente ( superiormente ) si posee al menos una cota inferior ( respectivamente superior ).

#### 16. Axioma de Continuidad.

Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente de  $\mathbb{R}$  posee ínfimo en  $\mathbb{R}$ .

A todo conjunto que cumple los Axiomas 1-16 lo llamaremos un cuerpo totalmente ordenado y completo.

Una caracterización del ínfimo de un subconjunto  $B$  no vacío de  $\mathbb{R}$  es la siguiente :

- a.  $y$  es cota inferior de  $B$ .
- b. Para cada  $\epsilon > 0$  existe  $x \in B$  tal que  $x < y + \epsilon$ .

Además de los axiomas presentados se verifica la propiedad arquimediana. Como un aporte significativo de nuestro trabajo presentaremos una demostración directa de la propiedad arquimediana diferente a las que aparecen comunmente en los libros de Análisis, ya que las mismas se realizan, generalmente, por reducción al absurdo.

Enunciaremos primero algunas versiones equivalentes de la Propiedad Arquimediana.

### Propiedad Arquimediana

Cada una de las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- i) Para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , si  $a > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $na > b$ .
- ii) Para todo  $b > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N} : n > b$ .
- iii) Para todo  $b > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N} : 1/n < b$ .
- iv)  $\mathbb{R}$  es arquimediano si y sólo si  $\inf \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \} = 0$ .

#### Proposición 1.2.1.

$\mathbb{R}$  es arquimediano.

Demostración.

Sea  $A = \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \}$  probaremos que  $\inf A = 0$ .

$A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado inferiormente pues, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;  $0 \leq 1/n$ . Por el Axioma 16 existe  $\inf A = c$  de donde resulta que  $0 \leq c < 1$ .

Consideremos ahora

$$A' = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

como  $A' \subseteq A$  resulta que  $A'$  es acotado por lo tanto existe  $\inf A'$  y  $\inf A \leq \inf A'$ .

Por otro lado

$$\inf A' \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,  $\inf A' \leq 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; por consiguiente  $\inf A' \leq \inf A$ . Así  $\inf A' = c$

Por otro lado como  $0 \leq c \leq 1/n$  resulta que:

$$c^2 \leq \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

y como  $1/n \leq 1$  tenemos :

$$\frac{1}{n^2} - c^2 = (1/n - c)(1/n + c) \leq 2(1/n - c) \quad (2)$$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $c = \inf A$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n - c < \epsilon/2$ . Para este  $n$  se deduce de (2) que :

$$\frac{1}{n^2} < c^2 + \epsilon \quad (3)$$

De (1) y (3) se deduce que  $c^2 = \inf A'$  por tanto :

$$c^2 = c \quad (4)$$

Esta última ecuación sólo admite las soluciones  $c = 0$  y  $c = 1$ , pero  $c < 1$ , por lo tanto  $c = 0$ .

Así,  $\inf \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \} = 0$  y por iv) resulta que  $\mathbb{R}$  es arquimediano. ■

Cada cuerpo totalmente ordenado con al menos dos elementos posee un subcuerpo de fracciones o de números racionales. Las fracciones se obtienen como cocientes de múltiplos enteros de la unidad. Nos referimos a estos elementos genéricamente como números racionales.

Además de estos axiomas la siguiente proposición se verifica en todos los cuerpos totalmente ordenados y completos. Ha esta propiedad se le conoce con el nombre de Densidad de  $\mathbb{Q}$ .

**Proposición 1.2.2.**

Sean  $a, b$  números reales con  $a < b$ , entonces existe un número racional  $r$  tal que  $a < r < b$ .

**Demostración.**

Analizaremos los casos  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$ .

Si  $a > 0$  por la Proposición 1.2.1 existe un natural  $n$  tal que  $n(b - a) > 1$  por lo tanto,  $nb > na + 1$ . Consideremos el conjunto  $A = \{ m \in \mathbb{N} / m > na \}$ . Nuevamente, por la Proposición 1.2.1. resulta que  $A \neq \emptyset$ . Así,  $A$  posee un primer elemento el cual denotaremos por  $p$ , es decir, existe un natural  $p$  tal que  $p > na \geq p - 1$  de donde  $nb > na + 1 \geq p > na$ , así,  $b > p/n > a$  y tomando  $r = p/n$  se obtiene el resultado.

Si  $a = 0$  entonces se tiene que  $0 < \frac{1}{2} b < b$  por lo que

existe un racional  $r$  tal que  $0 = a < \frac{1}{2} b < r < b$ .

Si  $a < 0$  tenemos dos opciones :

si  $b > 0$  resulta que  $r = 0$  verifica la proposición. Por otro lado si  $b < 0$  entonces,  $0 < |b| < |a|$  por lo tanto existe un número racional  $r$  tal que  $0 < |b| < r < |a|$  así,  $a < -r < b$ .■

La proposición siguiente nos permitirá identificar el cuerpo de nuestra construcción con el conjunto  $\mathbb{R}$ .

### Proposición 1.2.3.

Dos cuerpos totalmente ordenados y completos con al menos dos elementos distintos son isomorfos.

El esquema de la demostración se basa en identificar el subcuerpo de las fracciones de ambos cuerpos. Sean  $A$  y  $A'$  dos cuerpos totalmente ordenados y completos,  $a \in A$ . Por la proposición anterior  $a = \inf \{ x \in A \cap \mathbb{Q} / x \geq a \}$ .

Como  $\{ x \in A \cap \mathbb{Q} / x \geq a \} \subseteq A'$  este conjunto es acotado inferiormente en  $A'$  luego existe  $\inf \{ x \in A \cap \mathbb{Q} / x \geq a \}$  en  $A'$ , llamemos ha este ínfimo  $a'$ . Resulta entonces que la aplicación

$$\psi: A \longrightarrow A'$$

que al elemento  $a$  le hace corresponder el elemento  $a'$  obtenido de la forma anteriormente presentada, es un isomorfismo.■

Podemos entonces presentar nuestra construcción de modo que al cumplirse los axiomas de los números reales el cuerpo obtenido será isomorfo al cuerpo  $\mathbb{R}$ .

**CAPITULO 2**  
**CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS REALES**

## 1. INTRODUCCION.

En este capítulo desarrollaremos la construcción del conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ . Para ello utilizaremos un tipo de intervalos de  $\mathbb{Q}$  que cumplen ciertas propiedades. Al conjunto de estos intervalos lo denotaremos por  $\mathcal{R}$ .  $\mathcal{R}$  será identificado con el conjunto  $\mathbb{R}$ . En  $\mathcal{R}$  definiremos una relación de orden y las operaciones de suma y producto que lo caracterizarán como un cuerpo totalmente ordenado y completo. Como se ha visto en el capítulo anterior son validas la propiedad arquimediana en  $\mathbb{Q}$  y la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ .

## 2. SUPUESTOS

Se dispone del sistema numérico  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  el cual es un cuerpo totalmente ordenado y arquimediano. Necesitamos además algunos conceptos que caracterizan ciertos subconjuntos de  $\mathbb{Q}$ .

### Definición 2.2.1.

Un subconjunto  $I$  de  $\mathbb{Q}$  es un intervalo si posee la siguiente propiedad :

Para todo  $x, y \in I$  con  $x \leq y$ , si  $z \in \mathbb{Q}$  y  $x \leq z \leq y$  entonces  $z \in I$ .

**Ejemplos.**

Suponiendo  $a, b \in \mathbb{Q}$  y  $a \leq b$  los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{Q}$  son intervalos :

$$] -\infty , b [ = \{ x \in \mathbb{Q} / x < b \}$$

$$] -\infty , b ] = \{ x \in \mathbb{Q} / x \leq b \}$$

$$] a , +\infty [ = \{ x \in \mathbb{Q} / a < x \}$$

$$[ a , +\infty [ = \{ x \in \mathbb{Q} / a \leq x \}$$

$$] a , b [ = \{ x \in \mathbb{Q} / a < x < b \}$$

$$[ a , b [ = \{ x \in \mathbb{Q} / a \leq x < b \}$$

$$] a , b ] = \{ x \in \mathbb{Q} / a < x \leq b \}$$

$$[ a , b ] = \{ x \in \mathbb{Q} / a \leq x \leq b \}$$

$$] -\infty , +\infty [ = \mathbb{Q}$$

Los intervalos pueden reducirse a un punto como es el caso de  $[ a , b ]$  si  $a = b$  o ser vacíos como en el caso  $] a , b [$  si  $a = b$ . Es importante señalar que además de los ya mencionados, hay intervalos de  $\mathbb{Q}$  que escapan al listado anterior. Por ejemplo :

$$I = \{ x \in \mathbb{Q} / x > 0 \text{ y } x^2 < 2 \}$$

es un intervalo, pero no es de la forma  $] a , b [$  pues en este caso debe ser  $b^2 = 2$  y no existe  $b \in \mathbb{Q}$  con esta propiedad.

**Definición 2.2.2.**

Un subconjunto no vacío  $A$  de  $\mathbb{Q}$  es acotado inferiormente si existe  $m \in \mathbb{Q}$  tal que para todo  $x \in A$ ,  $m \leq x$ .

De manera similar se consideran los conjuntos acotados superiormente.

De importancia para nuestra construcción son las negaciones de los conceptos anteriores.

**Definición 2.2.3.**

Un subconjunto no vacío  $A$  de  $\mathbb{Q}$  es no acotado superiormente si para todo  $M \in \mathbb{Q}$  existe  $x \in A$  tal que  $x > M$ .

**Ejemplos.**

$] a , +\infty [$  y  $[ a , +\infty [$ . El hecho de que estos conjuntos sean no acotados depende de la propiedad arquimediana de  $\mathbb{Q}$ .

**Definición 2.2.4.**

un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{Q}$  es abierto si para cada  $x \in A$ , existen  $a, b \in \mathbb{Q}$  tales que  $a < x < b$  y  $] a , b [ \subseteq A$ .

**Ejemplos.**

$] -\infty , b [ , ] a , b [ , ] -\infty , +\infty [ = \mathbb{Q}$

### 3. EL CONJUNTO $\mathcal{R}$

#### Definición 2.3.1.

Llamaremos número real a todo intervalo  $\alpha$  de  $\mathbb{Q}$  que cumpla las siguientes propiedades :

- i) acotado inferiormente
- ii) no acotado superiormente
- iii) abierto

El conjunto de los intervalos que cumplen la Definición 2.3.1 lo denotaremos por  $\mathcal{R}$ .

La razón de la escogencia de estos intervalos se puede observar en la dificultad de definir la multiplicación de manera que el producto sea un elemento de  $\mathcal{R}$ . Esta definición también es válida si cambiamos los conceptos superiormente e inferiormente por su contraparte pero el producto de dos intervalos de este tipo no es un intervalo similar.

Observemos que si  $x \in \alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ ,  $y \in \mathbb{Q}$  con  $x < y$  también  $y \in \alpha$  ya que como  $\alpha$  cumple ii) existe  $z \in \alpha$  tal que  $y < z$  y como  $\alpha$  es un intervalo,  $z \in \alpha$ .

#### Ejemplos.

1.  $\alpha = ] a , +\infty [ \in \mathcal{R}$  para cada  $a \in \mathbb{Q}$ . Al conjunto formado por este tipo de intervalos lo denotaremos por  $\mathcal{Q}$  y

los llamaremos racionales

2.  $\beta = \{ x \in \mathbb{Q} / x > 0 \text{ y } x^2 > 2 \}$  es un elemento de  $\mathcal{R}$  pero no es de la forma  $] a, +\infty [$  con  $a \in \mathbb{Q}$ . Estos números se llaman irracionales.

Pasemos a definir ahora una relación de orden en  $\mathcal{R}$ .

**Definición 2.3.2.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  decimos que  $\alpha$  es menor o igual a  $\beta$  y lo escribiremos  $\alpha \leq \beta$  si y sólo si  $\beta \in \alpha$ .

Si  $\alpha \leq \beta$  pero  $\alpha \neq \beta$  escribimos  $\alpha < \beta$ .

**Proposición 2.3.1.**

La relación  $\leq$  es una relación de orden.

**Demostración.**

Como la relación  $\subseteq$  verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva también la relación  $\leq$  verifica estas tres propiedades por lo que ella es una relación de orden. ■

Veamos ahora que en efecto  $\leq$  es una relación de orden total. Para ello necesitaremos el siguiente lema el cual nos será de utilidad no sólo en la demostración de la proposición siguiente sino a través del desarrollo del presente trabajo.

**Lema 2.3.1.**

Sea  $a \in \mathbb{Q}$  y  $\beta \in \mathcal{R}$  :

-si  $a \in \beta$  entonces  $] a , +\infty [ \subseteq \beta$

-si  $a \notin \beta$  entonces  $\beta \subseteq ] a , +\infty [$

**Demostración.**

Sean  $a \in \beta$ ,  $x \in ] a , +\infty [$  entonces  $a < x$  y por ser  $\beta$  un intervalo no acotado superiormente  $x \in \beta$ .

Sean  $a \notin \beta$ ,  $x \in \beta$ , como  $\beta$  es acotado inferiormente  $a < x$  por lo tanto  $x \in ] a , +\infty [$ . ■

**Proposición 2.3.2.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  entonces  $\alpha \leq \beta$  ó  $\beta \leq \alpha$ , es decir,  $\leq$  es una relación de orden total.

**Demostración.**

Si  $\alpha \neq \beta$  entonces  $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$  ó  $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ . Supongamos que  $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$  y sea  $a \in \alpha \setminus \beta$  entonces  $a \in \alpha$  y  $a \notin \beta$ . Por el Lema 2.3.1 se tiene que  $\beta \subseteq ] a , +\infty [ \subseteq \alpha$ , es decir,  $\beta \leq \alpha$ . De forma similar si  $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$  se concluye que  $\alpha \leq \beta$ .

Esta proposición es la ley de tricotomía, es decir, dados  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  se tiene una y sólo una de las siguientes situaciones  $\alpha < \beta$  ó  $\beta < \alpha$  ó  $\alpha = \beta$ . ■

**Proposición 2.3.3.**

La correspondencia

$$a \longrightarrow ] a , +\infty [$$

de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathcal{R}$  es inyectiva y creciente.

**Demostración.**

Observemos primero que  $\inf_{\mathbb{Q}} ]r, +\infty[ = r$ .

En efecto  $r$  es cota inferior de  $]r, +\infty[$  y todo  $a \in \mathbb{Q}$  tal que  $r < a$  no es cota inferior pues  $(r + a)/2 > r$  y  $(r + a)/2 < a$ , así pues cualquier otra cota inferior  $r'$  es menor o igual que  $r$ . Sea  $]r, +\infty[ = ]r', +\infty[$ . Como  $]r, +\infty[ \subseteq ]r', +\infty[$  entonces

$$r' = \inf_{\mathbb{Q}} ]r', +\infty[ \leq \inf_{\mathbb{Q}} ]r, +\infty[ = r$$

De la misma manera como  $]r', +\infty[ \subseteq ]r, +\infty[$  resulta que  $r \leq r'$ , luego  $r = r'$ . ■

**Proposición 2.3.4.**

El conjunto  $\mathbb{Q}$  es denso en el conjunto  $\mathcal{R}$ .

**Demostración.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  tales que  $\alpha < \beta$ , trabajando similar al Lema 2.3.1 como  $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$  existe  $a \in \alpha$  tal que  $\beta \leq ]a, +\infty[ \subseteq \alpha$ . Como  $\alpha$  es abierto existe  $a' < a$  tal que  $a' \in \alpha$  y considerando  $r = \frac{a+a'}{2}$  se obtiene que  $\beta < ]r, +\infty[ \subseteq \alpha$ , es decir,  $\alpha < \rho < \beta$  donde  $\rho = ]r, +\infty[$ . ■

Veamos ahora que el conjunto  $\mathcal{R}$  es completo.

**Proposición 2.3.5.**

Todo subconjunto  $A$  de  $\mathcal{R}$  no vacío y acotado inferiormente posee ínfimo  $\alpha_0$ .

**Demostración.**

Sea  $\alpha_0 = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ . Probemos que  $\alpha_0$  es un intervalo de  $\mathcal{R}$ . Lo primero que verificaremos es que en efecto  $\alpha_0$  es un intervalo.

Sean  $x, y \in \alpha_0$ ,  $z \in \mathbb{Q}$  tales que  $x < z < y$ . Como  $x \in \alpha_0$  existe  $\alpha_x$  en  $A$  tal que  $x \in \alpha_x$  entonces  $z \in \alpha_x$  pues  $x < z < y$  por tanto  $z \in \alpha_0$ .

i)  $\alpha_0$  es abierto por ser unión de abiertos.

ii) Como  $A$  está acotado inferiormente existe un  $\beta \in \mathcal{R}$  tal que  $\alpha \leq \beta$ , para todo  $\alpha \in A$ , entonces  $\alpha_0 \leq \beta$  y por lo tanto  $\beta \leq \alpha_0$ . En consecuencia  $\alpha_0$  está acotado inferiormente ya que  $\beta$  también lo está.

iii) Como  $\alpha \leq \alpha_0$  para todo  $\alpha$  en  $A$  resulta que  $\alpha_0 \leq \alpha$  para todo  $\alpha$  en  $A$  y como los  $\alpha$  no están acotado superiormente  $\alpha_0$  tampoco lo está.

Por las propiedades reticulares de la unión se verifica fácilmente que  $\alpha_0 = \inf_{\alpha \in A} \alpha$  pues la unión es el menor conjunto que contiene a todos los conjuntos que la forman. ■

Es importante que en este punto enunciemos la contraparte de esta proposición cuya demostración

realizaremos en el siguiente capítulo.

**Proposición 2.3.6.**

Todo subconjunto de  $\mathcal{R}$  no vacío y acotado superiormente posee supremo.

De todo lo realizado hasta este momento podemos decir que el par  $(\mathcal{R}, \leq)$  es un conjunto totalmente ordenado y completo. Pasemos ahora a definir las operaciones que dotarán al conjunto  $\mathcal{R}$  de la estructura de cuerpo.

**4. ESTRUCTURA DE CUERPO ORDENADO DE  $\mathcal{R}$**

**Definición 2.4.1.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  definimos  $\alpha + \beta = \{ x+y \mid x \in \alpha, y \in \beta \}$ .

Observemos que  $\alpha + \beta = \bigcup_{x \in \alpha} (x + \beta)$ .

**Proposición 2.4.1.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  entonces  $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$ .

**Demostración.**

Como  $x + \beta$  es una traslación de  $\beta$ ,  $x + \beta$  es un conjunto abierto y como la unión de abiertos es abierta resulta que  $\alpha + \beta$  es abierto.

Veamos ahora que  $\alpha + \beta$  es acotado inferiormente. En efecto  $\alpha$  es acotado inferiormente y por lo tanto existe  $M \in$

$\mathbb{Q}$  tal que  $M \leq x$  para todo  $x$  en  $\alpha$  de igual manera  $\beta$  es acotado inferiormente por lo que existe  $M' \in \mathbb{Q}$  tal que  $M + M' \leq x + y$  para todo  $x \in \alpha, y \in \beta$  por lo que  $\alpha + \beta$  es acotado inferiormente.

Por otro lado, dado  $m \in \mathbb{Q}$  como  $\beta$  no es acotado superiormente existe  $y \in \beta$  tal que  $m < y$ ; como  $\alpha$  no es acotado superiormente existe  $x \in \alpha$  tal que  $x > 0$ , luego  $m < x + y$  lo que quiere decir que  $\alpha + \beta$  no es acotado superiormente.

Finalmente verifiquemos que  $\alpha + \beta$  es un intervalo. Sean  $u, v \in \alpha + \beta$  y  $z \in \mathbb{Q}$  tal que  $u < z < v$ . Como  $u \in \alpha + \beta$  existe  $x \in \alpha$  tal que  $u \in x + \beta$ , pero  $x + \beta$  es un intervalo no acotado superiormente; por la observación hecha al final de la Definición 2.3.1,  $z \in x + \beta$  y por lo tanto  $z \in \alpha + \beta$ . ■

Veamos ahora dos propiedades importantes de la adición.

#### Proposición 2.4.2.

Sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma \in \mathcal{R}$  entonces :

- i)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  ( propiedad conmutativa )
- ii)  $\alpha + ( \beta + \gamma ) = ( \alpha + \beta ) + \gamma$  ( propiedad asociativa )

#### Demostración.

La demostración es evidente si se toma en cuenta que la definición de suma involucra números racionales y el

hecho de que estas dos propiedades se cumplen en  $\mathbb{Q}$ . ■

Necesitamos ahora comprobar la existencia de un elemento neutro y la existencia de opuestos aditivos para todos los elementos de  $\mathcal{R}$ .

**Proposición 2.4.3.**

Existe  $0 \in \mathcal{R}$  tal que para todo  $\alpha \in \mathcal{R}$  se tiene  $\alpha + 0 = \alpha$ .

**Demostración.**

Sean  $0 = ] 0 , +\infty [$ ,  $y \in \alpha + 0$  entonces  $y = x + z$  con  $x \in \alpha$  y  $z > 0$  entonces  $y > x$ ; por el Lema 2.3.1,  $y \in \alpha$  de donde  $\alpha + 0 \subseteq \alpha$ .

Tomemos ahora  $y \in \alpha$ . Como  $\alpha$  es un intervalo abierto existe  $x \in \alpha$  tal que  $x < y$  por lo que  $y - x > 0$  y podemos escribir  $y = (y - x) + x$  luego  $y \in \alpha + 0$ , es decir,  $\alpha \subseteq \alpha + 0$ . ■

**Proposición 2.4.4.**

Si  $\alpha \in \mathcal{R}$  existe  $-\alpha \in \mathcal{R}$  tal que  $\alpha + (-\alpha) = 0$ .

**Demostración.**

Observemos primero que si  $\alpha = ] a , +\infty [$  con  $a \in \mathbb{Q}$  el número real  $-\alpha = ] -a , +\infty [$  es tal que  $\alpha + (-\alpha) = 0$ .

Sea  $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \mathbb{Q}$ , se tienen dos posibilidades  $\alpha > 0$  ó  $\alpha < 0$ . Sea  $\alpha > 0$  entonces existe  $r > 0$  tal que para todo  $x \in \alpha$ ,  $x > r$ . Consideremos la familia de intervalos

$] -r , +\infty [$  tal que  $r > 0$  y  $r \notin \alpha$ . Esta familia es acotada inferiormente y por lo tanto existe :

$$-\alpha = \inf_{\substack{r \in \alpha \\ r > 0}} ] -r , +\infty [ = \cup_{\substack{r \in \alpha \\ r > 0}} ] -r , +\infty [$$

el cual procediendo como en la Proposición 2.3.5 se prueba que está en  $\mathcal{R}$ .

Veamos ahora que  $\alpha + ( -\alpha ) = 0$ .

Sea  $z \in \alpha + ( -\alpha )$  entonces existen  $x \in \alpha$ ,  $y \in -\alpha$  tales que  $z = x + y$ . Como  $y \in -\alpha$  existe  $r > 0$  cota inferior de  $\alpha$  tal que  $y \in ] -r , +\infty [$ , es decir,  $y > -r$  y como  $x > r$  se tiene  $x + y > 0$  por lo tanto  $z \in 0$  y así  $\alpha + ( -\alpha ) \subseteq 0$ .

Sea ahora  $z \in 0$ , es decir  $z > 0$ , existen dos posibilidades  $z \in \alpha$  ó  $z \notin \alpha$ . Si  $z \in \alpha$  tenemos  $z = z + 0$  y como  $0 \in -\alpha$  se tiene  $z \in \alpha + ( -\alpha )$ . Si  $z \notin \alpha$  por la propiedad arquimediana de los números racionales existe  $n_0$  tal que  $n_0 z \notin \alpha$  y  $( n_0 + 1 )z \in \alpha$  y por lo tanto,  $-n_0 z \in -\alpha$ , luego  $z = -n_0 z + ( n_0 + 1 )z$  está en  $\alpha + ( -\alpha )$  así  $0 \subseteq \alpha + ( -\alpha )$ .

Si  $\alpha < 0$  consideramos la familia de intervalos  $] -r , +\infty [$  tal que  $r < 0$  y  $r \notin \alpha$  la cual es acotada inferiormente por lo tanto posee un ínfimo y procedemos como en el caso anterior.■

**Definición 2.4.2.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  definimos  $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ .

De la definición y de las proposiciones anteriores se infieren las siguientes propiedades.

**Proposición 2.4.5.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  se tiene :

i)  $-(-\alpha) = \alpha$

ii)  $-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$

**Demostración.**

Basta observar que :

i)  $\alpha + (-\alpha) = 0$

ii)  $\alpha + \beta + (-\alpha) + (-\beta) = 0. \blacksquare$

**Proposición 2.4.6.**

Si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  y  $\alpha \leq \beta$  entonces  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ .

**Demostración.**

Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  y  $\alpha \leq \beta$  entonces  $\beta \leq \alpha$  por lo que  $\beta + \gamma \leq \alpha + \gamma$  de donde  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma. \blacksquare$

**Proposición 2.4.7.**

Para todo  $\alpha \in \mathcal{R}$  se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades :

- i)  $\alpha = 0$
- ii)  $\alpha > 0$
- iii)  $-\alpha > 0$

**Demostración.**

En i) y ii) basta tomar  $\beta = 0$  en la Proposición 2.3.2  
Para ver que  $\alpha < 0$  equivale a  $-\alpha > 0$  veamos que si  $\alpha < 0$   
entonces  $0 = \alpha + (-\alpha) < 0 + (-\alpha) = -\alpha$  por lo que  
 $0 < -\alpha$ . ■

**Proposición 2.4.8.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  y  $\alpha \leq \beta$  entonces  $\beta - \alpha \geq 0$ .

**Demostración.**

Basta observar que si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  y  $\alpha \leq \beta$  entonces  
 $\alpha + (-\alpha) \leq \beta + (-\alpha)$ , es decir,  $\beta - \alpha \geq 0$ . ■

**Definición 2.4.3.**

Definimos el conjunto  $\mathcal{R}^+$  como  $\mathcal{R}^+ = \{ \alpha \in \mathcal{R} / \alpha \geq 0 \}$ .

Nos resta ahora definir la multiplicación.

**Definición 2.4.4.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}^+$  definimos  $\alpha \cdot \beta = \{ xy / x \in \alpha, y \in \beta \}$ .

Observemos que :  $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{x \in \alpha} (x\beta)$ .

**Proposición 2.4.9.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}^+$  entonces  $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{R}^+$ .

**Demostración.**

Como  $x\beta$  es una dilatación de  $\beta$ ,  $x\beta$  es un conjunto abierto y como la unión de abiertos es abierta resulta que  $\alpha \cdot \beta$  es abierto.

Veamos ahora que  $\alpha \cdot \beta$  es acotado inferiormente. Como  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}^+$  poseen cotas inferiores  $M, M' \in \mathbb{Q}^+$  es decir, que para cada  $x \in \alpha, y \in \beta$  resulta  $M \leq x$  y  $M' \leq y$  luego  $MM' \leq xy$  es decir que  $MM'$  es una cota inferior de  $\alpha \cdot \beta$ .

Por otro lado como  $\beta$  no es acotado superiormente dado  $m \in \mathbb{Q}$  existe  $y \in \beta$  tal que  $m < y$ ; como  $\alpha$  no es acotado superiormente existe  $x \in \alpha$  tal que  $x > 1$  de donde  $xy > m$  luego existe  $xy$  en  $x\beta$  que verifica la Definición 2.1.3. es decir que  $x\beta$  es no acotado superiormente, y con mayor razón  $\alpha \cdot \beta$ .

Como en el caso de la adición se comprueba que también  $\alpha \cdot \beta$  es un intervalo.

Sea  $z \in \alpha \cdot \beta$  entonces existen  $x \in \alpha, y \in \beta$  tales que  $z = xy$ , como  $\alpha \geq 0$  y  $\beta \geq 0$  resulta  $x > 0, y > 0$  luego  $z > 0$  es decir  $\alpha \cdot \beta \leq 0$  ó  $\alpha \cdot \beta \geq 0$ . ■

Veamos ahora dos propiedades importantes de la multiplicación.

**Proposición 2.4.10.**

Si  $\alpha, \beta$  y  $\gamma \in \mathcal{R}^+$  entonces :

i)  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  ( propiedad conmutativa )

ii)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$  ( propiedad asociativa )

**Demostración.**

La demostración es evidente si se toma en cuenta que la definición de multiplicación involucra números racionales y el hecho de que estas dos propiedades se cumplen en  $\mathbb{Q}$ . ■

Necesitamos ahora dar la existencia de un elemento unidad y la existencia de inversos multiplicativos para todos los elementos de  $\mathcal{R}$  mayores que 0.

**Proposición 2.4.11.**

En  $\mathcal{R}^+$  existe  $1 = ] 1, +\infty [$  tal que para todo  $\alpha \in \mathcal{R}^+$  se tiene  $\alpha \cdot 1 = \alpha$ .

**Demostración.**

Sea  $z \in \alpha \cdot 1$ , es decir,  $z = xy$  con  $x \in \alpha$ ,  $y > 1$  por lo que  $x < z$  y como  $\alpha$  no es acotado superiormente  $z \in \alpha$ .

Recíprocamente sea  $z \in \alpha$ , como  $\alpha$  es abierto y esta contenido en  $] 0, +\infty [$  existe  $x \in \alpha$  tal que  $0 < x < z$  por lo tanto  $z = x \left( \frac{z}{x} \right)$  con  $x \in \alpha$  y  $z/x \in 1$  lo que implica que  $\alpha \in \alpha \cdot 1$ . ■

**Proposición 2.4.12.**

Si  $\alpha \in \mathcal{R}$  con  $\alpha > 0$  existe  $\alpha' \in \mathcal{R}$  tal que  $\alpha \cdot \alpha' = 1$ .

**Demostración.**

Observemos primero que si  $\alpha = ] a , +\infty [$  con  $a \in \mathbb{Q}$  el número real  $\alpha' = ] 1/a , +\infty [$  es tal que  $\alpha \cdot \alpha' = 1$ .

Sea  $\alpha > 1$  e irracional. Entonces existe  $r \notin \alpha$  tal que  $r > 1$ . Consideremos la familia de intervalos  $] 1/r , +\infty [$  tal que  $r > 1$  y  $r \notin \alpha$ . Esta familia es acotada inferiormente y por lo tanto existe

$$\alpha' = \inf_{\substack{r \notin \alpha \\ r > 1}} ] 1/r , +\infty [ = \cup_{\substack{r \notin \alpha \\ r > 1}} ] 1/r , +\infty [$$

el cual procediendo como en la Proposición 2.3.5 está en  $\mathcal{R}$ .

Veamos ahora que  $\alpha \cdot \alpha' = 1$ . Sea  $z \in \alpha \cdot \alpha'$  entonces existen  $x \in \alpha$ ,  $y \in \alpha'$  tales que  $z = xy$ . Como  $y \in \alpha'$  existe  $r > 1$  cota inferior de  $\alpha$  tal que  $y \in ] 1/r , +\infty [$ , es decir,  $y > 1/r$  y como  $x > r$  se tiene  $xy > 1$  por lo que  $z \in 1$  y así  $\alpha \cdot \alpha' \subseteq 1$ .

Sea ahora  $z \in 1$ , es decir  $z > 1$ . Si  $z > 1$  y  $z \in \alpha$  resulta que  $z = 1 \cdot z \in \alpha \cdot \alpha'$ . Si  $z > 1$  y  $z \notin \alpha$  consideramos la sucesión  $z, z^2, \dots$  en donde existirá un natural  $n$  tal que  $z^n \notin \alpha$  y  $z^{n+1} \in \alpha$  luego  $\frac{1}{z^n} \in \alpha'$  y  $z = \frac{1}{z^n} \cdot z^{n+1} \in \alpha \cdot \alpha'$  por lo que  $1 \subseteq \alpha \cdot \alpha'$ .

El caso  $0 < \alpha < 1$  se analiza de igual manera considerando los intervalos de la forma  $] 1/r, +\infty [$  donde  $r \in \alpha$  y  $0 < r < 1$ . ■

Veamos ahora la propiedad distributiva que relaciona las dos operaciones de adición y multiplicación.

**Proposición 2.4.13.**

Si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}^+$  entonces  $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ .

**Demostración**

Sean  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  entonces :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \bigcup_{x \in \alpha} x(\beta + \gamma) = \bigcup_{x \in \alpha} (x\beta + x\gamma) \\ &= \bigcup_{x \in \alpha} x\beta + \bigcup_{x \in \alpha} x\gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nos falta definir el producto para todos los elementos de  $\mathcal{R}$ .

**Definición 2.4.5.**

Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$  se tiene que :

- i)  $\alpha \cdot \beta = -[ \alpha( -\beta ) ]$  si  $\alpha \geq 0, \beta \leq 0$ .
- ii)  $\alpha \cdot \beta = -[ ( -\alpha )\beta ]$  si  $\alpha \leq 0, \beta \geq 0$ .
- iii)  $\alpha \cdot \beta = ( -\alpha )( -\beta )$  si  $\alpha \leq 0, \beta \leq 0$ .

De todo lo presentado podemos concluir que  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo.

**Proposición 2.4.14.**

Si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  con  $\alpha \leq \beta$  y  $\gamma \geq 0$  entonces  $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ .

**Demostración.**

Sea  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$  y  $\gamma \geq 0$ ,  $\alpha \leq \beta$  entonces  $\beta - \alpha \geq 0$  por lo que  $\gamma \cdot (\beta - \alpha) \geq 0$  aplicando la Definición 2.4.2 y la Proposición 2.4.13 resulta  $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ . ■

**Proposición 2.4.15.**

Si  $\alpha \in \mathcal{R}$  entonces  $\alpha \cdot 0 = 0$ .

**Demostración.**

Como  $0 = \gamma + (-\gamma)$  para todo  $\gamma \in \mathcal{R}$  y por la Proposición 2.4.13 resulta que  $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot (-\gamma) = 0$ . ■

En conclusión hemos obtenido un modelo de cuerpo totalmente ordenado y completo. Como observamos en el capítulo 1 este cuerpo es único salvo isomorfismos.

Los números reales pueden visualizarse en una recta numérica como la semirecta racional formada por los números racionales mayores que el número en cuestión. Vale la pena señalar que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = \inf \{ r \in \mathbb{Q} / \alpha < r \}$ .

La idea de escoger estas semirectas o intervalos de  $\mathbb{Q}$  surge de dos consideraciones geométricas: Un segmento puede

extenderse ilimitadamente en una dirección dada. Dado un segmento fijo, todo otro segmento puede superarse con un múltiplo del primero. Estas corresponden, en  $\mathbb{Q}$ , al no acotamiento y a la propiedad arquimediana.

**CAPITULO 3**  
**EL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD**

## 1. INTRODUCCION.

Recordemos que toda construcción de los números reales tiene por objeto obtener un cuerpo totalmente ordenado que satisface el Principio de Continuidad ( Axioma 16 del capítulo 1 ) o uno equivalente al mismo.

En este capítulo estableceremos algunas de las equivalencias del Principio de Continuidad ya que en nuestra construcción se obtuvo el principio del extremo inferior ( Axioma 16 ). Haremos las demostraciones de las equivalencias de los demás principios con el principio del extremo inferior para concluir después que todos ellos son equivalentes.

Para el desarrollo de este capítulo utilizaremos las propiedades algebraicas de los números reales tal y como se establecieron en el capítulo uno.

## 2. EL PRINCIPIO DEL EXTREMO INFERIOR.

Este es el principio de continuidad que utilizaremos en nuestra construcción por lo tanto lo utilizaremos como base para hacer todas las equivalencias. Ligado al concepto de ínfimo se presentará también el concepto de supremo para presentar entonces el principio del extremo superior.

**Definición 3.2.1.**

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales. Diremos que  $a \in \mathbb{R}$  es el ínfimo de  $A$  y lo denotaremos por  $a = \inf A$  si :

- i)  $a$  es una cota inferior de  $A$ .

- ii) Si  $b$  es una cota inferior de  $A$ , entonces  $b \leq a$ .

**Definición 3.2.2.**

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales. Diremos que  $a \in \mathbb{R}$  es el supremo de  $A$  y lo denotaremos por  $a = \sup A$  si :

- i)  $a$  es una cota superior de  $A$ .

- ii) Si  $b$  es una cota superior de  $A$ , entonces  $a \leq b$ .

Caracterizaremos ahora estos dos conceptos mediante las proposiciones siguientes.

**Proposición 3.2.2.**

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \inf A$  si y sólo si

- i)  $a \leq x$  para todo  $x \in A$

- ii) Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $x < a + \epsilon$ .

**Proposición 3.2.1.**

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de números reales y sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \sup A$  si y sólo si

- i)  $x \leq a$  para todo  $x \in A$

w) Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $a - \epsilon < x$ .

### Principio del Extremo Inferior ( PEI )

Todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo en  $\mathbb{R}$ .

### Principio del Extremo Superior ( PES )

Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee supremo en  $\mathbb{R}$ .

### Proposición 3.2.3.

El Principio del Extremo Inferior es equivalente al Principio del Extremo Superior.

#### Demostración.

Primero haremos la observación de que si es válido PEI y tenemos un intervalo  $I$  acotado inferiormente pero no superiormente entonces existe  $\alpha \in A$  tal que  $I = ] \alpha , +\infty [$  ó  $I = [ \alpha , +\infty [$ .

En efecto,  $I \neq \emptyset$  y por PEI existe  $\inf I = \alpha$ . Como para todo  $x \in I$ ,  $x \geq \alpha$  entonces  $I \subseteq [ \alpha , +\infty [$ .

Por otra parte si  $x > \alpha$  como  $\alpha = \inf I$  existe  $y \in I$  tal que  $\alpha \leq y < x$  pero entonces  $x \in I$  por lo que  $] \alpha , +\infty [ \subseteq I$ , así  $] \alpha , +\infty [ \subseteq I \subseteq [ \alpha , +\infty [$ .

Análogamente se tiene para PES.

Hecha esta observación pasaremos a la demostración.

PEI  $\Rightarrow$  PES. Sea  $A$  un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente y consideremos el conjunto

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / x \text{ es cota superior de } A \}.$$

Como  $A$  está acotado superiormente resulta que  $B \neq \emptyset$  y no es acotado superiormente ya que si  $b \in B$  resulta que  $] b, +\infty[ \subseteq B$ , además  $B$  es un intervalo acotado inferiormente pues  $A \neq \emptyset$  y si  $a \in A$ ,  $a$  es cota inferior de  $B$ ; de donde  $] \alpha, +\infty[ \subseteq B \subseteq [ \alpha, +\infty[$ , donde  $\alpha = \inf B$ .

Verifiquemos ahora que  $B = [ \alpha, +\infty[$  con lo que  $\alpha = \sup A$ .

Sea  $x > \alpha$  entonces existe  $y \in B$  tal que  $\alpha \leq y < x$  luego como  $y \in B$  resulta que para todo  $z \in A$ ,  $z \leq y$  de donde para todo  $z \in A$ ,  $z < x$  y por lo tanto  $x \notin A$ . De lo anterior se deduce que si  $x \in A$  entonces  $x \leq \alpha$ , es decir,  $\alpha \in B$ .

De manera similar se demuestra que PEI  $\Rightarrow$  PES. ■

### 3. EL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD DE CAUCHY.

Otro de los principios equivalentes al principio del extremo inferior es el Principio de Cauchy. Este principio sirve de base en la construcción de los números reales por sucesiones de Cauchy. Para el estudio del mismo supondremos conocidos los conceptos básicos de las sucesiones reales y solo recordaremos las nociones siguientes.

**Definición 3.3.1.**

Una sucesión de números reales  $\{ x_n \}$  se dice decreciente si  $x_{n+1} \leq x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Se dice que la sucesión es creciente si  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .

**Definición 3.3.2.**

Una sucesión de números reales  $\{ x_n \}$  es acotada si existe un número real  $m > 0$  tal que  $| x_n | \leq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .

**Definición 3.3.3.**

Una sucesión de números reales  $\{ x_n \}$  es convergente si existe un número real  $L$  con la siguiente propiedad : para todo número real  $\epsilon > 0$  existe un natural  $n_0$  tal que

$$| x_n - L | < \epsilon \text{ siempre que } n \geq n_0$$

En tal caso diremos que  $\{ x_n \}$  converge a  $L$ .

**Principio de Continuidad de Cauchy I ( PCCI )**

Toda sucesión creciente y acotada de números reales es convergente.

**Principio de Continuidad de Cauchy II ( PCCII )**

Toda sucesión decreciente y acotada de números reales es convergente.

**Proposición 3.3.1.**

El Principio de Continuidad de Cauchy I es equivalente al Principio de Continuidad de Cauchy II.

**Demostración.**

PCCI  $\Rightarrow$  PCCII. Sea  $\{ x_n \}$  una sucesión decreciente y acotada de números reales, entonces existe un número real  $m > 0$  tal que  $-m < x_n < m$ , para todo  $n \geq 1$ .

Consideremos la sucesión  $y_n = m - x_n$ . Es claro que la sucesión  $\{ y_n \}$  es creciente y acotada y por PCCI convergente. Así,  $\{ m - y_n \}$  es convergente por lo que  $\{ x_n \}$  es también convergente.

PCCII  $\Rightarrow$  PCCI. Sea  $\{ x_n \}$  una sucesión creciente y acotada de números reales, entonces existe un número real  $m > 0$  tal que  $-m < x_n < m$  para todo  $n \geq 1$ .

Consideremos la sucesión  $y_n = m - x_n$ . Es claro que la sucesión  $\{ y_n \}$  es decreciente y acotada y por PCCII convergente. Así,  $\{ m - y_n \}$  es convergente por lo que  $\{ x_n \}$  es convergente. ■

**Proposición 3.3.2.**

El Principio del Extremo Inferior es equivalente al Principio de Continuidad de Cauchy II.

**Demostración.**

PEI  $\Rightarrow$  PCCII. Sea  $\{ x_n \}$  una sucesión decreciente y acotada de números reales. Consideremos el conjunto

$$A = \{ x_n / n \geq 1 \}.$$

Como la sucesión  $\{ x_n \}$  es acotada existe un número real  $m > 0$  tal que

$$| x_n | \leq m, \text{ para todo } n \geq 1$$

por lo tanto  $A$  es acotado inferiormente. Como  $A \neq \emptyset$  por PEI existe  $c = \inf A$ .

Probemos que  $\{ x_n \}$  converge a  $c$ . Sea  $\epsilon > 0$ , como  $c = \inf A$  existe un natural  $N$  tal que

$$c \leq x_N < c + \epsilon$$

pero como  $\{ x_n \}$  es decreciente resulta que

$$c \leq x_n \leq x_N < c + \epsilon$$

para todo  $n \geq N$  de donde

$$0 \leq x_n - c < \epsilon \text{ para todo } n \geq N$$

y  $\{ x_n \}$  converge a  $c$ .

PCCII  $\Rightarrow$  PEI.

Sea  $A$  un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente, es decir, existe un número real  $M_1$  tal que  $M_1 \leq x$ , para todo  $x \in A$ . Sea  $x_1$  un elemento fijo de  $A$ . Si  $x_1 = M_1$  entonces es claro que  $M_1 = \inf A$ .

Supongamos entonces que  $M_1 < x_1$ . Si  $(M_1 + x_1)/2$  es una cota inferior de  $A$  tomamos

$$M_2 = (M_1 + x_1)/2 \text{ y } x_2 = x_1,$$

de lo contrario hacemos  $M_2 = M_1$  y fijamos un elemento  $x_2$  de A menor que  $(M_1 + x_1)/2$ . Resulta entonces que

$$M_1 \leq x_2 < (M_1 + x_1)/2$$

y que  $M_2$  es cota inferior de A.

Ahora si  $x_2 = M_2$  entonces es claro que  $M_2 = \inf A$ .

Supongamos entonces que  $M_2 < x_2$ . Si  $(M_2 + x_2)/2$  es una cota inferior de A tomamos

$$M_3 = (M_2 + x_2)/2 \text{ y } x_3 = x_2,$$

en caso contrario hacemos  $M_3 = M_2$  y fijamos un elemento  $x_3$  de A menor que  $(M_2 + x_2)/2$ . Resulta entonces que

$$M_2 \leq x_3 < (M_2 + x_2)/2$$

y que  $M_3$  es cota inferior de A.

Además

$$M_2 - x_2 \geq (M_1 - x_1)/2$$

y también

$$M_3 - x_3 \leq (M_2 - x_2)/2 \leq (M_1 - x_1)/2^2.$$

Repetiendo este proceso obtenemos una sucesión decreciente

de elementos de A

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

y una sucesión creciente de cotas inferiores de A

$$M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \dots \leq M_n \leq \dots$$

como  $\{ x_n \}$  es decreciente y acotada por PCCII es convergente. Como también se verifica PCCI y  $\{ M_n \}$  es

creciente y acotada ella es convergente. Como  $\{ M_n - x_n \}$  es decreciente y

$$0 \leq M_n - x_n \leq (M_{n-1} - x_{n-1}) / 2 \leq (M_1 - x_1) / 2^{n-1}$$

resulta entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$$

denotaremos este límite por L el cual probaremos es el ínfimo de A.

Sea  $x \in A$ , como cada  $M_n$  es cota inferior de A resulta que  $M_n \leq x$ , para todo  $n \geq 1$  por lo que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq x,$$

para todo  $x \in A$ , es decir,  $L$  es cota inferior de  $A$ .

Sea  $k$  otra cota inferior de  $A$  resulta entonces que  $k \leq x_n$ , para todo  $n \geq 1$ , esto es,

$$k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

por lo tanto  $L = \inf A$ . ■

#### 4. EL PRINCIPIO DE COMPLETITUD DE DEDEKIND.

Esta es una versión más geométrica del principio de continuidad y es el que sirve de base a una de las construcciones más utilizadas en los cursos de fundamentos, las cortaduras de Dedekind.

##### Principio de Completitud de Dedekind ( PCD )

Supongamos que  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}$  con las propiedades.

i)  $A \cup B = \mathbb{R}$

ii)  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

iii) Si  $a \in A$  y  $b \in B$  entonces  $a < b$

Entonces existe un único número real  $x$  tal que :

$$\text{Si } u < x \text{ entonces } u \in A \quad (1)$$

$$\text{Si } x < v \text{ entonces } v \in B$$

Observemos que de acuerdo a i) y ii)  $x$  pertenece a uno y sólo uno de los conjuntos  $A$  o  $B$ .

**Proposición 3.4.1.**

El Principio del Extremo Inferior es equivalente al Principio de Completitud de Dedekind.

**Demostración.**

PEI  $\Rightarrow$  PCD. Sean A y B dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  los cuales satisfacen las propiedades i), ii) y iii) del PCD.

Sea  $a \in A$ , entonces  $a \leq b$  para todo  $b \in B$  por lo tanto B es un conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente luego por PEI existe  $c = \inf B$ .

Supongamos que  $u < c$ , entonces  $u \notin B$  y por i)  $u \in A$ .

Supongamos que  $c < v$ , como  $c = \inf B$  existe  $b \in B$  tal que  $c \leq b < v$ . Como  $a < b$  para todo  $a \in A$  y  $b < v$  se tiene que  $v \notin A$  luego por ii)  $v \in B$ . Por la unicidad del ínfimo resulta que c es único.

PCD  $\Rightarrow$  PEI. Sea E un conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente.

Sean

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / x \text{ es cota inferior de } E \}$$

y  $B = \mathbb{R} \setminus A$ . Como E está acotado inferiormente,  $A \neq \emptyset$ .

Como  $E \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , sean  $a \in A$ ,  $b \in B$  entonces b no es cota inferior de E luego existe  $g \in E$  tal que  $g < b$ . Como  $a \in A$  se tiene que  $a \leq g$  y así,  $a < b$ . Hemos probado hasta el momento que se cumplen i), ii) y iii) luego por PCD existe un único número real x que verifica (1).

Probemos que  $x = \inf E$ .

Observemos que la condición  $u < x \Rightarrow u \in A$  equivale a  $u \notin A \Rightarrow x \leq u$ ; es decir, que  $x$  es cota inferior de  $\mathbb{R} \setminus A$ .

De manera similar de  $x < u \Rightarrow u \in \mathbb{R} \setminus A$  deducimos que  $u \in A \Rightarrow u \leq x$  luego  $x$  es cota superior de  $A$ .

Por otro lado

$$E \subseteq (\mathbb{R} \setminus A) \cup \{x\}$$

y por tanto  $x \in A$ .

Como  $x \in A$  y es cota superior de  $A$  entonces  $x = \sup A = \inf E$ . ■

## 5. EL PRINCIPIO DE INTERVALOS ENCAJADOS DE CANTOR.

Una construcción de los números reales por medio de los intervalos encajados de Cantor aparece en [ 9 ].

Para la comprensión de este principio primero daremos la definición de intervalos encajados.

### Definición 3.5.1.

Se dice que una sucesión de intervalos  $\{ I_n \}_{n \geq 1}$  forma un sistema de intervalos encajados si :

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

### Definición 3.5.2.

Si  $I_n$  es un intervalo con extremos  $a_n$  y  $b_n$ ,  $a_n \leq b_n$  entonces el diámetro de  $I_n$  se denota por  $\text{diam} ( I_n )$  y se

define por :

$$\text{diam} ( I_n ) = b_n - a_n.$$

**Principio de Intervalos Encajados de Cantor ( PIEC )**

Sea  $\{ I_n \}_{n \geq 1}$  una sucesión de intervalos cerrados no vacíos y encajados tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} ( I_n ) = 0$ . Entonces existe un único número real  $c$  tal que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ c \}$$

**Proposición 3.5.1.**

El Principio de Intervalos Encajados de Cantor es equivalente al Principio de Completitud de Dedekind.

**Demostración.**

PCD  $\Rightarrow$  PIEC. Sea  $\{ I_n \}_{n \geq 1}$  una sucesión de intervalos cerrados no vacíos y encajados tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} ( I_n ) = 0$ . Denotemos  $I_n = [ a_n , b_n ]$  entonces por hipótesis,

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$$

Si existe un natural  $N$  tal que  $a_N = b_N$ , entonces para todo  $n \geq N$  tenemos que

$$a_n = a_N = b_N = b_n$$

así  $I_n = [a_n, b_n]$  para todo  $n \geq N$  y por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ a \}.$$

Así que supongamos que  $a_n < b_n$  para todo  $n \geq 1$ . Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{ x / x \leq a_n \text{ para algún índice } n \}$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Veamos que se verifican las propiedades de PCD.

i) Es claro que  $A \cup B = \mathbb{R}$

ii) Como  $a_1 \in A$  y  $b_1 + 1 \in B$ ,  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ .

iii) Sean  $a \in A$  y  $b \in B$ . Como  $b \notin A$  se tiene que para todo  $n$   $b > a_n$  y como  $a \in A$  entonces existe  $N$  tal que  $a \leq a_N$  luego  $a < b$ . Como se verifican las condiciones de PCD existe un único número real  $x$  que verifica las condiciones de ( 1 ).

Probemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ x \}.$$

Observemos primero que debido a que la sucesión de intervalos  $\{ I_n \}$  es encajada tenemos que  $a_n < b_n$  para todo  $n \geq 1$ .

Sea  $n \geq 1$ , como  $a_n \in A$  tenemos que  $a_n \leq x$  y como  $b_n \in B$  tenemos que  $x \leq b_n$ . Así pues  $x \in I_n = [a_n, b_n]$  para todo  $n \geq 1$ . Sea

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

entonces

$$|y - x| \leq b_n - a_n \text{ para todo } n \geq 1$$

por consiguiente :

$$0 \leq |y - x| \leq \lim (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} (I_n) = 0$$

así pues  $y = x$ . Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}.$$

PIEC  $\Rightarrow$  PCD. Sean A y B subconjuntos de  $\mathbb{R}$  con las propiedades de PIEC. Fijemos dos elementos  $a_1 \in A$  y  $b_1 \in B$  entonces por iii) de PCD  $a_1 < b_1$ .

Si  $(a_1 + b_1)/2 \in A$  tomamos

$$a_2 = (a_1 + b_1)/2 \text{ y } b_2 = b_1.$$

Si  $(a_1 + b_1)/2 \in B$  tomamos

$$a_2 = a_1 \text{ y } b_2 = (a_1 + b_1)/2.$$

Así pues

$$a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1,$$

$$I_1 = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] = I_2$$

$$\text{y } \text{diam} ( I_2 ) = ( b_1 - a_1 )/2.$$

Nuevamente si  $( a_2 + b_2 )/2 \in A$  tomamos

$$a_3 = ( a_2 + b_2 )/2 \text{ y } b_3 = b_2$$

y si  $( a_2 + b_2 )/2 \in B$  tomamos

$$a_3 = a_2 \text{ y } b_3 = ( a_2 + b_2 )/2.$$

Denotemos  $I_3 = [ a_3 , b_3 ]$  entonces,

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \text{ y}$$

$$\text{diam} ( I_3 ) = ( b_1 - a_1 )/2^2.$$

Reiterando este proceso formamos una sucesión encajada de intervalos cerrados no vacíos

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

tales que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} ( I_n ) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{2^{n-1}} = 0$$

Que el límite anterior sea precisamente cero es consecuencia de la Propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}$ .

Por PIEC tenemos que existe un número real  $x$  tal que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ x \}$$

Supongamos que  $u < x$  entonces existe un número natural  $n$  tal que  $u < a_n$ . Como por construcción  $a_n \in A$  se tiene por iii) que  $u \in A$ . Supongamos que  $x < v$  entonces existe un natural  $n$  tal que  $b_n < v$ . Como  $b_n \in B$  se tiene por iii) de PCD que  $v \in B$ . Probemos ahora que  $x$  es el único número real que satisface estas dos propiedades. Supongamos que existe otro número real  $y$  que satisface estas dos propiedades entonces como  $a_n \in A$  y  $b_n \in B$  se tiene que  $a_n \leq y \leq b_n$  para todo  $n \geq 1$  por consiguiente

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ x \}.$$

Así,  $y = x$ . ■

Como conclusión de este capítulo tenemos el siguiente Teorema que se obtiene inmediatamente de las proposiciones analizadas en el mismo.

**Teorema 3.5.1.**

**En  $\mathbb{R}$  son equivalentes los siguientes principios :**

- 1. PEI**
- 2. PES**
- 3. PCCI**
- 4. PCCII**
- 5. PCD**
- 6. PIEC**

**En un contexto más general :**

**PCD equivale a PIEC + Propiedad Arquimediana**

Hemos alcanzado nuestro propósito de presentar de manera clara las equivalencias del principio de continuidad. En vista de la importancia del mismo hemos considerado conveniente presentar en el próximo capítulo algunas de sus aplicaciones.

**CAPITULO 4**  
**APLICACIONES**

## 1. INTRODUCCION.

Además de servir como base para la construcción de los números reales, la importancia del Principio de Continuidad radica en su aplicación en diferentes resultados de la Matemática. La construcción del cuerpo totalmente ordenado y completo  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  puede no tener cabida en los cursos elementales de la Licenciatura en Matemática; sin embargo de este conjunto de propiedades de  $\mathbb{R}$  se pueden y deben obtener algunos resultados fundamentales en el Análisis.

En este capítulo consideraremos algunas consecuencias del principio de continuidad. Particular importancia tienen el teorema de Weierstrass, sobre máximos y mínimos; el Teorema de Rolle y el de valor medio de Lagrange que son la base del cálculo diferencial en una variable; su demostración, obligatoria, se basa precisamente en el citado teorema de Weierstrass.

Otros resultados siempre relativos a funciones continuas son los teoremas de Bolzano y Bolzano-Weierstrass de valor intermedio. Es difícil determinar la gran importancia que estos teoremas tienen tanto en la matemática pura como en la aplicada; en problemas de ecuaciones, de inversión de funciones, de funciones implícitas, etc. por

eso consideramos indispensable su demostración. Afirmaciones similares pueden hacerse a propósito de los teoremas de punto fijo.

Así pues, en este capítulo presentaremos demostraciones de algunos teoremas clásicos sobre funciones continuas que pueden abordarse de manera directa y elegante con la ayuda de el principio de continuidad o alguna de sus equivalencias. Por supuesto que esto no agota la gama de aplicaciones del principio; áreas como la Teoría de Integración, de igual importancia, quedan fuera del alcance y propósito de este trabajo, pero nos indican el amplio panorama abierto en el Análisis, por la consideración de este principio.

## 2. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.

El primer resultado que analizaremos será el teorema del valor intermedio de Bolzano.

### Proposición 4.2.1.

Sea  $f$  una función continua definida en un intervalo  $[a, b]$ . Si  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos contrarios, entonces existe un  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = 0$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$  y sea  $m > 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , dividamos  $[a, b]$  en  $m$  partes iguales, entonces,

$$a < a + \frac{b-a}{m} < a + \frac{2(b-a)}{m} < \dots < a + \frac{(m-1)(b-a)}{m} < b$$

consideremos la imagen por  $f$  de estos puntos; es decir,

$$f(a), f\left(a + \frac{b-a}{m}\right), f\left(a + \frac{2(b-a)}{m}\right), \dots, f\left(a + \frac{(m-1)(b-a)}{m}\right), f(b)$$

Si al menos uno de estos valores es cero no hay nada que probar. Supongamos que todos ellos son distintos de cero. Como  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$  entonces existen dos valores consecutivos de  $f$  donde el primero es negativo y el otro es positivo. Designemos estos valores por  $f(a_1)$  y  $f(b_1)$  tales que  $f(a_1) < 0$  y  $f(b_1) > 0$ , de donde

$$a_1 < b_1 \text{ y } b_1 - a_1 = (b-a)/m.$$

De la misma forma dividiendo el intervalo  $[a_1, b_1]$  en  $m$  partes iguales nuevamente obtendremos dos valores consecutivos de  $f$  tales que el primero es negativo y el otro es positivo ( si al menos uno de estos valores es cero no hay nada que probar ). Designemos estos valores por  $f(a_2)$  y  $f(b_2)$  tales que  $f(a_2) < 0$  y  $f(b_2) > 0$  donde  $a_2 < b_2$ ,

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \text{ y } b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{m^2} = \frac{b-a}{m^2}.$$

Reiterando este procedimiento obtendremos una sucesión  $\{ I_n \}$  de intervalos encajados con  $I_n = [a_n, b_n]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } I_n = 0$$

luego por PIEC existe un  $x_0$  tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ x_0 \},$$

así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0.$$

Como  $f$  es continua resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0),$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

por lo que  $f(x_0) = 0$ . ■

Veremos ahora una aplicación directa de este resultado, el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

#### Corolario 4.2.1.

Sea  $f$  una función continua definida en un intervalo cerrado  $[ a , b ]$ . Si  $f(a) \neq f(b)$  entonces  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$  en el intervalo  $[ a , b ]$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $f(a) < f(b)$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) < \lambda < f(b)$ . Definamos una función

$$g : [ a , b ] \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$g(x) = f(x) - \lambda.$$

Es claro que esta función es continua y además

$$g(a) = f(a) - \lambda < 0$$

$$g(b) = f(b) - \lambda > 0$$

luego por la Proposición 4.2.1 existe un  $x_0 \in ( a , b )$  tal que

$$g(x_0) = f(x_0) - \lambda = 0,$$

es decir,  $f(x_0) = \lambda$ . ■

Cabe señalar que este teorema de Weierstrass permite definir rigurosamente las potencias racionales de una constante positiva distinta de uno.

El hecho es que las funciones  $f_n(x) = x^n$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$  transforman de manera continua y monótona el conjunto  $\mathbb{R}^+$  en sí mismo. Por tanto si  $m \in \mathbb{Z}$  por la Proposición 4.2.1 existe un único real positivo  $x_0$  tal que :

$$x_0^n = a^m$$

Esto da pie a la introducción de las potencias racionales definiendo :

$$a^{\frac{m}{n}} = x_0$$

Otra aplicación directa de la Proposición 4.2.1 es el teorema del punto fijo.

**Proposición 4.2.2.**

Sea  $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  una función continua entonces existe un  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

**Demostración.**

Si  $f(0) = 0$  ó  $f(1) = 1$  la proposición es verdadera. Supongamos entonces que  $f(0) > 0$  y  $f(1) < 1$  y definamos la función

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$g(x) = f(x) - x.$$

Es claro que  $g$  es una función continua y que además

$$g(0) = f(0) > 0 \text{ y } g(1) = f(1) - 1 < 0$$

luego por la Proposición 4.2.1 existe un  $x_0 \in (0, 1)$  tal que  $g(x_0) = 0$  de donde  $f(x_0) = x_0$ . ■

Presentaremos ahora el Teorema de Weierstrass con una demostración directa diferente a las demostraciones por

reducción al absurdo que con frecuencia aparecen en los libros de Análisis.

**Proposición 4.2.3.**

Si una función  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  está acotada en  $[a, b]$ , es decir, existe una constante  $K \neq 0$  tal que  $-K \leq f(x) \leq k$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.**

Observemos primero que siendo  $f$  continua en  $x = a$ , existe  $c$ ,  $a < c \leq b$  tal que  $f$  es acotada en  $[a, c]$ . Sea

$$A = \{ c / a < c \leq b, f \text{ es acotada en } [a, c] \}$$

por la observación anterior  $A \neq \emptyset$  y  $b$  es cota superior de  $A$ , luego existe

$$c_0 = \sup A$$

y  $c_0 \leq b$ .

Probemos que  $f$  es acotada en  $[a, c_0]$ ;  $f$  es acotada alrededor de  $c_0$  por lo tanto existe  $c \in A$  tal que  $c < c_0$  como  $f$  es acotada en  $[a, c]$  y en  $[c, c_0]$  también es acotada en  $[a, c_0]$ . Así pues  $c_0 \in A$ .

Si demostramos que  $c_0 = b$  obtendremos lo deseado.

Sea  $c \in A$  y  $c < b$  entonces existe  $c' \in A$  tal que  $c < c'$ , esto equivale a decir que

$$\text{si } c \in A \text{ y } \forall c' \in A, c' \leq c \text{ entonces } c \geq b.$$

Pero  $c_0 = \sup A \in A$  por tanto para todo  $c \in A$ ,  $c \leq c_0$  y por lo señalado  $c_0 \geq b$ . Como  $c_0 \leq b$  resulta entonces que  $c_0 = b$ . ■

Otra consecuencia del principio de continuidad y del teorema anterior es la proposición siguiente.

**Proposición 4.2.4.**

Sea  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $[a, b]$ , es decir, si  $A = \{ f(x) / x \in [a, b] \}$  existen  $c, d \in [a, b]$  tales que  $f(c) = \sup A$  y  $f(d) = \inf A$ .

Omitiremos la demostración pero observemos que por la proposición anterior  $A$  es acotado y por PES y PEI existen  $\sup A$  y  $\inf A$ , comprobando que están en  $A$  se obtiene finalmente el resultado. ■

**Proposición 4.2.5.**

Sea  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  una función inyectiva y continua en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es estrictamente monótona en  $[a, b]$ .

**Demostración.**

Como  $f$  es inyectiva en  $[a, b]$  se debe tener que  $f(a) < f(b)$  ó  $f(b) < f(a)$ . Analizaremos el caso  $f(a) < f(b)$  y demostraremos que  $f$  es estrictamente creciente. El caso  $f(b) < f(a)$  se hace de manera similar y se demuestra que  $f$  es estrictamente decreciente.

Como  $f$  es continua existen  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que  $f(x_1) = \min([a, b])$  y  $f(x_2) = \max([a, b])$

Sea  $I$  el intervalo de extremos  $x_1, x_2$ , por el

**Corolario 4.2.1**

$$f(I) = f([a, b])$$

y como  $f$  es inyectiva  $I = [a, b]$  y por lo tanto

$$f(a) = f(x_1) < f(x_2) = f(b)$$

El procedimiento anterior se puede aplicar a todo intervalo  $[a, x]$  contenido en  $[a, b]$ , es decir, que el máximo de  $f$  en  $[a, x]$  es  $f(x)$ .

Sean  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  entonces,

$$[a, x] \subset [a, y]$$

Como  $f$  es inyectiva,

$$f([a, x]) = [f(a), f(x)] \subset [f(a), f(y)] = f([a, y])$$

luego  $f(x) < f(y)$ . ■

## CONCLUSION

Después de la realización de este trabajo debemos hacer las siguientes conclusiones, basadas en los resultados obtenidos y en todo el trabajo de investigación realizado. No dudamos que el mismo sirva como marco de referencia a profesores y estudiantes en los cursos de la Licenciatura en Matemática y en la opción Matemática Educativa del Programa Centroamericano de Maestría en Matemática.

Por el isomorfismo establecido el cuerpo totalmente ordenado y completo  $(\mathcal{R}, +, \cdot, \leq)$  se puede identificar con  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  donde el subcuerpo  $Q$  es también identificado con  $\mathbb{Q}$ . Es decir que tenemos un modelo del sistema presentado axiomáticamente en el capítulo 1.

La construcción de los números reales presentada ofrece ventajas, ya que muchos de los resultados son bastante evidentes si se toma en cuenta el manejo por parte del estudiante de la teoría de conjuntos y el conocimiento práctico de los números racionales.

El alcance de El Principio de Continuidad queda de manifiesto en la gran cantidad de aplicaciones que tiene el mismo.

Las demostraciones directas presentadas en el trabajo son de menor complejidad que las realizadas por reducción al absurdo que aparecen en la mayoría de los textos de Análisis. Además estas demostraciones usan de manera reiterada el significado de los conceptos básicos tales como límite, continuidad, etc. y por esto sirven para reforzar la comprensión de los mismos.

Es claro que los conceptos matemáticos se introducen por sus usos. No tiene sentido presentar los números reales como un sistema que satisface los dieciseis axiomas del primer capítulo y luego olvidarse del axioma 16. Este axioma es crucial; en algún momento debemos sacar de él consecuencias importantes. Los teoremas del capítulo 4 son una muestra de estas consecuencias.

## BIBLIOGRAFIA

1. Aliprantis, C. y Burkinshzw, O. Principles of Real Analysis. Academic Press, Inc. New York, 1990.
2. Ayres, Frank. Algebra Moderna. Editorial McGraw-Hill. México, 1969.
3. Bartle, G.; Sherbert, R. Introducción al Análisis Matemático de una variable. Editorial Limusa. México, 1989.
4. Bottazzini, Humberto. The Higher Calculus : A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. Springer-Verlag. New York, 1986.
5. Bourbaki, Nicolás. Elementos de Historia de las Matemáticas. Alianza Editorial S.A. Madrid, España 1972.
6. Bourbaki, Nicolás. Elements of Mathematics General Topology. Adison-Wesley Publishing Co. New York.
7. Dieudonné, Jean. Foundations of Modern Analysis. Academic Press, Inc. New York, 1980.

8. Dieudonné, Jean. **Mathematics—the music of Reason.** Springer-Verlag. New York, 1992.
9. Ebbinghaus, H.D. et al. **Zahlen.** Springer-Verlag. New York, 1983.
10. Grattan-Guinness, I. **Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción Histórica.** Editorial Alianza Universidad. España, 1980.
11. Hernández, Edith de. **El Axioma de Completitud.** Monografía. Universidad de Panamá. Panamá, 1993.
12. Hernández, Jorge E. **El Teorema de Weierstrass y sus implicaciones en la enseñanza del Cálculo.** Memorias del Primer Congreso Nacional de Matemática Educativa. Universidad de Panamá. Panamá, 1992.
13. Hernández, Jorge E. **Motivación a la enseñanza de los Números Reales.** Artículo. Universidad de Panamá, Panamá.
14. Hewitt, E. y Stromberg, K. **Real and Abstract Analysis.** Springer-Verlag. New York, 1974.
15. Lang, Serge. **Analysis I.** Adison-Wesley Publishing Co.

New York, 1974.

16. National Council of Teachers of Mathematics. Editorial Trillas S.A. México, 1986.
17. Royden, H.L. Real Analysis. McMillan Company. New York, 1963.
18. Rigo, Mirela. Elementos óricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático. Artículo. Revista Educación Matemática N<sup>o</sup> 1 y 2. México, 1994.
19. Rudin, Walter. Principios de Análisis Matemático. McGraw-Hill. México, 1976.
20. Simmons, G.F. Topology and Modern Analysis. McGraw-Hill Book Company. New York, 1963.