

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POST-GRADO
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

PROBLEMAS LONGITUDINALES EN LA TEORIA DE GRAFOS

POR:

EYDA JIMENEZ DE SANTIMATEO

Tesis presentada como uno de los
requisitos para optar por el Grado de
Maestro en Ciencias con Especializa-
ción en Matemática.

Panamá, República de Panamá

TM

UNIVERSIDAD DE PANAMA



VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

Aprobado por:

Director de Tesis

[Signature of Dr. Jose del R. Garrido]

Dr. JOSE DEL R. GARRIDO

Miembro del Jurado

[Signature of Dr. Jorge Rojo]

Dr. JORGE ROJO

Miembro del Jurado

[Signature of Dr. Rogelio Rosas]

Dr. ROGELIO ROSAS

Fecha

Octubre 22 de 1986

12 ENE. 1987

Obsequio del autor

221080

"Año 1986, Centenario del Natalicio del Dr. Harmodio Arias"

CIUDAD UNIVERSITARIA OCTAVIO MENDEZ PEREIRA

ESTAFETA UNIVERSITARIA

PANAMA, R. DE P.

DEDICATORIA

Este trabajo va dedicado especialmente a mis dos pequeños hijos, faros en el camino de mi existencia; a ellos que han pasado tanto tiempo sin mi presencia y mis cuidados, por tantos sacrificios les pido perdón.

A SANTI por haberme motivado a que iniciara mis estudios de maestría y por haberme brindado tanto apoyo y comprensión sobre todo en este último período de preparación de la Tesis.

Dedico también esta obra a mi madre, a mis hermanos, a BOLI y a mis sobrinos por brindarme apoyo, aliento en todo momento y cooperación en mi hogar, durante mis estudios.

EYDA

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi profesor y director de tesis Dr. JOSE DEL R. GARRIDO sus enseñanzas impartidas en los cursos de maestría, su atinada orientación en este trabajo y el haberme dedicado parte de su valioso tiempo.

A todos mis profesores de la maestría, por que con sus conocimientos impartidos, me proporcionaron los instrumentos para terminar esta obra.

A mis compañeras de estudios LITA, MIRTA, MAYRA que con sus voces de aliento, sus camaraderías y los momentos alegres compartidos, pudimos superar aquellos momentos de tensión y en especial a mi Profesora de Licenciatura y amiga GLADYS, por haberme brindado, estímulo y apoyo durante la preparación de esta tesis.

Al profesor RAMIRO GOMEZ por su gran cooperación en hacer los símbolos especiales y a INESITA por mecanografiar este trabajo con tanto esmero y por haber tenido tanta paciencia.

Gracias

CONTENIDO

| | PAGINA |
|--|--------|
| INTRODUCCION | i |
| CAPITULO I | |
| DISTANCIA Y CAMINO MINIMO | |
| 1.- Distancia Mínima entre Vértices | 1 |
| Algoritmo de Roy-Warshall | 1 |
| Algoritmo de Roy-Floyd | 5 |
| Algoritmo de Dantzig | 8 |
| Algoritmo de Yen | 14 |
| 2.- Problemas Hamiltonianos | 19 |
| Teoremas de Existencia | 19 |
| Ciclos Hamiltonianos Optimos | 24 |
| Algoritmo de Kruskal | 30 |
| Algoritmo de Ioan Tomescu | 34 |
| Algoritmo de Cristofides | 36 |
| CAPITULO II | |
| APLICACIONES DE LAS REDES DE TRANSPORTE | |
| 1.- Flujo Máximo en una Red | 38 |
| Flujo de Costo Mínimo | 44 |
| 2.- Métodos del Camino Crítico | |
| Caso Determinístico | 48 |
| Eventos Críticos e Intervalos de Fluctuación | 49 |

| | PAGINA |
|---|--------|
| Actividades Disyuntivas | 52 |
| Determinación del Camino Crítico | 53 |
| 3.- Actividades con Duración Aleatoria. | |
| Caso PERT | 56 |
| 4.- Aceleración con Costo Mínimo | 60 |
| CONCLUSIONES | 64 |
| BIBLIOGRAFIA | 66 |

INTRODUCCION

Al año 1759 se remontan los inicios de lo que hoy conocemos como Investigación de Operaciones. Los problemas de asignación fueron estudiados como métodos matemáticos por los húngaros KONIG y EGERVARY en la segunda y tercera década de este siglo y los de distribución se estudiaron por el ruso KANTOROVICH en 1939. Los problemas de distribución así como los de asignación pueden tratarse como modelos de transporte, transbordo o transporte con vértices intermedios donde se utilizan conceptos de redes de optimización.

Hace poco años, la teoría de grafos se había establecido como una herramienta con una amplia variedad de objetivos, alineada a la investigación de operaciones así como a otras áreas como son la lingüística y la química.

La teoría de grafos esta íntimamente relacionada con varias ramas de la matemática, como son: teoría de grupo, teoría matricial, análisis numérico, probabilidad y teoría combinatoria. El hecho es que la teoría de grafos sirve como modelo matemático para cualquier sistema que contempla relaciones binarias. Sus aplicaciones se extienden a la física, ciencia de comunicación, computación, ingenierías civil y eléctrica, sociología, psicología, economía, etc.

El objetivo de nuestro trabajo es de presentar los métodos que determinan longitudes óptimas entre vértices y caminos de un grafo, así como los métodos y modelos asociados a redes de optimización. Estos incluyen: flujo máximo en una red de transporte, flujo de costo mínimo, por último grafo de actividades y la aceleración de la duración de las actividades

con costos mínimos.

Sobre un grafo G podemos definir diferentes tipos de matrices las cuales sirven de recursos para representar un grafo y además nos facilitan el trabajo con los elementos de los conjuntos de vértices y de arcos de un grafo. Mediante la representación matricial de un grafo podemos estudiar las estructuras y propiedades que el grafo posee, utilizando el cálculo matricial y el computador como herramientas para tal fin.

Veremos la resolución, mediante la teoría de grafos de ciertos problemas que pueden tener aplicaciones concretas y se pueden representar mediante grafos en los cuales se plantean la búsqueda de un camino de valor óptimo, ya sea mínimo o máximo.

Consideramos un grafo $G=(X,U)$ en el que a los arcos $(x_i,x_j) \in U$ se le asocia un número real llamado valor del arco, nos interesa determinar un camino que una pares de vértice con longitudes óptimas.

Dependiendo del problema la longitud del camino puede representar:

- 1- distancia física
- 2- costo de transporte
- 3- tiempo de tránsito en un sistema de comunicación etc.

Estos problemas de determinación de longitudes óptimas podemos clasificarlos de la siguiente manera:

- 1- Encontrar distancia mínimas entre los vértices de un grafo, como también circuitos.

- 2- Encontrar el camino de valor mínimo desde un vértice x_1 a cualquiera de los otros vértices.

Estudiaremos para la resolución de estos problemas algoritmos y sus fundamentaciones. Los algoritmos de Roy-Floyd y Dantzig se utilizan para resolver los problemas identificados con (1). Los problemas presentados en (2) se resuelven mediante los algoritmos de Dantzing y Yen.

Dentro del contexto de la determinación de longitudes óptimas (mínimas) nos interesa el caso en que todos los vértices de la red pertenezcan al camino (cadena) y también a circuitos (ciclos).

Estudio que realizaremos através de los grafos hamiltoneanos y los problemas de configuraciones hamiltoneanas: p_1) determinación de las cadenas hamiltoneanas mínimas, p_2) la búsqueda de cadenas hamiltoneanas con extremos fijos y p_3) encontrar ciclos hamiltoneanos mínimos.

A través del teorema de Chvatal y Camion, estudiaremos el problema de la existencia de estas configuraciones hamiltoneanas en grafos.

Los algoritmos de Kruskal, Ioan Tomescu y Cristofides nos brindan soluciones para obtener una cadena hamiltoneana mínima, así como una cadena hamiltoneana mínima de extremos fijos.

Un ejemplo muy interesante de grafos los constituyen las redes de transporte, debido a que tienen una gran aplicabilidad.

El problema central está enfocado hacia el manejo de un solo

producto, es decir, hacia determinar el flujo máximo que va de la entrada a la salida de la red, una solución a este problema se alcanza a través del algoritmo de Ford-Fulkerson, con el que se determina un flujo máximo y un corte de capacidad mínima cuya existencia es asegurada por el Teorema de Ford-Fulkerson.

La determinación de un flujo a un costo mínimo tiene aplicación en problemas de distribución y asignación de recursos; empleamos el algoritmo de Kleim para encontrar la solución de estos problemas. Sin embargo, la aplicación más fuerte de los métodos de redes, es la combinación de los problemas de flujo máximo en una red a un costo mínimo. La aplicación que presentamos del problema de flujo a costo mínimo es el problema de encontrar el camino crítico en un grafo de actividad. Presentamos el caso determinístico C.P.M. y el que sus duraciones de las actividades son variables aleatorias, es decir, el PERT, que fueron los métodos originalmente empleados en la determinación de caminos críticos y los más utilizados. Por último resolveremos el problema de determinar la aceleración de la duración del proyecto en un grafo de actividades a un costo mínimo mediante la búsqueda de un corte de capacidad mínima en la red asociada al subgrafo formado solamente por aquellos arcos que constituyen los caminos críticos del grafo de actividad.

CAPITULO I
DISTANCIA Y CAMINO MINIMO

1.- DISTANCIA MINIMA ENTRE VERTICES.

Estudiaremos ciertos algoritmos que nos permitirán encontrar los caminos elementales de un grafo dado, sin tener que recurrir a la enumeración de los mismos, otros nos proporcionarán la distancia mínima entre cualquier par de vértices, así como circuitos que eventualmente existan en el grafo.

El primer algoritmo que estudiaremos nos permitirá hallar todos los caminos elementales de un grafo, sin enumerarlos, a partir de la matriz de adyacencia M.

Algoritmo de Roy-Warshall.

1. Hacer $k = 1$.
2. Reemplazar los elementos $m_{ij} = 0$ de M por el
$$\min \{ m_{ik}, m_{kj} \}$$
 para $i, j = 1, \dots, n; i, j \neq k$ y M es la matriz de adyacencia. Se repite el paso 2 para $k = 2, \dots, n$.

Con el propósito de expresar el algoritmo de Roy Warshall en un lenguaje operacional definiremos un operador T_k aplicable a la matriz de adyacencia M como sigue:

Al aplicar $T_k(M)$ obtenemos una matriz $P = (p_{ij})$ con $i, j = 1, \dots, n$ donde

$$p_{ij} = \begin{cases} \max \{ m_{ij}, \min \{ m_{ik}, m_{kj} \} \} & i, j = 1, \dots, n; i, j \neq k \\ m_{ij} & \text{si } i = k \text{ ó } j = k. \end{cases}$$

Proposición 1.1:

Los operadores T_k , $k = 1, \dots, n$ son idempotentes y conmutativos dos a dos.

Demostración:

Sea M una matriz de adyacencia entonces

$$T_k T_k(M) = T_k(P) = P' \quad \text{con } P' = (p'_{ij}) \text{ y}$$

$$p'_{ij} = \max \left\{ p_{ij}, \min \left\{ p_{ik}, p_{kj} \right\} \right\} . \quad \text{Por definición de}$$

los elementos de P tenemos que:

$$p'_{ij} = \max \left\{ \max \left\{ m_{ij}, \min \left\{ m_{ik}, m_{kj} \right\} \right\}, \min \left\{ \max \left\{ m_{ik}, \min \left\{ m_{ik}, m_{kk} \right\} \right\}, \max \left\{ m_{kj}, \min \left\{ m_{kk}, m_{kj} \right\} \right\} \right\} \right\}$$

lo cual podemos escribir en la forma siguiente:

$$p'_{ij} = \left[m_{ij} \vee (m_{ik} \wedge m_{kj}) \right] \vee \left[(m_{ik} \vee (m_{ik} \wedge m_{kk})) \wedge (m_{kj} \vee (m_{kk} \wedge m_{kj})) \right]$$

Por las propiedades de absorción e idempotencia de la disyunción y la conjunción tenemos que

$$p'_{ij} = m_{ij} \vee (m_{ik} \wedge m_{kj}), \text{ es decir, } p'_{ij} = \max \left\{ m_{ij}, \min \left\{ m_{ik}, m_{kj} \right\} \right\} = p_{ij}$$

de donde $T_k T_k(M) = T_k(M) = P$.

Haciendo $T_h T_k(M) = Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, donde

$$q_{ij} = \max \left\{ p_{ij}, \min \left\{ p_{ih}, p_{hj} \right\} \right\} \text{ se demuestra la conmutatividad}$$

de los operadores mediante un procedimiento similar al de la demostración anterior.

Proposición 1.2:

Para cualquier matriz de adyacencia M siempre se cumple que

$$\prod_{k=1}^n T_k(M) = M^*.$$

Demostración:

Sea M una matriz cuadrada de dimensión n cuyos elementos son ceros y unos. Si $T_k(M) = M$ para $K = 1, 2, \dots, n$, entonces $M = M^*$.

Supongamos que $M \neq M^*$, entonces existe una serie x_1, x_2, \dots, x_p tal que $x_{i+1} \in \Gamma^+(x_i)$ para $i = 1, \dots, p-1$ y $x_p \notin \Gamma^+(x_1)$. Sea k el número menor de la serie $1, \dots, p$ tal que $x_k \notin \Gamma^+(x_1)$, entonces $x_{k-1} \in \Gamma^+(x_1)$, luego T_{k-1} transforma la matriz M , ya que los elementos $m_{1,k-1}$ y $m_{k-1,k}$ son iguales a uno, por lo tanto para $T_{k-1}(M) = P$ obtenemos $p_{1k} = \max \left\{ m_{1,k}, \min \left\{ m_{1k,k-1}, m_{k-1,k} \right\} \right\} = 1$. Es decir, el operador T_{k-1} transforma el cero de la posición $(1,k)$ en uno, lo que contradice la hipótesis, luego $M = M^*$.

Sea $\prod_{k=1}^n T_k(M) = M_n$, resulta que $[T_k(M)]^* = M^*$ para todo $k = 1, \dots, n$; puesto que el operador T_k solamente detecta conexiones entre los vértices no adyacentes x_i y x_j en el grafo asociado, siempre y cuando éstos estén unidos por un camino de longitud dos que pasa por x_k . Por la aplicación repetida de este proceso obtenemos $M_n^* = M^*$. De acuerdo a la proposición anterior, la matriz M_n es invariante para todo operador T_k , para $K = 1, \dots, n$, es decir $M_n^* = M_n$ conforme a lo demostrado anteriormente. Resulta que $M_n = M^*$ y el algoritmo de Roy- Warshall queda completamente justificado.

Ejemplo 1:

Sea G un grafo y su matriz de adyacencia M , mediante la aplicación del algoritmo obtenemos la siguiente matriz de los caminos M^* .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; M_6 = M^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para un grafo G orientado con n vértices, si existe el arco (x_i, x_j) , denotaremos su longitud por a_{ij} .

Definición 1.1:

Llamaremos matriz de las distancias directas de un grafo G orientado con n vértices, a una matriz cuadrada de dimensión n que denotaremos por $A = (a_{ij})_{i,j = 1, \dots, n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} l(u) & \text{si existe el arco } u = (x_i, x_j) \\ 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si no existe } u = (x_i, x_j) \end{cases}$$

Definición 1.2:

Sea $G = (X, U)$ en grafo, llamaremos matriz de las distancias mínimas entre los vértices del grafo, a la matriz que denotare-

mos por $A^* = (a_{i,j}^*)_{1,j=1,\dots,n}$ tal que

$$a_{ij}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ l(x_i \longrightarrow x_j)^* & \text{si } i \neq j \text{ y existe } (x_i \longrightarrow x_j) \\ \infty & \text{si no existe } (x_i \longrightarrow x_j) \end{cases}$$

donde $l(x_i \longrightarrow x_j)^*$ es la longitud mínima de los caminos $(x_i \longrightarrow x_j)$.

El siguiente algoritmo es análogo al anterior y nos permite encontrar la distancia mínima entre los vértices de un grafo a partir de la matriz A.

Algoritmo de Roy-Floyd.

1. Hacer $k = 1$.
2. Reemplazar los elementos a_{ij} por $\min \{ a_{ij}, a_{ik} + a_{kj} \}$ para $i \neq j, i \neq k, k \neq j$ y para $i, j = 1, \dots, n$.
3. Repetir el paso 2 para $k = 2, \dots, n$.

Al igual que el algoritmo anterior podemos expresar este algoritmo en un lenguaje operacional.

Definición 1.3:

Sea T_k un operador que actúa sobre la matriz de las distancias directas de orden n , de la siguiente manera:

$$T_k(A) = B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \text{ donde}$$

$$b_{ij} = \min \{ a_{ij}, a_{ik} + a_{kj} \} \text{ para } i, j = 1, \dots, n \text{ } i \neq j; i, j \neq k;$$

además la matriz B está definida como una matriz de distancias

como sigue:

$$B = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i = k \text{ ó } j = k \\ 0 & \text{si } i = j \\ \min \{ a_{ij}, a_{ik} + a_{kj} \} & \text{si } i \neq j, i \neq k \text{ y } j \neq k. \end{cases}$$

Las demostraciones de los siguientes resultados son análogas a las de las proposiciones 1.1 y 1.2.

Proposición 1.3:

Los operadores T_k son idempotentes y conmutativos dos a dos ($k = 1, 2, \dots, n$); además para cualquier matriz de distancias directas A , tenemos que $\prod_{k=1}^n T_k(A) = A^*$ donde A^* es la matriz de las distancias mínimas.

Observación: Los elementos que están sobre la diagonal principal de la matriz A permanecen invariantes para todo $k = 1, \dots, n$ en el proceso del paso 2.

Solo se harán los cálculos sobre los elementos que posean índices diferentes entre sí y distintos de k obteniéndose una submatriz cuadrada de dimensión $n-1$. Por lo tanto se realizarán $(n-1)(n-2)$ sumas y comparaciones, y así $n(n-1)(n-2)$ sumas e igual número de comparaciones al final del algoritmo.

Mediante una variación del algoritmo anterior podemos encontrar el camino mínimo entre los vértices de un grafo.

Definición 1.4:

Llamaremos matriz de los vértices vecinos a la matriz $D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ cuyos elementos son conjuntos de vértices definidos de la siguiente manera:

$$d_{ij} = \begin{cases} \{x_i\} & \text{si } a_{ij} < \infty \\ \emptyset & \text{si } a_{ij} = \infty \end{cases}$$

Observación: Una vez aplicado el algoritmo de Royd-Floyd a la matriz D , d_{ij} va a ser el conjunto de los vértices vecinos a x_j relativos al camino mínimo de x_i a x_j $i \neq j$.

En el paso 2 de este algoritmo, los elementos d_{ij} se modifican de la siguiente manera:

- 1º Si $a_{ij} < a_{ik} + a_{kj}$, d_{ij} no varía.
- 2º Si $a_{ij} = a_{ik} + a_{kj}$, reemplazamos d_{ij} por $d_{ij} \cup d_{kj}$.
- 3º Si $a_{ij} > a_{ik} + a_{kj}$, hacemos $d_{ij} = d_{kj}$.

Puesto que conocemos el vértice vecino para cada caso, podemos reconstruir, cualquier camino, sin dificultad, partiendo, del último vértice hasta llegar al primero.

Veremos ahora, un algoritmo que nos permitirá hallar las distancias mínimas entre los vértices de un grafo y también detectar los eventuales circuitos negativos de él.

Si un grafo admite un circuito de longitud negativa, la distancia entre cualquier par de vértices del circuito puede hacerse negativa y tan pequeña como se quiera, recorriendo un número suficientemente grande de veces el circuito, es decir no existe la distancia más pequeña entre los vértices del circuito.

Algoritmo de Dantzig.

Sea $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ para $m \leq n$ y d_{ij}^m la distancia mínima del vértice x_i al vértice x_j en el subgrafo de G con el conjunto X_m , que denotaremos G_{X_m} para cualquier $i, j = 1, \dots, m$.

1- Hacer $d_{12}^2 = a_{12}$; $d_{21}^2 = a_{21}$, donde a_{12} y a_{21} son elementos de la matriz A . Si $a_{12} + a_{21} < 0$ hemos encontrado el circuito negativo (x_1, x_2, x_1) ; aplicar el paso 2 para $m = 3, \dots, n$.

2- Si ya hemos determinado las distancias mínimas d_{ij}^{m-1} , calcular d_{ij}^m por:

$$(i) \quad d_{im}^m = \min_{j=1, \dots, m-1} (d_{ij}^{m-1} + a_{jm}) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1$$

$$(ii) \quad d_{mi}^m = \min_{j=1, \dots, m-1} (a_{mj} + d_{ji}^{m-1}) \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1$$

Verificar si existe un índice i con la propiedad que $i \leq i \leq m-1$ y $d_{im}^m + d_{mi}^m < 0$. Si existe un índice así hemos encontrado un circuito negativo en el subgrafo G_{X_m} que pasa por los vértices x_i y x_m . En caso contrario calcular:

$$(iii) \quad d_{ij}^m = \min (d_{ij}^{m-1} + d_{im}^m + d_{mj}^m)$$

para $i, j = 1, \dots, m-1$ e $i \neq j$

Observación: Cuando finalizamos la aplicación de este algoritmo hemos encontrado las distancias mínimas d_{ij}^m , para $i, j = 1, \dots, n$ en G . Siempre supondremos que $d_{ii}^m = 0$ para cualquier G_{X_m} .

Proposición 1.4:

Sea $G = (X, U)$ un grafo tal que $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y sea G_{X_m} un subgrafo de G , las expresiones (i), (ii) y (iii) representan las distancias mínimas entre los vértices de G_{X_m} .

Demostración:

Haremos la demostración de (i) por inducción sobre m .

Para $m = 2$. Tenemos que $d_{12}^2 = a_{12}$ y $d_{21}^2 = a_{21}$ y considerando que G_{X_2} tiene solamente dos vértices, entonces la distancia directa a_{ij} coincide con la distancia mínima a_{ij}^* .

Supongamos que la proposición se cumple para $m-1$, demostraremos que se cumple para m .

La distancia mínima del vértice x_i al vértice x_m en G_{X_m} puede ser la distancia directa a_{im} obtenida de (i) para cuando $j = i$ o la longitud mínima de los caminos $(x_i, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0}, x_m)$ en G_X denotada por $l(x_i \longrightarrow x_m)^*$; sin embargo los vértices $x_i, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0}$ pertenecen a X_{m-1} y el camino $(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0})$ debe ser un camino mínimo en $G_{X_{m-1}}$ tal que $l(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0}) = d_{ij_0}^{m-1}$ conforme a la hipótesis de inducción. Si este camino no fuera mínimo podríamos reemplazarlo por otro más corto de x_i a x_{j_0} en $G_{X_{m-1}}$ que al prolongarlo con el arco (x_{j_0}, x_m) generaría un camino más corto que

$(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0}, x_m)$ lo cual contradice la hipótesis; por consiguiente $d_{im}^m = d_{ij_0}^{m-1} + a_{j_0 m}$ y $d_{ij_0}^{m-1} + a_{j_0 m} = \min(d_{ij}^{m-1} + a_{jm})$. En efecto si existiera otro índice $j_1 \neq j_0$ tal que $d_{ij_0}^{m-1} + a_{j_0 m} > d_{ij_1}^{m-1} + a_{j_1 m}$ significaría que existe un camino en $G_{X_{m-1}}$ al que si le añadiéramos el arco (x_{j_1}, x_m) resultaría ser más corto que el supuesto camino mínimo $(x_i, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}, x_{j_0}, x_m)$ lo cual es imposible, entonces las distancias mínimas de x_i a x_m están dadas por la expresión (i) $\forall i = 1, \dots, m-1$.

En forma análoga podemos escribir la expresión (ii) y valorar la para todo $i; 1 \leq i \leq m-1$.

Demostraremos ahora, que d_{ij}^m es la distancia mínima de x_i a x_j en G_{X_m} ; denotemos por $(x_i \rightarrow x_j)^*$ el camino mínimo de x_i a x_j ; si $(x_i \rightarrow x_j)$ es de longitud mínima y no pasa por x_m significa que es mínimo en el subgrafo $G_{X_{m-1}}$ y $l(x_i \rightarrow x_j)^* = d_{ij}^{m-1}$ (1), conforme a la hipótesis de inducción; en caso contrario si el camino $(x_i \rightarrow x_j)^*$ pasa por x_m significa que:

$l(x_i \rightarrow x_j)^* = l(x_i \rightarrow x_m)^* + l(x_m \rightarrow x_j)^*$ (2) y ambos sumandos se refieren a caminos mínimos en G_{X_m} puesto que de no ser así, el camino $(x_i \rightarrow x_j)$ no fuera mínimo. Ambos sumandos de (2) se calculan respectivamente por (i) y (ii).

De (1) y (2) concluimos que $d_{ij}^m = \min(d_{ij}^{m-1}, d_{im}^m + d_{mj}^m)$ donde (iii) queda justificado.

Observación: Para el caso en que no existan circuitos negativos no verificamos (ii). Como $d_{ii}^{m-1} = 0$ para $j = i$ en las expresiones (i) y (ii) no se efectúa ninguna suma, luego el número de adiciones es $m-2$ y el de comparaciones es $m-1$ por lo tanto el número de comparaciones y sumas necesarias es $(m-1)(m-2)$ en cada expresión.

Luego el número de operaciones aplicando este algoritmo es:

$$3 \sum_{m=3}^n (m-1)(m-2) = 3 \sum_{m=3}^n (m^2 - 3m + 2) = n(n-1)(n-2)$$

ya que para cada par de vértices x_i, x_j se considera la posibilidad de que existan los arcos (x_i, x_j) y (x_j, x_i) .

El siguiente algoritmo también propuesto por Dantzig nos permite calcular la longitud mínima del vértice x_1 a cualquier otro vértice de un grafo G .

Denotaremos por t la función distancia mínima de x_1 a cualquier vértice, así $t(x_p)$ representa a_{1p}^* y sea X_q el subconjunto formado por q vértices del grafo G . A continuación detallamos los pasos de este algoritmo.

- 1) Considerar $X_1 = \{x_1\}$ y definir $t(x_1) = 0$. Aplicar el paso 2 para $q = 1, \dots, n-1$.
- 2) Determinar el conjunto $X_q = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}\}$. Para cada vértices $x_{i_p} \in X_q$ hallar un vértice $y_{i_p} \notin X_q$ tal que la longitud $l(x_{i_p} \rightarrow y_{i_p})$ sea mínima en el conjunto de las longitudes de los arcos que tienen como extremo inicial a x_{i_p} y final a un vértice que no pertenece a X_q , si es que este con-

junto de arcos es no vacío. Si existen varios vértices a los cuales les llegan el arco de longitud mínima desde x_{i_p} , escogemos cualquiera de ellos.

Determinar el vértice y_{i_s} que verifica la siguiente igualdad

$$t(x_{i_s}) + l(x_{i_s}, y_{i_s}) = \min_{j=1, \dots, q} (t(x_{i_j}) + l(x_{i_j}, y_{i_j})) \quad (3)$$

Hacer $X_{q+1} = X_q \cup \{y_{i_s}\}$ y definir la función t por:

$$t(y_{i_s}) = t(x_{i_s}) + l(x_{i_s}, y_{i_s})$$

Observación: Al final de la aplicación del algoritmo obtenemos los valores de la función de distancia mínima entre x_1 y cualquier otro vértice x_i del grafo. Si no podemos definir la función t para un vértice x_p significa que no existe camino de x_1 a x_p y escribiremos $t(x_p) = \infty$.

La cantidad de operaciones para determinar el vértice y_{i_s} en el paso 2 es a lo sumo $q(n-q-1) + q-1$ (4) comparaciones y q sumas. Puesto que en el paso 2, previamente tenemos que determinar para q vértice del grafo su vértice más cercano de los $n-q$ vértices restantes, obtenemos así para cada vértice $y_{i_p} \in X_q$ a lo sumo $n-q-1$ comparaciones, por lo tanto para q vértices vamos a tener $q(n-q-1)$ comparaciones lo que proporciona el primer sumando de (4); si analizamos la expresión (3), tenemos q sumandos que comparar para determinar el mínimo. Esto significa que existen a lo sumo $q-1$ comparaciones adicionales y obtenemos así el segundo sumando de (4).

Al final de la aplicación del algoritmo resulta que el número de operaciones necesarias es mayorado por:

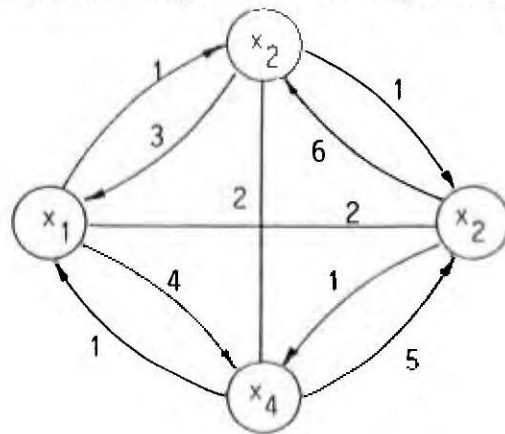
$$\sum_{q=1}^{n-1} q = \frac{n(n-1)}{2} \text{ sumas y}$$

$$\sum_{q=1}^{n-1} (nq - q^2 - 1) = \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{6} \text{ comparaciones}$$

Cuando no existen ciertos arcos entre algunos vértices, esto reduce la cantidad de operaciones en el algoritmo.

Ejemplo 2:

Considerando el grafo de la siguiente figura.



obtenemos, con ayuda de este algoritmo, que las distancias mínimas calculadas de x_1 a los vértices restantes son: $a_{12}^* = 1$, $a_{13}^* = 2$ y $a_{14}^* = 3$.

Otra alternativa que resuelve el mismo problema de calcular la distancia mínima del vértice x_1 a cualquiera de los otros vértices restantes del grafo G es:

Algoritmo de Yen.

1. Buscar en la matriz A el mínimo de las distancias directas $a_{12} \dots a_{1n}$. Si alcanzamos este mínimo, por ejemplo para un índice i_0 , es decir $a_{1i_0} = \min_{i=2, \dots, n} (a_{1i})$, entonces $a_{1i_0}^*$ es la distancia directa a_{1i_0} .
2. A excepción de los elementos a_{11} y a_{1i_0} reemplazar los restantes de la primera fila de A por $\min(a_{1i}, a_{1i_0} + a_{i_0i})$; y en la matriz obtenida, suprimir la columna y la fila de rango i_0 , conservar el rango inicial para las filas y columnas restantes (para no alterar la identificación de los elementos en los cálculos).

Si la matriz que obtenemos es de orden 2, entonces el elemento a_{12} representa la distancia mínima de x_1 a x_k donde k es el rango (conservado) de la segunda columna en esta nueva matriz. El algoritmo finaliza cuando obtenemos todas las distancias mínimas a_{1i}^* , $i = 2, \dots, n$.

Si la matriz obtenida al menos es de orden tres ir al paso 1 y efectuar las operaciones sobre esta matriz, como hicimos con A. En este caso el elemento a_{1i} va a representar al elemento situado en la primera fila y la columna de rango i de la matriz que obtuvimos y para el cual se han conservado los respectivos rangos iniciales de las filas y columnas de la matriz A.

La siguiente proposición justifica el algoritmo de Yen.

Proposición 1.5:

Sea $G = (X, U)$ un grafo y $G_{X_1} = (X_1, U_1)$ un subgrafo de G , donde el conjunto de vértices X_1 está dado por $X - \{x_{i_0}\}$ y G_{X_1} está asociado a la matriz que se obtiene en una sola iteración del algoritmo de Yen sobre una matriz dada. La distancia mínima de x_1 a x_i en G_{X_1} coincide con la distancia mínima de x_1 a x_i con $(i \neq i_0)$ en el grafo G .

Demostración:

Puesto que $a_{1i_0} = \min_{i \geq 2} (a_{1i})$, resulta que a_{1i_0} es la distancia mínima del vértice x_1 al vértice x_{i_0} , ya que cualquier camino de longitud mínima de x_1 a x_{i_0} , se inicia en el vértice x_1 y su longitud es aproximada a la longitud del arco más corto (x_1, x_{i_0}) . Como este arco es un camino de x_1 a x_{i_0} , resulta que la distancia directa a_{1i_0} es igual a la longitud mínima de los caminos de x_1 a x_{i_0} .

Demostraremos ahora que las distancias mínima de x_1 a los otros vértices diferentes de x_{i_0} son las mismas en los grafos G y G_{X_1} .

Sea G_{X_1} el subgrafo asociado a la matriz que se obtiene al efectuar una sola iteración del algoritmo, consideremos un vértice cualquiera $x_i \neq x_{i_0}$; entonces van a existir dos casos:

- 1- en el grafo G existe el camino mínimo $(x_1 \longrightarrow x_i)^*$ que no pasa por x_{i_0} y
- 2- cualquier camino mínimo $(x_1 \longrightarrow x_i)^*$ en el grafo G pasa por x_{i_0} .

Para el primer caso consideremos el camino mínimo $(x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_i)$ que no pasa por x_{i_0} . Tenemos que $a_{1j_1} < a_{1i_0} + a_{i_0j_1}$, pues en caso contrario podemos reemplazar el arco (x_1, x_{j_1}) por un camino de dos arcos (x_1, x_{i_0}) y (x_{i_0}, x_{j_1}) y obtener así un camino más corto, lo cual contradice la hipótesis.

Esto significa que al aplicar el paso 2 del algoritmo, el elemento a_{1j_1} permanece invariante, por lo tanto, la longitud del camino $(x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_i)$ es exactamente la misma en G y G_{x_1} .

Para el segundo caso consideramos un camino mínimo $(x_1 \rightarrow x_i)^*$ en G que pasa por x_{i_0} .

Sea este camino $d = (x_1, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{i_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_i)$, puesto que $l(x_1, x_{i_0}) \leq l(x_1, x_j)$ resulta que además

$d' = (x_1, x_{i_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_i)$ es un camino mínimo de x_1 a x_i en el grafo G . Podemos suponer también que el vértice x_{i_0} no aparece más entre los vértices x_{k_1}, x_{k_2}, \dots , que están comprendidos entre x_{i_0} y x_i en el camino d' , puesto que en caso contrario podríamos eliminar los subcaminos comprendidos entre los vértices que se repiten, y así obtener un camino de longitud más pequeña o igual que d' ; además en el segundo caso se da la relación $a_{1k_1} > a_{1i_0} + a_{i_0k_1}$, ya que de lo contrario el camino $d'' = (x_1, x_{k_1}, \dots, x_i)$ es un camino de longitud mínima en G que no pasa por x_{i_0} , lo que contradice la hipótesis.

En consecuencia, por la aplicación del algoritmo de Yen en el paso 2, el elemento a_{1k_1} es reemplazado por la suma $a_{1i_0} + a_{i_0k_1}$, entonces la longitud del camino d' en el grafo G es igual a la longitud del camino d'' en el subgrafo G_{x_1} . Resulta que en el segundo caso se conservan las distancias mínimas del vértice x_1 al vértice x_i con $i \neq i_0$ por la eliminación de la fila y la columna de rango i_0 , es decir por el pase al subgrafo G_{x_1} .

Observación: En cuanto al número de adiciones y de comparaciones que se ejecutan mediante este algoritmo, se tiene lo siguiente: para realizar el paso 1 se necesitan a lo sumo $n-2$ comparaciones, puesto que los elementos $a_{1i} = \infty$ no se van a considerar. Para el paso 2 se necesitan a lo sumo $n-2$ adiciones e igual número de comparaciones, debido a que no consideramos los elementos a_{11} y a_{1i_0} para la comparación y la adición respectivamente; los elementos contribuyen a la reducción del número de cálculos.

Debido a que el orden de la matriz A decrece en cada iteración del algoritmo en una unidad serán necesarias a lo sumo:

$$2 \sum_{q=1}^{n-2} q = (n-1)(n-2) \text{ comparaciones y}$$

$$\sum_{q=1}^{n-2} q = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ adiciones.}$$

Finalmente si aplicamos n iteraciones del algoritmo de Yen, determinamos la distancia mínima para cada vértices x_i , con $1 \leq i \leq n$ con respecto a los vértices restantes del grafo. De donde vamos a necesitar a lo sumo $n(n-2)(n-1)$ comparaciones y $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ sumas.

Ejemplo 3:

Al aplicar el algoritmo anterior a la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene que: $a_{12}^* = 1$, $a_{13}^* = 3$, $a_{14}^* = 5$, $a_{15}^* = 8$ y $a_{16}^* = 9$.

Si queremos obtener los caminos mínimos de un vértice x_i a otro x_j , podemos proceder así: supongamos que (x_k, x_j) es el último arco de un camino mínimo $(x_i \rightarrow x_j)^*$, entonces

$$a_{ij}^* = a_{ik}^* + a_{kj}.$$

Si los índices k para los cuales se cumple esta igualdad son k_1, k_2, \dots, k_s , resulta que $(x_{k_1}, x_j), (x_{k_2}, x_j), \dots, (x_{k_s}, x_j)$ son los últimos arcos de los caminos mínimos de x_i a x_j ; entonces para cada uno de estos índices se repite el procedimiento, así obtenemos

Los últimos arcos que llegan a x_{k_i} ($i=1, \dots, s$) de los caminos mínimos de x_i a x_j . Procedemos con x_{k_i} de igual manera que con x_j , etc.

Si no existe algún índice $k \neq i, j$ para el cual se verifica la igualdad; resulta que el arco (x_i, x_j) es el único camino mínimo de x_i a x_j .

2.- PROBLEMAS HAMILTONEANOS.

Definición 1.5:

Diremos que el grafo $G = (X, U)$ es hamiltoniano, si existe un circuito (ciclo en el caso no orientado) elemental que pasa por todos sus vértices.

A un circuito (ciclo) de esta forma lo llamaremos hamiltoniano. En particular un camino (cadena) elemental que pasa por todo los vértices del grafo se llamará también hamiltoniano.

Los problemas hamiltonianos encuentran aplicación en la optimización de ciertos procesos concretos de distribución o de colección, la determinación de sucesiones óptimas de preparación de algunas piezas sobre una máquina etc.

Teoremas de Existencia.

No conocemos hasta el presente una condición necesaria y suficiente para la existencia de los ciclos o de las cadenas (de los caminos o de los circuitos) hamiltonianos valedera para

para cualquier grafo, se han propuesto numerosas condiciones ya sean necesarias o suficiente, para la existencia de estas configuraciones hamiltonianas.

Presentaremos el teorema de Chvatal y los corolarios de Ore y Dirac relativos a ciclos hamiltoniano; así como un resultado dado por Camion relativo a la existencia de circuitos hamiltonianos en 1-grafo completo y fuertemente conexo.

Teorema 1.1 (Chvatal):

Sea G un grafo no orientado con n vértices, $n \geq 3$.

Si ordenamos los grados de los vértices en serie creciente $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ y se verifica la propiedad:

$$d_k \leq k \leq \frac{n}{2} \implies d_{n-k} \geq n-k,$$

entonces G es hamiltoniano.

Demostración:

Supongamos que el grafo G_1 cumple con las hipótesis y no es hamiltoniano. Supongamos además que agregamos aristas entre los vértices que no son adyacentes en G_1 , con el cuidado de que el nuevo grafo obtenido no llegue a ser hamiltoniano. Sea $G = (X, U)$ el grafo no hamiltoniano obtenido, para el que la serie de los grados de sus vértices conserva la condición del teorema, puesto que agregando arista los grafos de los vértices crecen, además si agregamos una arista entre cualquier par de vértices no adyacentes de G aparece un ciclo hamiltoniano.

Consideremos un par de vértice (a,b) no adyacentes del grafo G para el cual $d(a) + d(b)$ es máxima y $d(a) \leq d(b)$, como el añadir la arista $(\overline{a,b})$ conduce a la formación de un ciclo hamiltoneano resulta que en G va a existir una cadena hamiltoneana que unirá a con b

$$(y_1 = a, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n = b).$$

Denotemos por $S = \{ i / (\overline{a, y_{i+1}}) \in U \}$ y $T = \{ i / (\overline{b, y_i}) \in U \}$

Los conjuntos S y T son disjuntos puesto que si existiera un índice $i \in S \cap T$, en el grafo G existiría un ciclo hamiltoneano

$$(b, y_i, y_{i-1}, \dots, y_2, a, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}, b)$$

Luego si $j \in S$ tenemos que la arista (b, y_j) no pertenece a U y puesto que $d(a) + d(b)$ es máxima, resulta que $d(y_j) \leq d(a)$. En consecuencia va a existir en el grafo G por lo menos $|S|$ vértices de grado menor o igual a $d(a)$. Formamos la serie de los grados de los vértices tal que estos $|S|$ vértices sean colocados antes del vértice a , lo cual es posible puesto que tienen grado inferior o igual a $d(a)$. En este caso obtenemos $d_{|S|} \leq |S| = d(a)$ y de la misma manera $|T| = d(b)$.

Evidentemente $S \cup T \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$ y como $n \notin S \cup T$, resulta que $d(a) + d(b) = |S| + |T| = |S \cup T| < n$.

Pero $d(a) \leq d(b)$ de donde deducimos que $d(a) < \frac{n}{2}$; denotando $k = d(a)$ obtenemos que $d_k \leq k < \frac{n}{2}$.

Aplicando la condición del teorema, deducimos que

$$d_{n-k} \geq n-k.$$

La serie de los grados es creciente, resulta que si $d_{n-k+1}, d_{n-k+2}, \dots, d_n$ son superiores o iguales a $n-k$, entonces el grafo G contiene al menos $k+1$ vértices de grado mayor que $n-k$.

Como el vértice a tiene el grado igual a k , resulta que existe uno de éstos vértices, que denotaremos por c que no es adyacente al vértice a , luego obtenemos:

$$d(a) + d(c) \leq d(a) + d(b) < n \text{ de donde deducimos que } d(c) < n-k, \text{ lo cual es contradictorio.}$$

Corolario 1.1.a (Ore):

Si G es un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$, tal que para cualquier par de vértices (x, y) no adyacentes tenemos que $d(x) + d(y) \geq n$, resulta que G es hamiltoniano.

Demostración:

Arreglamos los vértices del grafo G en orden creciente con respecto al grafo de ellos. Si existe un vértice x_k que tiene la propiedad que $d(x_k) = d_k \leq k < \frac{n}{2}$, entonces existen por lo menos $n-k-1$ vértices no adyacentes a x_k .

Conforme a la hipótesis estos vértices no adyacentes a x_k son de grado superior o igual a $n-k$, de donde resulta que

$$d_{n-k} \geq n-k.$$

Aplicando el teorema 1.1. deducimos que G es hamiltoniano.

Corolario 1.1.b. (G. Dirac):

Si G es un grafo simple con n vértices, $n \geq 3$, tal que para cualquier vértice x , $d(x) \geq \frac{n}{2}$, resulta que G es hamiltoniano.

Demostración:

Como por hipótesis para cualquier par de vértice $d(x) + d(y) \geq n$; aplicando el corolario anterior sale la demostración.

Teorema 1.2. (Camión):

Cualquier 1-grafo completo y fuertemente conexo es hamiltoniano.

Demostración:

Sea $\mathcal{M} = (a_1, a_2, \dots, a_h = a_1)$ un circuito elemental de longitud máxima h . Supongamos que existe un vértice b que no está en \mathcal{M} . Si $a_i \in \Gamma^+(b)$ entonces $b \notin \Gamma^+(a_{i-1})$ (de lo contrario podríamos prolongar el circuito por intercalación del vértice b entre a_{i-1} y a_i).

Como el grafo es completo, $a_{i-1} \in \Gamma^+(b)$. Siguiendo este razonamiento obtenemos que $a_i \in \Gamma^+(b)$, $\forall i = 1, \dots, h$. Si el caso es que $b \in \Gamma^+(a_i)$, deducimos análogamente que $a_{i+1} \notin \Gamma^+(b)$ y atendiendo a que \mathcal{M} es de longitud máxima y el grafo es completo, se deduce que $b \in \Gamma^+(a_{i+1})$. Repitiendo este razonamiento llegamos a que $b \in \Gamma^+(a_i)$, $\forall i = 1, \dots, h$.

Dividimos entonces los vértices que no están en \mathcal{M} en dos clases: B_1 y B_2 tal que si $b \in B_1$, todos los arcos que unen a b con los vértices de \mathcal{M} son dirigidos hacia éstos y si $b \in B_2$, todos los arcos que unen a b con los vértices de \mathcal{M} son dirigidos hacia b .

Si \mathcal{M} no es hamiltoniano, $B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$. Además $B_1 \neq \emptyset$ y $B_2 \neq \emptyset$, pues el grafo es fuertemente conexo. Esta condición de fuerte conexidad del grafo implica, además de la existencia de los elementos $b \in B_1$ y $b \in B_2$, la existencia del arco (b_2, b_1) , lo cual a su vez da lugar a la existencia en el grafo, del circuito elemental $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_2, b_1, a_1)$ de longitud $n+2$ que contradice la hipótesis.

Ciclos Hamiltonianos Optimos.

Un grafo no orientado y completo con n vértices, denotado por k_n , contiene $\frac{n!}{2}$ cadenas hamiltonianas, ya que el primer vértice de la cadena puede ser escogido entre los n vértices, el segundo puede ser elegido entre $n-1$ vértices del grafo y así sucesivamente, al final vamos a tener $n!$ posibilidades de elegir los vértices de la cadena. Así cada cadena puede pasar en dos sentidos diferentes, resultando dos permutaciones distintas de los n vértices, luego vamos a tener $\frac{n!}{2}$ cadenas.

En forma análoga obtenemos que el número de ciclos del grafo k_n es $\frac{(n-1)!}{2}$ para cualquier $n \geq 3$.

Si fijamos las extremidades de las cadenas van a existir

$(n-2)!$ cadenas hamiltonianas correspondientes a las permutaciones de los $n-2$ vértices intermediarios de estas cadenas. Por esta situación se hace difícil enumerar las configuraciones hamiltonianas de los grafos completos k_n para los valores de n que aparecen en los problemas reales.

Definición 1.6:

Si a toda arista u del grafo completo k_n se le asocia la longitud $l(u) \geq 0$, llamaremos ciclo hamiltoniano mínimo al ciclo hamiltoniano k_n para el que la suma de las longitudes de sus aristas es mínima.

Observación: En forma análoga definimos cadena hamiltoniana mínima y para el caso de grafos orientados, el circuito hamiltoniano mínimo, respectivamente camino hamiltoniano mínimo.

En el caso de grafo no orientado, clasificaremos los problemas de acuerdo al tipo de configuración hamiltoniana que busquemos:

P_1) Cadena hamiltoniana mínima, P_2) cadena hamiltoniana mínima con extremos fijos i_1 e i_2 y P_3) ciclo hamiltoniano mínimo.

Si el conjunto de los vértices del grafo completo es X y la matriz de las longitudes de las aristas es A , denotaremos la cadena hamiltoniana mínima relativa a X y a A por cadena H.M. (X,A) y H.M. $i_1, i_2 (X,A)$ si la cadena tiene los extremos fijos i_1 e i_2 ; análogamente nos referiremos al ciclo H. M. (X,A) .

Proposición 1.6:

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Es posible resolver el problema P_1 .
- (ii) Es posible resolver el problema P_2 .
- (iii) Es posible resolver el problema P_3 .

Demostración:

Para la implicación (i) \implies (ii), sean I, J los conjuntos de índices correspondientes a vértices iniciales y terminales respectivamente y $(x_i \longrightarrow x_j) \ (i, j) \in S, S \subset I \times J$ la familia de cadenas H.M. de G (solución de P_1).

El problema P_2 consiste en encontrar una cadena H.M. $_{i_1, i_2}$ donde $(i_1, i_2) \in S$ (es claro que pueden existir pares (α, β) que no pertenecen a S).

Considerando una cadena H.M. obtenida al resolver P_1 , sumamos a todos los elementos de las filas y las columnas i_1, i_2 de A , a excepción de los que están en la diagonal principal, un número k mayor que el valor de cualquier cadena hamiltoneana del grafo G , para lo cual es suficiente elegir a k como la suma de todos los elementos de la matriz A .

Denotaremos A_{i_1, i_2} a la matriz así modificada. Nos proponemos demostrar que a toda cadena H.M. (X, A_{i_1, i_2}) le corresponde una cadena H.M. $_{i_1, i_2} (X, A)$ con los mismos vértices.

En efecto, sea \bar{M} una cadena H.M. (X, A_{i_1, i_2}) , i_1 e i_2 sus extremos, existen tres posibilidades:

- a) $\{\alpha, \beta\} = \{i_1, i_2\}$
- b) $\exists! \delta \in \{\alpha, \beta\}$ tal que $\delta \in \{i_1, i_2\}$
- c) $\delta \notin \{i_1, i_2\} \forall \delta \in \{\alpha, \beta\}$

Para el caso a) si denotamos la longitud de la cadena H.M. (X, A_{i_1, i_2}) por l , la misma cadena considerando la matriz A va a tener una longitud l_1 tal que: $l = l_1 + 2k$, puesto que esta cadena contiene nada más dos aristas que le llegan respectivamente a los vértices i_1 e i_2 , cuyas longitudes han sido aumentadas en k unidades. Los demás vértices y aristas quedan invariantes por construcción de A_{i_1, i_2} .

Los otros dos casos no son posibles. En efecto, puesto que \bar{M} es hamiltoneana, en el caso b) tenemos la situación

$l = l_1 + 3k$ y en el caso c) $l = l_1 + 4k$. Si consideramos cualquier cadena $H_{i_1, i_2}(X, A_{i_1, i_2})$ de longitud $L = l_1 + 2k$, donde l_1 es la longitud de la cadena $H_{i_1, i_2}(X, A)$, por definición de k resultaría que $L < l$ (en ambos casos), lo cual es imposible puesto que \bar{M} es mínima.

Demostraremos que (ii) \implies (iii): Sea $I = \{1, 2, \dots, n\}$ y $Y = X \cup \{x_{n+1}\}$. Elegimos un vértice cualquiera $x_p \in X$ y haciendo la longitud de la arista $(\overline{x_{n+1}, x_i})$ igual a la de la arista $(\overline{x_p, x_i})$ para $i \in (I - \{p\})$ y cero la longitud de la arista

$(\overline{x_{n+1}, x_p})$. Así complementamos la matriz A con una línea y una columna, con $a_{n+1, i} = a_{i, n+1} = a_{ip}$ para $i = 1, \dots, n$.

Para este nuevo grafo determinamos una cadena $H.M_{x_p, x_{n+1}}$. Supongamos que en esta cadena; x_j es vértice vecino de x_{n+1} , suprimimos $(\overline{x_{n+1}, x_j})$ y la reemplazamos por $(\overline{x_j, x_p})$ que tiene la misma longitud obteniendo así un ciclo hamiltoniano en el grafo inicial G.

El ciclo hamiltoniano \underline{c} , así obtenido es mínimo, en efecto, supongamos que existe un ciclo hamiltoniano \underline{c}' de longitud menor que la de \underline{c} , por ser éste hamiltoniano contiene el vértice x_p , sea x_j un vértice adyacente a x_p , agregando un vértice x_{n+1} , suprimiendo la arista $(\overline{x_j, x_p})$ de longitud l' y tomando l' como la longitud de la nueva arista $(\overline{x_j, x_{n+1}})$, la cadena $(x_p \longrightarrow x_{n+1})$ tendría una longitud menor (por construcción) que la cadena $H.M_{x_p, x_{n+1}}(X, A)$, lo cual es una contradicción. Cabe señalar que de acuerdo a nuestra construcción, la cadena en el grafo $(X \cup \{x_{n+1}\}, U)$ tiene la misma longitud del ciclo en el grafo (X, U) .

Finalizamos mostrando que (iii) \implies (i): Sea $Y = X \cup \{x_{n+1}\}$ un conjunto de vértices, consideremos $a \geq 0$ igual a la longitud de todas aristas $(\overline{x_i, x_{n+1}})$, donde $x_i \in X$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Determinamos un ciclo hamiltoniano mínimo en el nuevo grafo obtenido con el conjunto Y, eliminamos las aristas que unen al

al vértice x_{n+1} son los dos vértices del conjunto X y obtenemos así una cadena H.M. en (X,A) . La cadena que hemos obtenido es mínima, pues en caso contrario desde cualquier otra cadena hamiltoneana en X obtendríamos un ciclo hamiltoneano mayor que la cadena en 2a; lo que significa que el nuevo ciclo es menor que el que obtuvimos como mínimo, lo cual es una contradicción.

Observación: Los problemas P_1, P_2 y P_3 se pueden enunciar también en el caso de los grafos orientados para caminos y circuitos hamiltoneanos, la proposición 1.6 es válida y la demostración en este caso es análoga a la anterior.

Antes de abordar algunos métodos concretos para las resoluciones particulares de estos problemas, haremos mención de ciertos detalles necesarios para la fundamentación de esos procedimientos.

Teorema 1.3:

Sea $H = (X,U)$ un grafo tal que $|X| = n \geq 2$. Las siguientes propiedades son equivalentes y caracterizan un árbol:

- 1) H es conexo y sin bucles.
- 2) H es sin ciclo y tiene $n-1$ aristas.
- 3) H es conexo y tiene $n-1$ aristas.
- 4) H es sin ciclo y si se le agrega una sola arista entre dos vértices cualesquiera no adyacentes se forma un ciclo único.
- 5) H es conexo y si se suprime una arista cualquiera deja de ser conexo.
- 6) Para cualquier par de vértices distintos de H existe una cade-

na y nada más una que los une.

La demostración es clásica (ver [9] y [20])

Para referirnos al problema P_1 estudiaremos primero la determinación de un árbol parcial de longitud mínima, haciendo referencia al método siguiente:

Algoritmo de Kruskal (A.K).

1. Seleccionar la arista más corta del grafo G .
2. De las aristas no seleccionadas, elegir la arista más corta y que no forme ciclos con las seleccionadas. Repetir este paso hasta que el número de aristas seleccionadas sea igual al cardinal del conjunto de los vértices del grafo menos una unidad.

Para justificar este algoritmo demostraremos la siguiente afirmación.

Proposición 1.7:

El subgrafo parcial obtenido con el algoritmo de Kruskal es un árbol parcial mínimo de G .

Demostración:

Sea B el grafo parcial de G obtenido con el A.K. Por construcción B no contiene ciclos y cualquier arista no seleccionada formaría ciclos con las ya seleccionadas. Por el teorema 1.3, B es un árbol parcial de G .

Sea B_1 un árbol parcial de G cuya longitud es menor que la de B y supongamos que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ son las aristas de B obtenidas con el A.K en el mismo orden de selección. Considerando la primera arista μ_k de la serie anterior que no es arista de B_1 y añadiéndola a éste, se forma en B_1 un ciclo único (por el teorema 1.3), que a su vez contiene al menos una arista v_i , que no es arista del árbol B , pues en caso contrario B contendría un ciclo, lo cual es imposible.

Si en B_1 así transformado, elimináramos la arista v_i , obtendríamos evidentemente un árbol B_2 . De acuerdo a nuestra terminología, la longitud del árbol B_2 está dada por:

$$l(B_2) = l(B_1) + l(\mu_k) - l(v_i) .$$

Por aplicación del A.K. , μ_k es la arista más corta que no forma ciclo en B con las aristas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ y v_i no forma ciclo con estas aristas en B_1 puesto que B_1 es un árbol. Entonces

$l(\mu_k) \leq l(v_i)$ y $l(B_2) \leq l(B_1)$. Continuando este proceso obtendríamos una serie de árboles parciales

B_1, B_2, \dots, B_r tales que: $l(B_1) \geq l(B_2) \geq \dots \geq l(B_r) = l(B)$ lo cual contradice el supuesto de que $l(B_1) < l(B)$.

Si el árbol parcial mínimo obtenido mediante el algoritmo de Kruskal tiene solamente vértices de grado uno y dos, entonces él es una cadenas hamiltoneana, que además es mínima, ya que el conjunto de las cadenas hamiltoneanas de un grafo está incluido en el conjunto de los árboles parciales del grafo.

Mostraremos que si un árbol parcial de G tiene solamente vértices de grado uno y dos, entonces él es una cadena hamiltoneana de G . En efecto si denotamos por q el número de vértices de grado uno del árbol, resultan $n-q$ vértices de grado dos. Debido a que la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas podemos expresar lo siguiente:

$$q + 2(n-q) = 2(n-1)$$

De ahí deducimos $q=2$, luego el árbol tiene exactamente dos vértices de grado uno y $n-2$ vértices de grado dos, es decir él es una cadena hamiltoneana.

Describiremos un algoritmo que nos permitirá obtener una única cadena hamiltoneana a partir del árbol parcial mínimo en caso de que él no lo sea. Las operaciones que utilizaremos son las siguientes:

Operación A: Unir dos vértices terminales x,y por una arista $(\overline{x,y})$ esto produce la aparición de un ciclo único. Para este ciclo va existir un vértice Z tal que $d(z) \geq 3$, puesto que en caso contrario, el árbol del cual hemos partido sería una cadena hamiltoneana, lo que contradice la hipótesis.

Si de este ciclo eliminamos la arista $(\overline{v,z})$ el grafo obtenido sería un árbol que anteriormente tenía uno o dos vértices de grado mayor que dos y estos grados han disminuído en una unidad, sin que aparezcan otros vértices de grado mayor que dos.

Operación B: Sea y un vértice terminal unido al vértice x y $d(x) \geq 3$. Intercalar y entre dos vértices adyacentes z y t de grado a lo sumo dos. Para ésto basta eliminar las aristas $(\overline{x,y})$ y $(\overline{z,t})$ y añadir las aristas $(\overline{y,z})$ y $(\overline{y,t})$.

Operación C: Sea v un vértice no terminal unido a un vértice x con $d(x) \geq 3$. Unir v con un vértice final y que tenga la propiedad de que v no pertenezca a la única cadena que une a x con y , y eliminar la arista $(\overline{x,v})$. Finalmente se obtiene otro árbol.

Con la operación A el crecimiento del árbol es igual a $l(\overline{x,y}) - l(\overline{v,z})$, en la aplicación de B es igual a $l(\overline{y,z}) + l(\overline{y,t}) - l(\overline{x,y}) - l(\overline{z,t})$ y en la aplicación de la operación C es igual a $l(\overline{v,y}) - l(\overline{x,v})$.

Por la aplicación de la operación A, B ó C el número de vértices de grado mayor que dos del árbol disminuye al menos en una unidad. Si aplicamos reiteradamente este procedimiento obtendremos un árbol que contiene nada más vértices de grado uno o dos, es decir, una cadena hamiltoneana.

Para que la cadena hamiltoneana obtenida tenga una longitud lo más pequeña posible, elegimos la transformación hecha sobre el árbol, tal que en cada etapa se minimice el crecimiento de la longitud del árbol.

Con el siguiente algoritmo nos proponemos obtener una cadena hamiltoneana en la siguiente forma: partiéndo de un árbol parcial mínimo, éste se transforma en una cadena hamiltoneana minimizando

en cada paso el crecimiento de sus longitudes totales.

Algoritmo de (Ioan Tomescu) [20]

1. Para cada vértices terminal $y_i, i = 1, 2, \dots, p$, considerar los vértices terminales y_j con $j > i$ y determinar, para un j elegido, la arista de mayor longitud en la cadena que los une, adyacente a un vértice de grado mayor que dos. Aplicando la operación A, calcular el crecimiento mínimo de las longitudes correspondientes.
2. Para todos los vértices terminales y unidos a los vértices de grado mayor que dos, determinar el mínimo crecimiento de la longitud del árbol, mediante la aplicación de la operación B.
3. Para todos los vértices no terminales v unidos a vértices x de grado mayor que dos, determinar el mínimo crecimiento de la longitud del árbol mediante la aplicación de la operación C.
4. Entre los mínimos calculados mediante los pasos 1, 2 y 3 seleccionar el valor más pequeño y efectuar sobre el árbol la operación que hace este crecimiento mínimo.

Si existen varias operaciones con las que se alcanza el mismo crecimiento, elegir la transformación que produce una reducción de una unidad en el grado de los vértices que tengan grado superior a dos, si tal transformación existe se produce una disminu-

ción del grado en un número máximo del árbol.

Si el árbol obtenido tiene nada más vértices de grado uno o dos, parar, en caso contrario, reconsiderar el algoritmo desde el paso 1.

Observación: Sea $\Omega = \{ x \in X : d(x) \geq 3 \}$ y n el número de iteraciones del algoritmo de Ioan Tomescu resulta que:

$$n \leq \sum_{x \in \Omega} (d(x) - 2).$$

A continuación estudiaremos la fundamentación del algoritmo de Cristofides, concebido para resolver el problema P_2 .

Se define un vector p que llamaremos vector de penalización, con componentes $p(i)$ donde $i = 1, \dots, n$, cada componente es un número real no negativo elegido arbitrariamente.

Se modifica la matriz A de las longitudes de las aristas como sigue: $a'_{ij} = a_{ij} + P(i) + P(j)$ para cualquier $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$ obtenemos una nueva matriz A' de las longitudes de las aristas que tiene la propiedad que no produce cambios en el orden con respecto a las longitudes de las cadenas hamiltonianas con extremidades fijas i_1 e i_2 .

En otras palabras si dos cadenas hamiltonianas de extremos i_1 e i_2 tienen las longitudes l_1 y l_2 tal que $l_1 \leq l_2$, entonces estas cadenas relativas a la matriz A' tienen longitudes l'_1 y l'_2 que verifican la desigualdad $l'_1 \leq l'_2$.

En efecto:

$$l_1^i = l_1 + p(i_1) + p(i_2) + 2 \sum_{i \neq i_1, i_2} P(i)$$

$$l_2^i = l_2 + P(i_1) + P(i_2) + 2 \sum_{i \neq i_1, i_2} P(i), \text{ luego}$$

$$l_2 = l_1 = l_2^i - l_1^i$$

Descripción del Algoritmo de Cristofides.

Determinar un árbol parcial mínimo del grafo dado con la matriz A modificada por la adición de una constante suficientemente grande a la fila y a la columna con índices i_1 e i_2 respectivamente. Si este árbol tiene solamente vértices de grado uno o dos, significa que una cadena H.M. i_1, i_2 . En caso contrario definir el vector p, que le llamaremos vector de penalización, con componentes p(i) como sigue: $p(i) = 0$ si para x_i , $d(x_i)$ es igual a uno o dos; $p(i) = k (d(x_i) - 2)$ si $d(x_i) > 2$; k es una constante que se elige de modo arbitrario, sin embargo tiene un valor no muy grande con respecto a los datos del problema.

Modificar la matriz A utilizando las componentes del vector de penalización; determinar un nuevo árbol mínimo para A'. Si este árbol es una cadena H.M. i_1, i_2 parar; en caso contrario y en base a los grados de los vértices de éste, definir un nuevo vector p, obteniendo una nueva matriz de las longitudes digamos (A)' y así un nuevo árbol mínimo etc. Observemos que el vector p produce

penalización a los vértices de grado mayor que dos.

En la aplicación del método de "penalización" podemos dar diferentes valores a la constante de penalización k , valores que pueden diferir de un paso a otro.

Puede suceder que estemos recorriendo un mismo árbol y que no sea cadena o que estas iteraciones no se terminan en ningún momento, en este caso el algoritmo no tiene un número finito de pasos.

La dificultad de la aplicación de este algoritmo está en que no conocemos a priori el valor de la constante de penalización que nos conduzca lo más rápido a la solución.

La justificación de este algoritmo se basa en la propiedad anterior.

CAPITULO II

APLICACIONES DE LAS REDES DE TRANSPORTE

1.- FLUJO MAXIMO EN UNA RED.

Definición 2.1:

Llamaremos red de transporte a un grafo conexo y sin bucles $G = (X, U)$ con $n+1$ vértices que verifica las siguientes condiciones:

- a) Existe un único vértice $x_0 \in X$ tal que $\Gamma^-(x_0) = \emptyset$, que llamaremos entrada o fuente de la red.
- b) Existe un único vértice $x_n \in X$ tal que $\Gamma^+(x_n) = \emptyset$, que llamaremos salida o destino de la red.
- c) Existe una función

$$c : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

El número $c(u)$ se denomina capacidad del arco u .

Definición 2.2:

Diremos que una función

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Es un flujo sobre una red de transporte si:

a)
$$\sum_{u \in \Gamma^-(x_i)} \varphi(u) - \sum_{u \in \Gamma^+(x_i)} \varphi(u) = 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n-1$$

b)
$$0 \leq \varphi(u) \leq c(u) \quad \forall u \in U$$

La expresión a) es conocida como la ley de conservación del flujo.

Como el flujo se conserva resulta que el flujo φ_0 que sale por el vértice fuente x_0 es igual al flujo φ_n que entra al vértice destino x_n , es decir,

$$(1) \quad \varphi_0 = \varphi_n \quad \text{donde} \quad \varphi_0 = \sum_{u \in w^+(x_0)} \varphi(u) \quad y$$

$$\varphi_n = \sum_{u \in w^-(x_n)} \varphi(u)$$

La expresión (1) es conocida como el valor del flujo φ que denotaremos $v(\varphi)$.

Definición 2.3:

Llamaremos arco saturado a cualquier arco $u \in U$ con flujo igual a su capacidad. Cualquier camino que contenga al menos un arco saturado lo reconoceremos como camino saturado. Diremos que un flujo es completo cuando todos los caminos que van de x_0 a x_n son saturados.

Definición 2.4:

Sea $G = (X, U, c)$ una red de transporte y A un subconjunto de X tal que $x_0 \notin A$ y $x_n \in A$. Llamaremos corte de la red al conjunto $w^-(A)$ de arcos (x_i, x_j) tales que $x_i \notin A$ y $x_j \in A$. El número

$$c(w^-(A)) = \sum_{u \in w^-(A)} c(u)$$

define la capacidad del corte.

El problema del flujo máximo en una red de transporte consiste en determinar un flujo definido sobre el conjunto de los arcos de la red, de tal manera que el flujo φ_n que entra al vértice destino x_n tenga el mayor valor posible.

El algoritmo de Ford y Fulkerson resuelve este problema y se basa en las siguientes propiedades.

Propiedad 2.1:

Sea μ un camino cuyo vértice inicial es x_0 y el final es x_n . Si todos los arcos de este camino son no saturados, se puede aumentar el flujo φ_n en x_n , respetando las condiciones (a) y (b) de la definición 2.2.

En efecto, si consideramos el valor más pequeño de las diferencias positivas

$$\delta(u) = c(u) - \varphi(u) > 0$$

Haciendo $\delta^* = \min_{u \in \mu} \delta(u) > 0$, aumentamos con δ^* el flujo sobre cada arco del camino μ . Con el nuevo flujo $\varphi_n + \delta^* > \varphi_n$, al menos un arco del camino μ será saturado.

Un punto de vista más general es el siguiente:

Propiedad 2.2:

Sea v una cadena que une el vértice fuente x_0 con el vértice destino x_n . Denotaremos por v^+ al conjunto de los arcos de v orientados en el mismo sentido que sigue la cadena desde x_0 hasta

x_n y por v^- el conjunto de los arcos de la cadena v orientados en sentido contrario a los de v^+ .

$$\text{Sea } \delta^* = \min_{u \in v^+} (c(u) - \varphi(u)),$$

$$\varphi^* = \min_{u \in v} \varphi(u)$$

$$\text{y } \xi^* = \min(\delta^*, \varphi^*)$$

Si $\xi^* > 0$ podemos transformar el flujo φ_n como sigue: aumentamos ξ^* al flujo en cada arco $u \in v^+$ y disminuimos ξ^* en cada arco $u \in v^-$.

En esta forma vamos a obtener un flujo total con componentes no negativas que verifica (a) y (b) de la definición 2.2 y el flujo en x_n va ser:

$$\varphi_n + \xi^* > \varphi_n$$

Una cadena para la que ξ^* resulta cero es evidentemente saturada.

Un flujo completo no necesariamente es máximo, puesto que puede eventualmente aumentarse considerando las cadenas no saturadas de x_0 a x_n que no son caminos.

Sea $G = (X, U, c)$ una red de transporte en la que toda cadena elemental que une la entrada x_0 con la salida x_n está saturado por el flujo φ definido en U . Siendo V el conjunto de estas

cadenas, consideraremos para cada $v \in V$, el primer arco u_v de V tal que $u_v \in V^+$ y $\varphi(u_v) = c(u_v)$ o $u_v \in V^-$ y $\varphi(u_v) = 0$.

Suprimiendo el conjunto de arcos $U_{u_v}, v \in V$, obtenemos un grafo parcial con al menos dos componentes conexas, pues asumir lo contrario implicaría la existencia de una cadena no saturada de x_0 a x_n . Si el conjunto de vértices de A tal que $x_n \in A$ y $x_0 \notin A$ es una de estas componentes, A define el corte $w^-(A)$ y

$$\varphi_n = \sum_{u \in w^-(A)} \varphi(u) - \sum_{u \in w^+(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in w^-(A)} c(u) - 0 = c(w^-(A)),$$

puesto que todos los arcos de $w^-(A)$ tienen igual orientación que las cadenas de x_0 a x_n y por lo tanto son saturados y todos los arcos de $w^+(A)$ tienen la orientación contraria y su flujo es cero.

Es claro entonces que si todos los arcos del corte son saturados resulta que $\varphi_n = c(w^-(A))$ y en el caso contrario $\varphi_n < c(w^-(A))$; es decir, para cualquier flujo φ y cualquier corte $w^-(A)$ resulta que $\varphi_n \leq c(w^-(A))$.

Resulta ahora evidente que la modificación del flujo en una red, basándonos en la propiedad 2.2, conduciría a una saturación de todas las cadenas de x_0 a x_n , obteniéndose de acuerdo a lo anterior, un flujo máximo, además con este razonamiento queda demostrado la siguiente afirmación:

Teorema 2.1 (Ford y Fulkerson)

En una red de transporte, el valor máximo del flujo en la salida es igual a la capacidad mínima de un corte, es decir:

$$\max_n \varphi = \min_{A | x_0 \notin A, x_n \in A} c(w^-(A))$$

Sobre la base de la caracterización de un flujo máximo en la salida por la inexistencia de cadenas no saturadas de la entrada a la salida de la red, descansa el conocido algoritmo de Ford-Fulkerson para una red cuyos arcos tienen capacidades y componentes de flujo dadas en números enteros no negativos.

Sus etapas consisten en introducir un flujo compatible con las capacidades de la red, transformar él mismo a un flujo completo y obtener, a partir de este último, un flujo de valor máximo. Los procedimientos rutinarios para desarrollar cada una de estas etapas están ampliamente difundidos en la literatura especializada. Es bien conocido también la modificación de este algoritmo para obtener un flujo minimal. En este caso varía la definición de flujo en su aspecto de compatibilidad con las capacidades, reemplazándose dicha relación por la siguiente:

$\varphi(u) \geq c(u)$, $u \in U$; el corte $w^-(A)$ se define por las relaciones $x_0 \notin A$, $x_n \in A$ y $w^+(A) = \emptyset$ y el Teorema de Ford-Fulkerson, para el caso de flujo mínimo identifica el valor mínimo de un flujo en la salida con la capacidad máxima de un corte, es decir:

$$\min \varphi_n = \max c(w^-(A))$$

$$A/x_0 \notin A, x_n \in A, w^+(A) = \emptyset$$

Flujo de Costo Mínimo.

Sea $G = (X, U, c)$ una red de transporte. El problema de introducir un flujo de costo mínimo se reduce a determinar un flujo φ que verifique la condición a) de la definición 2.2, cuyas componentes sean números enteros y que además verifique la siguiente condición:

b' Para cualquier arco $u = (x_i, x_j)$ el flujo

$$\varphi(u) = \varphi_{ij} \text{ satisface la doble desigualdad:}$$

$$\delta_{ij} \leq \varphi_{ij} \leq q_{ij} \text{ donde } \delta_{ij} \geq 0, \text{ tal}$$

que la expresión siguiente sea mínima:

$$S = \sum_{u=(x_i, x_j) \in U} \varphi_{ij} c_{ij} \text{ donde } c_{ij} \in \mathbb{R} \text{ es el costo asociado a}$$

(x_i, x_j) .

Consideremos el siguiente problema: dada la red G , determinar un flujo φ que verifique (a) y (b) de la definición 2.2 y que tenga un valor v en la salida, es decir, $\varphi_n = v \leq \max \varphi_n$ que minimice la suma S . Para determinar este flujo utilizaremos el algoritmo de Kleim, pero antes haremos algunas consideraciones.

A G le asociaremos una red formada con un grafo parcial que contiene también arcos sobre los que se intentará aumentar el flujo de la salida, utilizando cadenas no saturadas. Esta red se denotará por $G^m(\varphi) = (X^m, U^m, c^m)$, donde

$$X^m = X \quad ; \quad U^m = U_1^m \cup U_2^m \quad y$$

$U_1^m = \left\{ u = (x_i, x_j) \in U / \varphi(u) < c(u) \right\}$; donde la capacidad del arco $u = (x_i, x_j)$ es $c^m(u) = c(u) - \varphi(u)$;

$U_2^m = \left\{ u = (x_j, x_i) \in U / \varphi(x_i, x_j) > 0 \right\}$; donde la capacidad del arco $u = (x_j, x_i)$ es $c^m(u) = \varphi(x_i, x_j)$.

Observemos que la existencia de una cadena no saturada de la entrada a la salida en la red G , corresponde a la existencia de un camino del vértice fuente al vértice destino en la red $G^m(\varphi)$.

Definimos los costos asociados a los arcos de la red $G^m(\varphi)$ de la siguiente manera:

Si $(x_i, x_j) \in U_1^m$, entonces $c_{ij}^m = c_{ij}$ y

si $(x_j, x_i) \in U_2^m$, entonces $c_{ji}^m = -c_{ij}$, donde c_{ij} es el costo asociado al arco (x_i, x_j) en la red G .

El algoritmo de Kleim, se fundamenta en la siguiente caracterización del flujo:

El flujo φ , de valor $\varphi_n = v$, minimiza la suma S , si y solamente si para la red $G^m(\varphi)$ no existe circuito alguno Φ para él que la suma de los costos de sus arcos sea negativa.

La condición necesaria es inmediata, por el modo de definir la red $G^m(\varphi)$, al circuito $\bar{\Phi}$ le corresponde un ciclo no saturado Ψ en la red G . Haciendo que circule una unidad adicional de flujo sobre este ciclo, en el sentido que determina el circuito $\bar{\Phi}$, lo que significa que le aumentamos una unidad de flujo sobre todos los arcos $u \in \Psi^+$, que tienen la propiedad que $u = (x_i, x_j) \in \bar{\Phi}$ y le disminuimos una unidad al flujo sobre todos los arcos $u \in \Psi^-$, que tienen la propiedad que $u = (x_i, x_j)$ y el arco $(x_j, x_i) \in \bar{\Phi}$, el flujo obtenido va a tener el mismo valor v en la salida.

El costo S_1' del nuevo flujo en la red G es:

$$S_1' = S + c(\bar{\Phi}) < S_1,$$

puesto que conforme a la hipótesis la suma de los costos de los arcos del circuito $\bar{\Phi}$, denotada por $c(\bar{\Phi})$ es negativa.

De ahí resulta que para un flujo φ de valor v a la salida que minimiza la suma S , en la red $G^m(\varphi)$ no pueden existir circuitos negativos, pues de lo contrario se contradice la optimalidad de φ .

El algoritmo consiste en los siguientes pasos:

1. Se determina un flujo cualquiera φ de valor $\varphi_n = v$. Para ésto se puede utilizar el algoritmo de Ford-Fulkerson, partiendo con el flujo con componentes nulas sobre cada arco de la red y aumentando el valor del flujo en la entrada hasta

el valor $v \leq \max \varphi_n$ sobre la cadena no saturada de la entrada a la salida.

2. Para el flujo φ obtenido, se construye la red $G^m(\varphi)$.
3. Si $G^m(\varphi)$ no contiene circuito alguno para el que la suma de los costos de sus arcos sea negativa, φ minimiza la expresión S . De lo contrario aplicamos el paso siguiente.
4. Para el circuito Φ y la red $G^m(\varphi)$ se calcula,

$$\delta = \min_{u \in \Phi} c^m(u)$$

Para la red G se modifica el flujo φ como sigue:

Se considera el ciclo no saturado Ψ de la red G que tiene los mismos vértices del circuito Φ de la red $G^m(\varphi)$ a la cual se le atribuye un sentido de recorrido igual al del circuito Φ (sentido de orientación de sus arcos).

Aumentamos el flujo φ en δ unidades en cada arco $u \in \Psi^+$ y lo disminuimos δ unidades en cada arco $u \in \Psi^-$.

Dada la forma de definición de la red $G^m(\varphi)$, resulta que el flujo obtenido es admisible de valor $\varphi_n = v$, para él que el nuevo valor de la suma S es:

$S + \delta c(\Phi) < S$, puesto que $c(\Phi) < 0$ con el nuevo flujo aplicamos el paso 2.

Observación: el hecho de que el algoritmo tenga un número finito de pasos, resulta de que la suma S es acotada inferiormente y en cada paso la solución se mejora con el valor $\delta c(\phi) < 0$.

Se pueden utilizar los algoritmos de Dantzig y Royd-Floyd para detectar el circuito negativo de $G^m(\psi)$.

2.- METODOS DEL CAMINO CRITICO.

CASOS DETERMINISTICO.

El camino crítico en un grafo de actividades constituye un ejemplo de determinación del camino de valor máximo en un grafo.

Definición 2.5:

Sea $G = (X, U)$ un grafo de actividades cuyas vértices representan eventos. Denominaremos evento al inicio o terminación de una actividad, hechos bien definidos en el tiempo. Los arcos del grafo representarán las actividades de un proyecto; la longitud asociada a los arcos, su tiempo de ejecución. Denotaremos por t_{ij} a la duración de la actividad representada por el arco (x_i, x_j) , donde t_{ij} es un número real no-negativo.

Consideraremos para cada vértices $x_i \in X$ lo siguiente:

Todos los arcos que parten del vértice x_i representan actividades que no pueden iniciarse hasta que hayan terminado todas las operaciones representadas por los arcos que llegan al vértice x_i .

Los grafos de actividades no poseen circuitos, puesto que en caso contrario, conforme a la consideración anterior, una misma

actividad tendría que empezar después de la terminación de ella lo cual es un absurdo.

Definición 2.6:

Considerando que al evento inicial le asignamos un tiempo igual a cero, llamaremos duración del proyecto al tiempo de ejecución del conjunto de actividades y es igual a la suma de la duración de las actividades consideradas en el camino crítico.

Este camino no tiene que ser único, pero es un camino de valor máximo.

Eventos Críticos e Intervalos de Fluctuación.

Definición 2.7:

Sea G un grafo de actividades para el cual los vértices representan los eventos E_1, \dots, E_n . Llamaremos duración esperada t_i del evento E_i a la mayor distancia calculada del vértice que representa el origen al vértice E_i .

Denominaremos duración límite t_i^* al tiempo necesario para realizar las operaciones entre los eventos E_i y E_n y la obtenemos restando a la duración t_n del evento final el valor máximo de los caminos de E_i a E_n . Si al valor máximo de los caminos de E_i a E_n lo denotamos por $l(E_i \rightarrow E_n)^{**}$, se tiene que:

$$t_i^* = t_n - l(E_i \rightarrow E_n)^{**}$$

Los eventos críticos son representados por los vértices situados sobre el camino crítico. Por la definición anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}t_i &= l(E_1 \longrightarrow E_i)^{**} \text{ para } E_i \text{ evento crítico. Por lo tanto:} \\t_i^* &= t_n - l(E_i \longrightarrow E_n)^{**} \\&= l(E_1 \longrightarrow E_n)^{**} - l(E_i \longrightarrow E_n)^{**} \\&= l(E_1 \longrightarrow E_i)^{**} + l(E_i \longrightarrow E_n)^* - l(E_i \longrightarrow E_n)^{**} \\&= l(E_1 \longrightarrow E_i)^{**} \\&= t_i\end{aligned}$$

Los intervalos $[t_i, t_i^*]$ se conocen como intervalos de fluctuación y representa el tiempo disponible en que pueden realizarse los eventos no críticos E_i , sin modificar la duración del proyecto. Para el caso de los eventos críticos este intervalo se reduce a un número.

El margen libre es el retraso que puede ser admitido en el inicio de una actividad A_{ij} sin afectar la duración esperada t_j y es igual a:

$$t_j - t_i - t_{ij}$$

El margen total se refiere al retraso que puede ser admitido en el inicio de una actividad A_{ij} sin cambiar la duración límite de ejecución del evento E_j y está dado por la siguiente expresión:

$$t_j^* - t_i - t_{ij}$$

y es el retraso máximo que podemos admitir al inicio de la actividad sin afectar la duración del proyecto.

Observación: Para cualquier actividad resulta que el margen libre es menor o igual que el margen total, puesto que $t_j \leq t_j^*$, para las actividades críticas ambos márgenes resultan ser nulos.

El intervalo de fluctuación de los eventos y el margen libre de las actividades miden la elasticidad en la realización de un proyecto.

En el caso en que el tiempo t_{ij} de las actividades no críticas pueda ser aumentado, el margen libre va a corresponder a la mayor duración posible de las actividades.

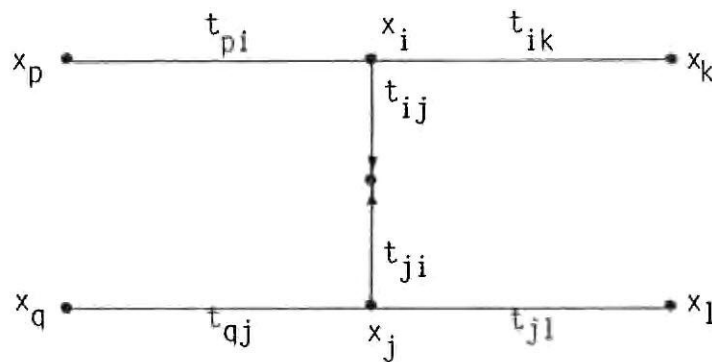
Conocer los intervalos de fluctuación de los eventos del proyecto así como el margen total de las actividades nos permite seguir el tiempo de ejecución del proyecto.

Si todos los eventos se realizan antes de la duración límite, el proyecto se desarrolla en forma normal y el tiempo esperado t_n del evento final va a ser considerado; pero si el tiempo de ejecución de un evento E_i excede a su tiempo límite, entonces tenemos que acelerar todas las actividades situadas sobre el camino $(E_i \rightarrow E_n)^{**}$. Si no existe esta posibilidad, tendríamos que evaluar tardíamente la realización del proyecto.

Actividades Disyuntivas.

El orden de ejecución entre dos actividades es a veces a elección del ejecutor, es decir, es el caso en que se tenga dos actividades que para su realización dependan de un mismo recurso que no se pueda emplear en ambas al mismo tiempo.

Esta situación la representamos en la siguiente figura:



En general tenemos que $t_{ij} \neq t_{ji}$. Un arco entre los vértices x_i y x_j como el que representamos en la figura se denomina arco disyuntivo y podemos considerarlo como el arco que está asociado a la duración t_{ij} o el que está asociado a la duración t_{ji} , pero no de ambos arcos simultáneamente.

En el caso de los grafos que contienen arcos disyuntivos nos interesa determinar la orientación de todos estos arcos de tal forma que la duración t_n del proyecto sea la más conveniente, en otras palabras, que el camino crítico tenga la menor longitud posible; si existen r arcos disyuntivos se deben estudiar 2^r grafos de actividades, encontrar la longitud del camino crítico

en cada uno de ellos y después elegir el grafo que minimiza la longitud.

Determinación del Camino Crítico.

Sea G un grafo de actividades cuyos vértices son x_1, \dots, x_n , demostraremos que la duración esperada t_i y la duración límite t_i^* de un evento x_i pueden calcularse en forma recursiva, por las siguientes expresiones:

$$a) \quad t_i = \max_{x_j \in \Gamma^-(x_i)} \{ t_j + t_{ji} \}$$

donde $\Gamma^-(x_i) = \{ x_j : (x_j, x_i) \in U \}$ es el conjunto de los predecesores del evento x_i , y todas las duraciones t_j , han sido calculadas en un proceso anterior partiéndose de $t_1 = 0$ como tiempo inicial del proyecto.

$$b) \quad t_i^* = \min_{x_j \in \Gamma^+(x_i)} \{ t_j^* - t_{ij} \}$$

donde $\Gamma^+(x_i) = \{ x_j / (x_i, x_j) \in U \}$ es el conjunto de los sucesores del evento x_i y donde todas las duraciones límites t_j^* , han sido calculadas en pasos anteriores partiéndose de $t_n^* = t_n$ que es la fecha de terminación del proyecto.

En efecto, si en el camino de x_1 a x_i de valor máximo, x_j es el penúltimo vértice entonces:

$$(1) \quad t_i = t_j + t_{ji}$$

puesto que el camino de valor máximo de x_1 a x_i se compone del camino de valor máximo de x_1 a x_j y del arco (x_j, x_i) .

Si x_j no es el penúltimo vértice de algún camino de valor máximo de x_1 a x_i , entonces

$$(2) \quad t_i > t_j + t_{ji} \quad \text{para } x_j \in \Gamma^-(x_i)$$

De (1) y (2) deducimos a).

Si un camino de x_i a x_n de valor máximo tiene como primer vértice intermediario a x_{j_0} resulta que:

$$t_i^* = t_n - (t_{ij_0} + l_{j_0})$$

donde l_{j_0} es la longitud del camino de valor máximo

$$(x_{j_0} \longrightarrow x_n)^{**}.$$

Denotando con l_j la longitud máxima de los caminos de un vértice $x_j \in \Gamma^+(x_i)$ a x_n obtenemos que:

$$\begin{aligned} t_i^* &= t_n - \max (l_j + t_{ij}) \\ &= t_n - \max l_j - \max t_{ij} \\ &= t_n^* - \max t_{ij} \\ &= \min (t_j^* - t_{ij}) \end{aligned}$$

donde el máximo (respectivamente el mínimo) se toma según todos los índices j con la propiedad de que $x_j \in \Gamma^+(x_i)$ y así obtenemos b).

Las expresiones a) y b) pueden ser efectivamente aplicadas para determinar los t_i y t_i^* respectivamente, puesto que el grafo de actividades no contiene circuitos.

Hagamos $t_1 = 0$ y para todo $(x_1, x_i) \in w^-(x_i)$ donde $w^-(x_i) = \left\{ u_{ji} : u_{ji} = (x_j, x_i) \text{ y } x_j \in \Gamma^-(x_i) \right\}$ denotemos $t_i = t_{1i}$.

Tenemos que demostrar que si la función t ha sido definida para un subconjunto A de X tal que A contiene a x_1 , entonces existe un vértice $x_i \in B$, donde B es el conjunto de vértices de X que no están en A , es decir, $B = X \setminus A$, tal que t_i puede ser definido por la expresión (a), es decir, que el vértice x_i solamente debe tener predecesor en A , ésto es $\Gamma^-(x_i) \subset A$.

Mostraremos por absurdo que esta situación se da. Supongamos que para todo $x_i \in B$, existe al menos $x_j \in B$ tal que: $x_j \in \Gamma^-(x_i)$; para un grafo de actividades correctamente definido, cada vértice x_i , con excepción de x_1 tiene por lo menos un predecesor, ésto es, $\Gamma^-(x_i) \neq \emptyset$, puesto que cada evento es precedido de al menos un evento que puede ser el evento inicial x_1 . También cada vértice x_i con excepción de x_n tiene al menos un sucesor, es decir, $\Gamma^+(x_i) \neq \emptyset$, ya que cada evento es sucedido de por lo menos otro evento que puede ser el final.

Supongamos que todas las condiciones que hemos mencionado están satisfechas y sea $x_{i_1} \in B$; conforme a la hipótesis hecha existe $x_{i_2} \in \Gamma^-(x_{i_1})$ con $x_{i_2} \in B$, también va a existir $x_{i_3} \in \Gamma^-(x_{i_2})$ con $x_{i_3} \in B$, además $x_{i_3} \neq x_{i_1}$ puesto que G no contiene circuitos. Repetiendo el procedimiento encontramos un camino elemental $(x_{i_s}, x_{i_{s-1}}, \dots, x_{i_1})$ formado con vértices que pertenecen a B . Encontraremos un vértice $x_{i_{s+1}} \in B$, distintos de todos los otros vértices del camino, pues en caso contrario, obtendríamos un circuito en G' , además como B tiene un número finito de elementos, llegaremos a un camino cuyos vértices pertenecen a B , análogamente encontraremos que al primer vértice del camino le llega un arco desde un vértice de B y siendo G sin circuito resulta que la hipótesis hecha es falsa, entonces existe un vértice $x_i \in B$ que tiene predecesor nada más en el conjunto A .

Hemos demostrado que la duración t_i puede ser calculada con la expresión a); además que podemos aplicarla a todos los vértices de G en un orden convenientemente elegido.

Análogamente se demuestra que existe un orden de los vértices de G , para el cual, obtenemos la duración límite t_i^* para todos los vértices de G mediante la expresión (b), para lo cual basta con substituir los predecesores del vértice x_i por sus sucesores.

3.- ACTIVIDADES CON DURACION ALEATORIA.

CASO PERT.

El método PERT introdujo el concepto de una estimación triple

del tiempo, como sigue:

Un tiempo pesimista, un tiempo más probable y un tiempo optimista. La interpretación que se les da al significado de estos tiempos ha ido variando desde su origen hasta nuestros días.

Definición 2.8:

En la actualidad llamamos tiempo optimista " a_{ij} " a la duración mínima en que podemos suponer que puede realizarse una actividad A_{ij} . La esperanza matemática de que podamos efectuar la actividad con una duración menor que el tiempo optimista es muy pequeña.

Llamaremos tiempo más probable " m_{ij} ", al tiempo que normalmente invertiríamos en efectuar una actividad A_{ij} . Y tiempo pesimista " b_{ij} " a la duración máxima que podríamos tomar en la ejecución de una operación A_{ij} (si tuviéramos, por ejemplo una cantidad considerable de problemas).

El modelo original del PERT tuvo una gran demanda por tener la capacidad de considerar la incertidumbre en la estimación de las duraciones de las actividades y también porque se obtuvieron importantes resultados.

Este modelo consideró la función de distribución beta como la función de distribución que seguían las duraciones de las actividades. Las justificaciones que se dieron para adoptar esta función de distribución están basadas en que el modelo se ajusta a ciertas características que cumple esta función de repartición.

En consecuencia este método utiliza para estimar la duración de la actividad A_{ij} el siguiente valor medio:

$$t_{ij} = \frac{1}{6} (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})$$

y para la estimación de la varianza del tiempo t_{ij} la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$$

Con el valor medio t_{ij} de la duración de las actividades, podemos aplicar el método expuesto anteriormente para determinar los valores medios de las duraciones t_i y t_i^* de los eventos críticos, asociando a cada arco de actividad el valor medio t_{ij} .

Como las duraciones de las actividades siguen una ley de repartición β , aplicando el Teorema de límite Central del Cálculo de las probabilidades, podemos deducir que una suma de variable aleatorias independientes, como son los tiempos asociados a las actividades críticas en un grafo PERT sigue una ley normal (Gauss-Laplace), si el número de estas variables es suficientemente grande.

La media y la varianza correspondientes a esta ley normal son las sumas de las medias y varianzas respectivamente de las variables aleatorias.

El Teorema de límite central podemos aplicarlo de manera mas

conveniente en el caso en que el grafo de actividad es suficientemente grande, sin embargo este resultado solamente es válido si las duraciones de las actividades son variables aleatorias independientes. Esta propiedad se utiliza en general al aplicar el PERT, en contradicción con la teoría de probabilidad, puesto que existen grafos de actividades en los cuales las duraciones de las actividades no son variables independientes. Lo cual pone en evidencia la naturaleza heurística del método PERT.

Conforme al Teorema del Límite central, la variable aleatoria
$$= \frac{t - t_n}{\sqrt{\sigma_n^2}}$$
 sigue una ley de repartición normal reducida, donde t_n es la duración del evento final y σ_n^2 es la varianza de esta fecha, calculados como la suma de las medias y varianzas respectivamente de los tiempos t_{ij} asociados a los arcos del camino crítico.

La variable aleatoria ξ sigue una ley de repartición normal reducida, para evaluar la probabilidad de realizarse un proyecto en una determinada fecha t_0 . Encontramos

$$\xi_0 = \frac{t_0 - t_n}{\sqrt{\sigma_n^2}}, \text{ determinamos fácilmente}$$

la $P(\xi \leq \xi_0)$, que sería la probabilidad de realizarse el evento final antes o en la fecha t_0 . Si esta probabilidad no es suficientemente grande reducimos las duraciones de las actividades críticas, asignándoles por ejemplo recursos suplementarios en detrimento de

las actividades con margen libre.

Hemos expuesto una variante del método de los caminos críticos, conocida como método PERT. Existen muchas mas variantes del CPM conocidas ampliamente en los ámbitos comerciales.

4.- ACELERACION CON COSTO MINIMO DE UN PROYECTO.

Existe una relación directa entre el tiempo de realización de cualquier proyecto y su costo. Los parámetros de esta relación incluyen: mano de obra, recursos económicos, métodos, equipo y eficiencia.

Todo proyecto tiene una duración óptima para su realización y la desviación de la misma afecta el costo del proyecto.

Una aceleración en el tiempo de ejecución requiere un incremento en el equipo o mano de obra utilizados y ésto produce un aumento en los costos. Por otro lado la realización del proyecto en un tiempo mayor que el óptimo también aumenta el costo debido al incremento de los gastos fijos.

La aceleración de una actividad que podemos describir como "compresión de la duración de una actividad", depende solamente de los recursos disponibles, de la forma de la curva costo-tiempo y de la aceleración deseada para la finalización de la actividad.

Dado un grafo de actividad G , supongamos que para cada actividad A_{ij} , tenemos un tiempo t_{ij} normal que denotaremos por D_{ij} y otro acelerado que denotaremos d_{ij} tal que se cumple:

$$d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}$$

Nos referimos a d_{ij} como la abreviación máxima posible del tiempo t_{ij} y asumiremos que el costo es una función lineal de la duración:

$$c_{ij} = k_{ij} - x_{ij}t_{ij}$$

donde k_{ij} es una constante que depende de la actividad A_{ij} , la pendiente $x_{ij} > 0$ representa el crecimiento del costo correspondiente a reducir en una unidad el tiempo t_{ij} .

El procedimiento básico para comprimir un modelo de red consiste en acelerar la duración de las actividades críticas, empezando con aquellas para las cuales la curva costo-tiempo tiene pendiente mínima.

Las siguientes reglas conducen a este fin:

- 1- Enumerar las actividades críticas.
- 2- No considerar aquellas cuyo potencial de compresión sea cero; entre ellas se incluyen las actividades en que $D_{ij} = d_{ij}$, así como las que han sido aceleradas anteriormente.
- 3- Seleccionar la actividad correspondiente a la pendiente mínima (que proporciona la compresión más económica).
- 4- Determinar la cantidad en que esta actividad puede ser comprimida y su costo correspondiente.

Sea G un grafo de actividad. Resolveremos el problema de encontrar la duración del proyecto, así como la minimización del costo total de su realización, mediante la determinación de un corte de capacidad mínima, en una red de transporte asociada al grafo de actividad G .

Sea $G_c = (X, U_c)$ la red formada por los caminos críticos de G . Asumiremos por definición que:

$$c(x_i, x_j) = \begin{cases} \infty & , \text{ si } t_{ij} = d_{ij} \\ x_{ij} & , \text{ si } t_{ij} > d_{ij} \end{cases}$$

para todo $(x_i, x_j) \in U_c$.

Para abreviar la duración del proyecto con un costo mínimo debemos determinar un subconjunto M de U_c tal que:

- a) cada camino de G_c contiene al menos un arco de M ,
- b) la suma de los coeficientes de crecimiento de los costos asociados a los arcos del conjunto M es mínima.

Una vez que determinamos M , acortamos el tiempo de las actividades representadas por los arcos de M , en lo que sea posible, sin que surjan nuevos caminos, críticos en el grafo.

En efecto la condición a) nos asegura que la duración del proyecto se reduce efectivamente, puesto que disminuye la longitud de todos los caminos críticos del grafo y b) nos asegura que se reduce la duración con costo mínimo.

Si φ es un flujo compatible con G_c , $\varphi_n \leq c(M)$, donde $c(M) = \sum_{u \in M} c(u)$. El teorema de Ford y Fulkerson nos garantiza la existencia en G_c de un flujo máximo $\tilde{\varphi}_n$ y un corte de capacidad mínima $w^-(A)$ tal que $\tilde{\varphi}_n = c(w^-(A))$, de modo que $c(w^-(A)) \leq c(M)$ y puesto que cualquier corte en G_c es un conjunto de arcos que cumple con la condición (a), resulta que $w^-(A)$ es un conjunto que además cumple con la condición (b).

Con ésto hemos reducido el problema de la disminución de la duración del proyecto con un mínimo de costos, al problema de encontrar un corte de capacidad mínima en una red de transporte asociada al grafo de actividad. Si la capacidad mínima en un corte es ∞ , entonces para algún corte existe un arco con duración acelerada máxima. En esta condición nos detenemos, ya que la duración del proyecto no se puede acelerar más.

CONCLUSIONES

Para determinar la distancia mínima entre los vértices de un grafo dado resultan igualmente útiles los algoritmos de Roy-Floyd y el primero de Dantzig, pues para ambos se utiliza igual número de operaciones. Sin embargo mientras que el algoritmo de Roy-Floyd identifica además los caminos de longitud mínima, el de Dantzig detecta los circuitos negativos existentes en el grafo. Esto implica que la elección del algoritmo dependerá de la naturaleza del problema práctico al que este sea aplicado.

El caso resulta diferente al comparar el segundo algoritmo de Dantzig y el de Yen; ambos funcionan para calcular la distancia de un vértice x_1 al resto de los vértices en el grafo; pero el de Dantzig, resulta más económico puesto que exige menos esfuerzo computacional en su aplicación.

Gracias a la proposición 1.6 la necesidad de resolver los problemas p_1, p_2 y p_3 , de búsqueda de configuraciones hamiltoneanas en un grafo, se satisface resolviendo al menos uno de éstos problemas. No obstante los algoritmos de Kruskal y Tomescu hacen posible la solución para el problema p_1 , el algoritmo de Cristofides resuelve el problema p_2 , mientras que para resolver el problema p_3 es necesario solucionar primero o bien p_1 o bien p_2 .

La forma en que se aplica el teorema del Límite Central en el método PERT evidencia, como lo afirmamos en nuestro trabajo, la naturaleza heurística de este método, pues en determinados casos puede que esta aplicación no sea viable.

Sin duda alguna el concepto de camino crítico constituye uno de los instrumentos de aplicación más útiles de la Teoría de grafo. En este sentido es importante resaltar la forma en que se utiliza el Teorema de Ford-Fulkerson en el problema de encontrar la disminución de la duración de un proyecto, así como la minimización del costo total de su realización.

BIBLIOGRAFIA

- [17] Rigg, J.L. Reducción de Costos Mediante la Progra
Heath, D. mación por el Camino Crítico.
Publicaciones Marcombo. México 1983.
- [18] Stanasila, O. Elemento de Matemática Discreta
Institutul Politehnic Bucuresti 1978.
- [19] Tomescu, I. Introducere in Combinatorica.
Editura Tehnica, Bucuresti, 1972.
- [20] Tomescu, I. Combinatorico si Teoria Grafurilor
Bucuresti, 1978.
- [21] Wilson, J. Introduction to Graph Theory
Logman Group Limited, London 1979.