

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA PURA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y
TECNOLOGÍA**

ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES

JOSÉ I. LEZCANO F.

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA
OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA PURA**

**PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ
2015**



Titulo de la Tesis:
"ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES"

TESIS

Sometida para optar al título de Maestría en Matemática

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología

APROBADO POR:

**Doctor Jorge Hernández U.
Presidente**

**Doctor Jaime Gutiérrez
Miembro**

**Profesor Simón Vásquez
Miembro**

REFRENDADO POR:

**REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**

FECHA:

ST

23 MAR 2016

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Isidoro Lezcano y María Fuentes

A mis abuelas Máxima Lezcano (q. e. p. d.) y Cleofe Fuentes, quienes han sido como ángeles guardianes a lo largo de mi vida

A mi esposa Ceyna Muñoz quien a lo largo de estos años siempre estuvo a mi lado brindandome todo su amor y su apoyo

Dhs.

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso por darme la sabiduría, la fortaleza y el entendimiento para culminar satisfactoriamente este trabajo

Merece un agradecimiento muy especial el Dr. Jorge Hernández por brindarme su amistad y su apoyo, aceptando gentilmente dirigir, en forma satisfactoria, la presente tesis.

A los profesores del programa de maestría en matemática por compartir todos sus conocimientos para la realización de este trabajo.

A toda mi familia, quienes en todo momento estuvieron a mi lado, brindándome su confianza y apoyo.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Introducción	II
1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS	1
1.1. Espacios Métricos	3
1.2. Espacios Topológicos	9
1.3. Teoría del Orden	21
1.4. Axiomas de Separación	23
2. ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES	26
2.1. Autodistancia Diferente de Cero (0)	28
2.2. Espacios Métricos Parciales	33
2.3. Espacios Cuasimétricos	80
3. TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES...	99
3.1. Topología de los Espacios Métricos Parciales	100
3.2. Topología de los Espacios Cuasimétricos	114

3.3 Teorema de la Función Contráctil	120
Conclusiones y Recomendaciones	VII
Bibliografía	VIII

Resumen

En el presente trabajo se modifica el axioma de separación de los espacios métricos para introducir los espacios métricos parciales, en los cuales la autodistancia no es necesariamente cero. También se definen los espacios cuasimétricos y se estudian las propiedades topológicas de estos nuevos espacios. Se define una relación de orden en estos espacios la cual permite identificar su topología con las topologías de Alexandrov de los conjuntos parcialmente ordenados. Posteriormente se introducen las nociones de convergencia, sucesiones de Cauchy y espacios completos. Se desarrollan una serie de ejemplos que ilustran los conceptos introducidos y a la vez sirven como contraejemplos para mostrar la independencia de las definiciones presentadas. Finalmente se prueba un teorema del punto fijo para las funciones contráctiles definidas sobre espacios métricos parciales completos.

Summary

In this work the separation axiom of metric spaces are modified to introduce partial metric spaces, in which the auto distance is not necessarily zero. Quasi-metric spaces are also defined and their topological properties are studied. An order relationship is defined in these spaces that allow their topology to be identified with the topologies of Alexandrov of partially ordered sets. Subsequently, the notions of convergence, Cauchy sequence, and complete spaces are introduced. A number of examples that illustrate the introduced concepts were developed that also serve as counterexamples to demonstrate the independence of the definitions that are presented. Finally, a fixed-point theorem is proven for the contraction mappings defined over complete partial metric spaces.

INTRODUCCIÓN

Nuestro centro de estudio son los espacios métricos parciales, los cuales son una generalización de los espacios métricos

Los *espacios métricos* fueron introducidos a principios del siglo *XX* por el matemático francés, Rene Maurice Frechet en sus tesis doctoral. Los espacios métricos están formados por un conjunto no vacío y una función. A esta función se le conoce con el nombre de *métrica* o *distancia* y por lo general se denota con la letra *d*

Al igual que en los espacios métricos, los espacios métricos parciales están formado por un conjunto no vacío y una función. A esta función se le conoce con el nombre de *pmétrica*, la cual toma dos puntos del conjunto y la lleva a un número real no negativo

En los espacios métricos parciales la *pmétrica* de un punto a el mismo no es necesariamente cero. Esto provoca una reacción en cadena, pues para homologar los axiomas de *métrica* hay que realizar cambios sustanciales en los mismos

Se mostrará como a partir de espacios métricos parciales se pueden construir espacios métricos y espacios cuasimétricos. Además, cómo a partir de espacios métricos y espacios cuasimétricos se pueden construir espacios métricos parciales. Además se mostrarán, algunos ejemplos de espacios que cumplan estas situaciones.

Se presentarán las propiedades, teoremas y situaciones que se mantienen o se pue-

den homologar de los espacios métricos a los espacios métricos parciales. En particular se le darán respuestas a las siguientes interrogantes

- * ¿Se podrán construir espacios topológicos a partir de espacios métricos parciales? y ¿Qué axiomas de separación cumplen?
- * ¿Cuándo un espacio métrico parcial es completo?
- * Dada una sucesión en un espacio métrico parcial, ¿Cuándo es convergente?
- * ¿Cuándo una sucesión en un espacio métrico parcial es de Cauchy?
- * Finalmente, ¿Cuándo un espacio métrico parcial es completo?

Por razones didácticas el trabajo se ha estructurado en tres capítulos.

En el primer capítulo se presentan los resultados básicos de los espacios métricos y de la topología que son necesarios para desarrollar la teoría de los espacios métricos parciales y los espacios cuasimétricos

El segundo capítulo está dedicado al estudio de los espacios métricos parciales y los espacios cuasimétricos. Se presentan una serie de ejemplos que ilustran los conceptos introducidos. Se define una relación de orden en cada uno de estos espacios y se presentan una serie de teoremas que permiten construir ejemplos de espacios métricos parciales y espacios cuasimétricos.

En el tercer capítulo se construye la topología de los espacios métricos parciales y de

los espacios **cuasimétricos**. Se introducen los **conceptos de convergencia, sucesión de Cauchy** y **espacios completos**. Finalmente se **demuestra un teorema de punto fijo** para **funciones contractibles** definidas en **espacios métricos parciales completos**.

Capítulo 1

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

En la actualidad, la topología es básica en la formación de cualquier matemático. Esta se encuentra presente en casi todas las áreas de las Matemáticas: el Álgebra, la Geometría, el Análisis, entre otras. La topología nos facilita el tratamiento de numerosos problemas e incluso nos permite abordar otros que no tienen un origen estrictamente topológico. La topología alcanzó su **madurez**, es decir, se han fijado las definiciones fundamentales, el perfil de su actuación, los problemas que se ocupa, en las primeras décadas del siglo XX, a partir de los trabajos de **F. Hausdorff** (1914), **P. Alexanderoff** (1926) y **W. Sierpinski** (1928). A partir de ese momento, la Topología inicia un rápido desarrollo hasta convertirse, como ya hemos dicho, en un área imprescindible de la matemática.

Sus inicios pueden situarse un poco más temprano, en el siglo **XVIII**. En esta época se empiezan a estudiar problemas que no dependen de la distancia o el tamaño, sino del lugar, de las conexiones, entre otras. Fue **G. Leibniz** el primero en referirse a este tipo de problemas.

Un ejemplo de espacios topológicos son los espacios métricos introducidos por el matemático francés Maurice Rene Fréchet en 1906. Un espacio métrico es un conjunto no vacío en el que se define una función que relaciona dos puntos del conjunto y satisfacen una serie de axiomas.

En la siguiente sección definiremos las nociones de distancia o métrica y de espacio métrico, mencionaremos algunos ejemplos, introduciremos los conjuntos abiertos en

espacios métricos y utilizaremos estos conjuntos para definir convergencia de sucesiones en esta clase de espacios. Además veremos los conceptos de sucesiones de Cauchy y de espacios métricos completos

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1.1 (Métrica) Sea X un conjunto no vacío. Una **distancia o métrica** en X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

M_0) Para todo $x, y \in X$ se tiene que $d(x, y) \geq 0$

M_1) $d(x, x) = 0$, para todo $x \in X$.

M_2) Para todo $x, y \in X$, si $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$.

M_3) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.

M_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

La expresión $d(x, y)$ se lee "la distancia de x a y ".

Un **espacio métrico** es un conjunto X equipado con una métrica d . Usualmente, el espacio métrico se denota como un par (X, d) .

Es importante resaltar que sobre un conjunto X pueden, en general, definirse métricas distintas, las cuales dan origen a espacios métricos diferentes

Como muchos conceptos matemáticos estos axiomas se eligen para asegurar que dos objetos son iguales si, y sólo si, algunas propiedades se pueden expresar en términos de un sólo concepto. Para espacios métricos, $x = y$ si, y sólo si, $d(x, y) = 0$. Así existe la relación de igualdad $x = y$ en espacios métricos, teniendo lo que llamamos una **relación sin distancia**. Lo que nos dice que x e y son iguales si, y sólo si, x e y no tienen ninguna distancia entre ellos. Sin embargo, existe un precedente de larga data para relajar estos axiomas garantizando esta identificación. La relación definida por $x \equiv y$ si, y sólo si, $d(x, y) = 0$ es una equivalencia, que puede ser útil, como en la construcción de los clásicos espacios l^p y L^p

Ejemplo 1.1.1 *El conjunto de los números reales \mathbb{R} con la función*

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

$$d(x, y) = \max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$$

*(\mathbb{R}^+, d) es un espacio métrico. A la métrica d se le llama **métrica usual** de \mathbb{R} .*

La prueba de que (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico se deducen de las propiedades de la función valor absoluto.

Ejemplo 1.1.2 Sea

$$X = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$$

y definamos la función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Entonces (X, d) es un espacio métrico

Note que si tomamos

$$Y = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es Riemann integrable}\}$$

entonces la función

$$d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

no es una métrica sobre Y

Definición 1.1.2 Sea X un conjunto. Una **seudométrica** o **semimétrica** sobre X

es una función

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

que satisface las siguientes propiedades

$$S_0) \rho(x, y) \geq 0, \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$S_1) \rho(x, x) = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

$$S_2) \rho(x, y) = \rho(y, x), \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$S_3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \text{ para todo } x, y, z \in X$$

Un **espacio pseudométrico** es un conjunto X equipado con una pseudométrica ρ y se denota por (X, ρ)

Definición 1.1.3 Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

se llama la **bola abierta** de centro x y radio ε .

El conjunto

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

se llama **bola cerrada** de centro x y radio ε , y el conjunto

$$S(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$$

se llama **esfera** de centro x y radio ε

Definición 1.1.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X .

Decimos que un punto $x \in X$ es **límite** de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq N$. En este caso decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge a x** o que **tiene límite x** o que **tiende a x** , y lo denotamos por

$$\lim x_n = x \quad \text{o} \quad x_n \rightarrow x$$

Definición 1.1.5 Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $m, n \geq N$, entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

O sea, una sucesión es de Cauchy si sus términos están finalmente tan próximos entre sí como se desee. Esto le ocurre a toda sucesión convergente, pues si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L , entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ de modo que para todo $n \geq N$ se cumple $d(x_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego si $m, n \geq n_0$ se cumple

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, L) + d(L, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así pues, toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco no es cierto

Definición 1.1.6 *Un espacio métrico X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Ejemplo 1.1.3 *El conjunto de los números reales \mathbb{R} con la métrica usual*

$$d(x, y) = |x - y|$$

es un espacio métrico completo.

Observaciones:

1. Todo conjunto cerrado en un espacio métrico completo es completo.
2. Todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

Definición 1.1.7 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y f una aplicación. Se dice que f es **contractiva** si existe un k , $0 \leq k < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

*para cualquiera $x, y \in X$. Un **punto fijo** x_0 de f es un punto de X talque $f(x_0) = x_0$.*

Teorema 1.1.1 *Teorema de la Función Contractiva o Punto Fijo.*

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva en X . Entonces existe un único punto fijo de f

1.2. Espacios Topológicos

Definición 1.2.1 *Una Topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X tal que*

T₁) \emptyset, X pertenecen a τ .

T₂) Toda unión de elementos de τ es un elemento de τ .

T₃) La intersección finita de elementos de τ es un elemento de τ .

En este caso decimos que (X, τ) , o simplemente X es un espacio topológico. A los elementos de la topología τ se le llaman abiertos.

Usando esta terminología podemos decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X , llamados *conjuntos abiertos*, tales que \emptyset

y X son ambos abiertos, \forall tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos

Definición 1.2.2 Sean τ_1, τ_2 dos topologías sobre un conjunto X . τ_1 es **más gruesa o más débil** que τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, en este caso se dice también que τ_2 es **más fina** que τ_1 . Si τ_1 está contenida propiamente en τ_2 se dice que τ_1 es **estrictamente más débil** que τ_2 o que τ_2 es **estrictamente más fina** que τ_1 . Además τ_1 y τ_2 son comparables si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ó $\tau_2 \subseteq \tau_1$

Definición 1.2.3 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, A es un **conjunto cerrado** de X si $A^c = X - A$ es abierto.

Como ocurre en casi todos los conceptos matemáticos que se definen, cada uno de ellos presentan propiedades y los conjuntos cerrados no son la excepción, a continuación se presentan alguna de ellas.

Teorema 1.2.1 Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} la colección de los subconjuntos cerrados de X . Entonces:

F₁) \emptyset, X son elementos de \mathcal{F} .

F_2) Toda intersección de elementos de \mathcal{F} es un elemento de \mathcal{F} .

F_3) La unión finita de elementos de \mathcal{F} es un elemento de \mathcal{F}

Recíprocamente, dado un conjunto X y una familia \mathcal{F} de subconjuntos de X que satisfacen $F.1.$, $F.2.$ y $F.3.$, entonces la colección de los complementos de los elementos de \mathcal{F} es una topología sobre X en la cual \mathcal{F} es justamente la familia de los conjuntos cerrados de X .

Definición 1.2.4 Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $V \subset X$, V es una **vecindad** de x si existe un abierto G en X tal que

$$x \in G \subset V$$

El conjunto de todas las vecindades de x se denota por $V_{(x)}$ y se llama **sistema de vecindades** de x .

Note que de esta definición podemos deducir que una vecindad no es necesariamente un conjunto abierto de la topología, pero todo conjunto abierto de la topología es una vecindad para cada uno de sus respectivos puntos. Cada vecindad de un punto contiene una vecindad abierta del punto.

De estos comentarios se desprende el siguiente teorema que muestra una relación entre las vecindades de un punto y los conjuntos abiertos de una topología

Teorema 1.2.2 *Dado un espacio topológico (X, τ) . Un conjunto es abierto si, y sólo si, contiene una vecindad de cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.2.3 *Sea X un espacio topológico. El sistema de vecindades de x tiene las siguientes propiedades:*

N₁) *Si $U \in V_{(x)}$, entonces $x \in U$.*

N₂) *Si U, V pertenecen a $V_{(x)}$, entonces $U \cap V \in V_{(x)}$.*

N₃) *Si $U \in V_{(x)}$, entonces existe un $V \in V_{(x)}$ tal que $U \in V_{(y)}$, para todo $y \in V$.*

N₄) *Si $V \in V_{(x)}$ y $V \subset U$, entonces $U \in V_{(x)}$.*

N₅) *$G \subset X$ es abierto si y sólo si $G \in V_{(x)}$ para todo $x \in G$.*

Recíprocamente si para cada $x \in X$ existe una colección $V_{(x)}$ de subconjuntos de X que satisfacen de N_1 hasta N_4 y si N_5 se usa para definir los conjuntos abiertos, entonces el resultado es una topología sobre X en la cual el sistema de vecindades para cada $x \in X$ es precisamente $V_{(x)}$.

Como hemos visto, en un espacio topológico, la topología que se genera en dicho espacio puede describirse en términos de vecindades y en consecuencia es posible formular una descripción de conjuntos cerrados en términos de vecindades

Recordemos que un conjunto A es cerrado si, y sólo si, $X - A$ es abierto, es decir, si y sólo si, cada punto de $X - A$ tiene una vecindad que está contenida en $X - A$. Por consiguiente, A es cerrado si y sólo si, para cada x y para todo $V \in V_{(x)}$ con $V \cap A \neq \emptyset$, se tiene que $x \in A$.

Definición 1.2.5 Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una **base de vecindades** (o **sistema fundamental de vecindades**) \mathcal{V}_x para $V_{(x)}$ es una familia de vecindades de x que tiene la siguiente propiedad:

Para cada $U \in V_{(x)}$ existe un $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subset U$

Es decir, $\mathcal{V}_x \subset V_{(x)}$ y

$$V_{(x)} = \{U \subset X / \text{existe } V \in \mathcal{V}_x \text{ con } V \subset U\}$$

*A los elementos de \mathcal{V}_x se les llama **vecindades básicas**.*

Teorema 1.2.4 Sea X un espacio topológico y para cada $x \in X$ sea \mathcal{V}_x una base de vecindades para x . Entonces:

V₁) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces $x \in V$

V₂) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ entonces existe un $V_3 \in \mathcal{V}_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

V₃) Si $U \in \mathcal{V}_x$ entonces existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que si $y \in V$, entonces existe $W \in \mathcal{V}_y$ tal que $W \subset U$.

V₄) G es abierto si, y sólo si, para cada $x \in G$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \subset G$.

Recíprocamente si para cada $x \in X$ existe una colección \mathcal{V}_x de subconjuntos de X que satisface de V₁ a V₃ y si V₄ es usada para definir los conjuntos abiertos, entonces el resultado es una topología sobre X en la cual cada \mathcal{V}_x es una base de vecindades para $x \in X$.

Definición 1.2.6 Un punto x de un subconjunto A de un espacio topológico X es un **punto interior** de A si A es una vecindad de x .

El conjunto de todos los puntos interiores de A es el **interior** de A , denotado por A° es decir

$$A^\circ = \text{int}(A) = \cup \{G \subset X / G \text{ es abierto y } G \subset A\}$$

En otras palabras el interior de un subconjunto A de X es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A . Note que

$$\text{int}(A) \subseteq A$$

Definición 1.2.7 Sea X un espacio topológico y $E \subset X$. La **clausura ó adherencia** \overline{E} de E se define por

$$\overline{E} = \text{Cl}(E) = \bigcap \{K \subset X / K \text{ es cerrado y } E \subset K\}$$

Es decir, la clausura de un subconjunto E en un espacio topológico (X, τ) es la intersección de los miembros de la familia de todos los conjuntos cerrados que contienen a E . A los elementos de \overline{E} se les llama **puntos adherentes de E**

Observaciones:

1. El conjunto \overline{E} es siempre cerrado, pues es la intersección de conjuntos cerrados, y evidentemente \overline{E} está contenido en cada uno de los conjuntos cerrados que contienen a E . Como consecuencia \overline{E} es el menor conjunto cerrado que contiene a E , entonces podemos deducir que E es cerrado si, y sólo si, $E = \overline{E}$.
2. Si $E \subset F$ entonces $\overline{F} \subset \overline{E}$.
3. x es un punto adherente de E si, y sólo si, para toda vecindad V de x se tiene que $V \cap E \neq \emptyset$.

4. $E^\circ \subset E$
5. Si $E \subset F$ entonces $E^\circ \subset F^\circ$.
6. $X - E^\circ = \overline{X - E}$
7. $E - \overline{E} = (X - E)^\circ$.
8. E° es el abierto más grande contenido en E

Definición 1.2.8 Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) es *denso* en X si $X = \overline{A}$, o equivalentemente, si cada subconjunto abierto de X contiene puntos de A

Definición 1.2.9 Un espacio topológico (X, τ) es *separable* si existe un subconjunto denso numerable en X .

Teorema 1.2.5 Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) A es denso en X .

b) Para todo $x \in X$ y para toda vecindad V de x , se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$

c) Para todo subconjunto abierto no vacío U de X se tiene $U \cap A \neq \emptyset$

Teorema 1.2.6 Sea (X, τ) un espacio topológico, sean A un subconjunto denso de X y U un subconjunto abierto de X . Entonces $\overline{A \cap U} = \overline{U}$.

Definición 1.2.10 Sea X un espacio topológico y $E \subset X$. La **frontera** de E se define por:

$$Fr(E) = \overline{E} \cap (\overline{X - E}) = \overline{E} - E^\circ$$

A los elementos de $Fr(E)$ se les llama **puntos frontera** de E .

Observaciones:

1 $\overline{E} = E \cup Fr(E)$

2 $E^\circ = E - Fr(E)$

3. $X = E^\circ \cup Fr(E) \cup (X - E)^\circ$

Es fácil notar que un conjunto A es abierto si y sólo si, $A = A^\circ$

Definición 1.2.11 Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ es un punto **aislado** de A si existe una vecindad de x cuya intersección con A sea únicamente x .

Definición 1.2.12 Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ es un punto **punto de acumulación** o **punto límite** de A si cada vecindad de x contiene un punto de A diferente de x , es decir

$$(A - \{x\}) \cap V \neq \emptyset$$

para todo $V \in V_{(x)}$.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama el **conjunto derivado de A** y se denota por A' .

El siguiente teorema nos define los conjuntos cerrados a partir de los puntos de acumulación.

Teorema 1.2.7 Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $\bar{A} = A \cup A'$.

Así pues A es cerrado si, y sólo si, $A' \subseteq A$.

El conjunto de todos los puntos de A que no son puntos de acumulación de $X - A$ es precisamente A° y además la clausura de $X - A$ es $X - A^\circ$.

Definición 1.2.13 Una base para una topología τ es una colección $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{B} \right\}$$

es decir $\mathcal{B} \subset \tau$ es base para τ si para todo abierto $O \in \tau$ y para todo $p \in O$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que:

$$p \in B \subset O$$

A los elementos de \mathcal{B} se les llama **abierto básico**.

Teorema 1.2.8 Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ \mathcal{B} es base para una topología sobre X si, y sólo si,

- i. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- ii. Si p pertenece a la intersección de dos elementos básicos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un elemento básico $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si \mathcal{B} satisface estas dos condiciones, podemos definir entonces la topología τ generada por \mathcal{B} como sigue. un subconjunto U de X se dice que es abierto en X

(esto es un elemento de τ), si para cada $u \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Note que cada elemento básico es así mismo un elemento de τ . Así

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{B} \right\}$$

o sea que τ es la colección de todas las uniones de elementos de \mathcal{B} .

Teorema 1.2.9 Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases para las topologías τ y τ' , respectivamente, sobre X . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes

- 1) τ' es más fina que τ .
- 2) Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x , existe un elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Teorema 1.2.10 Dado un espacio topológico (X, τ) ,

- a) Si \mathcal{B} es una base para τ y $x \in X$, entonces $\mathcal{V}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base de vecindades de abiertos para x .
- b) Si para todo $x \in X$ se tiene una base de vecindades de abiertos \mathcal{V}_x , entonces

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x \text{ es una base para } \tau.$$

Definición 1.2.14 Sea (X, τ) un espacio topológico

1. Una sucesión $\{x_n\}$ en X **converge** a un punto $x \in X$ si para toda vecindad

V de x existe un número natural N tal que $x_n \in V$ siempre que $n \geq N$

Representaremos esta situación por $x_n \rightarrow x$.

2. Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ es **finita** si el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito

En el caso en que $\{x_n\}$ no sea finita, diremos que es **infinita**

1.3. Teoría del orden

Empezaremos por introducir el lenguaje básico de la teoría del dominio. La mayoría de los conceptos que estudiaremos en esta sección servirán de sustento para situaciones tratadas posteriormente.

Definición 1.3.1 Un conjunto X provisto de una relación binaria \preceq , se llama **conjunto parcialmente ordenado** (o **poset** por sus siglas en inglés) si para todo $x, y, z \in X$ se cumple que.

OP_1) $x \preceq x$ (*Reflexiva*).

OP_2) $x \preceq y \wedge y \preceq x$ entonces $x = y$ (antisimétrica)

OP_3) $x \preceq y \wedge y \preceq z$ entonces $x \preceq z$ (transitiva)

Definición 1.3.2 Una relación binaria \preceq en un conjunto X se llama **preorden** si es reflexiva y transitiva, es decir:

1. $x \preceq x$, para todo $x \in X$

2. $x \preceq y$ y $y \preceq z$ entonces $x \preceq z$, para todo $x, y, z \in X$.

Definición 1.3.3 Sea X un conjunto preordenado, un subconjunto $A \subseteq X$ es una **cadena** en X si cada par de elementos de A están relacionados, es decir si $x \preceq y$ o $y \preceq x$ para todo $x, y \in A$.

Definición 1.3.4 Un **conjunto ordenado totalmente** es un conjunto parcialmente ordenado que además es una cadena.

Definición 1.3.5 Un **conjunto parcialmente ordenado** es un **conjunto bien ordenado** (o un **ordinal**) si cada subconjunto no vacío A de W tiene un primer elemento, es decir, para todo $B \neq \emptyset$, $B \subseteq W$, existe un $b_0 \in B$ tal que $b_0 \preceq b$ para cada $b \in B$.

1.4. Axiomas de Separación (Trennung)

En 1914 el matemático alemán *F. Hausdorff* planteo una definición de espacio topológico en la cual, además de las tres propiedades ya expuestas, exigía que todo par de puntos distintos pudieran separarse adecuadamente. Aunque el concepto de espacio topológico reconocido en la actualidad no requiere dicha propiedad, ésta sigue manteniendo su importancia pues los espacios más usuales la verifican.

Definición 1.4.1 *Un espacio topológico X es un **espacio T_0** (o espacio de **Kolmogorov**) si para todo $a, b \in X$, $a \neq b$, existe un $O \in \tau$ tal que $a \in O$ y $b \notin O$ ó $a \notin O$ y $b \in O$.*

Teorema 1.4.1 *Un espacio topológico X es T_0 si, y sólo si, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$.*

Definición 1.4.2 *Un espacio topológico (X, τ) es T_1 (o **Fréchet**) si para todo $a, b \in X$, $a \neq b$ existe $U \in \mathcal{V}_a$ tal que $b \notin U$ y existe $V \in \mathcal{V}_b$ tal que $a \notin V$.*

Propiedades

1. Todo espacio topológico T_1 es T_0 .
2. Todo subespacio topológico de un espacio topológico T_1 es T_1 .
3. Un espacio topológico (X, τ) es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado, para todo $x \in X$.
4. Un espacio topológico (X, τ) es T_1 si y sólo si para todo $A \subset X$, se tiene que

$$A = \bigcap \{O \in \tau / A \subset O\}$$

Definición 1.4.3 *Un espacio topológico (X, τ) es T_2 o espacio de **Hausdorff** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.*

Observaciones:

1. Todo espacio topológico T_2 es T_1 .
2. Todo espacio métrico es T_2 .
3. T_2 es una propiedad topológica. Es decir, Si (X, τ) es un espacio topológico T_2 y (Y, σ) es un espacio topológico tal que $(Y, \sigma) \sim (X, \tau)$ entonces (Y, σ) es T_2 .

4. Todo subespacio de un espacio topológico T_2 es T_2
5. Un espacio topológico (X, τ) es T_2 si y sólo si los límites en X son únicos.

Capítulo 2

ESPACIOS MÉTRICOS

PARCIALES

Nuestro recorrido histórico comienza en 1906, cuando el matemático francés *Maurice Rene Fréchet* introduce en su tesis doctoral los *espacios métricos*. Luego en 1992 el matemático inglés *Steve Matthews* introduce, en el 8° Coloquio Británico para la Teoría en la Ciencia Computacional, los **espacios métricos parciales**

En 1992, Michael Bukatin en su disertación doctoral trata sobre las métricas parciales. Ralph Kopperman Ph D. en matemática, Steve Matthews matemático con Ph.D. en ciencia computacional, Michael Bukatin Ph.D. en matemática y Homeira Pajooheshe Ph.D. en matemática presentan en un artículo de *The American Mathematical Monthly* de octubre de 2009 titulado *Partial Metric Space*, una compilación de sus trabajos sobre espacios métricos parciales

Los *Espacios Métricos Parciales* son una generalización de los espacios métricos, en los cuales la distancia de un punto a el mismo no es necesariamente cero (0), es decir $d(x, x) \geq 0$. Estos espacios surgen motivados por la ciencia computacional, para estudiar topologías que no son de *Hausdorff Scott*.

Veremos que mucha de las propiedades que ocurren en los espacios métricos se extienden sin mayor cambio a los espacios métricos parciales, tal es el caso de *El teorema de la Aplicación Contractiva de Banach o Teorema del Punto Fijo de Banach*, el cual puede ser generalizado al permitir la posibilidad que la distancia de un punto a si mismo no sea cero.

2.1. Autodistancia Diferente de Cero (0)

Empecemos con un espacio métrico, y veamos por qué es importante considerar la *autodistancia diferente de cero*

Sea S^ω el conjunto de todas las sucesiones infinitas

$$\{x_n\} = \{x_n\}_{n=0}^\infty = (x_0, x_1, \dots)$$

sobre un conjunto con más de un elemento S , o sea que

$$S^\omega = \{f: \mathbb{N} \rightarrow S \mid f \text{ es una función}\}$$

Para cada $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^\omega$ definamos la función

$$d_S: S^\omega \times S^\omega \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$d_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = \begin{cases} 2^{-k} & , \text{ si } x_i = y_i, \text{ para todo } i < k, x_k \neq y_k \\ 0 & , \text{ si } x_k = y_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \\ 1 & , \text{ si } x_0 \neq y_0 \end{cases}$$

Así $d_S(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty)$ se define como $\frac{1}{2}$ a la potencia de la longitud de la sucesión inicial más larga común a ambas sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{y_n\}_{n=0}^\infty$.

O sea que

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}) = 2^{-k}$$

donde k es el número más grande (posiblemente 0 ó ∞) tal que $x_i = y_i$, para todo $i < k$.

Veamos las propiedades de la función d_S

M_0) Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in S^{\omega}$, entonces **por definición**

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}) \geq 0$$

M_1) Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in S^{\omega}$. Por definición

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = 0$$

M_2) Sean $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in S^{\omega}$, tal que

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}) = 0$$

entonces por definición de d_S se tiene que

$$x_i = y_i, \text{ para todo } i = 0, 1, 2, 3,$$

de donde

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$$

M_3) Sean $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in S^{\omega}$, es evidente que

$$d_S(\{\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty\}) = d_S(\{\{y_n\}_{n=0}^\infty, \{x_n\}_{n=0}^\infty\})$$

M_4) Sean $\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty, \{z_n\}_{n=0}^\infty \in S^\omega$ Sin perder generalidad, asumamos que

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty) = 2^{-k},$$

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{z_n\}_{n=0}^\infty) = 2^{-j}$$

$$d_S(\{z_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty) = 2^{-l}$$

Note que si $k \geq j$, entonces

$$l = j$$

de donde

$$2^{-k} \leq 2^{-j} + 2^{-j}$$

$$2^{-k} \leq 2^{-j} + 2^{-l}$$

por lo tanto

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty) \leq d_S(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{z_n\}_{n=0}^\infty) + d_S(\{z_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty)$$

Por otro lado, si $k < j$ entonces

$$l = k$$

de donde

$$2^{-k} \leq 2^{-j} + 2^{-k}$$

$$2^{-k} \leq 2^{-j} + 2^{-l}$$

por lo tanto

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}) \leq d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{z_n\}_{n=0}^{\infty}) + d_S(\{z_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty})$$

así en cualquier caso,

$$d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}) \leq d_S(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{z_n\}_{n=0}^{\infty}) + d_S(\{z_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty})$$

De todo lo anterior se tiene que (S^{ω}, d_S) es un espacio métrico.

¿Cómo podría la ciencia computacional ver estos espacios métricos? Interesarse en una sucesión infinita $\{x_n\}$, la cual le gustaría saber cómo calcular. Esto es, como escribir un programa de computadora para imprimir (en cualquier pantalla o papel) los valores x_0 , luego x_1 , luego x_2 y así sucesivamente.

Como $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión infinita sus valores no se pueden imprimir en una cantidad finita tiempo, y así la ciencia computacional está interesada en cómo la sucesión $\{x_n\} = (x_0, x_1, \dots)$ se puede generar a partir de sus colas iniciales, las sucesiones finitas $(\) = \emptyset, (x_0), (x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2)$, y así sucesivamente. Luego de

que cada valor x_k es impreso, la sucesión finita (x_0, \dots, x_k) representa la parte de la sucesión infinita producida hasta el momento. Cada sucesión finita o cola inicial es considerada por la ciencia computacional como una versión *parcialmente calculada* de la sucesión infinita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, que se quiere calcular totalmente.

Supongamos ahora que la definición anterior de d_S se restringe a S^* , el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de S , o sea

$$S^* = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid n \in \mathbb{N}, x_0, x_1, \dots, x_n \in S\}$$

y

$$d_S : S^* \times S^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Es evidente que los axiomas $M_0)$, $M_2)$, $M_3)$, y $M_4)$ se mantienen. Sin embargo, si $\{x_n\} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ es una sucesión finita, entonces

$$d_S(\{x_n\}, \{x_n\}) = 2^{-(n+1)} \neq 0$$

(desde $x_j = x_j$, solo puede mantenerse si x_j está definida).

Por lo tanto el axioma $M_1)$ no se satisface para sucesiones finitas. Esto planteó un interesante contraste entre los matemáticos del siglo XX, ¿cuál de las teorías de espacios métricos se ajusta a nuestro ejemplo?, y la experiencia contemporánea de la ciencia computacional.

La verdad de la afirmación $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es sin duda indiscutible en matemática, pero en la ciencia computacional esta afirmación es verdadera sólo en la medida en la que la sucesión $\{x_n\}$ puede ser calculada

2.2. Espacios Métricos Parciales

La autodistancia distinta de cero está motivada por la ciencia computacional cuando se estudian las sucesiones finitas e infinitas. La cuestión ahora es si la autodistancia distinta de cero se puede introducir en los axiomas de espacio métrico. Es decir, si el axioma

$$d(x, y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y$$

se puede reemplazar por

$$d(x, y) = 0 \text{ entonces } x = y$$

manteniéndose los resultados fundamentales de la teoría de espacios métricos. Este es el objetivo principal de nuestra investigación.

Definición 2.2.1 Sea X un conjunto no vacío y sea $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

p es una **métrica parcial** si cumple con

MP₀) $0 \leq p(x, x) \leq p(x, y)$, para todo $x, y \in X$

No negatividad y la menor autodistancia

MP₂) Si $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$, entonces $x = y$ para todo $x, y \in X$.

Sin distancia implica igualdad.

MP₃) $p(x, y) = p(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

Simetría

MP₄) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

Desigualdad triangular generalizada

*A la métrica parcial p se le llama **pmétrica** y al par (X, p) se le llama **espacio métrico parcial**.*

De este modo se tiene que los espacios métricos parciales proporcionan elementos para el estudio de una matemática de distancia, sin considerar la autodistancia igual a cero, la cual es tomada como un hecho en la teoría de los espacios métricos. Lo que hacen los espacios métricos parciales es introducir un estilo métrico de simetría para tratar las relaciones no simétricas, tema fundamental en las ciencias computacionales.

Observaciones:

- Las **pmétricas** satisfacen los axiomas M_0 , M_2 , M_3 y M_4 de métrica. Pero las **pmétricas** no satisfacen el axioma M_1 de métrica.
- **Toda métrica es una pmétrica.**
- Las **pmétricas** satisfacen los axiomas S_0 , S_3 y S_4 de pseudométrica. Pero las **pmétricas** no satisfacen el axioma S_1 de pseudométrica.
- Las **pseudométrica** no satisfacen el axioma M_2 de métrica ni el axioma MP_2 de **pmétricas**.

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios métricos parciales.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos el conjunto $S^* \cup S^\omega$ y definamos la función

$$p_S : (S^* \cup S^\omega) \times (S^* \cup S^\omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = \begin{cases} 2^{-k} & , \text{ si } x_i = y_i, \text{ para todo } i < k, x_k \neq y_k \\ 0 & , \text{ si } x_k = y_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \\ 1 & , \text{ si } x_0 \neq y_0 \end{cases}$$

p_S es una **pmétrica** sobre $S^* \cup S^\omega$. El espacio métrico parcial $(S^* \cup S^\omega, p_S)$ es llamado el espacio métrico parcial de Baire.

Veamos que en efecto p_S es una métrica

MP₀) Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^* \cup S^\omega$.

* Si $\{x_n\} \in S^*$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) = 2^{-k} > 0$$

además,

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = 2^{-j} \geq 2^{-k} = p_S(\{x_n\}, \{x_n\})$$

de donde

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) \geq p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) \geq 0$$

* Si $\{x_n\} \in S^\omega$, entonces

$$p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) = 0$$

además

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) \geq 0 = p_S(\{x_n\}, \{x_n\})$$

de donde

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) \geq p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) = 0$$

MP₂) Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^* \cup S^\omega$, tales que

$$p_S(\{x_n\}, \{x_n\}) = p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = p_S(\{y_n\}, \{y_n\})$$

$$2^{-j} = 2^{-k} = 2^{-l}$$

entonces

$$j = k = l$$

incluso si j, k, l son 0 ó ∞

Por lo tanto

$$\{x_n\} = \{y_n\}$$

MP₃) Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^* \cup S^\omega$, luego

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = 2^{-k}$$

$$p_S(\{y_n\}, \{x_n\}) = 2^{-k}$$

así

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = p_S(\{y_n\}, \{x_n\})$$

MP₄) Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in S^* \cup S^\omega$, tales que

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = 2^{-k}$$

$$p_S(\{x_n\}, \{z_n\}) = 2^{-j}$$

$$p_S(\{z_n\}, \{y_n\}) = 2^{-l}$$

donde k, j, l pueden tomar inclusive los valores 0∞

* Asumamos que $k \leq j$, entonces

$$l = k$$

Por MP_0

$$p_S(\{z_n\}, \{z_n\}) \leq 2^{-j}$$

luego

$$2^{-k} \leq 2^{-l} + 2^{-j} - p_S(\{z_n\}, \{z_n\})$$

y así

$$p_S(\{x_n\}, \{y_n\}) \leq p_S(\{x_n\}, \{z_n\}) + p_S(\{z_n\}, \{y_n\}) - p_S(\{z_n\}, \{z_n\})$$

* Asumamos ahora que $k > j$, entonces

$$2^{-k} \leq 2^{-j}$$

Por MP_0

$$p_S(\{z_n\}, \{z_n\}) \leq 2^{-l}$$

luego

$$2^{-k} \leq 2^{-j} + 2^{-l} - p_S(\{z_n\}, \{z_n\})$$

y así

$$\rho_S(\{x_n\}, \{y_n\}) \leq \rho_S(\{x_n\}, \{z_n\}) + \rho_S(\{z_n\}, \{y_n\}) - \rho_S(\{z_n\}, \{z_n\})$$

De todo lo anterior se tiene que $(S^* \cup S^\omega, \rho_S)$ es un espacio métrico parcial.

Note además que si $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^\omega$, entonces

$$\rho_S(\{x_n\}, \{y_n\}) = d_S(\{x_n\}, \{y_n\})$$

Ejemplo 2.2.2 Sea $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ y definamos la función

$$pmax: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$pmax(a, b) = \text{máximo de } \{a, b\}$$

$(\mathbb{R}^+, pmax)$ es un espacio métrico parcial

En efecto:

MP₀) Sean a, b dos números reales positivos, entonces

$$pmax(a, b) \geq pmax(a, a) \geq 0$$

MP₂) Sean a, b dos números reales positivos, tales que

$$pmax(a, a) = pmax(a, b) = pmax(b, b)$$

luego

$$a = pmax(a, b) = b$$

de donde

$$a = b$$

MP₃) Sean a, b dos números reales positivos, entonces

$$pmax(a, b) = pmax(b, a)$$

MP₄) Sean a, b, c tres números reales positivos

Sí $pmax(a, b) = a$, entonces

$$pmax(a, b) \leq pmax(a, c)$$

$$pmax(c, b) - pmax(c, c) \geq 0$$

de donde

$$pmax(a, b) \leq pmax(a, c) + pmax(c, b) - pmax(c, c)$$

Sí $pmax(a, b) = b$, entonces

$$pmax(a, b) \leq pmax(c, b)$$

$$pmax(a, c) - pmax(c, c) \geq 0$$

de donde

$$p_{\max}(a, b) \leq p_{\max}(a, c) + p_{\max}(c, b) - p_{\max}(c, c)$$

Así pues (\mathbb{R}, p_{\max}) es un espacio métrico parcial

Ejemplo 2.2.3 Sea \mathcal{I} la colección de intervalos cerrados y acotados en \mathbb{R} , es decir

$$\mathcal{I} = \{[a, b] \mid a \leq b \text{ y } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Definamos la función

$$p: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$p([a, b], [c, d]) = \max(b, d) - \min(a, c)$$

Entonces (\mathcal{I}, p) es un espacio métrico parcial

En efecto:

MP₀) Sean $[a, b], [c, d] \in \mathcal{I}$, entonces

$$p([a, b], [a, b]) = \max(b, b) - \min(a, a) = b - a \geq 0$$

Además como

$$p([a, b], [c, d]) = \max(b, d) - \min(a, c)$$

se tienen las siguientes posibilidades

$$* b \geq d \text{ y } a \geq c, \text{ entonces } p([a, b], [c, d]) = b - c \geq b - a,$$

$$* b < d \text{ y } a \geq c, \text{ entonces } p([a, b], [c, d]) = d - c > b - a,$$

$$* b \geq d \text{ y } a < c, \text{ entonces } p([a, b], [c, d]) = b - a = b - a, \text{ y}$$

$$* b < d \text{ y } a < c, \text{ entonces } p([a, b], [c, d]) = d - a > b - a$$

Por consiguiente, en cualquier caso

$$0 \leq p([a, b], [a, b]) \leq p([a, b], [c, d])$$

MP₂) Sean $[a, b], [c, d] \in \mathcal{I}$ tales que

$$p([a, b], [a, b]) = p([a, b], [c, d]) = p([c, d], [c, d])$$

entonces

$$\max(b, b) - \min(a, a) = \max(b, d) - \min(a, c) = \max(d, d) - \min(c, c)$$

$$b - a = \max(b, d) - \min(a, c) = d - c$$

de donde $b - d = a - c$ (*)

Asumamos que $a \neq c$, entonces $b \neq d$.

Luego si $\max(b, d) = b$ entonces $\min(a, c) = a$, de donde

$$b - d > 0 \quad \text{y} \quad a - c < 0$$

lo que contradice (*)

Igual contradicción se obtiene si se supone que $\max(b, d) = d$. Por lo tanto

$$a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

es decir

$$[a, b] = [c, d]$$

MP₃) Sean $[a, b], [c, d] \in \mathcal{I}$, entonces

$$\begin{aligned} p([a, b], [c, d]) &= \max(b, d) - \min(a, c) \\ &= \max(d, b) - \min(c, a) \\ &= p([c, d], [a, b]) \end{aligned}$$

MP₄) Sean $[a, b], [c, d], [e, f] \in \mathcal{I}$. Luego

$$\begin{aligned} p([a, b], [c, d]) &= \max(b, d) - \min(a, c) \\ p([a, b], [e, f]) &= \max(b, f) - \min(a, e) \\ p([e, f], [c, d]) &= \max(f, d) - \min(e, c) \\ p([f, f], [e, e]) &= \max(f, f) - \min(e, e) = f - e \end{aligned}$$

Asumamos que

$$\max(b, d) = b$$

- Si $\min(a, c) = a$, entonces

$$p([a, b], [c, d]) = \max(b, d) - \min(a, c) = b - a$$

Note que

$$\max(f, d) - \max(f, f) \geq 0,$$

$$\min(e, e) - \min(e, c) \geq 0$$

$$\max(b, d) \leq \max(b, f)$$

y

$$\min(a, c) \geq \min(a, e)$$

de donde

$$b - a \leq \max(b, f) - \min(a, e) + \max(f, d) - \min(e, c) - \max(f, f) + \min(e, e)$$

y así

$$p([a, b], [c, d]) \leq p([a, b], [e, f]) + p([e, f], [c, d]) - p([e, f], [e, f])$$

- Si $\min(a, c) = c$, entonces

$$p([a, b], [c, d]) = \max(b, d) - \min(a, c) = b - c$$

Note que

$$\max(f, d) - \max(f, f) \geq 0,$$

$$\min(e, e) - \min(a, e) \geq 0$$

$$\max(b, d) \leq \max(b, f)$$

y

$$\min(e, c) \leq \min(a, c)$$

de donde

$$b - c \leq \max(b, f) - \min(a, e) + \max(f, d) - \min(e, c) = \max(f, f) + \min(e, e)$$

y así

$$p([a, b], [c, d]) \leq p([a, b], [e, f]) + p([e, f], [c, d]) - p([e, f], [e, f])$$

De manera similar se procede en el caso de que $\max(b, d) = d$

Por lo tanto

$$p([a, b], [c, d]) \leq p([a, b], [e, f]) + p([e, f], [c, d]) - p([e, f], [e, f])$$

De todo lo anterior se tiene que (\mathcal{I}, p) es un espacio métrico parcial.

Ahora se buscarán las diversas formas posibles en la cual un espacio métrico se puede extender a un espacio métrico parcial y viceversa. En otras palabras, no sólo se desea

aplicar, tanto como sea posible la teoría existente de espacios métricos, a los espacios métricos parciales, sino también ver cómo la noción de autodistancia distinta de cero puede influir en nuestra comprensión de los espacio métrico

Definición 2.2.2 Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sea $x \in X$. Si

$$p(x, x) = 0$$

decimos que x es **completo**.

Si

$$p(x, x) > 0$$

decimos que x es **no completo o parcial**.

Teorema 2.2.1 Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sea

$$p^{\wedge} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por

$$p^{\wedge}(x, y) = \frac{p(x, y)}{1 + p(x, y)}$$

entonces p^{\wedge} es una pmétrica.

Demostración

MP₀) Sea $x, y \in X$, entonces

$$0 \leq \frac{p(x, x)}{1 + p(x, x)}$$

Note que

$$p(x, x) + p(x, x)p(x, y) \leq p(x, y) + p(x, y)p(x, x)$$

$$p(x, x)(1 + p(x, y)) \leq p(x, y)(1 + p(x, x))$$

$$\frac{p(x, x)}{1 + p(x, x)} \leq \frac{p(x, y)}{1 + p(x, y)}$$

$$p^\wedge(x, x) \leq p^\wedge(x, y)$$

De donde

$$0 \leq p^\wedge(x, x) \leq p^\wedge(x, y)$$

MP₂) Sean $x, y \in X$ tales que

$$p^\wedge(x, x) = p^\wedge(x, y) = p^\wedge(y, y)$$

entonces

$$\frac{p(x, x)}{1 + p(x, x)} = \frac{p(x, y)}{1 + p(x, y)} = \frac{p(y, y)}{1 + p(y, y)}$$

Por lo tanto

$$p(x, x) + p(x, y)p(y, y) = p(x, y) + p(x, y)p(y, y)$$

y

$$p(x, y) + p(x, y)p(y, y) = p(y, y) + p(x, y)p(y, y)$$

de donde

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

Por MP_2 se tiene que $x = y$.

MP₃) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} p^{\wedge}(x, y) &= \frac{p(x, y)}{1 + p(x, y)} \\ &= \frac{p(y, x)}{1 + p(y, x)} \\ &= p^{\wedge}(y, x) \end{aligned}$$

MP₄) Sean $x, y, z \in X$. Note que

$$p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$$

además

$$p(y, y) \leq p(x, y) \text{ y } p(y, y) \leq p(y, z)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 p^{\wedge}(x, z) &= \frac{p(x, z)}{1 + p(x, z)} \\
 &\leq \frac{p(x, y)}{1 + p(x, y)} + \frac{p(y, z)}{1 + p(y, z)} - \frac{p(y, y)}{1 + p(y, y)} \\
 &= p^{\wedge}(x, y) + p^{\wedge}(y, z) - p^{\wedge}(y, y)
 \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el siguiente resultado para números reales: si $a, b, c, d \geq 0$ son tales que

$$a \leq b + c - d, \quad d \leq b \quad \text{y} \quad d \leq c$$

entonces

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c} - \frac{d}{1 + d}$$

De todo lo anterior se tiene que p^{\wedge} es una métrica

Definición 2.2.3 Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Se define la relación binaria

\preceq_p sobre X por

$$x \preceq_p y \iff p(x, x) = p(x, y).$$

Teorema 2.2.2 Sea (X, ρ) un espacio métrico parcial, entonces X con la relación binaria \preceq_ρ definida anteriormente es un conjunto parcialmente ordenado

Demostración

OP₁) Sea $x \in X$, entonces

$$\rho(x, x) = \rho(x, x)$$

de donde

$$x \preceq_\rho x$$

OP₂) Sean $x, y \in X$ tales que $x \preceq_\rho y$ y $y \preceq_\rho x$, entonces

$$\rho(x, x) = \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \text{y} \quad \rho(y, y) = \rho(y, x) = \rho(x, y)$$

luego

$$\rho(x, x) = \rho(x, y) = \rho(y, y)$$

por MP_2 se tiene que $x = y$.

OP₃) Sean $x, y, z \in X$, tales que

$$x \preceq_\rho y \quad \text{y} \quad y \preceq_\rho z$$

entonces

$$p(x, r) = p(x, y) \quad \text{y} \quad p(y, y) = p(y, z)$$

por MP_4 se tiene que

$$p(r, z) \leq p(r, y) + p(y, z) - p(y, y)$$

de donde

$$p(x, z) \leq p(x, y) = p(x, x)$$

pero por MP_0 , tenemos

$$p(r, x) \leq p(r, z)$$

por consiguiente

$$p(x, x) = p(x, z)$$

y así $x \preceq_p z$.

De todo lo anterior se tiene que (X, \preceq_p) es un conjunto parcialmente ordenado.

Observación: A la relación \preceq_p se le llama **orden parcial inducido por la pmétrica p sobre X .**

Ejemplo 2.2.4 En el conjunto $S^* \cup S^\omega$, definamos la relación binaria \preceq_S por

$$\{x_n\} \preceq_S \{y_n\} \iff \{y_n\} \text{ es parte inicial de } \{x_n\}$$

\preceq_S es un orden parcial sobre $S^* \cup S^\omega$.

Observe que $S^* \cup S^\omega$ cumple las propiedades de orden parcial

OP₁) Sea $\{x_n\} \in S^* \cup S^\omega$, entonces

$$\{x_n\} \text{ es parte inicial de } \{x_n\}$$

de donde $\{x_n\} \preceq_S \{x_n\}$.

OP₂) Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in S^* \cup S^\omega$, tal que

$$\{x_n\} \preceq_S \{y_n\} \text{ y } \{y_n\} \preceq_S \{x_n\}$$

Luego

$$\{y_n\} \text{ es parte inicial de } \{x_n\} \text{ y } \{x_n\} \text{ es parte inicial de } \{y_n\}$$

de donde $\{x_n\} = \{y_n\}$.

OP₃) Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in S^* \cup S^\omega$, tales que

$$\{x_n\} \preceq_S \{y_n\} \text{ y } \{y_n\} \preceq_S \{z_n\}$$

entonces

$\{y_n\}$ es parte inicial de $\{r_n\}$ y $\{z_n\}$ es parte inicial $\{y_n\}$

luego

$\{z_n\}$ es parte inicial de $\{x_n\}$

de donde $\{x_n\} \preceq_S \{z_n\}$.

Así pues, \preceq_S es un orden parcial sobre $S^* \cup S^\omega$. Note \preceq_S es exactamente el orden parcial inducido por la pmétrica p_S , o sea que

$$\preceq_S = \preceq_{p_S}$$

Ejemplo 2.2.5 Para el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{\max}) , definamos la relación

$\preceq_{p_{\max}}$ por

$$x \preceq_{p_{\max}} y \iff y \leq x$$

Entonces $\preceq_{p_{\max}}$ es un orden parcial y se le llama **orden inverso usual** en \mathbb{R} .

Observe que $\preceq_{p_{\max}}$ cumple las propiedades de orden parcial.

OP₁) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$t \leq t$$

por lo tanto $x \preceq_{\max} x$

OP₂) Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$x \preceq_{\max} y \quad \vee \quad y \preceq_{\max} x$$

entonces

$$y \leq x \quad \vee \quad x \leq y$$

de donde $x = y$.

OP₃) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$x \preceq_{\max} y \quad \vee \quad y \preceq_{\max} z$$

luego

$$y \leq x \quad \vee \quad z \leq y$$

entonces

$$z \leq x$$

por lo tanto $x \preceq_{\max} z$.

Así pues \preceq_{pmax} es un orden parcial sobre \mathbb{R}^+ . Note que \preceq_{pmax} es exactamente el orden parcial inducido por la métrica $pmax$

Ejemplo 2.2.6 Para el espacio métrico parcial (\mathcal{I}, p) de los intervalos cerrados, definamos la relación $\preceq_{\mathcal{I}}$ por

$$[a, b] \preceq_{\mathcal{I}} [c, d] \iff [c, d] \subseteq [a, b]$$

es un orden parcial.

Veamos que $\preceq_{\mathcal{I}}$ cumple las propiedades de orden parcial

OP₁) Sea $[a, b] \in \mathcal{I}$, entonces

$$[a, b] \subseteq [a, b]$$

de donde

$$[a, b] \preceq_{\mathcal{I}} [a, b]$$

OP₂) Sean $[a, b], [c, d] \in \mathcal{I}$ tales que

$$[a, b] \preceq_{\mathcal{I}} [c, d] \text{ y } [c, d] \preceq_{\mathcal{I}} [a, b]$$

entonces

$$[c, d] \subseteq [a, b] \text{ y } [a, b] \subseteq [c, d]$$

por lo tanto $[a, b] = [c, d]$

OP₃) Sean $[a, b], [c, d], [m, n] \in \mathcal{I}$ tales que

$$[a, b] \preceq_{\mathcal{I}} [c, d] \text{ y } [c, d] \preceq_{\mathcal{I}} [m, n]$$

Luego

$$[c, d] \subseteq [a, b] \text{ y } [m, n] \subseteq [c, d]$$

entonces

$$[m, n] \subseteq [a, b]$$

de donde $[a, b] \preceq_{\mathcal{I}} [m, n]$

Así pues $\preceq_{\mathcal{I}}$ es un orden parcial sobre \mathcal{I} . Note que

$$[c, d] \subseteq [a, b] \iff a \leq c \leq d < b \iff b - a = \max\{a, b\} - \min\{a, c\}$$

Por lo tanto $\preceq_{\mathcal{I}}$ es exactamente el orden parcial inducido por la pmétrica p .

Definición 2.2.4 *Un espacio métrico ponderado es una tripleta*

$$(X, d, |\cdot|)$$

donde (X, d) es un espacio métrico y

$$|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función que satisface las siguientes propiedades

- * $0 \leq |x|$ para cada $x \in X$, y
- * $||x| - |y|| \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

llamada función de **ponderación**.

Podemos observar que un espacio métrico ponderado es un espacio métrico con un número real no negativo asignado a cada punto que es *ponderado*

Observaciones:

1. Note que todo espacio métrico se puede ponderar con una función constante positiva, en este caso se dice que la ponderación es constante
2. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y d la métrica inducida por la norma, entonces $(X, d, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico ponderado

Teorema 2.2.3 Sea $(X, d, |\cdot|)$ un espacio métrico ponderado, y sea

$$p_d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función, definida por

$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

Entonces (X, p_d) es un espacio métrico parcial, y $p_d(r, r) = |r|$.

Demostración

Probemos primero que $p_d(x, x) = |x|$. Sea $x \in X$, entonces

$$p_d(x, x) = \frac{d(x, x) + |x| + |x|}{2}$$

luego como d es una métrica,

$$p_d(x, x) = \frac{2|x|}{2} = |x|$$

Probemos ahora que $p_d(x, y)$ es una pmétrica.

MP₀) Sea $x, y \in X$. Note que

$$0 \leq |x| = p_d(x, x)$$

además

$$|x| = \frac{2|x|}{2}$$

luego, como X es ponderado

$$\begin{aligned}
 |r| &= \frac{|x| + |x|}{2} \\
 &\leq \frac{|x| + d(x, y) + |y|}{2} \\
 &= p_d(x, y)
 \end{aligned}$$

así

$$0 \leq p_d(r, r) = |r| \leq p_d(x, y)$$

MP₂) Sean $x, y \in X$ tales que

$$p_d(x, x) = p_d(x, y) = p_d(y, y)$$

entonces

$$|x| = |y|$$

además

$$|x| = p_d(x, x) = p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

de donde

$$|x| = \frac{d(x, y) + |r| + |x|}{2} = \frac{d(x, y)}{2} + |x|$$

o sea que

$$0 = d(x, y)$$

Luego como d es una métrica se tiene que $x = y$.

MP₃) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} p_d(x, y) &= \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \\ &= \frac{d(y, x) + |y| + |x|}{2} \\ &= p_d(y, x) \end{aligned}$$

MP₄) Sean $x, y, z \in X$, luego

$$p_d(x, z) = \frac{d(x, z) + |x| + |z|}{2}$$

por la desigualdad triangular de la métrica d , tenemos que

$$\begin{aligned} p_d(x, z) &\leq \frac{d(x, y) + d(y, z) + |x| + |z|}{2} \\ &\leq \frac{d(x, y) + d(y, z) + |x| + |z| + |y| + |y| - 2|y|}{2} \\ &\leq \frac{d(x, y) + |y| + |x|}{2} + \frac{d(y, z) + |y| + |z|}{2} - \frac{2|y|}{2} \\ &\leq p_d(x, y) + p_d(y, z) - p_d(y, y) \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, p_d) es un espacio métrico parcial, en donde

$$p_d(x, x) = |x|.$$

Observación: Note que en el Teorema 2.2.3, si la ponderación no es la función nula entonces el espacio métrico parcial (X, p_d) no es un espacio métrico como se observa en el siguiente ejemplo

Ejemplo 2.2.7 Sea (X, d) un espacio métrico y definamos la ponderación sobre X por

$$\begin{aligned} \rho : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho(x) &= k \quad \text{donde } k \in \mathbb{R}, k > 0 \end{aligned}$$

Entonces por el Teorema 2.2.3 la función

$$p_d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y)}{2} + k$$

es una pmétrica y por lo tanto (X, p_d) es un espacio métrico parcial.

Observe que (X, p_d) no es un espacio métrico ya que

$$\begin{aligned} p_d(x, x) &= \frac{d(x, x)}{2} + k \\ &= k > 0 \end{aligned}$$

lo que contradice M_1

Teorema 2.2.4 Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Definamos las funciones,

$$d_p: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

y

$$|\cdot|: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$|x| = p(x, x)$$

Entonces $(X, d_p, |\cdot|)$ es un espacio métrico ponderado, el cual genera el espacio métrico parcial (X, p) mediante el proceso del Teorema 2.2.3, es decir $p_{d_p} = p$.

Demostración

Probemos primero que d_p es una métrica

M₀) Sean $x, y \in X$. Observe que

$$0 \leq 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = d_p(x, y)$$

M₁) Sea $x \in X$, note que

$$d_p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x)$$

de donde $d_p(x, x) = 0$

M₂) Sean $x, y \in X$ tales que $d_p(x, y) = 0$, entonces

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0$$

luego por MP_0

$$2p(x, y) - p(x, y) - p(y, y) \leq 0$$

de donde

$$p(x, y) \leq p(y, y)$$

pero por MP_0

$$p(y, y) \leq p(x, y)$$

Por lo tanto

$$p(x, y) = p(y, y) \quad (1)$$

De manera similar se prueba que

$$p(x, y) = p(x, x) \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

Luego por MP_2 tenemos que $x = y$.

M_3) Sean $x, y \in X$, entonces

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

Luego por MP_3

$$d_p(x, y) = 2p(y, x) - p(y, y) - p(x, x)$$

Así

$$d_p(x, y) = d_p(y, x)$$

M_4) Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$d_p(x, z) = 2p(x, z) - p(x, x) - p(z, z)$$

por la desigualdad triangular de p , se tiene que

$$d_p(x, z) \leq 2(p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)) - p(x, x) - p(z, z)$$

luego

$$\begin{aligned}
 d_p(r, z) &\leq 2p(r, y) + 2p(y, z) - 2p(y, y) - p(r, r) - p(z, z) \\
 &= 2p(x, y) - p(x, r) - p(y, y) + 2p(y, z) - p(y, y) - p(z, z)
 \end{aligned}$$

de donde

$$d_p(r, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z)$$

De todo lo anterior se tiene que d_p es una métrica sobre X .

Sea $x \in X$, entonces

$$0 \leq p(x, x) = |x|$$

Sea $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
 |x| - |y| &= p(x, x) - p(y, y) \\
 &= p(x, x) - p(y, y) + p(x, x) - p(x, x) \\
 &= 2p(x, x) - p(y, y) - p(x, x)
 \end{aligned}$$

luego por MP_0 se tiene que

$$|x| - |y| \leq 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

Así

$$|x| - |y| \leq d_p(x, y)$$

De todo lo anterior se tiene que $(X, d_p, |\cdot|)$ es un espacio métrico ponderado.

Finalmente, por el Teorema 3.2.2.,

$$\begin{aligned}
p_{d_p}(x, y) &= \frac{d_p(x, y) + |x| + |y|}{2} \\
&= \frac{2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) + p(x, y) + p(y, x) + p(x, x) + p(y, y)}{2} \\
&= p(x, y)
\end{aligned}$$

Así pues, $p_{d_p} = p$

Observaciones:

- A partir de un espacio métrico ponderado se puede definir una nueva función, la cual es una pmétrica y por lo tanto, hace del espacio métrico ponderado un espacio métrico parcial.
- Este proceso también se puede hacer de manera inversa, y se obtiene que

$$p_{d_p} = p \quad \text{y} \quad d_{p_d} = d$$

- En un espacio métrico ponderado $(X, d, |\cdot|)$ el orden parcial \preceq_{p_d} inducido por la pmétrica p_d puede ser definido mediante

$$\begin{aligned}
x \preceq_{p_d} y &\iff p_d(x, x) = p_d(x, y) \\
&\iff |x| = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2} \\
&\iff 2|x| = d(x, y) + |x| + |y| \\
&\iff |x| = d(x, y) + |y| \\
&\iff |x| - |y| = d(x, y)
\end{aligned}$$

- En un espacio métrico parcial se pueden combinar las nociones métricas de *distancia*, *ponderación* y *conjunto parcialmente ordenado* en una sola definición.

Definición 2.2.5 *Un espacio métrico basado es una tripleta (X, d, ϕ) , donde (X, d) es un espacio métrico y ϕ es un elemento fijo de X . Es decir, un espacio métrico basado es un espacio métrico con un **punto base** elegido arbitrariamente.*

Un espacio métrico basado se puede convertir en un espacio métrico ponderado, y por lo tanto en un espacio métrico parcial, como sigue

Teorema 2.2.5 *Sea (X, d, ϕ) un espacio métrico basado. Definamos la función*

$$|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$|\tau| = d(\tau, \phi),$$

entonces $(X, d, |\cdot|)$ es un espacio métrico ponderado

Demostración

Sea $x \in X$, entonces

$$0 \leq d(x, \phi) = |x|$$

Sean $x, y \in X$, entonces

$$|x| = d(x, \phi) \leq d(x, y) + d(y, \phi)$$

de donde

$$|x| = d(x, \phi) \leq d(x, y) + |y|$$

y así,

$$|x| - |y| \leq d(x, y)$$

Por lo tanto $(X, d, |\cdot|)$ es un espacio métrico ponderado.

A partir de un espacio métrico basado podemos construir su correspondiente espacio métrico parcial.

Teorema 2.2.6 Sea (X, d, ϕ) un espacio métrico basado. Definamos la función

$$p_d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + d(x, \phi) + d(y, \phi)}{2}$$

entonces (X, p_d) es un espacio métrico parcial. En donde $x \preceq_{p_d} \phi$, $|\phi| = 0$ y $|x| = d(x, \phi)$ para todo $x \in X$.

Demostración

Consideremos la función

$$|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$|x| = d(x, \phi)$$

por el Teorema 2.2.5, $(X, d, |\cdot|)$ es un espacio métrico ponderado y $|\phi| = 0$.

Definamos la función

$$p_d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p_d(x, y) = \frac{d(x, y) + d(x, \phi) + d(y, \phi)}{2} = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

entonces por el Teorema 2.2.3, (X, p_d) es un espacio métrico parcial y

$$p_d(x, x) = |x| = d(x, \phi)$$

para todo $x \in X$.

Además

$$|\phi| = d(\phi, \phi) = 0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} p_d(x, \phi) &= \frac{d(x, \phi) + d(x, \phi) + d(\phi, \phi)}{2} \\ &= d(x, \phi) \\ &= |x| \\ &= p_d(x, \tau) \end{aligned}$$

de donde

$$x \preceq_{p_d} \phi, \quad \text{para todo } x \in X$$

Por lo tanto ϕ es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq_{p_d}) .

Teorema 2.2.7 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial y $\phi \in X$ tal que $x \preceq_p \phi$ para todo $x \in X$. Definimos la función*

$$d_p: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, \phi) - p(y, \phi)$$

entonces $(X, d_p(\phi))$ es un espacio métrico basado.

Demostración

M₀) Sea $x, y \in X$. Como $x \preceq_p \phi$ ó $y \preceq_p \phi$, entonces

$$p(x, x) = p(x, \phi) \leq p(x, y)$$

$$p(y, y) = p(y, \phi) \leq p(x, y)$$

de donde

$$2p(x, y) - p(x, \phi) - p(y, \phi) = d_p(x, y) \geq 0$$

M₁) Sea $x \in X$, luego como $x \preceq_p \phi$, se tiene que

$$d_p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, \phi) - p(x, \phi)$$

$$= 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x)$$

$$= 0$$

M₂) Sean $x, y \in X$ tales que

$$d_p(x, y) = 0$$

luego

$$2p(x, y) - p(x, \phi) - p(y, \phi) = 0$$

además como $x \preceq_p \phi$ y $y \preceq_p \phi$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) &= 0 \\ 2p(x, y) &= p(x, x) + p(y, y) \end{aligned}$$

por MP_0 se tiene que

$$2p(x, y) \leq p(x, y) + p(y, y)$$

de donde

$$p(x, y) \leq p(y, y)$$

Pero por MP_0

$$p(y, y) \leq p(x, y)$$

y así se tiene que

$$p(x, y) = p(y, y)$$

De manera similar se demuestra que

$$p(x, y) = p(x, x)$$

así pues

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

y por MP_2

$$x = y$$

M_3) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, \phi) - p(y, \phi) \\ &= 2p(y, x) - p(y, \phi) - p(x, \phi) \\ &= d_p(y, x) \end{aligned}$$

M_4) Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, \phi) - p(y, \phi) \\ &\leq 2[p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)] - p(x, \phi) - p(y, \phi) \\ &= 2p(x, z) + 2p(z, y) - 2p(z, z) - p(x, \phi) - p(y, \phi) \\ &= 2p(x, z) + 2p(z, y) - 2p(z, \phi) - p(x, \phi) - p(y, \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, z) - p(x, \phi) - p(z, \phi) + 2p(z, y) - p(z, \phi) - p(y, \phi) \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y) \end{aligned}$$

de donde

$$d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y)$$

De todo lo anterior se tiene que (X, d_p, ϕ) es un espacio métrico basado

Observación: Como en el teorema anterior, $p(x, \phi) = p(x, x)$ y $p(y, \phi) = p(y, y)$ para todo $x, y \in X$, se tiene que

$$d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

que es exactamente la métrica definida en el Teorema 2.2.4.

Ejemplo 2.2.8 Sea (X, d, ϕ) un espacio métrico basado y $a \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$d(x, y) \leq a$$

para todo $x, y \in X$. Definamos la función

$$p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$p(x, y) = a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2}$$

Probemos que (X, p) es un espacio métrico parcial. En efecto

MP₀) Sean $x, y \in X$, entonces

$$d(x, \phi) \leq a \quad \text{y} \quad d(y, \phi) \leq a$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} \\ &\geq a + \frac{d(x, y) - a - a}{2} \\ &= \frac{d(x, y)}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Además, note que

$$\begin{aligned} p(x, y) - p(x, x) &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} - \left[a + \frac{d(x, x) - d(x, \phi) - d(x, \phi)}{2} \right] \\ &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} - a - \frac{-2d(x, \phi)}{2} \\ &= \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi) + 2d(x, \phi)}{2} \\ p(x, y) - p(x, x) &= \frac{d(x, y) - d(y, \phi) + d(x, \phi)}{2} \\ &= \frac{d(y, x) + d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} \\ &\geq \frac{d(y, \phi) - d(y, \phi)}{2} = 0 \end{aligned}$$

De donde

$$p(x, x) \leq p(x, y)$$

MP₂) Sean $x, y \in X$ tales que

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

luego

$$a + \frac{d(x, x) - d(x, \phi) - d(x, \phi)}{2} = a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2}$$

y

$$a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} = a + \frac{d(y, y) - d(y, \phi) - d(y, \phi)}{2}$$

de donde

$$-2d(x, \phi) = d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi) = -2d(y, \phi)$$

de donde

$$d(x, \phi) = d(y, \phi)$$

y

$$d(x, y) - 2d(x, \phi) = -2d(x, \phi)$$

Así pues

$$d(x, y) = 0$$

lo que implica que

$$x = y$$

MP₃) Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, y) &= a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} \\ &= a + \frac{d(y, x) - d(y, \phi) - d(x, \phi)}{2} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

MP₄) Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} &p(x, z) + p(z, y) - p(z, z) \\ &= a + \frac{d(x, z) - d(x, \phi) - d(z, \phi)}{2} + a + \frac{d(z, y) - d(z, \phi) - d(y, \phi)}{2} - \left[\frac{-2d(z, \phi)}{2} \right] \\ &= a + \frac{d(x, z) - d(x, \phi) - d(z, \phi) + d(z, y) - d(z, \phi) - d(y, \phi) + 2d(z, \phi)}{2} \\ &= a + \frac{d(x, z) - d(x, \phi) + d(z, y) - d(y, \phi)}{2} \\ &= a + \frac{d(x, z) + d(z, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} \\ &\geq a + \frac{d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi)}{2} = p(x, y) \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, p) es un espacio métrico parcial

Por otro lado

$$p(\phi, \phi) = a + \frac{d(\phi, \phi) - d(\phi, \phi) - d(\phi, \phi)}{2} = a$$

y

$$p(\phi, x) = a + \frac{d(\phi, x) - d(\phi, \phi) - d(x, \phi)}{2} = a$$

de donde

$$p(\phi, \phi) = p(x, \phi)$$

Por consiguiente $\phi \preceq_p x$, para todo $x \in X$, o sea que ϕ es el primer elemento del conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq_p) .

Finalmente, por el Teorema 2.2.4.,

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2a + d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi) - a - \frac{d(x, x) - d(x, \phi) - d(x, \phi)}{2} \\ &\quad - a - \frac{d(y, y) - d(y, \phi) - d(y, \phi)}{2} \\ &= d(x, y) - d(x, \phi) - d(y, \phi) + d(x, \phi) + d(y, \phi) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $d_p = d$ y $(X, d_p) = (X, d)$.

Ejemplo 2.2.9 *Supongamos que queremos un diseño de un juego de computadora interactivo basado en un espacio euclideo, y los jugadores se mueven en el espacio. El espacio en sí mismo podría ser modelado por un espacio métrico (X, d) , y las posiciones de cada jugador en cualquier momento en el espacio se representa por un punto base. Uno de los tantos retos para los programadores del juego sería garantizar que todo el tiempo la visión espacial de cada jugador sea consistente con el espacio mismo, los cuales se muestran como uno en la pantalla del ordenador. Entonces el movimiento de cada jugador en el espacio podría ser modelado por una secuencia de la forma $\{(X, d, \phi_n)\}_{n=0}^{\infty}$, a la que se puede asociar una sucesión de conjuntos parcialmente ordenados $\{(X, \preceq_n)\}_{n=0}^{\infty}$ para describir la vista cambiante del espacio de ese jugador.*

2.3. Espacios Cuasimétricos

Luego de introducir los espacios métricos ponderados y los espacios métricos basados, introduciremos un tercer concepto el cual nos arrojará una nueva formulación equivalente para los espacios métricos parciales.

Definición 2.3.1 Sea X un conjunto no vacío y

$$q: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función q es una **cuasimétrica** si satisface las siguientes propiedades.

Q₁) $0 \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in X$

Q₂) Si $x = y$ entonces $q(x, y) = 0$, para todo $x, y \in X$

Q₃) Si $q(x, y) = q(y, x) = 0$, entonces $x = y$; para todo $x, y \in X$

Q₄) $q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$

Al par (X, q) se le llama **espacio cuasimétrico**.

Observaciones:

- Note que en general las cuasimétricas no son simétricas. Más aún, una cuasimétrica q es una métrica si y sólo si q es simétrica.
- Toda métrica es una cuasimétrica.
- De los axiomas de métrica, las cuasimétricas cumplen con M_0 , M_1 y M_4 , pero no cumplen con M_2 ni con M_3 .
- De los axiomas de pseudométricas, las cuasimétricas cumplen con S_0 , S_1 y S_4 , pero no cumplen con S_3 .
- De los axiomas de pmétrica, las cuasimétricas cumplen con MP_0 y MP_4 , pero no cumplen con MP_2 ni con MP_3 .
- De los axiomas de cuasimétrica, las pmétricas, cumplen con Q_1 , Q_3 y Q_4 , pero no cumplen con Q_2 .

Teorema 2.3.1 Sea (X, q) un espacio cuasimétrico y \preceq_q la relación definida en X por

$$x \preceq_q y \iff q(x, y) = 0$$

Entonces (X, \preceq_q) es un conjunto parcialmente ordenado \preceq_q se llama **el orden parcial inducido por la cuasimétrica q sobre X .**

Demostración

OP₁) Sea $x \in X$, entonces

$$q(x, x) = 0$$

por lo tanto $x \preceq_q x$.

OP₂) Sean $x, y \in X$ tal que $x \preceq_q y$ y $y \preceq_q x$, luego

$$q(x, y) = 0 \text{ y } q(y, x) = 0$$

de donde

$$q(x, y) = q(y, x) = 0$$

Por Q_3 se tiene que $x = y$.

OP₃) Sean $x, y, z \in X$ tal que $x \preceq_q y$ y $y \preceq_q z$, entonces

$$q(x, y) = 0 \text{ y } q(y, z) = 0$$

Por Q_4 se tiene que

$$0 \leq q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z) = 0$$

de donde

$$q(x, z) = 0$$

Así

$$x \preceq_q z$$

De todo lo anterior se tiene que (X, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Teorema 2.3.2 *Sea (X, q) un espacio cuasimétrico y sean*

$$q^* : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad q_S : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

las funciones definidas por

$$q^*(x, y) = q(y, x) \quad \text{y} \quad q_S(x, y) = q(x, y) + q^*(x, y)$$

Entonces (X, q^) es un espacio cuasimétrico y (X, q_S) es un espacio métrico. Más aún, $q^* = q$ si y sólo si q es una métrica.*

Demostración

Probemos primero que (X, q^*) es un espacio cuasimétrico

Q₁) Sean $x, y \in X$, entonces por Q₁

$$0 \leq q(y, x) = q^*(x, y)$$

Q₂) Sean $x, y \in X$ tales que $x = y$, entonces por Q₂

$$0 = q(y, x) = q^*(x, y)$$

Q₃) Sean $x, y \in X$ tales que $q^*(x, y) = q^*(y, x) = 0$, entonces

$$q(y, x) = q(x, y) = 0$$

luego por Q₃

$$x = y$$

Q₄) Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\begin{aligned} q^*(x, z) &= q(z, x) \\ &\leq q(z, y) + q(y, x) \\ &= q^*(y, z) + q^*(x, y) \\ &= q^*(x, y) + q^*(y, z) \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, q^*) es un espacio cuasimétrico

Probemos ahora que (X, q_S) es un espacio métrico.

M₀) Sean $x, y \in X$, entonces

$$0 \leq q(x, y) + q^*(x, y) = q_s(x, y)$$

M₁) Sea $r \in X$, entonces

$$q_s(r, r) = q(r, r) + q^*(r, r) = 0$$

M₂) Sean $x, y \in X$ tales que $q_s(x, y) = 0$, entonces

$$q(x, y) + q^*(x, y) = 0$$

$$q(x, y) + q(y, x) = 0$$

por Q₁ se tiene que

$$q(x, y) = q(y, x) = 0$$

Luego, por Q₃

$$x = y$$

M₃) Sean $x, y \in X$, entonces

$$q_s(x, y) = q(x, y) + q^*(x, y)$$

$$= q(x, y) + q(y, x)$$

$$= q(y, x) + q(x, y)$$

$$= q(y, x) + q^*(y, x)$$

$$= q_s(y, x)$$

M_4) Sean $x, y, z \in X$, entonces por Q_4

$$\begin{aligned}q_S(x, z) &= q(x, z) + q^*(x, z) \\ &= q(x, z) + q(z, x) \\ &\leq q(x, y) + q(y, z) + q(z, y) + q(y, x) \\ &= q(x, y) + q^*(x, y) + q(y, z) + q^*(y, z) \\ &= q_S(x, y) + q_S(y, z)\end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, q_S) es un espacio métrico.

\implies] Supongamos que $q = q^*$. Sabemos que q cumple con M_0 , M_1 y M_4 . Probemos que q cumple con M_2 y M_3 .

M_2) Sean $x, y \in X$ tales que $q(x, y) = 0$, entonces

$$0 = q(x, y) = q^*(x, y) = q(y, x)$$

luego, por Q_3 se tiene que $x = y$.

M_3) Sean $x, y \in X$, entonces

$$q(x, y) = q^*(x, y) = q(y, x)$$

De todo lo anterior se tiene que (X, q) es un espacio métrico.

\Leftarrow] Supongamos que q es una métrica. Sean $x, y \in X$, entonces por M_3 se tiene que

$$q(x, y) = q(y, x) = q^*(x, y)$$

Por lo tanto $q = q^*$

Teorema 2.3.3 Sea (X, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado y sea

$$q: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por

$$q(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \preceq y \\ 1 & \text{si } x \not\preceq y \end{cases}$$

entonces (X, q) es un espacio cuasimétrico.

Demostración

Q₁) Sean $x, y \in X$, luego por la definición de Q

$$q(x, y) = 0 \quad \text{ó} \quad q(x, y) = 1$$

por lo tanto

$$0 \leq q(x, y)$$

Q₂) Sean $x, y \in X$ tales que $x = y$, entonces

$$x \preceq y$$

de donde

$$q(x, y) = 0$$

Q₃) Sean $x, y \in Q$ tales que

$$q(x, y) = q(y, x) = 0$$

entonces

$$x \preceq y \text{ y } y \preceq x$$

luego por OP_2 se tienen que

$$x = y$$

Q₄) Sean $x, y, z \in X$, entonces

- Si $x \preceq z$, se tiene que

$$0 = q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$$

- Si $x \not\preceq z$, se tiene que

$$q(x, z) = 1$$

luego si $x \preceq y$ entonces

$$y \not\preceq z$$

de donde

$$1 = q(x, z) = q(x, y) + q(y, z)$$

De manera similar, si $y \preceq z$ entonces

$$x \not\preceq y$$

de donde

$$1 = q(x, z) = q(x, y) + q(y, z)$$

Además, si

$$x \not\preceq y \quad y \quad y \not\preceq z$$

entonces

$$\begin{aligned} q(x, y) + q(y, z) &= 1 + 1 \\ &> 1 \\ &= q(x, z) \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, q) es un espacio cuasimétrico.

Definición 2.3.2 *Un espacio cuasimétrico ponderado es una tripleta*

$(X, q, | \cdot |)$ *tal que (X, q) es un espacio cuasimétrico y*

$$|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una función que cumple con las siguientes propiedades

$$* 0 \leq |x|, \text{ para cada } x \in X$$

$$* |x| + q(x, y) = |y| + q(y, x), \text{ para todo } x, y \in X.$$

llamada **función de ponderación**

Teorema 2.3.4 Sea $(X, q, |\cdot|)$ un espacio cuasimétrico ponderado, y sea

$$p_q : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por

$$p_q(x, y) = |x| + q(x, y)$$

Entonces (X, p_q) es un espacio métrico parcial.

Demostración

MP₀) Sean $x, y \in X$, entonces

$$0 \leq |x| = |x| + q(x, x) = p_q(x, x)$$

además

$$\begin{aligned}
 p_q(x, r) &= |r| + q(r, x) = |r| + q(x, r) \leq |r| + q(r, y) \\
 &= p_q(x, y)
 \end{aligned}$$

de donde

$$0 \leq p_q(x, x) \leq p_q(x, y)$$

MP₂) Sean $x, y \in X$. Asumamos que

$$p_q(x, x) = p_q(x, y) = p_q(y, y)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 p_q(x, x) &= p_q(x, y) \\
 |x| + q(x, x) &= |x| + q(x, y) \\
 |x| &= |x| + q(x, y) \\
 0 &= q(x, y)
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 p_q(y, y) &= p_q(x, y) \\
 |y| + q(y, y) &= |x| + q(x, y) \\
 |y| &= |x| + q(y, x) \\
 0 &= q(y, x)
 \end{aligned}$$

De donde

$$q(x, y) = q(y, x) = 0$$

Luego por Q_3 se tiene que

$$x = y$$

MP₃) Sean $x, y \in X$, entonces por la propiedad de la función de ponderación se tiene que

$$p_q(x, y) = |x| + q(x, y) = |y| + q(y, x) = p_q(y, x)$$

por lo tanto

$$p_q(x, y) = p_q(y, x)$$

MP₄) Sean $x, y, z \in X$. entonces

$$\begin{aligned} p_q(x, z) &= |x| + q(x, z) \\ &\leq |x| + q(x, y) + q(y, z) \\ &= |x| + q(x, y) + |y| + q(y, z) - |y| - q(y, y) \\ &= p_q(x, y) + p_q(y, z) - p_q(y, y) \end{aligned}$$

de donde

$$p_q(x, z) \leq p_q(x, y) + p_q(y, z) - p_q(y, y)$$

Por todo lo anterior se tiene que (X, p_q) es un espacio métrico parcial

Teorema 2.3.5 Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sean q_p y $|\cdot|_p$ las funciones definidas por

$$q_p: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad |\cdot|_p: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$$

$$|x|_p = p(x, x)$$

Entonces $(X, q_p, |\cdot|_p)$ es un espacio cuasimétrico ponderado. Además, $p_{q_p} = p$, donde p_{q_p} es la métrica definida en el Teorema 2.3.4, y $\preceq_p = \preceq_{q_p}$.

Demostración

Q₁) Sean $x, y \in X$, entonces por MP_0

$$0 \leq p(x, y) - p(x, x) = q_p(x, y)$$

Q₂) Sean $x, y \in X$ tal que $x = y$, entonces

$$q_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$$

y como $x = y$, se tiene que

$$q_p(x, y) = p(x, x) - p(x, x)$$

así

$$q_p(x, y) = 0$$

Q₃) Sean $x, y \in X$ tal que

$$q_p(x, y) = q_p(y, x) = 0$$

entonces

$$q_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x) = 0$$

de donde

$$p(x, y) = p(x, x)$$

De manera similar se obtiene que

$$p(x, y) = p(y, y)$$

de donde

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

por MP_2 se tiene que

$$x = y$$

Q4) Sean $x, y, z \in X$. Luego

$$\begin{aligned}
 q_p(x, z) &= p(x, z) - p(x, x) \\
 &\leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y) - p(x, x) \\
 &= p(x, y) - p(x, x) + p(y, z) - p(y, y) \\
 &= q_p(x, y) + q_p(y, z)
 \end{aligned}$$

De todo lo anterior se tiene que (X, q_p) es un espacio cuasimétrico

- Sea $x \in X$ entonces

$$0 \leq p(x, x) = |x|_p$$

- Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
 |x| + q_p(x, y) &= p(x, x) + p(x, y) - p(x, x) \\
 &= p(x, y) \\
 &= p(y, x) \\
 &= p(y, x) + p(y, y) - p(y, y) \\
 &= p(y, y) + p(y, x) - p(y, y) \\
 &= |y| + q_p(y, x)
 \end{aligned}$$

Por consiguiente $(X, q_p, |\cdot|)$ es un espacio cuasimétrico ponderado

Por el Teorema 2.3.4,

$$\begin{aligned}
\rho_{q_p}(x, y) &= |r|_p + q_p(x, y) \\
&= p(x, x) + p(x, y) - p(x, x) \\
&= p(x, y)
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\rho_{q_p} = p$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
x \preceq_p y &\iff p(x, x) = p(x, y) \\
&\iff p(x, y) - p(x, x) = 0 \\
&\iff q_p(x, y) = 0 \\
&\iff x \preceq_{q_p} y
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\preceq_p = \preceq_{q_p}$.

Finalizamos este capítulo con un ejemplo que muestra que no todo espacio cuasimétrico tiene una función de ponderación.

Ejemplo 2.3.1 Sea $X = \{a, b, c\}$ y definamos la función

$$q : \{a, b, c\} \times \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$q(a, b) = 0 \quad q(b, a) = 2$$

$$q(a, c) = 1 \quad q(c, a) = 1$$

$$q(b, c) = 3 \quad q(c, b) = 0$$

con

$$q(x, x) = 0$$

para todo $x \in \{a, b, c\}$.

Note que la función q satisface los axiomas Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 , por lo tanto $(\{a, b, c\}, q)$ es un espacio cuasimétrico.

Veamos que $(\{a, b, c\}, q)$ es un espacio cuasimétrico que no puede ser ponderado. En efecto, supongamos que existe una función de ponderación

$$|\cdot| : \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}$$

para q . Entonces

$$\begin{aligned} |b| + q(b, c) &= |b| + 3 \\ &= (|b| + 2) + 1 \\ &= (|b| + q(b, a)) + 1 \\ &= (|a| + q(a, b)) + 1 \\ &= |a| + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a| + q(a, c) \\
&= |c| + q(c, a) \\
&= |c| + q(c, b) + q(c, a) \\
&= (|c| + q(c, b)) + 1 \\
&= (|b| + q(b, c)) + 1
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Así pues, el espacio cuasimétrico $(\{a, b, c\}, q)$ no se puede ponderar.

Capítulo 3

LA TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS PARCIALES

En los primeros pasos, al realizar estudios en espacios métricos, usualmente se empieza discutiendo las propiedades topológicas. Por ejemplo, se mostraría que la noción de *convergencia* en espacios métricos se pueden expresar en términos de la topología. En este capítulo se estudiarán las propiedades topológicas en los espacios métricos parciales y los espacios cuasimétricos, así como las relaciones entre estas topologías y los ordenes parciales inducidos por estas funciones. También se estudiarán las relaciones que existen entre las topologías inducidas por las métricas y cuasimétricas y las topologías que provienen de las métricas inducidas por estas funciones. Finalmente se estudiará la convergencia en estos espacios topológicos y se presentará una extensión del teorema de la función contractiva en estos nuevos espacios topológicos.

3.1. La Topología de los Espacios Métricos Parciales

Definición 3.1.1 Sea (X, p) un espacio métrico parcial. La **bola abierta** de centro x y radio $\varepsilon > 0$ se denota por $B_p(x, \varepsilon)$ y se define por

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) < \varepsilon\}$$

La bola cerrada de centro x y radio ε se denota por $B_p(x, \varepsilon)$ y se define por

$$\overline{B}_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) \leq \varepsilon\}$$

Observación: A diferencia de los espacios métricos, algunas bolas abiertas en los espacios métricos parciales pueden ser vacías, por ejemplo, si existe un $x \in X$ tal que $p(x, x) > 0$, entonces por el axioma MP_0 se tiene que

$$B_p(x, p(x, x)) = \emptyset$$

Teorema 3.1.1 Sea (X, p) un espacio métrico parcial. El conjunto de todas las bolas abiertas de (X, p) es base de una topología τ sobre X . τ es llamada la **topología inducida por la pmétrica p** , y se denota por τ_p .

Demostración

i. Note que

$$X = \bigcup_{x \in U} B_p(x, p(x, x) + 1)$$

ii. Sean $B_p(x, \varepsilon)$ y $B_p(y, \delta)$ dos bolas abiertas de X tales que

$$B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta) \neq \emptyset$$

Sea $a \in B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta)$ y tomemos

$$\eta_a = p(a, a) + \min\{\varepsilon - p(a, x), \delta - p(a, y)\}$$

Supongamos que $z \in B_p(a, \eta_a)$, entonces

$$p(z, a) < \eta_a = p(a, a) + \min\{\varepsilon - p(a, x), \delta - p(a, y)\}$$

luego

$$p(z, a) < p(a, a) + \varepsilon - p(a, x)$$

de donde

$$p(z, a) + p(a, x) - p(a, a) < \varepsilon$$

por lo tanto, por MP_4 se tiene que $p(z, x) < \varepsilon$ y, por ende, $z \in B_p(x, \varepsilon)$

De igual forma se prueba que $z \in B_p(y, \delta)$. Por consiguiente

$$z \in B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta)$$

y

$$B_p(a, \eta_a) \subset B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta)$$

para todo $a \in B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta)$.

Finalmente, como $a \in B_p(a, \eta_a)$, se tiene que

$$a \in B_p(a, \eta_a) \subset B_p(x, \varepsilon) \cap B_p(y, \delta)$$

Por el Teorema 1.2.8, se tiene que la familia

$$\mathcal{B}_p = \{B_p(x, \varepsilon) / x \in X, \varepsilon > 0\}$$

forma una base para una topología τ_p sobre X . Mas precisamente, la topología τ_p es la familia de todas las uniones de elementos de \mathcal{B}_p .

Ejemplo 3.1.1 Consideremos el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{\max}) definido en el Ejemplo 2.2.2, entonces para $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} B_{p_{\max}}(a, \varepsilon + p_{\max}(a, a)) &= B_{p_{\max}}(a, \varepsilon + a) \\ &= \{b \in \mathbb{R}^+ \mid p_{\max}(a, b) < \varepsilon + a\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^+ \mid \max\{a, b\} < \varepsilon + a\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^+ \mid b < \varepsilon + a\} \\ &= [0, \varepsilon + a) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_{p_{\max}} = \{[0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

es una base para la topología $\tau_{p_{\max}}$.

Teorema 3.1.2 Sea (X, p) un espacio métrico parcial y p^\wedge la métrica definida en el Teorema 2.2.1. Entonces la topología inducida por p es la misma que la topología inducida por p^\wedge .

Demostración

Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, probemos primeramente que

$$B_p(x, \varepsilon) = B_{p^\wedge}\left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$$

En efecto. Sea $a \in B_p(x, \varepsilon)$, entonces

$$p(x, a) < \varepsilon$$

luego, como la función

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}$$

es creciente en $[0, \infty)$, se tiene que

$$p^\wedge(x, a) = \frac{p(x, a)}{1 + p(x, a)} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

de donde $a \in B_{p^\wedge}\left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$. Así pues

$$B_p(x, \varepsilon) \subseteq B_{p^\wedge}\left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$$

Sea $b \in B_{p^\wedge}\left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$, entonces

$$p(x, b) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

$$\frac{p(x, b)}{1 + p(x, b)} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

$$p(x, b) + \varepsilon p(x, b) < \varepsilon + \varepsilon p(x, b)$$

$$p(x, b) < \varepsilon$$

de donde $b \in B_p(x, \varepsilon)$ Así pues,

$$B_{p^\wedge} \left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \subseteq B_p(x, \varepsilon)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$B_p(x, \varepsilon) = B_{p^\wedge} \left(x, \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)$$

Sea ahora $0 < \delta < 1$, entonces

$$\begin{aligned} B_p \left(x, \frac{\delta}{1 - \delta} \right) &= B_{p^\wedge} \left(x, \frac{\frac{\delta}{1 - \delta}}{1 - \frac{\delta}{1 - \delta}} \right) \\ &= B_{p^\wedge}(x, \delta) \end{aligned}$$

o sea que si $0 < \delta < 1$, entonces

$$B_{p^\wedge}(x, \delta) = B_p \left(x, \frac{\delta}{1 - \delta} \right)$$

Note que si $\delta \geq 1$, entonces

$$B_{p^\wedge}(x, \delta) = X = \bigcup_{r \in X} B_p(x, p(r, x) + 1)$$

Así, la topología inducida por p es la misma que la topología inducida por p^\wedge

Teorema 3.1.3 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Las bolas abiertas de la forma*

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) < \varepsilon\}$$

con $\varepsilon > 0$, generan la misma topología que las bolas abiertas de la forma

$$B'_p(x, \delta) = \{y \in X \mid p(x, y) < p(x, x) + \delta\}$$

con $\delta > 0$. Más aún, las dos familias son la misma, si se eliminan las bolas vacías.

Demostración

Esto es evidente, pues si tomamos $0 < p(i, x) < \varepsilon$, entonces

$$B_p(x, \varepsilon) = B'_p(x, \varepsilon - p(x, x)) \quad \text{y} \quad B'_p(x, \varepsilon) = B_p(x, p(x, x) + \varepsilon)$$

Además, si

$$0 < \varepsilon \leq p(x, x)$$

entonces

$$B_p(x, \varepsilon) = \emptyset$$

Así, si

$$\mathcal{B}_p = \{B_p(x, \varepsilon) / x \in X, \varepsilon > 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}'_p = \{B'_p(x, \varepsilon) / x \in X, \varepsilon > 0\}$$

entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}'_p \cup \{\emptyset\}$$

Teorema 3.1.4 Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sean $a \in X$, $x \in B_p(a, \varepsilon)$.

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in B_p(x, \delta) \subseteq B_p(a, \varepsilon)$$

Demostración

Supongamos que $x \in B_p(a, \varepsilon)$, entonces

$$p(x, a) < \varepsilon$$

Sea

$$\delta = \varepsilon - p(x, a) + p(x, x)$$

entonces $\delta > 0$. Además, como $\varepsilon > p(x, a)$ se tiene que $p(x, x) < \delta$. Por lo tanto

$$x \in B_p(x, \delta)$$

Supongamos ahora que $y \in B_p(x, \delta)$. Entonces

$$p(y, x) < \delta$$

$$p(y, x) < \varepsilon - p(x, a) + p(x, x)$$

$$p(y, x) + p(x, a) - p(x, x) < \varepsilon$$

Luego, por MP_4 se tiene que

$$p(y, a) < \varepsilon$$

de donde $y \in B_p(a, \varepsilon)$. Así pues,

$$x \in B_p(x, \delta) \subseteq B_p(a, \varepsilon)$$

Teorema 3.1.5 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Entonces (X, τ_p) es un espacio T_0 .*

Demostración

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces por MP_0 y MP_2 se tiene que

$$p(x, x) < p(x, y) \quad \text{ó} \quad p(y, y) < p(x, y)$$

Supongamos que $p(x, x) < p(x, y)$ y tomemos

$$\varepsilon = \frac{p(x, y) - p(x, x)}{2} > 0$$

Note que $x \in B_p(x, \varepsilon + p(x, x))$; sin embargo,

$$\begin{aligned} \varepsilon + p(x, x) &= \frac{p(x, y) - p(x, x)}{2} + p(x, x) \\ &= \frac{p(x, y) + p(x, x)}{2} \\ &< \frac{p(x, y) + p(x, y)}{2} \\ &= p(x, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y \notin B_p(x, \varepsilon + p(x, x))$$

Similar resultado se obtiene si suponemos que $p(y, y) < p(x, y)$.

Así pues, (X, τ) es un espacio topológico T_0

Los espacios métricos parciales no son, en general, T_1 como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.2 Sea $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales y

$$p: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por

$$p(m, n) = \max\{m, n\}$$

Imitando los pasos seguidos en el Ejemplo 2.2.2, se prueba que p es una métrica sobre \mathbb{N} .

Note que si $0 < \varepsilon < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
B_p(n, \varepsilon + p(n, n)) &= B_p(n, \varepsilon + n) \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid p(m, n) < \varepsilon + n\} \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid \max\{m, n\} < \varepsilon + n\} \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid m < \varepsilon + n\} \\
&= \{1, 2, 3, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Denotemos

$$[1, n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Luego

$$\mathcal{B} = \{[1, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología τ_p sobre \mathbb{N} .

Observe que (\mathbb{N}, τ_p) no es T_1 , ya que si $n > m$, entonces para todo $\mathcal{O} \in \tau_p$ tal que $n \in \mathcal{O}$, se tiene que $m \in \mathcal{O}$.

Definición 3.1.2 Sea (X, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Una **topología de Alexandrov** sobre X es una topología τ que cumple con la siguiente propiedad:

$$x \in \mathcal{O} \text{ y } x \preceq y \text{ entonces } y \in \mathcal{O}$$

para todo $\mathcal{O} \in \tau$ y para todo $x, y \in X$.

La **topología completa de Alexandrov** sobre X es la topología

$$\{O \subseteq X \mid \forall x \in O \forall y \in X \text{ Si } x \preceq y \implies y \in O\}$$

de todas las clausuras ascendentes y se denota por τ_{\preceq} .

Observaciones:

- Un conjunto parcialmente ordenado con la topología completa de Alexandrov es T_0 .
- Un conjunto parcialmente ordenado con una topología de Alexandrov no es siempre T_0 . En efecto, basta tomar la topología caótica en un conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq) con más de un punto.
- Si τ es una topología de Alexandrov sobre el conjunto parcialmente ordenado (X, \preceq) , entonces $\tau \subseteq \tau_{\preceq}$. Recíprocamente si τ es una topología sobre X tal que $\tau \subseteq \tau_{\preceq}$, entonces τ es una topología de Alexandrov.
- Una base para la topología completa de Alexandrov sobre (X, \preceq) es la familia

$$\mathcal{B}_{\preceq} = \{\{y \in X \mid x \preceq y\} \mid x \in X\}$$

Teorema 3.1.6 *Sea (X, ρ) un espacio métrico parcial. Toda topología generada por una métrica es una topología de Alexandrov. Más precisamente,*

$$\tau_p \subseteq \tau_{\leq p}$$

Demostración

Es suficiente probar que para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup \{ \{z \in X \mid y \leq_p z\} \mid y \in B_p(x, \varepsilon) \}$$

Sean $x, y, z \in X$ y $\varepsilon > 0$, tales que

$$y \in B_p(x, \varepsilon) \quad \text{y} \quad y \leq_p z$$

Entonces

$$\begin{aligned} p(x, z) &\leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y) \\ &= p(x, y) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in B_p(x, \varepsilon)$ y

$$\{z \in X \mid y \leq_p z\} \subseteq B_p(x, \varepsilon)$$

para todo $y \in B_p(x, \varepsilon)$. Luego

$$B_p(x, \varepsilon) = \bigcup \{ \{z \in X \mid y \leq_p z\} \mid y \in B_p(x, \varepsilon) \}$$

Esto implica que $\tau_p \subseteq \tau_{\leq p}$; es decir τ_p es una topología de Alexandrov.

Teorema 3.1.7 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Entonces*

$$\tau_p = \tau_{\leq p}$$

si y sólo si para todo $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que.

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \mid x \leq_p y\}$$

Demostración

\Leftarrow] Sea $O \in \tau_{\leq p}$, entonces

$$\begin{aligned} O &= \bigcup_{\tau \in O} \{y \mid x \leq_p y\} \\ &= \bigcup_{\tau \in O} B_p(x, \varepsilon) \\ &\in \tau_p \end{aligned}$$

De donde

$$\tau_{\leq p} \subseteq \tau_p$$

Luego por el Teorema 3.1.6

$$\tau_{\leq p} = \tau_p$$

\Rightarrow] Sea $x \in X$, entonces

$$\{y \mid x \leq_p y\} \in \tau_p$$

Luego, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$x \in B_p(x, \varepsilon) \subseteq \{y \mid x \leq_p y\}$$

Pero, como $x \in B_p(x, \varepsilon)$, se tiene que

$$\{y \mid x \preceq_p y\} \subseteq B_p(x, \varepsilon)$$

Así pues, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \mid x \preceq_p y\}$$

3.2. La Topología de los Espacios Cuasimétricos

Definición 3.2.1 Sea (X, q) un espacio cuasimétrico. La bola abierta de centro x y radio $\varepsilon > 0$ se denota por $B_q(x, \varepsilon)$ y se define por

$$B_q(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid q(x, y) < \varepsilon\}$$

Teorema 3.2.1 Sea (X, q) un espacio cuasimétrico. El conjunto de todas las bolas abiertas de (X, q) es una base de una topología τ sobre X . τ es llamada la topología inducida por la cuasimétrica q y se denota por τ_q .

Demostración

i) Note que

$$X = \bigcup_{r \in X} B_q(r, \varepsilon)$$

ii) Sean $B_q(x, \varepsilon)$ y $B_q(y, \delta)$ dos bolas de X y sea $z \in B_q(x, \varepsilon) \cap B_q(y, \delta)$. Tomemos

$$\eta = \min\{\varepsilon - q(x, z), \delta - q(y, z)\}$$

Sea $a \in B(z, \eta)$, entonces

$$q(z, a) < \varepsilon - q(x, z)$$

de donde

$$q(x, z) + q(z, a) < \varepsilon$$

por lo tanto, por Q_4 se tiene que

$$q(x, a) < \varepsilon$$

y

$$a \in B_q(x, \varepsilon)$$

De igual forma se prueba que $a \in B_q(y, \delta)$. Por consiguiente

$$a \in B_q(x, \varepsilon) \cap B_q(y, \delta)$$

y

$$B_q(z, \eta) \subseteq B_q(x, \varepsilon) \cap B_q(y, \delta)$$

Por el Teorema 1.2.8 se tiene que la familia

$$\mathcal{B}_q = \{B_q(x, \varepsilon) / x \in X, \varepsilon > 0\}$$

forma una base para una topología τ_q sobre X .

Teorema 3.2.2 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sea q_p la cuasimétrica generada por p en el Teorema 2.3.5, entonces*

$$\tau_p = \tau_{q_p} \quad \text{y} \quad \leq_p = \leq_{q_p}$$

Demostración

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > p(x, x)$, entonces

$$\begin{aligned} B_p(x, \varepsilon) &= \{y \in X \mid p(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid p(x, y) - p(x, x) < \varepsilon - p(x, x)\} \\ &= \{y \in X \mid q_p(x, y) < \varepsilon - p(x, x)\} \\ &= B_{q_p}(x, \varepsilon - p(x, x)) \end{aligned}$$

Si $x \in X$ y $0 < \varepsilon \leq p(x, x)$, entonces

$$B_p(x, \varepsilon) = \emptyset$$

Finalmente, si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} B_{q_p}(x, \varepsilon) &= \{y \in X \mid q_p(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid p(x, y) - p(x, x) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid p(x, y) < \varepsilon + p(x, x)\} \\ &= B_p(x, \varepsilon + p(x, x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_p = \tau_{q_p}$

Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x \preceq_p y &\iff p(x, x) = p(x, y) \\ &\iff p(x, y) - p(x, x) = 0 \\ &\iff q_p(x, y) = 0 \\ &\iff x \preceq_{q_p} y \end{aligned}$$

De donde

$$\preceq_p = \preceq_{q_p}$$

Teorema 3.2.3 *Sea $(X, q, |\cdot|)$ un espacio cuasimétrico ponderado y sea p_q la pmétrica generada por q en el Teorema 2.3.4., entonces*

$$\tau_q = \tau_{p_q} \quad \text{y} \quad \preceq_q = \preceq_{p_q}$$

Demostración

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > |x|$, entonces

$$\begin{aligned} B_{p_q}(x, \varepsilon) &= \{y \in X \mid p_q(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid |x| + q(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid q(x, y) < \varepsilon - |x|\} \\ &= B_q(x, \varepsilon - |x|) \end{aligned}$$

Si $x \in X$ y $0 < \varepsilon \leq |x| = p(x, x)$, entonces

$$B_{p_q}(x, \varepsilon) = \emptyset$$

Finalmente, si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} B_q(x, \varepsilon) &= \{y \in X \mid q(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \mid |x| + q(x, y) < \varepsilon + |x|\} \\ &= \{y \in X \mid p_q(x, y) < \varepsilon + |x|\} \\ &= B_p(x, \varepsilon + |x|) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_q = \tau_{p_q}$.

Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x \preceq_{p_q} y &\iff p_q(x, x) = p_q(x, y) \\ &\iff |x| + q(x, x) = |x| + q(x, y) \\ &\iff q(x, y) = 0 \\ &\iff x \preceq_q y \end{aligned}$$

De donde $\preceq_q = \preceq_{p_i}$

Teorema 3.2.4 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial y sea d_p la métrica generada por p en el Teorema 2.2.4, entonces*

$$\tau_p \subseteq \tau_{d_p}$$

Demostración

Sea

$$q_p: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por

$$q_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$$

Por el Teorema 2.3.5, q_p es una cuasimétrica. Luego por el Teorema 3.2.2

$$\tau_p = \tau_{q_p}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= [p(x, y) - p(x, x)] + [p(y, x) - p(y, y)] \\ &= q_p(x, y) + q_p(y, x) \end{aligned}$$

luego, se tiene que

$$q_p(x, y) \leq d_p(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Por lo tanto

$$B_{d_p}(x, \varepsilon) \subset B_{q_p}(x, \varepsilon)$$

Esto implica que $\tau_{q_p} \subseteq \tau_{d_p}$. Por consiguiente $\tau_p \subseteq \tau_{d_p}$.

3.3. El Teorema de la Función Contráctil para Métricas Parciales

En las secciones anteriores se han generalizado algunos conceptos de espacios métricos a los espacios métricos parciales. Como por ejemplo los conceptos de *bola abierta*, *bola cerrada*, *base para una topología*. Además, hemos visto como a partir, de un espacio métrico parcial se puede generar ya sea un espacio métrico o un espacio cuasimétrico.

Ahora se generalizará uno de los teoremas más familiares de la teoría de espacios métricos como lo es *el teorema de la función contractiva o punto fijo*. Para ello se generalizará, de los espacios métricos a espacios métricos parciales, los conceptos de *convergencia de sucesiones*, *sucesiones de Cauchy* y *espacios completos*.

Definición 3.3.1 Sea (X, ρ) un espacio métrico parcial. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X converge a un punto $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon)$, existe un $N > 0$ tal que

$$x_n \in B(x, \varepsilon)$$

para todo $n \geq N$. Esta situación se denota por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \longrightarrow x$$

Esto es, $\{x_n\}$ converge a x si este está eventualmente en toda bola abierta que contiene a x . Como

$$\mathcal{B} = \{B_p(x, \varepsilon) / x \in X \ \varepsilon > 0\}$$

es una base para la topología τ_p inducida por la métrica p , la sucesión $\{x_n\}$ converge a x si y sólo si la sucesión está eventualmente en cada abierto (básico) que contenga a x . En particular, $\{x_n\}$ converge a x si para todo $\varepsilon > 0$, la sucesión $\{x_n\}$ está eventualmente en $B_p(x, \varepsilon + p(\tau, \tau))$

Definición 3.3.2 Sea (X, q) un espacio cuasimétrico. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X converge a un punto $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que

$$x_n \in B_q(x, \varepsilon)$$

para todo $n \geq N$. Esta situación se denota por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \text{ó} \quad x_n \longrightarrow x$$

Como

$$\mathcal{B} = \{B_q(x, \varepsilon) / x \in X \ \varepsilon > 0\}$$

es una base para la topología τ_q inducida por la cuasimétrica q , la sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ si y sólo si la sucesión está eventualmente en cada abierto (básico) que contiene a x .

Teorema 3.3.1 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X y $x \in X$. Entonces*

$$x_n \longrightarrow x$$

si y sólo si,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

Demostración

\implies] Como $\{x_n\}$ converge a x , para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que

$$x_n \in B(x, \varepsilon + p(x, x))$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto

$$0 \leq p(x, v) \leq p(x_n, v) < \varepsilon + p(x, x)$$

de donde

$$0 \leq p(x_n, x) - p(x, x) < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

\Leftarrow] Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

existe un $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$

$$p(x_n, x) - p(x, x) < \varepsilon$$

$$p(x_n, x) < \varepsilon + p(x, x)$$

Por lo tanto $x_n \in B(x, \varepsilon + p(x, x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir que la sucesión $\{x_n\}$

está eventualmente en $B_p(x, \varepsilon + p(x, x))$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Definición 3.3.3 Sea (X, ρ) un espacio métrico parcial y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X . El conjunto de todos los puntos límites de $\{x_n\}$ se denota por $L(x_n)$; o sea

$$L(x_n) = \{x \in X \mid x_n \rightarrow x\}$$

Ejemplo 3.3.1 Consideremos el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{\max}) definido en el Ejemplo 2.2.2. Para la sucesión $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ se tiene que

$$L(x_n) = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^+$ y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} B_{p_{\max}}(x, \varepsilon + p_{\max}(x, x)) &= B_{p_{\max}}(x, \varepsilon + x) \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \mid p_{\max}(x, y) < \varepsilon + x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \mid \max\{x, y\} < \varepsilon + x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y < \varepsilon + x\} \\ &= [0, \varepsilon + x) \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimediana existe un $N > 0$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$, por lo tanto

$$\frac{1}{n} \in [0, \varepsilon + \delta)$$

de donde

$$\frac{1}{n} \in B_{p_{\max}}(x, \varepsilon + p_{\max}(x, x))$$

para todo $n \geq N$. Así

$$\frac{1}{n} \rightarrow x$$

y $L(x_n) = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$.

Teorema 3.3.2 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico parcial (X, p) y sea $x \in L(x_n)$. Si $y \preceq_p x$, entonces $y \in L(x_n)$.*

Demostración

Como $y \preceq_p x$, entonces

$$p(y, y) = p(y, x)$$

Aplicando la desigualdad triangular de p se tiene que

$$p(x_n, y) \leq p(x_n, x) + p(x, y) - p(x, x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, y) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) + p(x, y) - p(x, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, y) \leq p(x, y)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, y) \leq p(y, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, y) \leq p(y, y)$$

Por otro lado, por MP_0

$$p(y, y) \leq p(x_n, y)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$p(y, y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y)$$

De todo lo anterior se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y) = p(y, y)$$

Luego, por el Teorema 3.3.1.

$$x_n \longrightarrow y$$

Por consiguiente $y \in L(x_n)$

Definición 3.3.4 Sea (X, p) un espacio métrico parcial. Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X converge propiamente a $x \in X$ si $\{x_n\}$ converge a x y si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$$

En otras palabras por le Teorema 3.3.1, una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico parcial (X, p) converge propiamente a $\tau \in X$ si los siguientes límites existen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n)$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, \tau) = p(x, x)$$

Teorema 3.3.3 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial, $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X y $x \in X$. Entonces, $\{x_n\}$ converge propiamente a x si y sólo si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_p(x, x_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_p^*(x, x_n)$$

donde q_p y q_p^* son las cuasimétricas definidas en los Teoremas 2.3.2 y 2.3.5.

Demostración

\implies] Supongamos que $\{x_n\}$ converge propiamente a $x \in X$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n) = p(x, x) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x)$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p(x, x_n) - p(x, x)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p(x_n, x_n) - p(x_n, x)) = 0$$

es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_p(x, x_n) = 0 \quad \vee \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_p(x_n, x) = 0$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_p(x, x_n) = 0 \quad \vee \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_p^*(x, x_n) = 0$$

\Leftarrow] Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_p(x, x_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_p^*(x, x_n)$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x, x_n) - p(x, x)) = 0 \quad \vee \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x_n, x) - p(x_n, x_n)) = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x, x_n) - p(x, x)) + p(x, x) = p(x, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x, x_n) - p(x, x) + p(x, x)) = p(x, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x, x_n) = p(x, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

Además

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x_n, x) - p(x_n, x_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p(x_n, x) - p(x_n, x) + p(x_n, x_n)) = p(x, x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$$

así pues,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

Esto implica que la sucesión $\{x_n\}$ converge propiamente a x .

Teorema 3.3.4 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial y $\{x_n\}$ una sucesión en X que converge propiamente a x e y , entonces $x = y$*

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ converge propiamente a x e y , existe un $N > 0$ tal que

$$0 \leq p(x_n, y) - p(y, y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$0 \leq p(x_n, x) - p(x, x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|p(x_n, x_n) - p(y, y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto, por MP_4 se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq p(y, x) - p(x, x) &\leq p(y, x_n) + p(x_n, x) - p(x_n, x_n) - p(x, x) \\ &= p(y, x_n) - p(x_n, x_n) + p(x_n, x) - p(x, x) \\ &= p(x_n, y) - p(x_n, x_n) + p(x_n, x) - p(x, x) \\ &= [p(x_n, y) - p(y, y)] + [p(y, y) - p(x_n, x_n)] + [p(x_n, x) - p(x, x)] \\ &\leq [p(x_n, y) - p(y, y)] + |p(x_n, x_n) - p(y, y)| + [p(x_n, x) - p(x, x)] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Esto implica que

$$p(y, x) - p(x, y) = 0$$

es decir,

$$p(x, x) = p(x, y)$$

Por consiguiente, $x \preceq_p y$.

De igual manera se prueba que $y \preceq_p x$. Luego, como \preceq_p es una relación de orden parcial, se tiene que $x = y$.

Ejemplo 3.3.2 Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ definida en el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{max}) , estudiada en el Ejemplo 3.3.1.

Recordemos que

$$L\left(\frac{1}{n}\right) = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

Note que

$$p_{max}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{max}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Así pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\max} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\max} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = 0 = p_{\max}(0, 0)$$

o sea que la sucesión $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ converge propiamente a $x = 0$. Note además que si $x > 0$, entonces $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ converge a τ , pero no propiamente

Observación: De los Teoremas 3.3.2 y 3.3.4 se deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos en un espacio métrico parcial (X, p) que converge propiamente a y , entonces

$$L(x_n) = \{x \in X \mid x \preceq_p y\}$$

o sea que y es el elemento máximo de $L(x_n)$. En efecto, supongamos que $\{x_n\}$ converge propiamente a y e $x \in L(x_n)$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y) = p(y, y)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y) = p(x, x)$$

Por lo tanto

$$p(x, x) \leq p(x, y) \leq p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} p(x, \tau) \leq p(x, y) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n)] \\ &= p(x, x) + p(y, y) - p(y, y) \\ &= p(x, x) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$p(x, x) = p(x, y)$$

y $x \preceq_p y$. Así

$$L(x_n) = \{x \in X \mid x \preceq_p y\}$$

Ejemplo 3.3.3 Sea $X = (0, \infty)$ y denotemos la función

$$p_{\max} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_{\max}(a, b) = \max\{a, b\}$$

Similarmente al Ejemplo 2.2.2 se prueba que (X, p_{\max}) es un espacio métrico parcial.

Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ en X . Siguiendo un análisis similar al usado en el

Ejemplo 3.3.1, se obtiene que

$$L\left(\frac{1}{n}\right) = (0, \infty)$$

Sin embargo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ no converge propiamente en X .

La siguiente definición generaliza la noción de *sucesión de Cauchy* a los espacios métricos parciales.

Definición 3.3.5 Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico parcial (X, ρ) es de **Cauchy** si existe un $a \geq 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \geq 0$, tal que

$$|\rho(x_n, x_m) - a| < \varepsilon$$

para todo $n, m > N$.

En otras palabras, $\{x_n\}$ es de Cauchy si $\rho(x_n, x_m)$ converge a algún $a \in \mathbb{R}^+$ cuando n y m se aproximen al infinito; esto es, si

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = a$$

Note que si (X, ρ) es un espacio métrico entonces $a = 0$, ya que en este caso

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x_n, x_n) = a$$

Ejemplo 3.3.4 Consideremos el espacio métrico parcial $(\mathbb{R}^+, \rho_{\max})$ del Ejemplo 3.2.2. Definamos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}^+ por

$$x_n = 3 + (-1)^n$$

Sea $n \geq 4$, entonces

$$\rho_{\max}(x_n, x) = \max\{3 + (-1)^n, x\} = x = \rho_{\max}(x, x)$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x) = pmax(x, x)$$

Esto implica que $x \in L(x_n)$ y

$$[4, \infty) \subset L(x_n)$$

Si $2 \leq x < 4$, entonces se tiene que

$$pmax(x_n, x) = max\{3 + (-1)^n, x\} = \begin{cases} 4 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ x & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x)$$

no existe.

Si $0 \leq x < 2$, entonces se tiene que

$$pmax(x_n, x) = max\{3 + (-1)^n, x\} = \begin{cases} 4 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ 2 & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x)$$

no existe.

De todo lo anterior se tiene que

$$L(x_n) = [4, \infty)$$

Por otro lado

$$pmax(x_n, x_n) = 3 + (-1)^n$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n]$$

no existe. Esto implica que la sucesión no converge propiamente. Más aun, como el límite

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x_m)$$

no existe, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy.

Observaciones:

- Las sucesiones estacionarias son propiamente convergentes y de Cauchy en los espacios métricos parciales.
- Las sucesiones de Cauchy en un espacio métrico parcial no son necesariamente convergentes.
- Las sucesiones convergentes en un espacio métrico parcial no son necesariamente de Cauchy.

- Las sucesiones de Cauchy convergentes en un espacio métrico parcial no son necesariamente propiamente convergentes

Teorema 3.3.5 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico parcial (X, p) . Si $\{x_n\}$ es propiamente convergente, entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy*

Demostración

Supongamos que $\{x_n\}$ es propiamente convergente a $x \in X$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

Para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_m) \leq p(x_n, x) + p(x, x_m) - p(x, x)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} (p(x_n, x) + p(x, x_m) - p(x, x)) \\ p(x, x) &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) \leq p(x, x) + p(x, x) - p(x, x) \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = p(x, x)$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Teorema 3.3.6 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico parcial (X, ρ)

y $x \in X$. Si $x \in L(x_n)$ y

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = \rho(x, x)$$

entonces $\{x_n\}$ converge propiamente a x .

Demostración

Como

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = \rho(x, x)$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_n) = \rho(x, x)$$

Luego como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = \rho(x, x)$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = \rho(x, x)$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ converge propiamente a x .

Observación: Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en espacio métrico parcial (X, ρ)

tal que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = p(x, x)$$

para algún $x \in X$, no se puede asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x en (X, p)

Basta tomar una sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy no convergente en un espacio métrico (X, d) no completo. En este caso

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = p(x, x) = 0$$

para todo $x \in X$

Así pues, la condición $x \in L(x_n)$ en el Teorema 3.3.6 es necesaria.

Ejemplo 3.3.5 Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio métrico parcial del

Ejemplo 3.3.3. Entonces

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p \max(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} = 0$$

por lo tanto $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión de Cauchy en X y $L(\frac{1}{n}) = (0, \infty) = X$. Pero la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ no converge propiamente en X .

Así pues, las sucesiones de Cauchy convergentes no son necesariamente propiamente convergentes.

Teorema 3.3.7 Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico parcial (X, p) . Los siguientes enunciados son equivalentes

i) $\{x_n\}$ es de Cauchy en (X, p)

ii) $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio métrico (X, d_p) , donde d_p , en donde d_p es la métrica generada por la pmétrica p .

Demostración $i \implies ii)$ Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (X, p) , entonces existe un $a \geq 0$ tal que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = a$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = a$$

Ahora bien, como

$$d_p(x_n, x_m) = 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)$$

se tiene que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_p(x_n, x_m) = 2a - a - a = 0$$

Esto implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico parcial (X, d_p) .

$ii \implies i)$ Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico parcial (X, d_p) , luego

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_p(x_n, x_m) = 0 \quad (1)$$

Note que

$$\begin{aligned}p(x_n, x_n) &\leq p(x_n, x_m) \\p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) &\leq p(x_n, x_m) + (p(x_n, x_m) - p(x_n, x_m)) - p(x_m, x_m) \\p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) &\leq 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)\end{aligned}$$

luego

$$p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \leq d_p(x_n, x_m) \quad (2)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$

Por otro lado

$$\begin{aligned}2p(x_m, x_m) &\leq 2p(x_n, x_m) \\-2p(x_n, x_m) + p(x_n, x_n) + p(x_m, x_m) &\leq p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \\-(2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)) &\leq p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)\end{aligned}$$

luego

$$-d_p(x_n, x_m) \leq p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \quad (3)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

De (2) y (3) se tiene que

$$|p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)| \leq d_p(x_n, x_m) \quad (4)$$

Por (1) y (4) se tiene que $\{p(x_n, x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} ; es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = a \in \mathbb{R}^+$$

Ahora bien, como

$$d_p(x_n, x_m) = 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} d_p(x_n, x_m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} (2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)) \\ &= 2 \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) - 2a \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = a \in \mathbb{R}^+$$

Esto implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (X, p) .

Teorema 3.3.8 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico parcial (X, p) , entonces*

los siguientes enunciados son equivalentes

- i) $\{x_n\}$ es de Cauchy.
- ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$, tal que

$$p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m) < \varepsilon$$

para todo $m, n \geq N$.

Demostración

$v \Rightarrow u$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $a > 0$ y $k > 0$ tal que

$$|p(x_n, x_m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n \geq k$. Por lo tanto

$$|p(x_m, x_m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m \geq k$.

Sean $n, m \geq k$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m) \\ &= |p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m)| \\ &\leq |p(x_n, x_m) - a| + |p(x_m, x_m) - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$u \Rightarrow v$) Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $k > 0$ tal que

$$0 \leq p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n > k$. Note que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < 0 \leq p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$|p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n \leq k$. Luego

$$\begin{aligned} |p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)| &< |p(x_n, x_n) - p(x_n, x_m)| + |p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $m, n \geq k$. Esto implica que $\{p(x_n, x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^+ .

Por consiguiente, existe un $a \geq 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = a$$

Probemos que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = a$$

En efecto sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |p(x_n, x_m) - p(x_m, x_m)| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |p(x_n, x_m) - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq k$. Luego

$$\begin{aligned} |p(x_n, x_n) - a| &\leq |p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)| + |p(x_m, x_m) - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq k$. Así pues

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = a$$

y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición 3.3.6 *Un espacio métrico parcial (X, p) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge propiamente*

Teorema 3.3.9 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial (X, p) es completo si y sólo si (X, d_p) es completo.*

Demostración

Es consecuencia directa del Teorema 3.3.7.

Teorema 3.3.10 *Sea (X, p) un espacio métrico parcial. X es completo si y sólo si para cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de elementos de X existe un $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = p(x, x)$$

Demostración

Es consecuencia directa del Teorema 3.3.6

Ejemplo 3.3.6 *Consideremos el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{\max}) del Ejemplo 2.2.2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^+ , entonces existe un $a \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ tal que*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} pmax(x_n, x_m) = a = pmax(a, a)$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N > 0$ tal que

$$|pmax(x_n, x_m) - a| = |max\{x_n, x_m\} - a| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Luego

$$a - \varepsilon < max\{x_n, x_m\} < \varepsilon + a$$

para todo $n, m \geq N$. En particular

$$a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto,

$$a - \varepsilon < x_n < max\{x_n, a\} < \varepsilon + a$$

y

$$-\varepsilon < pmax(x_n, a) - a < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, a) = a = pmax(a, a)$$

Así pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} pmax(x_n, a) = pmax(a, a)$$

es decir, $\{x_n\}$ converge propiamente en (\mathbb{R}^+, p_{max}) . Por consiguiente, el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{max}) es completo.

Ejemplo 3.3.7 Consideremos el espacio métrico parcial (\mathbb{R}^+, p_{max}) donde $X = (0, \infty)$.

En el Ejemplo 3.3.5 se probó que $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión de Cauchy que no es propiamente convergente en X . Por lo tanto, (\mathbb{R}^+, p_{max}) es un espacio métrico parcial que no es completo

Por otro lado, note que $(X, \tau_{p_{max}})$ es un subespacio incompleto del espacio topológico completo $(\mathbb{R}^+, \tau_{p_{max}})$

Además, como

$$B_{p_{max}}(0, p(0, 0) + \varepsilon) = B_{p_{max}}(0, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$$

se tiene que

$$B_{p_{max}}(0, p(0, 0) + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

para todo $\varepsilon > 0$. Esto implica que (X, p_{max}) es un subespacio denso de (\mathbb{R}^+, p_{max}) .

Así pues, podemos decir que (\mathbb{R}^+, p_{max}) es la completación del espacio métrico parcial (X, p_{max}) .

Ejemplo 3.3.8 Consideremos el espacio métrico parcial $(S^* \cup S^\omega, p_S)$ definido en el Ejemplo 2.2 1, o sea que

$$p_S : (S^* \cup S^\omega) \times (S^* \cup S^\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x_0 \neq y_0 \\ \frac{1}{2^k} & , \text{ si } x_i = y_i \quad \forall i < k, \quad x_k \neq y_k \\ 0 & , \text{ si } x_n = y_n \quad \forall n \end{cases}$$

Sea $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $S^* \cup S^\omega$. Entonces existe un $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq 1$ tal que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x^n, x^m) = a$$

* Supongamos que $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

Luego existe un $N > 0$ tal que

$$p(x^n, x^m) > \frac{1}{2}$$

para todo $n, m \geq N$. Por la definición de p se tiene que

$$p(x^n, x^m) = 1$$

para todo $n, m \geq N$. Esto implica que

$$p(x^n, x^n) = 1$$

para todo $n \geq N$, lo que es una contradicción. Así,

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

* Supongamos que $\frac{1}{2^2} < a \leq \frac{1}{2}$

Luego existe un $N > 0$ tal que

$$\frac{1}{2^2} < p(x^n, x^m) < 1$$

para todo $n, m \geq N$. Por la definición de p se tiene que

$$p(r^n, r^m) = \frac{1}{2}$$

para todo $n, m \geq N$. Esto implica que

$$p(x^n, x^n) = \frac{1}{2}$$

para todo $n \geq N$. Por consiguiente,

$$r^n = (r_0^n)$$

es una sucesión finita con un solo término, para todo $n \geq N$

Además como

$$p(x^n, r^m) = \frac{1}{2}$$

para todo $n, m \geq N$, se tiene que

$$x_0^n = r_0^m \quad \text{para todo } n, m \geq N$$

Esto implica que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión estacionaria y, por ende, ella es propiamente convergente.

* Sea $k \geq 2$ tal que

$$\frac{1}{2^{k+1}} < a \leq \frac{1}{2^k}$$

Similar al caso anterior, se tiene que existe un $N > 0$ tal que

$$p(x^n, x^m) = \frac{1}{2^k}$$

para todo $n, m \geq N$. Esto implica que

$$p(x^n, x^n) = \frac{1}{2^k}$$

para todo $n \geq N$. Por consiguiente

$$x^n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k-1}^n)$$

para todo $n \geq N$. Además como

$$p(x^n, x^m) = \frac{1}{2^k}$$

para todo $n, m \geq N$, se tiene que $x^n = x^m$ para todo $n, m \geq N$

Por lo tanto, $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión estacionaria y, por ende convergente.

* Finalmente supongamos que $a = 0$

Luego para cada $k \geq 0$, existe un N_k tal que

$$p(x^n - x^{N_k}) < \frac{1}{2^k}$$

para todo $n \geq N_k$. Esto implica

$$x_k^n = x_k^{N_k} \quad \text{para todo } n \geq N_k$$

Considere la sucesión

$$r = (r_0^{N_0}, r_1^{N_1}, \dots, r_k^{N_k}, \dots) \in S^\omega \subset S^* \cup S^\omega$$

Como

$$x_k^n = x_k^{N_k}, \quad \text{para todo } n \geq N_k$$

se tiene que

$$p(r^n, r) < \frac{1}{2^k}, \quad \text{para todo } n \geq N_k$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe un $k > 0$ tal que

$$\frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

por lo tanto

$$0 \leq p(x^n, x) < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_k$$

esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x^n, x) = 0$$

Así, $x \in L(x)$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x^n, x^n) = a = 0 = p(x, x)$$

Por el Teorema 3.3.6 se tiene que $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge propiamente a x . Así pues, $(S^* \cup S^\omega, p_S)$ es un espacio métrico parcial completo.

Definición 3.3.7 Sea (X, p) espacio métrico parcial, una **contracción** en X es una función

$$f: X \rightarrow X$$

para la que existe un $c \in [0, 1)$, llamada **constante de contracción**, tal que

$$p(f(x), f(y)) \leq c p(x, y)$$

para todo $x, y \in X$

Teorema 3.3.11 (*Teorema de Matthews*) Sea (X, p) un espacio métrico parcial completo y

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

una función contractiva, entonces existe un único $x \in X$ tal que

$$f(x) = x$$

y además $p(x, x) = 0$.

Demostración

Sea (X, p) un espacio métrico parcial y

$$f: X \rightarrow X$$

una función contractiva con constante de contracción c . Sea $u \in X$ y probemos que la sucesión $\{f^n(u)\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto

$$\begin{aligned}
p(f^{n+k+1}(u), f^n(u)) &\leq p(f^{n+k+1}(u), f^{n+k}(u)) + p(f^{n+k}(u), f^n(u)) - p(f^{n+k}(u), f^{n+k}(u)) \\
&\leq c^{n+k}p(f(u), u) + p(f^{n+k}(u), f^n(u)) \\
&\leq c^{n+k}p(f(u), u) + p(f^{n+k}(u), f^{n+k-1}(u)) + p(f^{n+k-1}(u), f^n(u)) \\
&\quad - p(f^{n+k-1}(u), f^{n+k-1}(u)) \\
&\leq c^{n+k}p(f(u), u) + c^{n+k-1}p(f(u), u) + p(f^{n+k-1}(u), f^n(u)) \\
&\quad \vdots \\
&\leq c^{n+k}p(f(u), u) + c^{n+k-1}p(f(u), u) + \dots + c^n p(f(u), u) \\
&\quad + p(f^n(u), f^n(u))
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
p(f^{n+k+1}(u), f^n(u)) &\leq (c^{n+k} + c^{n+k-1} + \dots + c^n)p(f(u), u) + c^n p(u, u) \\
&\leq c^n [(c^k + c^{k-1} + \dots + 1)p(f(u), u) + p(u, u)] \\
&\leq c^n \left[\left(\frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} \right) p(f(u), u) + p(u, u) \right]
\end{aligned}$$

Esto implica que la sucesión $\{f^n(u)\}$ es de Cauchy.

Ahora, como (X, p) es un espacio métrico parcial completo existe un $a \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(u), f^n(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(u), a) = p(a, a)$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$p(a, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(u), f^n(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} c^n p(u, u) = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(u), f^n(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(u), a) = p(a, a) = 0$$

Ahora bien, como

$$0 \leq p(f(a), a) \leq p(f(a), f^{n+1}(u)) + p(f^{n+1}(u), a) - p(f^{n+1}(u), f^{n+1}(u))$$

se tiene que

$$0 \leq p(f(a), a) \leq c p(a, f^n(u)) + p(f^{n+1}(u), a) - p(f^{n+1}(u), f^{n+1}(u))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$0 \leq p(f(a), a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [c p(a, f^n(u)) + p(f^{n+1}(u), a) - p(f^{n+1}(u), f^{n+1}(u))] = 0$$

es decir

$$p(f(a), a) = 0$$

Ahora bien, como

$$0 \leq p(f(a), f(a)) \leq p(a, a) = 0$$

se tiene que

$$p(f(a), f(a)) = 0$$

Así,

$$p(a, a) = p(f(a), a) = p(f(a), f(a)) = 0$$

Luego, por MP_2 se tiene que

$$f(a) = a$$

Probemos ahora que el punto fijo es único. En efecto, sean $a, b \in X$ tal que

$$b = f(b) \quad \text{y} \quad a = f(a)$$

entonces

$$p(a, b) = p(f(a), f(b)) \leq c p(a, b)$$

como $0 \leq c < 1$, se tiene que

$$p(a, b) = 0$$

luego por MP_0

$$p(a, a) = p(a, b) = p(b, b) = 0$$

entonces, por MP_2

$$a = b$$

lo que se quería probar

Hemos extendido el teorema de contracción o punto fijo a los espacios métricos parciales. Esto además nos da una característica adicional: el punto fijo x tiene autodistancia igual a cero, es decir $p(x, x) = 0$, que aunque trivial en espacios métricos, pueden ser útil para realizar razonamientos sobre conjuntos parcialmente ordenados encontrados en las ciencias de la computación.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A través de los resultados probados en este trabajo se ha concluido que

- * Las bolas abiertas en los espacios métricos parciales y los espacios cuasimétricos forman una base para una topología sobre estos espacios.
- * La topología y el orden parcial asociada a los espacios métricos parciales están estrechamente relacionados la topología y el orden inducidos por las cuasimétricas
- * Las sucesiones son suficiente para caracterizar el concepto de completitud en los espacios métricos parciales.
- * Existe un teorema sobre punto fijo para funciones contractibles definidas sobre espacios métricos parciales completos, similar al que existe en los espacios métricos completos.

Recomendamos a los futuros estudiantes de maestría en matemática pura que sigan investigando otros conceptos topológicos sobre los espacios métricos parciales y cuasimétricos. Como por ejemplo:

- * La continuidad
- * La compacidad
- * La conexidad
- * La completitud
- * La compactificación

Bibliografía

- [1] ABRAMSKY, S., septiembre 2, 1988. Domain Theory In Logical Form *Annals of Pure and Applied Logic* 77 Págs., Págs, 1-77.
- [2] ABRAMSKY, S, JUNG, A., 1994 *Domain Theory*, Vol. 3. En: Handbook of Logic in Computer Science 1994 S Abramsky, D. Gabbay, and T. S E Maibaum, Oxford University Press, Oxford, 167 Págs.
- [3] ACOSTA L., 1998. Topologías Consistentes. En: *Boletín de Matemáticas Nueva Serie*. 5 (1) 12 Págs., Págs; 15-26.
- [4] ANONIMO 9 septiembre 1999 *Topología* 111 Págs
- [5] BANCEREK, G., 2002. A Compendium of Continuous Lattices in Mizar *Journal of Automated Reasoning* 36 Págs., Págs.; 189-224
- [6] BERGE, C., 1963. *Topological Spaces* 1^{ra} Ed. OLIVER AND BOYD LTD Londres, 284 Págs.
- [7] BUKATIN, M., KOPPERMAN, R, MATTHEWS, S., PAJOOHESH, H., 2009. Partial Metrics and Fuzzy Equalities. http://www.cs.brandeis.edu/bukat-in/distances_and_equalities.html 38 Págs
- [8] BUKATIN, M., KOPPERMAN, R., MATTHEWS, S., PAJOOHESH, H., octubre 2009. Partial Metric Spaces. En: *The American Mathematical Monthly*. 10 Págs., Págs.; 708-718.
- [9] CROOM, F.H., 2008. *Principles of Topology*. 1^{ra}. Ed. Cengage Learning Indian Private Limited. New Delhi. 324 Págs
- [10] DUGUNDJI, J. 1966. *Topology*. 1^{ra}. Ed ALLYN AND BACON, INC. Boston. 459 Págs.

- [11] EILLARD, S., 1968. *General Topology 1ra* Ed ADDISON - WESLEY PUBLISHING COMPANY. MA 380 Págs
- [12] GIERZ, G., HOFMANN, K.H , KEIMEL, K , LAWSON, J.D , MISLOVE, M , SCOTT, D S., 1980 *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 389 Págs
- [13] HOCKING, J G , YOUNG, G.S., 1961 *Topology. 1ra* Ed. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC , MA, 385 Págs
- [14] IRIBARREN, I L , 2008. *Topología de Espacios Métricos 1^{ra}*. Ed. LIMUSA, GRUPO NORIEGA, Balderas 95, México, D F., 253 Págs.
- [15] KELLEY, J.L , 1955. *General Topology*. University Series in Mathematics. D van Nostrand , 315 Págs.
- [16] KELLY, J C., 1963. Bitopological spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 19 Págs., Págs., 71–89.
- [17] KOPPERMAN, R., febrero 1988. All topologies come from generalized metrics En: *The American Mathematical Monthly* 95(2) Págs.
- [18] KOPPERMAN, R., 1995. Asymmetry and duality in topology. En: *Topology Applied*. 66(1) Págs., Págs , 1–39.
- [19] KOPPERMAN, R., MATTHEWS, S., PAJOOHESH, H., 2004. Partial metrizable in value quantales. En *Applied General Topology* 13 Págs , Págs.; 115–127.
- [20] KOPPERMAN, R., KUNZI H., WASZKIEWICZ, P , 2004. Bounded complete models of topological spaces. *Topology and its Applications*. 139 Págs , Págs.; 285–297.
- [21] LIPSCHUTZ, S., 1965. *Theory and Problems of General Topology. 1ra*. Ed. MCGRAW-HILL INC. N.Y. 254 Págs.
- [22] MACHO, M. 2009. *Topología de Espacios Métricos*. Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea. 114 Págs.
- [23] MARKOWSKY, G., 1976. Chain-complete posets and directed sets with applications *Algebra Univ*. Birkhäuser Verlag, Basel. 6(1): 53–68
- [24] MATTHEWS, S., The Cycle Contraction Mapping Theorem. *Research Report 228*. Department of Computer Science. University of Warwick, 21 Págs.

- [25] MATTHEWS, S , 1992a. Partial metric topology *Research Report 212*. Department of Computer Science University of Warwick, 17 Págs.
- [26] MATTHEWS, S., Partial metric topology. In, General Topology & its Applications. Proc. *Summer Conference at Queens College 1992 (1992b) Annals of the New York Academy of Sciences* 728 (1994) Págs ; 183-197.
- [27] MATTHEWS, S , 1995. An extensional treatment of lazy data flow deadlock. *Theoretical Computer Science*. Department of Computer Science, University of Warwick 151(1): Págs.; 195-205
- [28] MATTHEWS, S., agosto 20 al 25, 2006. Introducing Complete Points to Topology. *Daqstuhl*. 30 Págs
- [29] MATTHEWS, S., juho 29 - Agosto 1, 2008. Partial Metric Spaces A Fuss about Nothing *Conferencia de Verano 2008 - Universidad de la UNAM*. The 2008 Summer Conference Universitaria de la UNAM 36 Págs.
- [30] MATTHEWS, S , 2008. A collection of resources on partial metric spaces. En: <http://www.dcs.warwick.ac.uk/pmetric/>
- [31] MENDELSON, B., 1962. *Introduction to Topology*. 1^a. Ed. Allyn and Bacon, Inc. Boston. 226 Págs.
- [32] O'NEIL, S. J., abril 1995. Two topologies are better than one. *Research Report 283*. Department of Computer Science. University of Warwick, 27 Págs.
- [33] RABARISON, A.F., junio 8, 2007. Partial Metrics *Universidad de Cape Town*. Supervisado por Hans-Peter A. Künzi. 38 Págs
- [34] SIMMONS, G.F , 1963. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Robert E. Krieger Publishing Company. Florida. 385 Págs.
- [35] SUTHERLAND, W. A., 2009. *Introduction to Metric and Topological Spaces*, 2^{da} Ed. Oxford University Press, Oxford, 220 Págs.
- [36] TAMARIZ, A. 1990. Curso de Topología General. *Departamento de Matemática, UNAM*. Comunicación interna #114. 115 Págs
- [37] VICKERS, S., 1989. *Topology via Logic* 1^{ra}. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, N.Y., 211 Págs.