

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y
POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

OPERADORES DE FREDHOLM Y
OPERADORES FUERTE DE FREDHOLM

ZOILA RODRÍGUEZ

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS
REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS CON
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2004

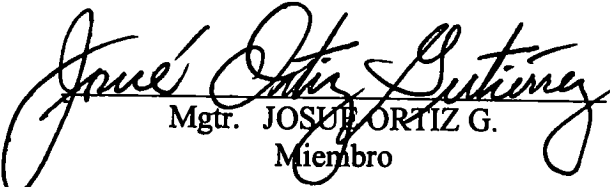
TM

13 JUL 2004

Aprobado por:


Dr. JORGE HERMANDEZ
Presidente


Dr. ROGELIO ROSAS
Miembro


Mgr. JOSÉ ORTÍZ G.
Miembro

Fecha: Marzo 5 de 2004.

alguno del autor

1055-

DEDICATORIA

Dedico, sinceramente, esta obra:

A mis padres, caudal fecundo de enseñanzas, amor y comprensión.

A mis hermanos, compañeros eternos con los cuales comparto mis momentos más especiales.

Y sobre todo a mi hijo, inspiración que llena mi vida y razón de mi existencia.

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero agradecimiento:

Al Dios Todopoderoso por permitirme culminar esta nueva etapa de mi vida profesional.

A mis profesores, quienes con sus enseñanzas me permitieron aumentar mis conocimientos matemáticos.

Y muy especialmente al Ph. D. Jorge Hernández por su paciencia y su valioso apoyo en la realización de este trabajo.

INDICE

RESUMEN.	1
INTRODUCCIÓN	3
CAPITULO I	
Operadores Compactos	7
1.1. Operadores Lineales Compactos	7
1.2. Caracterización de los Operadores Compactos	10
1.3. Propiedades Fundamentales de los Operadores Compactos	24
1.4. Propiedades Espectrales de los Operadores Compactos en Espacios Normados	29
CAPITULO II	
Teoría de Riesz	47
2.1. La Teoría de Riesz para Operadores Compactos	47
2.2. Operadores Adjuntos de Operadores Compactos	65
CAPITULO III	
Operadores de Fredholm	71
3.1. Ecuaciones que envuelven Operadores Compactos	71
3.2. La Alternativa de Fredholm	87
3.3. Operador de Fredholm	96
3.4. Operadores de Fredholm en Espacios de Hilbert	125
BIBLIOGRAFÍA	144

RESUMEN

En el presente trabajo desarrollamos las propiedades algebraicas y espectrales, fundamentales, de los operadores compactos y la teoría de Riesz para operadores compactos. Estudiamos la ecuación $Tx - \lambda x = y$, donde T es un operador compacto y λ es un escalar complejo, y probamos que el operador $T_\lambda = T - \lambda I$ satisface la alternativa de Fredholm. Introducimos el concepto de índice de un operador lineal, para definir los operadores de Fredholm en espacios normados. Desarrollamos las propiedades más importantes de los operadores de Fredholm y probamos que un operador lineal acotado T es un operador de Fredholm si y sólo si T es invertible, módulo un operador compacto. Finalmente, estudiamos los operadores fuertes de Fredholm en espacios de Hilbert y probamos que un operador T es fuerte de Fredholm si y sólo si $T = L + F$, donde L es un isomorfismo y F es un operador lineal acotado de rango finito, donde la herramienta principal es la alternativa de Fredholm para el caso de sistemas de ecuaciones lineales.

SUMMARY

In this work we develop the algebraic and spectral properties, fundamentals, of the compact operators and Riesz theory for compact operators. We study the equation $Tx - \lambda x = y$, where T is a compact operator and λ is a complex number, we prove that the operator $T_\lambda = T - \lambda I$ satisfies the Fredholm alternative.

We introduce the concept of a linear operator index, to define the Fredholm operators in normed spaces. We develop the most important properties of Fredholm operators and we prove that a bounded linear operator T is a Fredholm operator, if and only if T is invertible, modulo a compact operator. Finally we study the Fredholm strong operator in Hilbert spaces and we prove that an operator T is Fredholm strong if and only if $T = L + F$, where L is an isomorphism and F is a bounded linear operator of finite rank, where the principal tool is the Fredholm alternative in the case of linear equations system.

INTRODUCCIÓN

Los operadores lineales en espacios de dimensión finita poseen muchas propiedades importantes y son fáciles de manejar, ya que ellos se pueden representar mediante matrices. Sin embargo, muchos de los problemas de aplicación se modelan en espacios de dimensión infinita. Es por eso que nos hemos interesado en estudiar operadores que sean una buena generalización de los operadores en dimensión finita.

Los operadores que generalizan de una forma natural las propiedades de los operadores lineales en espacios de dimensión finita son los operadores compactos. Su teoría sirvió como un modelo en los primeros trabajos en análisis funcional y juega un papel importante en las aplicaciones. Por ejemplo, estos operadores desempeñan una función fundamental en la teoría de ecuaciones integrales, bifurcaciones, ecuaciones diferenciales parciales, teoría del esparcimiento y en varios problemas de la física matemática.

La compacidad de un operador lineal fue originada en el estudio de las ecuaciones integrables. Esta propiedad es de vital importancia en la teoría de Fredholm, ya que las propiedades espectrales de estos operadores se puede desarrollar completamente en el sentido de la famosa teoría de las

ecuaciones integrables de Fredholm $Tx - \lambda x = y$, donde λ es un parámetro complejo.

El objetivo fundamental de esta tesis es desarrollar la teoría de los operadores compactos, para posteriormente usarlos en el estudio de los operadores de Fredholm. Por tal razón hemos dividido este trabajo en tres capítulos.

El primer capítulo está dedicado a desarrollar las propiedades algebraicas fundamentales de los operadores compactos. Aquí se presentan algunas caracterizaciones de los operadores compactos y se prueban los resultados más importantes acerca de las propiedades espectrales de los operadores compactos.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la teoría de Riesz para operadores compactos. Se considera el operador $T_\lambda = T - \lambda I$, donde T es un operador compacto. Se prueban propiedades acerca de los núcleos $N(T_\lambda^n)$ y los rangos $T_\lambda^n(X)$, para posteriormente demostrar que existe un único entero no negativo n tal que $X = N(T_\lambda^n) \oplus T_\lambda^n(X)$. También estudiamos los operadores adjuntos de los operadores compactos tanto en espacios normados como en espacios con producto interno.

El tercer y último capítulo lo comenzamos con el estudio de las ecuaciones del tipo $Tx - \lambda x = y$, donde T es un operador

compacto y λ es un parámetro complejo. Determinamos soluciones de mínima norma y determinamos algunos resultados acerca de la solución de las siguiente cuatro ecuaciones

$$Tx - \lambda x = y$$

$$Tx - \lambda x = 0$$

$$T^* f - \lambda f = g$$

$$T^* f - \lambda f = 0$$

Posteriormente probamos que el operador $T_\lambda = T - \lambda I$ satisface la alternativa de Fredholm. A continuación se introduce el concepto de índice de un operador lineal y se presenta la definición de operadores de Fredholm. Presentamos algunos ejemplos de operadores de Fredholm y demostramos algunas propiedades fundamentales. Después introducimos el concepto de congruencia módulo un operador compacto y probamos que un operador es de Fredholm si y sólo si él es invertible módulo un operador compacto. Finalmente introducimos los operadores fuertes de Fredholm en espacios de Hilbert, presentamos algunos ejemplos y probamos que un operador lineal acotado T es fuerte de Fredholm sí y sólo sí, él se escribe como $T = L + F$, donde L es un isomorfismo y F es un operador lineal acotado de rango finito, y concluimos que los operadores fuertes de Fredholm satisfacen la alternativa de Fredholm.

Queremos puntualizar que hay muchos más resultados sobre la teoría de operadores de Fredholm que se pueden estudiar, como los son, por ejemplo, los operadores de Fredholm no lineales y los operadores semi de Fredholm. Esperamos tener las fuerza, sabiduría y tiempo para ampliar nuestro conocimiento en esta fascinante área del análisis funcional.

CAPÍTULO I
OPERADORES COMPACTOS

CAPÍTULO I

OPERADORES COMPACTOS

Los operadores lineales en espacios de dimensión finita poseen muchas propiedades interesantes, y en cierta forma, son fáciles de manejar; sin embargo muchas de las aplicaciones de los operadores lineales son modeladas en espacios de dimensión infinita. Por lo dicho anteriormente es importante determinar cuales operadores lineales en espacios de dimensión infinita preservan propiedades importantes de los operadores en dimensión finita, y que sean de utilidad para modelar problemas de aplicación de la vida real.

En este capítulo introduciremos los operadores lineales compactos, que son una generalización de los operadores lineales en espacios de dimensión finita, resaltando sus propiedades más importantes. Resultados que son fundamentales en la teoría de las ecuación integrales, las ecuaciones diferenciales parciales y en la teoría de operadores en general.

1.1. Operadores Lineales Compactos

Iniciaremos esta sección con la definición de operadores compactos

Definición 1.1: Sean X, Y espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. T es un operador compacto, si para todo subconjunto acotado A de X , $T(A)$ es relativamente compacto en Y ; es decir, $\overline{T(A)}$ es compacto en Y .

Ejemplo 1.1: Sean $a \in \mathbb{R}^2$ y $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$Tx = \langle x, a \rangle$$

T es un operador lineal ya que está definido en términos del producto interno. Como $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, T es un operador lineal acotado. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado, luego $T(A)$ es acotado en \mathbb{R} , por lo tanto $\overline{T(A)}$ es cerrado y acotado en \mathbb{R} . Así pues $\overline{T(A)}$ es compacto en \mathbb{R} y T es un operador compacto.

No todos los operadores lineales acotados son compactos. De hecho existen muchos operadores lineales acotados sencillos que no son compactos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2: Sea $X = l^2$ y $I: l^2 \rightarrow l^2$ el operador identidad.

I es un operador lineal acotado y $A = \{x \in l^2 / \|x\| \leq 1\}$ es acotado en l^2 . Note que $\overline{I(A)} = A$ el cual no es compacto en l^2 , ya que $\dim(l^2) = \infty$. Por consiguiente I no es un operador compacto.

Como hemos visto, no todos los operadores lineales acotados son compactos; sin embargo, los operadores compactos son operadores lineales acotados y por ende continuos, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto, entonces T es acotado y por lo tanto continuo.

Demostración:

Sea $A \subset X$ acotado. Como T es compacto, $T(A)$ es relativamente compacto en Y , o sea, $\overline{T(A)}$ es compacto en Y , luego $\overline{T(A)}$ es acotado en Y . Como $T(A) \subset \overline{T(A)}$, se tiene que $T(A)$ es acotado en Y . Así pues T es un operador acotado.

El siguiente teorema generaliza la idea presentada en el Ejemplo 1.2.

Teorema 1.2: Sea X un espacio normado. Si $\dim X = \infty$, el operador identidad

$$I : X \rightarrow X,$$

el cual es un operador lineal acotado, no es compacto.

Demostración:

La bola unitaria

$$M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es un subconjunto cerrado y acotado de X . Como $\dim X = \infty$, M no es un subconjunto compacto de X . Por otro lado, $\overline{I(M)} = \overline{M} = M$; así pues, $\overline{I(M)}$ no es un subconjunto compacto de X . Por consiguiente I no es un operador compacto.

1.2. Caracterización de los Operadores Compactos.

A continuación presentaremos una caracterización de los operadores compactos la cual es de gran utilidad al momento de probar la compacidad de un operador.

Teorema 1.3: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. T es compacto si y sólo si, para toda sucesión acotada (x_n) en X , la sucesión (Tx_n) posee una subsucesión convergente en Y .

Demostración:

Supongamos primeramente que T es un operador compacto y sea (x_n) una sucesión acotada en X , Luego $\overline{\{Tx_n / n \geq 1\}}$ es un subconjunto compacto de Y . Por lo tanto, (Tx_n) posee una subsucesión convergente en Y .

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión acotada (x_n) en X la sucesión (Tx_n) posee una subsucesión convergente en Y . Sean B un subconjunto acotado de X y (y_n) una sucesión en $T(B)$. Entonces para todo $n \geq 1$ existe un $x_n \in B$ tal que $Tx_n = y_n$. Como B es acotado en X , (x_n) es acotada en X . Luego, por hipótesis, (Tx_n) posee una subsucesión convergente en Y . Como la sucesión (y_n) es arbitraria, $\overline{T(B)}$ es compacto en Y . Por consiguiente, T es un operador compacto.

Los siguientes resultados son consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 1.1: Sean X, Y espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. T es compacto si y sólo si, para toda sucesión (x_n) en X , con $\|x_n\| \leq 1$, la sucesión Tx_n posee una subsucesión convergente.

En el siguiente ejemplo aplicamos el Corolario 1.1 para estudiar la compacidad de operadores.

Ejemplo 1.3: Consideremos los operadores

$$T_{iz} : l^2 \rightarrow l^2$$

$$T_{de} : l^2 \rightarrow l^2$$

definidos en l^2 de la siguiente manera: Sea $x = (\varepsilon_n) \in l^2$

$$T_{iz}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$$

$$T_{de}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

T_{iz} es llamado el operador traslación a izquierda y T_{de} es llamado el operador traslación a derecha.

Claramente T_{iz} y T_{de} son operadores lineales acotados.

Sea (e_i) la sucesión definida en l^2 por

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

Note que $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; o sea, (e_n) es una sucesión acotada en l^2 .

$$T_{iz}e_1 = (0, 0, \dots)$$

$$T_{de}e_1 = (0, 1, 0, \dots) = e_2$$

$$T_{iz}e_2 = (1, 0, 0, \dots) = e_1$$

$$T_{de}e_2 = e_3$$

$$T_{iz}e_3 = e_2$$

$$T_{de}e_3 = e_4$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$T_{iz}e_n = e_{n-1}$$

$$T_{de}e_n = e_{n+1}$$

Ahora bien como

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{para todo } i \neq j,$$

las sucesiones $(T_{iz}e_n)$ y $(T_{de}e_n)$ no poseen subsucesión convergente en l^2 . Luego por el Corolario 1.1, T_{iz} y T_{de} no son compactos.

Corolario 1.2: Sean X, Y espacios normados, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada de X . T es compacto si y sólo si $T(M)$ es relativamente compacto en Y .

Demostración:

Consecuencia inmediata del Corolario 1.1.

En el siguiente ejemplo utilizaremos el Corolario 1.2 para probar que el operador lineal dado es compacto.

Ejemplo 1.4: Sea $I = [0,1]$ y

$$X = C(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua} \}$$

con la norma del supremo. Sea $k \in C(I \times I)$; o sea k es una función continua en el cuadrado cerrado $I \times I$.

Definamos el operador $T: X \rightarrow X$ de la siguiente manera:

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy \quad f \in X$$

No es difícil verificar que T es un operador lineal acotado.

Sea

$$M = \{ f \in X : \|f\| \leq 1 \}$$

Para probar que T es un operador compacto sólo tenemos que probar que $T(M)$ es uniformemente acotada y equicontinua (ver teorema de Arzelá-Ascoli).

Como k es continua en $I \times I$, existe un $N > 0$ tal que

$$|k(x, y)| \leq N \quad \text{para todo } (x, y) \in I \times I$$

luego

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \int_0^1 |k(x, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_0^1 N \|f\| dy = N \|f\| \leq N \end{aligned}$$

para todo $f \in M$. Por lo tanto $T(M)$ es uniformemente acotada por N .

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$|k(x_1, y) - k(x_2, y)| < \varepsilon \text{ siempre que } |x_1 - x_2| < \delta$$

por lo tanto, para toda $f \in M$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} |(Tf)(x_1) - (Tf)(x_2)| &= \left| \int_0^1 k(x_1, y) f(y) dy - \int_0^1 k(x_2, y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)| \|f\| dy \\ &\leq \int_0^1 |k(x_1, y) - k(x_2, y)| dy \\ &< \int_0^1 \varepsilon dy = \varepsilon \end{aligned}$$

Por consiguiente $T(M)$ es equicontinua.

De lo anterior y por el Teorema de Arzelá-Ascoli se deduce que $T(M)$ es relativamente compacto en X . Así por el Corolario 1.2, T es compacto.

Teorema 1.4: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces si T es acotado y $\dim T(X) < \infty$, el operador T es compacto.

Demostración:

Sea (x_n) una sucesión acotada en X . Como T es acotado, $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$, por lo tanto (Tx_n) es acotada en Y . Además como $\dim T(X) < \infty$, $\{Tx_n / n \geq 1\}$ es relativamente compacto, por lo que (Tx_n) posee una subsucesión convergente en Y . Por consiguiente, por el Teorema 1.3, T es un operador compacto.

Corolario 1.3: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Si $\dim X < \infty$, entonces T es compacto.

Demostración:

Como $\dim(X) < \infty$, T es acotado. Además

$$\dim T(X) \leq \dim X < \infty,$$

luego por el Teorema 1.4, T es un operador compacto.

Podemos observar que del Corolario 1.3 y el Teorema 1.2 se deduce el siguiente corolario

Corolario 1.4: Sea X un espacio normado y $I : X \rightarrow X$ el operador identidad. I es compacto si y sólo si $\dim(X) < \infty$.

Otra consecuencia inmediata del Teorema 1.4 es que todo funcional lineal acotado $f \in X^*$ (el dual de X) es compacto.

Definición 1.2: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. T es un operador de rango finito si $\dim(T(X)) < \infty$.

El Teorema 1.4 nos dice que todos los operadores lineales acotados de rango finito son compactos.

En los siguientes ejemplos aplicaremos el Teorema 1.4 para probar que los operadores dados son compactos.

Ejemplo 1.5: Sea X un espacio normado, $f \in X^*$ y $z_0 \in X$.

Definamos el operador $T : X \rightarrow X$ por

$$Tx = f(x) \cdot z_0$$

Claramente T es un operador lineal acotado. Por otro lado, como $f : X \rightarrow K$ es un operador lineal acotado y $\dim f(X) \leq 1$, por el Teorema 1.4, f es un operador compacto.

Sea (x_n) una sucesión acotada en X , luego $(f(x_n))$ posee una subsucesión convergente en K , lo que implica que $(f(x_n) \cdot z_0)$ posee una subsucesión convergente en X . Pero $T(x_n) = f(x_n) \cdot z_0$. Luego $(T(x_n))$ posee una subsucesión convergente en X . Así T es un operador compacto.

Ejemplo 1.6: Sea X un espacio con producto interno y $y_0, z_0 \in X$. Definamos el operador $T : X \rightarrow X$ por

$$Tx = \langle x, y_0 \rangle \cdot z_0$$

Note que el operador $f : X \rightarrow K$ definido por

$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle$$

es un operador lineal acotado, o sea $f \in X^*$.

Además

$$Tx = \langle x, y_0 \rangle \cdot z_0 = f(x) \cdot z_0$$

luego por el ejemplo anterior T es un operador compacto.

El siguiente ejemplo nos muestra que existen operadores lineales $T : X \rightarrow Y$ de rango finito que no son compactos.

Ejemplo 1.7: Sea

$$X = \{ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} / f' \text{ existe y es continua en } [0,1] \}$$

con la norma

$$\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Definamos el operador $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(f) = f'(\frac{1}{2})$$

Claramente T es un operador lineal y $\dim(T(X)) = 1$.

Probemos que T no es acotado. En efecto, para cada $n \geq 1$ sea $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(t) = \cos(n\pi t)$$

Note que

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{para todo } n \geq 1$$

y

$$|T(f_n)| = |f_n'(\frac{1}{2})| = \left| n\pi \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|$$

Luego si n es impar, $|T(f_n)| = n\pi$. Por lo tanto

$$\sup_{\|f\|=1} |T(f)| = \infty$$

y T no es acotado. Por consiguiente, por el teorema 1.1, T no es compacto.

Teorema 1.5: Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Sean (T_n) una sucesión de operadores compactos de X en Y y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Si (T_n) converge uniformemente a T ; es decir, $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, entonces T es un operador compacto.

Demostración:

Sea (x_m) una sucesión acotada en X , luego existe un $c > 0$ tal que

$$\|x_m\| \leq c, \quad \text{para todo } m \geq 1$$

Como los operadores T_n son compactos, podemos escoger por el procedimiento estándar de diagonalización, una subsucesión (x_{m_k}) de (x_m) tal que $(T_n x_{m_k})$ converge en Y para todo n fijo.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, entonces existe N_0 tal que

$$\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad \text{para todo } n \geq N_0.$$

Como $(T_{N_0} x_{m_k})$ es una sucesión convergente en Y , $(T_{N_0} x_{m_k})$ es de Cauchy, luego existe un N_ε tal que

$$\|T_{N_0} x_{m_k} - T_{N_0} x_{m_l}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k, l \geq N_\varepsilon)$$

Luego si $k, l \geq N_\varepsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tx_{m_k} - Tx_{m_l}\| &\leq \|Tx_{m_k} - T_{N_0} x_{m_k}\| + \|T_{N_0} x_{m_k} - T_{N_0} x_{m_l}\| + \|T_{N_0} x_{m_l} - Tx_{m_l}\| \\ &\leq \|T - T_{N_0}\| \|x_{m_k}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{N_0} - T\| \|x_{m_l}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Así (Tx_{m_k}) es una sucesión de Cauchy en Y . Como Y es completo (Tx_{m_k}) es convergente en Y , y (x_{m_k}) es una subsucesión de (x_m) . Por lo tanto T es compacto.

Observación: El teorema anterior es falso si se reemplaza convergencia uniforme por convergencia fuertes; es decir, si

$$\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0 \quad \text{para todo } x \in X,$$

como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8: Consideremos el espacio de Banach l^2 y definamos el operador $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ como sigue:

$$T_n x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots), \quad \text{donde } x = (\xi_j) \in l^2.$$

Claramente T_n es un operador lineal. Además para $x = (\xi_j) \in l^2$ se tiene que

$$\|T_n x\| = \|(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)\| = \left[\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \right]^{1/2} = \|x\|$$

Por lo tanto T_n es un operador lineal acotado para todo $n \geq 1$.

Además $\dim(T_n(l^2)) < \infty$. Luego por el Teorema 1.4, T_n es un operador compacto para todo $n \geq 1$.

Note que

$$T_n x \rightarrow x = Ix, \quad \text{para todo } x \in l^2,$$

o sea

$$\|T_n x - Ix\| \rightarrow 0, \quad \text{para todo } x \in l^2,$$

Pero $I : l^2 \rightarrow l^2$ no es un operador compacto ya que $\dim(l^2) = \infty$.

En el siguiente ejemplo utilizaremos el Teorema 1.5 para probar que el operador dado es compacto.

Ejemplo 1.9: Definamos el operador lineal $T : l^2 \rightarrow l^2$ por

$$Tx = y = (\eta_j),$$

donde $x = (\xi_j) \in l^2$ y $\eta_j = \frac{\xi_j}{j}$ para $j = 1, 2, \dots$

Note que $(\eta_j) \in l^2$. Probemos que T es un operador compacto.

Definamos la sucesión de operadores lineales $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ por:

$$T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots) \quad x = (\xi_j) \in l^2$$

Claramente los operadores T_n son acotados. Además como $\dim(T_n(X)) < \infty$, por el Teorema 1.4, T_n es compacto para todo $n \geq 1$.

Por otro lado,

$$Tx - T_n x = (T - T_n)x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n \text{ ceros})}, \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \frac{\xi_{n+2}}{n+2}, \dots)$$

y

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los $x \in l^2$ tal que $\|x\|=1$, se tiene que

$$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T - T_n)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \frac{\|x\|}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Luego $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, Así por el Teorema 1.5 T es un operador compacto.

1.3. Propiedades Fundamentales de los Operadores Compactos.

A continuación probaremos las propiedades algebraicas del conjunto de los operadores compactos $T : X \rightarrow Y$.

Teorema 1.6: Sean X, Y espacios normados y

$$K(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es compacto} \},$$

$K(X, Y)$ es un espacio vectorial.

Demostración:

Sean $T_1, T_2 \in K(X, Y)$ y (x_n) una sucesión acotada en X . Como T_1 y T_2 son compactos, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(T_1 x_{n_k})$ y $(T_2 x_{n_k})$ son convergentes en Y . Luego $(T_1 + T_2)(x_{n_k})$ y $(\alpha T_1 x_{n_k})$ son convergentes en Y , para todo $\alpha \in K$ (cuerpo de escalares). Así pues $T_1 + T_2$ y αT_1 son compactos; o sea $T_1 + T_2 \in K(X, Y)$ y $\alpha T_1 \in K(X, Y)$. De lo anterior se deduce que $K(X, Y)$ es un espacio vectorial sobre K .

Corolario 1.5: Sean X, Y espacios normados,

$T_1, T_2, \dots, T_n : X \rightarrow Y$ operadores compactos y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$,

entonces $\sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$ es un operador compacto.

Otra propiedad importante de los operadores compactos está expresada en el siguiente teorema.

Teorema 1.7: Sea X un espacio normado, $K : X \rightarrow X$ un operador compacto y $L : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. Entonces KL y LK son compactos.

Demostración:

Sea B un subconjunto acotado de X . Como L es acotado, $L(B)$ es un conjunto acotado de X y $K(L(B)) = KL(B)$ es relativamente compacto en X , pues K es compacto. Así KL es compacto.

Por otro lado, sea (x_n) una sucesión acotada en X . Como K es compacto, por el Teorema 1.3 (Kx_n) posee una subsucesión convergente (Kx_{n_k}) en X . Como L es acotado, es continuo y por lo tanto lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes, así $L(Kx_{n_k})$ converge, y por el Teorema 1.3 se tiene que LK es compacto.

Observación: El Teorema 1.7 sigue siendo verdadero, aún cuando el espacio de llegada del operador es diferente del espacio de partida, sólo se tiene que suponerse que las compuestas KL o LK tengan sentido. La demostración es idéntica.

Los operadores compactos tienen la interesante propiedad de transformar la convergencia débil en convergencia fuerte, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.8: Sean X, Y espacios normados, $T: X \rightarrow Y$ un operador compacto y (x_n) una sucesión en X . Si $x_n \xrightarrow{w} x$ (convergencia débil) entonces $Tx_n \rightarrow Tx$ (convergencia fuerte).

Demostración:

Primeramente vamos a demostrar que

$$Tx_n \xrightarrow{w} Tx$$

y luego que

$$Tx_n \rightarrow Tx$$

Sea g un funcional lineal acotado en Y . Definamos el funcional

$f: X \rightarrow K$ por

$$f(z) = g(Tz) \quad z \in X \quad (1)$$

Claramente f es un funcional lineal, además como

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \|Tz\| \leq \|g\| \|T\| \|z\|$$

se tiene que f es acotado.

Como $x_n \xrightarrow{w} x$, se tiene por definición que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Luego por (1) se tiene que

$$g(Tx_n) \rightarrow g(Tx),$$

Como g es arbitrario, esto prueba que

$$Tx_n \xrightarrow{w} Tx \quad (2)$$

Falta probar que $Tx_n \rightarrow Tx$. Supongamos que no es cierto.

Entonces (Tx_n) posee una subsucesión (Tx_{n_k}) tal que

$\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \delta$ para algún $\delta > 0$ y para todo $k \geq 1$. Como (x_n)

es una sucesión débilmente convergente, entonces (x_n) es

acotado, por lo tanto (x_{n_k}) es una subsucesión acotada. Como

T es compacto, (Tx_{n_k}) posee una subsucesión convergente en

Y , digamos $Tx_{n_{k_p}} \rightarrow \tilde{y}$.

Como $Tx_{n_{k_p}} \rightarrow \tilde{y}$, entonces $Tx_{n_{k_p}} \xrightarrow{w} \tilde{y}$, luego por (2) resulta

que $\tilde{y} = Tx$ y en consecuencia $\|Tx_{n_{k_p}} - Tx\| \rightarrow 0$. Lo que

contradice que $\|Tx_{n_{k_p}} - Tx\| \geq \delta > 0$. Así pues $Tx_n \rightarrow Tx$.

Observación: Es claro que si X, Y son espacios normados, Z un subespacio de X y $T: X \rightarrow Y$ es un operador compacto, entonces la restricción $T_z: Z \rightarrow Y$ de T a Z es también un operador compacto.

1.4. Propiedades Espectrales de los Operadores Compactos en Espacios Normados.

En esta sección haremos un estudio de las propiedades espectrales más importantes de los operadores lineales compactos. Para ello consideramos un operador lineal compacto $T : X \rightarrow X$, donde X un espacio normado. Al operador T le asociamos un operador T_λ , definido por

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

donde λ es un número complejo e I es el operador identidad de X .

Definición 1.3: Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. El número complejo λ es llamado un **valor propio** de T si existe un $x \in X$, $x \neq 0$, tal que

$$Tx = \lambda x$$

x es llamado un **vector propio** de T correspondiente al valor propio λ .

Definición 1.4: Sea X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. El número complejo λ es llamado un **valor regular** de T si $(T - \lambda I)^{-1}$ existe y es acotado.

El conjunto de los valores regulares de T se denota por $\rho(T)$ y se llama el **resolvente** de T ; o sea

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \text{ existe y es acotado} \}$$

El complemento de $\rho(T)$ es llamado es llamado el **spectrum** de T , y se denota por $\sigma(T)$; Así

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$$

a los elementos de $\sigma(T)$ se les llama **valores espectrales** de T .

Finalmente al número real

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} (\|\lambda\|)$$

se le llama el **radio espectral** de T .

Note que todo valor propio de un operador lineal acotado T también es un valor espectral de T .

Más adelante veremos que todo valor espectral $\lambda \neq 0$, de un operador compacto, es un valor propio.

Nuestro primer teorema se refiere al conjunto de valores propios de un operador compacto.

Teorema 1.9: Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces el conjunto de valores propios de T es contable, y el único punto de acumulación posible de este conjunto es $\lambda = 0$.

Demostración:

Sólo debemos demostrar que para cada número real $r > 0$ el conjunto de todos los valores propios λ tal que $|\lambda| \geq r$ es finito. Supongamos lo contrario; entonces existe un $r_0 > 0$ y una sucesión (λ_n) de valores propios de T , distintos, tales que $|\lambda_n| \geq r_0$ para todo $n \geq 1$. Como λ_n es un valor propio de T se tiene que $Tx_n = \lambda_n x_n$ para algún $x_n \in X$, $x_n \neq 0$, $n \geq 1$. Como los vectores propios x_n corresponden a valores propios diferentes, tenemos que el conjunto $\{x_n / n \geq 1\}$ es linealmente independiente. Sea

$$M_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

el subespacio vectorial generado por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, entonces todo $x \in M_n$ se puede escribir de forma única como

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

Note que

$$\begin{aligned}
 (T - \lambda_n I)x &= (T - \lambda_n I)(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \\
 &= \alpha_1 (T - \lambda_n I)x_1 + \dots + \alpha_n (T - \lambda_n I)x_n \\
 &= \alpha_1 (\lambda_1 x_1 - \lambda_n x_1) + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} x_{n-1} - \lambda_n x_{n-1}) + \alpha_n (\lambda_n x_n - \lambda_n x_n) \\
 &= \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1}
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1} \quad \text{para toda } x \in M_n.$$

Por otro lado M_{n-1} es un subespacio propio cerrado de M_n para toda $n \geq 2$, ya que los M_n son subespacios de dimensión finita del espacio normado X . Luego por el Lema de Riez existe una sucesión (y_n) en X , tal que

$$\|y_n\| = 1, \quad y_n \in M_n \quad \text{y} \quad \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

para toda $x \in M_{n-1}$, $n \geq 2$

Así pues (y_n) es una sucesión acotada en X .

Ahora bien, sumando y restando $\lambda_n y_n$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
 Ty_n - Ty_m &= Ty_n + \lambda_n y_n - \lambda_n y_n - Ty_m \\
 &= \lambda_n y_n - \tilde{x}
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m$$

Sea $n > m$. Probemos que $\tilde{x} \in M_{n-1}$. En efecto, como $m \leq n-1$,

$$y_m \in M_m \subset M_{n-1} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$$

Así existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ tales que

$$y_m = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

Luego

$$\begin{aligned} Ty_m &= \alpha_1 Tx_1 + \dots + \alpha_{n-1} Tx_{n-1} \\ &= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Ty_m \in M_{n-1} \tag{2}$$

Por otro lado, como $(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$ entonces

$-(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}$ ya que M_{n-1} es un espacio vectorial.

Como

$$-(T - \lambda_n I)y_n = \lambda_n y_n - Ty_n$$

se tiene que

$$\lambda_n y_n - Ty_n \in M_{n-1} \tag{3}$$

De (2) y (3) resulta que

$$\tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m \in M_{n-1}$$

Por lo tanto,

$$y := \lambda_n^{-1} \tilde{x} \in M_{n-1}$$

Así pues, por (1) obtenemos que:

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = \|\lambda_n y_n - \lambda_n y\| = |\lambda_n| \|y_n - y\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_n| \geq \frac{1}{2} r_0$$

pues $|\lambda_n| \geq r_0$

Por consiguiente la sucesión (Ty_n) no posee subsucesión convergente. Esto contradice la compacidad de T y prueba que el número de valores propios λ para los cuales $|\lambda| \geq r$ es finito.

Hemos probado así que el conjunto de valores propios de T es a lo sumo contable.

En base a lo anterior podemos ordenar los valores propios del operador compacto T en una sucesión $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$

Tal que

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad \text{para todo } n \geq 1$$

y si T tiene infinitos valores propios, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

Así que el único posible punto de acumulación del conjunto de los valores propios de T es $\lambda = 0$.

Teorema 1.10: Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces $\lambda = 0$ pertenece al spectrum de $\sigma(T)$ de T .

Demostración:

Supongamos que $\lambda = 0 \notin \sigma(T)$, entonces $\lambda = 0$ es un valor regular de T ; es decir

$$T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} = T^{-1}$$

existe y es acotado. Luego por el teorema 1.7

$$I = T^{-1}T$$

es un operador compacto. Esto implica por el Corolario 1.4 que $\dim(X) < \infty$, lo que es una contradicción. Así pues $0 \in \sigma(T)$.

La siguiente propiedad se refiere a la dimensión del núcleo del operador

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

Teorema 1.11: Sea X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces para todo $\lambda \neq 0$ de T

$$\dim N(T - \lambda I) < \infty$$

y por lo tanto $N(T - \lambda I)$ es un subespacio cerrado de X .

Demostración:

Solo debemos probar que la bola unitaria cerrada

$$M = \{ x \in N(T - \lambda I) : \|x\| \leq 1 \}$$

del subespacio $N(T - \lambda I)$ de X es compacta.

Sea (x_n) una sucesión en M . Como $\|x_n\| \leq 1$, entonces (x_n) es acotada. Además T es compacto, luego por Teorema 1.3, (Tx_n) posee una subsucesión (Tx_{n_k}) la cual converge en X .

Ahora como

$$x_n \in M \subset N(T - \lambda I)$$

se tiene que

$$Tx_n - \lambda x_n = 0$$

o sea $x_n = \lambda^{-1} Tx_n$, pues $\lambda \neq 0$.

Como (Tx_{n_k}) converge, entonces $(x_{n_k}) = (\lambda^{-1} Tx_{n_k})$ también converge. Además, como M es cerrado el límite de (x_{n_k}) está en M . Así la sucesión arbitraria (x_n) en M posee una subsucesión convergente en M , esto implica que M es compacto. Por lo tanto, $\dim N(T - \lambda I) < \infty$ y $N(T - \lambda I)$ es un subespacio cerrado de X .

En el teorema anterior las condiciones de que T un operador compacto y $\lambda \neq 0$ no pueden ser omitidas, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.10 : Sea X un espacio normado y $I : X \rightarrow X$ el operador identidad. Si $\dim X = \infty$ entonces T no es compacto. Por otro lado, si $\lambda = 1$,

$$N(I - \lambda I) = N(0) = X$$

por lo tanto $\dim N(I - \lambda I) = \infty$.

Ejemplo 1.11: Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $T : X \rightarrow X$ el operador nulo. T es compacto; además si $\lambda = 0$, entonces $N(T - \lambda I) = X$ y por lo tanto $\dim N(T - \lambda I) = \infty$.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.6: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto, $\lambda \neq 0$ y $N(T_\lambda)$ el núcleo de $T_\lambda = T - \lambda I$. Entonces:

$$\dim N(T_\lambda^n) < \infty \quad n = 1, 2, \dots$$

y $N(T_\lambda^n)$ es un subespacio cerrado de X .

Demostración:

Note que

$$\begin{aligned} T_\lambda^2 &= (T - \lambda I)^2 \\ &= T^2 - 2\lambda T + \lambda^2 I \\ &= \lambda^2 I + T[-2\lambda T^0 + T] \end{aligned}$$

donde $T^0 = I$. De igual manera

$$\begin{aligned} T_\lambda^3 &= (T - \lambda I)^3 \\ &= T^3 - 3\lambda T^2 + 3\lambda^2 T - \lambda^3 I \\ &= -\lambda^3 I + T[3\lambda^2 T^0 - 3\lambda T + T^2] \end{aligned}$$

En general se tiene que

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (T - \lambda I)^n \\ &= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^{k-1} \end{aligned}$$

Así podemos escribir a T_λ^n como

$$T_\lambda^n = L - \mu I$$

donde

$$\mu = -(-\lambda)^n \neq 0 \text{ y } L = TU \text{ con } U = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^{k-1}$$

Como U es una combinación lineal de operadores lineales acotados, se tiene que U es acotado. Luego como T es compacto, por el Teorema 1.7, L es compacto.

Así, por el Teorema 1.11, resulta que

$$\dim(N(T_\lambda^n)) = \dim N(L - \mu I) < \infty.$$

Observación: En la demostración del teorema anterior, se puede ver que si un operador T es compacto, entonces para todo entero positivo n , el operador $T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n$ se puede escribir como $T_\lambda^n = L - \mu I$ donde $\mu = -(-\lambda)^n \neq 0$ y L es compacto.

El Teorema 1.11 se puede utilizar para probar que un operador lineal acotado no es compacto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12: Consideremos el operador $T : l^2 \rightarrow l^2$ definido por:

$$\text{Si } x = (\varepsilon_i) \in l^2, \text{ entonces } T(x) = T(\varepsilon_i) = y = (\eta_i)$$

donde

$$\eta_i = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

sin dificultad se prueba que T es un operador lineal.

Además como

$$\|Tx\| \leq \|x\|$$

se tiene que T es un operador lineal acotado.

Note que

$$N(T_\lambda) = \{0\} \quad \text{si } \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 1$$

$$N(T_\lambda) = \{(\varepsilon_i) \in l^2 / \varepsilon_i = 0 \text{ si } i \text{ es par}\} \quad \text{si } \lambda = 0$$

$$N(T_\lambda) = \{(\varepsilon_i) \in l^2 / \varepsilon_i = 0 \text{ si } i \text{ es impar}\} \quad \text{si } \lambda = 1$$

para todo $n \geq 1$.

Como $\dim(N(T_\lambda)) = \infty$ para $\lambda = 1$, por el Teorema 1.11, T no es un operador compacto.

Los operadores acotados, tienen la propiedad de que sus núcleos son cerrado, aunque sus rangos no necesariamente son cerrados. Vamos a ver, a través del siguiente teorema, que si un operador lineal T es compacto, los rangos de $T_\lambda, T_\lambda^2, \dots$ son cerrados, para todo $\lambda \neq 0$.

Teorema 1.12: Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Para todo $\lambda \neq 0$ el rango de $T_\lambda = T - \lambda I$ es cerrado.

Demostración:

Obviamente,

$$T_\lambda(X) = \{ T_\lambda(x) / x \in X \}$$

es un subespacio de X . Sea $y \in \overline{T_\lambda(X)}$, entonces existe una sucesión (x_n) en X tal que

$$y_n = T_\lambda(x_n) \rightarrow y$$

Como por el Teorema 1.11 $\dim(N(T_\lambda)) < \infty$, por el teorema de la Mejor Aproximación en espacios normados, para cada x_n existe una mejor aproximación $z_n \in N(T_\lambda)$ con respecto a $N(T_\lambda)$; o sea

$$\|x_n - z_n\| = \inf \{ \|x_n - u\| : u \in N(T_\lambda) \} = \text{dist}(x_n, N(T_\lambda))$$

Consideremos la sucesión (t_n) en X definida por

Probemos por reducción al absurdo que (t_n) es una sucesión acotada. Supongamos que (t_n) no es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión (t_{n_k}) de (t_n) tal que

$$\|t_{n_k}\| \geq k \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}$$

Definamos ahora la sucesión (v_k) en X por

$$v_k := \frac{t_{n_k}}{\|t_{n_k}\|}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Como $\|v_k\| = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y T es un operador compacto, existe una subsucesión (v_{k_j}) de (v_k) tal que

$$Tv_{k_j} \rightarrow v \in X$$

Note que

$$T_\lambda(t_n) = T_\lambda(x_n) - T_\lambda(z_n) = T_\lambda(x_n) = y_n$$

Así

$$T_\lambda(t_n) \rightarrow y$$

Por lo tanto

$$\|T_\lambda(v_k)\| = \frac{\|T_\lambda(t_{n_k})\|}{\|t_{n_k}\|} \leq \frac{\|T_\lambda(t_{n_k})\|}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

ya que la sucesión $(T_\lambda(t_{n_k}))$ es convergente. Luego

$$T_\lambda(v_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Por otro lado, como

$$v_{k_j} = \frac{-1}{\lambda} [(T - \lambda I)v_{k_j} - Tv_{k_j}] = \frac{-1}{\lambda} [T_\lambda v_{k_j} - Tv_{k_j}]$$

se tiene que

$$v_{k_j} \rightarrow \frac{1}{\lambda} v$$

Por consiguiente, como T_λ es acotado

$$T_\lambda(v_{k_j}) \rightarrow T_\lambda\left(\frac{1}{\lambda} v\right)$$

Así pues

$$T_\lambda\left(\frac{1}{\lambda} v\right) = 0$$

o sea $\frac{1}{\lambda} v \in N(T_\lambda)$.

Ahora bien, como

$$z_{k_j} + \frac{1}{\lambda} \|t_{k_j}\| v \in N(T_\lambda) \quad \text{para toda } k$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|v_k - \frac{1}{\lambda} v\| &= \left\| \frac{t_{n_k}}{\|t_{n_k}\|} - \frac{1}{\lambda} v \right\| \\
 &= \left\| \frac{x_{n_k} - z_{n_k}}{\|t_{n_k}\|} - \frac{1}{\lambda} v \right\| \\
 &= \frac{1}{\|t_{n_k}\|} \|x_{n_k} - (z_{n_k} + \frac{1}{\lambda} \|t_{n_k}\| v)\| \\
 &\geq \frac{1}{\|t_{n_k}\|} \inf \left\{ \|x_{n_k} - u\| : u \in N(T_\lambda) \right\} \\
 &\geq \frac{1}{\|t_{n_k}\|} \|x_{n_k} - z_{n_k}\| = \frac{\|t_{n_k}\|}{\|t_{n_k}\|} = 1
 \end{aligned}$$

Es decir

$$\|v_k - \frac{1}{\lambda} v\| \geq 1 \quad \text{para todo } k \in N$$

lo que contradice el hecho de que

$$v_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} v$$

Así pues la sucesión (t_n) es acotada. Por ser T un operador compacto, existe una subsucesión (t_{n_k}) de (t_n) tal que $(T(t_{n_k}))$ es convergente en X .

A cada t_{n_k} lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} t_{n_k} &= \frac{-1}{\lambda} [T(t_{n_k}) - \lambda t_{n_k} - T(t_{n_k})] \\ &= \frac{-1}{\lambda} [T_\lambda(t_{n_k}) - T(t_{n_k})] \\ &= \frac{-1}{\lambda} [T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) - T(t_{n_k})] \\ &= \frac{-1}{\lambda} [T_\lambda(x_{n_k}) - T(t_{n_k})] \end{aligned}$$

Como $(T_\lambda x_{n_k})$ y $(T t_{n_k})$ son convergentes, (t_{n_k}) es convergente, digamos a $t \in X$.

Finalmente, como $t_{n_k} \rightarrow t$, se tiene que

$$T_\lambda(t_{n_k}) \rightarrow T_\lambda(t)$$

pero

$$T_\lambda(t_{n_k}) = T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda(x_{n_k}) \rightarrow y$$

Por consiguiente $y = T_\lambda(t)$, es decir $y \in T_\lambda(X)$. Así $T_\lambda(X)$ es cerrado.

Corolario 1.7: Sean X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces el rango de T_λ^n es un subespacio cerrado de X , para todo número natural n .

Demostración:

En la demostración del Corolario 1.6 vimos que T_λ^n se puede escribir como

$$T_\lambda^n = L - \mu I \text{ donde } L \text{ es un operador compacto y } \mu \neq 0.$$

Luego por el Teorema 1.12, el rango de T_λ^n es cerrado para todo numero natural n .

Finalizamos este capítulo con el siguiente resultado

Teorema 1.13: Sea X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces para todo $\lambda \neq 0$,

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \dots$$

donde $T_\lambda^0 = I$ es el operador identidad de X .

Demostración:

Es claro que

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X)$$

luego

$$T_\lambda(X) \supset T_\lambda(T_\lambda(X)) = T_\lambda^2(X)$$

Así, por inducción se tiene que

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \dots$$

CAPITULO II
TEORÍA DE RIESZ.

CAPITULO II

TEORÍA DE RIESZ

2.1. La Teoría de Riesz para Operadores Compactos

Del capítulo anterior sabemos que si $T : X \rightarrow X$ es un operador compacto definido en el espacio normado X y si $\lambda \neq 0$, entonces:

- Los núcleos $N(T_\lambda^n)$ son subespacios de dimensión finita de X y satisfacen:

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \dots$$

- Los rangos $T_\lambda^n(X)$ son subespacios cerrados de X y satisfacen:

$$X = T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset T_\lambda^2(X) \supset \dots$$

En lo que sigue probaremos algunos resultados que nos dan mucha más información acerca de las inclusiones antes mencionadas

Teorema 2.1: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un único entero no negativo r , dependiendo de λ , tal que

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subsetneq N(T_\lambda) \subsetneq N(T_\lambda^2) \subsetneq \dots \subsetneq N(T_\lambda^r)$$

y

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \dots$$

Demostración:

Es obvio que

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \dots$$

Asumamos que

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subsetneq N(T_\lambda) \subsetneq N(T_\lambda^2) \subsetneq \dots$$

Como por el Corolario 1.6 $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$ para todo $n \geq 0$, por el

Lema de Riesz, para cada $n \geq 1$ existe un $x_n \in N(T_\lambda^n)$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{y} \quad d(x_n, N(T_\lambda^{n-1})) \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Como $T_\lambda = T - \lambda I$, se tiene que $T = T_\lambda + \lambda I$. Luego

$$\begin{aligned} Tx_n - Tx_m &= T_\lambda x_n + \lambda x_n - T_\lambda x_m - \lambda x_m \\ &= \lambda x_n - x_m \end{aligned}$$

donde

$$x = T_\lambda x_m + \lambda x_m - T_\lambda x_n$$

Supongamos que $m < n$, entonces $m \leq n-1$, por lo tanto

$$\lambda x_m \in N(T_\lambda^m) \subset N(T_\lambda^{n-1})$$

Además

$$T_\lambda^{m-1}(T_\lambda x_m) = T_\lambda^m x_m = 0$$

o sea

$$T_\lambda x_m \in N(T_\lambda^{m-1}) \subset N(T_\lambda^{n-1})$$

Similarmente

$$T_\lambda^{n-1}(T_\lambda x_n) = T_\lambda^n x_n = 0$$

o sea

$$T_\lambda x_n \in N(T_\lambda^{n-1})$$

De todo lo anterior se tiene que $x \in N(T_\lambda^{n-1})$, de donde

$\lambda^{-1}x \in N(T_\lambda^{n-1})$. Así, por (1) tenemos que

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda x_n - x\| = |\lambda| \|x_n - \lambda^{-1}x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \quad (2)$$

siempre que $n > m$.

De (2) se deduce que la sucesión (Tx_n) no posee subsucesión convergente, siendo (x_n) una sucesión acotada. Esto contradice

la hipótesis de que T es un operador compacto. Por consiguiente existe un entero no negativo m tal que $N(T_\lambda^m) = N(T_\lambda^{m+1})$.

Sea $n > m$. Probemos que $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$. En efecto, sabemos que $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$. Sea $x \in N(T_\lambda^{n+1})$ y supongamos que $x \notin N(T_\lambda^n)$, entonces

$$T_\lambda^{n+1}(x) = 0 \quad \text{y} \quad T_\lambda^n(x) \neq 0$$

Como $n > m$, $n - m > 0$. Sea $z = T_\lambda^{n-m}x$, entonces

$$T_\lambda^{m+1}z = T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m}x) = T_\lambda^{n+1}x = 0$$

pero

$$T_\lambda^m z = T_\lambda^m(T_\lambda^{n-m}x) = T_\lambda^n x \neq 0$$

lo que contradice el hecho que $N(T_\lambda^m) = N(T_\lambda^{m+1})$.

así pues $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$ para todo $n > m$.

Hemos probado que el conjunto

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1}) \}$$

es no vacío. Sea

$$r = \min(S)$$

entonces

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subsetneq N(T_\lambda) \subsetneq N(T_\lambda^2) \subsetneq \dots \subsetneq N(T_\lambda^r)$$

además, por lo probado anteriormente, se tiene que

$$N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \dots$$

Teorema 2.2: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un único entero no negativo q , dependiendo de λ , tal que

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq T_\lambda^2(X) \supsetneq \dots \supsetneq T_\lambda^q(X)$$

y

$$T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = \dots$$

Demostración:

En el Teorema 1.13 se probó que

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq T_\lambda^2(X) \supsetneq \dots$$

supongamos que

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq T_\lambda^2(X) \supsetneq \dots$$

Como por el Corolario 1.7, $T_\lambda^n(X)$ es cerrado, por el Lema de

Riesz, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in T_\lambda^n(X)$ tal que

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{dist}(y_n, T_\lambda^{n+1}(X)) \geq \frac{1}{2}$$

Sea $x_n \in X$ tal que $T_\lambda^n(x_n) = y_n$. Tomemos $m > n$, entonces

$$\begin{aligned} Ty_n - Ty_m &= T_\lambda y_n + \lambda y_n - T_\lambda y_m - \lambda y_m \\ &= \lambda y_n - (T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n) \\ &= \lambda y_n - x \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x &= T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n \\ &= T_\lambda^{n+1}(T_\lambda^{m-n} x_m + \lambda T_\lambda^{m-n-1} x_m - x_n) \in T_\lambda^{n+1}(X) \end{aligned}$$

Así,

$$\|Ty_n - Ty_m\| = |\lambda| \|y_n - \lambda^{-1} x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda|$$

lo que implica que (Ty_n) no posee subsucesión convergente.

Pero (y_n) es una subsucesión acotado y T es un operador compacto, lo que es una contradicción. Así pues, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_\lambda^n(X) = T_\lambda^{n+1}(X)$.

Definamos

$$q : \min \{ k \in \mathbb{N} : T_\lambda^k(X) = T_\lambda^{k+1}(X) \}$$

entonces

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq \dots \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$$

Probemos por inducción que

$$T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = T_\lambda^{q+2}(X) = \dots$$

Sabemos que $T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$. Supongamos que para un

$k \geq q$, $T_\lambda^k(X) = T_\lambda^{k+1}(X)$. Sea $z \in T_\lambda^{k+1}(X)$, entonces

existe un $x \in X$ con $T_\lambda^{k+1}x = z$, o sea

$$z = T_\lambda^{k+1}x = T_\lambda(T_\lambda^k x)$$

Como $T_\lambda^k x \in T_\lambda^k(X) = T_\lambda^{k+1}(X)$, existe un $\bar{x} \in X$ tal que

$$T_\lambda^k x = T_\lambda^{k+1} \bar{x}$$

Así

$$z = T_\lambda(T_\lambda^{k+1} \bar{x}) = T_\lambda^{k+2} \bar{x}$$

lo que implica que $z \in T_\lambda^{k+2}(X)$ y $T_\lambda^{k+1}(X) = T_\lambda^{k+2}(X)$.

Por consiguiente, por el principio de inducción matemática se tiene que

$$T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = \dots$$

En el siguiente teorema combinamos los resultados de los dos teoremas anteriores.

Teorema 2.3 (Riesz): Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un único entero no negativo n (dependiendo de λ) tal que

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subsetneq N(T_\lambda) \subsetneq \dots \subsetneq N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1}) = \dots$$

y

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq \dots \supsetneq T_\lambda^n(X) = T_\lambda^{n+1}(X) = \dots$$

Demostración:

En los Teoremas 2.1 y 2.2 se probó que existen enteros no negativos r y q tales que

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subsetneq N(T_\lambda) \subsetneq N(T_\lambda^2) \subsetneq \dots \subsetneq N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \dots$$

y

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq \dots \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = \dots$$

Probemos que $r = q$. Supongamos que $r > q$ y sea $x \in N(T_\lambda^r)$, entonces

$$T_\lambda^{r-1}(x) \in T_\lambda^{r-1}(X) = T_\lambda^r(X)$$

luego existe un $z \in X$ tal que

$$T_\lambda^{r-1}(x) = T_\lambda^r(z)$$

Como $x \in N(T_\lambda^r)$, se tiene que

$$T_\lambda^{r+1}(z) = T_\lambda(T_\lambda^r(z)) = T_\lambda(T_\lambda^{r-1}(x)) = T_\lambda^r(x) = 0$$

por lo tanto $z \in N(T_\lambda^{r+1}) = N(T_\lambda^r)$. Luego

$$T_\lambda^{r-1}(x) = T_\lambda^r(z) = 0$$

de donde $x \in N(T_\lambda^{r-1})$. Así pues $N(T_\lambda^r) \subset N(T_\lambda^{r-1})$,

pero como $N(T_\lambda^{r-1}) \subset N(T_\lambda^r)$, se tienen que $N(T_\lambda^{r-1}) = N(T_\lambda^r)$;

lo que es una contradicción. Por consiguiente $r \leq q$.

Supongamos que $r < q$ y sea $y = T_\lambda^{q-1}(x) \in T_\lambda^{q-1}(X)$

Como

$$T_\lambda(y) = T_\lambda^q(x) \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$$

existe un $z \in X$ tal que $T_\lambda(y) = T_\lambda^{q+1}(z)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_\lambda^q(x - T_\lambda(z)) &= T_\lambda(T_\lambda^{q-1}(x)) - T_\lambda^{q+1}(z) \\ &= T_\lambda(y) - T_\lambda(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o sea $x - T_\lambda(z) \in N(T_\lambda^q)$. Pero como $N(T_\lambda^{q-1}) = N(T_\lambda^q)$, se

tiene que $x - T_\lambda(z) \in N(T_\lambda^{q-1})$, o sea

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda(z)) = 0$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
 y \cdot T_\lambda^{q-1}(x) \cdot T_\lambda^{q-1}((x \cdot T_\lambda(z)) \cdot T_\lambda(z)) \cdot \\
 \cdot T_\lambda^{q-1}(x \cdot T_\lambda(z)) \cdot T_\lambda^{q-1}(T_\lambda(z)) \\
 \cdot T_\lambda^q(z), T_\lambda^q(X)
 \end{aligned}$$

Así pues $T_\lambda^{q-1}(X) \subset T_\lambda^q(X)$. Pero como $T_\lambda^q(X) \subset T_\lambda^{q-1}(X)$, se tiene que $T_\lambda^{q-1}(X) = T_\lambda^q(X)$, lo que es una contradicción.

De todo lo anterior se tiene que $r = q$.

Definición 2.1: Sea X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. El único entero no negativo n tal que

$$\begin{aligned}
 \{0\} = N(T_1^0) \subsetneq N(T_1) \subsetneq N(T_1^2) \subsetneq \dots \subsetneq N(T_1^n) = N(T_1^{n+1}) = \dots \\
 \text{y} \\
 X = T_1^0(X) \supsetneq T_1(X) \supsetneq T_1^2(X) \supsetneq \dots \supsetneq T_1^n(X) = T_1^{n+1}(X) = \dots
 \end{aligned}$$

se llama el **número de Riesz** del operador T .

En el siguiente ejemplo determinaremos el número de Riesz de un operador compacto.

Ejemplo 2.1: Consideremos el operador $T : l^2 \rightarrow l^2$ definida por

$$T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = \left(\frac{\varepsilon_1}{1}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \dots\right)$$

En el Ejemplo 1.9 se probó que T es un operador compacto.

Note que

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) &= T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) - (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \\ &= \left(\frac{\varepsilon_1}{1}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \dots\right) - (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}\varepsilon_2, -\frac{2}{3}\varepsilon_3, -\frac{3}{4}\varepsilon_4, \dots\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} N(T_1) &= \{x = (\varepsilon_n) \in l^2 / T_1(x) = 0\} \\ &= \{x = (\varepsilon_n) \in l^2 / \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 0\} \end{aligned}$$

Por otro lado, para $x = (\varepsilon_n)$

$$\begin{aligned} T_1^2(x) &= T_1\left(0, -\frac{1}{2}\varepsilon_2, -\frac{2}{3}\varepsilon_3, -\frac{3}{4}\varepsilon_4, \dots\right) \\ &= \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon_2, \left(\frac{2}{3}\right)^2 \varepsilon_3, \dots\right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$N(T_1^2) = \{x = (\varepsilon_n) \in l^2 / \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 0\}$$

Así pues $N(T_1) = N(T_1^2)$. De los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 se

concluye que $T_1(X) = T_1^2(X)$ y que el número de Riesz de T es $n = 1$.

Una consecuencia muy importante del Teorema 2.3 es que el espacio normado X se puede descomponer como suma directa de los subespacios $N(T_\lambda^n)$ y $T_\lambda^n(X)$ como lo indica el siguiente teorema:

Teorema 2.4: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces X puede representarse en la forma

$$X = N(T_\lambda^n) \oplus T_\lambda^n(X)$$

donde n es el número entero no negativo determinado en el Teorema 2.3.

Demostración:

Supongamos que $x \in N(T_\lambda^n) \cap T_\lambda^n(X)$. Entonces existe un $z \in X$ tal que

$$x = T_\lambda^n(z) \quad \text{y} \quad T_\lambda^n(x) = 0$$

Luego $T_\lambda^{2n}(z) = 0$, lo que implica que $z \in N(T_\lambda^{2n}) = N(T_\lambda^n)$.

Por lo tanto

$$x = T_\lambda^n(z) = 0$$

Así pues

$$N(T_\lambda^n) \cap T_\lambda^n(X) = \{0\}$$

Sea ahora $x \in X$. Entonces $T_\lambda^n(x) \in T_\lambda^n(X) = T_\lambda^{2n}(X)$. Por lo tanto, existe $u \in X$ tal que $T_\lambda^n(x) = T_\lambda^{2n}(u)$.

Definamos

$$y := T_\lambda^n(u) \quad , \quad z := x - y$$

entonces

$$T_\lambda^n(z) = T_\lambda^n(x) - T_\lambda^n(y) = T_\lambda^n(x) - T_\lambda^{2n}(u) = T_\lambda^n(x) - T_\lambda^n(x) = 0$$

Por lo tanto

$$x = z + y \quad \text{con} \quad z \in N(T_\lambda^n), \quad y \in T_\lambda^n(X)$$

y

$$X = N(T_\lambda^n) \oplus T_\lambda^n(X)$$

Otra consecuencia del Teorema 2.3 es el siguiente resultado

Teorema 2.5: : Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto, $\lambda \neq 0$ y T_λ inyectivo. Entonces el operador inverso $T_\lambda^{-1} : X \rightarrow X$ existe y es acotado.

Demostración:

Como T_λ es inyectivo, $N(T_\lambda) = \{0\}$. Luego

$N(T_\lambda^0) = N(T_\lambda)$. Por lo tanto, por el Teorema 2.3, $n = 0$ y

$X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda(X)$, lo que implica que T_λ es suryectiva. Así T_λ es biyectivo y $T_\lambda^{-1} : X \rightarrow X$ existe y es lineal.

Supongamos que T_λ^{-1} no es acotado, entonces existe una sucesión (x_n) de elementos de X tal que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{y} \quad \|T_\lambda^{-1}x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Definamos

$$y_n := T_\lambda^{-1}x_n, \quad z_n := \frac{x_n}{\|y_n\|}, \quad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad \text{para todo } n \in N$$

$$\|z_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \frac{1}{\|y_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y

$$T_\lambda(u_n) = \frac{T_\lambda(y_n)}{\|y_n\|} = \frac{x_n}{\|y_n\|} = z_n$$

por lo tanto

$$T_\lambda(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Como $\|u_n\| = 1$ y T es compacto, existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que $(T(u_{n_k}))$ es convergente, digamos a $v \in X$. Luego como

$$z_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} = \frac{T(u_{n_k})}{\|y_n\|} = T\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right) = T(u_n) - \lambda u_n$$

se tiene que

$$u_{n_k} = \frac{1}{\lambda} [T(u_{n_k}) - z_{n_k}] \rightarrow \frac{1}{\lambda} v$$

pero como

$$T_\lambda(u_{n_k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Concluimos que $T_\lambda(\frac{1}{\lambda} v) = 0$; es decir, $\frac{1}{\lambda} v \in N(T_\lambda) = \{0\}$. Lo que implica que $v = 0$. Por lo tanto

$$T(u_{n_k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ahora bien,

$$T_\lambda(u_{n_k}) = T(u_{n_k}) - \lambda u_{n_k}$$

luego

$$U_{n_k} = \frac{1}{\lambda} [T(u_{n_k}) - T_\lambda(u_{n_k})]$$

lo que implica que

$$u_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pero esto contradice el hecho de que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in N$.

Así pues, T_λ^{-1} es un operador lineal acotado.

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.3. es el siguiente resultado.

Corolario 2.1: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto, $\lambda \neq 0$ y supongamos que T_λ no es inyectivo. Entonces $T_\lambda(X)$ es un subespacio propio de X .

Demostración:

Como T_λ no es inyectivo $N(T_\lambda) \neq \{0\}$. Luego por el Teorema 2.3 se tiene que $n \geq 1$. Esto implica que $T_\lambda(X) \neq X$. Así, $T_\lambda(X)$ es un subespacio propio de X .

Teorema 2.6: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Si λ es un valor espectral de T , entonces λ es un valor propio de T .

Demostración:

Supongamos que λ es un valor espectral de T , entonces T_λ^{-1} no existe como operador lineal acotado. Si $N(T_\lambda) \neq \{0\}$, entonces existe un $x \in X$, $x \neq 0$
Tal que

$$T_\lambda(x) = T(x) - \lambda x = 0$$

o sea $Tx = \lambda x$ y λ es un valor propio de T .

Si $N(T_\lambda) = \{0\}$, entonces T_λ es inyectivo. Luego por el Teorema 2.5, T_λ^{-1} existe y es acotado. Esto implica que $\lambda \in \rho(T)$ lo que es una contradicción. Así pues, todos los valores espectrales no nulos de T son valores propios de T .

Como consecuencia de los Teoremas 1.9, 1.10 y 2.6 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces $\sigma(T) - \{0\}$ consiste de un conjunto contable de valores propios, sin puntos de acumulación, excepto, posiblemente, $\lambda = 0$. Si $\dim(X) = \infty$, entonces $0 \in \sigma(T)$.

Del Corolario 2.2 se desprende que todo $\lambda \neq 0$ es un valor regular o un valor propio del operador compacto T . Además por el Teorema 1.10, $\lambda = 0$ es un valor espectral de T ; o sea $0 \in \sigma(T)$, si $\dim(X) = \infty$. Si $\dim(X) < \infty$, entonces T puede ser representado mediante una matriz, y puede ocurrir que $\lambda = 0$ sea un valor regular, o sea $0 \in \rho(T)$. Si $\dim(X) < \infty$ y $0 \in \sigma(T)$, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio de T . Finalmente puede ocurrir que un operador compacto no tenga valores propios como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2: Sea $T : l^2 \rightarrow l^2$ el operador lineal definido por

$$Tx = \left(0, \frac{\varepsilon_1}{1}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \frac{\varepsilon_3}{3}, \dots\right) \quad \text{donde } x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

Note que $T = K \circ L$, donde

$$L(x) = \left(\frac{\varepsilon_1}{1}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \frac{\varepsilon_3}{3}, \dots\right)$$

$$K(x) = (0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

Por el Ejemplo 1.9 L es compacto y por el Ejemplo 1.3 K es un operador lineal acotado. Luego por el Teorema 1.7, T es un operador compacto.

Como $\dim(l^2) = \infty$, por el Teorema 1.10, $0 \in \sigma(T)$

Sea $x = (\varepsilon_i)$ y supongamos que $Tx = \lambda x$ con $\lambda \neq 0$, entonces

$$Tx = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) = \left(0, \frac{\varepsilon_1}{1}, \frac{\varepsilon_2}{2}, \dots\right) = (\lambda \varepsilon_1, \lambda \varepsilon_2, \lambda \varepsilon_3, \dots)$$

Por lo tanto

$$\lambda \varepsilon_1 = 0, \quad \lambda \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1}, \quad \lambda \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{2}, \dots$$

Como $\lambda \neq 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 0$, o sea $x = 0$.

De lo anterior se tiene que λ no es un valor propio de T .

Luego, por el Corolario 2.2 se tiene que $\sigma(T) = \{0\}$. Note que

$\lambda = 0$ no es un valor propio de T , ya que si $Tx = 0$, entonces $x = 0$; o sea, T es un operador inyectivo.

2.2. Operadores Adjuntos de Operadores Compactos

En esta sección consideraremos un espacio normado X y un operador compacto $T : X \rightarrow X$. El dual de X es el espacio normado X' definido por

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

El operador adjunto T^* de T se define por

$$\begin{aligned} T^* : X' &\rightarrow X' \\ (T^* g)(x) &= g(Tx) \end{aligned}$$

T^* es un operador lineal acotado y $\|T^*\| = \|T\|$.

Si X es un espacio de Hilbert, entonces el operador adjunto de Hilbert de T se denota por T^* y se define mediante la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} T^* : X &\rightarrow X \\ \langle T^* x, y \rangle &= \langle x, Ty \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in X \end{aligned}$$

T^* existe y es un operador lineal acotado. Además $\|T^*\| = \|T\|$.

Teorema 2.7: Sea X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto, entonces $T^* : X' \rightarrow X'$ es compacto.

Demostración:

Sea M un subconjunto acotado de X' . Como X' es completo, para probar que $T^x(M)$ es relativamente compacto sólo debemos que probar que $T^x(M)$ es totalmente acotado, o sea que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $B_\varepsilon \subset X'$ (ε -red finita para $T^x(M)$) tal que para cada $f \in T^x(M)$, $d(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como M está acotado en X' , existe un $c > 0$ tal que

$$\|g\| \leq c \quad \text{para todo } g \in M.$$

Por ser T compacto, $T(V)$ es relativamente compacto, donde $V = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Luego $T(V)$ es totalmente acotado en X .

Tomemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4c}$, entonces existe una ε_1 -red finita F_ε de $T(V)$ tal que $T(V) \subset F_\varepsilon$. Esto implica que existen x_1, x_2, \dots, x_n en V tales que para cada $x \in V$,

$$\|Tx - Tx_i\| < \frac{\varepsilon}{4c} \quad \text{para algún } i \quad (1)$$

Definamos el operador

$$L: X' \rightarrow C^n$$

por

$$Lg = (g(Tx_1), g(Tx_2), \dots, g(Tx_n))$$

Como g y T son operadores lineales acotados, L es un operador lineal acotado. Además como $\dim(L(X')) < \infty$, por el Teorema 1.4, L es un operador compacto.

Por ser M acotado en X' , $L(M)$ es relativamente compacto y

por lo tanto totalmente acotado. Sea $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces

$L(M)$ contiene una ε_2 -red finita de $L(M)$. Esto significa que existen $g_1, g_2, \dots, g_m \in M$ tal que para cada $g \in M$,

$$\|Lg - Lg_j\|_0 < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para algún } j \quad (2)$$

donde $\|\cdot\|_0$ es la norma usual de C^n .

Consideremos el conjunto $N = \{T^x g_1, T^x g_2, \dots, T^x g_m\}$ y probemos que N es una ε -red para $T^x(M)$. Sea $g \in M$, entonces para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$ se tiene que

$$\begin{aligned} |g(Tx_i) - g_j(Tx_i)|^2 &\leq \sum_{i=1}^n |g(Tx_i) - g_j(Tx_i)|^2 \\ &= \|Lg - Lg_j\|_0^2 \\ &= \|L(g - g_j)\|_0^2 \end{aligned}$$

Luego, por (2), para cada $g \in M$ existe un j , $1 \leq j \leq m$, tal que

$$|g(Tx_i) - g_j(Tx_i)|^2 \leq \|L(g - g_j)\|_0^2 \leq \left(\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2 \quad (3)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$

Sea $x \in V$, entonces por (1), para cada $x \in V$ existe un i tal que

$$\|Tx - Tx_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4c}$$

Tomemos un $g \in M$, entonces (3) se satisface para algún j .

Por consiguiente

$$\begin{aligned} |g(Tx) - g_j(Tx)| &\leq |g(Tx) - g(Tx_i)| + |g(Tx_i) - g_j(Tx_i)| + |g_j(Tx_i) - g_j(Tx)| \\ &\leq \|g\| \|Tx - Tx_i\| + |g(Tx_i) - g_j(Tx_i)| + \|g_j\| \|Tx_i - Tx\| \\ &\leq c \left(\frac{\varepsilon}{4c}\right) + \frac{\varepsilon}{4} + c \left(\frac{\varepsilon}{4c}\right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|T^x g - T^x g_j\| &= \sup_{|x| \leq 1} |T^x (g - g_j)(x)| \\ &= \sup_{|x| \leq 1} |(g - g_j)(Tx)| \\ &= \sup_{|x| \leq 1} |g(Tx) - g_j(Tx)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Así pues para cada $g \in M$ existe un j , $1 \leq j \leq m$ tal que

$$\|T^* g - T^* g_j\| < \varepsilon$$

Esto implica que $N = \{T^* g_1, T^* g_2, \dots, T^* g_m\}$ es una ε -red para $T^*(M)$. Así pues $T^*(M)$ es totalmente acotado, y por ende relativamente compacto. Lo anterior implica que T^* es compacto.

Teorema 2.8: Sea X un espacio de Hilbert y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces el operador adjunto de Hilbert $T^* : X \rightarrow X$ es compacto.

Demostración:

Como T es compacto y T^* es acotado, luego por el Teorema 1.7, $TT^* : X \rightarrow X$ es compacto.

Sea (x_n) una sucesión acotada en X , luego existe un $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \geq 1$. Además, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(TT^*(x_{n_k}))$ es convergente en X . Pero

$$\begin{aligned}
\|T^*x_{n_k} - T^*x_{n_j}\|^2 &= \|T^*(x_{n_k} - x_{n_j})\|^2 \\
&= \langle T^*(x_{n_k} - x_{n_j}), T^*(x_{n_k} - x_{n_j}) \rangle \\
&= \left| \langle TT^*(x_{n_k} - x_{n_j}), x_{n_k} - x_{n_j} \rangle \right| \\
&\leq \|TT^*(x_{n_k} - x_{n_j})\| \|x_{n_k} - x_{n_j}\| \\
&\leq \|TT^*(x_{n_k} - x_{n_j})\| (\|x_{n_k}\| + \|x_{n_j}\|) \\
&\leq 2c \|TT^*(x_{n_k} - x_{n_j})\|
\end{aligned}$$

lo que implica que $(T^*x_{n_k})$ es una sucesión de Cauchy en X .

Como X es completo $(T^*x_{n_k})$ es convergente en X ; y por lo tanto, T^* es compacto.

CAPÍTULO III
OPERADORES DE FREDHOLM

CAPÍTULO III

OPERADORES DE FREDHOLM

3.1. Ecuaciones que Envuelven Operadores Compactos.

Para el operador compacto $T : X \rightarrow X$, $y \in X$ y $\lambda \neq 0$, podemos considerar la ecuación

$$Tx - \lambda x = y \quad (1)$$

y la correspondiente ecuación homogénea

$$Tx - \lambda x = 0 \quad (2)$$

A estas ecuaciones le podemos asociar dos ecuaciones usando el operador adjunto

$$T^* f - \lambda f = g, \quad g \in X' \quad (3)$$

y la ecuación homogénea

$$T^* f - \lambda f = 0 \quad (4)$$

De igual manera, si X es un espacio de Hilbert, podemos considerar la ecuación

$$T^* x - \lambda x = 0 \quad (5)$$

A continuación presentaremos algunos resultados referentes a estas ecuaciones.

Teorema 3.1: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Si la ecuación homogénea

$$Tx - \lambda x = 0$$

tiene sólo la solución trivial, entonces para todo $y \in X$ la ecuación

$$Tx - \lambda x = y$$

Tiene una única solución $x \in X$ y esta solución depende continuamente de y .

Demostración:

Si la ecuación homogénea tiene sólo la solución trivial, entonces el operador $T_\lambda = T - \lambda I$ es inyectivo. Luego por el Teorema 2.5, el operador inverso $T_\lambda^{-1} : X \rightarrow X$ existe y es acotado, o sea que para cada $y \in X$ existe un único $x \in X$ tal que $T_\lambda^{-1} y = x$, o sea $Tx - \lambda x = y$. Así que la ecuación

$$Tx - \lambda x = y$$

tiene una única solución para cada $y \in X$ y esta solución depende continuamente de y , ya que T_λ^{-1} es un operador continuo.

Teorema 3.2: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Si la ecuación homogénea

$$Tx - \lambda x = 0$$

tiene solución no trivial, entonces la ecuación no homogénea

$$Tx - \lambda x = y$$

no tiene solución, o su solución general es de la forma

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

donde x_1, \dots, x_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son escalares arbitrarios y x_0 es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Demostración:

Por hipótesis el operador $T_\lambda = T - \lambda I$ no es inyectivo. Luego por el Corolario 2.1 $T_\lambda(X)$ es un subespacio propio de X .

Además, por el Teorema 1.11 $\dim(N(T_\lambda)) = n < \infty$.

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base para $N(T_\lambda)$, entonces x_1, \dots, x_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

Sea $y \in X$. Si $y \notin T_\lambda(X)$ entonces la ecuación no homogénea $Tx - \lambda x = y$ no posee solución. Supongamos que $y \in T_\lambda(X)$ y

sea $x_0 \in X$ tal que $T_\lambda(x_0) = y$; o sea $Tx_0 - \lambda x_0 = y$. Luego x_0 es una solución de la ecuación no homogénea dada.

Sea x una solución de la ecuación no homogénea dada, entonces

$$T_\lambda(x - x_0) = T_\lambda x - T_\lambda x_0 = y - y = 0$$

por lo tanto $x - x_0 \in N(T_\lambda)$. Luego existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$x - x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

así pues

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

Teorema 3.3: Sea X un espacio normado, $T: X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. La ecuación (1)

$$Tx - \lambda x = y$$

tiene una solución x , si y sólo si y es tal que $f(y) = 0$, para toda $f \in X'$ que satisfaga la ecuación (4)

$$T^* f - \lambda f = 0$$

Así, si la ecuación (4) tiene sólo la solución trivial $f = 0$, entonces la ecuación (1) tiene solución, para todo $y \in X$.

Demostración:

Supongamos primero que la ecuación (1) tiene una solución $x = x_0$; o sea,

$$T_\lambda x_0 = Tx_0 - \lambda x_0 = y$$

Sea $f \in X'$ una solución de (4), entonces

$$f(y) = f(Tx_0 - \lambda x_0) = f(Tx_0) - \lambda f(x_0)$$

Pero por la definición de operador adjunto,

$$f(Tx_0) = (T^* f)(x_0)$$

por lo tanto

$$f(y) = (T^* f)(x_0) - \lambda f(x_0) = (T^* f - \lambda f)(x_0) = 0$$

Así pues, $f(y) = 0$ para toda $f \in X'$ que satisface la ecuación (4).

Recíprocamente supongamos que $f(y) = 0$ para toda $f \in X'$ que satisface la ecuación (4). Supongamos que la ecuación (1) no tiene solución, luego

$$T_\lambda x = Tx - \lambda x \neq y$$

para todo $x \in X$, luego $y \notin T_\lambda(X)$. Como por el Teorema 1.12

$T_\lambda(X)$ es un subespacio cerrado de X ,

$$\delta = \text{dist}(y, T_\lambda(X)) = \inf \{ \|y - T_\lambda(x)\| : x \in X \} > 0$$

Luego, como una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, existe un $f \in X'$ tal que

$$\|f\| = 1, \quad f(z) = 0 \text{ para todo } z \in T_\lambda(X), \quad f(y) = \delta.$$

Como $f(z) = 0$ para todo $z \in T_\lambda(X)$, $f(T_\lambda x) = 0$ para todo $x \in X$, o sea

$$f(Tx - \lambda x) = f(Tx) - \lambda f(x) = 0$$

por lo tanto

$$(T^* f)(x) - \lambda f(x) = (T^* f - \lambda f)(x) = 0$$

para todo $x \in X$, lo que implica que f es solución de la ecuación (4). Luego, por hipótesis $f(y) = 0$, lo que es una contradicción. Así pues, la ecuación (1) debe tener solución.

Los siguientes dos resultados están relacionados con la acotación de ciertas soluciones de la ecuación (1).

Teorema 3.4: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Sea x_0 una solución de la ecuación (1) para un $y \in X$ dado. Entonces el conjunto S de las soluciones de la ecuación (1) contiene un elemento x de norma mínima; es decir

$$\|\bar{x}\| = \min \{\|x\| : x \in S\}, \quad \bar{x} \in S$$

Demostración:

Si $x \in S$, entonces $z = x - x_0$ es una solución de la ecuación (2). Por lo tanto, toda solución de la ecuación (1) se puede escribir de la forma

$$x = x_0 + z$$

para algún $z \in N(T_\lambda)$. Recíprocamente, para todo $z \in N(T_\lambda)$, la suma $x = x_0 + z$ es una solución de la ecuación (1). Así

$$S = x_0 + N(T_\lambda) = \{x_0 + z / z \in N(T_\lambda)\}$$

Definamos

$$p(z) := \|x_0 + z\| \quad \text{y} \quad k := \inf \{p(z) / z \in N(T_\lambda)\}$$

note que

$$k = \inf \{\|x\| : x \in S\}$$

Por la definición de ínfimo, existe una sucesión $\{z_n\}$ de elementos de $N(T_\lambda)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 + z_n\| = k$$

Como $(p(z_n))$ es convergente, ella es acotada en R , además como

$$\|z_n\| = \|(x_0 + z_n) - x_0\| \leq \|x_0 + z_n\| + \|x_0\| = p(z_n) + \|x_0\|$$

se tiene que (z_n) es una sucesión acotada en X . Como T es compacto, (Tz_n) posee una subsucesión convergente. Además como $z_n \in N(T_\lambda)$ se tiene que $T_\lambda z_n = 0$, o sea $Tz_n = \lambda z_n$. Por consiguiente, como $\lambda \neq 0$, existe una subsucesión (z_{n_j}) de (z_n) que es convergente, digamos a $z_0 \in X$. Pero como por el Teorema 1.11 $N(T_\lambda)$ es cerrado, se tiene que $z_0 \in N(T_\lambda)$. Además como p es una función continua,

$$p(z_{n_j}) \rightarrow p(z_0)$$

Así pues

$$r(z_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} p(z_{n_j}) = k$$

y para

$$x := x_0 + z_0 \in S$$

se tiene que

$$\|x\| = \|x_0 + z_0\| = p(z_0) = k$$

o sea

$$\|x\| = \inf \{\|x\| : x \in S\} = \min \{\|x\| : x \in S\}$$

Teorema 3.5: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un número real $c > 0$ tal que para todo $y \in X$, para el cual la ecuación (1) tenga solución, al menos una de esas soluciones x satisface

$$\|x\| \leq c \|y\|$$

Demostración:

Para cada $y \in X$ para el cual la ecuación (1) tenga solución denotaremos

$$S_y = \{x \in X / Tx - \lambda x = y\}$$

Por el Teorema 3.4 existe un $\bar{x}_y \in S_y$ tal que

$$\|\bar{x}_y\| = \min \{\|x\| : x \in S_y\}$$

Probaremos que existe un número real $c > 0$ tal que para todo $y \in X$, para el cual la ecuación (1) tenga solución,

$$\|\bar{x}_y\| \leq c\|y\|$$

Supongamos que lo anterior no es cierto, entonces existe una sucesión (y_n) en X tal que

$$\frac{\|\bar{x}_{y_n}\|}{\|y_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Como $T_\lambda \bar{x}_y = y$, multiplicando por $\alpha > 0$ se concluye que:

$$\alpha \bar{x}_y \in S_{\alpha y} \quad \text{y} \quad \|\alpha \bar{x}_y\| = \min \{\|x\| : x \in S_{\alpha y}\}$$

por lo que podemos suponer que $\|\bar{x}_{y_n}\| = 1$.

De esto y de nuestra suposición concluimos que

$$\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Como (\bar{x}_{y_n}) es acotada y T compacto, existe una subsucesión convergente $(T\bar{x}_{y_{n_j}})$ de $(T\bar{x}_{y_n})$, digamos

$$T\bar{x}_{y_{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v_0$$

Como

$$y_n = T_\lambda \bar{x}_{y_n} = T \bar{x}_{y_n} - \lambda \bar{x}_{y_n}$$

se tiene que

$$\lambda \bar{x}_{y_n} = T \bar{x}_{y_n} - y_n$$

así

$$\bar{x}_{y_{n_j}} = \frac{1}{\lambda} (T \bar{x}_{y_{n_j}} - y_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} v_0$$

y por lo tanto

$$T(\bar{x}_{y_{n_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T\left(\frac{1}{\lambda} v_0\right)$$

De lo anterior se tiene que

$$T\left(\frac{1}{\lambda} v_0\right) = v_0$$

y

$$Tv_0 = \lambda v_0$$

es decir, $v_0 \in N(T_\lambda)$. Tomemos $x_n = \bar{x}_{y_n} - v_0$, entonces

$$T_\lambda x_n = y_n$$

o sea $x_n \in S_{y_n}$, y por lo tanto

$$\|x_n\| = \|\bar{x}_{y_n} - v_0\| \geq \|\bar{x}_{y_n}\| = 1$$

Así podemos concluir que la sucesión $(\bar{x}_{y_{n_j}} - v_0)$ no es convergente. Pero esto contradice el hecho de que $(\bar{x}_{y_{n_j}})$ es una subsucesión convergente. Así pues, lo que habíamos supuesto no es cierto. Por lo tanto, existe un $c > 0$ tal que

$$\|\bar{x}_y\| \leq c\|y\|$$

Para todo $y \in X$ para el cual la ecuación (1) tenga solución.

En los Teoremas 3.4 y 3.5 hemos probado que para todo $y \in T_\lambda(X)$ existe un $\bar{x}_y \in S_y$ de mínima norma, además

$$c = \sup_{\substack{y \in T_\lambda(X) \\ y \neq 0}} \frac{\|\bar{x}_y\|}{\|y\|} < \infty .$$

Teorema 3.6: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. La ecuación (3)

$$T^*f - \lambda f = g$$

tiene solución si y sólo si $g(x) = 0$ para toda $x \in X$ que satisface la ecuación (2)

$$Tx - \lambda x = 0$$

Por lo tanto si la ecuación (2) tiene sólo la solución trivial, entonces la ecuación (3) tiene solución para toda $g \in X'$.

Demostración:

Supongamos que la ecuación (3) tiene solución para g y que x es solución de la ecuación (2), entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= (T^\lambda f)(x) - \lambda f(x) \\ &= f(Tx) - f(\lambda x) \\ &= f(Tx - \lambda x) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $g(x) = 0$ para toda solución x de la ecuación (2). Definamos la relación

$$\begin{aligned} f_0 : T_\lambda(X) &\rightarrow K \\ f_0(y) &= g(x) \quad \text{si } y = T_\lambda(x) \end{aligned}$$

Probemos que en efecto, f_0 es una función. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $y = T_\lambda(x_1) = T_\lambda(x_2)$, entonces $T_\lambda(x_1 - x_2) = 0$. Esto implica que $x_1 - x_2$ es una solución de (2), por lo tanto $g(x_1 - x_2) = 0$, o sea $g(x_1) = g(x_2)$. Así pues f_0 está bien definida; es decir, f_0 es una función.

Como T_λ y g son funciones lineales acotadas, f_0 es una función lineal acotada. En efecto, por el Teorema 3.5, para todo $y \in T_\lambda(X)$ se tiene que

$$\|f_0(y)\| \leq c \|y\|$$

donde \bar{x}_y es una solución de la ecuación (1), de norma mínima.

Luego

$$\|f_0(y)\| = \|g(\bar{x}_y)\| \leq \|g\| \|\bar{x}_y\| \leq c \|g\| \|y\|$$

por consiguiente $f_0 : T_\lambda(X) \rightarrow K$ es una función lineal acotada.

Por el Teorema de Hahn-Banach, el funcional f_0 tiene una extensión f sobre todo X , el cual es un funcional lineal acotado, o sea $f \in X'$.

De la definición de f_0 tenemos que

$$f(Tx - \lambda x) = f(T_\lambda x) = f_0(T_\lambda x) = g(x)$$

para todo $x \in X$, por lo tanto

$$g(x) = f(Tx - \lambda x) = f(Tx) - \lambda f(x) = (T^* f)(x) - \lambda f(x)$$

o sea

$$(T^* f)(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

para todo $x \in X$. Esto implica que f es una solución de la ecuación (3)

$$T^* f = \lambda f = g.$$

En el Teorema 3.3 presentamos la resolución de la ecuación (1) en términos de la (4) y en el Teorema 3.6 presentamos la

resolución de la ecuación (3) en términos de la (2). Finalizaremos esta sección presentando una relación entre las ecuaciones (1) y (2) y las ecuaciones (3) y (4).

Teorema 3.7: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces la ecuación (1) tiene una solución x para cada $y \in X$ si y sólo si la ecuación homogénea (2) tiene sólo la solución trivial $x = 0$. En este caso la solución de la ecuación (1) es única y T_λ tiene una inversa acotada; o sea T_λ^{-1} es un operador lineal acotado.

Demostración:

Supongamos que la ecuación (1) tiene solución para todo $y \in X$, y supongamos que existe un $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$ tal que

$$Tx_1 - \lambda x_1 = T_\lambda x_1 = 0.$$

Por hipótesis la ecuación (1)

$$T_\lambda x = Tx - \lambda x = x_1$$

tiene una solución $x = x_2$. De igual manera la ecuación $T_\lambda x = x_2$ tiene una solución $x = x_3$. Procediendo de esta manera podemos construir una sucesión (x_n) tal que

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = \dots = T_\lambda^{n-1} x_n$$

para todo $n \geq 2$. Por lo tanto

$$0 = T_\lambda x_1 = T_\lambda^2 x_2 = T_\lambda^3 x_3 = \dots = T_\lambda^n x_n.$$

De lo anterior se tiene que $x_n \in N(T_\lambda^n)$ pero $x_n \notin N(T_\lambda^{n-1})$.

Pero como $N(T_\lambda^{n-1}) \subset N(T_\lambda^n)$, se tiene que $N(T_\lambda^{n-1})$ es un subespacio propio de $N(T_\lambda^n)$ para todo $n \geq 2$. Pero esto contradice el Teorema 2.1. Así pues la ecuación (2) tiene solamente la solución trivial $x = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $x = 0$ es la única solución de la ecuación (2). Luego por el Teorema 3.6 la ecuación (3) tiene solución para todo $g \in X'$.

Como, por el Teorema 2.7, T^x es un operador compacto y la ecuación

$$T^x f - \lambda f = g$$

tiene solución para todo $g \in X'$, por lo probado anteriormente se tiene que la ecuación (4)

$$T^x f - \lambda f = 0$$

tiene sólo la solución trivial $f = 0$. Luego por el Teorema 3.3 la ecuación (1) tiene solución para todo $y \in X$.

Si x_1, x_2 son dos soluciones de (1), entonces $x_1 - x_2$ es una solución de (2). Esto implica que $x_1 - x_2 = 0$, o sea $x_1 = x_2$. Así pues, en este caso la ecuación (1) tiene una única solución para cada $y \in X$.

De lo anterior se tiene que T_λ^{-1} existe y es lineal.

Obviamente, la única solución x de la ecuación

$$Tx - \lambda x = y$$

es la solución de mínima norma. Luego por el Teorema 3.5, existe un $c > 0$ tal que

$$\|T_\lambda^{-1} y\| = \|x\| \leq c \|y\|$$

para todo $y \in X$. Esto implica que T_λ^{-1} es un operador lineal acotado.

Corolario 3.1: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces la ecuación (3) tiene solución para cada $g \in X'$ si y sólo si la ecuación (4) tiene solamente la solución trivial $f = 0$. En este caso la solución de la ecuación (3) es única.

Demostración:

Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 3.7 y del hecho de que T^* es un operador compacto.

3.2. La Alternativa de Fredholm

En esta sección presentaremos la alternativa de Fredholm, la cual nos permite mostrar la existencia de solución de ecuaciones no homogéneas a través de la existencia de soluciones de la ecuación homogénea asociada. En particular probaremos que las ecuaciones del tipo $T_\lambda x = Tx - \lambda x = y$, donde T es un operador compacto, satisfacen la alternativa de Fredholm.

Definición 3.1: Sea X un espacio normado y $L: X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. L satisface la **alternativa de Fredholm** si se satisface una de las siguientes condiciones:

(1) Las ecuaciones no homogéneas

$$Lx = y, \quad L^* f = g$$

tienen solución única x y f , respectivamente, para todo $y \in X$ y $g \in X'$

Las correspondientes ecuaciones homogéneas

$$Lx = 0, \quad L^* f = 0$$

tienen sólo las soluciones triviales $x = 0$ y $f = 0$, respectivamente.

(2) Las ecuaciones homogéneas

$$Lx = 0, \quad L^* f = 0$$

tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{y} \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

respectivamente. Las ecuaciones no homogéneas

$$Lx = y \quad , \quad L^x f = g$$

tienen soluciones si y sólo si, y y g son tales que

$$f_i(y) = 0 \quad , \quad g(x_i) = 0$$

(para todo $i = 1, 2, \dots, n$), respectivamente.

Antes de probar la alternativa de Fredholm para operadores compactos T , estableceremos la relación entre las dimensiones de $N(T)$ y $N(T^x)$, para esto necesitaremos el siguiente Lema conocido con el nombre de **Sistema Biortogonal**, el cual es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach.

Lema 3.1: Sea X un espacio normado. Si $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de X' , entonces existen $z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ tales que

$$f_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

De igual manera, si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de X , entonces existen $g_1, g_2, \dots, g_n \in X'$ tales que

$$g_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

En lo que sigue, $T : X \rightarrow X$ es un operador compacto y

$$T_\lambda^\times = (T - \lambda I)^\times = T^\times - \lambda I.$$

Además consideraremos las ecuaciones

- (1) $Tx - \lambda x = y$
- (2) $Tx - \lambda x = 0$
- (3) $T^\times f - \lambda f = g$
- (4) $T^\times f - \lambda f = 0$

Teorema 3.8: Sea X un espacio de Banach, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces las ecuaciones (2) y (4) tiene el mismo número de soluciones linealmente independientes; o sea

$$\dim(N(T_\lambda)) = \dim(N(T_\lambda^\times)) = n < \infty$$

Demostración:

Como T y T^* son operadores compactos, entonces por el Teorema 1.11, $\dim(N(T_\lambda)) < \infty$ y $\dim(N(T_\lambda^*)) < \infty$. Sea $\dim(N(T_\lambda)) = n$ y $\dim(N(T_\lambda^*)) = m$.

Si $n = 0$, entonces (2) sólo tiene la solución trivial $x = 0$. Luego por el Teorema 3.6, la ecuación (3) tiene solución para toda $g \in X'$. Luego por el Corolario 3.1 la ecuación (4) tiene sólo la solución trivial $f = 0$, lo que implica que $m = 0$. De igual manera, si $m = 0$, entonces por los Teoremas 3.3 y 3.7 se tiene que $n = 0$.

Supongamos que $m > 0$ y $n > 0$. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base para $N(T_\lambda)$. Por el Lema 3.1 existen $g_1, g_2, \dots, g_n \in X'$ tal que

$$g_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Sea ahora $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ una base para $N(T_\lambda^*)$. De igual manera, por el Lema 3.1 existen $z_1, z_2, \dots, z_m \in X$ tales que

$$f_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Supongamos que $n < m$. Definamos la función

$$S: X \rightarrow X$$

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^n g_i(x)z_i$$

Como el operador $g_i(x)z_i$ es de rango finito, por el Teorema 1.4, el operador es compacto. Por lo tanto, como la suma de operadores compactos es compacto, S es un operador compacto.

Supongamos que $x_0 \in N(S_\lambda)$; o sea,

$$S_\lambda x_0 = Sx_0 - \lambda x_0 = 0$$

entonces

$$f_j(S_\lambda x_0) = f_j(0) = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

Luego para todo $j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &= f_j(S_\lambda x_0) = f_j(Sx_0 - \lambda x_0) \\ &= f_j(Tx_0 + \sum_{i=1}^n g_i(x_0)z_i - \lambda x_0) \\ &= f_j(T_\lambda x_0 + \sum_{i=1}^n g_i(x_0)z_i) \\ &= f_j(T_\lambda x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x_0)f_j(z_i) \\ &= (T_\lambda^* f_j)(x_0) + g_j(x_0) \\ &= g_j(x_0) \end{aligned}$$

ya que $f_j \in N(T_\lambda^x)$. Por lo tanto

$$g_j(x_0) = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

Esto implica que

$$Sx_0 = Tx_0$$

de donde

$$T_\lambda x_0 = Tx_0 - \lambda x_0 = Sx_0 - \lambda x_0 = S_\lambda x_0 = 0$$

por consiguiente $x_0 \in N(T_\lambda)$. Como $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base para, $N(T_\lambda)$ podemos escribir

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

aplicando g_j para $j = 1, 2, \dots, n$ obtenemos

$$0 = g_j(x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_j(x_i) = \alpha_j$$

lo que implica que $x_0 = 0$. Hemos probado así que

$$N(S_\lambda) = \{0\}$$

luego por el Teorema 3.1 la ecuación

$$S_\lambda x = Sx - \lambda x = y$$

tiene solución para todo $y \in X$. Tomemos $y = z_{n+1}$ y sea $x = v$ tal que

$$S_\lambda v = z_{n+1}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}(S_\lambda v) \\ &= f_{n+1}(Sv - \lambda v) \\ &= f_{n+1}\left(Tv + \sum_{i=1}^n g_i(v)z_i - \lambda v\right) \\ &= f_{n+1}\left(T_\lambda v + \sum_{i=1}^n g_i(v)z_i\right) \\ &= f_{n+1}(T_\lambda v) + \sum_{i=1}^n g_i(v)f_{n+1}(z_i) \\ &= f_{n+1}(T_\lambda v) \\ &= (T_\lambda^\times f_{n+1})(v) \end{aligned}$$

Como $n < m$, $n+1 \leq m$, además $f_{n+1} \in N(T_\lambda^\times)$. Esto implica que

$(T_\lambda^\times f_{n+1})(v) = 0$, lo que es una contradicción. Así pues $m \leq n$.

En forma análoga se obtiene una contradicción, si se supone que $m < n$. En este caso se define la función

$$\hat{S} : X' \rightarrow X'$$

$$\hat{S}f = T^* f + \sum_{i=1}^m f(z_i)g_i$$

y se procede de manera similar. Así pues $m = n$ y

$$\dim(N(T_\lambda)) = \dim(N(T_\lambda^*))$$

Estamos preparados para demostrar la alternativa de Fredholm para operadores compactos.

Teorema 3.9: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces el operador $T_\lambda = T - \lambda I$ satisface la alternativa de Fredholm.

Demostración:

Por el Teorema 3.7 y el Corolario 3.1 se tiene que las ecuaciones

$$T_\lambda x = Tx - \lambda x = y \quad , \quad T^* f - \lambda f = g$$

tienen soluciones únicas para todo $y \in X$, $g \in X'$,
respectivamente, si y sólo si las ecuaciones

$$T_\lambda x = Tx - \lambda x = 0 \quad , \quad T^* f - \lambda f = 0$$

tienen sólo la solución trivial $x = 0$ y $f = 0$, respectivamente.

Por el Teorema 3.8 las ecuaciones

$$Tx - \lambda x = 0 \quad , \quad T^* f - \lambda f = 0$$

tienen el mismo número de soluciones linealmente
independientes. Además si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base para $N(T_\lambda)$ y
 $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una base para $N(T_\lambda^*)$, entonces por los Teoremas
3.3 y 3.6 se tiene que las ecuaciones

$$Tx - \lambda x = y \quad , \quad T^* f - \lambda f = g$$

tienen soluciones si y sólo si

$$f_i(y) = 0 \quad , \quad g(x_i) = 0$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente

Finalizamos esta sección aplicando nuestros resultados a la
ecuación integral de Fredholm de segundo tipo

$$x(s) - \mu \int_0^1 k(s,t)x(t)dt = y(s)$$

Note que si $X = \{f : [0,1] \rightarrow R / f \text{ es continua} \}$ y $T : X \rightarrow X$ es el operador definido en el Ejemplo 1.4, entonces T es un operador compacto.

Tomando $\lambda = \frac{1}{\mu}$ y $y(s) = -\frac{1}{\mu} \mathcal{Y}(s)$, la ecuación integral se puede escribir de la forma

$$Tx - \lambda x = y$$

Luego por el Teorema 3.9, la ecuación integral posee una única solución para cada $\mathcal{Y} \in X$ o la ecuación homogénea asociada tiene un número finito de soluciones no triviales linealmente independientes.

3.3. Operadores de Fredholm

En esta sección introduciremos el concepto de índice de un operador lineal, para posteriormente estudiar los operadores de Fredholm. Presentaremos algunos ejemplos de operadores de Fredholm y probaremos algunas propiedades que nos permiten construir operadores de Fredholm. También estableceremos algunas propiedades del conjunto $Fred(X, Y)$ de los operadores de Fredholm y del índice de estos operadores. Finalmente definiremos la noción de congruencia módulo un operadores compactos para demostrar una caracterización de los operadores de Fredholm.

Recordemos que si X es un espacio vectorial y Y es un subespacio de X entonces, por definición, la **codimensión** de Y es la dimensión del espacio cociente X/Y , o sea

$$\text{codim}(Y) := \dim(X/Y)$$

Además, si $X = X_1 \oplus X_2$, entonces $\text{codim}(X_1) = \dim(X_2)$. En este caso escribimos $X_1^\perp := X_2$, así:

$$X = X_1 \oplus X_1^\perp$$

donde X_1^\perp es el complemento algebraico de X_1 .

Si X es un espacio normado y X_1, X_2 son subespacios cerrados de X tales que $X = X_1 \oplus X_2$, entonces diremos que X es una **suma directa topológica** de los subespacios X_1 y X_2 . Note que la suma directa $X = X_1 \oplus X_2$ es una suma directa topológica si y sólo si las proyecciones P_1 sobre X_1 y $P_2 = I - P_1$ sobre X_2 son operadores lineales acotados.

A continuación utilizaremos la noción de codimensión para definir el índice de un operador.

Definición 3.2: Sean X, Y espacios vectoriales y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. El índice de T se denota por $ind(T)$ y se define por:

$$ind(T) := dim(N(T)) - codim(T(X))$$

suponiendo que no se tiene el caso patológico $\infty - \infty$.

El operador T es de índice finito si $dim(N(T)) < \infty$ y $codim(T(X)) < \infty$.

Ejemplo 3.1: Sea X un espacio normado, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \in K, \lambda \neq 0$. Luego por el Corolario 1.6, el Teorema 2.3 y el Teorema 2.4 se tiene que existe un entero no negativo n tal que $dim(N(T_\lambda^n)) < \infty$ y

$$X = N(T_\lambda^n) \oplus T_\lambda^n(X)$$

Por lo tanto, $codim(T_\lambda^n(X)) = dim(N(T_\lambda^n))$ y

$$ind(T_\lambda^n) = dim(N(T_\lambda^n)) - codim(T_\lambda^n(X)) = 0$$

Ejemplo 3.2: Sea X un espacio normado y $I : X \rightarrow X$ el operador identidad, entonces

$$dim(N(I)) = 0 \text{ y } codim(I(X)) = codim(X) = 0$$

por lo tanto

$$ind(I) = 0$$

Ejemplo 3.3: Sea X un espacio con producto interno de dimensión finita n y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal. Por el teorema de las dimensiones tenemos que

$$n = \dim(N(T)) + \dim(T(X))$$

Además se tiene que

$$X = T(X) \oplus T(X)^\perp$$

donde $T(X)^\perp = \{y \in X : \langle Tx, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in X\}$.

Consideremos el operador adjunto de Hilbert T^* de T . No es difícil verificar que

$$N(T) = T^*(X)^\perp$$

por lo tanto

$$X = T^*(X) \oplus T^*(X)^\perp = T^*(X) \oplus N(T)$$

Ahora bien, como X es de dimensión finita, X es un espacio de Hilbert, por consiguiente $T^{**} = T$ y

$$X = N(T^*) \oplus T(X)$$

así

$$n = \dim(N(T^*)) + \dim(T(X)) = \dim(N(T)) + \dim(T(X))$$

de donde

$$\dim(N(T)) = \dim(N(T^*))$$

y

$$\text{codim}(T(X)) = \text{dim}(N(T^*)) = \text{dim}(N(T))$$

De lo anterior se tiene que

$$\text{ind}(T) = \text{dim}(N(T)) - \text{codim}(T(X)) = 0.$$

Sean X, Y espacios de Banach sobre el cuerpo K y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. Supongamos que $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y y

$$X = N(T) \oplus N(T)^\perp$$

es una suma directa topológica de X (aquí $N(T)^\perp$ denota un subespacio cerrado de X que es un complemento algebraico de $N(T)$).

Note que la restricción

$$T : N(T)^\perp \rightarrow T(X)$$

es un operador lineal acotado biyectivo, ya que si $Tx = 0$ y $x \in N(T)^\perp$, entonces $x \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$. Luego por el Teorema de la Función Abierta se tiene que $T : N(T)^\perp \rightarrow T(X)$ es un isomorfismo. Así pues,

$$\text{dim}(T(X)) = \text{dim}(N(T)^\perp)$$

Por otro lado, como $T(X)$ es cerrado en Y , por el Teorema del Rango Cerrado de Banach se tiene que $T^*(Y^*)$ es cerrado en X^* y $T(X) = N(T^*)^\perp$ donde $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ es el operador adjunto de T y

$$N(T^*)^\perp := \{y \in Y : f(y) = 0 \text{ para todo } f \in N(T^*)\}$$

Luego

$$\text{codim}(T(X)) = \text{codim}(N(T^*)^\perp) = \dim(N(T^*))$$

y por lo tanto

$$\text{ind}(T) = \dim(N(T)) - \dim(N(T^*))$$

Definición 3.3: Sean X, Y espacios normado sobre K y

$T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de

Fredholm si $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y y

$\dim(N(T)) < \infty$, $\text{codim}(T(X)) < \infty$; es decir, si $T(X)$ es cerrado y $\text{ind}(T) < \infty$.

Teorema 3.10: Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado tal que

$$\dim(N(T)) < \infty \text{ y } \text{codim}(T(X)) < \infty$$

Entonces T es un operador de Fredholm; o sea, $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y .

Demostración:

Como $\dim(N(T)) < \infty$, $N(T)$ es un subespacio cerrado de X , además

$$X = N(T) \oplus N(T)^\perp$$

y

$$Y = T(X) \oplus T(X)^\perp$$

donde

$$\dim(T(X)^\perp) = \text{codim}(T(X)) < \infty$$

lo que implica que $T(X)^\perp$ es un subespacio cerrado de Y .

Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una base para $N(T)$. Por el Lema 3.1, existen $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ tal que

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Definamos el operador

$$P_1 : X \rightarrow N(T)$$

$$P_1 x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i$$

Es claro que P_1 es un operador lineal acotado, $P_1 x_j = x_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ y $P_1^2 = P_1 \circ P_1 = P_1$. O sea, P_1 es un operador proyección. Por lo tanto, la suma directa

$$X = N(T) \oplus N(T)^\perp$$

es una suma directa topológica y $N(T)^\perp$ es un subespacio cerrado de X .

Note que el espacio producto $N(T)^\perp \times T(X)^\perp$ es un espacio de Banach, ya que $N(T)^\perp$ es cerrado en X , $T(X)^\perp$ es cerrado en Y y $X \times Y$ es un espacio de Banach.

Definamos la función

$$S : N(T)^\perp \times T(X)^\perp \rightarrow Y$$

$$S(x_1, x_2) = Tx_1 + x_2$$

Es claro que S es un operador lineal acotado, ya que T es un operador lineal acotado.

Sea $y \in Y$, entonces existen $x \in X$ y $x_2 \in T(X)^\perp$ tal que

$$y = Tx + x_2$$

además existen $a \in N(T)$ y $x_1 \in N(T)^\perp$ tal que

$$x = a + x_1$$

Luego $(x_1, x_2) \in N(T)^\perp \times T(X)^\perp$ y

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= Tx_1 + x_2 \\ &= T(x - a) + x_2 \\ &= T(x) + x_2 \\ &= y \end{aligned}$$

lo que implica que S es suryectiva,

Por otro lado, si $S(x_1, x_2) = 0$, entonces $Tx_1 + x_2 = 0$ o sea $x_2 = -Tx_1$. Esto implica que

$$x_2 \in T(X) \cap T(X)^\perp = \{0\}$$

es decir, $x_2 = 0$. Así $Tx_1 = 0$, lo que implica que

$$x_1 \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$$

por consiguiente $x_1 = 0$.

De lo anterior se tiene que $(x_1, x_2) = (0, 0)$ y S es inyectiva.

Hemos probado así que S es un operador lineal acotado biyectivo. Luego por el Teorema de la Función Abierta se tiene que S es un isomorfismo.

Finalmente, como $S : N(T)^\perp \times T(X)^\perp \rightarrow Y$ es un isomorfismo, $N(T)^\perp \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $N(T)^\perp \times T(X)^\perp$ y $S(N(T)^\perp \times \{0\}) = T(X)$, se tiene que $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y .

Ejemplo 3.4: Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Entonces $T(X) = Y$ es cerrado en Y y

$$\dim(N(T)) = 0, \quad \text{codim}(T(X)) = \text{codim}(Y) = 0$$

por lo tanto T es un operador de Fredholm y

$$\text{ind}(T) = 0$$

Ejemplo 3.5: Sean X, Y espacios normados, $T : X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm y $\lambda \in K, \lambda \neq 0$. Entonces $(\lambda T)(X) = T(X)$ y

$$\dim(N(\lambda T)) = \dim(N(T)), \quad \text{codim}((\lambda T)(X)) = \text{codim}(T(X))$$

por lo tanto λT es un operador de Fredholm y $\text{ind}(\lambda T) = \text{ind}(T)$.

Ejemplo 3.6: Sea $T : R^n \rightarrow R^m$ un operador lineal. Luego T es un operador lineal acotado y

$$\dim(N(T)) < \infty, \quad \text{codim}(T(R^n)) < \infty$$

Por lo tanto T es un operador de Fredholm. Además

$$\dim(N(T)) + \dim(T(R^n)) = n$$

por lo tanto

$$\text{codim}(T(R^n)) = m - [n - \dim(N(T))]$$

y

$$\begin{aligned} \text{ind}(T) &= \dim(N(T)) - \text{codim}(T(R^n)) \\ &= \dim(N(T)) - [m - [n - \dim(N(T))]] \\ &= n - m \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7: Consideremos el espacio de Banach

$$l^2 = \left\{ \{\alpha_n\} : \sum |\alpha_n|^2 < \infty \right\}$$

con la norma

$$\|\{\alpha_n\}\|_2 = \sqrt{\sum |\alpha_n|^2}$$

y los operadores lineal acotados T_{iz} y T_{de} definidos en el Ejemplo 1.3.

Note que

$$N(T_{\text{iz}}) = \left\{ \{\alpha_n\} \in l^2 : \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0 \right\}$$

Luego $\dim(N(T_{\text{iz}})) = 1$

Por otro lado, como T_{iz} es suryectiva, se tiene que

$$\dim(T_{\text{iz}}(X)) = \dim(l^2)$$

por lo tanto

$$\text{codim}(T_{\text{iz}}(X)) = \text{codim}(l^2) = 0$$

Así pues T es un operador de Fredholm y

$$\text{ind}(T_{\text{iz}}) = \dim(N(T_{\text{iz}})) - \text{codim}(T_{\text{iz}}(X)) = 1$$

De igual forma se tiene que

$$N(T_{de}) = \{0\} \quad \text{y} \quad \dim(N(T_{de})) = 0$$

Además $\text{codim}(T_{de}(l^2)) = 1$ Por lo tanto T_{de} es un operador de Fredholm y

$$\text{ind}(T_{de}) = -1$$

Teorema 3.11: Sean X, Y espacios de Banach, $T : X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm, $\text{ind}(T) = 0$ y $N(T) = \{0\}$. Entonces la ecuación $Tx = y$ tiene exactamente una solución para cada $y \in Y$ y $T^{-1} : Y \rightarrow X$ es un operador lineal acotado; o sea, T es un isomorfismo.

Demostración:

Como $N(T) = \{0\}$, T es un operador inyectivo. Por otro lado, como

$$\text{ind}(T) = \dim(N(T)) - \text{codim}(T(X)) = 0$$

y $\dim(N(T)) = 0$, se tiene que $\text{codim}(T(X)) = 0$. Por lo tanto $T(X) = Y$. Así pues T es un operador lineal acotado biyectivo.

Por el Teorema de la Función Abierta se tiene que T es un isomorfismo, por lo tanto la ecuación $Tx = y$ tiene exactamente una solución para cada $y \in Y$ y $T^{-1} : Y \rightarrow X$ es un operador lineal acotado.

Teorema 3.12: Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm. Entonces para cada $y \in Y$ la ecuación

$$Tx = y$$

posee solución si y sólo si $f(y) = 0$ para todo $f \in N(T^*)$

Demostración:

Por hipótesis $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y . Luego, por el Teorema del Rango Cerrado, $T(X) = N(T^*)^\perp$, donde

$$N(T^*)^\perp = \{y \in Y : f(y) = 0 \text{ para todo } f \in N(T^*)\}.$$

Sea $y \in Y$, entonces la ecuación $Tx = y$ posee solución si y sólo si $y \in T(X) = N(T^*)^\perp$; es decir, si y sólo si $f(y) = 0$ para todo $f \in N(T^*)$.

Observación: Si X, Y son espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ es un operador de Fredholm, entonces $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y . Luego, por el Teorema del Rango Cerrado, se tiene que $T^*(Y^*)$ es un subespacio cerrado de X^* y

$$\dim(N(T^*)) = \text{codim}(T(X)), \quad \text{codim}(T^*(Y^*)) = \dim(N(T))$$

por lo tanto

$$\dim(N(T^*)) < \infty \quad \text{y} \quad \text{codim}(T^*(Y^*)) < \infty$$

Así pues, el operador adjunto $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ es también un operador de Fredholm y

$$\text{ind}(T^*) = -\text{ind}(T)$$

El siguiente teorema nos permite construir operadores de Fredholm a partir de operadores compactos.

Teorema 3.13: Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces $L := I - T$ es un operador de Fredholm.

Demostración:

Por el Teorema 1.11 se tiene que $\dim(N(L)) < \infty$.

Probemos ahora que $\text{codim}(L(X)) < \infty$. Supongamos lo contrario, o sea que

$$\text{codim}(L(X)) = \dim(X / L(X)) = \infty$$

Luego podemos encontrar una sucesión de subespacios cerrados

$$L(X) = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n \subset \dots$$

tal que Y_n es cerrado en Y_{n+1} y $\dim(Y_{n+1}/Y_n) = 1$ [esto se obtiene agregando inductivamente una dimensión a Y_n para obtener Y_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$].

Por el Lema de Riesz aplicado a $Y_{n-1} \subset Y_n$, se tiene que existe un $x_n \in Y_n$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{dist}(x_n, Y_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Luego para $k < n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx_k\| &= \|(x_n - (x_n - Tx_n) - x_k + (x_k - Tx_k))\| \\ &= \|x_n - Lx_n - x_k + Lx_k\| \\ &= \|x_n - (Lx_n + x_k - Lx_k)\| \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ya que $Lx_n + x_k - Lx_k \in Y_{n-1}$. Esto prueba que la sucesión $\{Tx_n\}$ no posee subsucesión convergente, contradiciendo el hecho de que T es compacto. Así pues $\text{codim}(L(X)) < \infty$, y por el Teorema 3.10 L es un operador de Fredholm.

Corolario 3.2: Sea X un espacio de Banach, $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces $T_\lambda = T - \lambda I$ es un operador de Fredholm.

Demostración:

$$T_\lambda = T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$$

donde $\frac{1}{\lambda}T$ es un operador compacto. Luego, por el Teorema 3.13, $I - \frac{1}{\lambda}T$ es un operador de Fredholm. Por lo tanto, por el Ejemplo 3.5, $T_\lambda = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$ es un operador de Fredholm.

En lo que sigue $L(X, Y)$ denota el espacio normado de los operadores lineales acotados de X en Y y $Fred(X, Y)$ el conjunto de los operadores de Fredholm de X en Y .

Teorema 3.14: Sean X, Y espacios de Banach. Entonces $Fred(X, Y)$ es un subconjunto abierto de $L(X, Y)$ y la función

$$\begin{aligned} i: Fred(X, Y) &\rightarrow \mathbb{R} \\ i(T) &= ind(T) \end{aligned}$$

es continua en $Fred(X, Y)$, y es constante en las componentes conexas de $Fred(X, Y)$.

Demostración:

Sea $T: X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm. Deseamos probar que si $L \in L(X, Y)$ está próximo a T (según la norma de $L(X, Y)$), entonces L es un operador de Fredholm.

Como $\dim(N(T)) < \infty$, $N(T)$ tiene un complemento cerrado en X (ver la demostración del Teorema 3.10), luego existe un subespacio cerrado G de X tal que

$$X = N(T) \oplus G$$

Note que la función $T : G \rightarrow T(G) = T(X)$ es un operador lineal acotado biyectivo, luego por el Teorema de la Función Abierta T es un isomorfismo. Además, como $\text{codim}(T(G)) < \infty$ podemos escribir

$$Y = T(G) \oplus H$$

donde H es un subespacio de dimensión finita de Y .

Consideremos la función

$$\begin{aligned} F : G \times H &\rightarrow T(G) \oplus H = Y \\ F(x, y) &= Tx + y \end{aligned}$$

Como $T : G \rightarrow T(G)$ es un isomorfismo, F es un isomorfismo.

Recordemos que el conjunto de los isomorfismos de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F es abierto en $L(E, F)$. Por lo tanto, si L está próximo a T , entonces el operador

$$\begin{aligned} F' : G \times H &\rightarrow L(G) + H = Y \\ F'(x, y) &= Lx + y \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Sea $x \in G \cap N(L)$, entonces

$$F'(x,0) = Lx = 0$$

lo que implica que $x = 0$ por lo tanto $G \cap N(L) = \{0\}$.

Esto implica que

$$G \oplus N(L) \subset G \oplus N(T) = X$$

y

$$\dim(N(L)) \leq \text{codim}(G) = \dim(N(T)) < \infty$$

o sea, $N(L)$ es un subespacio de dimensión finita de X .

Por otro lado, si $z \in L(G) \cap H$, entonces existe un $x \in G$ tal que $Lx = z$. Por lo tanto

$$F'(x,-z) = Lx - z = z - z = 0.$$

Luego como F' es un isomorfismo, $(x,-z) = (0,0)$; o sea, $z = 0$.

Así pues

$$Y = L(G) \oplus H$$

Esto implica que

$$\text{codim}(L(X)) \leq \text{codim}(L(G)) = \dim(H) < \infty$$

Así pues como X, Y son espacios de Banach, por el Teorema 3.10, L es un operador de Fredholm. Esto implica que $\text{Fred}(X, Y)$ es un subconjunto abierto de $L(X, Y)$.

Probemos ahora que la función i es continua. En efecto, como $G \cap N(L) = \{0\}$, podemos considerar la suma directa $G \oplus N(L)$. Como

$$\text{codim}(G) = \dim(N(T)) < \infty$$

existe un subespacio de dimensión finita M de X tal que

$$X = G \oplus N(L) \oplus M$$

Luego, por el Teorema de la Función Abierta, L induce un isomorfismo

$$L : G \oplus M \rightarrow L(G \oplus M) = L(G) \oplus L(M)$$

y

$$\dim(M) = \dim(L(M))$$

Además como

$$L(G) \oplus H = Y$$

y

$$L(G) \oplus L(M) = L(X)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \text{codim}(L(X)) &= \dim(H) - \dim(L(M)) \\ &= \dim(H) - \dim(M) \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned}
ind(L) &= dim(N(L)) - codim(L(X)) \\
&= dim(N(L)) - [dim(H) - dim(M)] \\
&= dim(N(L)) + dim(M) - dim(H) \\
&= dim(N(L) \oplus M) - dim(H) \\
&= codim(G) - dim(H) \\
&= dim(N(T)) - codim(T(G)) \\
&= dim(N(T)) - codim(T(X)) \\
&= ind(T)
\end{aligned}$$

Hemos probado así que si L está próximo a T , entonces $ind(L) = ind(T)$. Esto implica que la función i es continua en $Fred(X, Y)$, y es constante en las componentes conexas de $Fred(X, Y)$.

Corolario 3.3: Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Si el operador $I - T$ es inyectivo, entonces $I - T$ es un isomorfismo.

Demostración:

Como el operador $I - T$ es inyectivo, $N(I - T) = \{0\}$ y $dim(N(I - T)) = 0$. Por otro lado, para todo $t \in [0, 1]$, el operador tT es compacto, además la función

$$\begin{aligned}
[0, 1] &\rightarrow Fred(X, X) \\
t &\rightarrow I - tT
\end{aligned}$$

es continua. Luego por el Teorema 3.14, la función

$$F : [0,1] \rightarrow Z$$

$$t \rightarrow \text{ind}(I - tT)$$

es continua. Por lo tanto, como $[0,1]$ es conexo, F es constante, lo que implica que $F(0) = F(1)$. Por lo tanto

$$0 = \text{ind}(I) = \text{ind}(I - T)$$

Así pues, $I - T$ es un operador de Fredholm con $\text{ind}(I - T) = 0$ y $N(I - T) = \{0\}$. Luego por el Teorema 3.11, se tiene que $I - T$ es un isomorfismo.

Con el fin de presentar una caracterización de los operadores de Fredholm, introduciremos la noción de congruencia módulo un operador compacto.

Definición 3.4: Sean X, Y espacios normados y $T, L \in L(X, Y)$. Diremos que T es **congruente con** L módulo un operador compacto si

$$T - L \in K(X, Y)$$

En este caso escribimos

$$T \equiv L \pmod{K(X, Y)}.$$

Observación: Es un asunto de rutina verificar que esta congruencia es una relación de equivalencia y que si

$T \equiv L \text{ mod } K(X, Y)$ y $T_1 \equiv L_1 \text{ mod } K(Y, Z)$, entonces
 $T_1 T \equiv L_1 L \text{ mod } K(X, Z)$.

Definición 3.5: Sean X, Y espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. Diremos que T es invertible módulo un operador compacto si existe un operador lineal acotado $T_1: Y \rightarrow X$ tal que

$$TT_1 \equiv I_Y \text{ mod } K(Y, Y) \quad \text{y} \quad T_1 T \equiv I_X \text{ mod } K(X, X)$$

En este caso decimos que T_1 es una inversa de T módulo un operador compacto.

Observación: Si T_1 y T_2 son inversas de T módulo un operador compacto, entonces

$$TT_1 \equiv I_Y \text{ mod } K(Y, Y) \quad \text{y} \quad T_2 T \equiv I_X \text{ mod } K(X, X)$$

luego

$$T_2 TT_1 \equiv T_2 I_Y \text{ mod } K(Y, X) \equiv T_2 \text{ mod } K(Y, X)$$

y

$$T_2 TT_1 \equiv I_X T_1 \text{ mod } K(Y, X) \equiv T_1 \text{ mod } K(Y, X)$$

por lo tanto

$$T_2 - T_2 TT_1 \in K(Y, X) \quad \text{y} \quad T_2 TT_1 - T_1 \in K(Y, X)$$

Por consiguiente por el Teorema 1.6 se tiene que

$$(T_2 - T_2TT_1) + (T_2TT_1 - T_1) \in K(Y, X)$$

o sea

$$T_2 - T_1 \in K(Y, X)$$

Así pues $T_1 \equiv T_2 \pmod{K(Y, X)}$.

Hemos probado así que la inversa es única, módulo un operador compacto. Más precisamente, si

$$TT_1 \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad \text{y} \quad T_2T \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

entonces T posee una inversa módulo un operador compacto, además T_1 y T_2 son inversas de T módulo un operador compacto y $T_1 \equiv T_2 \pmod{K(Y, X)}$.

En el siguiente teorema presentamos una caracterización de los operadores de Fredholm usando la congruencia módulo un operador compacto.

Teorema 3.15: Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. T es un operador de Fredholm si y sólo si T es invertible módulo un operador compacto.

Demostración:

Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador de Fredholm, entonces podemos escribir

$$X = N(T) \oplus G \quad \text{y} \quad Y = T(X) \oplus H$$

donde G es un subespacio cerrado de X y H es un subespacio cerrado de Y y $\dim(N(T)) < \infty$, $\dim(H) < \infty$.

Denotemos por P la proyección de $T(X) \oplus H$ sobre $T(X)$ y j la inyección natural de G en X . Recordemos que por el Teorema de la Función Abierta,

$$T : G \rightarrow T(X) = T(G)$$

es un isomorfismo, luego $T^{-1} : T(X) \rightarrow G$ existe como un operador lineal acotado.

Consideremos el operador lineal acotado $S : Y \rightarrow X$ definido por

$$S = jT^{-1}P$$

$$Y = T(X) \oplus H \xrightarrow{P} T(X) \xrightarrow{T^{-1}} G \xrightarrow{j} X$$

Note que

$$TS = TjT^{-1}P = TT^{-1}P = P$$

luego

$$I_Y - TS : Y \rightarrow H$$

es la proyección $T(X) \oplus H$ sobre H .

De igual manera $ST : N(T) \oplus G \rightarrow G$ es la proyección de $N(T) \oplus G$ sobre G por lo tanto $I_X - ST$ es la proyección de $N(T) \oplus G$ sobre $N(T)$.

Como H y $N(T)$ son subespacios de dimensión finita, por el Teorema 1.4 se tiene que

$$I_Y - TS \in K(Y, Y) \quad \text{y} \quad I_X - ST \in K(X, X)$$

por lo tanto

$$TS \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad \text{y} \quad ST \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

Así pues S es una inversa de T módulo un operador compacto.

Recíprocamente supongamos que S es una inversa de T módulo un operador compacto, luego

$$TS \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad \text{y} \quad ST \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

por lo tanto

$$I_Y - TS \in K(Y, Y) \quad \text{y} \quad I_X - ST \in K(X, X)$$

Luego por el Teorema 3.13

$$I_Y - (I_Y - TS) \in \text{Fred}(Y, Y) \quad \text{y} \quad I_X - (I_X - ST) \in \text{Fred}(X, X)$$

o sea

$$TS \in \text{Fred}(Y, Y) \quad \text{y} \quad ST \in \text{Fred}(X, X)$$

Ahora bien, como

$$N(T) \subset N(ST) \quad \text{y} \quad T(X) \supset (TS)(X)$$

se tiene que

$$\dim(N(T)) < \infty \quad \text{y} \quad \text{codim}(T(X)) < \infty$$

Luego como X, Y son espacios de Banach, por el Teorema 3.10,

T es un operador de Fredholm.

Corolario 3.4: Sean X, Y, Z son espacios de Banach y $T \in \text{Fred}(X, Y)$, $L \in \text{Fred}(Y, Z)$. Entonces $LT \in \text{Fred}(X, Z)$.

Demostración:

Como $T \in \text{Fred}(X, Y)$ y $L \in \text{Fred}(Y, Z)$, existen operadores lineales acotados $T_1: Y \rightarrow X$ y $L_1: Z \rightarrow Y$ tales que

$$TT_1 \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad , \quad T_1T \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

$$LL_1 \equiv I_Z \pmod{K(Z, Z)} \quad , \quad L_1L \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)}$$

Luego

$$LTT_1 \equiv LI_Y \pmod{K(Y, Z)}$$

o sea

$$LTT_1 \equiv L \pmod{K(Y, Z)}$$

Por lo tanto

$$LTT_1L_1 \equiv LL_1 \pmod{K(Z, Z)}$$

y

$$(LT)(T_1L_1) \equiv I_Z \pmod{K(Z, Z)}$$

De igual forma se prueba que

$$(T_1L_1)(LT) \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

Así pues T_1L_1 es una inversa de LT módulo un operador compacto. Luego, por el Teorema 3.15, LT es un operador de Fredholm.

Observación: Queremos puntualizar que la suma de operadores de Fredholm no es un operador de Fredholm, ya que si X es un espacio normado de dimensión infinita y $T : X \rightarrow X$ es un operador de Fredholm, entonces $-T$ es un operador de Fredholm. Sin embargo $0 = T + (-T)$ no es un operador de Fredholm, porque

$$\dim(N(T + (-T))) = \dim(N(0)) = \dim(X) = \infty .$$

Pero si a un operador de Fredholm se le suma un operador compacto en un espacio de Banach, entonces la suma es un operador de Fredholm como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 3.5: Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \text{Fred}(X, Y)$, $L \in K(X, Y)$. Entonces $T + L$ es un operador de Fredholm.

Demostración:

Como $T : X \rightarrow Y$ es un operador de Fredholm, por el Teorema 3.15 existe un operador lineal acotado $T_1 : Y \rightarrow X$ tal que

$$TT_1 \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad \text{y} \quad T_1T \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

o sea

$$TT_1 - I_Y \in K(Y, Y) \quad \text{y} \quad T_1T - I_X \in K(X, X)$$

Como $L : X \rightarrow Y$ es un operador compacto, por el Teorema 1.7 se tiene que

$$LT_1 : Y \rightarrow Y \quad \text{y} \quad T_1L : X \rightarrow X$$

son operadores compactos. Por lo tanto, por el Teorema 1.6,

$$TT_1 - I_Y + LT_1 \in K(Y, Y) \quad \text{y} \quad T_1T - I_X + T_1L \in K(X, X)$$

o sea

$$(T + L)T_1 - I_Y \in K(Y, Y) \quad \text{y} \quad T_1(T + L) - I_X \in K(X, X)$$

lo que implica que

$$(T + L)T_1 \equiv I_Y \pmod{K(Y, Y)} \quad \text{y} \quad T_1(T + L) \equiv I_X \pmod{K(X, X)}$$

Así pues T_1 es una inversa de $T + L$ módulo un operador compacto. Luego, por el Teorema 3.15, $T + L$ es un operador de Fredholm.

Corolario 3.6: Sean X, Y espacios de Banach, $T \in \text{Fred}(X, Y)$ y $L \in K(X, Y)$, entonces

$$\text{ind}(T + L) = \text{ind}(T)$$

Demostración:

Como para todo $t \in [0, 1]$, el operador tL es compacto, por el Corolario 3.5 podemos considerar la función

$$\begin{aligned} G : [0, 1] &\rightarrow \text{Fred}(X, Y) \\ G(t) &= T + tL \end{aligned}$$

Note que la función G es una función continua. Luego por el Teorema 3.14, la función

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\rightarrow Z \\ F(t) &= \text{ind}(G(t)) = \text{ind}(T + tL) \end{aligned}$$

es una función continua. Luego F es constante en $[0, 1]$. Por consiguiente $F(0) = F(1)$. Así

$$\text{ind}(T + L) = \text{ind}(T)$$

Finalizamos esta sección concluyendo que $\text{Fred}(X, Y)$ es un subconjunto abierto de $L(X, Y)$; es decir, si $T \in \text{Fred}(X, Y)$ y $L \in L(X, Y)$ con la norma $\|L\|$ del operador L suficientemente pequeña, entonces $T + L \in \text{Fred}(X, Y)$ y

$$\text{ind}(T + L) = \text{ind}(T)$$

Además

$$\text{Fred}(X, Y) + K(X, Y) \subset \text{Fred}(X, Y)$$

y si $T \in \text{Fred}(X, Y)$ y $L \in K(X, Y)$, entonces

$$\text{ind}(T + L) = \text{ind}(T).$$

3.4. Operadores de Fredholm en Espacios de Hilbert

El objetivo de la presente sección es estudiar una clase especial de operadores en espacios de Hilbert y probar una caracterización de estos operadores, la cual se fundamenta en la bien conocida Alternativa de Fredholm para el caso de sistemas de ecuaciones lineales.

Antes de entrar en detalles, recordemos algunos resultados fundamentales de los operadores lineales acotados en espacios de Hilbert.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado. El operador adjunto de Hilbert $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ de T se define por la propiedad

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$, además se tiene que:

$$\overline{T(H_1)}^\perp = T(H_1)^\perp = N(T^*)$$

$$\overline{T(H_1)}^{\perp\perp} = \overline{T(H_1)} = N(T^*)^\perp$$

$$\overline{T^*(H_2)}^\perp = N(T)$$

$$\overline{T^*(H_2)} = N(T)^\perp$$

por lo tanto

$$H_1 = \overline{T^*(H_2)} \oplus N(T)$$

$$H_2 = \overline{T(H_1)} \oplus N(T^*)$$

Teorema 3.16: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado de rango finito. Entonces el operador adjunto de Hilbert $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ es un operador de rango finito y

$$\dim(T(H_1)) = \dim(T^*(H_2))$$

Demostración:

Consideremos una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para $T(H_1)$, entonces

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle Tx, e_i \rangle e_i$$

para todo $x \in H_1$. Luego

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle e_i$$

Además, como para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle e_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle T^* e_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \overline{\langle y, e_i \rangle} \langle x, T^* e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \end{aligned}$$

se tiene que

$$\langle Tx, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle e_i, y \right\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle T^* e_i \right\rangle$$

Por lo tanto

$$T^* y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle T^* e_i$$

para todo $y \in Y$. Esto implica que T^* es un operador lineal acotado de rango finito y

$$\dim(T^*(H_2)) \leq \dim(T(H_1))$$

Finalmente como $T^{**} = T$ y T^* es de rango finito, se tiene que

$$\dim(T(H_1)) = \dim(T^{**}(H_1)) \leq \dim(T^*(H_2))$$

por lo tanto

$$\dim(T(H_1)) = \dim(T^*(H_2))$$

Definición 3.6: Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal acotado. T es un operador fuerte de Fredholm si $\text{ind}(T) = 0$ y $T^*(H_2)$ es cerrado en H_1 .

Observación: Como $\text{ind}(T) = 0$, entonces

$$\dim(N(T)) < \infty, \quad \text{codim}(T(H_1)) < \infty \quad \text{y}$$

$$n := \dim(N(T)) = \text{codim}(T(H_1))$$

Luego, por el Teorema 3.10, $T(H_1)$ es un subespacio cerrado de H_2 y T es un operador de Fredholm. Además

$$H_2 = T(H_1) \oplus N(T^*) \quad \text{y} \quad H_1 = T^*(H_2) \oplus N(T)$$

por lo tanto

$$n := \text{codim}(T(H_1)) = \dim(N(T^*))$$

y

$$n := \dim(N(T)) = \text{codim}(T^*(H_2))$$

lo que implica que

$$\text{ind}(T^*) = \dim(N(T^*)) - \text{codim}(T^*(H_2)) = n - n = 0$$

Ahora bien, como $T^{**} = T$, se tiene que $T^{**}(H_1) = T(H_1)$ es un subespacio cerrado de H_2 .

De lo anterior se tiene que T es un operador de Fredholm y T^* es un operador fuerte de Fredholm.

Ejemplo 3.8: Sea H un espacio de Hilbert y $T: H \rightarrow H$ un isomorfismo, entonces T^* es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Luego $T^*(H) = H$ es cerrado y

$$\dim(N(T)) = \text{codim}(T(H)) = 0$$

Por lo tanto $\text{ind}(T) = 0$ y T es un operador fuerte de Fredholm.

Ejemplo 3.9: Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita y $T: H \rightarrow H$ un operador lineal. Luego por el Ejemplo 3.3, se tiene que $\text{ind}(T) = 0$. Por lo tanto, como $\dim(T^*(H)) < \infty$, se tiene que $T^*(H)$ es cerrado en H y T es un operador fuerte de Fredholm.

Los dos ejemplos anteriores son, de alguna manera, ejemplos triviales de operadores fuertes de Fredholm. En el siguiente

teorema presentaremos un resultado que nos permite construir operadores fuertes de Fredholm.

Teorema 3.17: Sean H un espacio de Hilbert, $L: H \rightarrow H$ un isomorfismo y $F: H \rightarrow H$ un operador lineal acotado de rango finito. Entonces el operador $T := L + F$ es un operador fuerte de Fredholm.

Demostración:

Por el Teorema 1.4, F es un operador compacto, y por el Ejemplo 3.8 L es un operador fuerte de Fredholm. Luego por el Corolario 3.5, $T = L + F$ es un operador de Fredholm. Por lo tanto $T(H)$ es un subespacio cerrado de H y

$$\dim(N(T)) < \infty, \quad \text{codim}(T(H)) < \infty$$

Por otro lado, por el Teorema 3.16, F^* es un operador lineal acotado de rango finito. Además L^* es un isomorfismo y

$$T^* = L^* + F^*$$

Esto implica que T^* es un operador de Fredholm. Así pues $T^*(H)$ es un subespacio cerrado de H y

$$\dim(N(T^*)) < \infty, \quad \text{codim}(T^*(H)) < \infty$$

Consideremos ahora la ecuación

$$Tu = f \quad (1)$$

Note que

$$T = L + F = L + FL^{-1}L = (I + FL^{-1})L$$

Denotemos por $S := FL^{-1}$. Como L es un isomorfismo, la ecuación

$$(I + S)w = w + Sw = f \quad (2)$$

es equivalente a la ecuación (1). Además note que S es un operador lineal acotado de rango finito y

$$\dim(S(H)) = \dim(F(H)) < \infty$$

También tenemos que

$$\dim(N(T)) = \dim(N(I + S))$$

y

$$T(H) = (I + S)(H)$$

Sea $n = \dim(S(H))$ y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $S(H)$. Entonces por la demostración del Teorema 3.16 se tiene que

$$Sx = \sum_{i=1}^n \langle Sx, e_i \rangle e_i \quad \text{y} \quad S^* y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle S^* e_i$$

Luego si $(I + S)u = 0$, entonces $u = -Su$; o sea,

$$u = -\sum_{i=1}^n \langle Su, e_i \rangle e_i = -\sum_{i=1}^n \langle u, S^* e_i \rangle e_i$$

Por lo que $u \in S(H)$. Así, $N(I+S) \subset S(H)$ y $\dim(N(I+S)) \leq n$.

Consideremos ahora la ecuación

$$T^* v = g \quad (3)$$

Note que

$$T^* = L^* + F^* = L^* + L^* L^{-1} F^* = L^* (I + L^{-1} F^*)$$

y

$$S^* = (FL^{-1})^* = (L^{-1})^* F^* = L^{*-1} F^*$$

o sea

$$T^* = L^* (I + S^*)$$

Luego la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$(I + S^*)v = v + S^* v = h \quad (4)$$

donde, por el Teorema 3.16, S^* es un operador lineal acotado de rango finito y

$$n = \dim(S(H)) = \dim(S^*(H))$$

Similar al caso anterior, se tiene que

$$\dim(N(T^*)) = \dim(N(I + S^*))$$

$$T^*(H) = (I + S^*)(H)$$

$$N(I + S^*) \subset S^*(H) \quad \text{y} \quad \dim(N(I + S^*)) \leq n$$

Hemos probado que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación (2); o sea, equivalente a la ecuación

$$w + \sum_{j=1}^n \langle Sw, e_j \rangle e_j = f$$

es decir que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación

$$w + \sum_{j=1}^n \langle w, S^* e_j \rangle e_j = f \quad (5)$$

De igual manera, la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$v + \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle S^* e_j = h \quad (6)$$

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\langle w, S^* e_1 \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^n \langle w, S^* e_j \rangle e_j, S^* e_1 \right\rangle = \langle f, S^* e_1 \rangle$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\langle w, S^* e_n \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^n \langle w, S^* e_j \rangle e_j, S^* e_n \right\rangle = \langle f, S^* e_n \rangle$$

o sea

$$\langle w, S^* e_1 \rangle + \sum_{j=1}^n \langle w, S^* e_j \rangle \langle e_j, S^* e_1 \rangle = \langle f, S^* e_1 \rangle$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad (7)$$

$$\langle w, S^* e_n \rangle + \sum_{j=1}^n \langle w, S^* e_j \rangle \langle e_j, S^* e_n \rangle = \langle f, S^* e_n \rangle$$

Sean

$$c_i = \langle w, S^* e_i \rangle \quad , \quad t_{ij} = \langle e_j, S^* e_i \rangle \quad , \quad f_i = \langle f, S^* e_i \rangle$$

luego el sistema de ecuaciones (7) se puede escribir de la siguiente forma

Entonces

$$\begin{aligned}
 Sw &= Sf - \sum_{j=1}^n c_j Se_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^n \langle Se_j, e_i \rangle e_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_j \langle Se_j, e_i \rangle e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\langle Sf, e_i \rangle e_i - \sum_{j=1}^n c_j \langle Se_j, e_i \rangle e_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\langle f, S^* e_i \rangle - \sum_{j=1}^n c_j \langle e_j, S^* e_i \rangle \right] e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[f_i - \sum_{j=1}^n c_j t_{ij} \right] e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n c_i e_i \\
 &= f - w
 \end{aligned}$$

o sea

$$w + Sw = f$$

lo que implica que w es una solución de la ecuación (2) [o de la ecuación (5)].

Así, la ecuación (2) es equivalente al sistema de ecuaciones (8).

donde

$$B = \begin{pmatrix} t_{11}^* & \dots & t_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1}^* & \dots & t_{nn}^* \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada al sistema(9).

Note que

$$\begin{aligned} \overline{A}^T &= \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \dots & \overline{t_{n1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{t_{1n}} & \dots & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, S^* e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, S^* e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, S^* e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, S^* e_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle S^* e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle S^* e_n, e_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle S^* e_1, e_n \rangle & \dots & \langle S^* e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^* & \dots & t_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1}^* & \dots & t_{nn}^* \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Luego los sistemas de ecuaciones lineales (8) y (9) satisfacen la bien conocida Alternativa de Fredholm para el caso de sistema de ecuaciones lineales.

Así pues, como el sistema de ecuaciones lineales (8) es equivalente a la ecuación (2) y el sistema de ecuaciones lineales (9) es equivalente a la ecuación (4), se tiene que

$$\dim(N(I + S)) = \dim(N(I + S^*))$$

por lo tanto

$$\dim(N(T)) = \dim(N(T^*))$$

y

$$\begin{aligned} \text{ind}(T) &= \dim(N(T)) - \text{codim}(T(X)) \\ &= \dim(N(T)) - \dim(N(T^*)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hemos probado así que T es un operador fuerte de Fredholm.

Finalizamos este trabajo con una caracterización de los operadores fuertes de Fredholm.

Teorema 3.18: Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado. T es un operador fuerte de Fredholm si y sólo si existe un isomorfismo $L : H \rightarrow H$ y un operador lineal acotado de rango finito $F : H \rightarrow H$ tal que $T = L + F$.

Demostración:

Si $T = L + F$, donde L es un isomorfismo y F es un operador lineal acotado de rango finito, entonces por el Teorema 3.17, T es un operador fuerte de Fredholm.

Recíprocamente , supongamos que T es un operador fuerte de Fredholm, luego $T^*(H)$ es un subespacio cerrado de H y

$$0 = \text{ind}(T) = \text{dim}(N(T)) - \text{codim}(T(H)) = \text{dim}(N(T)) - \text{dim}(N(T^*))$$

por lo tanto

$$n := \text{dim}(N(T)) = \text{dim}(N(T^*))$$

y

$$H = T(H) \oplus N(T^*) = T^*(H) \oplus N(T)$$

Sea $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ una base ortonormal para $N(T)$ y $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ una base para $N(T^*)$

Definamos los operadores $L: H \rightarrow H$ y $F: H \rightarrow H$ por

$$Fx := \sum_{i=1}^n \langle x, \phi_i \rangle \phi_i$$

$$Lx = Tx - Fx$$

Claramente F es un operador lineal acotado de rango finito. Así que sólo tenemos que probar que L es un isomorfismo.

Sea $x \in N(L)$, entonces $Lx = 0$. Por lo tanto

$$Tx = Fx = \sum_{i=1}^n \langle x, \phi_i \rangle \phi_i$$

Esto implica que

$$Tx \in N(T^*) \cap T(H) = \{0\}$$

o sea $Tx = 0$ y $x \in N(T)$. por consiguiente $Fx = 0$,

o sea

$$Fx = \sum_{i=1}^n \langle x, \phi_i \rangle \phi_i = 0$$

Como $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que

$$\langle x, \phi_1 \rangle = \langle x, \phi_2 \rangle = \dots = \langle x, \phi_n \rangle = 0$$

Esto implica que $x \in N(T)^\perp$. Como $x \in N(T)$, se tiene que

$$x \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$$

Así pues, $x = 0$ y $N(L) = \{0\}$

Probemos ahora que $L(H) = H$. En efecto, sea $y \in H$.

Como $H = T(H) \oplus N(T^*)$, existen $y_1 \in T(H)$, $y_2 \in N(T^*)$

tales que

$$y = y_1 + y_2 \quad , \quad y_1 \perp y_2$$

Luego existen $u \in H$ y constantes c_1, c_2, \dots, c_n tales que

$$y = Tu + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$$

Como $H = T^*(H) \oplus N(T)$, podemos tomar u tal que $u \in T^*(H) = N(T)^\perp$

Tomemos

$$v := u - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$$

entonces

$$\begin{aligned} Lv &= Tv - Fv \\ &= T\left(u - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i\right) - F\left(u - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i\right) \\ &= Tu - \sum_{i=1}^n c_i T\phi_i - Fu + \sum_{i=1}^n c_i F\phi_i \\ &= Tu - Fu + \sum_{i=1}^n c_i F\phi_i \\ &= Tu - \sum_{i=1}^n \langle u, \phi_i \rangle \phi_i + \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \langle \phi_i, \phi_j \rangle \phi_j \\ &= Tu + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \\ &= y \end{aligned}$$

Por consiguiente, $y \in L(H)$ y $L(H) = H$

Hemos probado así que $L : H \rightarrow H$ es un operador lineal acotado y biyectivo. Luego, por el Teorema de la Función Abierta, se tiene que L es un isomorfismo.

Queremos cerrar esta tesis observando que según la demostración de los últimos dos teoremas, si T es un operador fuerte de Fredholm, entonces T satisface la Alternativa de Fredholm.

BIBLIOGRAFÍA

1. **W. Arveson. A Short Course on Spectral Theory, Springer-Verlag. New York, 2002.**
2. **G. Bachman and L. Narici, Functional Analysis, Academic University Press, Cambridge, 1996.**
3. **S. K. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, New York, 1988.**
4. **M. Berger, Nonlinearity and Functional Analysis, Academic Press, New York, 1977.**
5. **N. Boccara, Functional Analysis, an Introduction for Physicists, Academic Press, New York, 1990.**
6. **B. Bollobas, Linear Analysis an Introductory Course, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.**
7. **J. Conway, A course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985.**
8. **K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985.**
9. **M. F. Fabian, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, Springer-Verlag, New York, 2001.**
10. **R. V. Gamkrelidze (Ed), Analysis II, Springer-Verlag, New York, 1990.**
11. **J. Giles, Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.**
12. **H. G. Heuser, Functional Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1982.**

13. H. Hochstadt, *Integral Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
14. L. Kantorovich and G. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, New York, 1982.
15. L. Kantorovich and G. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Macmillan, New York, 1964.
16. R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations*, Birkhäuser, Cambridge, 1996.
17. R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York, 1989.
18. E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
19. C. S. Kubrusly, *Elements of Operator Theory*, Birkhäuser, Cambridge, 2000.
20. S. Lang, *Analysis II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
21. S. M. Nikol'skii (Ed), *Analysis III*, Springer-Verlag, New York, 1991.
22. D. Portes and D. Stirling, *Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
23. A. G. Ramm, A simple Proof of the Fredholm Alternative and a Characterization of the Fredholm Operators, *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), 855-860.
24. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
25. K. Saxe, *Beginning Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2000.

26. **V. S. Sunder, Functional Analysis, Birkhäuser, Cambridge, 1998.**
27. **M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer-Verlag, New York, 2002.**
28. **E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.**