

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**

**VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**

**PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA**

**APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS GRIEGOS**

**INÉS MARÍA DE HERNÁNDEZ**

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL  
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN  
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**1998**

315575.

*Cbo. del autor*

2 JUL 1999

711

## AGRADECIMIENTO

Mi especial y más sincero agradecimiento al profesor Jorge E. Henández U.; quien además de ser mi asesor, me orientó y apoyó en todo momento para llevar a feliz término este trabajo investigativo que culminó hoy.

A mi esposo e hijos quienes me mostraron en todo momento su apoyo.

A todos los demás profesores, amigos y compañeros de estudio que me expresaron su voz de aliento para continuar, mi más sincero agradecimiento.

## ***TABLA DE CONTENIDOS***

RESUMEN .....	1
SUMMARY .....	1
INTRODUCCIÓN.....	2
1. ORÍGENES HISTÓRICOS DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS.....	7
1.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA.....	8
1.2 LÍNEAS DEL DESARROLLO MATEMÁTICO.....	10
1.3 LOS TRES FAMOSOS PROBLEMAS.....	11
1.4 ¿PORQUÉ LA REGLA Y EL COMPÁS?.....	14
1.5 PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS GRIEGOS.....	18
1.5.1 DUPLICACIÓN DEL CUBO.....	18
1.5.2 TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.....	24
1.5.3 LA CUADRATURA DEL CÍRCULO.....	27
2. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.....	30
2.1 PUNTOS CONSTRUIBLES.....	31
2.2 ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS NÚMEROS CONSTRUIBLES.....	54

2.3	CONSTRUCCIONES CON LA REGLA Y EL COMPÁS. ....	64
3.	APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS GRIEGOS. ....	76
3.1	FUNCIONES CONTRACTIBLES.....	77
3.2	TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO. ....	84
3.2.1	APROXIMACIÓN A LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO.....	88
3.3	DUPLICACIÓN DEL CUBO.....	98
3.3.1	APROXIMACION A LA DUPLICACIÓN DEL CUBO.....	104
	CONCLUSIONES.....	112
	BIBLIOGRAFÍA.....	114

## **RESUMEN**

Nuestra investigación está dirigida al estudio y análisis de la evolución de los tres problemas de la antigüedad griega, los cuales son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Presentamos algunas demostraciones realizadas por grandes matemáticos de la antigüedad que se preocuparon por la solución de estos tres problemas. Posteriormente establecemos la definición formal de punto construible con la regla y el compás. Demostramos las propiedades algebraicas de conjunto  $C$  de los puntos construibles, realizando algunas construcciones interesantes con la regla y el compás. Finalmente, modelamos la trisección del ángulo y la duplicación del cubo como un problema de punto fijo, utilizando una consecuencia del Teorema de Punto Fijo de Banach demostramos que podemos realizar construcciones iteradas con la regla y el compás, las cuales se aproximen tanto como se quiera a la trisección del ángulo y a la duplicación del cubo.

## **SUMMARY**

Our investigation is aimed to the study and analysis of the evolution of the three problems of ancient Greece, which are: the duplication of the cube, the trisection of the angle, and the quadrature of the circle. We present some proofs undertaken by the great mathematicians of antiquity, who were concerned with the solution of these problems. Afterwards, we establish the formal definition of constructible points with a straightedge and compass. We define the algebraic properties of the set of constructible points  $C$ , performing some interesting constructions with a straightedge and compass. Finally, we model the trisection of an angle and the duplication of a cube as a problem of fixed point; using a consequence of the Banach Fixed Point Theorem, we prove that we can iterative constructions with a straightedge and compass, which approximate as much as one would wish the trisection of the angle and the duplication of the cube.

## ***INTRODUCCIÓN***

Los problemas de construcción han sido siempre un tema favorito en geometría; constituyen un factor esencial de estudios matemáticos. Solo con el auxilio de la regla y el compás pueden realizarse una gran variedad de construcciones. La restricción tradicional de utilizar como únicos instrumentos la regla y el compás se remonta a la antigüedad mencionamos aquí a los griegos que no sólo restringieron las matemáticas en gran medida a la geometría, sino que incluso limitaron esta disciplina a las figuras que se podían obtener a partir de la línea recta y el círculo.

La restricción de la geometría euclídea a conceptos que se pudieran construir con regla y compás dejó la tarea a los matemáticos de probar la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo con la regla y el compás.

Se han dado diversas explicaciones acerca de la restricción a la regla y el compás como instrumentos. La línea recta y la circunferencia eran a los ojos de los griegos, las figuras básicas traducidas finalmente en la regla y el compás, y por lo tanto se consideraron preferiblemente las construcciones con estos instrumentos. Según Platón el uso de instrumentos mecánicos hacían intervenir demasiado el mundo de los sentidos en lugar del mundo de las ideas, que él consideraba primario.

Muchos fueron los intentos que se realizaron durante la época para encontrar la solución a los problemas de construcción en el período de los griegos, entre los que podemos mencionar:

El primer intento conocido de resolver uno de los tres famosos problemas se debió al jonio Anaxagoras. Otro de los intentos más famosos fue el de Hippias de Elis siglo V a. C. quien intentando trisecar el ángulo inventó una curva llamada cuadratriz o trisectriz que no es construible con regla y compás.

Otro descubrimiento famoso que se obtuvo del estudio de los problemas de construcción fue el que hizo Hipócrates de Chíos (siglo V a. C.) quien demostró que el problema de la duplicación del cubo puede reducirse a encontrar dos media proporcionales entre la arista y su doble. Arquitas de Tárente, Eudoxo de Cnido y Menecmo por la duplicación del cubo y Dinostrato por la cuadratura del círculo; en el siglo II a. C. tenemos a Nicomedes por la trisección y Diocles por la duplicación; estos inventan instrumentos para tratar de encontrar la solución como podemos mencionar; las cónicas de Nicomedes, cisoide de Diocles, la cuadratriz de Dinostrato. Podemos mencionar a Arquímedes quien en la búsqueda de solución ataca un problema subyacente con la cuadratura. Durante este período no se llegaron a resolver estos problemas debido a la limitación del pensamiento griego que conducen de manera automática a los problemas que dejaron para las generaciones futuras.

Después del período fecundo de la antigua Grecia, los problemas de construcción toman importancia. Podemos mencionar en el siglo X d. C. Abel Jafa, quien suministra ejemplos de construcción con regla y compás.

En 1637 René Descartes demuestra que se pueden construir con regla y compás todas las longitudes que se expresan algebraicamente con la ayuda de raíces cuadradas a partir de longitudes dadas.

En 1668 el matemático escocés James Gregory es el primero en publicar una demostración de la imposibilidad de la cuadratura demostración que fue incorrecta.

En 1837 P. L. Watzel utiliza el lenguaje de ecuaciones algebraicas de Niel Henric Abel y presenta una demostración satisfactoria de la imposibilidad de la duplicación y de la trisección. Este trabajo permitió también situar mejor el problema de la cuadratura del círculo; problema que fue arreglado posteriormente por F. Lidemann (1882) el que fue precedido por otros resultados.

Fueron mas de veintidós siglos en que los matemáticos intentaron infructuosamente resolver estos problemas, finalmente en el siglo XIX se probó que era imposible resolverlo si sólo se recurre a la regla y el compás, pero que es factible hacer estas construcciones basándonos en criterios esencialmente algebraicos.

En este trabajo nosotros no pretendemos presentar demostraciones de la imposibilidad de solución de los problemas de construcción, sino mas bien inspirados en un procedimiento ideado por Arquímedes en el que aplica el método de análisis numérico a problemas geométricos (método de iteración de punto fijo) modelar la duplicación del cubo y la trisección del ángulo lo que nos permitirá aproximarnos tanto como queramos a su solución.

Para el logro del mismo hemos dividido nuestro trabajo en tres capítulos estructurados de la siguiente forma:

El primer capítulo trata de presentar un recuento histórico de los tres grandes problemas de la antigüedad griega presentando algunas de las demostraciones efectuadas por grandes matemáticos de la época en la búsqueda de la solución; además de justificar el uso de la regla y del compás.

En el segundo capítulo damos una definición de lo que se entiende por construcciones con regla y compás. Definiremos los números complejos construibles, rectas construibles, círculos construibles y ángulos construibles, con la regla y el compás. Posteriormente presentamos algunos teoremas interesantes para luego resolver algunos problemas de construcción con la regla y el compás.

Finalmente en el tercer capítulo haciendo uso del Teorema de punto fijo de Banach modelaremos la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, para realizar

construcciones iteradas con regla y compás, las cuales nos aproximan tanto como se quiera a la trisección y a la duplicación del cubo.

Consideramos que este trabajo por ser las construcciones geométricas un factor esencial de estudio matemático y representar un arma potente en las investigaciones geométricas puede ayudar a profesores y alumnos de escuela media a familiarizarse con las construcciones geométricas.

**1. ORÍGENES HISTÓRICOS DE LAS  
CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS.**

En este capítulo realizaremos un recuento histórico de los tres problemas griegos a estudiar; trataremos de dar una explicación del porque el uso de la regla y el compás; además de presentar algunas de las demostraciones efectuadas por grandes matemáticos en busca de la solución de estos tres problemas.

## **1.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA.**

Los tres primeros siglos de la matemática griega comenzaron con los esfuerzos en las demostraciones geométricas por Tales y culminaron con los extraordinarios Elementos de Euclides que constituye un período de extraordinarios logros.

La actividad intelectual de los pueblos prehelénicos pierde intensidad y vigor debido a los numerosos cambios de orden económico y político que tienen lugar al final del segundo milenio a.C., en una atmósfera turbulenta, en la que migraciones son frecuentes y las guerras abundan. Como resultado de estas guerras un número considerable de filósofos griegos como Pitágoras y Xenophares abandonaron sus tierras nativas y se trasladaron a las prósperas colonias griegas al sur de Italia. Se desarrollan las escuelas de filosofía y matemática bajo Pitágoras en Crotona; y en Elea, bajo Xenophares, Zenón y Parménides. Muchos de los dispersos fundadores pitagóricos fueron de Atenas. Matemáticos de todas partes del mundo fueron atraídos a Grecia. Anaxágoras, un eminente miembro de la escuela de Jonia se establece en este lugar. Zenón y Parménides de la Escuela Eleática, fueron a dar clases a Atenas. Hipócrates de las islas Jonias de Chios, visita Atenas y es reputado por antiguos escritores por las publicaciones de los primeros escritos que conectan con la Geometría de allí.

Aunque todo el trabajo matemático importante del siglo IV a.C. fue realizado por los amigos o alumnos de Platón, él hizo la conexión entre la Matemática de los

primeros pitagóricos y la Matemática de los últimos de la Escuela de Alejandría. Platón, nacido en Atenas, estudió filosofía con Sócrates y matemáticas con Teodoro de Cirene en la costa de Africa y es favorecido por su íntima amistad con el eminente Arquitas. Platón influye en la Matemática porque él estaba convencido de que el estudio de la Matemática provee el entrenamiento para la mente.

Para Platón, las únicas construcciones válidas en Geometría son aquellas efectuadas con la ayuda de la regla o del compás, ya que permiten asegurar la simetría de las configuraciones, mientras que la introducción de instrumentos distintos de la regla o el compás no garantiza la simetría de las figuras construidas. La matemática pareció de suma importancia a Platón, por esta razón ocupó un lugar valuable en el curriculum de la academia.

Eudoxo de Cnido, famoso matemático quien estudió bajo ambos Arquitas y Platón, fundó su propia escuela en Cyicus, ciudad del norte de Asia Menor. Menecmo, alumno de Eudoxo adquirió renombre como astrónomo y como geómetra; en asociación con Platón y Eudoxo inventan las secciones cónicas, que fue la contribución más importante. Dinostrato, hermano de Menecmo resolvió el problema de la duplicación del cubo, él utilizó con éxito la "cuadratriz" en la resolución de la cuadratura del círculo.

Theaetetus de Atenas, un hombre de extraño dote natural, a quien probablemente identificamos mucho por su contribución en el material del libro X y XIII de Euclides en lo referente a la construcción de los cinco poliedros regulares, fue otro ateniense alumno de Teodoro. Mencionamos también a Aristóteles quien aunque no es declarado matemático, fue el que sistematizó la lógica deductiva, y además en algunos de sus trabajos muestra un extraño dominio por el método matemático.

A pesar de que los griegos tomaron muchos elementos prestados de las civilizaciones vecinas, ellos edificaron una civilización y cultura original, de la más impresionante de toda la historia de la humanidad, la que más ha influido en el desarrollo de la cultura occidental moderna, y que fue decisiva en la fundamentación de la Matemática tal como la entendemos hoy. Podemos ver que una de las grandes contribuciones griegas al concepto mismo de las matemáticas fue el reconocimiento consciente y el énfasis puesto en el hecho de que los objetos matemáticos, números y figuras geométricas, son abstracciones, ideas producidas por la mente y claramente distintas de los objetos o imágenes físicas.

## **1.2 LÍNEAS DEL DESARROLLO MATEMÁTICO.**

Se pueden observar tres importantes y distintas líneas de desarrollo durante los primeros 300 años de las matemáticas griegas. Primero tenemos el desarrollo del material que a lo último fue organizado en Los Elementos empezados por los pitagóricos y luego añadidos a los de Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Theaetetus y otros. Segundo, hay un desarrollo de las nociones conectadas con los infinitesimales y con límite y procesos sumativos los cuales no alcanzaron una clarificación final sino hasta después de la invención del cálculo en la época moderna. Las paradojas de Zenón, el método de exhaución de Antipon y Eudoxo y la teoría atomística asociada con el nombre de Demócrito pertenecía a esta segunda línea de investigación. La tercera línea de desarrollo es la de la geometría superior o geometría de las curvas distintas del círculo y la línea recta, y de superficies distintas a la esfera y el plano. Curiosamente, mucha de esta geometría superior se originó en los continuos intentos para resolver los tres, ahora famosos, problemas de construcción.

### 1.3 LOS TRES FAMOSOS PROBLEMAS.

Los tres famosos problemas son los siguientes:

1. La duplicación del cubo, o el problema de construir la arista de un cubo teniendo un volumen doble que el volumen del cubo dado (Figura 1).

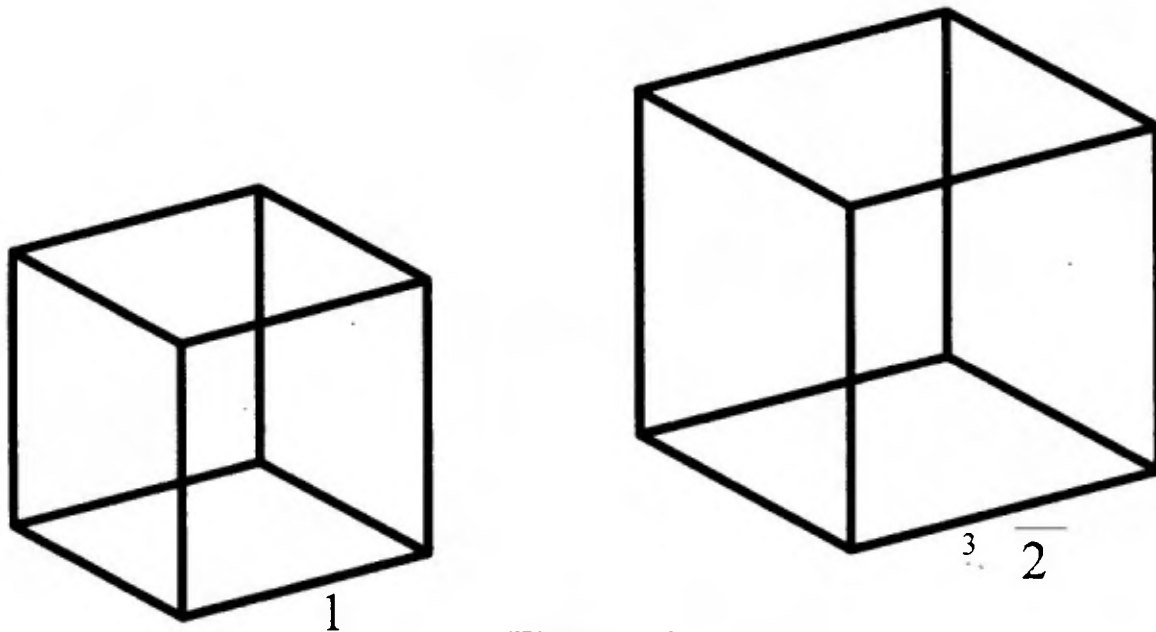


Figura 1

2. La trisección de un ángulo, o el problema de dividir un ángulo arbitrario dado en tres partes iguales (Figura 2).

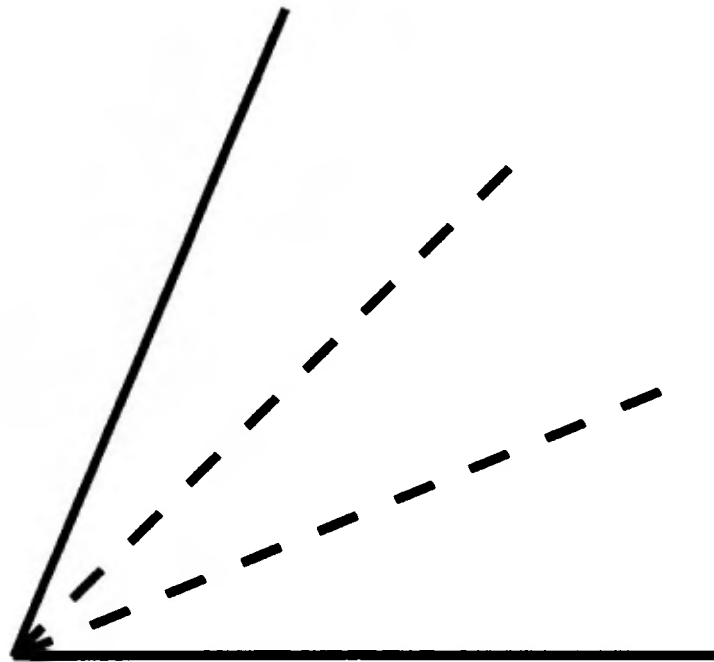


Figura 2

3. La cuadratura del círculo, o el problema de construir un cuadrado teniendo un área igual al de un círculo dado (Figura 3).

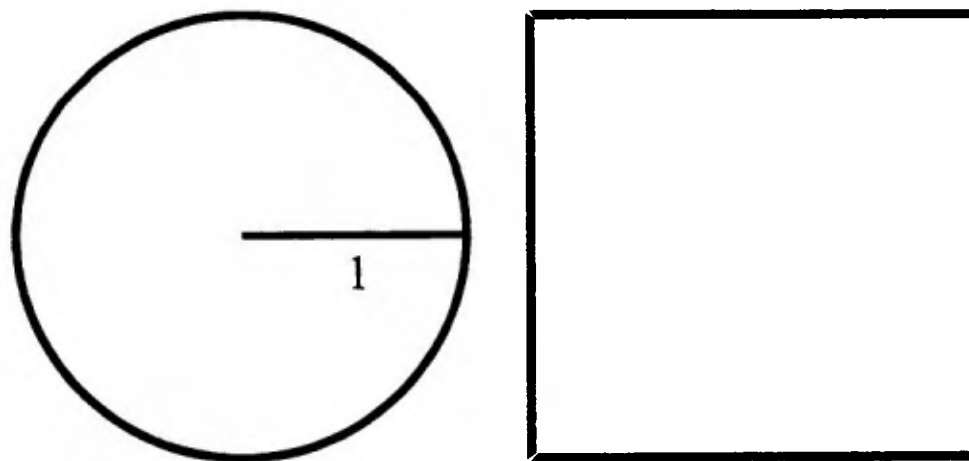


Figura 3

En realidad, estos problemas de construcción eran generalizaciones de otros problemas ya resueltos por los griegos. Dado que cualquier ángulo podía ser bisechado, era natural plantearse la trisección. Y dado que la diagonal de un cuadrado es el lado de un cuadrado de área doble que el original, el problema correspondiente para el cubo resulta también muy natural. El problema de cuadrar el círculo es un caso típico de muchos problemas griegos de construir una figura de forma dada y de área igual a otra figura dada.

La importancia de estos problemas radica en el hecho de que ellos no pueden ser resueltos, excepto por aproximación con regla y compás, aunque estas herramientas sirven con éxito para la solución de muchos otros problemas de construcción. La búsqueda de la solución de estos tres problemas influenciaron profundamente la geometría griega y dieron origen a fructíferos descubrimientos tales como los de las secciones cónicas, de muchas curvas cúbicas y cuadráticas, y de varias curvas trascendentales. Otro resultado obtenido mucho más tarde fue el desarrollo de la parte de la teoría de ecuaciones concerniente al dominio de racionalidad, números algebraicos y teoría de grupo. La imposibilidad de solución de estas tres construcciones con la restricción de usar solamente la regla y el compás no fue establecido hasta el siglo XIX, más de 2000 años después de que los problemas fueron concebidos.

La gran estimulación al desarrollo y creación de nuevas matemáticas proporcionado por los continuos esfuerzos en resolver estos tres problemas célebres de la antigüedad, ilustra el valor heurístico de problemas matemáticos sin resolver.

## 1.4 ¿PORQUÉ LA REGLA Y EL COMPÁS?

Se han dado diversas explicaciones acerca de la restricción a la regla y el compás como instrumentos de construcción. Nosotros vamos a tratar de buscar las razones que condujeron a los matemáticos griegos a privilegiar en sus estudios la regla y el compás.

1. La primera razón que podemos mencionar es una razón elemental. Las curvas más simples que intervienen en geometría son la línea recta y el círculo, y los instrumentos más simples para construirlos son la regla y el compás. Esta razón de buen sentido permite comprender por qué los griegos consideraron las construcciones con la regla y el compás pero ella no explica por qué estuvieron ligados a estos profundamente.
2. Hay también que evocar en el siglo IV a.C. la influencia de Platón (423 - 348) y de su escuela la Academia. Para Platón, el círculo que uno traza no representa el círculo ideal; por círculo ideal, hay que entender aquel que responde a la definición del círculo, y es el que la matemática tomó por tema de estudio. Las figuras son pues un pálido reflejo de la realidad, y ellas, pertenecen al mundo de las ideas. Estas concepciones llevaron a Platón a tener poca estima por los instrumentos de medida o de construcciones necesariamente imperfectos. El hace, no obstante, una excepción por la regla y el compás que son los únicos, a sus ojos, que pueden respetar la simetría de las configuraciones. La influencia de Platón, que fue considerable en su época y durante los siglos subsiguientes, se encuentran en Los Elementos de Euclides los cuales no descartan prescripciones del filósofo.

3. A pesar del remarcable trabajo realizado por Euclides en sus Elementos por dar a su Geometría una base sólida, sabemos hoy que sus construcciones no están exentas de reproches.

La debilidad de ciertas definiciones de base, como las de recta o de ángulo necesitaban en el curso de una demostración la ayuda de una figura bien hecha. Podemos decir que la figura formaba parte integral de la demostración que se dirigía tanto a los ojos que la razón. Lo que es verdad para Euclides lo es también para sus predecesores menos escrupulosos. Para convencer, una demostración debía estar acompañada de una figura clara efectuada con la ayuda de instrumentos simples conocidos y admitidos por todos.

4. La última razón que damos aquí parece más importante que las otras tres. La tercera razón viene a evocar la debilidad de las demostraciones, nosotros evocamos aquí la búsqueda del estatus de número.

Los pitagóricos conocían bien los enteros naturales, permitiendo la enumeración, así que las fracciones de enteros naturales permitían, entre otras cosas medir los segmentos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q},$$

significa que existe un segmento contenido  $p$  veces en el segmento  $AB$  y  $q$  veces en el segmento  $CD$ . Uno cree que puede así medir todos los segmentos, pero las consecuencias del Teorema de Pitágoras (hacia 550 a.C.) iban a provocar una crisis. Se obtiene, en efecto, a partir de un triángulo rectángulo isósceles  $ABC$ :

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 2$$

y se demuestra que no existen fracciones

$$\frac{p}{q}$$

tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Por consiguiente los segmentos  $AB$  y  $BC$  son inmedibles con la ayuda de fracciones. Se necesitaba pues aceptar nuevos números, pero éstos nuevos números que estatus le da? Ahora bien cabe remarcar que el segmento  $BC$  es obtenido a partir del segmento  $AB$  a través de una construcción con la regla y el compás: el círculo  $\Gamma$  de centro  $A$  pasando por  $B$  corta la recta  $AB$  en  $B'$ . Los círculos de centro en  $B$  y  $B'$  y radio  $BB'$  se cortan en  $D$  y la recta  $AD$  corta al círculo  $\Gamma$  en  $C$ .

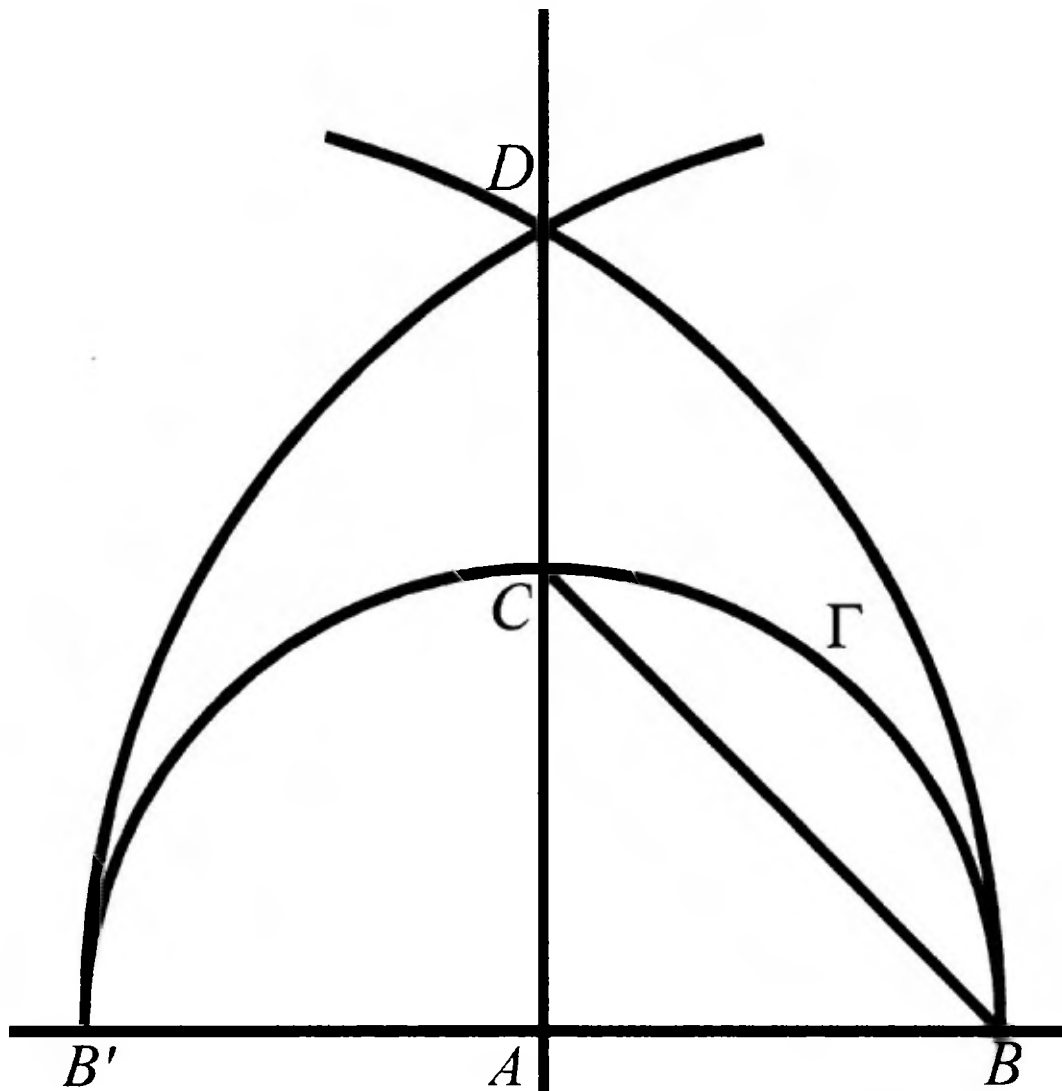


Figura 4

Se puede pensar, pero esto no es más que una hipótesis, que las construcciones con la regla y el compás han sido tomadas en adelante para servir de garantía geométrica a los nuevos números puestos en evidencias por el Teorema de Pitágoras.

## **1.5 PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS GRIEGOS.**

De hecho, mucho antes de Euclides los matemáticos griegos se interesaron en la regla y el compás, y muy pronto ellos se encontraron con grandes dificultades. En el siglo V a.C. aparecieron problemas que no llegaron a resolverse con la ayuda de la regla y el compás. Estos problemas no tardaron en ser célebres después de los fracasos obtenidos por los matemáticos.

Entre estos problemas seleccionamos para nuestro estudio los más célebres que son:

### **1.5.1 Duplicación del Cubo.**

Hay evidencia que el problema de la duplicación del cubo pudo estar originado en las palabras de un antiguo poeta griego matemáticamente no instruido y recóndito, quien representa al místico rey Minos en su descontento con el tamaño de la tumba levantada a su hijo Glaucus. Minos ordenó que se doblase el tamaño de la tumba. El poeta le contestó, incorrectamente a Minos que esto se podía hacer duplicando cada dimensión de la tumba. Esta falta de conocimiento matemático por parte del poeta hizo que los geómetras tomaran el problema de determinar cómo se puede doblar un sólido dado manteniendo la misma forma. Una leyenda, reportada en una carta a Erastóstenes (siglo XI a.C.), explica el origen de la duplicación del cubo del modo siguiente: Una peste reinaba en Délos. El oráculo consultado declaraba que para eliminar la peste Apolo deseaba que le erigieran un altar doble del altar cúbico que le estaba consagrado. El oráculo nuevamente consultado declara que Apolo no estaba satisfecho y que él deseaba un altar exactamente doble al antiguo. A causa de esta leyenda, la duplicación del cubo porta el nombre de problema de Délos. Ya sea la historia cierta o falsa, el problema fue estudiado

en la academia de Platón y hay soluciones altamente geométricas atribuidas a Eudoxos, Menecmo, y aún probablemente erróneas a Platón mismo.

El primer progreso real en la duplicación del cubo fue, sin duda, la reducción del problema por Hipócrates de Quios ya que fue el primero que observó que el problema de la duplicación del cubo se reduce al problema de encontrar dos media proporcionales entre dos segmentos de rectas dados, es decir intentaba construir otros dos segmentos  $x$  e  $y$ , tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

En efecto, si  $b = 2a$  y la proporción continua resulta se

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

y de la eliminación de  $y$  en

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$

se tiene

$$y = \frac{x^2}{a}$$

de donde

$$\frac{ax}{x^2} = \frac{x^2}{2a^2}$$

lo que conduce al resultado

$$x^3 = 2a^3$$

(relación algebraica que expresa la duplicación del cubo).

Después de la reducción hecha por Hipócrates, los subsiguientes intentos por duplicar el cubo toman la forma de construir dos media proporcionales entre dos segmentos dados.

Una de las primeras, y ciertamente una de las más remarcables soluciones altamente geométrica fue dada por Arquitas de Tarento (400 a.C.). Su solución se basa en encontrar un punto de intersección de un cilindro circular recto, un toro de radio interior cero y un cono circular recto.

A continuación daremos una descripción de la remarcable solución al problema de insertar dos media proporcionales entre dos segmentos dados, presentada por Arquitas.

Sean  $a$  y  $b$ ,  $a > b$  dos segmentos de rectas dados. En un plano horizontal trace un círculo con  $AD = a$  como diámetro y construya una cuerda  $AB = b$ . Dejemos que  $AB$  intercepte en  $P$  a la tangente al círculo en  $D$ .

Verticalmente levante la mitad superior del semicilindro circular recto sobre el semicírculo  $ABD$  como base, genere un cono circular recto rotando a  $AP$  alrededor de la línea  $AD$ ; genere un toro de radio interior cero rotando, alrededor del elemento del semicilindro a través de  $A$ , el círculo vertical con diámetro  $AD$ .

Denote por  $K$  el punto común al semicilindro, al cono y al toro, y sea  $I$  el pie del semicírculo  $ABD$  del elemento del semicilindro a través de  $K$ . Probar que  $AK$  y  $AI$ , son las dos media proporcionales entre  $a$  y  $b$ . Es decir pruebe que:

$$AD:AK = AK:AI = AI:AB$$

La solución dada por Eudoxo (937 a.C.) al problema de la duplicación del cubo está perdida. Menecmo (350 a.C.) cuya contribución más importante fue el descubrimiento de las "secciones cónicas", lo que le permitió resolver el problema de la duplicación del cubo. En efecto, si Hipócrates redujo el problema de la duplicación del cubo al de la búsqueda de dos media proporcionales entre dos rectas  $a$  y  $b$ , es decir:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Menecmo descubrió las propiedades de la parábola y de la hipérbola que corresponden, en coordenadas cartesianas, a las relaciones que resultan de la proporción continua:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab$$

No sabemos cómo, partiendo del método de obtención de las secciones cónicas, obtuvo Menecmo las ecuaciones

$$xy = ab \text{ (hipérbola)}$$

e

$$y^2 = bx \text{ (parábola)}$$

necesarias para la resolución de la duplicación del cubo.

A continuación presentamos las dos soluciones dadas por Menecmo para la solución de la duplicación del cubo.

1. Trace dos parábolas teniendo un vértice común, ejes perpendiculares, y tales que el latus rectum de una es el doble del de la otra. Denote por  $x$  la longitud de la perpendicular bajada de la otra intersección de las dos parábolas hasta el eje de la parábola más pequeña. Entonces  $x$  es el eje de un cubo teniendo el doble del volumen del cubo teniendo el latus rectum más pequeño como eje.
2. Trace una parábola de latus rectum  $S$ , y luego una hipérbola rectangular con eje transversal igual a  $4S$  y teniendo por asíntotas el eje de la parábola y la tangente a la parábola en su vértice. Sea  $x$  la longitud de la perpendicular bajada desde la intersección de las dos curvas hasta el eje de la parábola. Entonces

$$x^3 = 2S^3$$

La solución analítica de la duplicación del cubo es sencilla: Para realizar la duplicación de un cubo de lado  $a$ , basta con localizar en un cono circular recto dos parábolas, una de latus rectum  $a$  y la otra de  $2a$ ; después, por traslación y rotación, se sitúan los vértices en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano; el punto de intersección de las curvas satisface la proporción continua.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

es decir

$$x = a\sqrt[3]{2}, \quad y = a\sqrt[3]{4}$$

son las coordenadas del punto de intersección. Se consigue así resolver el problema con la ayuda de una hipérbola rectangular ( $xy = a^2$ ) y una parábola

$$\left(y^2 = \frac{ax}{2}\right).$$

Apolonio (225 a.C.) resolvió la duplicación del cubo de la siguiente manera. Trace un rectángulo  $OADB$  y luego un círculo concéntrico al rectángulo cortando  $OA$  y  $OB$  en los puntos  $A'$  y  $B'$  (respectivamente) y tal que  $A'$ ,  $D$  y  $B'$  son colineales. En realidad es imposible construir este círculo con las herramientas Euclidianas, pero Apolonio presentó una manera mecánica de describir esto.

- Muestre que  $BB'$  y  $AA'$  son dos media proporcionales entre  $OA$  y  $OB$ .
- Si  $OB = 2(OA)$ , pruebe que  $(BB')^3 = 2(OA)^3$ .

Erastóstenes (230 a.C.) presenta una solución mecánica de la duplicación del cubo, la cual equivale a determinar dos media proporcionales a partir de la media geométrica proporcional, así como todas las proporcionalidades a partir de la igualdad; todo esto aparece en las obras de Teon de Alejandría y Pappus.

Diocles (180 a.C.) inventó la cisoide para resolver la duplicación del cubo.

Muchos eminentes matemáticos del siglo XVII, como Huygens, Descartes, Grégoire de Saint - Vicent, y Newton, idearon construcciones ingeniosas en su afán de duplicar un cubo. A continuación presentamos dos de estas construcciones:

Grégoire de Sant - Vicent (1647) presentó una construcción para determinar las dos media proporcionales entre dos segmentos de rectas dados, basado en el siguiente Teorema: La hipérbola trazada a través de un vértice de un rectángulo y teniendo los dos lados opuestos a este vértice como las asíntotas, intersectan al circuncírculo del rectángulo en un punto cuyas distancias desde las asíntotas son las media proporcionales entre los lados adyacentes del rectángulo.

Descartes (1659) señaló que las curvas

$$x^2 = ay, \quad x^2 + y^2 = ay + bx$$

se intersectan en un punto  $(x, y)$  tal que  $x$  e  $y$  son dos media proporcionales entre  $a$  y  $b$ .

### 1.5.2 Trisección de un Ángulo.

No existe leyenda que introduzca la trisección del ángulo, pero éste problema es natural, puesto que se sabe que con la regla y el compás se construye la bisectriz de un ángulo, se puede también pensar en una analogía elemental con el problema que consiste en trisecar un segmento.

De los tres problemas famosos de la antigüedad griega, este es preeminentemente el más popular entre la no iniciada matemática en América de

hoy. El es motivo de estudio cada año por los trabajadores de las matemáticas y los miembros profesionales de la enseñanza.

El problema es ciertamente el más simple de comprender entre los tres famosos problemas y desde que la bisección de un ángulo es muy fácil, es natural asombrarse porqué la trisección no es igualmente fácil.

La multisección de un segmento de recta con las herramientas Euclídeanas es asunto simple y puede ser que los antiguos griegos fueron llevados a problemas de la trisección, en un esfuerzo para resolver los problemas análogos de multisección de un ángulo. O quizás lo más probable es que el problema se originó en los esfuerzos para construir un polígono regular de nueve lados, donde la trisección de un ángulo de  $60^\circ$  es requerida.

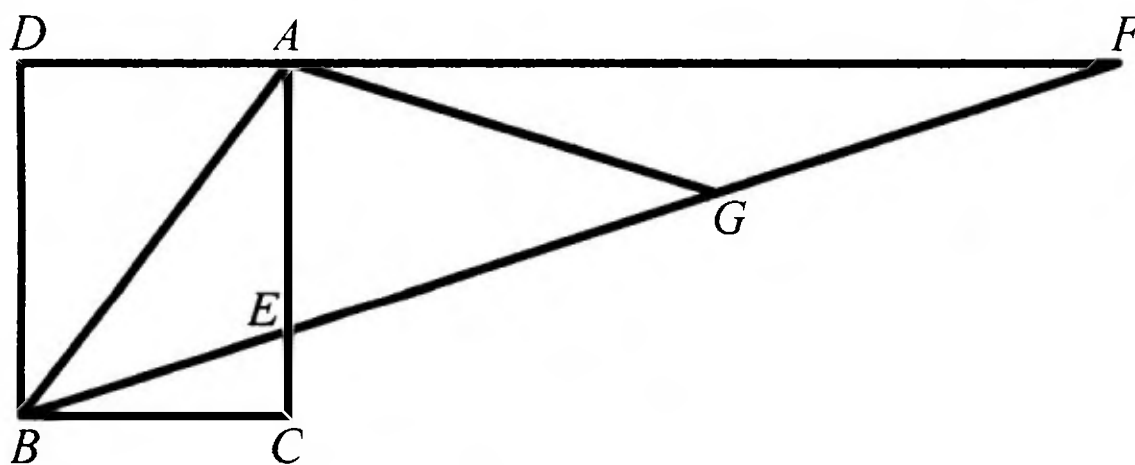


Figura 5

Al tratar con los problemas de trisección pareciera que los griegos primero reducían éste al problema que ellos llamaron "problema de margen": Cualquier ángulo agudo  $ABC$  (vea Figura 5) puede ser tomado como el ángulo entre una diagonal  $BA$  y un lado  $BC$  de un rectángulo  $BCAD$ . En base al problema de

margin considere una línea a través de  $B$  cortando  $CA$  en  $E$  y  $DA$  en  $F$ , y tal que  $EF = 2(BA)$ . Sea  $G$  el punto medio de  $EF$ . Entonces

$$EG = GF = GA = BA$$

de donde

$$\begin{aligned}\angle ABG &= \angle AGB = \angle GAF = \angle GFA \\ 2\angle GFA &= 2\angle GBC\end{aligned}$$

y  $BEF$  triseca el ángulo. Por lo tanto el problema se reduce a construir un segmento de recta  $EF$  de longitud  $2(BA)$  entre  $AC$  y la prolongación de  $DA$  tal que  $FE$  apunta hacia  $B$ .

Si contrariamente a las suposiciones Euclidianas nos permitimos marcar sobre nuestra regla un segmento  $E'F' = 2(BA)$  y luego ajustar la regla de manera que este pase a través de  $B$  y tenga los puntos marcados  $E'F'$  sobre  $AC$  y la prolongación de  $DA$ , el ángulo  $ABC$  sería trisecado.

Este abuso en el uso de la regla puede ser referido como una aplicación del principio de intersección.

Varias curvas planas complejas han sido descubiertas, las cuales resuelven el problema de margen al cual los problemas de trisección pueden ser reducidos. Una de las más viejas de estas curvas es el conoide inventado por Nicomedes (240 a.C.)

Un ángulo general puede ser trisecado con la ayuda de un cónico.

Los antiguos Griegos no estaban suficientemente familiarizados con las cónicas como para utilizarlas en la trisección de un ángulo, y las primeras pruebas de este tipo fueron dadas por Pappus (300 d.C.), usando la propiedad del foco y la directriz de las cónicas.

Hay curvas trascendentales (no algebraicas) que no solamente trisecarán un ángulo dado sino que, más generalmente, lo multisecta en cualquier número de partes iguales. Entre tales curvas están La Cuadratriz inventada por Hippias (425 d.C.) y el Espiral de Arquita. Estas dos curvas también resuelven el problema de la cuadratura de el círculo.

A través de los años muchas invenciones, máquinas de enlace y compases compuestos, han sido ideadas para resolver el problema de trisección.

### **1.5.3 La Cuadratura del Círculo.**

Entre los problemas de nuestro estudio, el que probablemente ha causado más interés y atracción es el de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Nos podemos remontar a los años 1800 a.C., donde los antiguos egipcios resolvieron este problema tomando el lado del cuadrado igual a  $\frac{8}{9}$  del diámetro del círculo dado. A partir de esto, miles de personas han trabajado en este problema, y a pesar de que se ha demostrado que no es posible hacer esta construcción con las herramientas euclideanas, no pasa un año sin que alguien reclame que ha cuadrado el círculo.

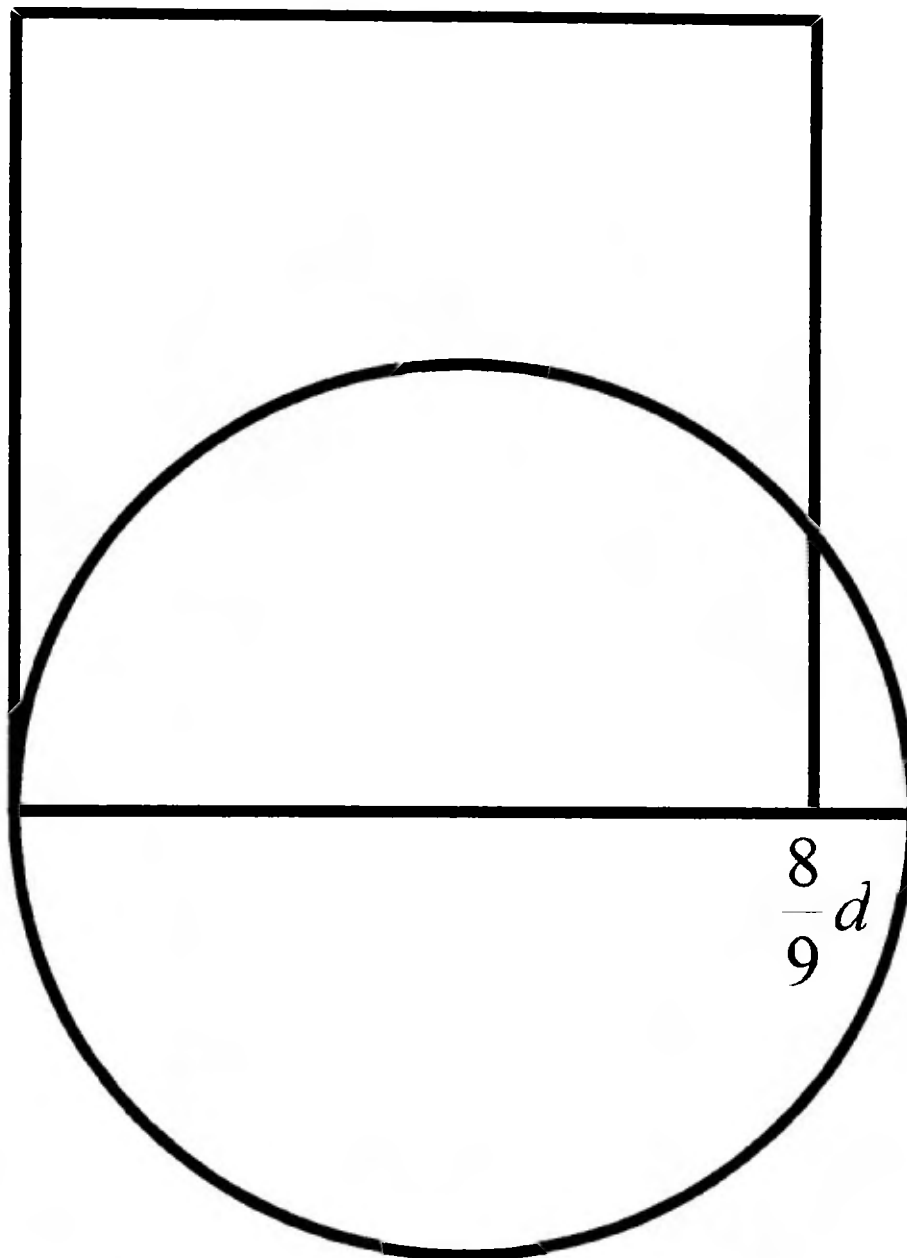


Figura 6

El problema de la cuadratura del círculo es un caso típico de muchos problemas griegos de construir una figura de forma dada y de área igual a otra figura dada.

De hecho, el problema consiste en construir con regla y el compás un cuadrado de área igual a la de un círculo dado.

El primer Griego que se conoce que trabajó el problema de la cuadratura del círculo es Anaxágoras (499 a.C.), pero su construcción no fue conocida. Hipócrates de Chios, quien fue contemporáneo de Anaxágoras, tuvo éxito en la cuadratura de ciertas lúnulas especiales, o figuras en forma de luna acotadas por dos áreas de círculos, probablemente con la esperanza de que su investigación lo condujera a la solución del problema de la cuadratura de círculo. Algunos años más tarde Hippias de Elis (425 a.C.) inventó la curva conocida con el nombre de "cuadratriz". Esta curva resuelve tanto el problema de la trisección como el problema de la cuadratura, pero no se sabe a ciencia cierta quien fue el primero en usarla en el problema de la cuadratura.

Una solución nítida del problema de la cuadratura puede ser lograda con la ayuda de la espiral de Arquímedes y se dice que fue Arquímedes (225 a.C.) quien realmente usó esta espiral en la cuadratura del círculo.

## **2. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.**

Para los griegos las construcciones geométricas significaban construcciones sólo con la regla y compás.

Como estas construcciones se basaban en el razonamiento deductivo, no se permitían instrumentos de mediciones tales como reglas con escalas y transportadores.

En lo que sigue identificamos los puntos del plano con los números complejos: el punto de coordenadas  $(a, b)$  corresponde al número complejo  $z = a + bi$ .

En este capítulo presentaremos la definición formal de lo que se entiende por construcción con la regla y el compás, y estudiaremos las propiedades más importantes del conjunto  $\mathcal{C}$  de los números construibles. Finalmente realizaremos algunas construcciones interesantes con la regla y el compás.

## 2.1 PUNTOS CONSTRUIBLES.

En esta sección explicaremos lo que es una construcción con la regla y compás y cómo se deben usar estos instrumentos.

### **DEFINICIÓN 2.1.**

Sea  $\beta$  un conjunto finito de puntos del plano, con por lo menos dos puntos. Un punto  $P$  del plano es construible con la regla y el compás a partir de  $\beta$ , si y sólo si existe un número finito de puntos del plano  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tales que:

$$\exists P_n = P$$

☑ Para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $P_i$  es un punto de intersección:

☞ de dos rectas

☞ de una recta y un círculo, o

☞ de dos círculos.

Las rectas y los círculos son obtenidos a partir del conjunto

$$E_i = \beta \cup \{P_1, P_2, \dots, P_{i-n}\}$$

de la siguiente forma:

☑ Cada recta pasa por dos puntos distintos de  $E_i$ .

☑ Cada círculo está centrado en un punto  $E_i$  y tiene radio la distancia entre dos puntos de  $E_i$ .

### **OBSERVACIONES:**

1. La única forma en que se puede usar la regla es para trazar líneas entre dos puntos previamente construidos.

2. El compás sólo se puede usar de la siguiente forma:

Los dos extremos de los brazos se pueden colocar sobre dos puntos construidos para determinar un radio, llevar entonces el compás a un tercer punto construido como centro y trazar el círculo.

3. Las rectas construidas de la forma (1) se llaman rectas construibles con regla y compás (o simplemente rectas construibles).

Los círculos contruidos de la forma (2) se llaman círculos construibles con la regla y compás (o simplemente círculos construibles)

4. Las rectas y los círculos no deben considerarse como si estuvieran compuestos por puntos construibles, el hecho de que una recta o un círculo sean construibles no implica que todos los puntos que se encuentran sobre ellos también lo sean.
5. En lo que sigue supondremos que  $\beta = \{0,1\}$  o sea que 0 y 1 son números construibles.

### **DEFINICIÓN 2.2.**

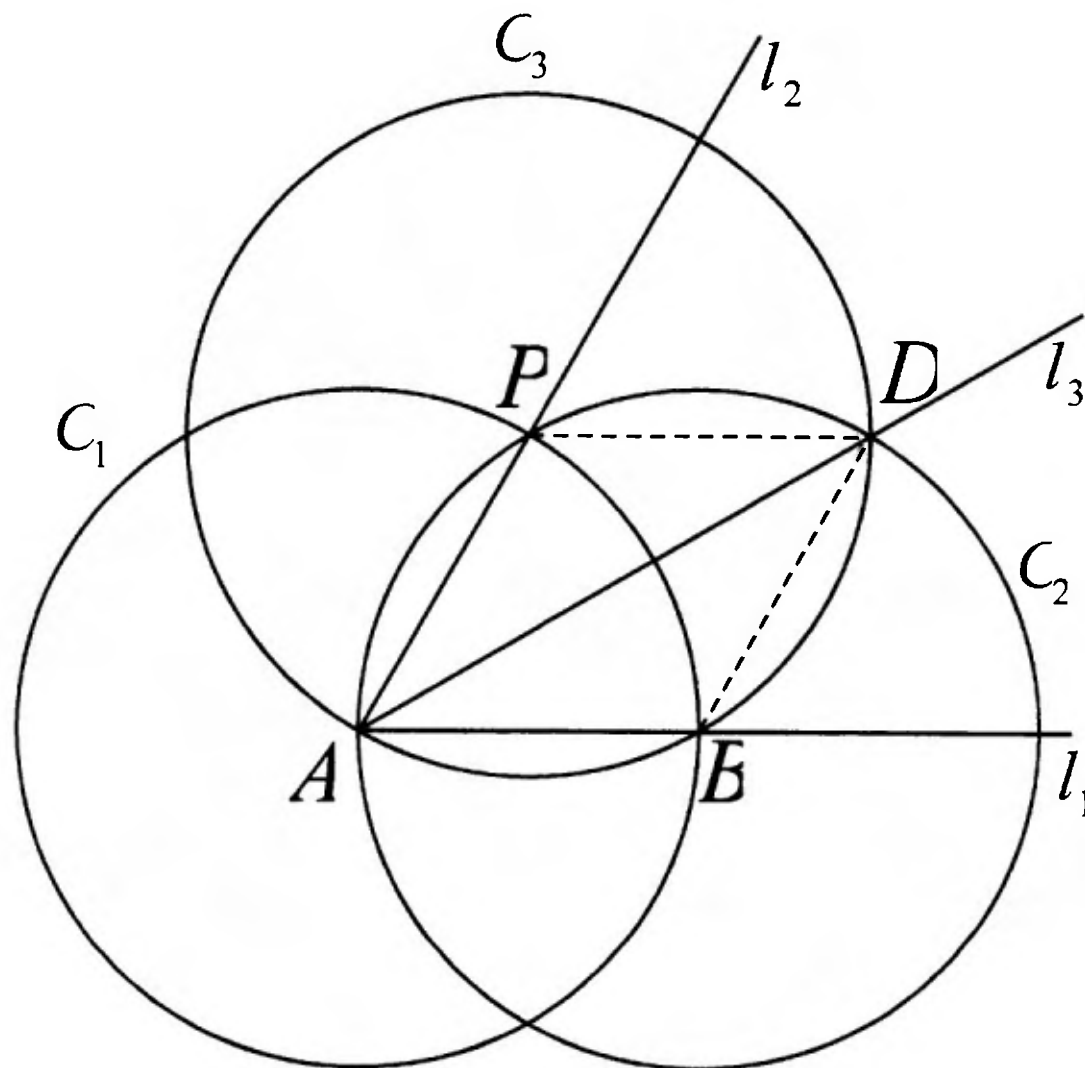
Un segmento de recta  $\overline{AB}$  es construible si sus extremos  $A$  y  $B$  son construibles.

### **DEFINICIÓN 2.3.**

Un ángulo  $\theta$  es construible si sus lados son rayos de rectas construibles.

### **TEOREMA 1.**

Si  $l_1$  y  $l_2$  son dos rectas no paralelas construibles, las bisectrices de los ángulos determinados por esas dos rectas son construibles.

**DEMOSTRACIÓN.**

☑ Por hipótesis  $\angle A$  es construible, ya que  $l_1$  y  $l_2$ , son construibles.

☑ Como  $A$  es la intersección de  $l_1$  y  $l_2$ , él es construible.

☑ Existe un punto  $B$  de  $l_1$  y a la derecha de  $A$  que es construible.

- ☑ El círculo  $C_1$  de centro  $A$  y radio  $\overline{AB}$  es construible.
- ☑ El punto  $P$  de intersección de  $l_2$  y  $C_1$ , es construible.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $B$  y radio  $\overline{BP}$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_3$  de centro  $P$  y radio  $\overline{BP}$  es construible.
- ☑ El punto  $D$ , interior a  $\angle A$ , intersección de  $C_2$  y  $C_3$  es construible.
- ☑ La recta  $l_3$  que pasa por  $A$  y  $D$  es construible.

### **ANÁLISIS.**

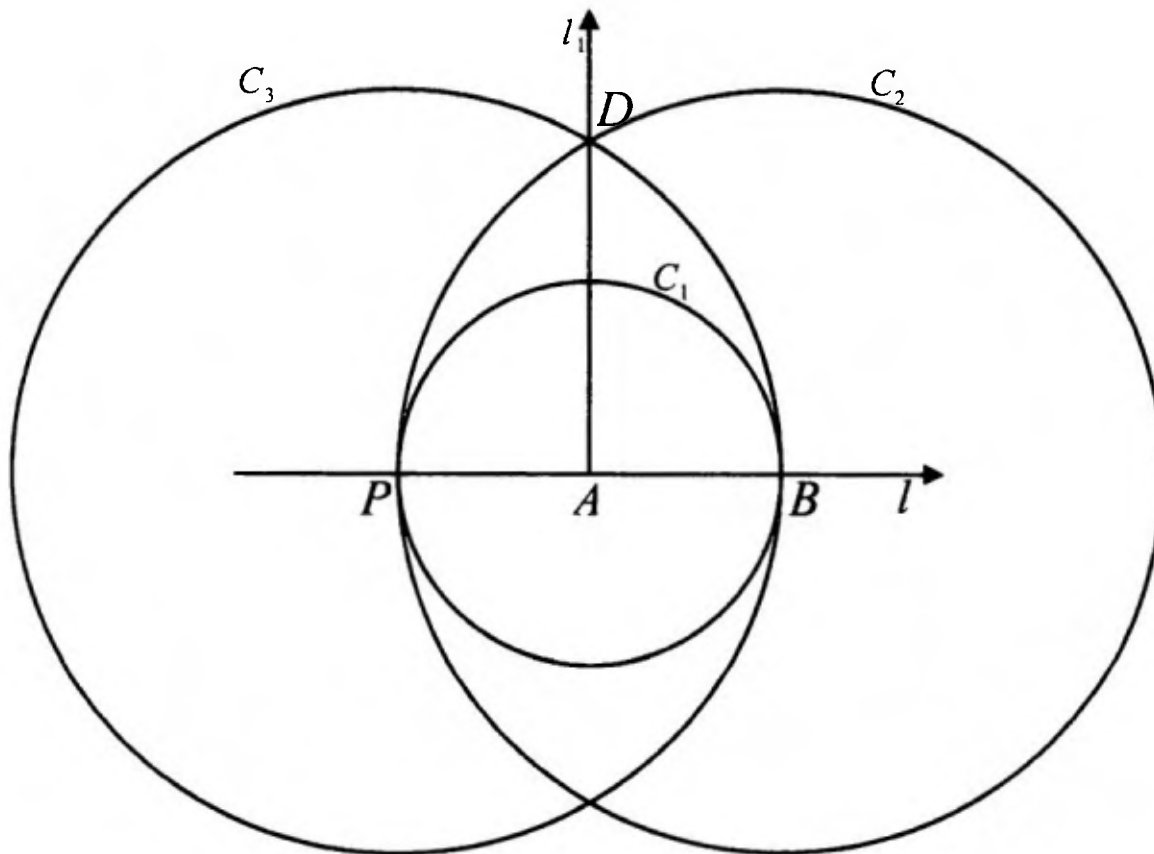
- ☑  $AP \cong AB$
- ☑  $PD \cong BD$
- ☑  $AD \cong AD$

### **CONSECUENCIA.**

- ☑ Por el principio  $LLL$  se tiene que  $\triangle APD \cong \triangle ABD$ , luego  
 $\angle DAP \cong \angle DAB \Rightarrow m(\angle DAP) = m(\angle DAB)$
- ☑ Así pues  $l_3$  es la bisectriz del ángulo  $\angle BAP$ .

**TEOREMA 2.**

Si  $l$  es una recta construible y  $A$  un punto construible sobre  $l$ , la perpendicular a  $l$  pasando por  $A$  es construible.

**DEMOSTRACIÓN.**

- ☑ La recta  $l$  y el punto  $A$  son construibles.
- ☑ Existe un punto  $B$  de  $l$  y a la derecha de  $A$  que es construible.
- ☑ El círculo  $C_1$  de centro  $A$  y radio  $AB$  es construible.

- ☑ El punto  $P$  de intersección de  $l$  y  $C_1$ , es construible.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $B$  y radio  $\overline{BP}$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_3$  de centro  $P$  y radio  $\overline{BP}$  es construible.
- ☑ El punto  $D$ , intersección de  $C_2$  y  $C_3$ , es construible.
- ☑ La recta  $l_1$  que pasa por  $A$  y  $D$  es construible.

### **ANÁLISIS.**

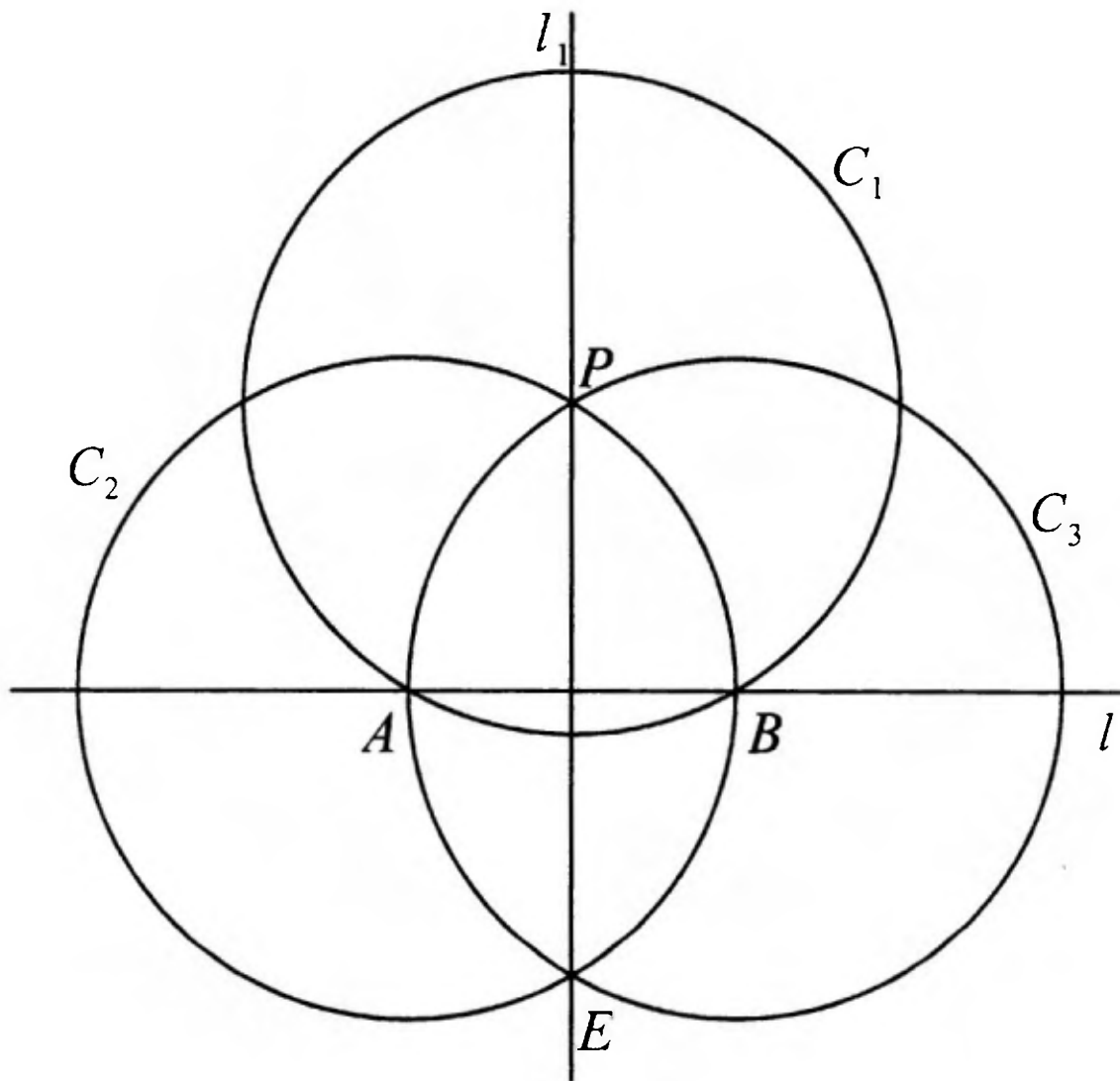
- ☑  $AP \cong AB$
- ☑  $PD \cong BD$
- ☑  $AD \cong AD$

### **CONSECUENCIA.**

- ☑ Por el principio *LLL* se tiene que  $\triangle APD \sim \triangle ABD$ , luego  $\angle DAB \sim \angle DAP$ , así pues  $l_1$  es una recta construible perpendicular a  $l$  y que pasa por  $A$ .

### **TEOREMA 3.**

Si  $l$  es una recta construible y  $P$  un punto construible exterior a  $l$ , entonces, la perpendicular a  $l$  pasando por  $P$  es una recta construible.

**DEMOSTRACIÓN.**

- ☑ La recta  $l$  y el punto  $P$  son construibles
- ☑ Existe sobre  $l$  un punto  $B$  que es construible
- ☑ El círculo  $C_1$  de centro  $P$  y radio  $PB$  es construible.

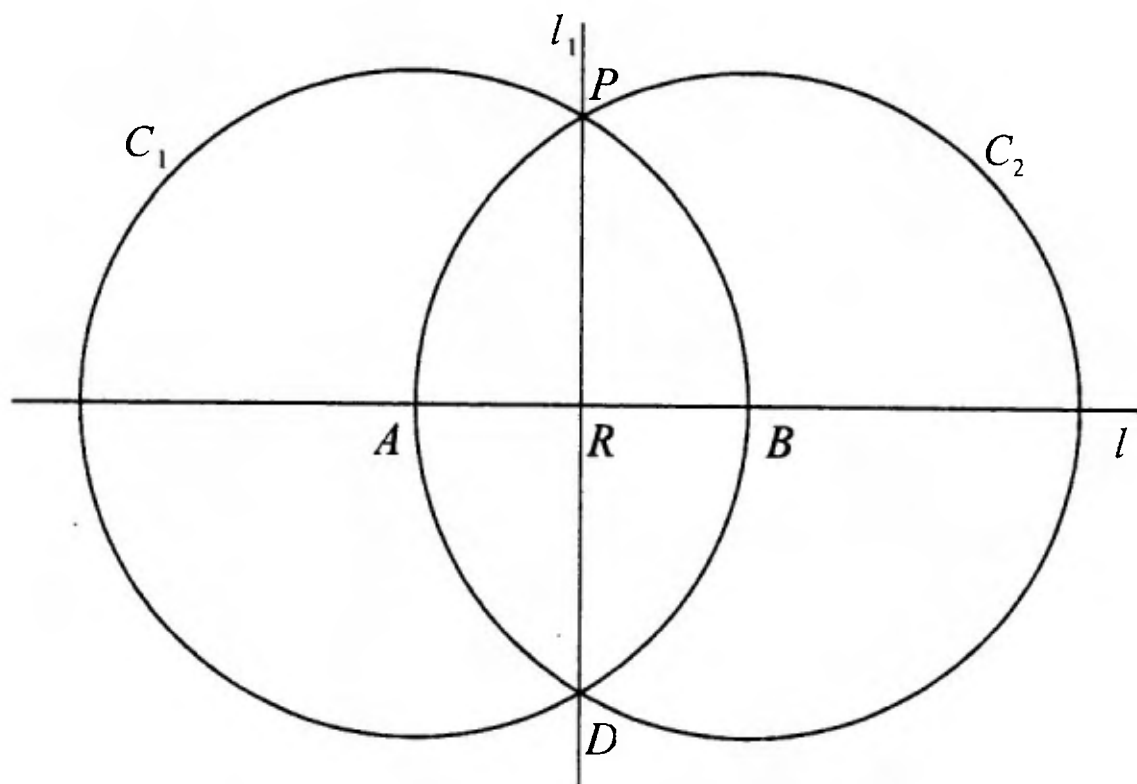
- ☑ El círculo  $C_1$  intersecta a la recta  $l$  en los puntos  $A$  y  $B$ , por lo tanto  $A$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $A$  y radio  $PA = PB$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_3$  de centro  $B$  y radio  $PB = PA$  es construible.

### **ANÁLISIS.**

- ☑ Como  $PB \cong PA$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se intersectan en  $P$ .
- ☑  $C_2$  y  $C_3$  se intersectan en  $E$ , por lo cual es un punto construible.
- ☑ De la construcción hecha en la demostración del Teorema 2 se deduce que la recta  $l_1$  que pasa por  $P$  y  $E$  (la cual es construible), es perpendicular al segmento  $\overline{BA}$ .

### **TEOREMA 4.**

Si  $A$  y  $B$  son dos puntos construibles, el punto medio y la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  son construibles.

**DEMOSTRACIÓN.**

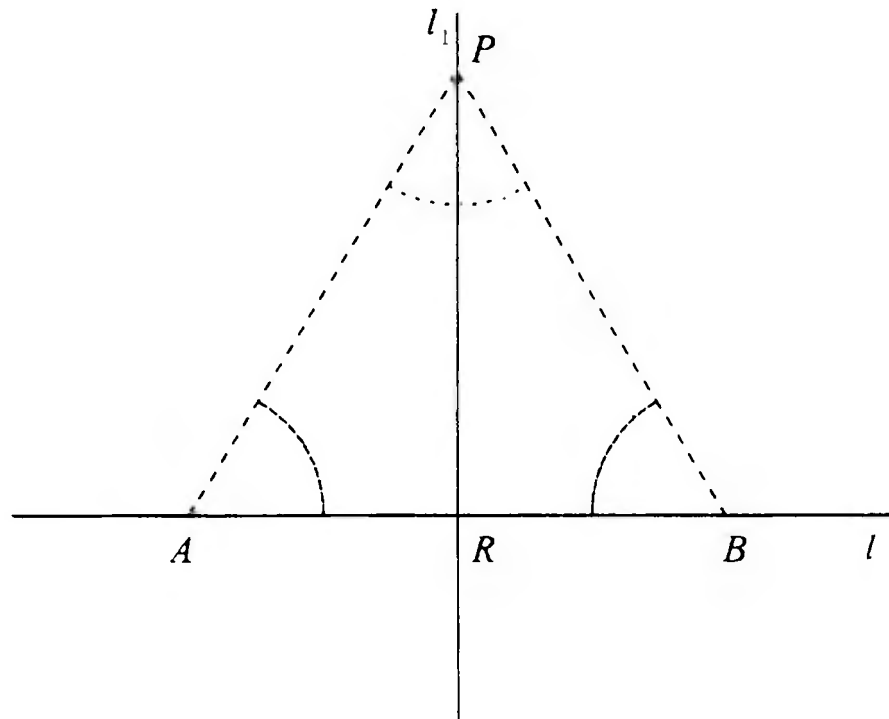
- ☑ Los puntos  $A$  y  $B$  son construibles, por lo tanto, la recta  $l$  que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , es construible.
- ☑ El círculo  $C_1$  de centro  $A$  y radio  $AB$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $B$  y radio  $AB$  es construible.
- ☑ Los puntos de intersección  $P$  y  $D$  de  $C_1$  y  $C_2$  son construibles.
- ☑ La recta  $l_1$  que pasa por los puntos  $P$  y  $D$  es construibles

☑ El punto  $R$ , intersección de  $l$  y  $l_1$  es construible.

### ANÁLISIS.

De la demostración del Teorema 2 se deduce que  $l_1$  es una recta construible perpendicular a  $l$  y que pasa por  $R$ .

Considerando nuestra construcción tenemos que:



$$\triangle ARP \cong \triangle BRP$$

Por lo tanto

$$\frac{AR}{BR} = \frac{RP}{RP} \quad \text{y} \quad AR = BR$$

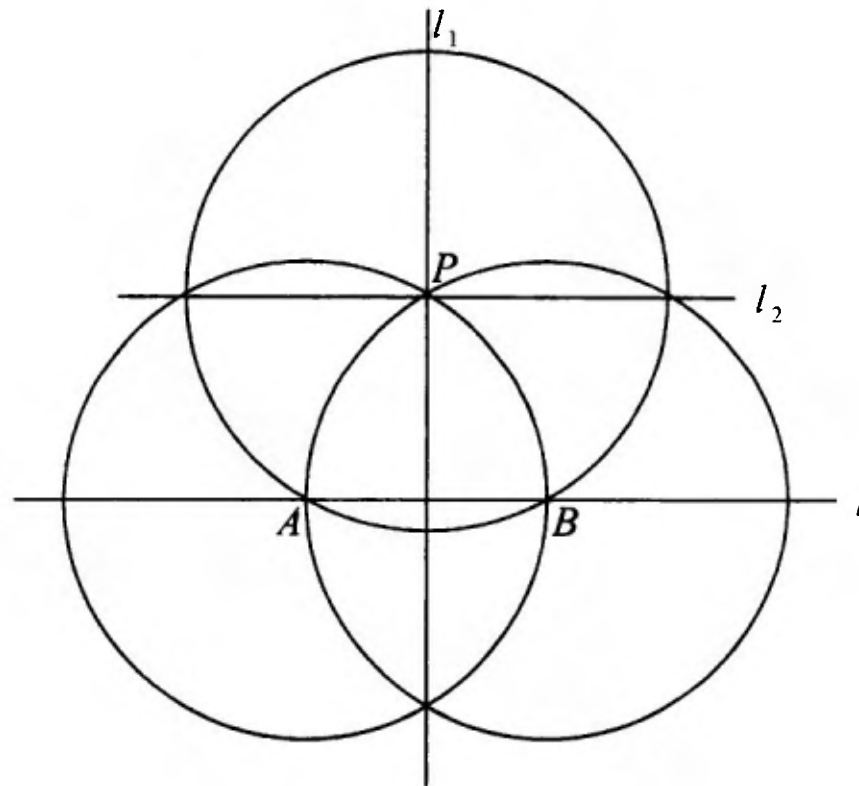
Así  $R$  es el punto medio del segmento  $AB$ .

Hemos probado así que el punto medio  $R$  y la mediatriz  $l_1$  del segmento  $AB$  son construibles.

### **TEOREMA 5.**

Sea  $l$  una recta construible y  $P$  un punto construible externo a la recta. La paralela a  $l$  pasando por  $P$  es una recta construible.

### **DEMOSTRACIÓN.**

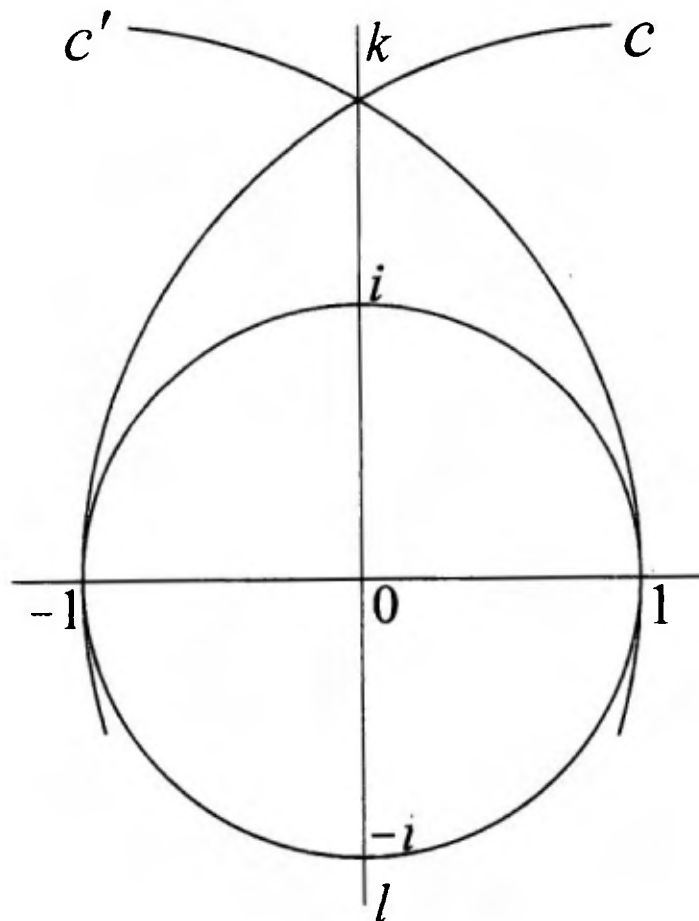


Por el Teorema 3 la recta  $l_1$  perpendicular a  $l$  y que pasa por  $P$  es construible. Por el Teorema 2, la recta  $l_2$  perpendicular a  $l_1$  y que pasa por  $P$  es construible. Como  $l_1$  es perpendicular a  $l$  y  $l_2$ , se tiene que  $l$  y  $l_2$  son paralelas. Así que  $l_2$  es una recta construible paralela a  $l$  y que pasa por  $P$ .

**TEOREMA 6.**

$-1, i, -i$  son construibles.

**DEMOSTRACIÓN.**



- ☑ La recta que pasa por los puntos  $0$  y  $1$  y el círculo unitario se cortan en  $1$  y  $-1$ . Por lo tanto,  $-1$  es construible.
- ☑ Consideremos los círculos construibles  $C$  de centro  $1$  y radio el segmento que une los puntos  $1$  y  $-1$  y  $C'$  de centro  $-1$  y radio el segmento que une los puntos  $1$  y  $-1$ .
- ☑ Designemos por  $k$  el punto construible intersección de los círculos  $C$  y  $C'$  (en el semiplano superior).
- ☑ Por el Teorema 4, la recta construible  $l$  que pasa por  $0$  y  $k$  es perpendicular a la recta  $01$ . Luego las intersecciones de la recta  $l$  con el círculo unitario son  $i$ ,  $-i$ .

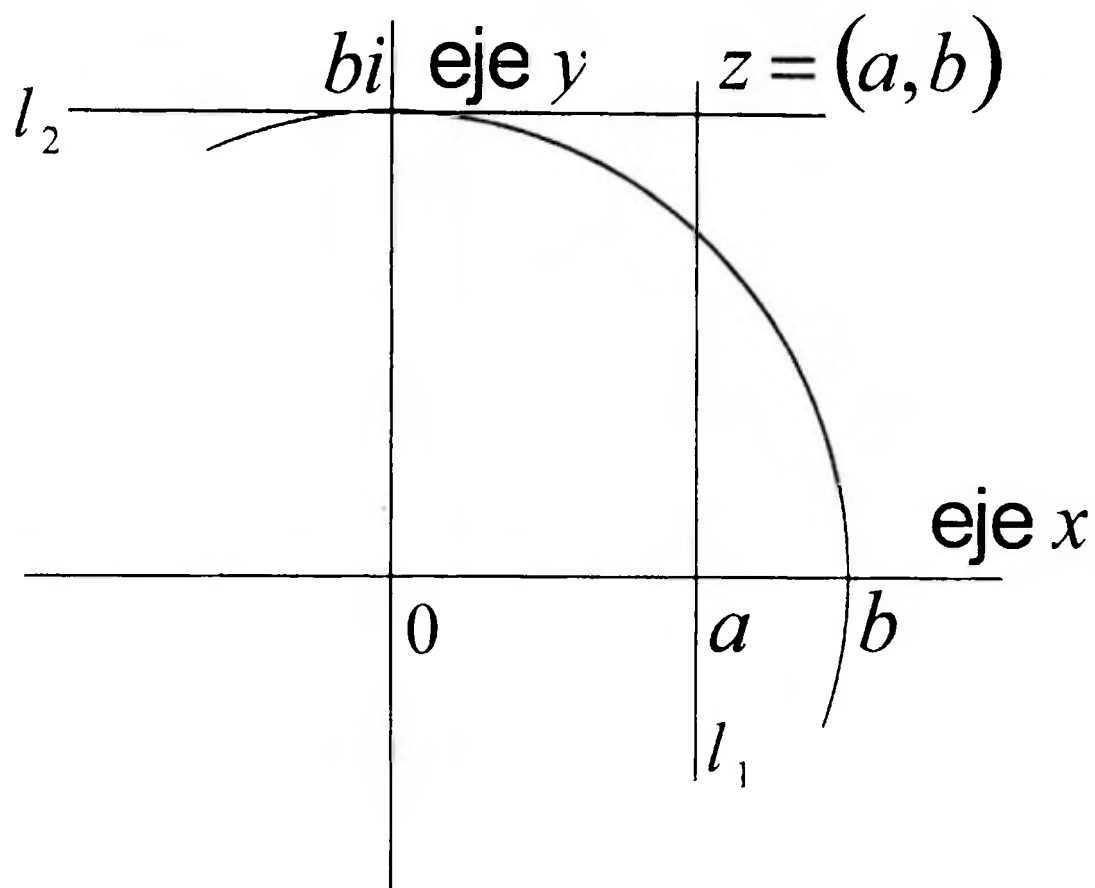
Por consiguiente  $i$ ,  $-i$  son construibles.

### **CONSECUENCIAS.**

Del Teorema anterior podemos afirmar que el eje  $x$  y el eje  $y$  son rectas construibles.

### **TEOREMA 7.**

Sean  $z = a + bi \in \mathbb{Z}$ . Si  $z$  es construible, entonces  $a$  y  $b$  son construibles.

**DEMOSTRACIÓN.**

Como el eje  $x$  y el eje  $y$  son rectas construibles y  $Z$  es un punto construible, por los Teoremas 2 y 3 las rectas  $l_1$  (perpendicular al eje  $x$  y que pasa por  $Z$ ) y  $l_2$  (perpendicular al eje  $y$  y que pasa por  $Z$ ) son construibles.

Como  $l_1$  intersecta al eje  $x$  en  $a$ ,  $a$  es un punto construible.

Como  $l_2$  intersecta al eje  $y$  en  $bi$ ,  $bi$  es un punto construible.

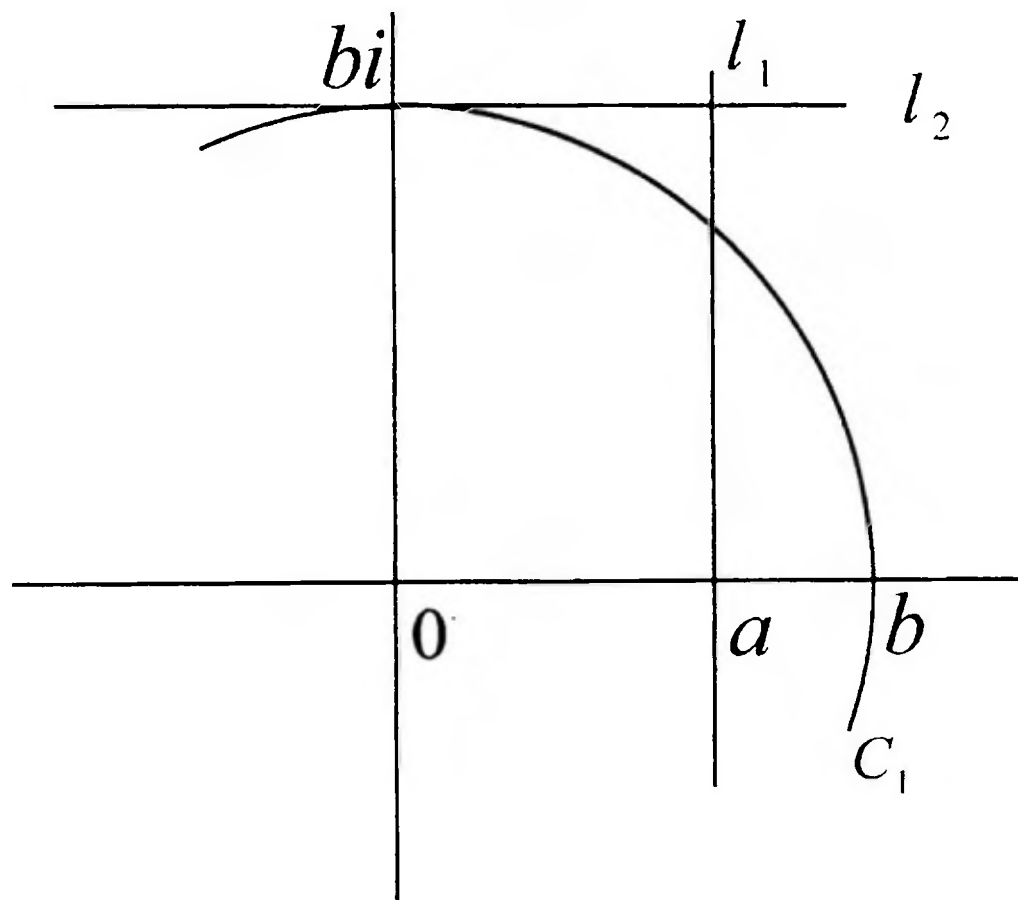
Por otro lado, el círculo  $C_1$  de centro  $0$  y radio  $0b$  es construible.

Por lo tanto, como  $b$  es un punto de intersección del eje  $x$  en el círculo  $C_1$ , se tiene que  $b$  es un punto construible.

**TEOREMA 8.**

Si  $a, b$  son construibles, entonces  $z = a + bi$  es construible.

**DEMOSTRACIÓN.**



- ☑ El círculo construible  $C_1$ , de centro  $0$  y radio el segmento que une los puntos  $0$  y  $b$ , corta al eje  $y$  en el punto  $bi$ , por lo tanto  $bi$  es construible.
- ☑ Sean  $l_1$  la perpendicular al eje  $x$  que pasa por el punto  $a$  y  $l_2$  la perpendicular al eje  $y$  que pasa por el punto  $bi$ . Como  $l_1$  y  $l_2$  son rectas construibles que se cortan en el punto  $z = a + bi$ . Se tiene que  $z = a + bi$  es un punto construible.

### **COROLARIO 1.**

Sea  $a \in \mathfrak{R}$ .  $a$  es construible, si y solo si,  $ai$  es construible.

### **DEMOSTRACIÓN.**

Es consecuencia inmediata de los Teoremas 7 y 8.

### **COROLARIO 2.**

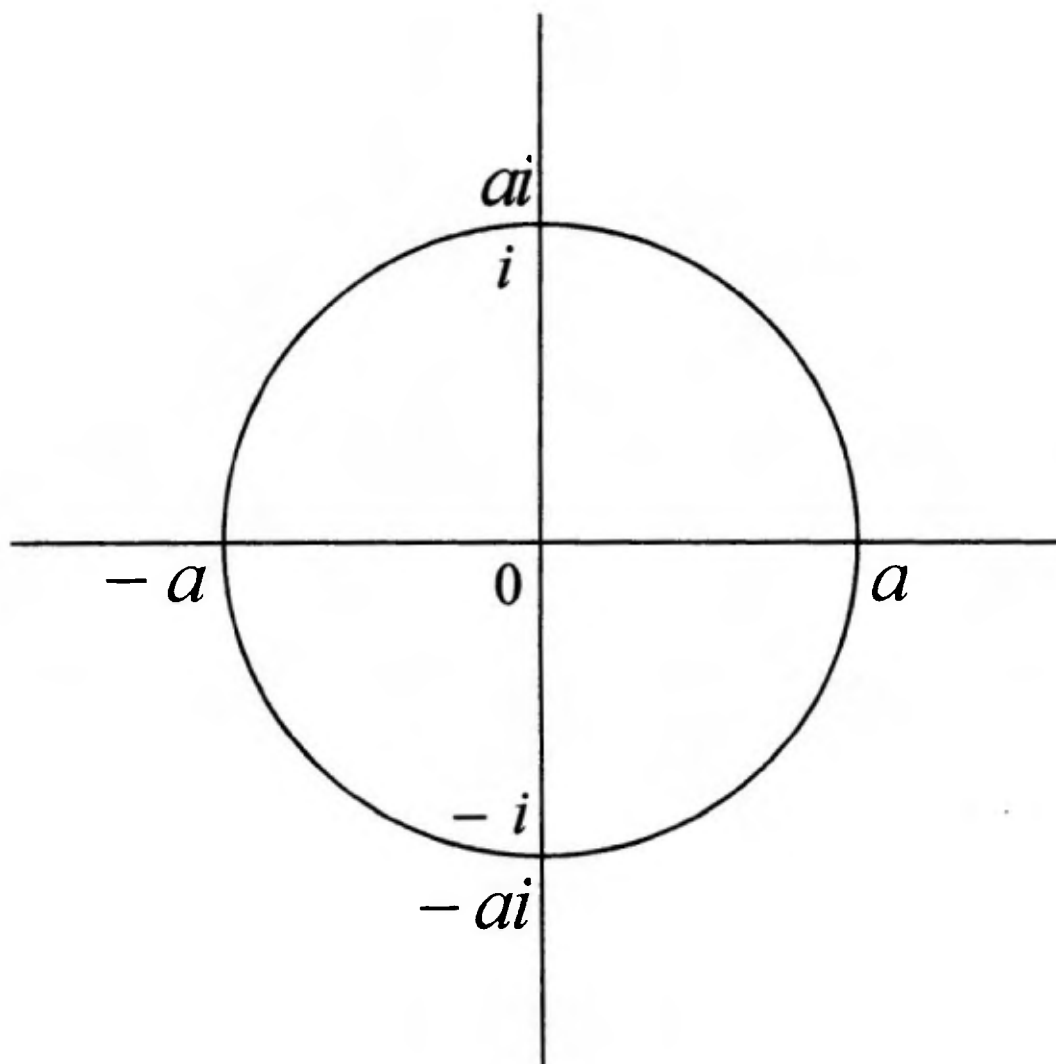
Sea  $a \in \mathfrak{R}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes.

1.  $a$  es construible.
2.  $-a$  es construible.
3.  $ai$  es construible.
4.  $-ai$  es construible

**DEMOSTRACIÓN.**

Del Corolario 1 se tiene  $1 \Leftrightarrow 3$  y  $2 \Leftrightarrow 4$ .

Además de la siguiente figura se tiene que  $1 \Leftrightarrow 2$



Por lo tanto

$$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$$

**COROLARIO 3.**

Sea  $z = a + bi$ . Las siguientes condiciones son equivalentes.

1.  $z$  es construible
2.  $-z = -a - bi$  es construible
3.  $\bar{z} = a - bi$  es construible
4.  $-\bar{z} = -a + bi$  es construible

**DEMOSTRACIÓN.**

Este resultado es consecuencia inmediata de los Corolarios 1 y 2 y los Teoremas 7 y 8.

**OBSERVACIÓN.**

Sea  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , entonces  $z$  se puede escribir en la forma  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , donde

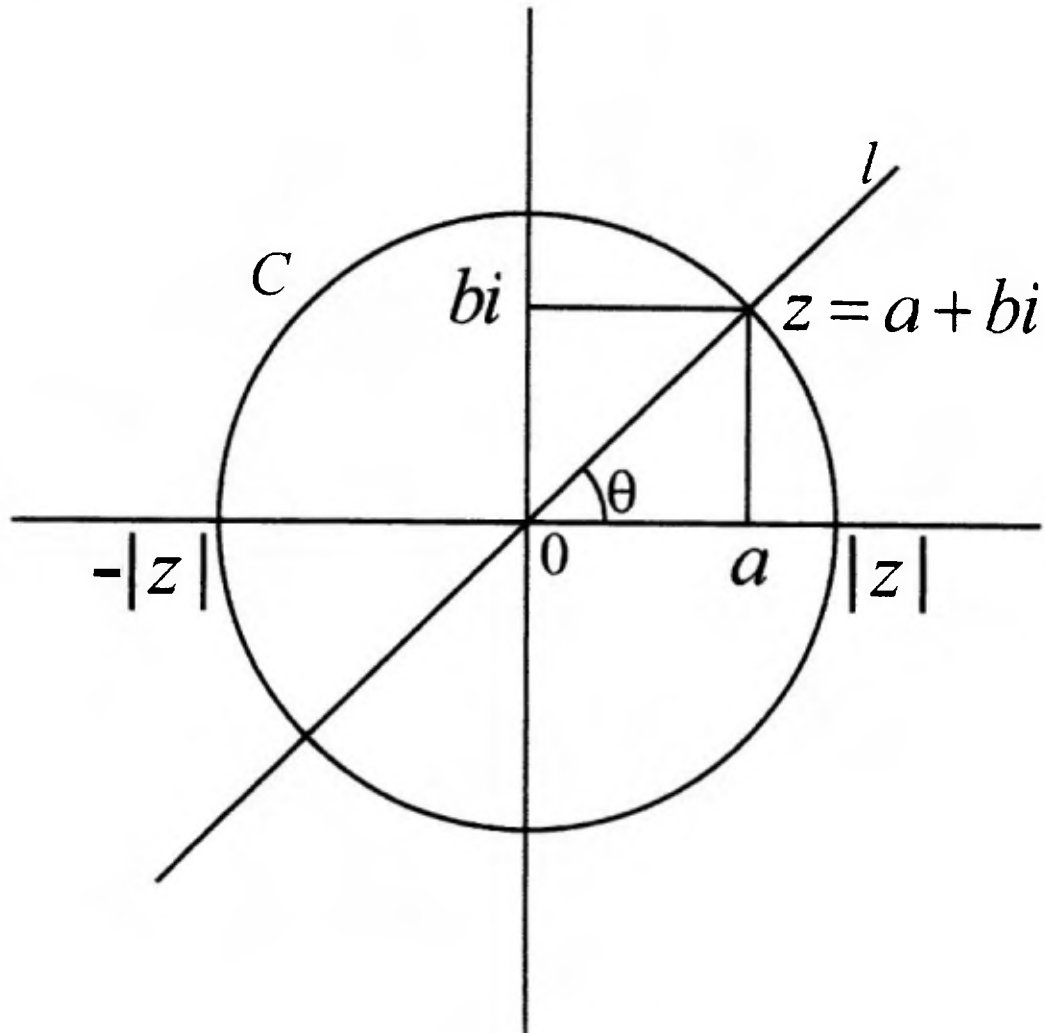
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}, & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, un número complejo queda totalmente determinado por su norma y su argumento.

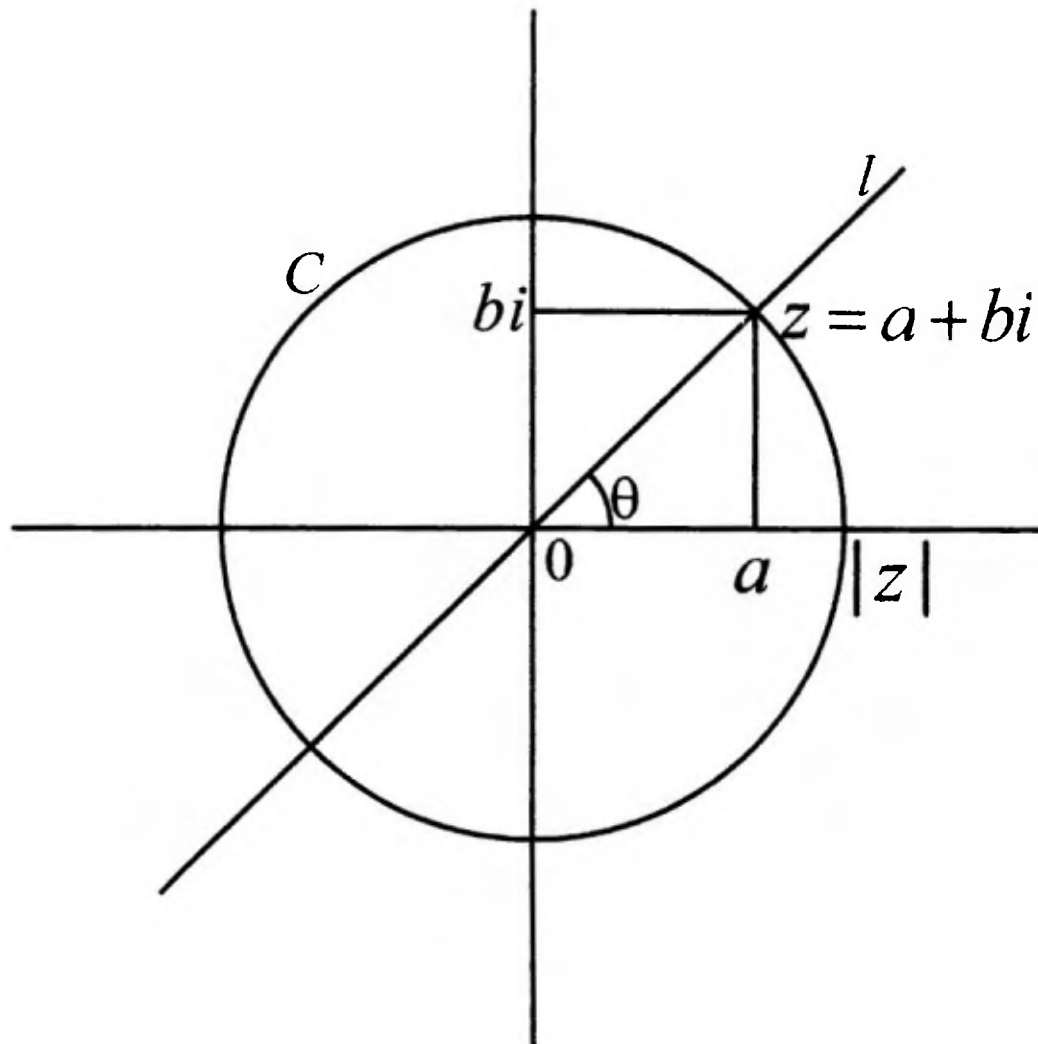
### **TEOREMA 9.**

Sea  $z = a + bi = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ .  $z$  es construible, si y solo si,  $|z|$  y  $\theta$  son construibles.

**DEMOSTRACIÓN.**

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $z$  es construible. Como la recta  $l$  que pasa por 0 y  $z$  es construible y el ángulo entre el eje  $x$  y la recta  $l$  es  $\theta$ ,  $\theta$  es construible. Por otro lado el círculo construible  $C$  de centro 0 y radio el segmento  $0z$  corta el eje  $x$  en  $|z|$  y  $-|z|$ , por lo tanto  $|z|$  es construible.

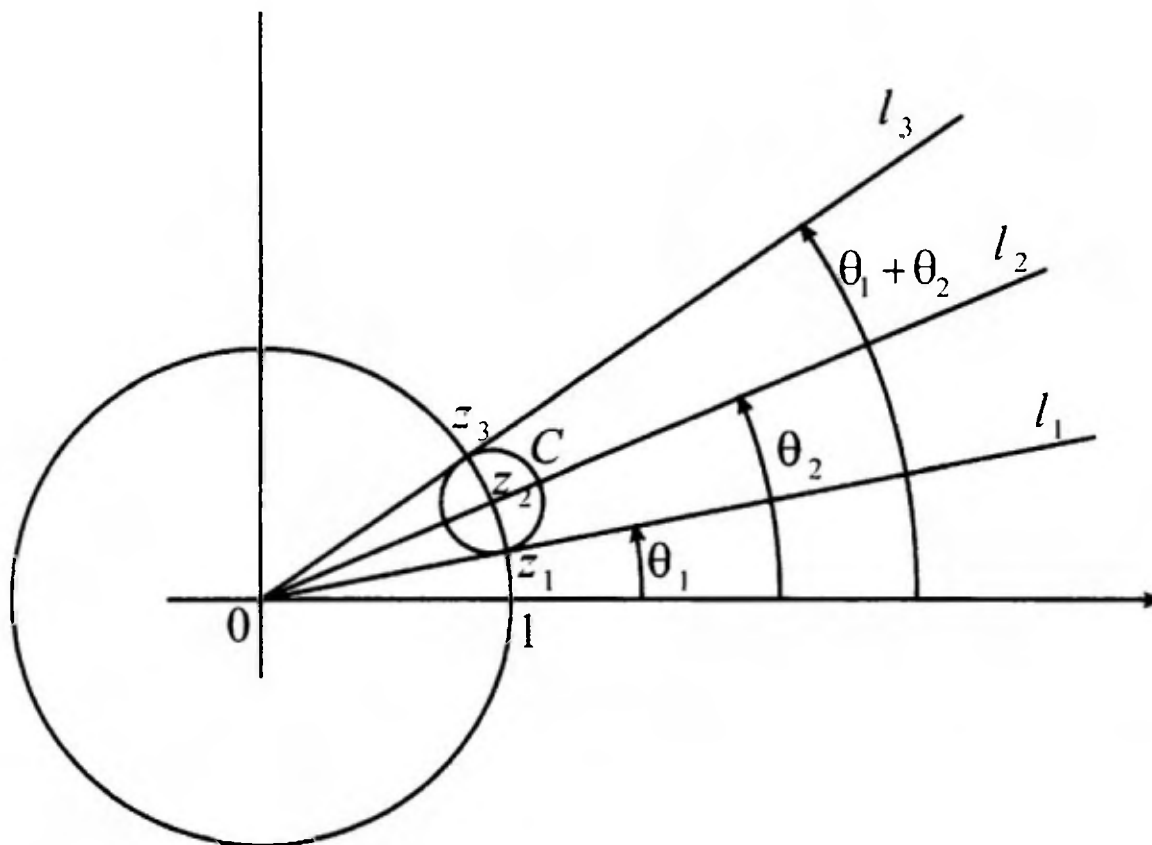
⇐] Supongamos ahora que  $|z|$  y  $\theta$  son construibles.



- ☑ Sea  $l$  la recta construible que pasa por  $0$  y que forma con el eje  $x$  un ángulo  $\theta$  (medido en sentido positivo).
- ☑ Como el círculo construible  $C$  de centro  $0$  y radio  $|z|$  corta a  $l$  en  $z$ ,  $z$  es construible.

**TEOREMA 10.**

Si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son dos ángulos construibles entonces  $\theta_1 + \theta_2$  es un ángulo construible.

**DEMOSTRACIÓN.**

Sean  $l_1$  y  $l_2$  las rectas construibles que forman con el eje  $x$  los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente.

- ☑ Los puntos  $z_1$  y  $z_2$ , intersecciones del círculo unitario con las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente, son construibles.

- ☑ El círculo  $C$  de centro  $z_2$  y radio el segmento  $1z_1$  es construible.
- ☑ El punto  $z_3$ , intersección del círculo unitario con el círculo  $C$  es construible.
- ☑ La recta construible  $l_3$  que une los puntos  $0$  y  $z_3$  forma con el eje  $x$  el ángulo  $\theta_1 + \theta_2$ .

De lo anterior se tiene que  $\theta_1 + \theta_2$  es construible.

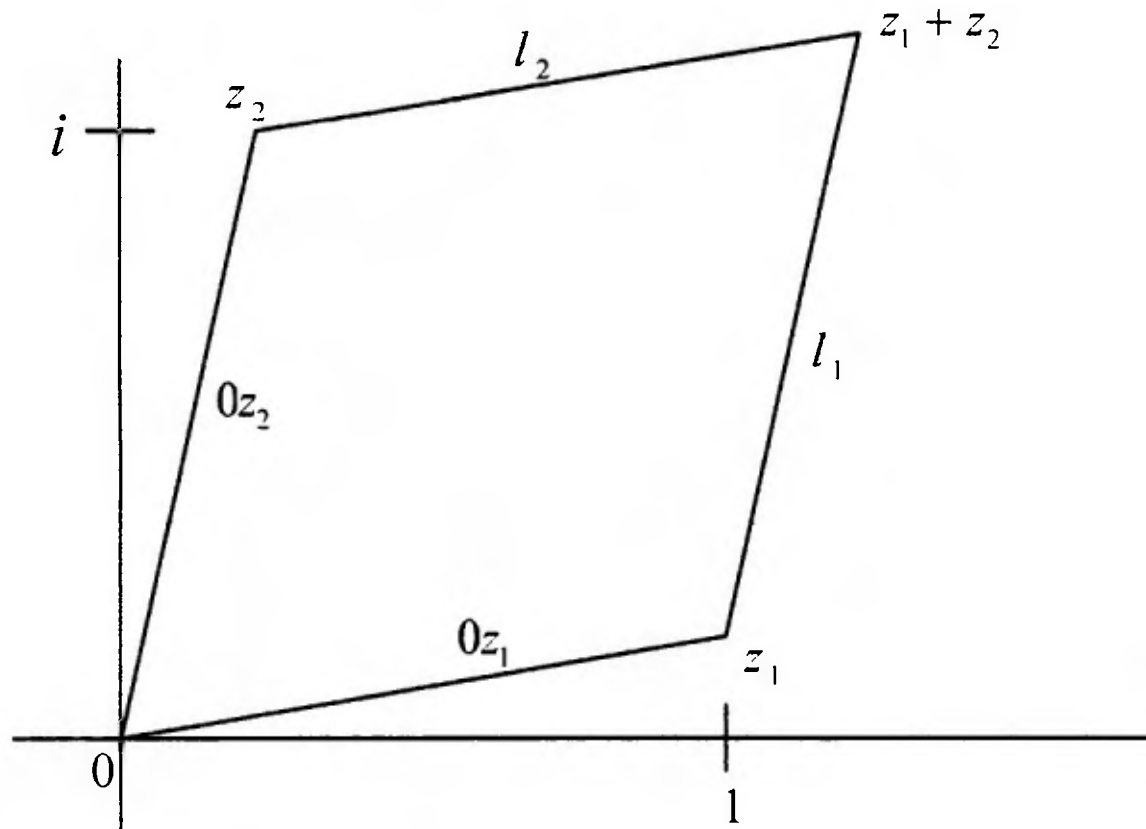
## 2.2 ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS NÚMEROS CONSTRUIBLES.

Denotemos por  $\mathcal{C}$  el conjunto de los números construibles, luego  $\mathcal{C}$  es un subconjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ . Como  $i \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  no es un subconjunto de los números reales.

En lo que sigue estudiaremos las propiedades algebraicas que posee el conjunto  $\mathcal{C}$  de los números construibles.

### **TEOREMA 11.**

$\mathcal{C}$  es un cuerpo.

**DEMOSTRACIÓN.**

☑ Como  $0, 1 \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \neq \emptyset$

☑ Sean  $z_1$  y  $z_2 \in \mathbb{C}$

- ◆ La recta  $l_1$  paralela a la recta  $Oz_2$  que pasa por  $z_1$  es construible.
- ◆ La recta  $l_2$  paralela a la recta  $Oz_1$  que pasa por  $z_2$  es construible.

- ♦ Como  $z_1 + z_2$  es la intersección de las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , se tiene que  $z_1 + z_2 \in \mathcal{C}$ .

☑ Sea  $z \in \mathcal{C}$  entonces por el Teorema 3,  $-z \in \mathcal{C}$ .

De lo anterior se tiene que  $\mathcal{C}$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$ .

☑ Sean  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$

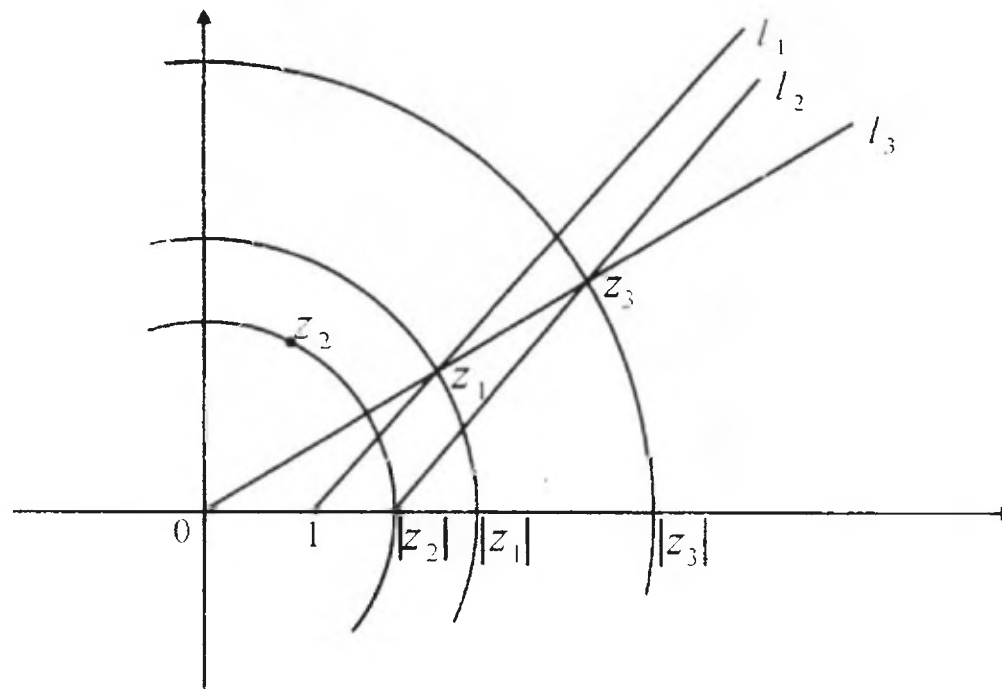
$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$\text{entonces } z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

Como  $r_1$  y  $r_2$  son construibles,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son construibles, luego por el Teorema 10,  $\theta_1 + \theta_2$  es construible. Así, para probar que  $z_1 z_2 \in \mathcal{C}$ , sólo tenemos que probar que  $r_1 r_2$  es construible.

Consideremos el siguiente dibujo



El número  $z_2$  es construible.

La recta  $l_1$  que une los números 1 y  $z_1$  es construible.

La recta  $l_2$  paralela a  $l_1$  que pasa por el punto  $z_2$  es construible.

La recta  $l_3$  que une los números 0 y  $z_1$  es construible.

El número  $z_3$ , intersección de las rectas  $l_2$  y  $l_3$  es construible. Luego  $z_3$  es construible.

Como los triángulos  $\Delta 01z_1$  y  $\Delta 0z_2z_3$  son semejantes, se tiene que

$$\frac{|z_2|}{|z_3|} = \frac{|1|}{|z_1|}$$

por lo tanto  $|z_3| = |z_2| \cdot |z_1|$

Así  $|z_1| |z_2|$  es construible.

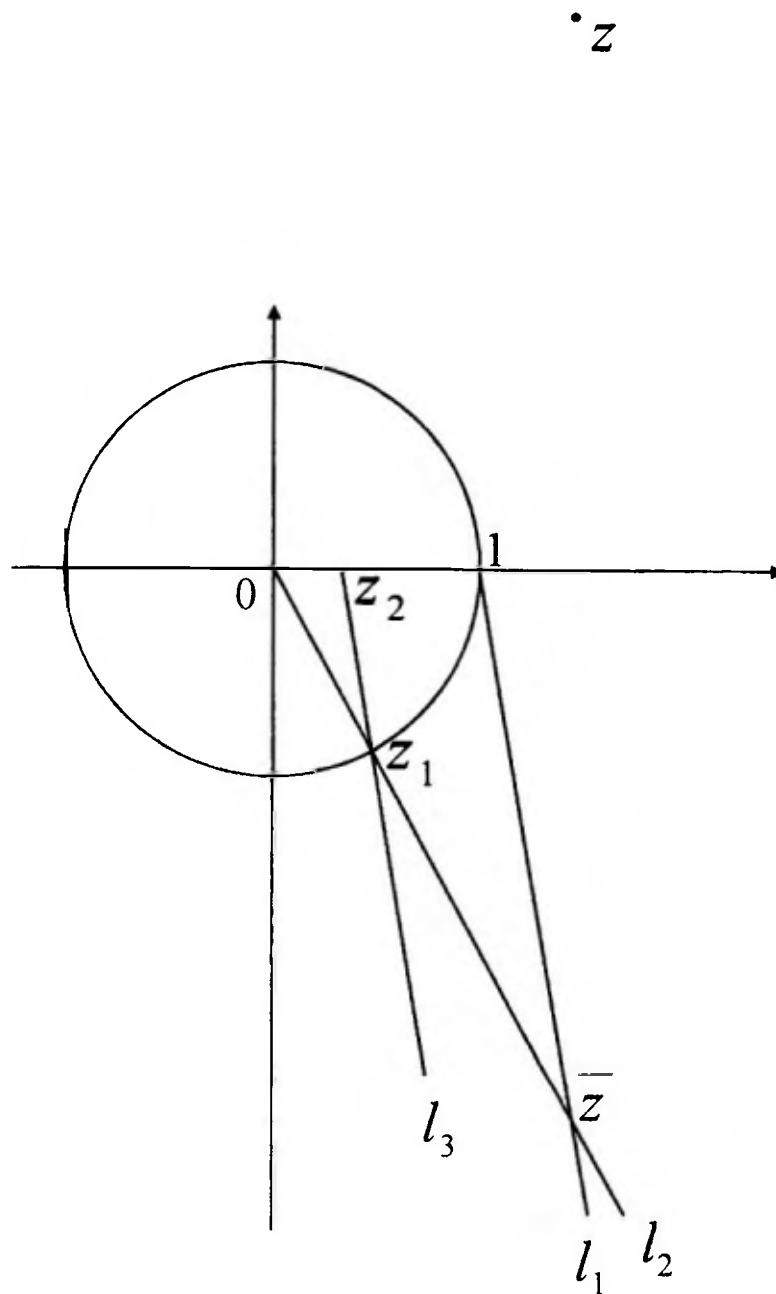
☑ Sea  $z \in \mathcal{C}$ ,  $z \neq 0$  entonces por el Corolario 3,  $\bar{z}$  es construible.

Como  $\frac{1}{z}$  y  $\bar{z}$  poseen el mismo argumento, por el Teorema 9 el

argumento de  $\frac{1}{z}$  es construible es construible.

Luego para probar que  $\frac{1}{z} \in \mathcal{C}$  solo hay probar que  $\frac{1}{|z|} \in \mathcal{C}$ .

Consideremos el siguiente dibujo



El número  $\bar{z}$  es construible.

La recta  $l_1$  que une los números  $1$  y  $\bar{z}$ , es construible.

La recta  $l_2$  que une los números  $0$  y  $\bar{z}$ , es construible.

El número  $z_1$ , intersección, del círculo unitario y la recta  $l_2$ , es construible.

La recta  $l_3$ , paralela a la recta  $l_1$  y que pasa por el punto  $z_1$ , es construible.

El número  $z_2$ , intersección, del eje  $x$  con la recta  $l_3$ , es construible.

Por ser los triángulos  $\Delta 0z_2z_1$  y  $\Delta 01\bar{z}$  semejantes

$$\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{1}{|z|}$$

Pero  $|z_1| = 1$  y  $|\bar{z}| = |z|$

Luego  $|z_2| = \frac{1}{|z|}$

Así,  $\frac{1}{|z|}$  es construible.

Hemos probado así, que  $\mathcal{C}$  es un cuerpo.

### **TEOREMA 12.**

$\mathcal{C}$  es un cuerpo cerrado por raíces cuadradas.

**DEMOSTRACIÓN.**

Sea  $z \in \mathcal{C}$

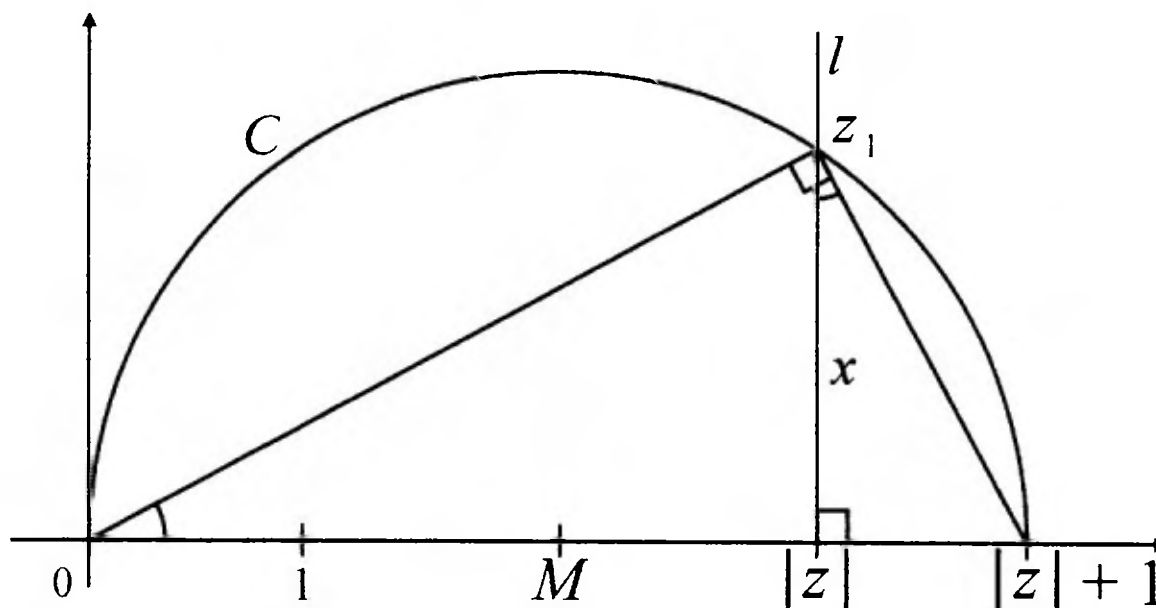
$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

Como  $\theta$  es construible y la bisectriz de un ángulo construible es construible, se tiene que  $\frac{\theta}{2}$  es construible. Luego, para probar que  $\sqrt{z} \in \mathcal{C}$ , es suficiente probar que  $\sqrt{|z|} \in \mathcal{C}$ .

Consideremos el siguiente dibujo



- $|z|$  y  $|z| + 1$  son construibles.
- El punto medio  $M$  del segmento que une los números  $0$  y  $|z| + 1$  es construible.
- El círculo  $C$  con centro en  $M$  y radio el segmento que une los números  $0$  y  $M$ , es construible.
- La perpendicular  $l$  al eje  $x$  que pasa por el punto  $|z|$  es construible.
- El número  $z_1$ , intersección del círculo  $C$  con la recta  $l$ , es construible.
- El número real positivo  $x$  igual a la longitud del segmento que une los números  $|z|$  y  $z_1$  es construible.

Por ser los triángulos  $\Delta 0|z|z_1$  y  $\Delta z_1|z|(|z| + 1)$  semejantes, se tiene:

$$\frac{x}{|z|} = \frac{1}{x}$$

Luego

$$x^2 = |z|$$

$$x = \sqrt{|z|}$$

Así,  $\sqrt{|z|}$  es construible, y por consiguiente  $\sqrt{|z|} \in \mathcal{C}$ .

### **OBSERVACIONES.**

1. Sea  $z \in \mathcal{C}$ , entonces por el Corolario 3  $\bar{z} \in \mathcal{C}$

2. Sea  $z \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

Las raíces cuadradas de  $z$  son

$$z_1 = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

y

$$z_2 = \sqrt{|z|} \left( -\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) = -z_1$$

Como por el Teorema 12,  $z_1 \in \mathcal{C}$ , se tiene que  $z_2 \in \mathcal{C}$ .

Así las dos raíces cuadradas de  $z$  están en  $\mathcal{C}$ .

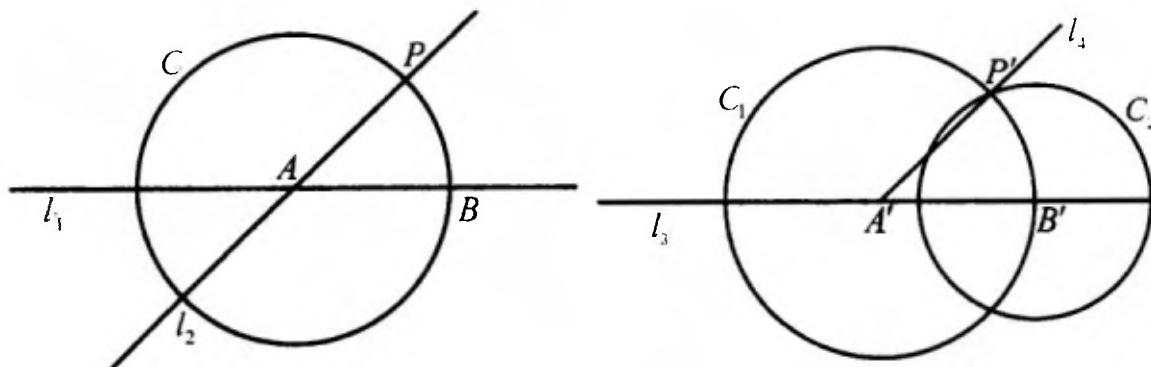
3. Como  $\mathcal{C}$  es un cuerpo y  $1 \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ .

### 2.3 CONSTRUCCIONES CON LA REGLA Y EL COMPÁS.

En esta sección presentaremos algunas construcciones geométricas interesantes que se pueden realizar con el uso solamente de la regla y el compás.

#### CONSTRUCCIÓN 1:

Construcción de un ángulo congruente a un ángulo construible, sobre una recta construible.



☑ Por hipótesis las rectas  $l_1$  y  $l_2$  son rectas construibles, por lo tanto el punto  $A$ , intersección de la recta  $l_1$  y  $l_2$ , es construible.

☑ Como  $l_1$  es construible existe un punto  $B \neq A$  de  $l_1$  construible.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $B$  está a la derecha del punto  $A$ .

☑ El círculo  $C$  con centro en  $A$  y radio el segmento  $\overline{AB}$  es construible.

☑ El punto  $P$ , intersección de  $C$  y  $l_2$  es construible.

☑ Existe un punto  $A'$  en  $l_3$  que es construible.

☑ El círculo  $C_1$  con centro en  $A'$  y radio el segmento  $\overline{AB}$  es construible.

☑ El punto  $B'$ , intersección de  $C_1$  y  $l_3$  es construible.

☑ El círculo  $C_2$  con centro en  $B'$  y radio el segmento  $\overline{BP}$  es construible.

☑ El punto  $P'$ , intersección de  $C_1$  y  $C_2$  es construible.

☑ La recta  $l_4$  que une los puntos  $A'$  y  $P'$  es construible.

Luego:

$$\cdot AB \cong A'B'$$

$$\cdot BP \cong B'P'$$

$$\cdot AP \cong A'P'$$

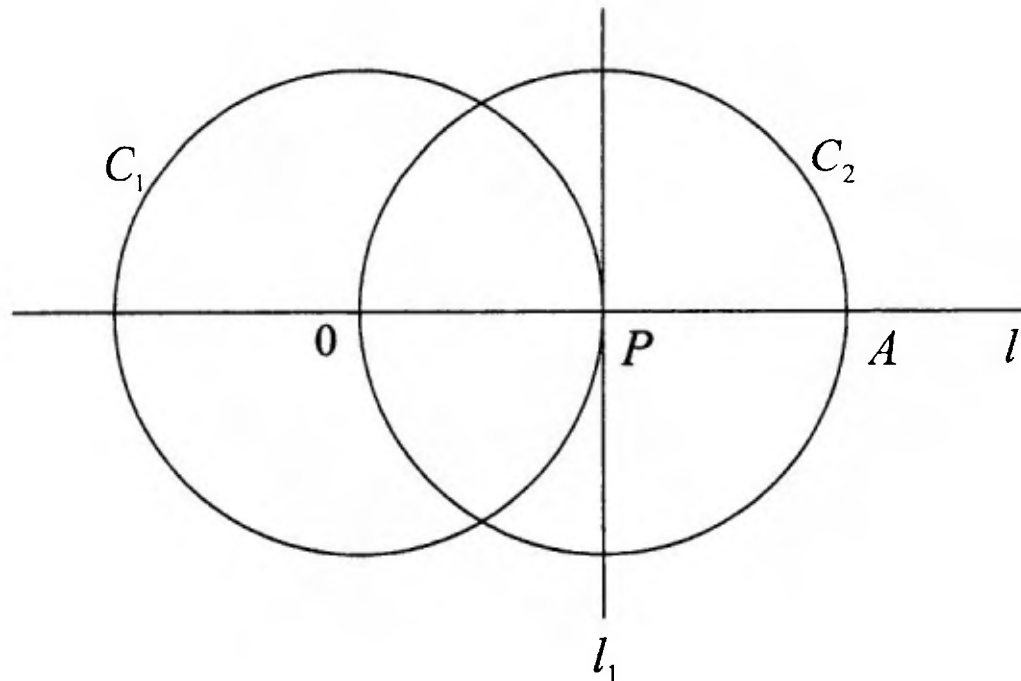
### CONSECUENCIA.

☑ Por el principio *LLL* se tiene que  $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ , por consiguiente

$$\angle A \cong \angle A'.$$

### CONSTRUCCIÓN 2.

Dado un círculo construible y un punto construible sobre el círculo, construya la tangente al círculo a través de ese punto.



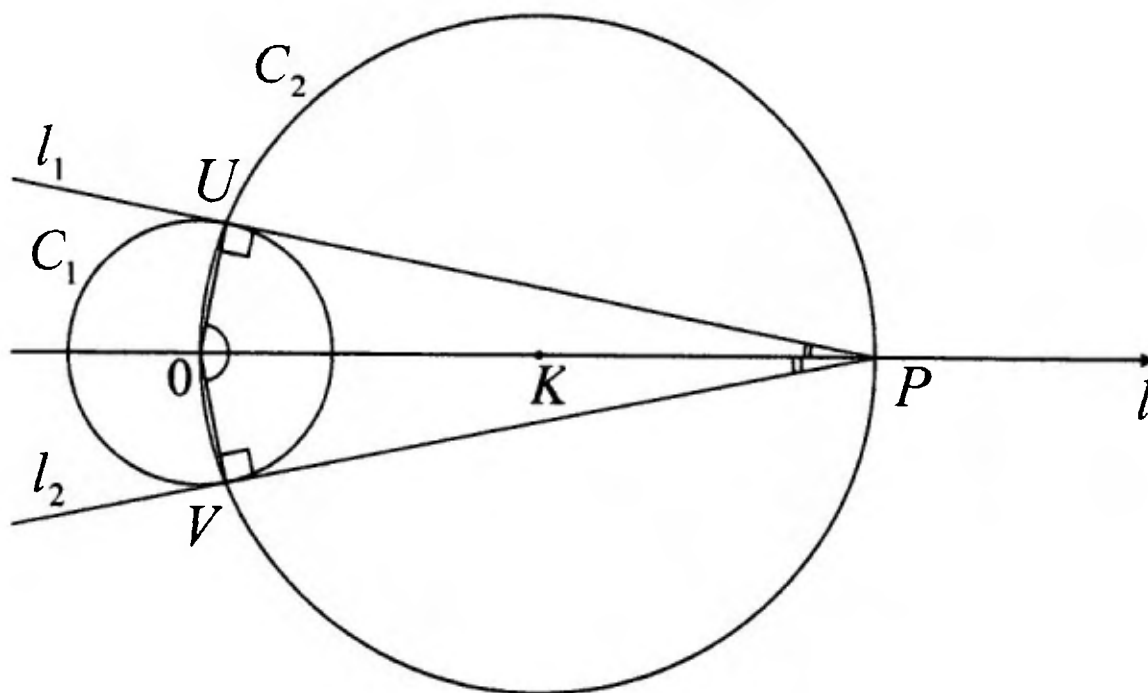
- ☑ Por hipótesis el círculo  $C_1$ , el centro  $O$  de  $C_1$  y el punto  $P$  son construibles.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $P$  y radio  $OP$  es construible.
- ☑ El punto  $A$ , intersección del círculo  $C_2$  y la recta  $l$ , es construible.

### **ANÁLISIS.**

- ☑  $P$  es el punto medio del segmento  $\overline{OA}$ .
- ☑ Por el Teorema 4, la mediatriz  $l_1$ , del segmento  $\overline{OA}$  es construible.
- ☑ Como  $l_1$  es perpendicular a  $l$  y pasa por el punto  $P$ , se tiene que  $l_1$  es tangente a  $C_1$  en  $P$ .

### **CONSTRUCCIÓN 3.**

Dado un círculo construible y un punto construible exterior a éste, construya las tangentes al círculo a través de este punto.



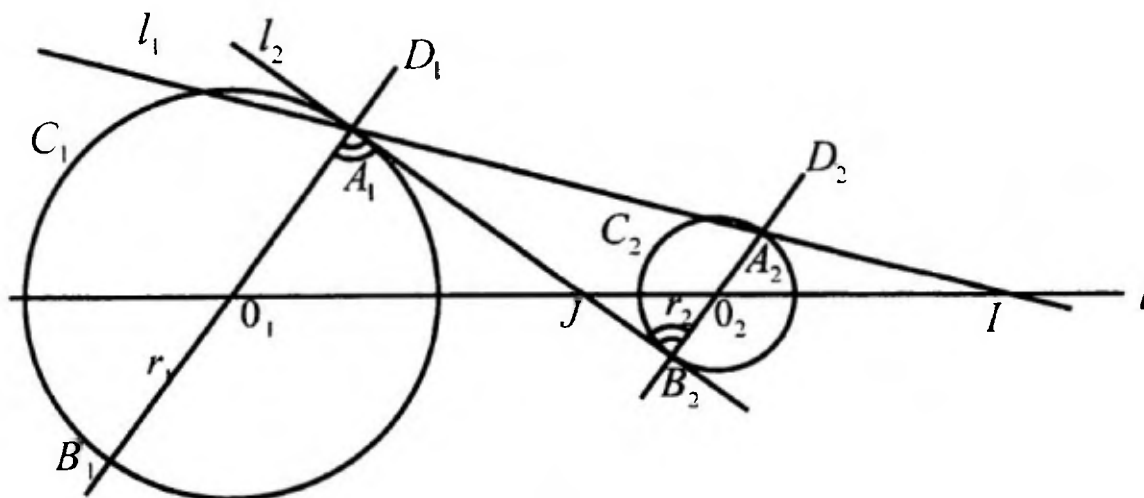
- ☑ Por hipótesis, el círculo  $C_1$  su centro  $O$  y el punto  $P$  son construibles.
- ☑ La recta  $l$  que une los puntos  $O$  y  $P$  es construible.
- ☑ Por el Teorema 4, el punto medio  $K$  del segmento  $\overline{OP}$  es construible.
- ☑ El círculo  $C_2$  de centro  $K$  y radio  $\overline{KP}$  es construible.
- ☑ Los puntos  $U$  y  $V$ , intersección de los círculos  $C_1$  y  $C_2$  son construibles.
- ☑ La recta  $l_1$  que pasa por  $P$  y  $U$  es construible.
- ☑ La recta  $l_2$  que pasa por  $P$  y  $V$  es construible.
- ☑ Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  son las rectas buscadas.

### ANÁLISIS.

- ☑ Como el ángulo  $\angle P U O$ , está inscrito en un semicírculo de  $C_1$ , el es recto. Por lo tanto,  $l_1$  es una recta tangente al círculo.
- ☑ Como el ángulo  $\angle P V O$ , está inscrito en un semicírculo de  $C_2$ , el es recto. Por lo tanto,  $l_2$  es una recta tangente al círculo.

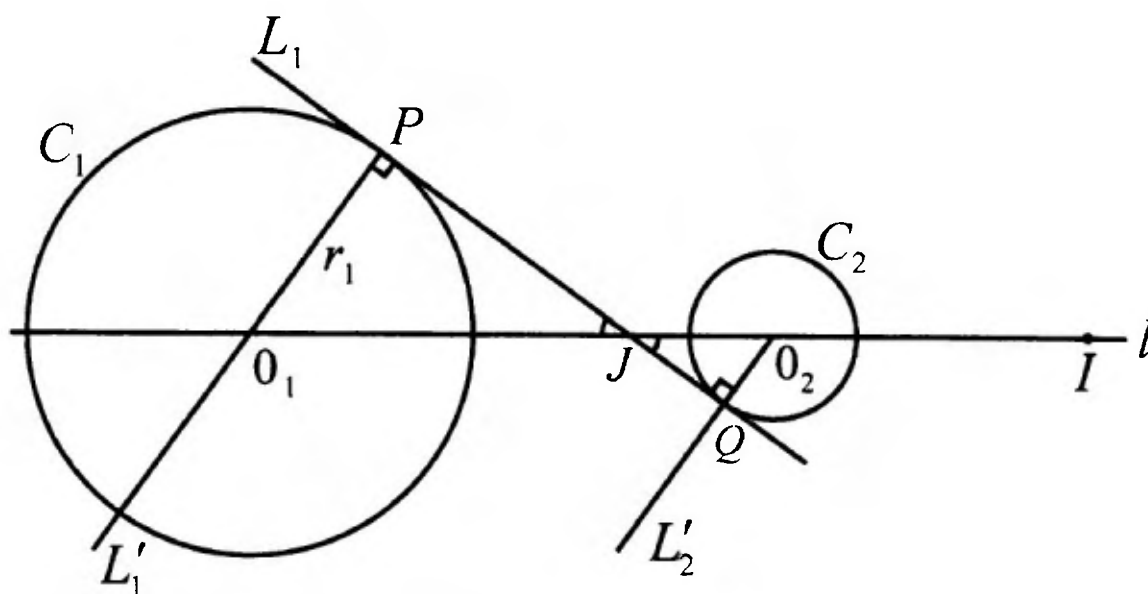
### CONSTRUCCIÓN 4.

Dado dos círculos exteriores construibles, con radios diferentes  $C_1$  y  $C_2$ , construir con la regla y el compás las tangentes comunes a estos círculos.



- ☑ Denotemos por  $O_1$  el centro de  $C_1$  y  $O_2$  el centro  $C_2$  y supongamos que el radio  $r_1$  de  $C_1$  es mayor que el radio  $r_2$  de  $C_2$
- ☑ La recta  $l$ , que une los puntos  $O_1$  y  $O_2$  es construible.

- ☑ Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un punto construible  $A_1$  sobre  $C_1$ .
- ☑ La recta  $D_1$  que pasa por los puntos  $O_1$  y  $A_1$  es construible.
- ☑ La recta  $D_2$ , paralela a  $D_1$  y que pasa por  $O_2$  es construible.
- ☑  $D_2$  corta a  $C_2$  en los puntos  $A_2$  y  $B_2$  por lo tanto  $A_2$  y  $B_2$  son puntos construibles.
- ☑ La recta  $l_1$  que pasa por los puntos  $A_1$  y  $A_2$  y la recta  $l_2$  que pasa por los puntos  $A_1$  y  $B_2$  son construibles.
- ☑ La recta  $l_1$  corta a la recta  $l$  en el punto construible  $I$  y la recta  $l_2$  corta a la recta  $l$  en el punto construible  $J$ .
- ☑ La recta  $L_1$  tangente a  $C_1$  en  $P$  que pasa por  $J$  es construible y la recta  $L_2$  tangente a  $C_1$  en  $P_1$  y que pasa por el punto  $I$ .



☑ Probemos que  $L_1, L_2$  son tangentes comunes a  $C_1$  y  $C_2$ .

En efecto tomemos los círculos  $C_1$  y  $C_2$ ; la recta  $l$ , los puntos  $I, J$  y las rectas  $L_1, L_2$ .

☑ Tracemos la recta  $L_1'$  que pasa por  $O_1$  y  $P$ .

☑ Tracemos la recta  $L_2'$  paralela a  $L_1'$  y que pasa por  $O_2$ .

☑ Denotemos por  $Q$  el punto de intersección de  $L_1$  y  $L_2'$ .

Es claro que  $L_1$  es perpendicular a  $L_2'$ . Si probamos que  $O_2Q = r_2$ , entonces  $L_1$  es tangente a  $C_2$ . En efecto a partir de la semejanza de los triángulos  $\Delta A_1O_1J$  y  $\Delta B_2O_2J$  en la primera construcción se tiene que:

$$[1] \quad \frac{0_1J}{0_2J} = \frac{r_1}{r_2}$$

☑ De la semejanza de los triángulos  $\Delta 0_1PJ$  y  $\Delta 0_2QJ$  en la segunda construcción se tiene :

$$[2] \quad \frac{0_1J}{0_2J} = \frac{r_1}{0_2Q}$$

Por lo tanto de [1] y [2] se tiene que :

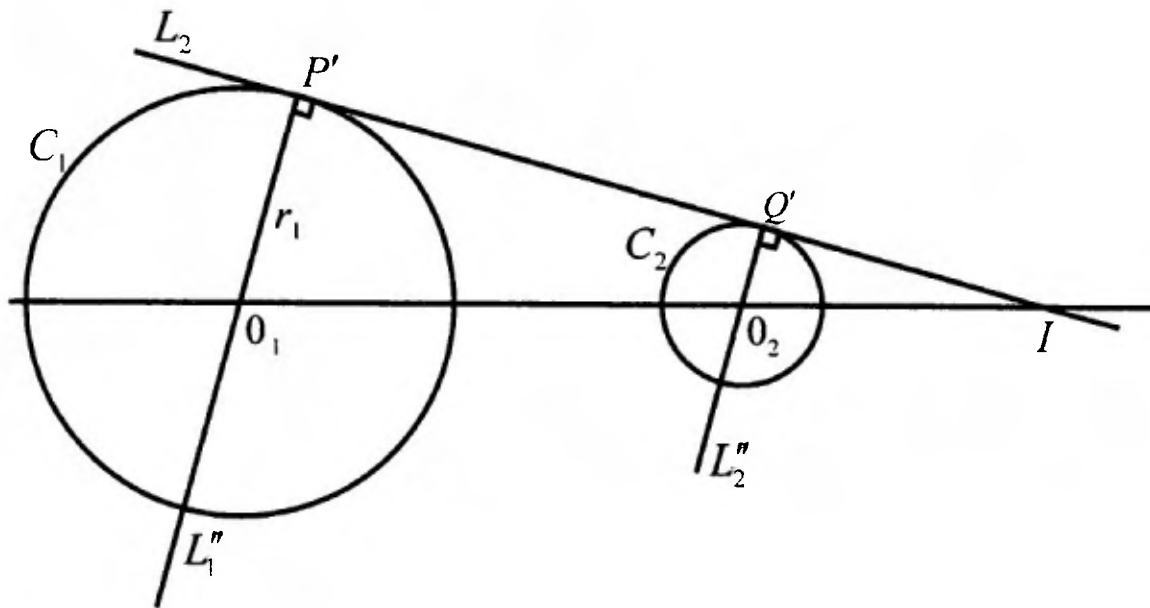
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{0_2Q}$$

Por consiguiente :

$$0_2Q = r_2$$

que es lo que se quería probar.

Para justificar que  $L_2$  es tangente a  $C_2$  consideremos la siguiente construcción.



Por hipótesis  $L_1''$  y  $L_2''$  son paralelos y  $L_1''$  y  $L_2$  son perpendiculares, por lo tanto  $L_2$  y  $L_2''$  son perpendiculares. Si probamos que  $O_2Q'$  es igual a  $r_2$  entonces  $L_2$  es tangente a  $C_2$ . En efecto a partir de la semejanza de los triángulos  $\Delta IO_1A_1$  y  $\Delta IO_2B_2$  en la primera construcción se tiene que:

$$[3] \quad \frac{O_1I}{O_2I} = \frac{r_1}{r_2}$$

De la semejanza de los triángulos  $\Delta IO_1P_1$  y  $\Delta IO_2Q'$  en la tercera construcción se tiene que:

$$[4] \quad \frac{O_1I}{O_2I} = \frac{r_1}{O_2Q'}$$

Por lo tanto de (3) y (4) se tiene que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{O_2Q'}$$

Por consiguiente:

$$O_2Q' = r_2$$

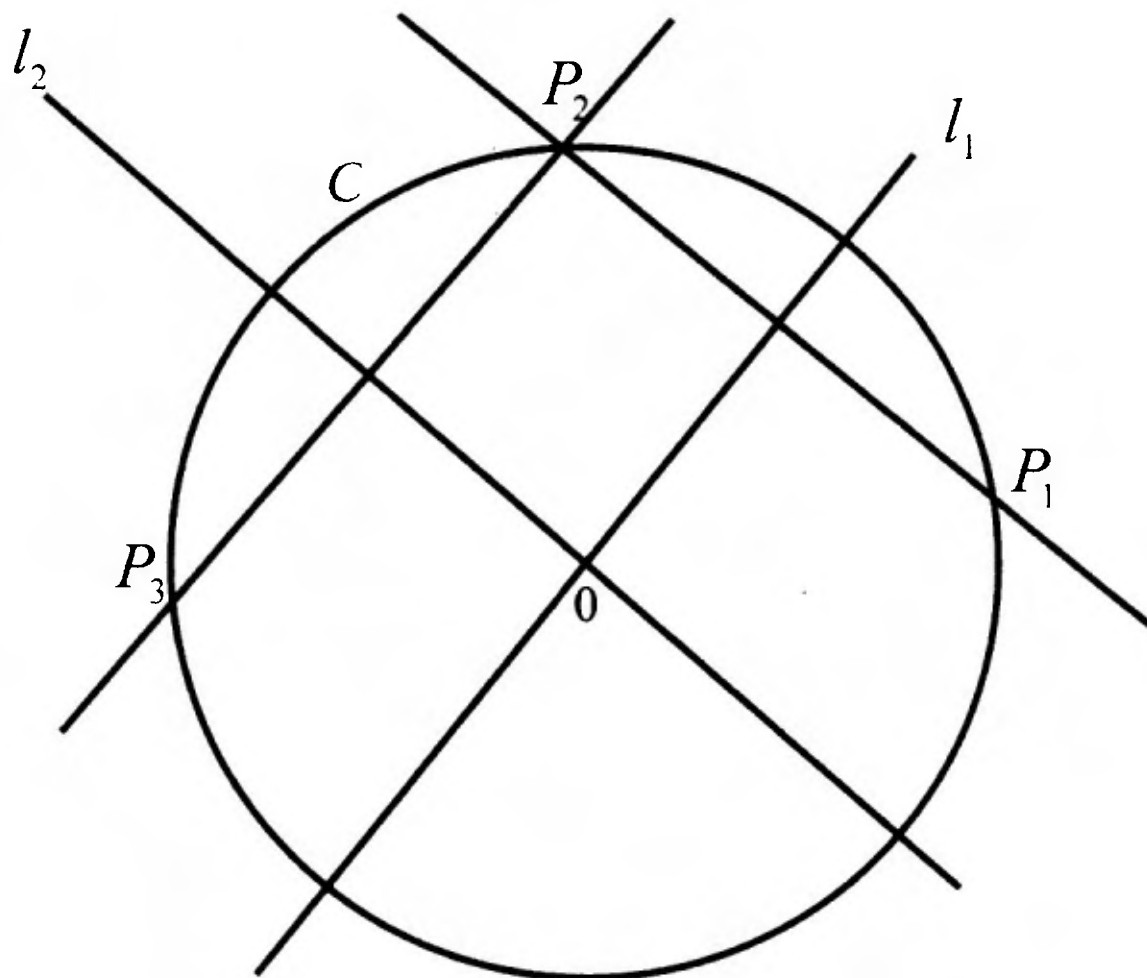
Así pues  $L_2$  es tangente a  $C_2$ .

### **OBSERVACIÓN.**

Por simetría se puede probar que a través de  $J, I$  respectivamente se pueden trazar otras tangentes comunes. Las tangentes a través de  $J$  se llaman tangentes internas y las tangentes a través de  $I$  tangentes externas.

### **CONSTRUCCIÓN 5.**

Dados los puntos construibles  $P_1, P_2, P_3$  no colineales, construir el círculo que pasa por  $P_1, P_2, P_3$ .



- ☑ La mediatriz  $l_1$  del segmento  $\overline{P_1P_2}$  es construible.
- ☑ La mediatriz  $l_2$  del segmento  $\overline{P_2P_3}$  es construible.
- ☑ El punto  $O$  intersección de  $l_1$  y  $l_2$  es construible. Por lo tanto el círculo  $C$  de centro  $O$  y radio  $OP_1$  es construible.

Es claro que el círculo  $C$  pasa por los puntos  $P_1, P_2, P_3$ .

**3. APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE LOS TRES  
PROBLEMAS GRIEGOS.**

En este capítulo modelaremos la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo como un problema de punto fijo; para así realizar construcciones iteradas con la regla y el compás las cuales nos permiten aproximarnos tanto como queramos a la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

### 3.1 FUNCIONES CONTRACTIBLES.

En esta sección presentaremos la definición de **Funciones Contractibles** y probaremos un Teorema de Punto Fijo, el cual es vital para el desarrollo de las siguientes secciones.

#### **DEFINICIÓN 3.1.**

Sea  $X$  un subconjunto no vacío de números reales y  $f : X \rightarrow X$  una función. Un punto  $x_0 \in X$  se llama punto fijo de  $f$  si:  $f(x_0) = x_0$ ; es decir, si  $x_0$  no varía por la aplicación de  $f$ .

#### **DEFINICIÓN 3.2.**

Sea  $X$  un subconjunto no vacío de números reales y  $f : X \rightarrow X$  una función.  $f$  es contractible (o una contracción) si existe un número real  $\alpha$  tal que

$$0 < \alpha < 1$$

y

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \text{ para todo } x, y \in X.$$

Es fácil verificar que toda función contractible es continua.

A continuación probaremos un Teorema de punto fijo debido a S. Banach.

### **TEOREMA 3.1.**

Sean  $I$  un intervalo cerrado, de  $\mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow I$  una contracción. Entonces  $f$  tiene un único punto fijo.

### **DEMOSTRACIÓN.**

Sea  $x_0$  un punto arbitrario de  $I$  y definamos la sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente manera

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Es obvio que  $\{x_n\}$  es una sucesión de elementos, de  $I$ .

Probemos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. En efecto, como  $f$  es una contracción existe un  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \text{ para todo } x, y \in I.$$

Luego para todo número natural  $m$  se tiene que

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_m| &= |f(x_m) - f(x_{m-1})| \\ &\leq \alpha |x_m - x_{m-1}| \\ &\leq \alpha |f(x_{m-1}) - f(x_{m-2})| \\ &\leq \alpha^2 |x_{m-1} - x_{m-2}| \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular obtenemos que para  $n > m$ ,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \alpha^m |x_1 - x_0| + \alpha^{m+1} |x_1 - x_0| + \dots + \alpha^{n-1} |x_1 - x_0| \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) |x_1 - x_0| \\ &= \alpha^m \left( \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Como  $0 < \alpha < 1$ , tenemos que

$$1 - \alpha^{n-m} < 1$$

Por consiguiente

$$|x_m - x_n| \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$$

Ahora bien

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^m = 0$$

ya que  $0 < \alpha < 1$ . Por consiguiente  $|x_m - x_n|$  se puede hacer tan pequeño como uno quiera, tomando a  $m$  lo suficientemente grande. Esto prueba que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy.

Como  $I$  es completo, existe un  $x \in I$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Probemos ahora que  $x$  es un punto fijo de la función  $f$ .

En efecto, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned} |x - f(x)| &\leq |x - x_n| + |x_n - f(x)| \\ &= |x - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(x)| \\ &\leq |x - x_n| + \alpha |x_{n-1} - x| \end{aligned} \quad (1)$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , luego existe un natural  $N$  tal que

$$|x - x_m| < \varepsilon \text{ siempre que } m \geq N \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$|x - f(x)| < (1 + \alpha)\varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

Por consiguiente

$$f(x) = x$$

Esto muestra que  $x$  es un punto fijo de  $f$ .

Probemos que  $x$  es el único punto fijo de  $f$ .

En efecto, supongamos que  $x^* \in I$  es tal que  $f(x^*) = x^*$ , entonces

$$|x - x^*| = |f(x) - f(x^*)|$$

$$\leq \alpha |x - x^*|$$

ó sea

$$|x - x^*| \leq \alpha |x - x^*| \text{ con } 0 < \alpha < 1.$$

Esto implica que  $x = x^*$ . Así pues  $x$  es el único punto fijo de  $f$ .

### **TEOREMA 3.2.**

Bajo las condiciones del Teorema anterior se tiene que la sucesión  $\{x_n\}$ , donde  $x_0$  es un elemento arbitrario de  $I$  y  $x_n = T(x_{n-1})$ , converge al único punto fijo de  $f$ . Además

$$|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_0 - x_1|$$

### **DEMOSTRACIÓN.**

Del Teorema 3.1 se deduce que la sucesión definida por recurrencia

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

donde  $x_0$  es un elemento arbitrario de  $I$ , converge al único punto fijo de  $f$ .

En el Teorema 3.1 probamos que

$$|x_n - x_m| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$$

Siempre que  $m > n$ . luego haciendo  $m \rightarrow \infty$  obtenemos que

$$|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$$

### **TEOREMA 3.3.**

Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado y acotado de  $R$  y  $f: I \rightarrow I$  una función diferenciable en  $I$ .

Supongamos además que existe un número real  $\alpha, 0 < \alpha < 1$  tal que

$$|f'(x)| \leq \alpha \quad \text{para todo } x \in I$$

Entonces  $f$  tiene un único punto fijo  $x \in I$  y para cualquier punto inicial  $x_0 \in I$ , la sucesión  $\{x_n\}$  definida por recurrencia

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

converge hacia  $x$ . Además

$$|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0| \quad \text{para } n \geq 1.$$

### **DEMOSTRACIÓN.**

Sean  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$ . Luego  $f$  es continua en  $[x_1, x_2]$  y derivable en  $(x_1, x_2)$ . por el Teorema del Valor Medio existe un  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)|x_2 - x_1|$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f'(c)| |x_2 - x_1| \\ &\leq \alpha |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

Así pues

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \alpha |x_2 - x_1|$$

Para todo  $x_1, x_2 \in I$ . Por consiguiente  $f$  es una contracción.

En consecuencia para los Teoremas 3.1 y 3.2 concluimos que  $f$  tiene un único punto fijo en  $I$ . Más aun, si la sucesión  $\{x_n\}$  se define por

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

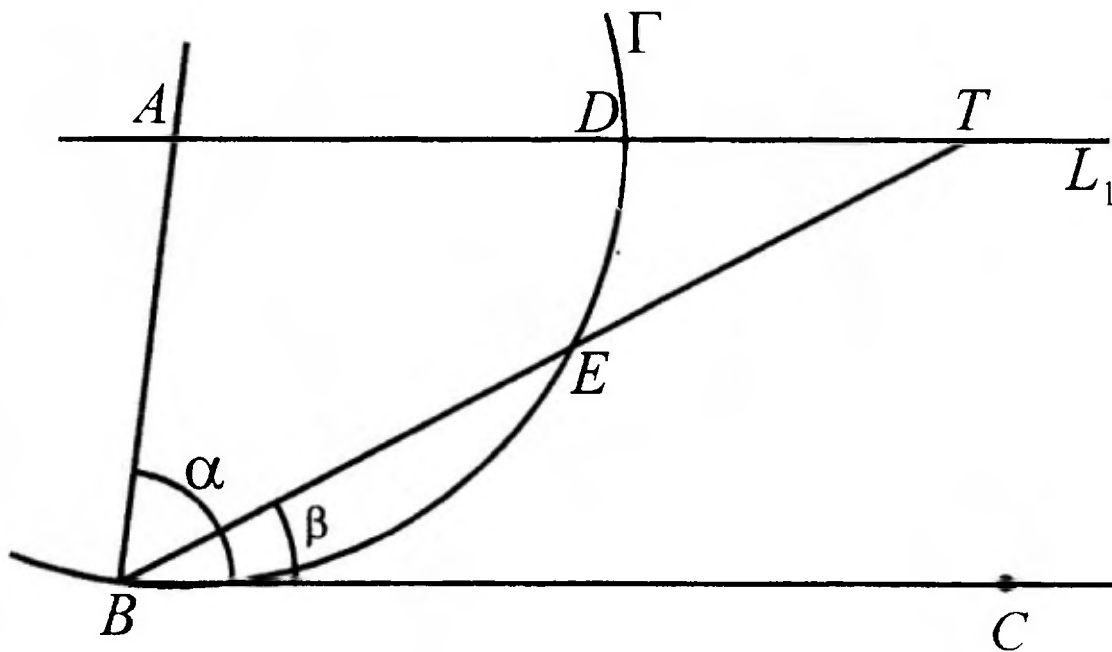
donde  $x_0$  es un punto arbitrario de  $I$ , entonces  $\{x_n\}$  converge a  $x$  y además

$$|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0| \quad \text{para } n \geq 1.$$

### 3.2 TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO.

En esta sección determinaremos una sucesión  $\{T_n\}$  de puntos construibles con la regla y el compás que nos permitirá aproximar tanto como queramos a la trisección de un ángulo arbitrario.

Supongamos inicialmente que tenemos una regla con marca (o sea con escala) y un compás, y consideremos el ángulo construible  $\angle ABC$  con medida  $\alpha$  (en radianes).



Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que  $A, B, C$  son puntos construibles.

La recta  $L_1$ , paralela al segmento  $\overline{BC}$  y que pasa por el punto  $A$ , es construible.

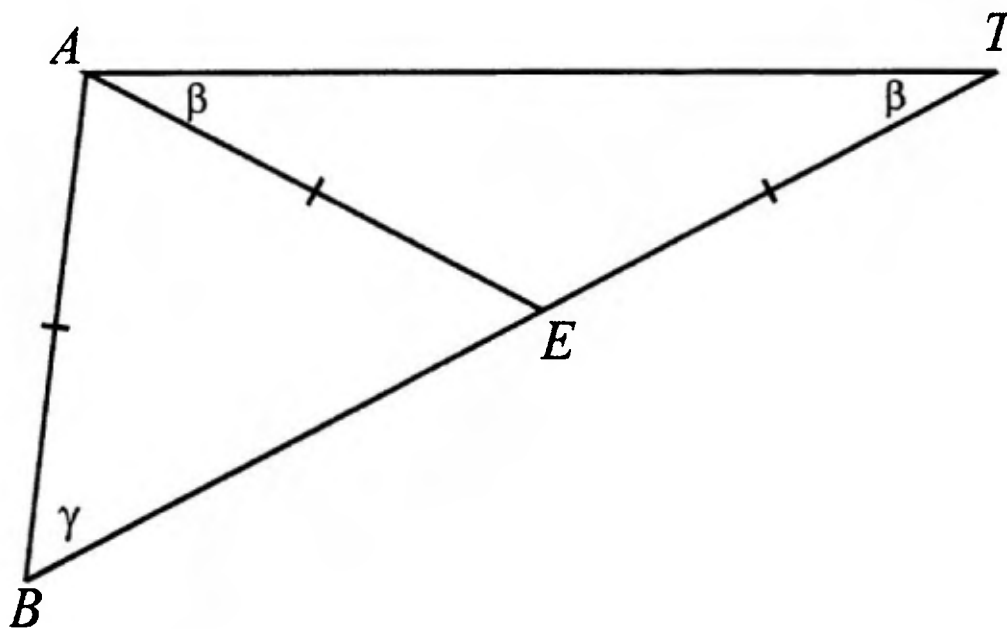
El círculo  $\Gamma$ , con centro  $A$  y radio  $AB$ , es construible por lo tanto, el punto  $D$ , intersección de  $L_1$  y  $\Gamma$  es construible.

Ahora con la regla marcada trace el segmento  $\overline{BT}$ , de tal manera que  $T$  se encuentre en la recta  $L_1$  y  $ET = AB$  (notemos que el segmento  $\overline{BT}$  no es

construible con la regla y el compás, por lo tanto  $E$  y  $T$  no son, necesariamente, puntos construibles).

Probemos que la medida del ángulo  $\angle TBC$  es  $\frac{\alpha}{3}$  (o sea,  $\beta = \frac{\alpha}{3}$ ).

En efecto tracemos partes de la figura anterior



Denotemos  $\gamma = \alpha - \beta$ . De la construcción se tiene que

$$AB = AE = ET$$

y

$$\text{med}(\angle ABE) = \text{med}(\angle BEA) = \gamma$$

$$\text{med}(\angle EAT) = \text{med}(\angle ATE) = \beta$$

Por lo tanto

$$\text{med}(\angle AET) = \pi - 2\beta$$

y

$$\text{med}(\angle BEA) + \text{med}(\angle AET) = \pi$$

o sea

$$\gamma + (\pi - 2\beta) = \pi$$

$$\gamma - 2\beta = 0$$

pero como  $\gamma = \alpha - \beta$ , se tiene que

$$(\alpha - \beta) - 2\beta = 0$$

es decir

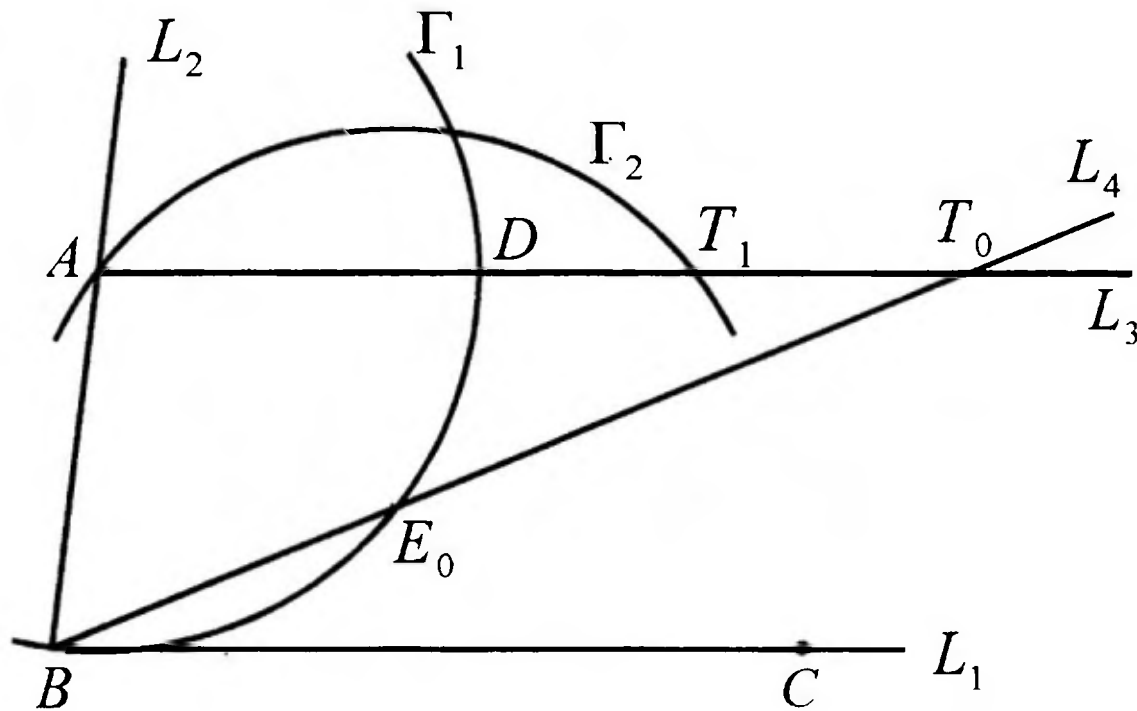
$$\beta = \frac{\alpha}{3}$$

### **OBSERVACIÓN.**

La construcción anterior no es una construcción con la regla y el compás, sin embargo ella nos permite determinar el punto  $T$ , que triseca el ángulo  $\alpha$ . En lo que sigue determinaremos una sucesión de puntos construibles que se aproximan al punto  $T$  tanto como se quiera.

### 3.2.1 APROXIMACIÓN A LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO.

Consideremos el ángulo  $\angle ABC$  y supongamos que los puntos  $A, B, C$  y las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son construibles.



La recta  $L_3$ , paralela a la recta  $L_1$  y que pasa por el punto  $A$  es construible. El círculo  $\Gamma_1$  de centro  $A$  y radio  $AB$  es construible. Por lo tanto el punto  $D$ , intersección de la recta  $L_3$  y el círculo  $\Gamma_1$ , es construible.

Tomemos un punto construible  $T_0$  sobre la recta  $L_3$  y a la izquierda del punto  $A$ .

La recta  $L_4$ , que pasa por los puntos  $B$  y  $T_0$ , es construible.

Por lo tanto el punto  $E_0$ , intersección del círculo  $\Gamma_1$  y la recta  $L_4$ , es construible.

El círculo  $\Gamma_2$ , de centro  $E_0$  y radio el segmento  $\overline{AE_0}$  ( $AE_0 = AB$ ), es construible. Por consiguiente, el punto  $T_1$ , intersección del círculo  $\Gamma_2$  y la recta  $L_3$ , es construible.

El procedimiento anterior para construir  $T_1$  a partir de  $T_0$ , lo llamaremos el **Paso Básico del Método**.

Ahora bien, aplicando el paso básico iterativamente obtenemos una sucesión de puntos construibles  $T_0, T_1, T_2, \dots$  sobre la recta  $L_3$ . Nosotros afirmaremos que la sucesión  $\{T_n\}$  converge al punto  $T$  de trisección del ángulo  $\angle ABC$ .

### **OBSERVACIONES.**

1. La construcción anterior se puede hacer a partir de cualquier punto  $T_0$  (a la derecha del punto  $A$ ) sobre la recta  $L_3$ .
2. A través de la construcción anterior se puede observar que si tomamos  $T_0 = T$ , entonces  $T_1 = T$ . Esto implica que  $T$  es un punto fijo (o invariante) de esta construcción.
3. En lo que sigue supondremos que  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Si  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , el problema se puede reducir a la trisección de un ángulo agudo más la trisección de un ángulo recto, lo cual es trivial.

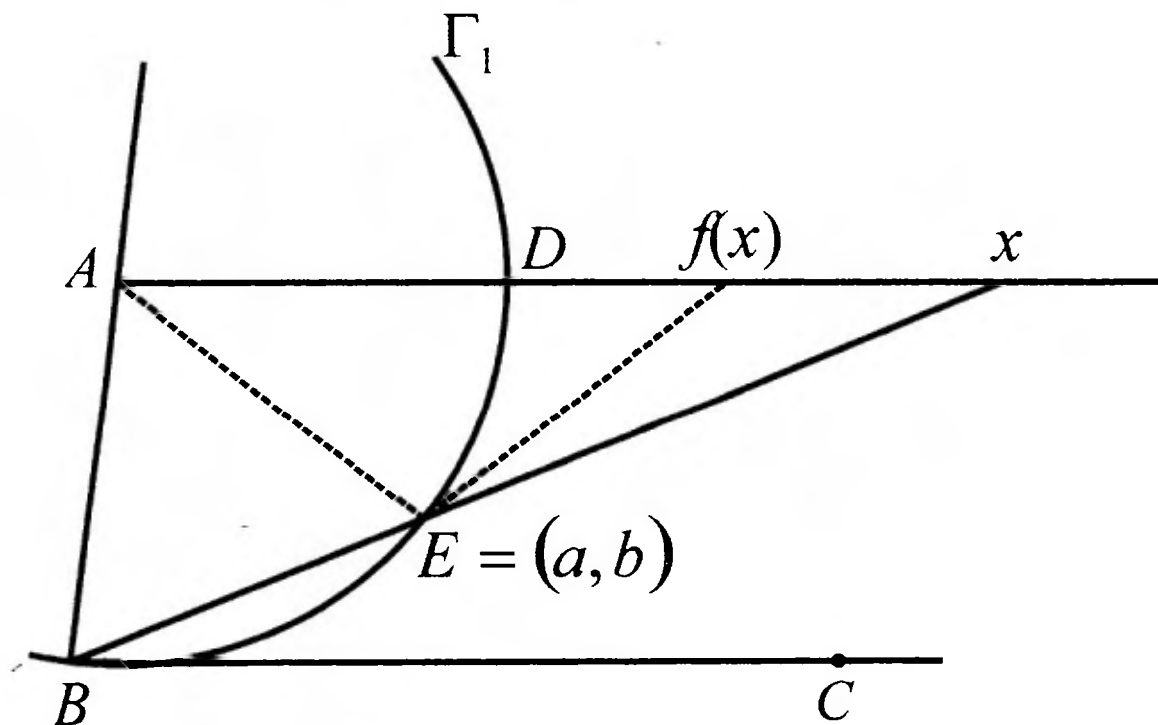
Para probar que la sucesión  $\{T_n\}$  converge a  $T$ , modelaremos la construcción como un problema de punto fijo, en donde tomaremos  $AB = 1$ .

Definamos la función  $f$  de la siguiente manera:

Si  $P(x,0)$ ,  $x > 0$ , entonces:

$$\Phi(p) = (f(x), 0)$$

donde  $f(x)$  está definida por el Paso Básico del Método.



Si  $x = 1$ , entonces  $P(x,0) = P(1,0)$ . Por lo tanto  $f(x) = 2$ .

Si  $x > 1$ , entonces  $f(x) < 2$ , ya que

$$f(x) \leq AE + Ef(x) = 1 + 1 = 2$$

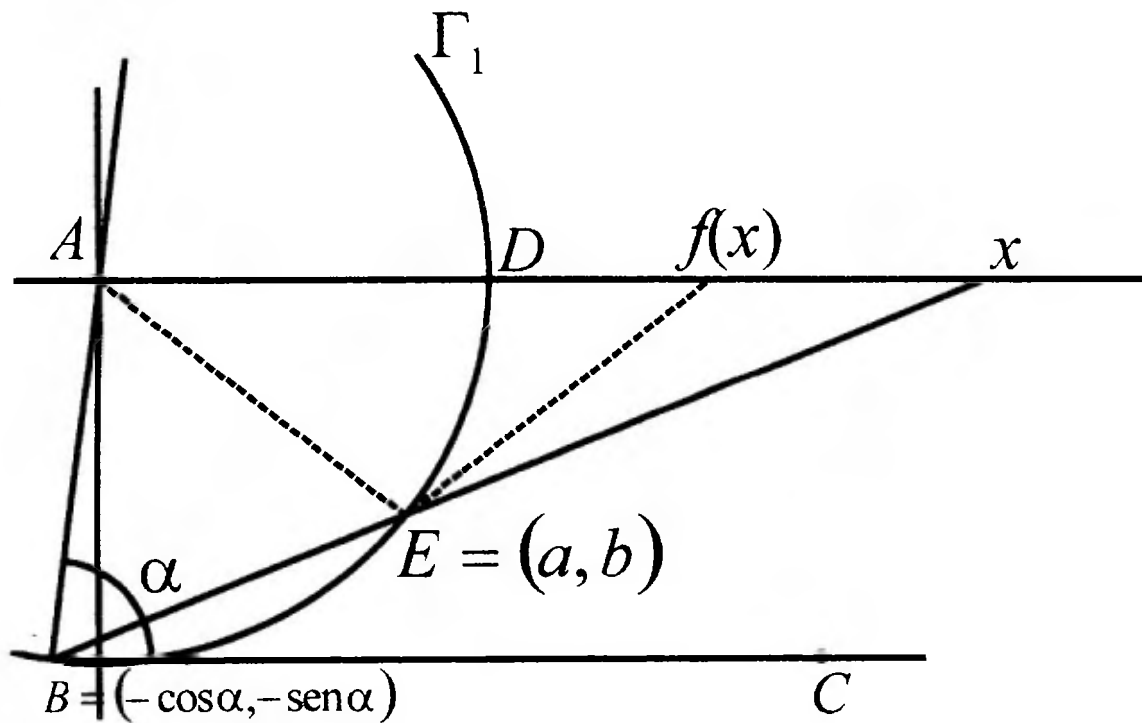
Por lo tanto  $f([1,2]) \subset [1,2]$

No es difícil verificar a través de la construcción anterior, que la función

$$f : [1,2] \rightarrow [1,2]$$

definida por el Paso Básico del Método es continuo en el intervalo cerrado  $[1,2]$ .

De la figura



Se deduce que el punto  $E(a, b)$  es un punto de intersección del círculo unitario y la recta que pasa por los puntos  $(x, 0)$  y  $B(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ . Por lo tanto, el punto  $E(a, b)$  satisface el siguiente sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = \frac{\sin \alpha}{x + \cos \alpha} (a - x) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos:

en  $a^2 + b^2 = 1$  sustituimos  $b = \frac{\sin \alpha}{x + \cos \alpha} (a - x)$  como sigue

$$a^2 + \left[ \frac{\sin \alpha}{x + \cos \alpha} (a - x) \right]^2 = 1$$

$$a^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{(x + \cos \alpha)^2} (a - x)^2 = 1$$

$$(x + \cos \alpha)a^2 + \sin^2 \alpha (a - x)^2 = (x + \cos \alpha)^2$$

$$(x + \cos \alpha)^2 a^2 + \sin^2 \alpha (a^2 - 2ax + x^2) = (x + \cos \alpha)^2$$

resolviendo los cuadrados y agrupando:

$$(x^2 + 2x \cos \alpha + 1)a^2 - 2x \sin^2 \alpha a + x^2 (\sin^2 \alpha - 1) - 2x \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 0$$

$$(x^2 + 2x \cos \alpha + 1)a^2 - 2x \sin^2 \alpha a - (x^2 \cos^2 \alpha + 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$$

Aplicando la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática en la variable "a" tenemos:

$$a = -\frac{(-2x \operatorname{sen}^2 \alpha) \pm \sqrt{(-2x \operatorname{sen}^2 \alpha)^2 - 4 \left[ (x^2 + 2x \cos \alpha + 1) \right] \left[ - (x^2 \cos^2 \alpha + 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \right]}}{2(x^2 + 2x \cos \alpha + 1)}$$

$$a = \frac{2x \operatorname{sen}^2 \alpha \pm 2\sqrt{x^2 \operatorname{sen}^4 \alpha + (x^2 + 2x \cos \alpha + 1)(x^2 \cos^2 \alpha + 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}}{2(x^2 + 2x \cos \alpha + 1)}$$

$$a = \frac{x \operatorname{sen}^2 \alpha}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} \pm \frac{\sqrt{x^2 + \cos^2 \alpha + x^4 \cos^2 \alpha + x^2 \cos^4 \alpha + 2x \cos \alpha + 2x^3 \cos \alpha + 2x^2 \cos^2 \alpha + 2x^2 \cos^2 \alpha + 2x \cos^3 \alpha + 2x^3 \cos^3 \alpha}}{1}$$

$$a = \frac{x \operatorname{sen}^2 \alpha \pm \sqrt{(x + \cos \alpha + x^2 \cos \alpha + x \cos^2 \alpha)^2}}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$$

$$a = \frac{x \operatorname{sen}^2 \alpha \pm (x + \cos \alpha + x^2 \cos \alpha + x \cos^2 \alpha)^2}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$$

de donde tenemos que

$$a_1 = \frac{x \operatorname{sen}^2 \alpha + (x + \cos \alpha + x^2 \cos \alpha + x \cos^2 \alpha)}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$$

y

$$a_2 = \frac{x \operatorname{sen}^2 \alpha - (x + \cos \alpha + x^2 \cos \alpha + x \cos^2 \alpha)}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}$$

La solución de  $a_1$  simplificada es

$$a_1 = \cos \alpha + \frac{2x \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + 2x \cos \alpha + x^2}$$

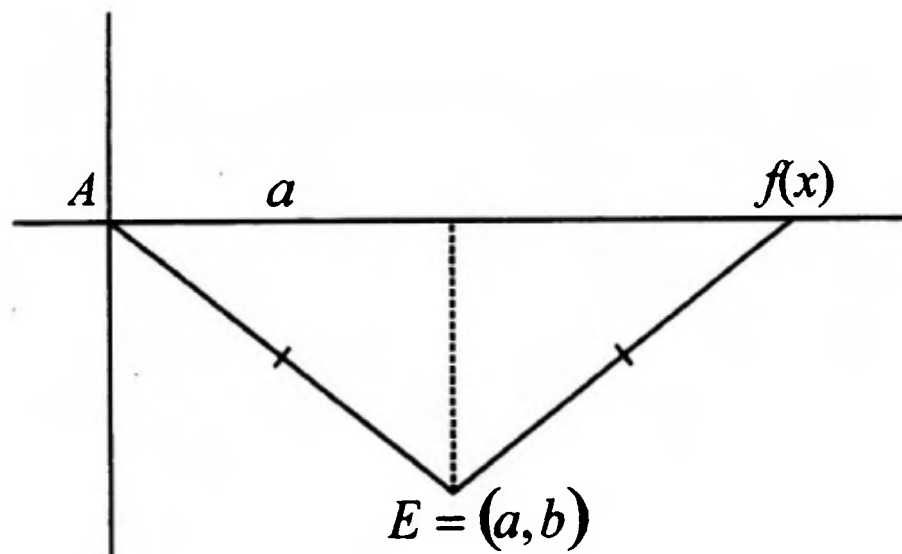
La solución de  $a_2$  simplificada es

$$a_2 = -\cos \alpha$$

Para nuestro estudio utilizamos la solución

$$a_1 = \cos \alpha + \frac{2x \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + 2x \cos \alpha + x^2}$$

Por otro lado de la figura



Se deduce que  $f(x) = 2a$ , por lo tanto

$$f(x) = 2 \cos \alpha + \frac{4x \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + 2x \cos \alpha + x^2}$$

el cual nos ofrece una relación explícita de la función  $f$  en términos de la variable  $x$ .

Derivando la función  $f(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha - 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2} \\ &= \frac{-4(x^2 - 1)\operatorname{sen}^2 \alpha}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2} \end{aligned}$$

Para poder aplicar el Teorema 3.3 a la función  $f$ , debemos acotar la función.

$$|f'(x)| = \frac{4(x^2 - 1)\operatorname{sen}^2 \alpha}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2}$$

sobre el intervalo  $[1,2]$  y para  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Para tal efecto consideremos la función

$$g : \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \mapsto \mathbb{R}$$

$$g(\alpha) = \frac{4(x^2 - 1)\text{sen}^2 \alpha}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2}$$

y calculemos su derivada.

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= 4(x^2 - 1) \left[ \frac{2 \text{sen} \alpha \cos \alpha (1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2 - 2(1 + 2x \cos \alpha + x^2)(-2x \text{sen} \alpha \text{sen} 2\alpha)}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2} \right] \\ &= 4(x^2 - 1) \left[ \frac{2 \text{sen} \alpha \cos \alpha (1 + 2x \cos \alpha + x^2) + 4x \text{sen}^3 \alpha}{(1 + 2x \cos \alpha + x^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Como  $g'(\alpha) \geq 0$  para todo  $\alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  se tiene que  $g$  es una función creciente en  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ . Por lo tanto

$$|f'(x)| \leq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2}$$

Para todo  $x \in [1, 2]$ .

Consideremos ahora la función

$$H : [1,2] \mapsto \mathbb{R}$$

$$H(x) = \frac{4(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2}$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{8x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(2x)(4(x^2-1))}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{8x(1+x^2)^2 - 16x(x^2-1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Si  $H'(x) = 0$ , entonces

$$8x(1+x^2)^2 - 16x(x^2-1) = 0$$

$$8x^3 - 24x = 0$$

Por lo tanto, el valor máximo de  $H$  en  $[1,2]$  lo toma en  $x = \sqrt{3}$  y es  $\frac{1}{2}$ . Por

consiguiente

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Para todo  $x \in [1,2]$ .

Por consiguiente por el Teorema 3.3, la sucesión  $\{T_n\}$  converge a  $T$  para cualquier valor inicial  $T_0(T_0(x_0, 0))$  con  $x_0 \in [1, 2]$  y para cualquier  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Más aún, para cualquier término  $T_n(x_n, 0)$  de la sucesión ( $n \geq 1$ ) se tiene que:

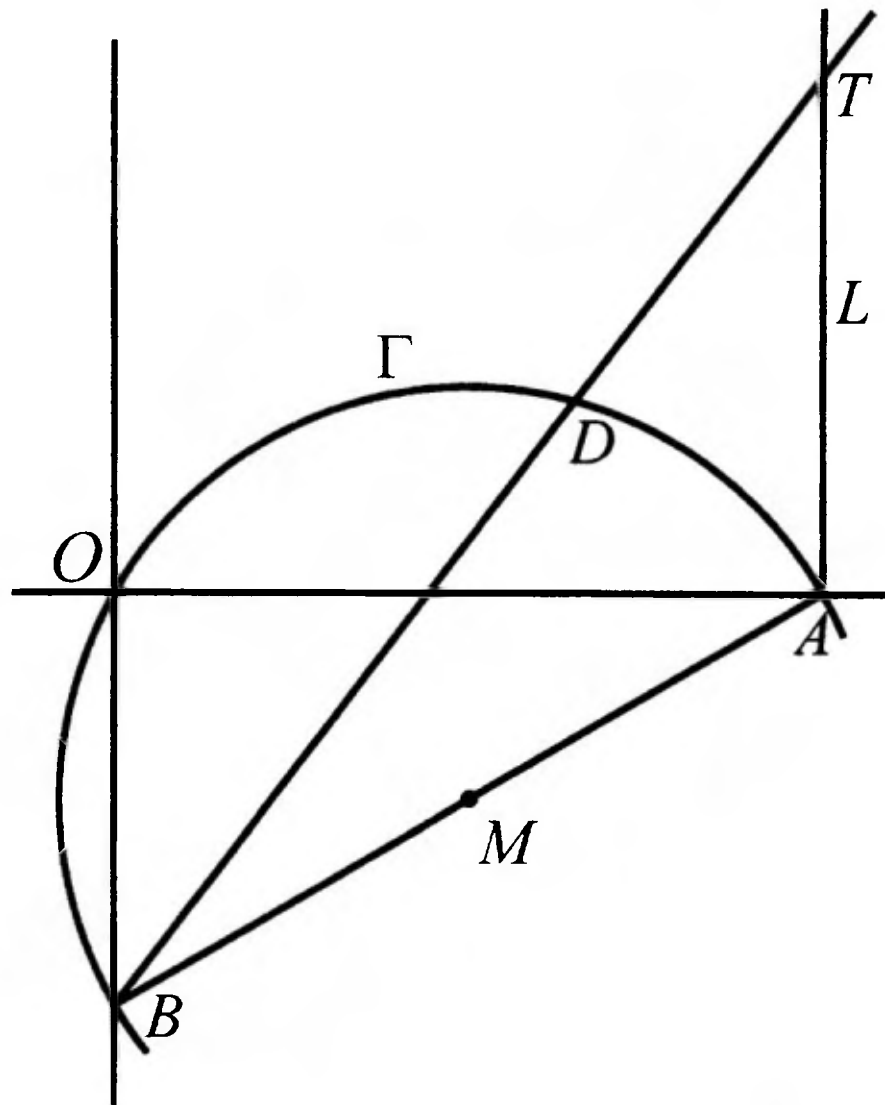
$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - x_0|$$

donde  $x^*$  es el punto fijo de la función  $f$  en  $[1, 2]$  (es decir,  $T = (x^*, 0)$ ).

### 3.3 DUPLICACIÓN DEL CUBO.

Supongamos que queremos duplicar un cubo de lado igual a la unidad. Al igual que en la trisección de un ángulo, supondremos primero que tenemos una regla marcada (o escala) y un compás.

Ahora bien, el eje  $x$  y el eje  $y$  son construibles.



El punto  $B(0,-1)$  es construible. El segmento  $\overline{BA}$  de longitud 2 es construible, por lo tanto el punto  $A$  es construible.

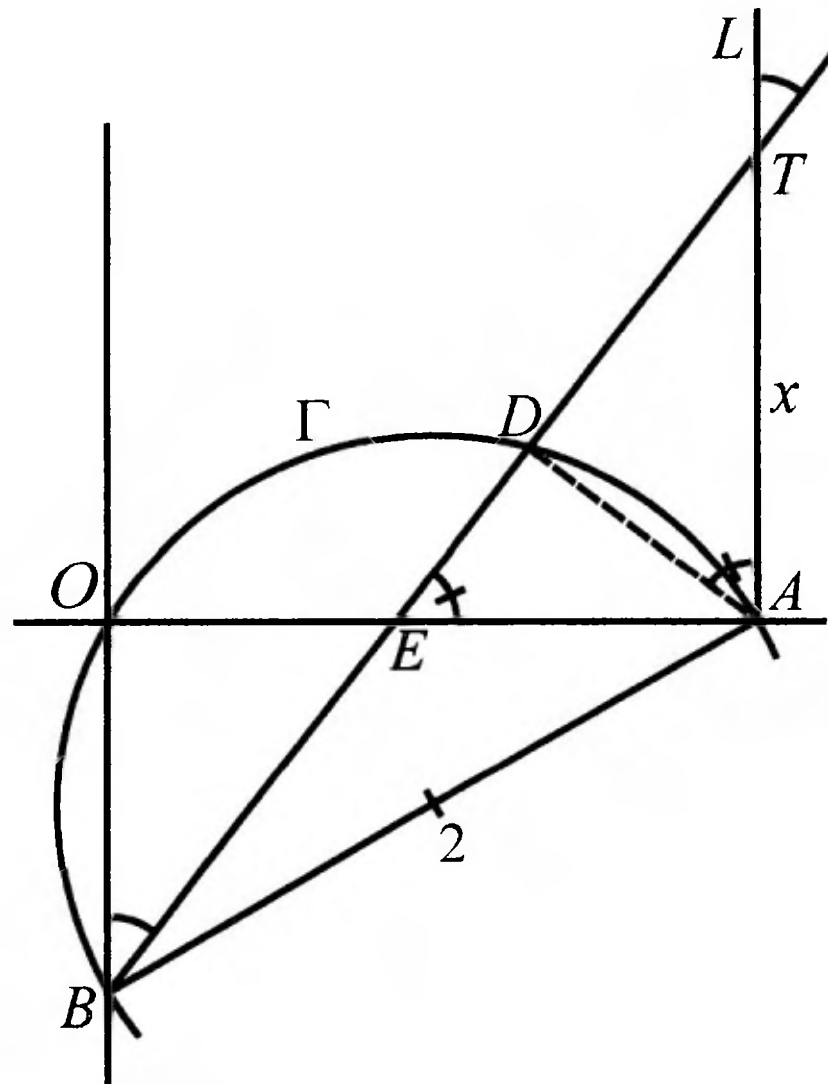
El punto medio  $M$ , del segmento  $\overline{BA}$  es construible. El círculo  $\Gamma$  de centro  $M$  y radio  $MB$ , es construible.

La recta  $L$ , perpendicular al eje  $x$  y que pasa por el punto  $A$ , es construible.

Coloquemos la recta marcada en el punto  $B$  y determinemos un punto  $D$  en el círculo  $\Gamma$  y un punto  $T$  en la recta  $L$ , de tal manera que  $DT = OB = 1$  (note que los puntos  $D$  y  $T$  no son construibles con la regla y el compás).

Probemos que  $AT = \sqrt[3]{2}$ , el cual es la longitud del lado del cubo con volumen igual a 2.

En efecto, tracemos la figura anterior nuevamente.



Designemos  $AT = x$  y notemos que

$$OB = DT = 1$$

$$BA = 2$$

y además que los triángulos  $\Delta ADT$  y  $\Delta EAT$  son triángulos rectángulos.

Como los triángulos rectángulos  $\Delta ADT$  y  $\Delta EAT$  tienen los mismos ángulos (un ángulo de  $90^\circ$  y el ángulo  $\angle ATD$  en común, por lo tanto sus terceros ángulos son iguales), ellos son semejantes. Por consiguiente

$$\frac{DT}{AT} = \frac{AT}{TE}$$

o sea

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{TE}$$

Por lo tanto

$$TE = x^2$$

Como además los triángulos  $\Delta ETA$  y  $\Delta BOE$  son semejantes, se tiene que:

$$\frac{BO}{BE} = \frac{AT}{TE}$$

o sea

$$\frac{1}{BE} = \frac{X}{X^2}$$

Por lo tanto

$$BE = X$$

Como  $OB = 1$  y la hipotenusa del triángulo  $\Delta BOA$  tiene longitud igual a 2, obtenemos que  $OA = \sqrt{3}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= OE + EA \\ &= \sqrt{(BE)^2 - (OB)^2} + \sqrt{(TE)^2 - (AT)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^4 - x^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 1} + x\sqrt{x^2 - 1} \\ &= (1 + x)\sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos

$$3 = (1 + x)^2(x^2 - 1)$$

$$3 = x^4 - 2x^3 - 2x - 1$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

$$(x+2) \cdot (x^3 - 2) = 0$$

Como  $x \neq -2$  se tiene que,  $x = \sqrt[3]{2}$  que es lo que se quería probar.

### **OBSERVACIONES.**

1. En la construcción anterior se tiene que

$$BE = AT$$

2. Como  $B(0, -1)$ ,  $A(\sqrt{3}, 0)$ ,  $T(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$  y  $BE = AT = \sqrt[3]{2}$  se tiene que la ecuación de la recta  $L^*$  que pasa por los puntos  $B$  y  $T$  es

$$y + 1 = \left( \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) x$$

Luego como la recta  $L^*$  pasa por el punto  $E$  se tiene que

$$E = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2} + 1}, 0 \right)$$

Ahora bien como  $BE = \sqrt[3]{2}$ , se tiene que

$$\sqrt[3]{2} = BE$$

$$= \sqrt{(BO)^2 + (EO)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2 + 2\sqrt[3]{2} + 4}}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

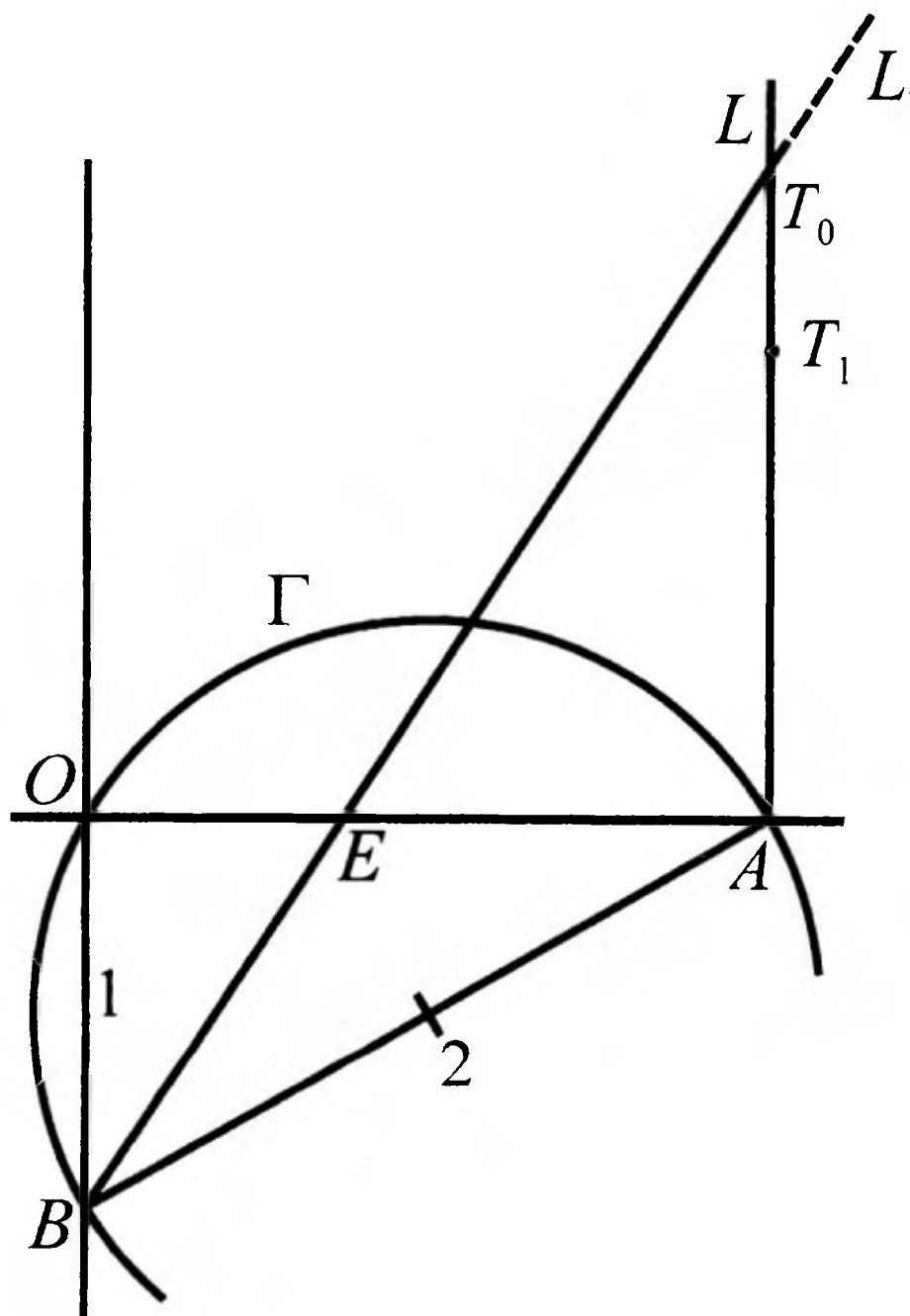
3. La construcción anterior no es una construcción con la regla y el compás; sin embargo, ella nos permite determinar un punto  $T(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$  con el cual podemos duplicar el cubo. En lo que sigue determinaremos una sucesión  $\{T_n\}$  de puntos construibles con la regla y el compás que se aproxima al punto  $T$  tanto como se quiera.

### 3.3.1 APROXIMACION A LA DUPLICACIÓN DEL CUBO.

Los ejes de coordenadas son rectas construibles. Los puntos  $O(0,0)$  y  $B(0,-1)$  son puntos construibles.

El círculo  $\Gamma_1$  de centro  $B$  y radio 2 es construible, por lo tanto el punto  $A$ , intersección del eje  $X$  con el círculo  $\Gamma_1$ , es construible (Note que  $A(\sqrt{3},0)$ ).

El punto medio  $M$  del segmento  $\overline{BA}$  es construible y el círculo  $\Gamma$  de centro  $M$  y radio  $OB = 1$  es construible.



La recta  $L$ , perpendicular al eje  $X$  y que pasa por el punto  $A$  es construible.

Tomemos un punto construible arbitrario  $T_0(\sqrt{3}, x), x > 0$ , sobre la recta  $L$ .

La recta  $L_2$ , que pasa por los puntos  $B$  y  $T_0$ , es construible; por lo tanto el punto  $E$ , intersección del eje  $X$  con la recta  $L_2$ , es construible. Luego el segmento  $\overline{BE}$  es construible. Por consiguiente el punto  $T_1(\sqrt{3}, BE)$  sobre la recta  $L_1$  es construible.

El proceso anterior para construir  $T_1$ , a partir de  $T_0$ , lo llamaremos el **Paso Básico del Método**.

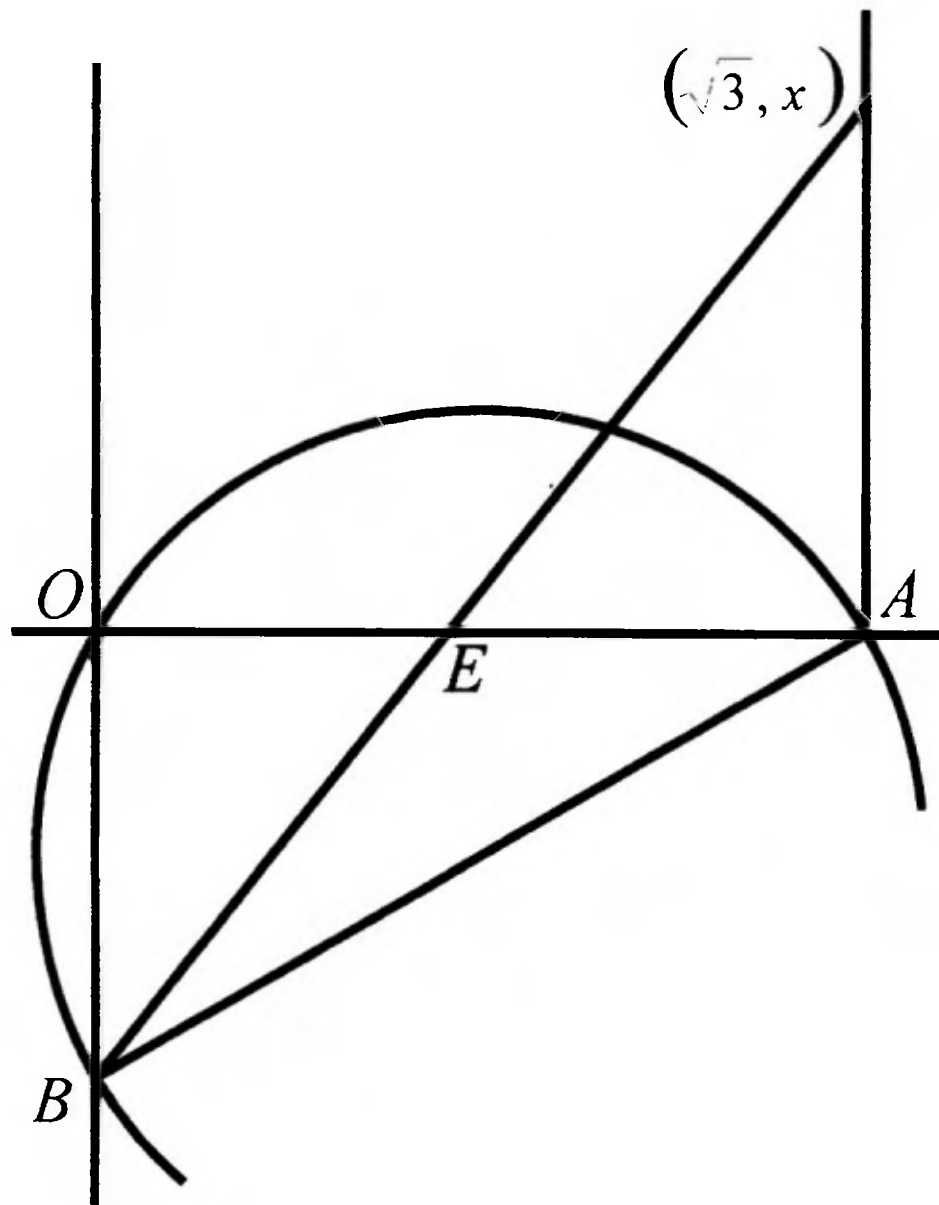
Ahora bien, aplicando el paso básico iterativamente obtenemos una sucesión de puntos construibles  $T_0, T_1, T_2, \dots$  en la recta  $L_1$ . Nosotros afirmamos que la sucesión  $\{T_n\}$  converge al punto  $T$  en la recta  $L_1$ , el cual permite duplicar el cubo.

En efecto definiremos la función  $f$  de la siguiente manera:

Si  $P(\sqrt{3}, x), x > 0$ , entonces

$$\phi(P)(\sqrt{3}, f(x))$$

donde  $f(x)$  está definido por el Paso Básico del Método.



$$f(x) = \text{dist}(B, E)$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos

$B(0, -1)$  y  $(\sqrt{3}, x)$  es:

$$y = \left( \frac{x+1}{\sqrt{3}} \right) t - 1$$

Como esta recta pasa por el punto  $E$ , se tiene que las coordenadas del punto  $E$  son

$$E \left( \frac{\sqrt{3}}{x+1}, 0 \right)$$

por lo tanto

$$f(x) = \text{dist}(B, E) = \sqrt{1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{1+x} \right)^2}$$

o sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x + 1}$$

la cual nos ofrece una relación explícita de la función  $f$  en términos de la variable  $x$ .

De la Observación 2 se tiene que

$$f(\sqrt[3]{2}) = \frac{\sqrt{(\sqrt[3]{2})^2 + 2(\sqrt[3]{2}) + 4}}{\sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{2}$$

es decir,  $\sqrt[3]{2}$  es un punto fijo de  $f$  y  $T(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$  es un punto fijo de  $\phi$ .

A partir de la construcción de  $f(x)$  se tiene que

$$1 < f(x) \leq 2$$

por consiguiente

$$f([1,2]) \subset [1,2]$$

además es claro que la función

$$f: [1,2] \mapsto [1,2]$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x + 1}$$

es continua en  $[1,2]$ .

Por otro lado

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x - 3}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

$$|f'(x)| = \frac{x^2 + x + 3}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

Para poder aplicar el Teorema 3.3 a la función  $f$ , debemos acotar la función

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 3}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

sobre el intervalo  $[1,2]$ . En efecto,

$$g'(x) = \frac{-x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 13x - 36}{(x+1)^3 (x^2 + 2x + 4)^{3/2}}$$

luego

$$g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in [1,2]$$

por lo tanto la función  $g$  es decreciente en el intervalo  $[1,2]$ .

Así pues

$$|f'(x)| \leq g(1) = \frac{5}{4\sqrt{7}} < 1$$

Para todo  $x \in [1,2]$ . Por consiguiente, por el Teorema 3.3 la función  $f$  tiene un único punto fijo en  $[1,2]$  y la sucesión  $\{T_n\}$  converge a  $T$  para cualquier punto  $T_0 = (\sqrt{3}, x_0)$  con  $x_0 \in [1,2]$ .

Más aún, para cualquier término  $T_n = (\sqrt{3}, T_n)$  de la sucesión ( $n \geq 1$ ) se tiene que:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{4\sqrt{7}}{4\sqrt{7} - 5} \left( \frac{5}{4\sqrt{7}} \right)^n |x_1 - x_0|$$

donde  $x^*$  es el punto fijo de la función  $f$  en  $[1,2]$  (es decir,  $T = (\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$ ).

## *CONCLUSIONES*

Después de haber culminado este trabajo hemos llegado a las siguientes conclusiones.

1. La Geometría en el sentido en que los griegos la comprendían fue un obstáculo para la solución de muchos problemas que requerían ramas de las matemáticas que ellos no habían descubierto.
2. Los esfuerzos realizados para resolver los tres problemas griegos fueron una gran estimulación para el desarrollo de nuevas matemáticas.
3. Teniendo claro los conocimientos de geometría elemental podemos realizar demostraciones haciendo uso de la regla y del compás de problemas un poco complicados.
4. Utilizando herramientas algebraicas podemos encontrar soluciones a problemas de tipo geométrico.
5. Utilizando herramientas Euclideas y del análisis matemático (T. del P. F.) podemos aproximarnos a través de una sucesión de puntos construibles a la solución de los Problemas Griegos.
6. La incapacidad para la construcción de un Álgebra Deductiva significa que el rigor matemático quedó confinado a la Geometría; de hecho, éste siguió siendo el caso hasta los siglos XVII y XVIII, cuando el Álgebra y el Cálculo ya se habían extendido.

## ***BIBLIOGRAFÍA***

1. **BOLLOBÁS, Bela** Linear Analysis and Introductory Course. Cambridge University Press. New York. 1990.
2. **BOYER, Carl B.** A History of Mathematics. Nueva York, Jhon Wiley & Sons. 1968.
3. **CARREGA, Jean Claude.** Théorie Des Corps: La règle et le compás. 1981, Herman. pp 253.
4. **CLAUDE, Mutaflan.** Equations Algebriques: El Theorie de Galors.
5. **COLLETTE, Jean Paul** Historia de las matemáticas I y II. Editorial siglo veintiuno. México, España, Argentina, Colombia 1991.
6. **COURANT Richard, y HERBERT Robbins** ¿Qué es la matemática? Editorial Aguilar. 1971. pp. 533.
7. **CREIGHTON BUCK, R.** Advanced Calculus. Library of Congress Cataloging in Publication Data. Mc Graw – Hill Book Company New York 1978.
8. **DEDRON, Pierre Jeanitard** Mathématiques et mathematiciens. París, Magnard, 1959.
9. **DUNIFORD SCH., y DUNFORD, Sächwartz** Linear Operations. Parte I. Interscience Publishers, inc. N 7. 1957.

10. **EVES**, Howard An Introduction to the History of Mathematics. V edición. Editorial the Saune Series. 1983.
11. **EVES**, Howard. An Introduction to the History of Mathematics, 3<sup>o</sup> edición. Nueva York. Hult, Rinehart and Winston, 1969.
12. **FISCHER**, Emanuel Intermediate Real Analysis. Springer – Verlay. New York 1983.
13. **FLETT**, T. M. Differential Analysis. Cambridge University Press 1980. Cambridge London New York new Rochelle Melbourne Sydney.
14. **FRALEIGH**, John B. Álgebra Abstracta. Editorial SITESA México. 1987.
15. **GLEASON**, Andrew M. Fundamentals of Abstract Analysis. Addison - Wesley Publishing Company. Reading Massachusetts 1966.
16. **HABEGGER**, Philip The trisection problem en Historical topics for the matematics classroom. The National Council of Teachers of mathematics Washington D. C., N. C., T. M. 1969.
17. **HEATH**, Sir Thomas L. A manual of Greek Mathematics. Nueva York Dover, 1963.

18. **HERNÁNDEZ C.** Edith de, y **ORTÍZ,** Josue Construcciones con la regla y el compás. sep. 1992.
19. **HEWILT,** Edwin, **STROMBERG,** Karl. Read and Abstract Analysis. Springer - Verlag.
20. **KLEIN,** Felix Famous problems of elementary geometry. Nueva York. Dover 1956.
21. **KLINE,** Morris El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días, I y II. Alianza Universidad. 1972.
22. **KOSTOVSKI,** A. N. Construcciones Geométricas mediante compás. lecciones populares de matemática. Editorial M. R. Moscú. pp 79.
23. **KREYSZIG,** E. Introductory Functional Analysis with aplicaciones. John Wiley Sons. New York 1978.
24. **KREYSZIG,** E. Introductory Funcional Analysis with Aplications. Wiley Classics Library. Edition Published. 1989. John Wiley & Sons.
25. **LEE,** Anderson Duplicacion of the cube, en Historical topis for the mathematics class room, 31 st yearbook. The National Council of Teachers of Mathematics, Washington P. C. N. C. T. M. 1969.

26. **LEVI** Shivel P. H. D. Introducción a la Geometría Moderna. Cía Editorial Continental. S. A. De C. V. México pp. 258.
27. **MOISE**, Edwin B. Elementos de Geometría Superior. Centro Regional de ayuda técnica agencia para el desarrollo internacional (A.I.D.), México.
28. **MOISE**, Edwin E. Matemática Moderna Geometría. Fondo Educativo Interamericano S. A. Editorial Norma Cali Colombia 1972.
29. **SHIVELY**, Levi S. Introducción a la Geometría Moderna. Editorial Continental, S. A. de C. V. México 1984.
30. **SIMONS**, G. Introducción to Topology and Modern Analysis. Mac Graw Hill, New York. 1965.
31. **STROMBERG**, Karl R. Introduction to classical real analysis. Wadsworth Internacional group adivision of wadsworth, INC, 1981 Belmont, California.
32. Vol 26 N°3 Mayo 1995 The college Matemáticas Journall. pp 258.
33. **ZEIDLER**, Eberhard. Nonliner Funtional Analysis and its applications I Fixed - Pound Theorems. Springer - Verlag 1986. New York.