

UNIVERSIDAD DE PANAMA  
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES Y POSTGRADO  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SOBRE UN ALGORITMO DE RESOLUCION DE LOS  
PROBLEMAS DE PROGRAMACION EN NUMEROS  
ENTEROS DE VARIABLES BOOLEANAS

Por:

MYRTA CANDANEDO DE JAEN

Trabajo presentado como uno de los requisitos para optar  
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización  
en Matemática.

1986



VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

Aprobado por:

Director de Tesis

*Alvaro Pino N.*

ALVARO PINO NIÑO, M.Sc.

Miembro del Jurado

*J. Vallarino*

JULIO VALLARINO, M.Sc.

Miembro del Jurado

*D. Santimateo*

DIEGO SANTIMATEO, M.Sc.

Fecha

*21 de Octubre de 1986*

*TM*

12 ENE. 1987

*Obsequio del autor*

221074

DEDICATORIA

A mis padres y esposo,  
por ser fuentes de apoyo y comprensión.

AGRADECIMIENTO

A Dios, que en todo momento estuvo conmigo.

Al director de éste mi trabajo, profesor Alvaro Pino; que contra vientos y mareas constantes, siempre estuvo dispuesto a guiarme, ayudarme y supo motivar mi trabajo. En él encontré no sólo a un profesor, sino a un amigo.

No muy lejos de mi director, se encontró la figura de una persona que incondicionalmente siempre está dispuesta a ayudar, a colaborar y que la lógica, madurez y buen corazón que lo caracterizan dió forma al trabajo que estoy presentando, este es, el profesor, Julio Vallarino.

No puedo dejar de agradecer a mis amigas de siempre, Aurora, Lulú y Teresita que se constituyeron en mi constante estímulo.

A todas las personas que de una manera u otra tuvieron que ver con la elaboración de este trabajo, les agradezco su voluntad y aporte.

Mirta.

INTRODUCCION

Los métodos de corte, son actualmente las primeras técnicas sistemáticas a ser desarrolladas para los problemas lineales enteros.

Dantzing (1959) fue el primero en proponer un corte para resolver tales problemas; su idea consistió en resolver primero el problema lineal, ignorando la condición de ser entera. Si la solución básica resultante es no entera entonces, aseguraba un nuevo conjunto de valores para las variables enteras no básicas haciéndolas mayores ó iguales a 1. Este corte representa una condición necesaria para ser entera, pero no garantiza que las aplicaciones sucesivas de él produzcan la solución entera en un número finito de iteraciones.

El primer algoritmo finito de corte fue desarrollado por Gomory (1958), para el problema entero puro. Gomory muestra cómo los cortes pueden ser construídos sistemáticamente de el tablero simplex. Aunque este algoritmo converge en un número finito de iteraciones, tiene la desventaja de que la computadora acaba con un error que representa una dificultad prominente. Esto hace que Gomory desarrolle un nuevo algoritmo (1960), en el cual mejora directamente su desventaja. Para este mismo año Gomory extiende su teoría al cubrir los problemas enteros mixtos. Otros tipos de corte llegan a ser introducidos por Glover (1965), Young (1971) y Balas.

Una característica común acerca de los cortes es que los algoritmos asociados son todos de tipo dual, esto es,

la solución al problema no se pone a nuestra disposición hasta que el algoritmo termine. Young (1965) fue el primero en desarrollar un algoritmo primal finito.

El presente trabajo consta de dos áreas, en la primera que hemos titulado "Problema Lexicográfico de la Programación Lineal", se hace un breve estudio del problema lexicográfico, examinamos algunas de sus propiedades y a la vez definimos diferentes problemas a los que nos referiremos más tarde; en la segunda, que denominamos "Un Algoritmo para la Resolución de Problemas de la Programación Lineal entera con Variables Booleanas", y que es la parte medular del trabajo, en ella se propone un algoritmo sustancialmente diferente para la resolución del problema entero mixto de la programación lineal, con variables enteras que tomarán valores cero ó uno.

El algoritmo desarrollado, al que llamaremos Algoritmo B, utiliza la idea de los métodos de corte, sin embargo, nosotros daremos una regla nueva para la construcción de la restricción adicional. El Algoritmo B no resuelve directamente el problema dado de la programación lineal entera sino un número de problemas obtenidos de éste, llamados problemas canónicos de la programación lineal o problemas  $E_t$ . Se estima el número de problemas canónicos que hay que resolver.

La solución obtenida con ayuda del Algoritmo B es aproximada, con una exactitud de antemano exigida. Se demuestra

la finitez y se dan las estimaciones superiores al número de iteraciones necesarias para resolver el problema presentado.

Se da un ejemplo de una clase de problemas para los cuales el número superior de las estimaciones es significativamente menor que el número de todas las posibles combinaciones.

Para finalizar debemos advertirle que la lectura y entendimiento del trabajo, exige el conocimiento general de el problema dual y su resolución, además de la forma propuesta por Gomory para la construcción de un corte.

PROBLEMA LEXICOGRAFICO DE LA PROGRAMACION LINEAL

Definición (Problema Lexicográfico de la Programación Lineal)

Llamaremos problema lexicográfico de la programación lineal que denotaremos problema  $\mathcal{L}$ , al problema

$$\mathcal{L} : \text{Max}_{x \in G} \langle c, x \rangle \quad \text{donde: } \langle c, x \rangle = x_0$$

$$c(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$G = \{x / x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\},$$

es decir, el problema lexicográfico de la programación lineal consiste en encontrar un vector  $x^* \in G$  tal que  $c(x^*) \succ^L c(x)$ ,  $x \neq x^*$ .

Proposición

Si el problema  $\mathcal{L}$  tiene solución ésta es única.

Proposición

Si  $x^*$  es solución de el problema  $\mathcal{L}$  entonces  $x^*$  es punto extremo.

Proposición

El problema  $\mathcal{L}$  tiene solución, si y solo si, el conjunto de soluciones  $G$ , es no vacío y acotado.

Demostración

Condición suficiente.

Como G es no vacío,

sea  $x \in G$  entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \text{ y } x^i$$

punto extremo de G.

Como G es cerrado, existe  $x^*$  punto extremo tal que  $c(x^*) \stackrel{L}{>} c(x)$ ,  $x^i \neq x^*$ .

Mostremos ahora que  $x^*$  es solución del problema  $\mathcal{L}$ .

En efecto, sea  $x \in G$  y consideremos  $c(x)$ , esto es:

$$c(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c(x^i) < \sum_{i=1}^n \alpha_i c(x^*) = c(x^*) \quad \text{así,}$$

$$c(x) \stackrel{L}{<} c(x^*) \quad \forall x \in G. \quad \text{Luego, el problema } \mathcal{L}, \text{ tiene solución.}$$

Condición necesaria.

Para mostrar la condición necesaria probaremos que, si el problema  $\mathcal{L}$  tiene solución entonces,  $G = M^G + k^G$  donde,

$$K^G = \left\{ y / y \in \mathbb{R}^n, A y = b, y \geq 0, \langle c, y \rangle = 0 \right\} \text{ y, } K^G \neq \emptyset.$$

Sea  $y \in K^G$  y  $j$  el menor índice para el cual  $y_j > 0$ , esto es, para  $0 \leq i < j-1$ ,  $y_i = 0$ .

Sea además  $x^*$  solución del problema  $\mathcal{L}$ , entonces  $\bar{x} = x^* + y$  es tal que  $\bar{x} \stackrel{L}{>} x^*$ . Como  $x^*$  es solución del problema  $\mathcal{L}$ ,  $\bar{x}_i = x_i^*$  para  $0 \leq i \leq j-1$  y  $\bar{x}_j > x_j^*$ ; entonces

$\bar{x} \in G$  lo cual es una contradicción pues,  $x^*$  es solución óptima y por tanto mayor que cualquier otra. Luego  $G$  es acotado.

Definición (problema dual).

Al problema de la programación lineal  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  le está asociado el problema,

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle b, y \rangle \\ \text{sujeto a: } & A^T y \geq c \quad \text{denominado problema dual.} \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Definición (seudoplan)

Si  $x^0$  es un vector de apoyo, diremos que  $x^0$  es un seudoplan, si y solo si  $A^T y^0 \geq c$ .

Definición (seudoplan estrictamente admisible)

Un vector de apoyo  $x^0$  se dirá seudoplan estrictamente admisible si y solo si  $\beta^j \stackrel{L}{>} 0, j \in N$ .

Proposición

Si  $x$  es un vector factible de el problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  y,  $x^0$  es un seudoplan admisible estricto entonces,  $c(x) \stackrel{L}{\leq} c(x^0)$ .

Demostración

Sea  $x$  un seudoplan entonces  $\langle c, x \rangle \leq \langle c, x^0 \rangle$   
a) Si  $\langle c, x \rangle < \langle c, x^0 \rangle$  entonces,  $c(x) \stackrel{L}{\leq} c(x^0)$ .

b) Supongamos ahora que,  $\langle c, x \rangle = \langle c, x^0 \rangle$  entonces,  $c(x) = c(x^0)$ .

Consideremos,  $z = c(x) - c(x^0)$  entonces,  $z \in L$ , con  $L$  subespacio definido por el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$x_0 + \sum_{j \in N} \alpha_{ij} x_j = 0$$

y,

$$x_i + \sum_{j \in N} \alpha_{ij} x_j = 0$$

Sea  $A$  la matriz de la tabla simplex en forma de coordenadas y sin las columnas correspondientes al pseudoplan  $x^0$ , esto es,

$$A = (A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_{n-m}})_{(n+1) \times (n-m)}$$

como  $z \in L$  entonces  $z = -A z_N$

$$\begin{aligned} \text{luego, } c(x^0) - c(x) &= -A(c(x^0) - c(x))_N \\ &= -A(c(x^0)_N - c(x)_N) \\ &= -A(-x_N) \\ &= A x_N \end{aligned}$$

por lo tanto,  $c(x^0) - c(x) = A x_N$  donde el vector  $A x_N$  será no negativo, pues  $x \geq 0$ .

Como  $x^0$  es pseudoplan estrictamente admisible,

$$A x_N = \sum_{j \in N} x_j A^j \quad \text{y, } A^j > 0 \quad \text{para } j \in N \quad \text{de esta manera,}$$

A  $x_N \not\geq 0$ .

Si suponemos A  $x_N = 0$  entonces  $x_M = 0$ , luego para  $x \neq x^0$  se tendrá,  $c(x^0) \not\geq c(x)$ .

La siguiente proposición indica el proceso para resolver el problema lexicográfico de la programación lineal.

Proposición

Si  $x^*$  es un vector admisible del problema,  
 $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ ,  $x^*$  será solución del problema  $\mathcal{L}$  si y solamente  
sí, es un pseudoplan estrictamente admisible de el problema  
 $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ .

Demostración

Condición suficiente.

Si  $x^*$  es un pseudoplan estrictamente admisible entonces,  $x^*$  es un plan del problema  
 $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  entonces  $x^* \geq 0$ .

Como  $x^*$  es un pseudoplan estrictamente admisible y  $x^* \geq 0$  entonces, para  $x$  un plan arbitrario,  $c(x) \not\geq c(x^*)$ .

Así,  $x^*$  es solución al problema  $\mathcal{L}$ .

Condición necesaria.

Sea  $x^*$  solución del problema  $\mathcal{L}$  entonces,  $x^* \in G$ ,  $G \neq \emptyset$  y  $G$  es Acotado.

Haciéndole corresponder al problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ , el

problema, que llamaremos problema C dado por;

$$\begin{aligned} & \max_{x \in G} \langle c, x \rangle \\ & \sum_{j \in N} x_j + x_{n+1} = M \end{aligned}$$

siendo  $M = \sum_{j=1}^n x_j^*$ .

Como  $x^*$  es solución del problema  $\mathcal{L}$  entonces,  $x^*$  es punto extremo de  $G$ , es decir, es solución de el problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  y, siendo así,  $x^*$  seráseudoplan del mismo problema.

Supongamos que  $x^*$  no es unseudoplan estrictamente admisible, entonces, existe  $(x^*, x_{n+1}^*)$  con,  $x_{n+1}^* = M - \sum x_j^*$  tal que  $x_{n+1}^* \geq 0$ ,  $(x^*, x_{n+1}^*)$  es no negativo y tal que servirá de plan para el problema C; además,  $x^*$  y  $(x^*, x_{n+1}^*)$  no seránseudoplanes estrictamente admisibles.

Apliquemos al vector  $(x^*, x_{n+1}^*)$  el procedimiento para encontrar elseudoplan estrictamente admisible del problema C, y denotemos por  $(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$  el vectorseudoplan estrictamente admisible.

Si  $(\bar{x}, \bar{x}_{n+1})$  es elseudoplan inicial entonces, resolviendo el problema C, por el Método Simplex dual en forma de coordenada y, utilizando la regla de introducción de un vector a la base, obtendremos el vector  $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$ seudoplan estricta-

mente admisible para el problema C.

Sea  $(x^*, x_{n+1}^*)$  un plan arbitrario del problema C y,  $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$  el pseudoplan estrictamente admisible entonces,  $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}) \stackrel{L}{>} (x^*, x_{n+1}^*)$  luego,  $\hat{x} \stackrel{L}{\geq} x^*$ .

Como  $x^*$  es solución del problema  $\mathcal{L}$  entonces,  $x^* \geq \hat{x}$  de donde  $\hat{x} = x^*$  luego,  $x_{n+1}^* = M - \sum_{j \in N} x_j^* = \hat{x}_{n+1}$  por lo tanto,  $(x^*, x_{n+1}^*) = (\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$  es una contradicción pues,  $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1})$  es pseudoplan estrictamente admisible.

Así,  $x^*$  es pseudoplan estrictamente admisible del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ .

### Corolario.

Si existe un pseudoplan estrictamente admisible de el problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  entonces, G es acotado.

### Demostración

Sea  $x^0$  un pseudoplan estrictamente admisible del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  entonces,  $A^j \stackrel{L}{>} 0$  para  $j \in N$ .

Tomando  $x^0$  como pseudoplan inicial y aplicando el método simplex dual en forma de coordenadas se obtiene que,  $x^*$  es un pseudoplan estrictamente admisible del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$

luego,  $x^*$  será solución del problema  $\mathcal{L}$ , siendo esto así, entonces, G es no vacío y Acotado.

Definición (problema entero).

Al problema de la programación lineal entera,  $\max_{\substack{x \in G \\ x \text{ entero}}} \langle c, x \rangle$  le llamaremos problema entero.

Definición (parte entera).

Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definimos la parte entera de  $\alpha$ , como el entero más grande  $k$ , que no supera a  $\alpha$  y lo denotaremos por  $[\alpha]$ . Así  $[\alpha] = \max \{ m \in \mathbb{Z} / m \leq \alpha \}$

Definición (parte fraccionaria)

Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos su parte fraccionaria como  $\alpha - [\alpha]$ , y lo denotaremos por  $\{\alpha\}$ . Así,  $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ .

Frente al método de planos cortantes, utilizado para la resolución del problema entero de la programación lineal se presentan dos grandes dificultades, a saber:

(1) La formulación de un algoritmo general de cortes para cualquier problema de la programación lineal entera.

(2) La construcción de un corte tal que, garantice la resolución del problema en un número finito de pasos.

En relación a lo anterior, Gomory propone el siguiente esquema para la construcción de un corte.

Si  $x^*$  es el plan óptimo del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  y,

$1 \leq s \leq n$  es tal que  $x_s^*$  es una coordenada no entera de  $x^*$ ;

entonces, a la fila  $s$  de la tabla simplex  $A$ , se le hace corresponder la expresión:

$$z_s(x) = -\{A_{s0}\} + \sum_{j \in N} \{A_{sj}\} x_j$$

Proposición

Sea  $\tilde{G}$  el conjunto de las soluciones factibles del problema entero y,  $x \in \tilde{G}$ . Entonces,  $Z_s(x)$  es entero y,  $Z_s(x) \geq 0$ .

Proposición

Si  $x_s^*$  es una coordenada no entera de  $X^*$  plan óptimo del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  y  $G \neq \emptyset$  entonces, existe  $1 \leq j \leq n$  tal que  $\{\alpha_{sj}\} > 0$ .

Definición (corte correcto)

Diremos que la expresión

$$\sum \delta_j x_j = \delta_0 \quad \text{con} \quad \delta_j = \{x_{ij}\} \quad \text{y} \quad \delta_0 = \{x_{i0}\} \quad \text{es un corte}$$

correcto si y solo si satisface las siguientes condiciones:

(1) Si  $x^*$  es el plan óptimo del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ ,

entonces  $\langle \delta, x^* \rangle > \delta_0$ . A ésta condición se le denomina condición de corte.

(2) Si  $x^*$  es plan óptimo del problema entero, entonces  $x^*$  satisface la condición de corte. A ésta condición se le denomina condición de correctitud.

Proposición

Si  $x_s^*$  es una coordenada no entera de  $x^*$  plan óptimo del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$  entonces,

$$\sum_{j \in N} \{ \alpha_{sj} \} x_j \geq \{ \alpha_{s0} \} \text{ define un corte correcto.}$$

Notación

En lo sucesivo denotaremos por:

$\mathcal{L}_0$  al problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$

$x(0) = x^0 = (x_0(0), x_1(0), \dots, x_n(0))$  donde, el vector

$(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$  es la solución del problema lexicográfico  $\mathcal{L}_0$  y  $x_0(0) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(0)$  es el valor de la forma

lineal para  $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ .

$y^1 = y^1$  designa el vector  $(x_0(0), x_1(0), \dots, x_n(0), x_{n+1})$

donde  $x_{n+1} = \sum_{j \in N} \{ \alpha_{sj} \} x_j(0)$ . y además identificará al pseudo-

plan estrictamente admisible para la solución del problema  $\mathcal{L}_1$ ,

mediante el método simplex dual en forma de coordenadas.

$\bar{y}^1$  designa al vector obtenido como resultado de la primera iteración del método simplex dual con ayuda de  $y^1$ , esto es,

$$\bar{y}^1 = (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_n(1), \bar{y}_{n+1}(1)).$$

De manera recursiva se define  $x^r, y^{r+1}, \bar{y}^{r+1}$  para,

$r = 1, 2, 3, \dots$

Observación

Por propiedad del método simplex dual en forma de coordenada se verifica:  $x^r \stackrel{L}{\leq} \bar{y}^r < y^r$ .

Proposición

Sea  $s$  el menor índice para el cual  $x_s(0)$  no es entero. Entonces,

$$(x_0(0), x_1(0), \dots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_{s-1}(1), \bar{y}_s(1)).$$

Demostración

Si  $y^1 > \bar{y}^1$  entonces  $(x_0(0), \dots, x_s(0)) \stackrel{L}{>} (\bar{y}_0(1), \dots, \bar{y}_s(1))$  de donde,  
 $(x_0(0), x_1(0), \dots, [x_s(0)]) \stackrel{L}{>} (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_s(1))$   
 por definición de orden lexicográfico.

Supongamos ahora  $y^1 = \bar{y}^1$  entonces,

$(x_0(0), x_1(0), \dots, x_s(0)) = (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_s(1))$  y por el método simplex dual para la resolución del problema  $\mathcal{P}_1$ , eliminaríamos de la base a la variable  $x_{n+1}$  y por tanto,  $y^1$  será tal que  $x_j(0) \geq 0 \quad \forall j \in N$  y  $x_{n+1} < 0$ .

Sea  $k$  el índice para el cual  $-\{\alpha_{sk}\} < 0$ , entonces, por la regla de introducción  $\begin{bmatrix} A^k \\ -\{\alpha_{sk}\} \end{bmatrix} \stackrel{L}{<} \begin{bmatrix} A^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{bmatrix} \quad \forall j \in N$

Luego, el vector  $x_k$  se introduce a la base.

Tomando en consideración que la transformación

$$\bar{A}^j = A^j - \frac{A_{sj}}{A_{sk}} A^k, \quad j \neq k, \quad j \in N, \text{ será posible solo para}$$

los  $A_{ik} = 0, 1 \leq i \leq s - 1$ , entonces,  $x^0$  es pseudoplan estrictamente admisible para  $\mathcal{L}_0$ .

A esta tabla simplex resultante la denotaremos por,  $A(0)$  y en ella todas las  $A^j, j \in N$ , serán lexicográficamente positivas, en particular  $A^k \stackrel{L}{>} 0$  por lo tanto, las coordenadas  $A_{sk}$  de dicho vector serán no negativas.

Como  $A_{sk} = \alpha_{sk}, 1 \leq s \leq n, s \in N$  y, además

$$\begin{bmatrix} A^k \\ -\{\alpha_{sk}\} \end{bmatrix} \stackrel{L}{<} \begin{bmatrix} A^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{bmatrix} \text{ entonces, } \alpha_{sk} \neq 0 \text{ de aquí que,}$$

$$\alpha_{sk} > 0.$$

Para  $\bar{y}_s(1)$  la transformación en la tabla simplex será:

$$\bar{y}_s(1) = x_s(0) - \frac{\{\alpha_{so}\}}{\{\alpha_{sk}\}} \alpha_{sk} \text{ y, como } x_s(0) = \alpha_{so} \text{ y además}$$

$$\alpha_{sk} \geq \{\alpha_{sk}\} \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_s(1) &= x_s(0) - \frac{\{\alpha_{so}\}}{\{\alpha_{sk}\}} \alpha_{sk} \leq \alpha_{so} - \frac{\{\alpha_{so}\}}{\{\alpha_{sk}\}} \{\alpha_{sk}\} = \alpha_{so} - \{\alpha_{so}\} \\ &= [\alpha_{so}] \\ &= [x_s(0)] \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\bar{y}_s(1) \leq [x_s(0)]$

luego,

$$(x_0(0), x_1(0), \dots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (\bar{y}_0(1), \dots, \bar{y}_{s-1}, \bar{y}_s(1)).$$

Observación

Si  $x_s^*$  es no entera y  $\tilde{G} \neq \emptyset$  entonces entre los  $\{\alpha_{sj}\}$ ,  $1 \leq j \leq n$  hay positivos luego, existe  $k$  tal que:

$$\begin{bmatrix} A^k \\ -\{\alpha_{sk}\} \end{bmatrix} \stackrel{L}{<} \begin{bmatrix} A^j \\ -\{\alpha_{sj}\} \end{bmatrix}$$

Proposición

Se verifica que,  $(x_0(0), x_1(0), \dots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (x_0(r), x_1(r), \dots, x_{s-1}(r), x_s(r))$  para  $r = 1, 2, \dots$

Demostración

Si  $r = 1$  y  $s$  es el menor índice para el cual  $x_s(0)$  no es entero entonces, por  $\bar{y}^1 \geq x(1)$  y la proposición anterior se tendrá

$$(x_0(0), x_1(0), \dots, x_{s-1}(0), [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (x_0(1), x_1(1), \dots, x_{s-1}(1), x_s(1)).$$

Si  $r = 2$  y  $s$  es el menor índice para el cual  $x_s(0)$  no es entero, entonces para las soluciones del dual se verifica

$$(\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_{s-1}(1), \bar{y}_s(1)) \stackrel{L}{\geq} (\bar{y}_0(2), \bar{y}_1(2), \dots, \bar{y}_{s-1}(2), \bar{y}_s(2))$$

y como por la proposición anterior se tiene

$$(x_0(0), x_1(0), \dots, [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (\bar{y}_0(1), \bar{y}_1(1), \dots, \bar{y}_s(1))$$

y además,  $x^r \leq \bar{y}^r$  entonces,

$$(x_0(0), x_1(0), \dots, [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (x_0(2), x_1(2), \dots, x_s(2)).$$

Para  $r > 2$  se tendrá  $\bar{y}^1 \stackrel{L}{\geq} \bar{y}^2 \stackrel{L}{\geq} \dots \geq \bar{y}^r$  como,  $x^r \leq \bar{y}^r$

entonces,

$$(x_0(0), \dots, [x_s(0)]) \stackrel{L}{\geq} (x_0(r), \dots, x_s(r))$$

### Proposición

Para cada  $0 \leq j \leq n$ , existe el número entero  $R_j$  tal que, para todo  $r \geq R_j$ ,  $x_j(r)$  es entero e igual a  $x_j(R_j)$ .

### Demostración

Supongamos que la tesis es falsa y sean,  $0 \leq s < n$  el menor índice para el cual la proposición no se cumple,

$$R = \max_{0 \leq j < s-1} R_j \quad \text{y, para } r = 0, R = 0.$$

Consideremos números enteros  $r < 1$  tales que,  $R \leq r < 1$  y además  $x_s(r)$  y  $x_s(1)$  no son enteros.

Demostraremos ahora que  $[x_s(r)] > [x_s(1)]$ .

Por nuestra elección de  $s$  tendremos que  $x_j(r)$  es entero y  $x_j(r) = x_j(r+q)$  con  $q = 1, 2, 3, \dots$  para,  $0 \geq j \geq s-1$ .

En tal caso,  $s$  será el menor índice para el cual  $x_s(r)$  no es entero. Como

$$(x_0(r), \dots, x_s(r)) \geq \bar{y}^r > \bar{y}^{r+(1-r)} \geq x(r+(1-r)) \text{ entonces,}$$

$$(x_0(r), \dots, x_{s-1}(r), [x_s(r)]) \geq (x_0(r+(1-r)), \dots,$$

$$x_{s-1}(r+(1-r)), x_s(1)) = (x_0(r), \dots, x_{s-1}(r), x_s(1)) \text{ luego,}$$

$$[x_s(r)] \geq x_s(1) > [x_s(1)] \text{ pues, } x_s(1) \text{ no es entero.}$$

Como el conjunto  $G$  de planes del problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$

es acotado entonces cualquier  $x_s(r)$ ,  $0 < s \leq n$  y  $r = 1, 2, \dots$  será acotada de donde, una cadena infinita de desigualdades de tipo  $[x_s(r)] > [x_s(1)] > \dots$  no podrá existir y para dicha sucesión no podremos tener un número infinito de números no enteros, ni tampoco, un número infinito de números enteros diferentes.

### Proposición

Si para el problema  $\max_{x \in G} \langle c, x \rangle$ ,  $G$  es Acotado

y además para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $c_j$  es entero entonces, el primer algoritmo de Gomory necesita solo un número finito de  $r$ -iteraciones.

### Demostración

Como  $G$  es acotado entonces,  $\tilde{G}$  es acotado y del hecho de que  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $c_j$  es entero se deduce de que

$\langle c, x \rangle$  es entero cualquiera sea  $x \in \tilde{G}$ .

Para mostrar la tesis de la proposición, es necesario mostrar que para alguna  $r$ -iteración  $x(r) = (x_0(r), x_1(r), \dots, x_{n+r}(r))$  es entero, y dada nuestras condiciones bastará mostrar que  $(x_0(r), x_1(r), \dots, x_n(r))$  es entero pues  $x_{n+1}(r), x_{n+2}(r), \dots, x_{n+r}(r)$  son enteros.

Si recordamos que  $s$  es el menor índice para el cual  $x_s(r)$  es no entera entonces  $s$  no superará a  $n$ .

Si tomamos  $R = \max_{0 \leq j \leq n} R_j$ , donde los  $R_j$  se obtienen de la

proposición anterior entonces, por la misma proposición  $\forall 1 \leq j \leq n, x_j(R)$  es entero, de donde  $x(R)$  es entero.

Así el primer algoritmo de Gomory necesita a lo sumo  $R$ -iteraciones.

UN ALGORITMO PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA  
PROGRAMACION LINEAL ENTERA CON VARIABLES BOOLEANAS.

En el método de Gomory, la restricción adicional lineal es de la forma

$$\eta = -\delta_0 + \sum_{j \in N} \delta_j x_j \geq 0$$

donde  $N$  es el conjunto de variables no básicas en la etapa de resolución.

$\delta_0$  es un coeficiente tal que  $\delta_0 > 0$

$\delta_j$  son coeficientes tales que  $\delta_j \geq 0$ ,  $j \in N$  y  $\sum_{j \in N} \delta_j > 0$ .

En el algoritmo que nos proponemos plantear, la restricción adicional lineal utiliza lo específico del problema de la programación lineal entera, difiriendo fundamentalmente en que, sus variables son booleanas.

Definición (Problema  $\mathcal{L}'$ )

Al siguiente problema de la programación lineal entera con variables booleanas:

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & 1 \leq i \leq m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i & m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ x_j &\geq 0 & 1 \leq j \leq n \\ x_j &\leq 1 & 1 \leq j \leq n_1 \\ x_j &\text{ entero} & 1 \leq j \leq n_1 \end{aligned}$$

le llamaremos, problema  $\mathcal{L}'$ .

Definición (Solución  $\epsilon$ -óptima)

Sean  $\epsilon > 0$ ,  $\tilde{x}$  la solución óptima del problema  $\mathcal{L}'$  y,  $\bar{x}$  la solución factible del mismo. Diremos que  $\bar{x}$  es la solución  $\epsilon$ -óptima, si y solo sí,  $f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) < \epsilon$ .

Proposición

Si en el problema  $\mathcal{L}'$ , para  $1 \leq j \leq n$ ,  $c_j \in \mathbb{Q}$  y  $c_j = 0$  para  $n_1 + 1 \leq j \leq n$  entonces, el máximo común múltiplo  $q$  de los denominadores de las fracciones irreductibles

$$c_j = \frac{p_j}{q_j} \text{ es tal que, si } \epsilon = q^{-1} \text{ entonces, la}$$

solución  $\epsilon$ -óptima coincide con la solución óptima.

Demostración

En efecto, como  $f(\tilde{x}) > f(\bar{x})$  entonces  $f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) \geq 0$ . Si ahora  $f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) < \epsilon$  se tendrá,

$$0 \leq f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) < \frac{1}{q}$$

$$\text{luego, } 0 \leq f(\tilde{x} - \bar{x}) < \frac{1}{q}$$

$$\text{de donde, } 0 \leq q f(\tilde{x} - \bar{x}) < 1$$

tomando  $f^* = q f$  entonces,  $0 \leq f^*(\tilde{x} - \bar{x}) < 1$

Como  $f^*$  es una función objetivo con coeficientes enteros positivos entonces,  $f^*(y) \geq 0$  luego,  $f^*(\tilde{x} - \bar{x}) = 0$  de donde  $\tilde{x} = \bar{x}$  y así,  $\bar{x}$  es la solución óptima del problema  $\mathcal{L}'$ .

Definición (Conjuntos  $G$  y  $G^E$ )

Para el problema  $\mathcal{L}'$ , deno-

taremos por  $G$ , al conjunto:

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_j)_{j=1}^n \\ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1, \quad 1 \leq i \leq m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1, \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ x_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n_1 \\ x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}$$

y, por  $G^E$  al conjunto:

$$G^E = \left\{ \begin{array}{l} x = (x_j)_{j=1}^n \\ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1, \quad 1 \leq i \leq m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1, \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 \\ x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \\ x_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n_1 \\ x_j \text{ entero}, \quad 1 \leq j \leq n_1 \end{array} \right\}$$

Observación

La función objetivo  $f$  será considerada acotada en  $G$ .

Definición (Conjuntos  $G(t)$  y  $G^E(t)$ )

Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

una función objetivo. Para cada  $t \in \mathbb{R}^+$  designaremos por  $G(t)$  al conjunto;  $G(t) = \{ x / x \in G, f(x) \geq t \}$  y por  $G^E(t)$  al conjunto,  $G^E(t) = \{ x / x \in G^E, f(x) \geq t \}$ .

Definición (Problema canónico)

Diremos que un problema

$\mathcal{L}'$  es canónico y lo denotaremos por  $E_t$ , si y solo si,  
 $x = x(t) \in G^E(t)$  ó  $G^E(t) = \emptyset$ .

Notación

En lo sucesivo, las siguientes serán las notaciones a utilizar,

$m = \min_{x \in G} f(x), \quad m^E = ]m [$   
 $= \min \{ p \in \mathbb{Z} / p \geq m \},$  así  $m^E$  será el menor entero, no menor que  $m$ .

$M = \max_{x \in G} f(x), \quad M^E = [M]$   
 $= \max \{ p \in \mathbb{Z} / p \leq M \},$  luego  $M^E$  será

el mayor entero, no mayor que  $M$ .

Observación

Si  $c_j \in \mathbb{Z}$  para  $1 \leq j \leq n_1$  y,  $c_j = 0$  para  $n_1 + 1 \leq j \leq n$  entonces, podremos intercambiar  $M$  por  $M^E$  y,  $m$  por  $m^E$ .

Teorema (Solución  $\varepsilon$ -óptima)

Dado un problema  $\mathcal{L}'$  y  $\varepsilon > 0$  entonces, de existir la solución  $\varepsilon$ -óptima, bastará con calcular  $m$  y  $M$  y, resolver no más de  $\text{Max} \{1, 2 + \lceil \log_2 (\frac{M-m}{\varepsilon}) \rceil\}$  problemas canónicos.

Demostración

Mostraremos que toda solución del problema canónico  $E_m$ , es solución  $\varepsilon$ -óptima.

Sea  $\varepsilon > 0$  y,  $\bar{x}$  una solución factible de  $E_m$ , entonces  $\bar{x} \in G^E(m) = \{x \mid x \in G^E, f(x) \geq m\}$ . Si además,  $\tilde{x}$  es la solución óptima de  $E_m$  entonces,  $\tilde{x} \in G^E(m)$ .

Supongamos primeramente que,  $M-m \geq \varepsilon$ .

Consideremos la serie de problemas canónicos  $E_{t_k}$   $k = 1, 2, 3, \dots$ , donde  $t_0 = M$ ,  $t_1 = m$  y donde el vector  $\bar{x}^1$  denotará,  $\bar{x}^1 = x(t_1) \in G^E(t_1)$ .

Si  $\bar{x}^1 \notin E_{t_1}$  entonces,  $\bar{x}^1 \notin G^E(t_1)$  y,  $G^E(t_1) = \emptyset$  con lo cual, el problema  $\mathcal{L}'$  no tendrá solución  $\varepsilon$ -óptima.

Si ahora,  $\bar{x}^1 \in E_{t_1}$  y,  $f(\bar{x}^1) > M - \varepsilon$

Sea  $\tilde{x}$  la solución óptima de  $E_{t_1}$  entonces,

$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}^1) \leq M - f(\bar{x}^1) < M - M + \varepsilon = \varepsilon$ , así  $\bar{x}^1$  es nuevamente solución  $\varepsilon$ -óptima del problema  $\mathcal{L}'$ .

Consideremos que  $\bar{x}^1 \in E_{t_1}$  y,  $f(\bar{x}^1) = M - \varepsilon$ .

Resolveremos sucesivamente los problemas

$E_{t_k}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ , para  $p \geq 1$  y donde  $t_k$  y  $\bar{x}^k$  se definen por:

$$t_{p+1} \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ f(\bar{x}^p) + \min_{\substack{k < p \\ t_k \geq f(\bar{x}^p)}} t_k \right] & \text{si } \min_{\substack{k < p \\ t_k \geq f(\bar{x}^p)}} t_k - f(\bar{x}^p) \geq \varepsilon \\ \text{no definido} & \text{si } \min_{\substack{k < p \\ t_k \geq f(\bar{x}^p)}} t_k - f(\bar{x}^p) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\bar{x}^{p+1} \begin{cases} x(t_{p+1}) & \text{si } E_{t_{p+1}} \text{ tiene solución} \\ \bar{x}^p & \text{si } t_{p+1} \text{ está definida y, } E_{t_{p+1}} \text{ no tiene solución} \\ \text{no definido} & \text{si } t_{p+1} \text{ no está definido.} \end{cases}$$

Supongamos ahora  $t_k$  y  $\bar{x}^k$  definidos para

$k = 1, 2, \dots, p$ ,  $p \geq 1$ .

Mostraremos a continuación, la existencia de un

$h \geq 1$  tal que:

- a)  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^h$  están definidos y,  $\bar{x}^{h+1}$  no lo está.
- b)  $\bar{x}^h$  es solución  $\varepsilon$ -óptima del problema  $\mathcal{L}'$ .
- c)  $1 \leq h \leq 2 + \left\lceil \log_2 \frac{M-m}{\varepsilon} \right\rceil$

para ello mostremos primeramente las siguientes proposiciones:

Proposición

Si  $t_k$  y  $\bar{x}^k$  están definidos para  $1 \leq k \leq p$ , con  $p \geq 1$ , y si además para  $1 \leq r < p$ ,  $\bar{x}^r = \bar{x}^{r+1}$  entonces:

- a)  $\bar{x}^r = \bar{x}^{r+1} = \bar{x}^{r+2} = \bar{x}^p$
- b)  $\forall s, 1 \leq s \leq p-1, \delta_{s+1} = \delta_s$  donde

$$\delta_{s+1} = \min_{\substack{k < s+1 \\ t_k \geq f(\bar{x}^{s+1})}} t_k \quad \text{y} \quad \delta_s = \min_{\substack{k < s \\ t_k \geq f(\bar{x}^s)}} t_k$$

Demostración

Como por hipótesis  $\bar{x}^r = \bar{x}^{r+1}$  para  $1 \leq r < p$  entonces,  $t_{r+1}$  está definida, luego,

$$t_{r+1} = \frac{1}{2} [f(\bar{x}^r) + \delta_r] \text{ y, } \delta_r - f(\bar{x}^r) \geq \varepsilon \text{ con}$$

$$\delta_r = \min_{\substack{k < r \\ t_k \geq f(\bar{x}^r)}} t_k \quad . \quad \text{Además se tiene que } E_{t+1} \text{ no tiene solución.}$$

Observemos que,

$$\delta_{r+1} = \min_{\substack{k < r+1 \\ t_k \geq f(\bar{x}^{r+1})}} t_k = \min_{\substack{k \leq r \\ t_k \geq f(\bar{x}^r)}} t_k = \min_{\substack{k < r \\ t_k \geq f(\bar{x}^r)}} t_k = \delta_r \text{ pues,}$$

$$f(\bar{x}^r) > t_r.$$

$$\text{Consideremos, } \delta_{r+1} - f(\bar{x}^{r+1}) = \delta_r - f(\bar{x}^r) \geq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{luego, } t_{r+2} &= \frac{1}{2} [f(\bar{x}^{r+1}) + \delta_{r+1}] \\ &= \frac{1}{2} [f(\bar{x}^r) + \delta_r] \\ &= t_{r+1} \end{aligned}$$

Así,  $E_{t_{r+2}} = E_{t_{r+1}}$  no tendrá solución y,

$$\bar{x}^{r+2} = \bar{x}^{r+1} = \bar{x}^r.$$

$$\text{Como, } \delta_{r+2} = \min_{\substack{k < r+2 \\ t_k \geq f(\bar{x}^{r+2})}} t_k = \min_{\substack{k \leq r+1 \\ t_k \geq f(\bar{x}^{r+1})}} t_k = t_{r+1} \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} \delta_{r+2} - f(\bar{x}^{r+2}) &= t_{r+1} - f(\bar{x}^r) \\ &= \frac{1}{2} [f(\bar{x}^r) + \delta_r] - f(\bar{x}^r) \\ &= \frac{1}{2} \delta_r - \frac{1}{2} f(\bar{x}^r) \end{aligned}$$

por otro lado, como por hipótesis  $\delta_r - f(\bar{x}^r) \geq \varepsilon$  entonces,

$$\delta_r - f(\bar{x}^r) = \varepsilon + \delta \text{ con } \delta \geq 0 \text{ de donde, } f(\bar{x}^r) = \delta_r - \varepsilon - \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} t_{r+1} - f(\bar{x}^r) &= \frac{1}{2} \delta_r - \frac{1}{2} (\delta_r - \epsilon - \delta) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{2} \delta \end{aligned}$$

Como  $f(\bar{x}^r) < \delta_r - \epsilon < t_{r+1}$  entonces

$$0 < [\delta_r - f(\bar{x}^r)] - \epsilon < t_{r+1} - f(\bar{x}^r)$$

de donde,  $0 < \epsilon + \delta - \epsilon < t_{r+1} - f(\bar{x}^r)$

luego,  $0 < \delta < t_{r+1} - f(\bar{x}^r)$

y así,  $\delta < \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{2} \delta$

con lo cual  $\delta < \epsilon$ ,

luego,  $t_{r+1} - f(\bar{x}^r) = \delta_{r+2} - f(\bar{x}^{r+2}) < \epsilon$  de donde,  $t_{r+3}$  no estará definido y así  $\bar{x}^r = \bar{x}^{r+1} = \bar{x}^{r+2}$  solución  $\epsilon$ -óptima.

Por último, dado que  $\bar{x}^p$  es la última de las soluciones definidas, se tendrá,  $\bar{x}^p = \bar{x}^r$  ( $\bar{x}^r = \bar{x}^{r+1} = \bar{x}^{r+2}$ ).

#### Consecuencia

Para  $\bar{x}^k$  y  $t_k$  definidos, con  $1 \leq k \leq p$ , si  $1 \leq r < p$ ,  $\delta_r \leq \delta_{r+1}$ .

#### Proposición

Si  $t_k$  y  $\bar{x}^k$  están definidos para  $1 \leq k \leq p$ ,  $\bar{x}^p$  es una solución factible y,  $\tilde{x}$  es la solución óptima de el problema  $\mathcal{P}$  entonces,  $f(\bar{x}^p) \leq f(\tilde{x}) \leq \delta_p$  donde

$$\delta_p = \min_{\substack{k < p \\ t_k \geq f(\bar{x}^p)}} t_k$$

Demostración

Si  $\delta_p = t_0$ , es inmediato que

$$f(\bar{x}^p) \leq f(\tilde{x}) \leq t_0 = M.$$

Supongamos que,  $\delta_p = t_r$  con  $r < p$  y,  $f(\tilde{x}) > \delta_p$ .

Como  $\delta_p = \min_{\substack{k < p \\ t_k \geq f(\bar{x}^r)}} t_k = t_r$  entonces,  $f(\bar{x}^p) \leq \delta_p = t_r \leq f(\bar{x}^r)$ .

Por otro lado, dado que  $r < p$  entonces,  $f(\bar{x}^r) \leq f(\bar{x}^p)$ , lo cual implica que  $f(\bar{x}^p) = \delta_p = t_r = f(\bar{x}^r)$  de donde  $\bar{x}^p = \bar{x}^r$  y por la proposición anterior se tiene que  $\bar{x}^p = \tilde{x}$  y así,  $f(\bar{x}^p) = \delta_p = t_r = f(\bar{x}^r) = f(\tilde{x})$  lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que  $f(\tilde{x}) > \delta_p$ .

Proposición

Si  $t_k$  y  $\bar{x}^k$  están definidos para  $1 \leq k \leq p$  entonces, existe  $h \geq 1$  tal que  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^h$  están definidos y,  $\bar{x}^{h+1}$  no podrá ser definido.

Demostración

Definamos para todo  $1 \leq r \leq p$ ,

$$d_r = \delta_r - f(\bar{x}^r)$$

$$= \min_{\substack{k < r \\ t_k \geq f(\bar{x}^r)}} t_k - f(\bar{x}^r)$$

y mostremos que,  $d_r \leq \frac{M-m}{2^{r-1}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } r = 1 \text{ entonces, } d_1 &= \delta_1 - f(\bar{x}^1) \\ &= t_0 - f(\bar{x}^1) \leq M - m \end{aligned}$$

Supongamos que la desigualdad se verifica para  $k = r$   
y mostremos que también se verifica para  $k = r + 1$ .

Observemos primeramente que;

$$d_r \leq \frac{M-m}{2^{r-1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{M-m}{2^{r-2}} \right) = \frac{d_{r-1}}{2}, \text{ además,}$$

$$\begin{aligned} d_{r+1} = \delta_{r+1} - f(\bar{x}^{r+1}) &\leq \delta_{r+1} - t_{r+1} = \delta_{r+1} - \frac{1}{2} [f(\bar{x}^r) - \delta_r] \\ &= \delta_{r+1} - \frac{1}{2} [\delta_r - d_r + \delta_r] \\ &= \delta_{r+1} - \delta_r + \frac{1}{2} d_r \\ &\leq \delta_r - \delta_r + \frac{1}{2} d_r \text{ pues} \\ &\quad \delta_{r+1} \leq \delta_r \\ &= \frac{1}{2} d_r. \end{aligned}$$

De esta manera,  $d_{r+1} \leq \frac{d_r}{2}$  luego,  $d_{r+1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{M-m}{2^{r-1}} \right) = \frac{M-m}{2^r}$ .

Recordemos que, si  $\bar{x}^{r+1}$  no puede ser definido es porque  $t_{r+1}$  no pudo ser definido, y que esto sucede para,

$d_r = \delta_r - f(\bar{x}^r) < \varepsilon$  luego, dado  $\varepsilon > 0$  bastará calcular el

menor entero positivo  $h$  tal que  $\frac{M-m}{2^{h-1}} < \varepsilon$ .

Supongamos primeramente que  $\frac{M-m}{2^{r-1}} = \varepsilon$

entonces,  $\frac{M-m}{\varepsilon} = 2^{r-1}$

luego,  $\log_2 \left( \frac{M-m}{\varepsilon} \right) = r-1$

y así,  $1 + \log_2 \left( \frac{M-m}{\varepsilon} \right) = r$

Como  $[r] \leq r < [r] + 1$ , resolvemos el problema tomando

$$h = [r] + 1$$

$$= \left[ 1 + \log_2 \left( \frac{M-m}{\varepsilon} \right) \right] + 1$$

$$= 2 + \left[ \log_2 \left( \frac{M-m}{\varepsilon} \right) \right] \quad \text{pués} \quad \log_2 \left( \frac{M-m}{\varepsilon} \right) \geq 0.$$

Volviendo ahora a nuestro teorema, las proposiciones anteriores garantizan que  $\delta_h - f(\bar{x}^h) < \varepsilon$  verificándose (b) y (c) y además que  $f(\tilde{x}) \in [f(\bar{x}^h), \delta_h]$  luego,  $f(\tilde{x}) - f(\bar{x}^h) < \varepsilon$  y así,  $\bar{x}^h$  es solución  $\varepsilon$ -óptima del problema  $\mathcal{L}'$ .

Dedicaremos ahora nuestros esfuerzos a estudiar la solución de los problemas  $E_t$  a los cuales nos hemos referido constantemente.

Solución de los problemas  $E_t$ .

Para resolver los problemas

$E_t$  deberemos:

Ordenar lexicográficamente a los puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

Encontrar los puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfagan el problema,

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$$

$$x \in G^E(t)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Observaciones

$\text{Max}^*$  designará la maximización lexicográfica del vector considerado.

$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$  denota a,  $\text{Max} \sum_{j=1}^n \eta^{j-1} x_j$  para parámetro arbitrariamente pequeño y positivo.

La función plan de  $\text{Max}^*$ , dependerá de la escogencia de la numeración de las variables enteras. La numeración de éstas variables será indiferente, excepto en el caso en que, exista  $k$ ,  $1 \leq k \leq n_1$  tal que,  $\text{sign } |c_j| = \delta_{kj}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Si es este el caso, deberemos reenumerar las incógnitas para que, en nuestro conjunto de restricciones,  $x_k$  ocupe el primer lugar; entonces para  $t = m$  la solución del problema lexicográfico será la misma que la del problema  $\mathcal{P}'$ .

El conjunto  $G^E(t)$  nos será indiferente pues, el algoritmo será capaz de maximizar la función plan en cualquier conjunto definido, con ayuda de las restricciones del problema básico.

Definición (Algoritmo B)

Llamaremos Algoritmo B, al algoritmo capaz de resolver el problema  $\text{Max}^*$  en el conjunto de restricciones del problema básico y, en particular, el problema  $E_t$  en la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \\ &x \in G^E(t) \end{aligned}$$

Construcción del Algoritmo B

Utilizando el esquema general propuesto por Gomory y aplicando la función sign para la construcción de la restricción adicional lineal, se construirá este algoritmo.

El método de corte utilizado para resolver el problema de la programación lineal entera, aquí, será aplicado para resolver el problema lexicográfico.

Notación

En la solución del problema  $E_{t_k}$  con  $k \geq 1$  utilizaremos la siguiente notación;

$g_r$  denotará la restricción lineal adicional en la  $r$ -ésima iteración.

$\eta_r$  designará la variable real que transforma en igualdad a  $g_r$ .

$\bar{g}_r$  denotará el conjunto de puntos  $\bar{x}_r = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfacen a  $g_r$ .

$N_r$  denotará el conjunto de las variables no básicas obtenidas después de la  $r$ -ésima iteración,  $r \geq 0$ .

#### Iteración Cero

Para  $k \geq 1$ , llamaremos iteración cero a resolver el problema:

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n_1}^0).$$

$$x \in G(t_k)$$

Examinemos para esta iteración, las siguientes posibilidades:

(1) Si  $G(t_k) = \emptyset$  entonces  $G^E(t_k) = \emptyset$ , y el problema  $\text{Max}^*$  no tiene solución.

(2) Si  $x^0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in G^E(t_k)$  entonces  $x^0$  es solución del problema  $\text{Max}^*$ .

(3) Si  $G(t_k) \neq \emptyset$  y  $x^0 \notin G^E(t_k)$  entonces pasamos a la primera iteración.

Supongamos que hemos efectuado  $r-1$  iteraciones, y que en esta, tengamos la condición (3) entonces pasamos a la  $r$ -ésima iteración.

Iteración  $r$ -ésima

Llamaremos iteración  $r$  ó  $r$ -ésima iteración al suceso de resolver el problema

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \equiv (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n_1}^r).$$

$$x \in G_r(t_k)$$

donde:

$$G_r(t_k) \begin{cases} G_0(t_k) \cap \bar{g}_1 & \text{si } r = 1 \\ (G_0(t_k) \cap \bar{g}_r) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{r-1} \bar{g}_i \right) & \text{si } r \geq 2 \\ \eta_1 \in N_{r-1} \end{cases}$$

Examinemos como antes, las siguientes posibilidades:

(1) Si  $G_r(t_k) = \emptyset$  entonces el problema  $\text{Max}^*$  no tiene solución.

(2) Si  $x^r \equiv (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r) \in G^E(t_k)$  tendremos que  $x^r$  es solución del problema  $\text{Max}^*$ .

(3) Si  $G_r(t_k) \neq \emptyset$  y  $x^r \notin G^E(t_k)$  entonces pasamos a la  $(r+1)$  - iteración.

Construcción de la Restricción lineal  $g_r$ ,  $r \geq 1$ .

Supongamos que en la iteración  $r-1$  se tenga,  $G_{r-1}(t_k) \neq \emptyset$  y  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$ .

Denotando por  $x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}$  la primera componente no entera del vector  $x^{r-1}$ , con  $1 \leq \alpha_{r-1} \leq n_1$ , la restricción adicional lineal,  $g_r$  se construye de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) = & \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{r-1} + x_j \text{sign}(1-x_j^{r-1})] + \\ & + (1 - x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1. \end{aligned}$$

$$\eta_r \geq 0 \text{ tal que } \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) - 1 = \eta_r.$$

Proposición

Para cualquier solución  $x^{r-1}$  tal que,  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$  se tendrá que  $x^{r-1} \notin g_r$ .

Demostración

Sea  $x^{r-1}$  solución de  $G_{r-1}(t_k)$  supongamos que,  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$ . Si  $x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}$  es la primera componente no entera entonces  $\forall j, 1 \leq j \leq \alpha_{r-1}-1$  se tiene,  $x_j^{r-1} = 0$  ó  $x_j^{r-1} = 1$ .

Consideremos ahora  $\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}})$  y supongamos

que,  $x^{r-1} \in \bar{g}_r$  entonces

$$\begin{aligned} \Phi_r(x_1^{r-1}, x_2^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1 - x_j^{r-1}) \operatorname{sign} x_j^{r-1} + \\ &+ x_j^{r-1} \operatorname{sign} (1 - x_j^{r-1})] + \\ &+ (1 - x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}) \\ &= 0 + (1 - x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}) \\ &= 1 - x_{\alpha_{r-1}}^{r-1} < 1 \quad \text{lo cual es una} \\ \text{contradicción pues, } \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) &\geq 1. \end{aligned}$$

### Proposición

Si después de la iteración  $r-1$  del Algoritmo B, se tiene que  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$  y si además,  $R_r$  denota al conjunto de todos los posibles vectores  $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tales que:

(a)  $x \in G(t_k)$

(b) Si  $x_{\alpha_r}$  es la primera componente  $x$  no entera, entonces,  $\forall t, 1 \leq t \leq \alpha_r, x_t$  entera. Entonces, para que  $x \in R_r$  verifique  $x \notin \bar{g}_r$  es necesario y suficiente que

$$(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) = (x_1^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}, \delta) \text{ donde } \delta > 0.$$

Demostración

Condición suficiente.

Supongamos que en la

(r-1)-iteración del algoritmo,  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$ , esto es,

$(x_1^{r-1}, x_2^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}, x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}, \dots, x_n^{r-1}) \notin G^E(t_k)$  y sea

$x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}$  su primera componente no entera, para  $1 \leq \alpha_{r-1} \leq n_1$ .

Como  $x^{r-1} \notin G^E(t_k)$  y  $x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}$  es la primera componente no

entera entonces,  $x_j^{r-1} = 0$  ó  $x_j^{r-1} = 1$ ,  $\forall j$ ,  $1 \leq j \leq \alpha_{r-1} - 1$ .

Consideremos la restricción  $g_r$  en el punto  $x^{r-1}$  entonces,

$$\begin{aligned} \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1-x_j^{r-1}) \operatorname{sign} x_j^{r-1} + \\ &+ x_j^{r-1} \operatorname{sign} (1-x_j^{r-1})] + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} \left[ \cancel{(1-x_j^{r-1}) \operatorname{sign} x_j^{r-1}} + \cancel{x_j^{r-1} \operatorname{sign}(1-x_j^{r-1})} \right] + (1-\delta)$$

$$= 1 - \delta < 1 \quad \text{pues} \quad \delta > 0$$

por lo tanto  $\Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) < 1$  y así  $x \notin \bar{g}_r$ .

Condición necesaria.

Mostremos que si

$(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \neq (x_1^{r-1}, x_2^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}, t) \quad \text{o} \quad t \leq 0$   
 entonces  $x \in \bar{g}_r$ .

Supongamos primeramente que

$(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \neq (x_1^{r-1}, x_2^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}, t)$  entonces,

$\exists 1 \leq i \leq \alpha_{r-1}-1$ , para el cual  $x_i \neq x_i^{r-1}$ . Sea  $x_{\alpha_{r-1}}^{r-1}$  la primera componente no entera, luego  $x_1^{r-1}, x_2^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}$  son ceros ó unos; y para la  $i$ -ésima componente se tendrá que  $x_i = (1 - x_i^{r-1})$ ,  $1 \leq i \leq \alpha_{r-1}-1$ .

Supongamos que solamente se dá la situación anterior para uno solo de los índices  $1 \leq i \leq \alpha_{r-1}-1$ , esto es, todas las demás son iguales, entonces, consideremos la restricción  $g_r$  esto es:

$$\begin{aligned} \Psi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{r-1} + x_j \text{sign } (1-x_j^{r-1})] + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \\ &= (1-x_1) \text{sign } x_1^{r-1} + x_1 \text{sign } (1-x_1^{r-1}) + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \\ &= (1-(1-x_1^{r-1})) \text{sign } x_1^{r-1} + (1-x_1^{r-1}) \text{sign } (1-x_1^{r-1}) + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \end{aligned}$$

$$= x_i^{r-1} \text{sign } x_i^{r-1} + (1-x_i^{r-1}) \text{sign } (1-x_i^{r-1}) + (1 - x_{\alpha_{r-1}})$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x_i^{r-1} = 0 \text{ entonces, } \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) &= \\ &= 1 + (1 - x_{\alpha_{r-1}}) > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x_i^{r-1} = 1 \text{ entonces, } \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) &= \\ &= 1 + (1 - x_{\alpha_{r-1}}) > 1 \end{aligned}$$

y así  $x \in \bar{g}_r$ .

Supongamos ahora que la situación anterior se verifica  $\forall j, 1 \leq j \leq \alpha_{r-1}-1$ , esto es,  $x_j \neq x_j^{r-1}$  luego  $x_j = (1 - x_j^{r-1})$  para  $1 \leq j \leq \alpha_{r-1}-1$  entonces, consideremos la restricción  $g_r$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}, x_{\alpha_{r-1}}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{r-1} + \\ &+ x_j \text{sign}(1 - x_j^{r-1})] + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \\ &= (\alpha_{r-1}-r) + (1 - x_{\alpha_{r-1}}) \end{aligned}$$

Como  $\alpha_{r-1}-r \geq 1$  entonces  $\Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) > 1$

y así  $x \in \bar{g}_r$ .

Bajo los dos supuestos se tiene que si

$(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \neq (x_1^{r-1}, \dots, x_{\alpha_{r-1}-1}^{r-1}, \delta)$  entonces  $x \in \bar{g}_r$ .

Supongamos ahora que  $\delta \leq 0$  entonces, como  $x^{r-1}$  es solución de la iteración  $r-1$ , se tiene que la componente  $x_{\alpha_{r-1}} = 0$ , considerando nuevamente  $\Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}})$

tendremos;

$$\begin{aligned} \Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{r-1}-1} [(1-x_j) \operatorname{sign} x_j^{r-1} + \\ &\quad + x_j \operatorname{sign} (1-x_j^{r-1})] + (1-x_{\alpha_{r-1}}) \geq (1-x_{\alpha_{r-1}}) = \\ &= (1 - \delta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

luego  $\Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1$  de donde  $x \in \bar{g}_r$ .

### Proposición

Sea el problema  $\operatorname{Max}^{\mathbb{R}}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

$$x \in G_r(t_k)$$

Si  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  es la solución de este problema

entonces,  $\tilde{x} \in G_r(t_k)$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$

### Demostración

Procederemos por inducción sobre  $r$ ; si

$r = 0$ , es trivial.

Supongamos que para todo  $r \leq s-1$  se verifica,  $\tilde{x} \in G_r(t_k)$ , y mostremos que se verifica para  $r = s$ .

Supongamos que  $\tilde{x} \notin \bar{g}_s$  entonces

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}-1}, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}}) = (x_1^{s-1}, \dots, x_{\alpha_{s-1}-1}^{s-1}, \delta)$$

con  $\delta > 0$ . Como  $\tilde{x}$  es solución y  $\tilde{x} = x^{s-1}$  con  $\delta > 0$

entonces,  $\delta = 1$  esto es;

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}-1}, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}}) = (x_1^{s-1}, x_2^{s-1}, \dots, x_{\alpha_{s-1}-1}^{s-1}, 1).$$

Además, si denotamos por  $x_{\alpha_{s-1}-1}^{s-1}$  la primera componente no entera de  $x^{s-1}$ , se tiene que:  $0 < x_{\alpha_{s-1}-1}^{s-1} < 1$  de donde,

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}-1}, \tilde{x}_{\alpha_{s-1}}) \stackrel{L}{>} (x_1^{s-1}, x_2^{s-1}, \dots, x_{\alpha_{s-1}-1}^{s-1}, 1)$$

por lo tanto  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n_1}) \stackrel{L}{>} (x_1^{s-1}, x_2^{s-1}, \dots, x_{n_1}^{s-1})$ .

Por nuestra hipótesis de inducción tenemos que,  $\tilde{x} \in G_{s-1}(t_k)$  y como  $\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = x^{s-1}$  obtenemos una

$$x \in G_{s-1}(t_k)$$

contradicción pues;  $\tilde{x} \stackrel{L}{>} x^{s-1}$ , así,  $\tilde{x} \in \bar{g}_s$ .

Como  $\tilde{x} \in \bar{g}_s$  y,  $\tilde{x} \in G_{s-1}(t_k)$  entonces  $\tilde{x} \in G_{s-1}(t_k) \cap \bar{g}_s$

luego,

$$\tilde{x} \in (G_o(t_k) \cap \bar{g}_{s-1}) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{s-2} \bar{g}_i \right) \cap \bar{g}_s$$

$$\eta_i \in N_{s-1}$$

de donde,  $\tilde{x} \in (G_o(t_k) \cap \bar{g}_s) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{s-1} \bar{g}_i \right)$

$$\eta_i \in N_s$$

y así,  $\tilde{x} \in G_s(t_k)$ .

Proposición

Si  $x^r$  y  $x^{r+1}$  están definidos entonces,

$$(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_r}^r) >^L (x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}).$$

Demostración

Como  $x^r$  está definido entonces

$$\text{Max}^{\#} (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = x^r \quad \text{donde}$$

$$x \in G_r(t_k)$$

$$G_r(t_k) = (G_o(t_k) \cap \bar{g}_r) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{r-1} \bar{g}_i \right).$$

$$\eta_i \in N_{i-1}$$

Denotando por  $S_r(t_k) = G_o(t_k) \cap \left( \bigcap_{i=1}^r \bar{g}_i \right)$  entonces

$$\eta_i \in N_r$$

$$\text{Max}^{\#} (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = x^r$$

$$x \in S_r(t_k)$$

donde  $x^r \in \bar{g}_r$ .

Como  $x^{r+1}$  está definida entonces

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = x^{r+1}$$

$$x \in G_{r+1}(t_k)$$

$$\text{donde } G_{r+1}(t_k) = (G_0(t_k) \cap \bar{g}_{r+1}) \cap \left( \bigcap_{i=1}^r \bar{g}_i \right) =$$

$$\eta_1 \in N_r$$

$$= [G_0(t_k) \cap \left( \bigcap_{i=1}^r \bar{g}_i \right)] \cap \bar{g}_{r+1}$$

$$\eta_1 \in N_r$$

$$= S_r(t_k) \cap \bar{g}_{r+1}$$

Luego,

$$\text{Max}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = \text{Max}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = x^{r+1}$$

$$x \in G_{r+1}(t_k)$$

$$x \in [S_r(t_k) \cap \bar{g}_{r+1}]$$

donde,  $x^{r+1} \in \bar{g}_r$ .

Como  $\forall t \geq 0$ , se tiene que,  $x^{t-1} \notin \bar{g}_t$  y dado que

$x^{r+1} \in \bar{g}_r$ ,  $x^r \in \bar{g}_r$  y,  $x^r$  es solución sobre  $G_r(t_k)$  entonces,

$x^{r+1} \stackrel{L}{<} x^r$  esto es,

$$(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{n_1}^{r+1}) \stackrel{L}{<} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n_1}^r)$$

luego  $(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \stackrel{L}{\leq} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_r}^r)$

con  $1 \leq \alpha_r \leq n_1$  y  $x_{\alpha_r}^r, x_{\alpha_r}^{r+1}$  las componentes  $\alpha_r$  en los vectores  $x^r$  y  $x^{r+1}$ .

Supongamos ahora que,

$$(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_r}^r) \text{ con } x_{\alpha_r}^r > 0,$$

entonces,  $x^{r+1} \notin \bar{g}_r$  lo cual es una contradicción, luego,

$$(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \stackrel{L}{<} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_r}^r).$$

### Proposición

Sea D el número de Desigualdades de la forma

$$\Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1 \text{ entonces, D es finito.}$$

### Demostración

Desde la formulación del problema  $\mathcal{L}'$ ,

$$n_1 < \infty.$$

Por otro lado, como el problema se relaja a

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}), \text{ en la búsqueda de ésta solución}$$

$$x \in G^E(t_k)$$

cada desigualdad  $\Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1$  con  $1 \leq \alpha_{r-1} \leq n_1$

introducida, deberá convertir enteras sucesivamente las

coordenadas del vector  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ , si esto es así,

$D \leq n_1$  por lo tanto, el conjunto de desigualdades  $D$  es finito.

Proposición

El número de variables  $\eta_r$  no será mayor que  $D$ .

Demostración

En efecto, como cada  $\eta_r$  está asociada univocamente a la desigualdad  $\Phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1$  introducida, entonces, el número de variables  $\eta_r$  no será mayor que  $D$ .

Proposición

El número de restricciones lineales no será mayor que  $D$ .

Demostración

En efecto todas las restricciones lineales  $g_r$  introducidas, son transformaciones de las desigualdades  $\Phi_r(x_1, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1$ , por las variables  $\eta_r$  luego, su número, no será mayor que  $D$ .

Proposición

El número de variables no básicas es finito y no supera a  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$ .

Demostración

Observemos primeramente que  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$ , es el

máximo de bases distintas posibles que podemos obtener bajo las condiciones del problema  $\mathcal{L}'$ .

Supongamos ahora sin considerar la iteración cero, que la cantidad de iteraciones supera a  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$ . Entonces, existen  $r, s \in \mathbb{Z}^+$ , tales que, si  $0 \leq r < s$  se tendrá,  $N_r = N_s$ .

Luego  $x^r$  y  $x^s$  están definidos y además,  $x^s \stackrel{L}{<} x^r$ , esto es,  $(x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_1}^s) \stackrel{L}{<} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n_1}^r)$  pero como,  $N_r = N_s$  se tendrá  $(x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_1}^s) = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n_1}^r)$ , lo cual es una contradicción.

Así, la cantidad de iteraciones y por ende, el número de variables no básicas no supera a  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$ .

Teorema (finitud de las iteraciones)

El Algoritmo B resuelve

el problema de la  $\text{Max}^{\mathbb{R}} (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_i \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$$

$$x_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_j \leq 1 \quad 1 \leq j \leq n_1$$

$$x_j \text{ entero} \quad 1 \leq j \leq n_1$$

en un número finito de iteraciones.

### Demostración

La demostración se hará para el problema

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$$

$$x \in G^E(t_k)$$

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Por proposiciones anteriores se tiene que: el número de desigualdades de la forma  $\phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{r-1}}) \geq 1$ , el número de variables  $\eta_r$  y, el número de restricciones lineales introducidas son finitas y, no mayores que D.

Además, como el número de variables no básicas es finito y no supera a  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$  entonces, la cantidad de iteraciones tampoco superará a  $C_{D+n+m_1}^{n-m_2}$ .

Luego, el número de iteraciones es finito.

### Proposición

Sean r y s dos iteraciones diferentes cualesquiera entonces, las correspondientes restricciones lineales adicionales  $g_r$  y  $g_s$  son diferentes.

Demostración

Supongamos que  $g_r = g_s$  entonces,  $\alpha_r = \alpha_s$  con  $1 \leq \alpha_r \leq n_1$ , además, para cada  $1 \leq j < \alpha_{r-1}$ ,  $x_j^s = x_j^r$  y por último que,  $0 < x_{\alpha_r}^s < 1$ .

Supongamos que  $x^r, x^{r+1}$  están definidos luego,  $x^{r+1} \stackrel{L}{<} x^r$  esto es,

$(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \stackrel{L}{<} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_r}^r)$ . Anotamos que si  $x_{\alpha_r}^r = 0$  se tendrá  $x^{r+1} \stackrel{L}{\leq} x^r$  por proposición anterior.

Como por hipótesis  $r \neq s$  supongamos sin perder generalidad que  $r < s$  entonces,  $x^s \stackrel{L}{\leq} x^r$  y dado que  $r + 1 \leq s$  entonces,  $(x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_1}^s) \stackrel{L}{<} (x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{n_1}^{r+1})$  luego,  $(x_1^s, x_2^s, \dots, x_{\alpha_r}^s) \stackrel{L}{<} (x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_{r+1}}^{r+1})$ .

De lo anterior obtenemos,

$(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_{r-1}}^r, 0) - (x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) < 0$  por lo tanto  $(x_1^{r+1}, x_2^{r+1}, \dots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \stackrel{L}{>} (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{\alpha_{r+1}}^r, 0)$  lo cual es una contradicción pues,  $x^{r+1} \stackrel{L}{\leq} x^r$ .

Así,  $g_r \neq g_s$ .

Proposición

Sean  $A = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t) \in \{0, 1\}^t / 1 \leq t \leq n_1 \text{ y, } \delta_t = 1\}$  y,

$$B = \left\{ \Phi_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t}^{(x_1, x_2, \dots, x_t)} = \sum_{j=1}^t [(1-x_j) \text{ sign } \delta_j + x_j \text{ sign } (1-\delta_j)] / (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t) \in A \right\}$$

si  $F = \text{card}(B)$  entonces,  $F = 2^{n_1} - 1$ .

Demostración

Observemos que, para  $1 \leq t_0 \leq n_1$  fijo, el número de elementos  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{t_0}) \in \{0, 1\}^{t_0}$  que pertenecen a  $A$  es,  $2^{t_0-1}$  entonces  $F = \sum_{t=1}^{n_1} 2^{t-1}$ .

Mostremos ahora por inducción que  $F = 2^{n_1} - 1$ .

En efecto, para  $n_1 = 1$  se tendrá,  $F = 2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$ .

Supongamos que la tesis se verifica para  $t = k < n_1$ ,

esto es,

$$F = \sum_{t=1}^k 2^{t-1} = 2^k - 1.$$

Sea ahora,  $t = k + 1 \leq n_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{k+1} 2^{t-1} &= \sum_{t=1}^k 2^{t-1} + 2^{(k+1)-1} \\ &= (2^k - 1) + 2^k \\ &= 2^{k+1} - 1 = F \end{aligned}$$

$$\text{Así, } F = \sum_{t=1}^{n_1} 2^{t-1} = 2^{n_1} - 1.$$

Teorema

Si el algoritmo B resuelve  $\text{Max}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

bajo las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$$

$$x_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_j \leq 1 \quad 1 \leq j \leq n_1$$

$$x_j \text{ entero} \quad 1 \leq j \leq n_1$$

entonces, el número de iteraciones  $I$ , incluyendo la iteración cero es tal que,  $I \leq 2^{n_1}$ .

Demostración

Sea  $I$  el número total de iteraciones incluyendo la iteración cero, entonces  $I' = I - 1$  será el número total de iteraciones excluyendo la iteración cero.

Supongamos ahora que,  $I \not\leq 2^{n_1}$  entonces,  $I > 2^{n_1}$  luego,  $I' > 2^{n_1} - 1$ .

Sea  $\sigma_k$  la restricción lineal adicional introducida en la  $k$ -ésima iteración, con su correspondiente forma lineal asociada  $\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}})$ .

Tomando  $\alpha_{k-1} = t = t(k)$ , para  $1 \leq j \leq \alpha_{k-1} - 1$

$x_j^{k-1} = \delta_j$  y,  $\delta_{t(k)} = 1$  tendremos que:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_1, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] + \\ &\quad + (1 - x_{\alpha_{k-1}}) \\ &= \sum_{j=1}^{t-1} [(1-x_j) \text{sign } \delta_j + x_j \text{sign}(1-\delta_j)] + \\ &\quad + (1 - x_t) \\ &= \sum_{j=1}^{t-1} [(1-x_j) \text{sign } \delta_j + x_j \text{sign}(1-\delta_j)] + \\ &\quad + (1-x_t) \text{sign } \delta_t + x_t \text{sign}(1 - \delta_t) \\ &= \sum_{j=1}^t [(1 - x_j) \text{sign } \delta_j + x_j \text{sign} (1 - \delta_j)] \\ &= \Phi_{\delta_1, \dots, \delta_t}^t(x_1, x_2, \dots, x_t) \end{aligned}$$

Luego,  $\phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \phi_{\delta_1 \delta_2, \dots, \delta_t}(x_1, x_2, \dots, x_t)$

Como el número total de formas lineales diferentes  $F$  es  $2^{n_1} - 1$  y por hipótesis,  $I' > 2^{n_1} - 1$  entonces,  $I' > F$ .

Dado que las formas lineales construyen las restricciones para cada iteración y dado que  $I' > F$ , entonces existen  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  tales que

$\phi_r(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = \phi_s(x_1, x_2, \dots, x_{s-1})$  y para ellas, las

restricciones serán las mismas, esto es,  $g_r = g_s$ , lo cual constituye una contradicción pues, dada dos iteraciones diferentes las respectivas restricciones deben ser diferentes.

Así,  $I' \not> 2^{n_1} - 1$  esto es,  $I' \leq 2^{n_1} - 1$   
 de donde,  $I' + 1 \leq 2^{n_1}$   
 y por ende,  $I \leq 2^{n_1}$ .

Teorema

Supongamos que el algoritmo B resuelve el problema  $\text{Max}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

bajo las restricciones

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$$

$$\begin{array}{ll} x_j \geq 0 & 1 \leq j \leq n \\ x_j \leq 1 & 1 \leq j \leq n_1 \\ x_j \text{ entero} & 1 \leq j \leq n_1 \end{array}$$

que,  $H = \{ j / j = 1, 2, \dots, n_1 \}$  y demás  $H$  es la unión de los conjuntos disjuntos  $H_r$  con  $r = 1, 2, \dots, v + w$  tales que

$$(a) \sum_{j \in H_r} x_j = 1 \quad r = 1, 2, \dots, v$$

$$(b) \sum_{j \in H_r} x_j \leq 1 \quad r = v + 1, v + 2, \dots, v + w$$

$$(c) H_r = \{ j_{r1}, j_{r2}, \dots, j_{rh_r} \} \text{ donde } j_{rs} = j_r [1+(s-1)]$$

para  $s = 1, 2, \dots, h_r$  y,  $r = 1, 2, \dots, v + w$  y,

$h_r = \text{card} (H_r)$ .

Entonces, para  $A' = \{ (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_t) \in A / \exists (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

para los cuales  $H = \{ 1, 2, \dots, n_1 \}$  satisfacen las condiciones anteriores;  $x_t$  no entero y

$(x_1, x_2, \dots, x_{t-1}) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{t-1}) \}$  y,  $L = \text{card} (A')$  se

tendrá:

$$L = \left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} (h_r + 1) \right] - 1.$$

Demostración

Observemos que L podemos expresarlo por:

$$L = (h_1 - 1) + h_1(h_2 - 1) + h_1 h_2(h_3 - 1) + \dots + h_1 h_2 \dots h_{v-1}(h_v - 1) +$$

$$+ \left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ h_{v+1} + (h_{v+1} + 1)h_{v+2} + \dots + (h_{v+1} + 1)(h_{v+2} + 1) \dots \right.$$

$$\left. \dots (h_{v+w-1} + 1) h_{v+w} \right].$$

Si denotamos por

$$h'_r = \begin{cases} h_r & \text{para } 1 \leq r \leq v \\ h_r + 1 & \text{para } v + 1 \leq r \leq v + w \end{cases} \quad \text{entonces,}$$

$$L = (h'_1 - 1) + (h'_2 - 1)h'_1 + (h'_3 - 1)h'_2 h'_1 + \dots + (h'_{v-1} - 1)h'_{v-1} \dots h'_1 +$$

$$+ \left[ \prod_{r=1}^v h'_r \right] \left[ h_{v+1} + h'_{v+1} h_{v+2} + (h'_{v+1} + 1)(h'_{v+2} + 1)h_{v+3} + \right.$$

$$\left. + \dots + (h'_{v+1} + 1)(h'_{v+2} + 1) \dots (h'_{v+w-1} + 1)h_{v+w} \right]$$

$$L = (\cancel{h_1} - 1) + \cancel{h_2} \cancel{h_1} - \cancel{h_1} + \cancel{h_3} \cancel{h_2} \cancel{h_1} - \cancel{h_2} \cancel{h_1} + \dots + h'_v h'_{v-1} \dots h'_1 - \cancel{h_{v-1}} \dots \cancel{h_1} +$$

$$\left[ \prod_{r=1}^v h'_r \right] \left[ h_{v+1} + h'_{v+1} h_{v+2} + h'_{v+1} h'_{v+2} h_{v+3} + \dots + h'_{v+1} h'_{v+2} \dots \right.$$

$$\left. \dots h'_{v+w-1} h_{v+w} \right]$$

$$L = \prod_{i=1}^v h'_i - 1 + \left[ \prod_{i=1}^v h'_i \right] \left[ h_{v+1} + h'_{v+1} h_{v+2} + h'_{v+1} h'_{v+2} h_{v+3} + \dots + h'_{v+1} \dots h'_{v+w-2} h_{v+w-1} + h'_{v+1} h'_{v+2} \dots h'_{v+w-1} h_{v+w} \right]$$

$$L = \prod_{i=1}^v h'_i - 1 + \prod_{i=1}^v h'_i h_{v+1} + \prod_{i=1}^{v+1} h'_i h_{v+2} + \dots + \prod_{i=1}^{v+w-2} h'_i h_{v+w-1} + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w}$$

$$L = \prod_{i=1}^v h'_i (1 + h_{v+1}) - 1 + \prod_{i=1}^{v+1} h'_i h_{v+2} + \dots + \prod_{i=1}^{v+w-2} h'_i h_{v+w-1} + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w}$$

$$L = \prod_{i=1}^v h'_i h_{v+1} - 1 + \prod_{i=1}^{v+1} h'_i h_{v+2} + \dots + \prod_{i=1}^{v+w-2} h'_i h_{v+w-1} + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w}$$

$$L = \prod_{i=1}^{v+1} h'_i + \prod_{i=1}^{v+1} h'_i h_{v+2} + \dots + \prod_{i=1}^{v+w-2} h'_i h_{v+w-1} + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w} - 1$$

$\vdots$

$$L = \prod_{i=1}^{v+w-2} h'_i (1 + h_{v+w-1}) + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w} - 1$$

$$L = \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i + \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i h_{v+w} - 1$$

$$L = \prod_{i=1}^{v+w-1} h'_i (1 + h_{v+w}) - 1$$

$$L = \prod_{i=1}^{v+w} h'_i - 1.$$

Con la notación original se tendrá:

$$L = \prod_{i=1}^{v+w} h'_i - 1$$

$$L = \left[ \prod_{i=1}^v h'_i \right] \left[ \prod_{i=1}^{v+w} h'_i \right] - 1$$

$$L = \left[ \prod_{i=1}^v h'_i \right] \left[ \prod_{i=1}^{v+w} (h'_i + 1) \right] - 1$$

### Proposición

Supongamos que el algoritmo B resuelve el problema  $\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

bajo las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$$

$$x_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_j \leq 1 \quad 1 \leq j \leq n_1$$

$$x_j \text{ entero} \quad 1 \leq j \leq n_1$$

que,  $H = \{j / j = 1, 2, \dots, n_1\}$  y además  $H$  es la unión de los conjuntos disjuntos  $H_r$  con  $r = 1, 2, \dots, v+w$  tales que:

$$a) \sum_{j \in H_r} x_j = 1 \quad r = 1, 2, \dots, v$$

$$b) \sum_{j \in H_r} x_j \leq 1 \quad r = v+1, v+2, \dots, v+w$$

$$c) H_r = \{j_{r1}, j_{r2}, \dots, j_{rh_r}\} \text{ donde}$$

$$j_{rs} = j_r[1+(s-1)]$$

para  $s = 1, 2, \dots, h_r$  y,  $r = 1, 2, \dots, v+w$  y,

$h_r = \text{card}(H_r)$ .

Entonces si  $G_{k-1}(t) \neq \emptyset$ ,  $x^{k-1} \notin G^E(t)$  y  $x_{\alpha_{k-1}}^{k-1}$  es la primera componente no entera de  $x^{k-1}$  con  $1 \leq \alpha_{k-1} \leq n_1$  entonces, la restricción adicional es de la forma:

$$\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) \equiv \sum_{r=1}^{t-1} (2-2x_{k_r+p(r)}) + \sum_{j=k_r+1}^{\alpha_{k-1}-1} x_j + (1 - x_{\alpha_{k-1}}) \geq 1$$

### Demostración

Por la construcción de los conjuntos de índices  $H_r$ ,  $1 \leq r \leq v+w$  es inmediato que si  $r < t$  entonces, para todo  $1 \leq k \leq h_r$  y, para todo  $1 \leq s \leq h_t$  se tendrá,

$$j_{rk} < j_{ts}.$$

Para cada  $1 \leq r \leq v + w$  tenemos que,

$$H_r = \{k_r + 1, k_r + 2, \dots, k_r + h_r\}$$

$$\text{donde, } k_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1 \\ \sum_{s=1}^{r-1} h_s & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

Relacionemos ahora los subconjuntos disjuntos de índices  $H_r$ ,  $1 \leq r \leq v + w$  con la construcción de las restricciones lineales.

Sea la iteración  $k-1$  y  $\alpha_{k-1}$  el índice de la primera componente no entera de  $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}})$ . Entonces, si

$\alpha_{k-1} \leq k_2$  donde,  $k_2 = h_1$  y  $r = 2$  se tendrá que en,

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + \\ &\quad + x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] + (1-x_{\alpha_{k-1}}) \geq 1 \end{aligned}$$

aparecerán solamente las variables  $x_j \in H_1$ , puesto que,

$\alpha_{k-1} \leq h_1$ . Si ahora,  $k_r + 1 \leq \alpha_{k-1} \leq k_t + h_t$  donde

$2 \leq r \leq t \leq v + w$ , supongamos sin perder generalidad que para

$1 \leq r \leq t - 1$ ,  $x_{k_r+1}^{k-1}, x_{k_r+2}^{k-1}, \dots, x_{k_r+h_r}^{k-1}$  son todos nulos,

salvo uno, que es igual a 1; esto es  $\alpha_{k-1} \in H_t$ .

Entonces, si  $p(r)$  es el índice en  $H_r$  para el cual

$x_{k_r+p(r)}^{k-1} = 1$ , tendremos que;

$$x_{k_r+q}^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p(r) \\ 0 & \text{si } q \neq p(r) \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq q \leq h_r \text{ y } 1 \leq r \leq t-1$$

Como  $\sum_{j \in H_r} x_j = 1$  para cada  $1 \leq r \leq t - 1 = v$  y, de la definición de  $x_{k_r+q}^{k-1}$  se tiene que, para cada  $1 \leq r \leq t - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] &= \sum_{\substack{j=k_r+1 \\ j \neq k_r+p(r)}}^{k_r+h_r} x_j + \\ &+ (1 - x_{k_r+p(r)}) \\ &= \sum_{\substack{j=k_r+1 \\ j \neq k_r+p(r)}}^{k_r+h_r} x_j + x_{k_r+p(r)} - x_{k_r+p(r)} + (1 - x_{k_r+p(r)}) \\ &= \sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r} x_j - x_{k_r+p(r)} + (1 - x_{k_r+p(r)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r} x_j + 1 - 2 x_{k_r+p(r)} \\
 &= 1 + 1 - 2 x_{k_r+p(r)} \\
 &= 2 - 2 x_{k_r+p(r)} \quad //
 \end{aligned}$$

Por otro lado, para  $H_t = \{k_t + 1, \dots, k_t + h_t\}$  se tiene que si  $k_t + 1 \leq k_t + p \leq \alpha_{k-1} - 1$  entonces  $1 \leq p \leq (\alpha_{k-1} - 1) - k_t$

y  $x_{k_t+p} = 0$  luego;

$$\begin{aligned}
 \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) &= \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + \\
 &\quad + x_j \text{sign } (1-x_j^{k-1})] + (1-x_{\alpha_{k-1}})
 \end{aligned}$$

observemos que en la sumatoria anterior se consideran todos los índices en los  $H_r$  para  $1 \leq r \leq t - 1$  y además, los índices en  $H_t$  anteriores al índice  $\alpha_{k-1}$  luego,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + x_j \text{sign } (1-x_j^{k-1})] = \\
 &= \sum_{r=1}^{t-1} \sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + x_j \text{sign } (1-x_j^{k-1})] +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + x_j \text{sign } (1-x_j^{k-1})]$$

por lo tanto, se tendrá:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) &= \sum_{r=1}^{t-1} \sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + \\ &+ x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] + \sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + \\ &+ x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] + (1-x_{\alpha_{k-1}}) \\ &= \sum_{r=1}^{t-1} [2^{-2x_{k_r+p(r)}}] + \sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j) \text{sign } x_j^{k-1} + \\ &+ x_j \text{sign}(1-x_j^{k-1})] + (1-x_{\alpha_{k-1}}) \\ &= \sum_{r=1}^{t-1} [2^{-2x_{k_r+p(r)}}] + \sum_{j=k_r+1}^{\alpha_{k-1}-1} x_j + (1-x_{\alpha_{k-1}}) \end{aligned}$$

luego, la restricción adicional será:

$$\begin{aligned} \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) \equiv & \sum_{r=1}^{t-1} (2 - 2x_{k_r+p(r)}) + \sum_{j=k_r+1}^{\alpha_{k-1}-1} x_j + \\ & + (1 - x_{\alpha_{k-1}}) \geq 1 \end{aligned}$$

Observación

Si  $\alpha_{k-1} \in H_t$  entonces la restricción lineal adicional  $g_k$  se expresará en función de; una coordenada, de cada uno de los conjuntos  $H_r$ ,  $1 \leq r \leq t - 1$ ; las variables  $x_{t+q}$  con  $1 \leq q \leq \alpha_{k-1} - k_t$  y las variables  $x_{\alpha_j}$  para  $1 \leq j \leq k - 1$ .

Proposición

Supongamos que el algoritmo B resuelve el problema  $\text{Max}^*(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$

bajo las restricciones

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \quad 1 \leq i \leq m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$$

$$x_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_j \leq 1 \quad 1 \leq j \leq n_1$$

$$x_j \text{ entero} \quad 1 \leq j \leq n_1$$

que,  $H = \{j / j = 1, 2, \dots, n_1\}$  y además  $H$  es la unión de los conjuntos disjuntos  $H_r$  con  $r = 1, 2, \dots, v + w$  tales que:

$$a) \sum_{j \in H_r} x_j = 1 \quad r = 1, 2, \dots, v$$

$$b) \sum_{j \in H_r} x_j \leq 1 \quad r = v+1, v+2, \dots, v+w$$

$$c) H_r = \{j_{r1}, j_{r2}, \dots, j_{rh_r}\} \text{ donde}$$

$$j_{rs} = j_r [1 + (s-1)] \text{ para } s = 1, 2, \dots, h_r \text{ y,}$$

$$r = 1, 2, \dots, v + w \text{ y, } h_r = \text{card}(H_r).$$

Entonces el número total de iteraciones  $I$ , incluyendo, la iteración cero es tal que:

$$I \leq \left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} (h_r + 1) \right].$$

#### Demostración

Recordemos que a la iteración  $k$  se encuentra asociada la restricción lineal adicional  $g_k$  y a ésta, la forma lineal  $\varphi_k(x_1, \dots, x_{\alpha_{k-1}})$ , donde por la proposición

anterior:

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) \equiv \sum_{r=1}^{t-1} [2^{-2x_{k_r+p(r)}}] + \sum_{j=k_r+1}^{\alpha_{k-1}} x_j^{(1-x_{\alpha_{k-1}})}.$$

Además, como cada

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{k-1}}) = \Phi_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_t}(x_1, x_2, \dots, x_t) \text{ con}$$

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) \in A' \quad \text{y}$$

$$L = \text{card}(A') = \left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} h_r + 1 \right] - 1$$

entonces, el número total de iteraciones I incluyendo la iteración nula es tal que

$$I \leq \left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} h_r + 1 \right].$$

## CONCLUSIONES

Para los problemas de la programación lineal entera, presentado en este trabajo con variables booleanas  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$  y cuyas variables no enteras son  $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_n$  las cuales pueden no existir, la cantidad de escogencia total se puede estimar con  $2^{n_1}$ .

Para los problemas entero mixto la escogencia consistirá en la resolución de  $2^{n_1}$  problemas de la programación lineal entera con variables  $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_n$ , ésta pudo ser disminuída hasta,

$\left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} h_r + 1 \right]$  si el conjunto de índices  $H = \{j / 1 \leq j \leq n_1\}$  puede ser partido en subconjuntos disjuntos  $H_r, r = 1, 2, \dots, v+w$  que posean las propiedades:

- 1)  $\sum_{j \in H_r} x_j = 1 \quad r = 1, 2, \dots, v$
- 2)  $\sum_{j \in H_r} x_j \leq 1 \quad r = v + 1, v + 2, \dots, v + w$

Cada uno de los problemas  $E_t$ ,

$$\begin{aligned} & \text{Max}^{\mathbb{Z}} (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & x \in G^E(t) \\ & x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

en calidad de presentar el número de estimaciones, se podrá tomar la misma cantidad de iteraciones que para el problema  $\mathcal{L}'$ .

Determinado un orden, nosotros estimamos el número  $k$  de problemas canónicos, solución que dió la posibilidad de obtener una solución  $\epsilon$ -optimal del problema  $\mathcal{L}'$ , luego demostramos la finitez del algoritmo sugerido para los problemas del tipo

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$$

$$x \in G^E(t)$$

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es decir, problemas con funciones objetivo de tipo especial.

Tomando las estimaciones para el número total de las iteraciones de los problemas  $E_t$ , podremos tomar en calidad de estimación de continuidad de la resolución para el problema  $\mathcal{L}'$ , la estimación de  $\left[ 2 + \log_2 \left( \frac{M-m}{\epsilon} \right) \right] p$ , donde  $p$  es la estimación para los problemas

$$\text{Max}^* (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$$

$$x \in G^E(t)$$

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

que corresponde a  $2^{n_1}$  ó al número

$$\left[ \prod_{r=1}^v h_r \right] \left[ \prod_{r=v+1}^{v+w} h_r + 1 \right].$$

Tenemos fundamento para sugerir que en una serie de casos la cantidad de iteraciones será significativamente menor que la estimación superior dada por la proposición que nos asegura  $2^{n_1}$  combinaciones de ceros y unos. Esto depende bastante de las propiedades específicas de cada problema.

Finalmente se puede redefinir y demostrar una proposición de forma tal que nos permita separar una clase de problemas  $t_k$ , para el cual el número de iteraciones no supera a  $2^k$ , esto es, para  $1 \leq k \leq n_1 - 1$ ,  $k$  suficientemente pequeño resultará sustancialmente menor que las estimaciones de todas las posibles combinaciones de ceros y unos.

El análisis del algoritmo presentado se ha realizado desde el punto de vista teórico; la estimación computacional nos permitirá probar la efectividad práctica del mismo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ASCHMANOV, S.A. "Programación Lineal". Nauka (1981).  
En ruso.
- [2] FINKELSTEIN, Y.Y. "Un Algoritmo de Resolución de los Problemas de Programación en Números Enteros de Variables Booleanas".  
Tomo I, Número 5, 1965. En Ruso.
- [3] GARFINKEL, R.S.  
NEMHAUSER, G.L. "Integer Programming". John Wiley  
and Sons (1972). Rochester, New York.
- [4] GOLDSTEIN, E.G. "Programación Lineal". Problemas y  
Aplicaciones. Paraninfo (1976).  
Madrid, España.
- [5] LUENBERGER, D.G. "Introduction to Linear and Non-linear Programming". Addison-Wesley  
Publishing Company. (1973)
- [6] SALKIN, H.M. "Integer Programming". Addison-  
Wesley Publishing Company (1975).
- [7] TAHA, H.A. "Integer Programming". Theory,  
Applications and Computations.  
Academic Press, Inc. (1975).
- [8] ZIONTS, STANLEY "Linear and Integer Programming".  
Prentice-Hall, Inc. (1974).