

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO**  
**PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN**  
**MATEMÁTICA**

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS A UN**  
**PROBLEMA DE SELECCIÓN DE PERSONAL**

Por:  
**AMÍLCAR ABDIEL AVILÉS**

**Tesis presentada como uno de los**  
**requisitos para optar por el título de**  
**Maestro en Ciencias con Especialidad en**  
**Investigación de Operaciones.**

**Panamá, República de Panamá**

**1999**


TM.

15 NOV 1999

Obs. del Autor


319694

APROBADO POR:

  
Dra. MANUELA FOSTER.  
PRESIDENTA

  
Dr. JOSE DEL ROSARIO GARRIDO  
MIEMBRO

  
PROF. MIRTA DE JAEN M Sc  
MIEMBRO

  
REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA  
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA: 28 de mayo de 1999

## **DEDICATORIA**

**A Dios por su perdón, por  
estar siempre a mi lado,  
aunque no lo merezca, y  
por permitirme culminar  
una fase más de mi vida.**

**A mis padres: Marta y  
Agapito forjadores de los  
pilares sobre los que se ha  
edificado lo que soy hoy en  
día.**

**A mi esposa Sonia soporte  
de todos mis pesares y  
angustias, fortaleza de mis  
momentos de flaqueza,  
pieza fundamental en la  
que pude apoyarme  
siempre.**

**A mis hijos: Amílcar, Aaron,  
Arles y Amir fuente de deseo  
de superación que me  
motivaron para poder  
brindarles un ejemplo digno  
y una mejor calidad de vida.**

**A mi tío Roberto quién  
siempre fue una voz  
aliento y vigilante de mis  
problemas familiares  
mientras estuve ausente.  
A ti que los das todo por  
los tuyos.**

**A todas las personas que  
contribuyeron en la  
realización de este sueño y a  
los grandes héroes anónimos,  
los docentes de todas mis  
etapas académicas**

## **AGRADECIMIENTO**

A la Doctora Manuela Foster a quién con sus sabios consejos, su eficiente dirección y sus acertadas correcciones, hicieron posible que alcanzara la culminación de este trabajo. A usted profesora mi más profundo cariño, admiración y respeto. En realidad, decir gracias, no basta.

Al Doctor José Del Rosario Garrido forjador de una nueva generación de matemáticos, quién con sus atinadas orientaciones nos permitió visualizar la matemática desde una óptica diferente.

A mis entrañables amigas, compañeras por su voz de aliento en los momentos en que nos sentimos flaquear, tanto por los problemas personales, como por los que se originaron como parte inherente de todo estudio de maestría, gracias por su amistad.

Al todo el personal que conforma la gran familia del Departamento de Matemática quienes sin conocerme me brindaron consejos, motivación y respaldo; en especial a la profesora Gladys de Sanjur quien siempre velo por mi desde su posición de Directora

## **RESUMEN**

Cuando se está frente a un problema de decisiones con múltiples criterios en el que las alternativas no satisfacen estos criterios con total precisión, se requiere un ambiente que permita el manejo de esta posible imprecisión de manera que la decisión sea la más objetiva posible. Este ambiente lo proporciona la teoría de los conjuntos borrosos.

En este trabajo se presentan las bases de esta teoría para dar solución a un problema de selección y promoción de personal en una empresa. Se destacan operaciones entre conjuntos borrosos, conjuntos notables definidos a partir de ellos y relaciones borrosas, entre otros.

Se describe de manera organizada y teórica el método ELECTRE I, algoritmo que genera relaciones de sobreclasificación entre las alternativas consideradas en el problema de decisión. Luego de establecer los grafos de las relaciones y considerar algunos de sus parámetros tales, como los núcleos, las direcciones a derecha e inversa y el grado de cada vértice del núcleo, se introduce una técnica para clasificar las alternativas del problema.

## **SUMMARY**

When a problem of decisions – with multiple criteria in which the options don't satisfy these criteria with total accuracy – is confronted, it is necessary an environment that permits the management that permits the management of the possible inaccuracy in a way that the decisions can be objective as much as possible. This environment is given by the theory of the fuzzy sets. In this work the basis of the theory are presented to give answers to a problem of selection and personnel promotion with an enterprise company

Operations among fuzzy sets, notable sets defined in base of them, and fuzzy relations are remarkable among others.

The ELECTRE I method – an algorithm that generates relations of overclassification among the options considered in the problem of decision – is described in an organized and theoretical way. After establishing the relations graphs and taking into count some of its parameters such as nucleus, direct and inverse directions, and the degree of each nucleus vertex, a technique to classify the options of the problem is introduced.

## ÍNDICE

DEDICATORIA .....	ii
AGRADECIMIENTO .....	iv
RESUMEN. ....	vi
INTRODUCCIÓN. ....	xiii
CAPITULO I	
TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS. ....	1
1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES SOBRE LOS CONJUNTOS BORROSOS. ....	2
1.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS BORROSOS. ....	4
1.3 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS BORROSOS CON RESPECTO A LA UNIÓN, LA INTERSECCIÓN Y LA COMPLEMENTACIÓN. ....	9
1.4 MEDIDAS Y COEFICIENTES BORROSOS QUE PERMITEN ESTABLECER COMPARACIONES ENTRE CONJUNTOS BORROSOS. ....	24
1.5 RELACIONES BORROSAS. ..	35
1.5.1 COMPOSICIONES BORROSAS. ...	36
1.5.1.1 PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN MAX-MIN. ....	37
1.5.2 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BORROSAS. ...	47
1.6 CONJUNTOS USUALES OBTENIDOS A PARTIR DE UN CONJUNTO Y/O UNA RELACIÓN BORROSA. ....	52

## CAPÍTULO II

ASPECTOS TEÓRICOS BÁSICOS DEL MÉTODO ELECTRE I. ....	58
2.1 INTRODUCCIÓN. ....	59
2.2 FUNCIÓN DE BORROSIFICACIÓN. ....	61
2.3 RELACIÓN DE PREFERENCIA. ....	65
2.4 CONCORDANCIA Y DISCORDANCIA. ....	70
2.5 UMBRALES Y RELACIONES DE SOBRECLASIFICACIÓN. ....	80

## CAPITULO III

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS A UN PROBLEMA DE SELECCIÓN Y PROMOCIÓN DE PERSONAL EN UNA EMPRESA. ...	87
CONCLUSIONES ....	112
RECOMENDACIONES. ....	114
BIBLIOGRAFÍA. ....	117

## **INTRODUCCIÓN**

Históricamente las ciencias sociales habían adolecido de modelos matemáticos que pudieran interpretar los fenómenos que se presentaban. Es más, los modelos contruidos para representar estos fenómenos, eran considerados no descriptivos o interpretaban parcialmente la realidad que en estos se manifiestan.

Con el advenimiento de la Teoría de los Conjuntos Borrosos, teoría propuesta por Lofty Zadeh en 1965 [7], se logra combinar la “ambigüedad” del mundo real con la claridad y simpleza de las matemáticas. Cabe señalar que esta teoría fue muy cuestionada por los científicos de esa época por considerar que lo que se describía con ella era posible hacerlo mediante “técnicas con mayor fundamento matemático”.

Los problemas de toma de decisión algunas veces no resultan fáciles de resolver y menos aún si se consideran múltiples criterios donde algunos de estos son antagónicos entre sí. A través de los últimos años la teoría de decisión multicriterio ha avanzado enormemente y se ha enfocado desde diversas aristas.

La toma de decisión multicriterio es un mundo de conceptos, enfoques, modelos y métodos de ayuda a los tomadores de decisiones para describir, evaluar, clasificar, ordenar, seleccionar o rechazar objetos (candidatos, productos, proyectos) sobre la base de evaluaciones (expresadas por puntuaciones, valores, intensidades de preferencias) de acuerdo a varios criterios. Estos criterios pueden representar diferentes aspectos de las causas finales propuestas: objetivos, metas, propósitos, valores de referencia, niveles de aspiración, utilidad, entre otros.

La ambigüedad de que se hablaba anteriormente puede aparecer en la forma de una imprecisión en la formulación de las preferencias, o aún en la incapacidad para determinar cuando se comparan algunos objetos. Estos inconvenientes son tomados en cuenta por algunos métodos multicriterio, entre los que se destacan los Métodos ELECTRES.

En la década de los 60, específicamente en 1968 Bernard Roy y colaboradores [13] construyen un modelo para la sobreclasificación de alternativas en un proceso de toma de decisión, el cual es llamado Método ELECTRE I, método fundamental para la solución del problema de toma de decisión que se ha de considerar. El Método ELECTRE I emplea datos normalizados, es decir, que están en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , aspecto que permite ligarse y complementarse con la Teoría Borrosa. El Método ELECTRE I presenta cuatro originalidades: i) las nociones de concordancia y discordancia (veto), surgidas de los procedimientos de votación, ii) la comparación existente entre los valores de los criterios que se presenta en la Teoría de Utilidad y que no había sido aceptada en gran medida; iii) extiende los conceptos de criterios; y iv) introduce la incomparabilidad, produciendo estructuras de preferencias parciales

En la aplicación del Método ELECTRE I se pone en manifiesto la variabilidad de soluciones se pueden obtener, por lo que surge la inquietud de normar, hasta cierto grado, el procedimiento para establecer el ordenamiento de las alternativas que se consideran en el proceso de toma de decisión, de una manera más objetiva. Esto constituye la parte medular de esta investigación.

El trabajo está dividido en tres capítulos: en el primero se sientan las bases de la Teoría de los Conjuntos Borrosos como lo son sus elementos fundamentales, conjuntos, las operaciones entre conjuntos borrosos, las relaciones borrosas, conjuntos notables en esta teoría y las propiedades y proposiciones más importantes. La forma poco usual de demostración de la mayoría de las propiedades y proposiciones enunciadas, han sido motivo para que hayan sido incorporadas al grueso del trabajo. En el segundo capítulo se presenta el desarrollo teórico del Método ELECTRE I algoritmo que provee la materia prima para la clasificación de las alternativas consideradas en el problema de toma de decisión. Finalmente en el tercer capítulo se resuelve un problema de aplicación empleando una técnica sencilla, pero funcional que se introduce para manejar los resultados dados por el Método ELECTRE I, integrar las condiciones expuestas por el decisor y al mismo tiempo generar resultados precisos y poco cuestionables en lo que se refiere al grado de subjetividad generada por el propio manejo del método.

## **CAPITULO I**

# **TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS**

### 1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES SOBRE LOS CONJUNTOS BORROSOS

En el tratamiento usual con los conjuntos se asume la perfecta pertenencia o no de sus elementos.

Si para cada subconjunto del conjunto referencial  $\Omega$  se define una función característica que determina el grado de pertenencia o de membresía de cada uno de sus elementos, entonces el rango de esta función es el conjunto  $\{0,1\}$ . Es decir, si  $\mu_A(x): \Omega \rightarrow \{0,1\}$  es la función característica del conjunto  $A \subset \Omega$ , entonces

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Antes de proceder a definir los conjuntos borrosos es necesario mencionar la convención de que el conjunto universal  $\Omega$  no es borroso, pues a él pertenecen todos y cada uno de los elementos, con absoluta certeza.

En la teoría de los conjuntos borrosos la función característica de cada subconjunto de  $\Omega$  toma valores en el intervalo cerrado  $[0,1]$ .

#### Definición 1:

Sea  $\Omega$  el conjunto universal y  $x \in \Omega$ . Se dice que el conjunto  $A$  es un conjunto borroso en  $\Omega$  si  $A$  se define como el conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \Omega\}, \quad \mu_A: \Omega \rightarrow [0,1]$$

Observación:

Por simplicidad en el manejo no se considerará para efectos de la escritura aquellos pares ordenados  $(x, \mu_A(x))$  para los que  $\mu_A(x) = 0$

Ejemplo:

Sea  $\Omega = Z^+$  el conjunto universal,  $A \subset \Omega \times [0,1]$  definido como.

$$A = \{(15,0.2), (16,0.4), (17,0.6), (18,0.1), (19,0.9), (20,1), (21,0.9), (22,0.8), \\ (23,0.6), (24,0.4), (26,0.2)\}$$

es un conjunto borroso.

Observación:

Algunos autores usan cierto distintivo para diferenciar un conjunto borroso de uno usual añadiéndole el símbolo  $\sim$  en la parte inferior del símbolo seleccionado para denotar el conjunto, al igual que en los símbolos de las operaciones entre estos; por ejemplo, si  $A$  es un conjunto borroso, entonces se denota por  $\underline{A}$  y para indicar que un conjunto está incluido en otro conjunto borroso, se escribiría, por ejemplo,  $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ , donde  $\subseteq$  es la inclusión borrosa entre conjuntos borrosos. En este trabajo se omitirá tal distintivo, apelando al manejo simplificado de la nomenclatura, y se hará la indicación necesaria cuando se trate de un conjunto usual. Además se escribirán los conjuntos borrosos con letras un tanto estilizadas y en negritas.

**Definición 2:**

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos borrosos en un espacio  $\Omega$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son iguales y se denota por  $A = B$  si y sólo si

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in \Omega$$

**1.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS BORROSOS**

Sea  $\Omega$  el conjunto universal y  $A$  y  $B$  conjuntos borrosos en  $\Omega$

**Definición 3.**

El conjunto Complemento de  $A$  que se denota por  $\bar{A}$ , es el conjunto borroso definido como:

$$\bar{A} = \left\{ (x, \mu_{\bar{A}}(x)), x \in \Omega \right\}, \quad \text{donde, } \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in \Omega$$

**Definición 4.**

El conjunto borroso Unión de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cup B$ , se define como:

$$A \cup B = \left\{ (x, \mu_{A \cup B}(x)), x \in \Omega \right\}$$

donde

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) \vee \mu_B(x), & \forall x \in \Omega \\ 0 \\ \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

### Definición 5

El conjunto borroso Intersección de  $A$  y  $B$ , y que se denota por  $A \cap B$ , está definido como:

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)), x \in \Omega\}$$

donde

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), & \forall x \in \Omega \\ 0 \\ \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

### Observaciones.

- ❖ En 1973 Bellman y Giertz [3] dieron una justificación de la elección de los operadores max y min para definir la unión y la intersección, respectivamente.
- ❖ Max y min son los únicos operadores f y g que reúnen las siguientes condiciones:
  1. El valor de pertenencia de x en un conjunto borroso compuesto (Unión o Intersección) depende del valor de pertenencia de x en los conjuntos borrosos elementales que forman este.

$$\forall x \in \Omega,$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = f(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = g(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

2.  $f$  y  $g$  son operadores conmutativos, asociativos, y mutuamente distributivos.
3.  $f$  y  $g$  son operadores continuos no decrecientes con respecto a cada uno de los argumentos. Intuitivamente, la pertenencia de  $x$  en  $A \cup B$  y en  $A \cap B$  no decrece cuando la pertenencia de  $x$  en  $A$  o en  $B$  se incrementa. Un pequeño incremento de  $\mu_A(x)$  o de  $\mu_B(x)$  no indica un gran incremento de  $\mu_{A \cup B}(x)$  o de  $\mu_{A \cap B}(x)$ .
4.  $f(u,u)$  y  $g(u,u)$  son estrictamente crecientes  
 Si  $\mu_A(x_1) = \mu_B(x_1) > \mu_A(x_2) = \mu_B(x_2)$ , entonces la pertenencia de  $x_1$  en  $A \cup B$  o  $A \cap B$  es estrictamente mayor que la pertenencia de  $x_2$
5. La pertenencia en  $A \cap B$  requiere más de la pertenencia de  $A$  o de  $B$  que la pertenencia en  $A \cup B$

$$\forall x \in \Omega,$$

$$\mu_{A \cap B}(x) \leq \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\mu_{A \cup B}(x) \geq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

6. La total pertenencia en  $A$  y en  $B$  implica una total pertenencia en  $A \cap B$

La ausencia de pertenencia en  $A$  y en  $B$  implica una falta de pertenencia en  $A \cup B$ , es decir,

$$g(1,1) = 1 \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Las condiciones anteriores son consistentes y suficientes para asegurar la unicidad de la elección de los operadores max y min para definir la unión y la intersección.

Posteriormente en 1975, Fung y Fu [5] también encontraron que los operadores max y min son los únicos operadores posibles para definir la unión ( $\cup$ ) y la intersección ( $\cap$ ), respectivamente, de conjuntos borrosos

Ellos proveen ciertas condiciones alternas levemente diferente a las dadas por Bellman y Giertz

#### Definición 6

El conjunto borroso Diferencia Simétrica o Disjunción Exclusiva de  $A$  y  $B$ ,

denotado por  $\hat{A + B}$ , se define como.

$$\hat{A + B} = \left\{ x, \mu_{\hat{A + B}}(x), x \in \Omega \right\}$$

donde

$$\mu_{\hat{A + B}}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Definición 7:

El conjunto borrosos Producto Algebraico, denotado por  $A \hat{\bullet} B$ , se define como

$$A \hat{\bullet} B = \{x, \mu_{A \hat{\bullet} B}(x), x \in \Omega\}$$

donde

$$\mu_{A \hat{\bullet} B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Proposición 1

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos borrosos en  $\Omega$ , entonces

$$A + B = \overline{A \hat{\bullet} B}$$

Demostración:

Sea  $x \in \Omega$ .

se tiene que

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A \hat{\bullet} B}}(x) &= 1 - \mu_{A \hat{\bullet} B}(x) && \forall x \in \Omega \\ &= 1 - [\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)] && \forall x \in \Omega \\ &= 1 - [(1 - \mu_A(x))(1 - \mu_B(x))] && \forall x \in \Omega \\ &= 1 - (1 - \mu_A(x) - \mu_B(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) && \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 1 + \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) && \forall x \in \Omega \\
&= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) && \forall x \in \Omega \\
&= \mu_{A+B}^{\wedge}(x) && \forall x \in \Omega
\end{aligned}$$

Luego

$$A+B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

### 1.3 PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS BORROSOS CON RESPECTO A LA UNIÓN, LA INTERSECCIÓN Y LA COMPLEMENTACIÓN.

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos borrosos en el espacio  $\Omega$ , entonces se verifican las siguientes propiedades:

- |       |  |                                    |
|-------|--|------------------------------------|
| (i)   | $A \cap B = B \cap A$                            | Conmutatividad de la Intersección. |
| (ii)  | $A \cup B = B \cup A$                            | Conmutatividad de la Unión.        |
| (iii) | $(A \cap B) \cap E = A \cap (B \cap E)$          | Asociatividad de la Intersección.  |
| (iv)  | $(A \cup B) \cup E = A \cup (B \cup E)$          | Asociatividad de la Unión.         |
| (v)   | $A \cap A = A$                                   | Idempotencia de la Intersección.   |
| (vi)  | $A \cup A = A$                                   | Idempotencia de la Unión.          |
| (vii) | $A \cap (B \cup E) = (A \cap B) \cup (A \cap E)$ | Distributividad de la Intersección |

sobre la Unión.

(vii)  $A \cup (B \cap E) = (A \cup B) \cap (A \cup E)$  Distributividad de la Unión sobre la Intersección.

(ix)  $A \cap \Phi = \Phi$

(x)  $A \cup \Phi = A$

(xi)  $A \cap \Omega = A$

(xii)  $A \cup \Omega = \Omega$

(xiii)  $\overline{\overline{A}} = A$

Involución de la Complementación.

(xiv)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Primera Ley de De Morgan para los conjuntos borrosos.

(xv)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Segunda Ley de De Morgan para los conjuntos borrosos.

Demostración:

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres conjuntos borrosos en el espacio  $\Omega$ , entonces para la Unión, Intersección y la complementación se cumplen los siguientes enunciados.

(i)  $A \cap B = B \cap A$

Conmutatividad de la Intersección.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned}
\mu_{A \cap B}(x) &= \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \\
&= \min[\mu_B(x), \mu_A(x)], & \forall x \in \Omega \\
&= \mu_{B \cap A}(x), & \forall x \in \Omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $A \cap B = B \cap A$

(ii)  $A \cup B = B \cup A$  Conmutatividad de la Unión.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned}
\mu_{A \cup B}(x) &= \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \\
&= \max[\mu_B(x), \mu_A(x)], & \forall x \in \Omega \\
&= \mu_{B \cup A}(x), & \forall x \in \Omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $A \cup B = B \cup A$

(iii)  $(A \cap B) \cap E = A \cap (B \cap E)$  Asociatividad de la Intersección.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned}
\mu_{(A \cap B) \cap E}(x) &= \min[\mu_{A \cap B}(x), \mu_E(x)], & \forall x \in \Omega \\
&= \min[\min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_E(x)], & \forall x \in \Omega^* \\
&= \min[\mu_A(x), \min(\mu_B(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^{**} \\
&= \mu_{A \cap (B \cap E)}(x), & \forall x \in \Omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(A \cap B) \cap E = A \cap (B \cap E)$$

Observación:

Para justificar la equivalencia del paso (\*) y el paso (\*\*) se consideran tres números  $a, b, c \in [0,1]$  y se comprueba que

$$\min[\min(a,b),c] = \min[a,\min(b,c)]$$

Sean  $a, b, c \in [0,1]$  y sus posibles ordenamientos

(a) Sea  $a \geq b \geq c$ , entonces

$$\min[\min(a,b),c] = \min(b,c) = c$$

por otro lado

$$\min[a,\min(b,c)] = \min(a,c) = c$$

(b) Sea  $a \geq c \geq b$ , entonces

$$\min[\min(a,b),c] = \min(b,c) = b$$

por otro lado

$$\min[a,\min(b,c)] = \min(a,b) = b$$

(c) Sea  $b \geq a \geq c$ , entonces

$$\min[\min(a,b),c] = \min(a,c) = c$$

por otro lado

$$\min[a,\min(b,c)] = \min(a,c) = c$$

(d) Sea  $b \geq c \geq a$ , entonces

$$\min[\min(a,b),c] = \min(a,c) = a$$

por otro lado

$$\min[a,\min(b,c)] = \min(a,c) = a$$

(e) Sea  $c \geq a \geq b$ , entonces

$$\min[\min(a, b), c] = \min(b, c) = b$$

por otro lado

$$\min[a, \min(b, c)] = \min(a, b) = b$$

(f) Sea  $c \geq b \geq a$ , entonces

$$\min[\min(a, b), c] = \min(a, c) = a$$

por otro lado

$$\min[a, \min(b, c)] = \min(a, b) = a$$

Por lo anterior se concluye que

$$\min[\min(a, b), c] = \min[a, \min(b, c)] \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

(iv)  $(A \cup B) \cup E = A \cup (B \cup E)$  Asociatividad de la Unión.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{(A \cup B) \cup E}(x) &= \max[\mu_{A \cup B}(x), \mu_E(x)], & \forall x \in \Omega \\ &= \max[\max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_E(x)], & \forall x \in \Omega^* \\ &= \max[\mu_A(x), \max(\mu_B(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^{**} \\ &= \mu_{A \cup (B \cup E)}(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(A \cup B) \cup E = A \cup (B \cup E)$$

Observación:

De igual forma como se demostró la equivalencia para los pasos (\*) y (\*\*) para la Intersección, así también puede ser demostrada la equivalencia entre los pasos (\*) y (\*\*) para la Unión.

(v)  $A \cap A = A$  Idempotencia de la Intersección.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap A}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_A(x)), & \forall x \in \Omega \\ &= \mu_A(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Con lo cual

$$A \cap A = A$$

(vi)  $A \cup A = A$  Idempotencia de la Unión.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup A}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_A(x)), & \forall x \in \Omega \\ &= \mu_A(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Con lo cual

$$A \cup A = A$$

(vii)  $A \cap (B \cup E) = (A \cap B) \cup (A \cap E)$  Distributividad de la intersección sobre la Unión.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap (B \cup E)}(x) &= \min[\mu_A(x), \mu_{B \cup E}(x)], & \forall x \in \Omega \\ &= \min[\mu_A(x), \max(\mu_B(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^* \\ &= \max[\min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \min(\mu_A(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^{**} \\ &= \mu_{(A \cap B) \cup (A \cap E)}(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Observación:

Para justificar la igualdad entre (\*) y (\*\*) se consideran tres números  $a, b, c \in [0, 1]$ . Independientemente del orden entre ellos, siempre se cumple que

$$\min[a, \max(b, c)] = \max[\min(a, b), \min(a, c)]$$

Sean  $a, b, c \in [0, 1]$  y consideremos sus posibles ordenamientos. Se probará la veracidad de la expresión anterior.

(a) Sea  $a \geq b \geq c$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min[a, b] = b$$

además

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \max(b, c) = b$$

(b) Sea  $a \geq c \geq b$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min(a, c) = c$$

por otro lado

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \min(b, c) = c$$

(c) Sea  $b \geq a \geq c$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min(a, b) = a$$

por otro lado

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \max(a, c) = a$$

(d) Sea  $b \geq c \geq a$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min(a, b) = a$$

por otro lado

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \max(a, a) = a$$

(e) Sea  $c \geq a \geq b$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min(a, c) = a$$

por otro lado

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \max(b, a) = a$$

(f) Sea  $c \geq b \geq a$ , entonces

$$\min[a, \max(b, c)] = \min(a, c) = a$$

por otro lado

$$\max[\min(a, b), \min(a, c)] = \max(a, a) = a$$

Por lo tanto se concluye que

$$\min[a, \max(b, c)] = \max[\min(a, b), \min(a, c)], \quad \forall a, b, c \in [0, 1]$$

(viii)  $A \cup (B \cap E) = (A \cup B) \cup (A \cap E)$     Distributividad de la Unión sobre  
la intersección

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup (B \cap E)}(x) &= \max[\mu_A(x), \mu_{B \cap E}(x)], & \forall x \in \Omega \\ &= \max[\mu_A(x), \min(\mu_B(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^* \\ &= \min[\max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\mu_A(x), \mu_E(x))], & \forall x \in \Omega^{**} \\ &= \mu_{(A \cup B) \cap (A \cup E)}(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Observación:

Al igual que en caso de la propiedad (vii) se puede verificar la equivalencia entre el paso(\*) y el paso(\*\*) examinando todos los posibles ordenamientos de  $\mu_A(x)$ ,  $\mu_B(x)$  y  $\mu_E(x)$ .

(ix)  $A \cap \Phi = \Phi$  , donde  $\Phi = \{(x, \mu_\Phi(x) = 0), \forall x \in \Omega\}$

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cap \Phi}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_\Phi(x)), & \forall x \in \Omega \\ &= \min(\mu_A(x), 0), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

$$= 0, \quad \forall x \in \Omega$$

$$= \mu_{\emptyset}(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Con lo cual

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(x) \quad A \cup \emptyset = A$$

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\mu_{A \cup \emptyset}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_{\emptyset}(x)), \quad \forall x \in \Omega$$

$$= \max(\mu_A(x), 0), \quad \forall x \in \Omega$$

$$= 0, \quad \forall x \in \Omega$$

$$= \mu_A(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Por lo cual

$$A \cup \emptyset = A$$

$$(xi) \quad A \cap \Omega = A, \quad \text{donde } \mu_{\Omega}(x) = 1, \forall x \in \Omega$$

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\mu_{A \cap \Omega}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\Omega}(x)), \quad \forall x \in \Omega$$

$$= \min(\mu_A(x), 1), \quad \forall x \in \Omega$$

$$= \mu_A(x), \quad \forall x \in \Omega$$

De allí que

$$A \cap \Omega = A$$

(xii)  $A \cup \Omega = \Omega$

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup \Omega}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_\Omega(x)), & \forall x \in \Omega \\ &= \max(\mu_A(x), 1), & \forall x \in \Omega \\ &= 1, & \forall x \in \Omega \\ &= \mu_\Omega(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Y así finalmente se concluye que

$$A \cup \Omega = \Omega$$

(xiii)  $\overline{\overline{A}} = A$

Sea  $x \in \Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{\overline{A}}}(x) &= 1 - \mu_{\overline{A}}(x), & \forall x \in \Omega \\ &= 1 - [1 - \mu_A(x)], & \forall x \in \Omega \\ &= 1 - 1 + \mu_A(x), & \forall x \in \Omega \\ &= \mu_A(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\overline{\overline{A}} = A$$

(xiv)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  Primera ley de De Morgan.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces para el primer miembro se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A \cap B}}(x) &= 1 - \mu_{A \cap B}(x), & \forall x \in \Omega \\ &= 1 - \{\min[\mu_A(x), \mu_B(x)]\}, & \forall x \in \Omega \quad (1) \end{aligned}$$

Para el miembro de la derecha se cumple que

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x) &= \max[\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)] & \forall x \in \Omega \\ &= \max[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Para establecer la propiedad  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  es necesaria la igualdad entre las expresiones (1) y (2).

En efecto.

Caso 1:

Sea  $x \in \Omega$  con  $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$

Entonces

$$1 - \{\min[\mu_A(x), \mu_B(x)]\} = 1 - \mu_B(x)$$

además

$$\max[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] = 1 - \mu_B(x)$$

## Caso 2

Sea  $x \in \Omega$  con  $\mu_B(x) \geq \mu_A(x)$ .

Entonces

$$1 - \{\min[\mu_A(x), \mu_B(x)]\} = 1 - \mu_A(x)$$

además

$$\max[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] = 1 - \mu_A(x)$$

Luego independiente del orden entre  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  se verifica que

$$1 - \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \max[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] \quad \forall x \in \Omega$$

Por lo tanto

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(xv) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Segunda ley de De Morgan.

Sea  $x \in \Omega$ , entonces para el miembro de la izquierda se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A \cup B}}(x) &= 1 - \mu_{A \cap B}(x), & \forall x \in \Omega \\ &= 1 - \{\max[\mu_A(x), \mu_B(x)]\}, & \forall x \in \Omega \quad (1) \end{aligned}$$

Para el miembro de la derecha se cumple que

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) &= \min[\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)] & \forall x \in \Omega \\ &= \min[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)], & \forall x \in \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Para establecer la propiedad  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  es necesario probar la igualdad entre las expresiones (1) y (2).

En efecto:

Caso 1.

Sea  $x \in \Omega$  con  $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$

Entonces

$$1 - \{\max[\mu_A(x), \mu_B(x)]\} = 1 - \mu_A(x)$$

además

$$\min[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] = 1 - \mu_A(x)$$

Caso 2

Sea  $x \in \Omega$  con  $\mu_B(x) \geq \mu_A(x)$ .

Entonces

$$1 - \{\max[\mu_A(x), \mu_B(x)]\} = 1 - \mu_B(x)$$

además

$$\min[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] = 1 - \mu_B(x)$$

Luego independiente del orden entre  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  se verifica que

$$1 - \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \min[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)] \quad \forall x \in \Omega$$

Por lo tanto

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

**Observaciones:**

- 1) En la teoría de conjuntos borrosos, el espacio  $\Omega$  y el conjunto vacío  $\Phi$  se definen como:

$$\Omega = \{(x, \mu_{\Omega}(x)), \forall x \in \Omega\}, \text{ donde } \mu_{\Omega}(x) = 1, \forall x \in \Omega$$

y

$$\Phi = \{(x, \mu_{\Phi}(x)), \forall x \in \Omega\}, \text{ donde } \mu_{\Phi}(x) = 0, \forall x \in \Omega$$

- 2) En la teoría de conjuntos usuales se verifica que para cualquier conjunto  $A \subset \Omega$

$$A \cup \overline{A} = \Omega \quad \text{y} \quad A \cap \overline{A} = \Phi$$

llamadas propiedades de la complementación.

En la teoría de conjuntos borrosos las propiedades anteriores no se verifican, es decir, para un conjunto borroso,  $A \neq \Omega$  se cumple que:

$$A \cup \overline{A} \neq \Omega \quad \text{y} \quad A \cap \overline{A} \neq \Phi,$$

se tiene que

$$A \cup \overline{A} = \max[\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)], \quad \forall x \in \Omega$$

y

$$A \cap \overline{A} = \min[\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)], \quad \forall x \in \Omega$$

La situación antes expuesta determina en los conjuntos borrosos una estructura más pobre que la presentada en los conjuntos usuales; mientras que en estos últimos se define una estructura de reticulado distributivo y complementado, con el complemento único para cada conjunto, en los conjuntos borrosos no se verifica la complementación, aunque también el complemento es único para cada conjunto borroso. Por esto, ciertos autores califican a los conjuntos borrosos como un reticulado distributivo pseudocomplementado o un retículo vectorial.

#### ***1.4 MEDIDAS Y COEFICIENTES BORROSOS QUE PERMITEN ESTABLECER COMPARACIONES ENTRE CONJUNTOS BORROSOS.***

En muchos problemas prácticos se hace necesaria la comparación entre conjuntos borrosos para que, de alguna forma se pueda establecer algún ordenamiento, que dependerá de las condiciones propias del problema a considerar.

No obstante, se tienen ciertos valores o factores que en general pueden adaptarse a los problemas modelados y por lo tanto vale la pena considerarlos específicamente.

### 1.4.1 MEDIDAS BORROSAS

#### Definición 8:

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos borrosos. La Distancia Hamming entre  $A$  y  $B$  denotada por  $\delta(A, B)$  se define como:

$$\delta(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, \quad x_i \in \Omega$$

La distancia relativa Hamming entre dos conjuntos expresa la diferencia o divergencia que existe globalmente entre ellos.

La Distancia Hamming  $\delta$  es una métrica en el conjunto  $\Omega$ . Además, es una distancia normalizada y la misma no brinda una información precisa sobre el grado de pertenencia con respecto a un determinado elemento de los conjuntos, aspecto este por el cual tal medida no permite realizar una selección de acuerdo a un elemento en particular, si es que dicho elemento fuese de importancia relevante para los efectos prácticos que se desean resaltar en el mismo.

#### Proposición 2:

La distancia relativa Hamming es una métrica sobre  $\Omega$ .

Prueba:

Se consideran tres conjuntos borrosos  $A$ ,  $B$  y  $C$  con  $\text{card}(A) = \text{card}(B) = \text{card}(C)$  con los mismos elementos en los tres, pero con grados de membresía diferentes o iguales.

Por demostrar que:

- i.  $\delta'(A, B) = 0$  si  $A = B$
- ii.  $\delta(A, B) = \delta(B, A)$
- iii.  $\delta'(A, B) + \delta'(B, C) \geq \delta(A, C)$

1. Se supone que para los conjuntos borrosos  $A$  y  $B$

$$\delta(A, B) = 0$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| = 0$$

lo cual implica

$$|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| = 0, \quad \forall x_i \in \Omega$$

de donde

$$\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \quad \forall x_i \in \Omega$$

por lo cual  $A = B$

ii. Se considera

$$\begin{aligned}\delta'(A, B) &= \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^n |\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)| \\ &= \delta(B, A)\end{aligned}$$

iii. Sean  $A, B$  y  $C$  tres conjuntos borrosos en  $\Omega$

$$\begin{aligned}\delta'(A, B) + \delta'(B, C) &= \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + \sum_{i=1}^n |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^n \{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|\}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}|\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)| &= |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) + \mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|, \quad \forall x_i, i = \overline{1, n} \\ &\leq |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|, \quad \forall x_i, i = \overline{1, n}\end{aligned}$$

Así que

$$\sum_{i=1}^n \{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\mu_B(x_i) - \mu_C(x_i)|\} \geq \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)|$$

De las partes i, ii y iii se prueba la proposición enunciada, es decir que la

**Distancia Relativa Hamming es una Métrica en  $\Omega$ .**

**Definición 9:**

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos borrosos. La Distancia Relativa Euclidiana denotada por  $d(A, B)$  se define como:

$$d(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n [\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)]^2}, \quad x_i \in \Omega$$

La Distancia Relativa Euclidiana, entre dos conjuntos borrosos, también pone en manifiesto la divergencia que existe entre ellos. Si se emplea como un parámetro de comparación entre un conjunto  $A$  y una familia de conjuntos  $A$ , es posible establecer un ordenamiento entre ellos.

Al igual que la Distancia Relativa Hamming, la Distancia Relativa Euclidiana está normalizada, pero tampoco hace una distinción entre las diferencias de las evaluaciones para un mismo criterio en dos conjuntos, si no más bien la efectúa en términos globales, es decir, entre todo el conjunto de criterios o sea el perfil.

**1.4.2 COEFICIENTES BORROSOS**

Se considera un conjunto de características  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  a

evaluar en un conjunto de  $m$  alternativas  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_m\}$  que deben ser ordenados por un decisor, según la satisfacción de las  $n$  características.

Sea  $P_0$  el conjunto borroso que representa el perfil ideal para una alternativa

$$P_0 = \{(c_1, \mu_1^0), (c_2, \mu_2^0), (c_3, \mu_3^0), \dots, (c_n, \mu_n^0)\}$$

y donde cada  $\mu_j^0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\mu_j^0 \in [0, 1]$ , es considerada por el decisor, para la característica  $j$ .

Para un mejor manejo se establece que el orden de presentación de las características  $c_j$  está dado por  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  lo que permite escribir a  $P_0$  como

$$P_0 = \{\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \dots, \mu_n^0\}$$

De igual manera, el perfil de cada alternativa  $P_i$  está dado por

$$P_i = \{\mu_1^i, \mu_2^i, \mu_3^i, \dots, \mu_n^i\}$$

Estos grados de pertenencia se pueden disponer en una matriz cuyas filas corresponden a las alternativas y las columnas a las características a evaluar; se tiene entonces, la matriz  $P$  dada por:

$$P = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ P_0 & \mu_1^0 & \mu_2^0 & \mu_3^0 & \dots & \mu_n^0 \\ P_1 & \mu_1^1 & \mu_2^1 & \mu_3^1 & \dots & \mu_n^1 \\ P_2 & \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 & \dots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m & \mu_1^m & \mu_2^m & \mu_3^m & \dots & \mu_n^m \end{matrix}$$

Utilizando las entradas de esta matriz es posible definir coeficientes de selección borrosa que permitirán comparar los perfiles de las alternativas y ordenarlas según estos coeficientes. Se destacarán algunos de estos coeficientes, mencionando sus particularidades.

Considere la  $i$ -ésima alternativa. Para esta y cada una de las otras alternativas, se define:

#### 1) COEFICIENTE BORROSO I:

$$q_i^I = \sum_{j=1}^n \mu_j^0 \mu_j^i$$

Este coeficiente no es conveniente, por que su valor está determinado por calificaciones de las características de las alternativas, y no por la proximidad de los perfiles al perfil ideal.

En el caso particular en que el perfil ideal tiene todas las evaluaciones próximas a uno (1) o bien todas próximas a cero (0), el coeficiente borroso I brinda un buen ordenamiento de las alternativas si se complementa con el uso del indicador  $d_{q_1}$  definido como.

$$d_{q_1} = |q_1^0 - q_1^i|$$

y se ordenan las alternativas ascendentemente, es decir, aquella con un menor valor de  $d_{q_1}$  será clasificada como la mejor

## 2) COEFICIENTE BORROSO II:

$$q_2^i = \sum_{j=1}^n \mu_j^0 \mu_j^i + \sum_{j=1}^n (1 - \mu_j^0)(1 - \mu_j^i)$$

Como se puede apreciar el Coeficiente Borroso II es la suma del Coeficiente Borroso I y el coeficiente borroso de las evaluaciones complementarias. Al igual que el Coeficiente Borroso I, el Coeficiente Borroso II no permite una clasificación en la que el mejor clasificado sea un perfil idéntico al perfil ideal.

Este coeficiente será un buen indicador en los casos en que el perfil ideal presente evaluaciones ya sea cercanas a cero (0) o a uno (1), si es complementado con el uso del valor  $d_{q_2}$  definido como:

$$d_{q_2^i} = |q_2^0 - q_2^i|$$

y ordenando las alternativas, ascendentemente

### 3) COEFICIENTE BORROSO III:

$$q_3^i = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j^0 \mu_j^i}{\sum_{j=1}^n \mu_j^0 \sum_{j=1}^n \mu_j^i - \sum_{j=1}^n \mu_j^0 \mu_j^i}$$

Al igual que los coeficientes anteriores, éste no es eficiente, por no clasificar como mejor a cualquier perfil idéntico al perfil ideal, aunque es posible que no ocurra lo expuesto, ya que depende directamente del perfil ideal y los perfiles de las alternativas a considerar.

Con las adiciones expuestas, permite un ordenamiento para aquellos casos en los que las características del perfil ideal están evaluadas con números cercanos a uno (1) y/o cercanas a cero (0)

Para aquellos casos particulares, donde el perfil ideal no sea el mejor clasificado, es posible la introducción del parámetro, que se define como.

$$d_{q_3^i} = |q_3^0 - q_3^i|$$

el cual permite una clasificación ascendente de todas las alternativas.

#### 4) EL COEFICIENTE BORROSO IV.

$$q_4^i = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\mu_j^0 - \mu_j^i|$$

Este coeficiente borroso es eficiente para la clasificación de las alternativas si se tiene como directriz el mismo perfil ideal, es decir, si cualquier perfil idéntico a él debe ser el mejor clasificado.

El Coeficiente Borroso IV tiene la propiedad de clasificar de modo igual a todas aquellas alternativas que estén a una misma distancia Hamming del perfil ideal, más no hace una diferenciación intra criterio, si no más bien intra perfiles, esta dificultad podría ser evitada modificando un tanto el propio Coeficiente Borroso IV

## 5) COEFICIENTE BORROSO V.

$$q_5^i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n |\mu_j^0 - \mu_j^i|}{n - \sum_{j=1}^n \min[\mu_j^0, \mu_j^i]}$$

ó

$$q_5^i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n w_j |\mu_j^0 - \mu_j^i|}{\sum_{j=1}^n w_j - \sum_{j=1}^n w_j \min[\mu_j^0, \mu_j^i]}$$

si se consideran pesos  $w_j$  para cada una de las cualidades.

El coeficiente borroso V siempre clasifica como mejor a cualquier perfil idéntico al perfil ideal, es decir, ordena con respecto a la afinidad al perfil ideal. Además siempre clasificará mejor aquellas alternativas cuyos perfiles tengan características evaluadas por sobre el perfil ideal, con respecto a otro perfil que tenga las características evaluadas por debajo de las del perfil ideal, pero a una misma distancia Hamming.

Por lo antes expuesto, este coeficiente no es un buen clasificador para aquellas alternativas cuyo perfil ideal tiene sus características evaluadas con valores cercanos a cero (0)

## 1.5 RELACIONES BORROSAS

### Definición 10:

Se considera el espacio producto  $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$ ,

generado por los conjuntos  $X, Y$ .

Una Relación Borrosa  $R$  en  $X \times Y$  es el conjunto borroso que se define como:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)), (x, y) \in X \times Y\}$$

$\mu_R$  define el grado o la intensidad de la relación borrosa  $R$ .

La definición anterior puede ser generalizada a un espacio  $X$  de  $n$  conjuntos  $X_i$ ,

$i = \overline{1, n}$ . Una relación  $n$ -aria borrosa  $R$  corresponde a un conjunto borroso en  $X$  que tiene una función de membresía  $\mu_R$  que a cada  $n$ -upla  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in X$  le asigna un valor entre 0 y 1, inclusive, que indica la intensidad o fuerza de la relación.

Toda relación binaria puede ser escrita en forma matricial. Si la relación es borrosa esta forma permite una mejor manipulación, para efectos prácticos. En esta representación las entradas de la matriz señalan el grado de relación de los elementos que determinan las entradas. Consideremos los conjuntos  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ ,  $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$  y la relación borrosa  $R$  en el espacio producto  $X \times Y$ , con función de membresía  $\mu_R$ , entonces la representación matricial de la relación  $R$  será:

$R$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$
$x_1$	$\mu(x_1, y_1)$	$\mu(x_1, y_2)$	$\dots$	$\mu(x_1, y_n)$
$x_2$	$\mu(x_2, y_1)$	$\mu(x_2, y_2)$	$\dots$	$\mu(x_2, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_m$	$\mu(x_m, y_1)$	$\mu(x_m, y_2)$	$\dots$	$\mu(x_m, y_n)$

### 1.5.1 COMPOSICIONES BORROSAS

Sean los espacios productos  $X \times Y$ ,  $Y \times Z$  y las relaciones borrosas  $R_1$  en  $X \times Y$  y  $R_2$  en  $Y \times Z$ .

La composición de las relaciones borrosas  $R_1$  y  $R_2$  es la relación borrosa denotada por  $R_2 \circ R_1$  (léase  $R_1$  compuesta con  $R_2$ ). La composición de las relaciones puede definirse de varias formas, a saber:

#### Definición 11

Se llama Composición Max-Min de  $R_1$  y  $R_2$ , a la relación  $R_2 \circ R_1 \subset X \times Z$  cuya función de membresía  $\mu_{R_2 \circ R_1}$  se define como:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)]; (x, y) \in X \times Y, (y, z) \in Y \times Z,$$

$$\begin{aligned}
 & y (x, z) \in X \times Z \\
 & = \max_y [\min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z))] , (x, y) \in X \times Y, (y, z) \in Y \times Z , \\
 & y (x, z) \in X \times Z
 \end{aligned}$$

### 1.5.1.1 PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN MAX-MIN

Si  $R_1, R_2$ , y  $R_3$  son relaciones borrosas, entonces para la composición max-min se verifica que:

- (i)  $(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$  Asociatividad
- (ii)  $R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)$  Distributividad a Izquierda  
con respecto a la Unión.
- (iii)  $R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$  No Distributividad a  
izquierda con respecto a  
la Intersección.
- (iv) Si  $R_1 \subset R_2$ , entonces  $R_3 \circ R_1 \subset R_3 \circ R_2$

Estas propiedades se derivan de las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de la conjunción y la disyunción.

DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN  
MAX-MIN

Sean  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  tres relaciones borrosas, entonces, para la composición max-min se tiene que

$$(1) (R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \quad \text{Asociatividad}$$

Prueba.

Sean  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y  $W$  cuatro conjuntos y se consideran los productos  $X \times Y$ ,  $Y \times Z$ ,  $Z \times W$  y  $X \times W$ , se supone que  $R_1 \subset X \times Y$ ,  $R_2 \subset Y \times Z$  y  $R_3 \subset Z \times W$

Sea  $(x_i, w_q) \in X \times W$ , entonces

$$\begin{aligned} & \mu_{(R_3 \circ R_2) \circ R_1}(x_i, w_q) \\ &= \bigvee_y [\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3 \circ R_2}(y, w_q)] \\ &= \bigvee_y \{ \mu_{R_1}(x_i, y) \wedge [\bigvee_z (\mu_{R_2}(y, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \} \\ &= \mu_{R_1}(x_i, y_1) \wedge [\bigvee_z (\mu_{R_2}(y_1, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \\ & \quad \vee \mu_{R_1}(x_i, y_2) \wedge [\bigvee_z (\mu_{R_2}(y_2, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \\ & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \vee \mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge [\bigvee_z (\mu_{R_2}(y_j, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \\ & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \vee \mu_{R_1}(x_i, y_m) \wedge [\bigvee_z (\mu_{R_2}(y_m, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \end{aligned}$$

Se examinará el término j-ésimo de la disyunción anterior

$$\vee \mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge [\vee_z (\mu_{R_2}(y_j, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))]$$

el cual se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge [(\mu_{R_2}(y_j, z_1) \wedge \mu_{R_3}(z_1, w_q)) \vee (\mu_{R_2}(y_j, z_2) \wedge \mu_{R_3}(z_2, w_q)) \vee \dots \\ & \vee (\mu_{R_2}(y_j, z_k) \wedge \mu_{R_3}(z_k, w_q)) \vee \dots \vee (\mu_{R_2}(y_j, z_l) \wedge \mu_{R_3}(z_l, w_q))] \\ & = \{[\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_2}(y_j, z_1)] \wedge \mu_{R_3}(z_1, w_q)\} \\ & \vee \{[\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_2}(y_j, z_2)] \wedge \mu_{R_3}(z_2, w_q)\} \\ & \vdots \\ & \vee \{[\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_2}(y_j, z_k)] \wedge \mu_{R_3}(z_k, w_q)\} \\ & \vdots \\ & \vee \{[\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_2}(y_j, z_l)] \wedge \mu_{R_3}(z_l, w_q)\} \end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para toda  $y_j$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , por la conmutatividad y de la asociatividad de la disyunción se verifica que:

$$\begin{aligned} & \mu_{(R_3 \circ R_2) \circ R_1}(x_i, w_q) \\ & = \vee_y \{ \mu_{R_1}(x_i, y) \wedge [\vee_z (\mu_{R_2}(y, z) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q))] \} \\ & = [\vee_y (\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge (\mu_{R_2}(y, z_1)))] \wedge \mu_{R_3}(z_1, w_q) \\ & \vee [\vee_y (\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge (\mu_{R_2}(y, z_2)))] \wedge \mu_{R_3}(z_2, w_q) \\ & \vdots \\ & \vee [\vee_y (\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge (\mu_{R_2}(y, z_k)))] \wedge \mu_{R_3}(z_k, w_q) \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vee [\vee_y (\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge (\mu_{R_2}(y, z_l))) \wedge \mu_{R_3}(z_l, w_q)] \\
&= \vee_z \{ [\vee_y (\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge (\mu_{R_2}(y, z))) \wedge \mu_{R_3}(z, w_q)] \} \\
&= \mu_{R_3 \circ (R_2 \circ R_1)}(x_i, w_q) \quad \forall (x_i, w_q) \in X \times W
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

(ii)  $R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)$       Distributividad a Izquierda  
con respecto a la Unión.

Prueba:

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  tres conjuntos y se consideran los productos  $X \times Y$ ,  
 $Y \times Z$  y  $X \times W$  se supone que  $R_1 \subset X \times Y$ ,  $R_2 \subset X \times Y$  y  $R_3 \subset Y \times Z$

Sea  $(x_i, z_k) \in X \times Z$ , entonces

$$\begin{aligned}
& \mu_{R_3 \circ (R_2 \cup R_1)}(x_i, z_k) \\
&= \vee_y [\mu_{R_2 \cup R_1}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)] \\
&= \vee_y \{ [\vee (\mu_{R_2}(x_i, y), \mu_{R_1}(x_i, y))] \wedge \mu_{R_3}(y, z_k) \} \\
&= [\vee (\mu_{R_2}(x_i, y_1), \mu_{R_1}(x_i, y_1)) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \\
& \quad \vee [\vee (\mu_{R_2}(x_i, y_2), \mu_{R_1}(x_i, y_2)) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \\
& \quad \vdots \\
& \quad \vee [\vee (\mu_{R_2}(x_i, y_j), \mu_{R_1}(x_i, y_j)) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \vee [\vee (\mu_{R_2}(x_i, y_m), \mu_{R_1}(x_i, y_m)) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)] \\
& = [(\mu_{R_2}(x_i, y_1) \vee \mu_{R_1}(x_i, y_1)) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \\
& \vee [(\mu_{R_2}(x_i, y_2) \vee \mu_{R_1}(x_i, y_2)) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \vee [(\mu_{R_2}(x_i, y_j) \vee \mu_{R_1}(x_i, y_j)) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& \vee [(\mu_{R_2}(x_i, y_m) \vee \mu_{R_1}(x_i, y_m)) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)]
\end{aligned}$$

Se consideran

$$\begin{aligned}
& [(\mu_{R_2}(x_i, y_j) \vee \mu_{R_1}(x_i, y_j)) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \\
& = [\mu_{R_2}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \vee [\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)], \quad \forall j = \overline{1, m}
\end{aligned}$$

Entonces por asociatividad y conmutatividad

$$\begin{aligned}
& = \{[\mu_{R_2}(x_i, y_1) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \vee [\mu_{R_2}(x_i, y_2) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \vee \cdots \vee \\
& \quad [\mu_{R_2}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \vee \cdots \vee [\mu_{R_2}(x_i, y_m) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)] \vee \\
& \quad [\mu_{R_1}(x_i, y_1) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \vee [\mu_{R_1}(x_i, y_2) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \vee \cdots \vee \\
& \quad [\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \vee \cdots \vee [\mu_{R_1}(x_i, y_m) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)]\} \\
& = \bigvee_y [\mu_{R_2}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)] \vee \bigvee_y [\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)] \\
& = \vee \{ \bigvee_y [\mu_{R_2}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)], \bigvee_y [\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)] \} \\
& = \vee [\mu_{R_3 \circ R_2}(x_i, z_k), \mu_{R_3 \circ R_1}(x_i, z_k)]
\end{aligned}$$

$$= \bigvee [\mu_{(R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)}(x_i, z_k)]$$

Por lo tanto como

$$\mu_{R_3(R_2 \cup R_1)}(x_i, z_k) = \mu_{(R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)}(x_i, z_k), \quad \forall (x_i, z_k) \in X \times Z$$

Se tiene que

$$R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1)$$

$$(iii) \quad R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$$

No Distributividad a

izquierda con respecto a

la Intersección.

Prueba:

Para la demostración de esta propiedad se mostrará un contraejemplo.

Sean las relaciones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  definidas por las siguientes matrices:

$R_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.3	0.6	0.9
$x_2$	0.1	1	0.8
$x_3$	0.2	0.3	0.6

$R_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.1	0.5	0.3
$x_2$	0.7	0.6	0.8
$x_3$	0.3	0.4	0.7

$R_3$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$y_1$	0.3	0.4	0.6	0.1
$y_2$	0.5	0.3	0.9	0.2
$y_3$	0.6	0.4	1	0.8

Se determinará  $R_3 \circ (R_2 \cap R_1)$  y  $(R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$

Para lo cual se determinará  $R_2 \cap R_1$

$R_2 \cap R_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	0.1	0.5	0.3
$x_2$	0.1	0.6	0.8
$x_3$	0.2	0.4	0.6

entonces

$R_3 \circ (R_2 \cap R_1)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	0.5	0.3	0.5	0.3
$x_2$	0.6	0.4	0.9	0.2
$x_3$	0.6	0.4	0.6	0.6

Por otro lado

$R_3 \circ R_2$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	0.5	0.3	0.5	0.3
$x_2$	0.6	0.4	0.8	0.8
$x_3$	0.6	0.4	0.7	0.7

y

$R_3 \circ R_1$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	0.6	0.4	0.9	0.8
$x_2$	0.6	0.4	0.9	0.8
$x_3$	0.6	0.4	0.7	0.6

luego

$(R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$x_1$	0.5	0.3	0.5	0.3
$x_2$	0.6	0.4	0.8	0.8
$x_3$	0.6	0.4	0.7	0.6

Con lo que

$$R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1)$$

(iv) Si  $R_1 \subset R_2$ , entonces  $R_3 \circ R_1 \subset R_3 \circ R_2$

Prueba:

Sean  $R_1, R_2$  y  $R_3$  tres relaciones tales que  $R_1 \subset X \times Y$ ,  $R_2 \subset X \times Y$

y  $R_3 \subset Y \times Z$

Sea  $R_1 \subset R_2$ , entonces  $\mu_{R_1}(x_i, y_j) \leq \mu_{R_2}(x_i, y_j)$ ,  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$

Como

$R_3 \circ R_1 \subset X \times Z$ , entonces  $\forall (x_i, z_k) \in X \times Z$

$$\begin{aligned} & \mu_{R_3 \circ R_1}(x_i, z_k) \\ &= \bigvee_y [\mu_{R_1}(x_i, y) \wedge \mu_{R_3}(y, z_k)] \\ &= \{[\mu_{R_1}(x_i, y_1) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \vee [\mu_{R_1}(x_i, y_2) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \vee \dots \vee \\ & \quad [\mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \vee \dots \vee [\mu_{R_1}(x_i, y_m) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)]\} \end{aligned}$$

Además

$$R_3 \circ R_2 \subset X \times Z,$$

tiene como función de membresía para  $(x_i, z_k) \in X \times Z$  a

$$\begin{aligned} & \mu_{R_3 \circ R_2}(x_i, z_k) \\ &= \bigvee_y [\mu_{R_2}(x_i, y), \mu_{R_3}(y, z_k)] \\ &= \{[\mu_{R_2}(x_i, y_1) \wedge \mu_{R_3}(y_1, z_k)] \vee [\mu_{R_2}(x_i, y_2) \wedge \mu_{R_3}(y_2, z_k)] \vee \dots \vee \\ & \quad [\mu_{R_2}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \vee \dots \vee [\mu_{R_2}(x_i, y_m) \wedge \mu_{R_3}(y_m, z_k)]\} \end{aligned}$$

Se analizan

$$\begin{aligned} & \mu_{R_1}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k) \quad \text{y} \quad \mu_{R_2}(x_i, y_j) \wedge \mu_{R_3}(y_j, z_k) \\ &= \min(\mu_{R_1}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)) \quad \text{y} \quad = \min(\mu_{R_2}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)) \end{aligned}$$

$$\text{Además,} \quad \mu_{R_1}(x_i, y_j) \leq \mu_{R_2}(x_i, y_j), \quad \forall j = \overline{1, m}$$

Se consideran, ahora, los dos casos posibles que se pueden dar con

respecto a  $\mu_{R_3}(y_j, z_k)$ ,  $\forall j = \overline{1, m}$ .

$$\text{a) } \mu_{R_1}(x_i, y_j) \leq \mu_{R_2}(x_i, y_j) \leq \mu_{R_3}(y_j, z_k)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \min[\mu_{R_1}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \\ &= \mu_{R_1}(x_i, y_j) \\ &\leq \min[\mu_{R_2}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)] \\ &= \mu_{R_2}(x_i, y_j) \end{aligned}$$

$$b) \mu_{R_3}(y_j, z_k) \leq \mu_{R_1}(x_i, y_j) \leq \mu_{R_2}(x_i, y_j)$$

Entonces

$$\min[\mu_{R_1}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)]$$

$$= \mu_{R_3}(y_j, z_k)$$

$$= \min[\mu_{R_2}(x_i, y_j), \mu_{R_3}(y_j, z_k)]$$

Por lo tanto

$$\mu_{R_3 \circ R_1}(x_i, z_k) \leq \mu_{R_3 \circ R_2}(x_i, z_k), \quad \forall (x_i, z_k) \in X \times Z$$

Y así finalmente

$$R_3 \circ R_1 \subset R_3 \circ R_2$$

### Definición 12

Se denomina composición Max-Producto de  $R_1$  y  $R_2$  a la relación borrosa  $R_2 \circ R_1 \subset X \times Z$  cuya función de membresía  $\mu_{R_2 \circ R_1}$  se define como:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \bullet \mu_{R_2}(y, z)]; (x, y) \in X \times Y, (y, z) \in Y \times Z$$

$$y(x, z) \in X \times Z$$

$$= \max_y [\mu_{R_1}(x, y) \bullet \mu_{R_2}(y, z)], (x, y) \in X \times Y, (y, z) \in Y \times Z$$

$$y(x, z) \in X \times Z$$

Observación:

De la misma manera como se reemplazó la conjunción  $\wedge$  por el operador producto ( $\bullet$ ) también puede reemplazarse por algún otro operador que sea asociativo y monótonamente no decreciente en cada uno de sus argumentos y que sea distributivo respecto a la unión.

### 1.5.2 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BORROSAS

Definición 13:

Sean el conjunto  $\Omega$  y la relación borrosa  $R$  en  $\Omega \times \Omega$ .

Se dice que la relación  $R$  es:

- (i) Reflexiva, si y solo si  $\forall x \in \Omega, \mu_R(x, x) = 1$
- (ii) Simétrica, si y solo si  $\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega, \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$
- (iii) Transitiva, si y solo si  $\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in \Omega \times \Omega$

$$\mu_R(x, z) \geq \max_y [\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z)]$$

$$= \max_y [\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))]$$

o equivalentemente  $R \circ R \subset R$ .

(iv) Co-transitiva si y solo si  $\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in \Omega \times \Omega$

$$\begin{aligned}\mu_R(x, z) &\leq \bigwedge_y [\mu_R(x, y) \vee \mu_R(y, z)] \\ &= \min_y [\max(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))]\end{aligned}$$

(v) De Similitud o de Equivalencia Borrosa si y solo si la relación  $R$  es reflexiva, simétrica y transitiva.

(vi) De Disimilitud si y solo si es el complemento de una relación de similitud. Obviamente, entonces la relación de Disimilitud es antirreflexiva, simétrica y co-transitiva.

Observación:

Una relación de Disimilitud cumple con los postulados de una función distancia, por lo tanto puede ser interpretada como tal.

Definición 14:

Sea  $R$  una relación binaria borrosa, se dice que  $R$  es un preorden borroso si es reflexiva y transitiva.

Definición 15:

Sea  $R$  una relación binaria borrosa, se dice que  $R$  es un orden borroso si es irreflexiva y transitiva.

Proposición 3.

Si la relación binaria borrosa  $R$  es un orden entonces es asimétrica.

Prueba.

Supóngase que la  $R$  binaria borrosa no es asimétrica, entonces  $\forall (x,y)$  se tiene que  $x R y$  y  $y R x$ . Luego por la transitividad de  $R$  se tiene que para todo  $x$ ,  $x R x$ , hecho que contradice la irreflexividad de  $R$ , por lo tanto  $R$  es asimétrica.

Definición 16:

Sea  $R$  una relación binaria borrosa. Se llama Clausura Transitiva de  $R$  a la relación borrosa denotada por  $\hat{R}$  y definida como:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

donde

$$R^k = \underbrace{R \circ R \circ R \circ \dots \circ R}_{k\text{-veces}}$$

Proposición 4:

La Clausura Transitiva de una relación borrosa es una relación borrosa transitiva.

Prueba:

Sea  $R$  una relación borrosa y  $\hat{R}$  la clausura transitiva de  $R$ , entonces para demostrar que  $\hat{R}$  es transitiva se necesita probar que  $\hat{R} \circ \hat{R} = \hat{R}^2 \subset \hat{R}$

Como  $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{y} \quad \hat{R} \circ \hat{R} &= (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \circ (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \\
 &= [(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \circ R] \cup [(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \circ R^2] \cup \\
 &\quad [(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots) \circ R^3] \cup \dots \\
 &= (R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots) \cup (R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \dots) \cup \\
 &\quad (R^4 \cup R^5 \cup R^6 \cup \dots) \cup \dots \\
 &= R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \dots
 \end{aligned}$$

Por lo que  $\hat{R}^2 = (\hat{R} \setminus R) \subset \hat{R}$

Proposición 5:

Sea  $R$  una relación borrosa. Si a partir de un  $m$  se tiene que  $R^{m+1} = R^m$ , entonces la clausura transitiva de  $R$  estará dada por

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^m$$

La demostración de la proposición es inmediata.

Proposición 6:

Si  $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$  es un conjunto finito y  $R$  una relación borrosa definida en  $\Omega \times \Omega$ , entonces existe un  $m \leq n$  tal que

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^m$$

Prueba:

Sea  $R$  una relación borrosa definida en un conjunto producto  $\Omega \times \Omega$  con  $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$  finito, con  $\#\{\Omega\} = n$ .

Para demostrar esta proposición se emplearan conceptos de la teoría de grafos.

En  $R^m$ ,  $m = \overline{1, n}$ , se tiene que

$$\mu_{R^m}(\alpha_i, \alpha_j) = \bigvee_{k_1} \left\{ \mu_R(\alpha_i, \alpha_{k_1}) \wedge \mu_{R^{m-1}}(\alpha_{k_1}, \alpha_j) \right\}, \text{ donde } s = \overline{1, n},$$

$$\mu_{R^{m-1}}(\alpha_{k_1}, \alpha_j) = \bigvee_{k_2} \left\{ \mu_R(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}) \wedge \mu_{R^{m-2}}(\alpha_{k_2}, \alpha_j) \right\}, \text{ donde } t = \overline{1, n}, \text{ y}$$

así sucesivamente. Esto pone de manifiesto la comparación de  $n$  caminos: cíclicos, con ciclos internos y acíclicos de longitud  $m$ . En las entradas de la representación matricial de  $R^m$  y  $R^{m-1}$  se tendrán el máximo de los mínimos en los caminos comparados, por la misma forma como están definidas.

Dado que

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

se cumple que

$$\mu_{\hat{R}}(\alpha_i, \alpha_j) \geq \mu_{R^m}(\alpha_i, \alpha_j), \quad \forall m = \overline{1, n}, \text{ por definici3n de } \hat{R}.$$

Ahora bien como en  $R^m$  para  $m > n$ , se tendr3n caminos c3clicos que ya se han comparados en  $R^t$ , con  $t = 2, 3, \dots, n$ , en todas las entradas  $(\alpha_i, \alpha_j)$  con  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ , de  $R^m$ , es decir, se cumple que:

$$\mu_{R^m}(\alpha_i, \alpha_j) = \mu_{R^k}(\alpha_i, \alpha_j), \text{ con } m \geq n+1, \text{ para un } 1 < k < n$$

Por lo que,

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

Ahora bien, si existe un  $m \leq n$  tal que  $R^{m-1} = R^m$ , se cumple que

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^{m-1}$$

con lo que se demuestra la propiedad enunciada.

## **1.6 CONJUNTOS USUALES OBTENIDOS A PARTIR DE UN CONJUNTO Y/O UNA RELACI3N BORROSA**

En ciertas aplicaciones se hace necesario trabajar con algunos conjuntos y relaciones usuales definidos a partir de conjuntos borrosos y de relaciones borrosas respectivamente.

Definición 17:

Sea  $A$  un conjunto borroso en un espacio  $\Omega$  y  $\alpha \in (0,1]$ . Se denomina conjunto de nivel  $\alpha$  de  $A$ , al conjunto que se denota por  $\Gamma_A^\alpha$  y que se define como

$$\Gamma_A^\alpha = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mu_A(\mathbf{x}) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1]$$

Definición 18:

Sea  $R$  una relación borrosa en  $\Omega \times \Omega$ . El conjunto de nivel  $\alpha$  de  $R$ , denotado por  $\Gamma_R^\alpha$ , es una relación usual que se define como

$$\Gamma_R^\alpha = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : \mu_R(x, y) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1]$$

Tomando como base la representación matricial de una relación cualquiera, son válidas las siguientes proposiciones.

Proposición 7:

Cualquier relación borrosa  $R$  en  $\Omega \times \Omega$  puede descomponerse de la siguiente forma

$$R = \bigcup_{\alpha} \alpha \Gamma_R^\alpha, \quad \alpha \in (0,1]$$

o, de manera más precisa

$$R = \bigcup_{\alpha = \mu_R(x,y)} \alpha \Gamma_R^\alpha, \quad \alpha \in (0,1]$$

Prueba:

Se considera una relación borrosa  $R$  en  $\Omega \times \Omega$ , entonces  $R$  está definida en su forma matricial por

$$R = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Supóngase que existen  $\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \alpha_{\beta_3}, \dots$  con  $\beta = ij$  donde  $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$  distintos. Luego existen  $\Gamma_R^{\alpha_{\beta_q}}$  con  $q = 1, 2, 3, \dots$  tales que  $\alpha_{\beta_q} \Gamma_R^{\alpha_{\beta_q}}$  tiene en todas sus entradas distintas de ceros los valores  $\alpha_{\beta_q}$ .

Se considera la entrada

$$\alpha_{kn} = \mu_R(k, n)$$

entonces las relaciones  $\Gamma_R^{\alpha_{\beta_q}}$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$  tales que:

$$\alpha_{\beta_q} \leq \alpha_{kn}$$

tiene entradas iguales a uno (1) y en caso contrario las entradas son iguales a cero (0).

Y así, las entradas  $(k, n)$  en la matriz

corresponderá a  $\alpha_{\beta_1} \cup \alpha_{\beta_{i+1}} \cup \alpha_{\beta_{i+2}} \cup \dots \cup \alpha_{\beta_{i+r}} = \alpha_{k_n} \cup 0 \cup 0 \cup \dots \cup 0$  donde

$$\alpha_{k_n} = \alpha_{\beta_{i+r}} > \alpha_{\beta_{i-1}} > \dots > \alpha_{\beta_1}.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha_{\beta_i}} \Gamma_R^{\alpha_{\beta_i}} = R$$

lo cual se deseaba demostrar.

### Proposición 8.

Sea  $S$  una relación borrosa de Similaridad de  $\Omega \times \Omega$ , dada por

$$S = \bigcup_{\alpha} \alpha \Gamma_S^{\alpha}$$

Entonces  $\Gamma_S^{\alpha}$  es una relación de equivalencia en  $\Omega \times \Omega$ .

### Prueba:

Sea  $S$  una relación borrosa de Similaridad con  $S = \bigcup_{\alpha} \alpha \Gamma_S^{\alpha}$ .

Se considera, ahora, la relación

$$\Gamma_S^{\alpha} = \{(x, y) / \mu_S(x, y) \geq \alpha, \alpha \in (0, 1]\}$$

Como  $S$  es una relación de Similaridad se tiene que todo  $\mu_S(x, x) = 1, \forall x \in \Omega$  luego para  $\alpha \in (0, 1]$  se cumple el hecho de que  $\mu_S(x, x) \geq \alpha$

Por lo tanto  $(x, x) \in \Gamma_S^\alpha$ ,  $\forall x \in \Omega$

Lo cual indica que  $\Gamma_S^\alpha$  es una relación reflexiva.

Si se cumple que  $(x, y) \in \Gamma_S^\alpha$  se tiene que  $\mu_S(x, y) \geq \alpha$ , pero como  $S$  es simétrica, entonces  $\mu_S(x, y) = \mu_S(y, x) \geq \alpha$ .

Y así

$$(y, x) \in \Gamma_S^\alpha$$

lo cual comprueba que  $\Gamma_S^\alpha$  es simétrica.

Además, si se da que  $(x, y), (y, z) \in \Gamma_S^\alpha$ , esto nos indica que

$$\mu_S(x, y) \geq \alpha \text{ y } \mu_S(y, z) \geq \alpha$$

Luego como  $S$  es transitiva se cumple que existe  $(x, z) \in \Omega \times \Omega$  tal que

$$\mu_S(x, z) \geq \max_y [\min(\mu_S(x, y), \mu_S(y, z))] \geq \alpha$$

con lo que  $\mu_S(x, z) \geq \alpha$  y por consiguiente  $(x, z) \in \Gamma_S^\alpha$  teniéndose, entonces que

$\Gamma_S^\alpha$  es una relación transitiva.

### Definición 19

Sea  $S$  una relación de Similaridad borrosa. Se llama Clase de Similaridad de  $x_i$  de la relación  $S$  al conjunto borroso denotado por  $S_{[x_i]}$  definido como

$$S_{[x_i]} = \{\mu_S(x_i, x_j), \forall x \in \Omega\}$$

Definición 20:

Sea  $S_{[x_i]}$  la clase de Similaridad de  $x_i$  de la relación borrosa de Similaridad  $S$

Para  $\alpha \in (0,1]$ , a la relación usual  $\Gamma_S^{\alpha_{x_i}}$  definida como

$$\Gamma_S^{\alpha_{x_i}}(x_i) = \{(x_i, x_j) \in \Omega \times \Omega : \mu_S(x_i, x_j) \geq \alpha\}$$

se llama conjunto de nivel  $\alpha$  de la clase de Similaridad de  $x_i$ .

Proposición 9:

Toda Clase de Similaridad  $S_{[x_i]}$  admite la descomposición definida por

$$S_{[x_i]} = \bigcup_{\alpha} \alpha \Gamma_S^{\alpha}(x_i)$$

La demostración de esta proposición se realiza siguiendo un procedimiento similar al de la proposición anterior.

**CAPÍTULO II**

**ASPECTOS TEÓRICOS BÁSICOS DEL MÉTODO**

**ELECTRE I**

## **2.1 INTRODUCCIÓN**

El método ELECTRE I fue diseñado por un grupo de investigadores franceses, entre los que destacó Bernard Roy, a mediados de la década de los años sesenta y emplea como herramienta fundamental, las relaciones de sobreclasificación.

El nombre de este método se deriva de las siglas en francés de *Élimination Et Choix Traduisant La Réalité* (Eliminación y Elección Traduciendo La Realidad).

En la actualidad existe una gran cantidad de métodos que emplean las relaciones de sobreclasificación, algunos de los cuales son variantes del método ELECTRE I.

Todos estos métodos identificados como ELECTRE, permiten la capitalización de relaciones binarias para la evaluación multicriterio se fundamentan en los conceptos de Concordancia y Discordancia. La Concordancia permite establecer las ventajas relativas de una acción versus cada una de las otras alternativas potenciales, mientras que la Discordancia permite la introducción de un nivel máximo de desventaja relativa admisible.

Antes de iniciar con la descripción propiamente dicha del Método ELECTRE I se hace necesario el establecimiento de un conjunto de conceptos básicos involucrados en esta técnica.

En este contexto el conjunto de alternativas o conjunto de acciones potenciales de las cuales se desea obtener una clasificación u ordenamiento es finito, se denotará por  $A$  y se define como

$$A = \{a_i / i = 1, 2, 3, \dots, m\}$$

Definición 21:

Sea  $c_j$  una función, denominada criterio que va del conjunto de acciones potenciales  $A$  al conjunto de escala  $E_j$ , que corresponde al criterio  $c_j$ , es decir,

$$c_j : A \rightarrow E_j$$

donde  $E_j$  es un conjunto de escala,  $E_j \subset \mathcal{R}$  (siendo  $\mathcal{R}$  el conjunto de los números reales).

Se denotará por

$$C = \{c_j / j = 1, 2, 3, \dots, n\},$$

al conjunto de los criterios.

Además, se considera el vector de evaluación Multicriterio de la acción  $a \in A$ , como el vector  $c(a)$ , definido como

$$c(a) = \{c_1(a), c_2(a), c_3(a), \dots, c_n(a)\} \in E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_n$$

donde  $E_j$ ,  $j=1,2,3,\dots,n$ , es la escala respectiva del  $j$ -ésimo criterio  $j=1,2,3,\dots,n$ ,

## 2.2 FUNCIÓN DE BORROSIFICACIÓN

### Definición 22:

Sea  $\mu_j$  la función de membresía o función de borrosificado que asigna a cualquier imagen del criterio  $j$  un único elemento en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , es decir,

$$\mu_j : E_j \rightarrow [0,1]$$

Cuando se escogen o seleccionan criterios  $c_j$  para evaluar una alternativa  $a_i$  muchas de las calificaciones son estimadas dentro de rangos con métricas no comparables, es más, algunos de estos criterios son evaluados cualitativamente. Por ejemplo al criterio de dedicación al trabajo, en un problema de calificación del personal, se le pueden asignar evaluaciones como: extremadamente dedicado, muy dedicado, dedicado, medianamente dedicado y no dedicado; estas deberán ser transformadas a una escala dentro de un intervalo, no necesariamente el intervalo  $[0,1]$ .

Un decisor puede establecer que en una escala del 1 al 5 las evaluaciones cualitativas mencionadas se ponderan así:

Extremadamente Dedicado  $\longrightarrow$  5

Muy Dedicado	→	4.5
Dedicado	→	4.0
Medianamente Dedicado	→	3.0
No Dedicado	→	1.0

Luego se define sobre el conjunto  $\beta = \{5, 4.5, 4, 3, 1\}$  la función de membresía  $\mu_\beta$  tal que

$$\mu_\beta : \beta \rightarrow [0,1]$$

de la siguiente manera

$$\mu_\beta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{35}(x-5)}, & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

con lo que las evaluaciones cualitativas quedarían reevaluadas en el intervalo cerrado  $[0,1]$  de la siguiente manera.

EVALUACIÓN CUALITATIVA	EVALUACION CUANTITATIVA DADA POR EL DECISOR	TRANSFORMACIÓN AL INTERVALO $[0,1]$ POR MEDIO DE $\mu_\beta$
Extremadamente Dedicado	5.0	1.00
Muy Dedicado	4.5	0.87
Dedicado	4.0	0.75
Medianamente Dedicado	3.0	0.49
No Dedicado	1.0	0

Los valores de la función de membresía se redondearon a dos cifras decimales aunque se puede trabajar con más de dos cifras si así se desea.

De manera general se puede tomar para una escala numérica cualquiera

$$E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}, \quad \text{donde } \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n,$$

la función de membresía

$$\mu_E(x) = e^{\frac{1}{k}(x-\alpha_n)}, \quad x \in E$$

Si se estima conveniente se puede considerar que  $\mu_E(\alpha_1) = 0$

Es claro que la definición de la función de membresía depende del tipo de problema o de escala que se emplee. La función de membresía ofrece la conversión necesaria para trabajar en el intervalo  $[0,1]$ , es decir, con conjuntos o relaciones borrosas.

Por ejemplo, si se requiere la evaluación de una persona para trabajar como jinete en un hipódromo y una de las características a evaluar es la estatura, entonces es posible emplear cierta función que transforme la escala de estatura, dada en metros, al intervalo cerrado  $[0,1]$ ; esta función de membresía puede ser la siguiente.

$$\mu_{\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1.50\text{m} \\ 1, & \text{si } 1.50\text{m} < x \leq 1.55\text{m} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sen} \left[ \frac{\Pi}{1.75 - 1.55} (x - 1.65) \right], & \text{si } 1.55\text{m} < x \leq 1.75\text{m} \\ 0, & \text{si } x > 1.75\text{m} \end{cases}$$

Es notorio que esta función asigna el máximo valor a las estaturas entre 1.50 y 1.55 m, reflejando la importancia que tiene este criterio para el trabajo de jinete.

Es evidente que si  $E_j = [0,1]$  no es necesaria la función de borrosificado.

### Definición 23:

Sea  $\mathfrak{R}$  la matriz de decisión de orden  $m \times n$  cuyas filas corresponden a las acciones  $a_i \in A$  y cuyas columnas corresponden a los criterios  $c_j \in C$

Las entradas se denotarán por  $r_{ij}$  y son las transformaciones de las evaluaciones  $c_j(a_i) \in E_j$  por medio de  $\mu_j$ .

$$\mathfrak{R} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Así,  $r_{ij} = \mu_j(c_j(a_i))$

denota la borrosificación por  $\mu_j$  de la evaluación de la acción  $i$  por el criterio  $j$ .

El vector fila  $\langle r_{ik} \rangle_{1 \times m} = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \dots, r_{im})$  correspondiente a las alternativas  $a_i$  se llamará  $B$ -vector de  $a_i$ .

### 2.3 RELACIONES DE PREFERENCIA

#### Definición 24.

Dadas  $a_i, a_j \in A$ . Se dice que  $a_i$  se prefiere estrictamente a  $a_j$  y se denota por

$$a_i P a_j \text{ ó } a_i \succ a_j.$$

si el decisor escoge a  $a_i$  sin ninguna duda sobre  $a_j$ .

#### Definición 25:

Sean  $a_i, a_j \in A$ . Se dice que  $a_i$  es indiferente a  $a_j$  y se denota por

$$a_i I a_j \text{ ó } a_i \approx a_j$$

si el decisor acepta o escoge indistintamente a la alternativa  $a_i$  frente a  $a_j$ .

#### Definición 26:

Sean  $a_i, a_j \in A$ . Se dice que  $a_i$  es preferido o indiferente a  $a_j$  y se denota por

$$a_i Q a_j \text{ ó } a_i \succcurlyeq a_j$$

si el decisor no sabe si prefiere estrictamente a  $a_i$  sobre a  $a_j$  o es indiferente entre ellas.

Definición 27:

Dadas  $a_i, a_j \in A$ . Se dice que la alternativa  $a_i$  y la alternativa  $a_j$  no son comparables y se denota por

$$a_i \text{ NC } a_j \text{ ó } \sim(a_i \succ a_j \text{ o } a_j \succ a_i) \text{ ó } \sim(a_i \succ a_j) \text{ y } \sim(a_j \succ a_i)$$

si el decisor no es capaz de seleccionar entre las alternativas  $a_i$  y  $a_j$ .

Observación:

La relación  $\succsim$  es la unión de las relaciones  $\approx$  y  $\succ$

Cuando el decisor establece comparaciones frente a su conjunto de alternativas se espera que las mismas tengan cierto grado de racionalidad, es decir, que no exista ambigüedad en cuanto a cuáles de las alternativas son indiferentes, estrictamente preferidas o preferidas o indiferentes; para asegurar tal racionalidad es necesario que como mínimo las relaciones de preferencia cumplen las siguientes condiciones:

- ❖ La relación  $\approx$  de indiferencia es reflexiva y simétrica.
- ❖ La relación  $\succ$  de preferencia estricta es asimétrica

- ❖ Las relaciones  $\approx$  y  $\succ$  son disjuntas, es decir, una persona que es indiferente entre dos alternativas no puede preferir estrictamente a una de ellas frente a la otra.

Definición 28:

Se dice que el decisor satisface la Hipótesis de Fuerte Racionalidad si las relaciones  $\succ$ ,  $\approx$  y  $\succcurlyeq$  satisfacen las siguientes condiciones:

- $\approx$  y  $\succ$  son disjuntas,
- $\approx$  es reflexiva y simétrica,
- $\succ$  es asimétrica y
- $\succcurlyeq$  es transitiva.

Proposición 10:

Si se cumple la hipótesis de fuerte racionalidad del decisor la relación  $\succ$  es un orden.

Prueba:

Se supone que  $a_i \succ a_j$  y  $a_j \succ a_k$  lo cual implica que  $a_i \succcurlyeq a_j$  y  $a_j \succcurlyeq a_k$ , como  $\succcurlyeq$  es transitiva entonces  $a_i \succcurlyeq a_k$ . Para probar que  $a_i \succ a_k$ , se supone que  $a_i \approx a_k$ , entonces por simetría de la relación  $\approx$  se cumple que  $a_k \approx a_i$  obteniéndose que  $a_k \succcurlyeq a_i$  que unido al hecho de que  $a_i \succcurlyeq a_j$  asegura que  $a_k \succcurlyeq a_j$  lo cual contradice que  $a_j \succ a_k$ , por lo tanto  $a_i \succ a_k$  y así  $\succ$  es una relación transitiva y asimétrica por hipótesis, entonces es un orden.

Proposición 11:

Si se satisface la hipótesis de fuerte racionalidad del decisor la relación  $\approx$  es una relación de equivalencia.

Prueba:

Las propiedades sobre la reflexividad y la simetría están dadas por la hipótesis por lo que sólo queda por demostrar la transitividad.

Se considera  $a_i \approx a_j$  y  $a_j \approx a_k$ , lo que implica que  $a_i \succ a_j$  y  $a_j \succ a_k$ ; luego por la transitividad de la relación se concluye que  $a_i \succ a_k$ . Para demostrar que  $a_i \approx a_k$ , se supone que  $a_i \succ a_k$ . Por simetría de  $\approx$  también se tiene que si  $a_k \succ a_i$  se contradice el hecho de la asimetría de  $\succ$ , por lo tanto  $a_i \approx a_k$ . Lo que finalmente establece que  $\approx$  es una relación de equivalencia.

Proposición 12:

Si se satisface la hipótesis de fuerte racionalidad del decisor la relación  $\succ$  es una relación de preorden.

Prueba:

Es inmediata por la reflexividad de la relación  $\approx$  y la transitividad de  $\succ$ .

Definición 29:

Sean  $a_i, a_j$  dos alternativas de  $A$  y  $\langle r_{ik} \rangle_{1 \times n} = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \dots, r_{in})$  y

$\langle r_{jk} \rangle_{1 \times n} = (r_{j1}, r_{j2}, r_{j3}, \dots, r_{jn})$  sus  $B$ -vectores correspondientes. Se dice que la relación  $\succsim$  es un preorden producto si ocurre que  $a_i \succsim a_j$  si y sólo si  $r_{ik} \geq r_{jk}$ ,  $\forall k = 1, n$ .

### Proposición 13

Si  $\succsim$  es un preorden producto, entonces esta relación es un preorden.

### Prueba:

Sean  $a_i, a_j$  y  $a_w$  tres alternativas y  $\succsim$  un preorden producto.

Claramente  $r_{ik} \geq r_{ik}$ , dado que  $r_{ik} = r_{ik}$ , para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Por lo tanto la relación  $\succsim$  es reflexiva.

Además, supóngase que  $a_i \succsim a_j$  y que  $a_j \succsim a_w$ , entonces se verifica que  $r_{ik} \geq r_{jk}$  y que  $r_{jk} \geq r_{wk}$ , para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , luego por la transitividad de la relación  $\geq$  se cumple que  $r_{ik} \geq r_{wk}$ , para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ; lo que implica de manera directa que  $a_i \succsim a_w$ , de allí que la relación  $\succsim$  sea un preorden, tal como se deseaba demostrar.

### Definición 30:

Se dice que la alternativa  $a_i \in A$  es eficiente, o no dominada u óptimo de Pareto para un preorden  $\succsim$ , si no existe  $a_j \in A$  tal que  $a_j \succ a_i$ .

Definición 31:

El conjunto de los puntos eficientes u óptimos de Pareto se denomina Conjunto de Pareto.

Definición 32:

Un subconjunto  $B$  de  $A$  es completo para el preorden  $\succsim$  si para todo  $a_i \in A - B$ , existe  $a_j \in B$  tal que  $a_i \succ a_j$ .

Definición 33:

Un conjunto completo  $B$  es minimal si ningún otro subconjunto estricto de él es completo.

**2.4 CONCORDANCIA Y DISCORDANCIA**Definición 34:

Sean  $a_p$  y  $a_q$  dos acciones potenciales de  $A$  y  $C$  el conjunto de los criterios. Se denomina conjunto Supvaluado de  $a_p$  sobre  $a_q$  al conjunto denotado por  $J^+(p,q)$  y definido como

$$J^+(p,q) = \{j / r_{pj} > r_{qj}, j \in C\}$$

Este conjunto reúne a todos los criterios  $j$  para los que la alternativa  $a_p$  es mejor evaluada que la alternativa  $a_q$ .

Definición 35:

Sean  $a_p$  y  $a_q$  dos alternativas de  $A$ . Se llama conjunto Equivaluado de  $a_p$  sobre  $a_q$ , al conjunto denotado por  $J^-(p,q)$  y definido como

$$J^-(p,q) = \{j / r_{pj} = r_{qj}, j \in C\}$$

El conjunto contiene a todos los criterios para los que las evaluaciones de las alternativas  $a_p$  y  $a_q$  son iguales.

Definición 36:

Sean  $a_p$  y  $a_q$ , dos alternativas de  $A$ . Se denomina  $J^-(p,q)$  al conjunto Subvaluado de  $a_p$  sobre  $a_q$  definido como

$$J^-(p,q) = \{j / r_{qj} > r_{pj}, j \in C\}$$

Así  $J^-(p,q)$  agrupa a aquellos criterios  $j$  en los que la alternativa  $a_q$  es mejor evaluada que la alternativa  $a_p$ .

Según las definiciones anteriores, es evidente el cumplimiento de las siguientes igualdades:

$$\ast J^-(p,q) = J^-(q,p)$$

$$\ast J^-(p,q) = J^+(q,p)$$

$$\diamond J^+(p,q) = J(q,p)$$

De acuerdo al grado de importancia o de relevancia que cada uno de los criterios tenga para el decisor o grupo de decisores, se le puede asignar a cada criterio un peso o una ponderación.

Definición 37.

Sea  $p_j$  el peso del  $j$ -ésimo criterio,  $j=1,2,3,\dots,n$ . Se denomina Índice Supvaluado de la alternativa  $a_p$  sobre  $a_q$  al número  $P^+(p,q)$  que se define como:

$$P^+(p,q) = \sum_{j \in J^+(p,q)} p_j$$

Definición 38:

Sea  $p_j$  el peso del  $j$ -ésimo criterio,  $j=1,2,3,\dots,n$ . Se denomina Índice Equivaluado de la alternativa  $a_p$  sobre  $a_q$ , a la cantidad  $P^-(p,q)$  que se define como:

$$P^-(p,q) = \sum_{j \in J^-(p,q)} p_j$$

Definición 39:

Sea  $p_j$  el peso del  $j$ -ésimo criterio,  $j=1,2,3,\dots,n$  . Se denota  $P^-(p,q)$  al Índice Subvaluado de la alternativa  $a_p$  sobre la alternativa  $a_q$ , definido como.

$$P^-(p,q) = \sum_{j \in J^-(p,q)} p_j$$

Observación:

De acuerdo con las definiciones anteriores es obvio que:

$$\diamond P^+(p,q) = P^-(q,p)$$

$$\diamond P^-(p,q) = P^+(q,p)$$

$$\diamond P^-(p,q) = P^+(q,p)$$

Estos tres índices son la base para la definición de los índices de concordancia y discordancia de cada alternativa frente a cada una de las otras acciones en consideración.

Definición 40:

Se denota  $c_{pq}$  al Índice de Concordancia de la alternativa  $a_p$  sobre la alternativa  $a_q$ , definido como.

$$c_{pq} = \frac{P^+(p, q) + P^-(p, q)}{\sum_{j=1}^n p_j}$$

es decir que

$$c_{pq} = \frac{\sum_{j \in J^+(p, q)} p_j + \sum_{j \in J^-(p, q)} p_j}{\sum_{j=1}^n p_j}$$

$c_{pq}$  es un índice normalizado, es decir,  $c_{pq} \in [0,1]$

El índice  $c_{pq}$  determina el grado de supremacía y equidad conjunta que tiene la alternativa  $a_p$  sobre  $a_q$ .

Los índices de concordancia para cada dos alternativas constituyen las entradas de una matriz denominada matriz de concordancia.

Definición 41:

Se llama matriz de concordancia  $\mathcal{C}$  a la matriz de orden  $m \times m$  cuyas filas y columnas corresponden a las alternativas de  $A$ , y cuyas entradas son los índices de concordancia  $c_{pq}$

Así,

$$C = \begin{matrix} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ \mathbf{a}_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{matrix}$$

Proposición 14:

Siempre se cumple que  $0 \leq c_{ij} \leq 1$ . Además,  $c_{ij} = 1$  si y sólo si  $\mathbf{a}_i$  domina  $\mathbf{a}_j$  en el preorden producto; análogamente  $c_{ij} = 0$  si y sólo si  $\mathbf{a}_j$  domina  $\mathbf{a}_i$  en el preorden producto.

Prueba:

Sean  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{a}_j$  dos alternativas. Considere  $c_{ij}$  el índice de concordancia de  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{a}_j$ .

Por definición de  $c_{ij}$  se tiene que

$$c_{ij} = \frac{\sum_{k \in J^+(i,j)} p_k + \sum_{k \in J^-(i,j)} p_k}{\sum_{k=1}^n p_k} \geq 0$$

verificándose la igualdad cuando  $J^+(i, j) = \phi$  y  $J^-(i, j) = \phi$

Además,

$$c_{ij} \leq \frac{\sum_{k \in J^+(i,j)} p_k + \sum_{k \in J^=(i,j)} p_k + \sum_{k \in J^-(i,j)} p_k}{\sum_{k=1}^n p_k} = 1$$

verificándose la igualdad cuando  $J^-(i, j) = \phi$

Evidentemente, si  $J^-(i, j) = \phi$ , entonces para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$   
 $k \in J^+(i, j)$  o  $k \in J^=(i, j)$

de lo que se infiere que  $r_{ik} > r_{jk}$  ó  $r_{ik} = r_{jk}$ ,  $\forall k = \overline{1, n}$ , o sea  $r_{ik} \geq r_{jk}$

$\forall k = \overline{1, n}$  Así  $\succcurlyeq$  es un preorden producto y  $a_i$  domina a  $a_j$  en este preorden producto

De manera similar, si  $J^+(i, j) = J^=(i, j) = \phi$ , entonces  $k \in J^-(i, j)$ ,

$\forall k = \overline{1, n}$  o sea que  $k \in J^-(i, j)$ , por lo tanto  $r_{jk} > r_{ik}$   $\forall k = \overline{1, n}$

Así  $\succcurlyeq$  es un preorden producto y finalmente  $a_j$  domina a  $a_i$  en este preorden producto

#### Definición 42:

Se denomina índice de Discordancia, de la alternativa  $a_p$  sobre  $a_q$ , que se denotará por  $d_{pq}$  al número definido como.

$$d_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{si } J^-(p, q) = \phi \\ \max_{j \in J^-(p, q)} [r_{qj} - r_{pj}], & \text{si } J^-(p, q) \neq \phi \end{cases}$$

o

$$d_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{si } P^-(p, q) = 0 \\ \max_{j \in J^-(p, q)} [r_{qj} - r_{pj}], & \text{si } P^-(p, q) \neq 0 \end{cases}$$

El índice de Discordancia  $d_{pq}$  muestra la máxima diferencia positiva que existe entre alternativa  $a_p$  y la alternativa  $a_q$ , es decir se selecciona la diferencia mayor sobre el conjunto de los criterios en que  $a_q$  domina  $a_p$ .

Así como se definió la matriz de concordancia  $\mathcal{C}$ , es posible definir la matriz de Discordancia por medio de los índices de discordancia.

#### Definición 43:

Se llama matriz de Discordancia, que se denotará por  $\mathcal{D}$ , a la matriz cuyas filas y columnas corresponden a las acciones potenciales de  $A$ , y cuyas entradas son los índices de discordancia.

Así,

$$\mathfrak{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Proposición 15:

Siempre se cumple que  $0 \leq d_{ij} \leq 1$ . Además,  $d_{ij} = 0$  si y sólo si  $a_i$  domina  $a_j$  en el preorden producto.

Prueba:

Sean  $a_i, a_j$  dos alternativas y sea la relación  $\succ$ .

Por definición

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } J^-(i, j) = \phi \\ \max_{k \in J^-(i, j)} [r_{jk} - r_{ik}] & \text{si } J^-(i, j) \neq \phi \end{cases}$$

Considere  $J^-(i, j) \neq \phi$ , entonces existe  $t$ ,  $0 < t \leq n$ , índices tales que

$$r_{jp_0} > r_{ip_0}; r_{jp_1} > r_{ip_1}; \dots; r_{jp_t} > r_{ip_t}$$

Así,

$$r_{jp_0} - r_{ip_0} > 0; r_{jp_1} - r_{ip_1} > 0; \dots; r_{jp_t} - r_{ip_t} > 0$$

suponga que

$$r_{jp_s} - r_{ip_s} = \max_{p_\theta \in J^-(i,j)} [r_{jp_\theta} - r_{ip_\theta}]$$

así

$$d_{ij} = r_{jp_s} - r_{ip_s} > 0$$

obviamente

$$d_{ij} = 1 \text{ si } r_{jp_s} = 1 \text{ y } r_{ip_s} = 0$$

y además

$$d_{ij} = 0 \text{ si } J^-(i, j) = \phi$$

finalmente, entonces

$$0 \leq d_{ij} \leq 1$$

Por otro lado considere que  $d_{ij} = 0$ , entonces  $J^-(i, j) = \phi$ . Dado que el complemento de  $J^-(i, j)$  es  $J^+(i, j) \cup J^=(i, j)$  se tiene que para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $k \in [J^+(i, j) \cup J^=(i, j)]$

Por lo que

$$r_{jk} \geq r_{ik}, \forall k = \overline{1, n}$$

así finalmente

$$a_i \succcurlyeq a_j$$

es decir,  $a_i$  domina  $a_j$  en el preorden producto.

## 2.5 UMBRALES Y RELACIONES DE SOBRECLASIFICACIÓN

Una forma de comparar las alternativas para establecer la supremacía de una sobre la otra es introduciendo umbrales de concordancia y de discordancia. Estos umbrales pueden ser determinados por el decisor o bien, establecerse de acuerdo a ciertos criterios.

Sean  $\mathcal{E}^* = \{c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots, c_{t-1}^*, c_t^*\}$ , y  $\mathcal{D}^* = \{d_1^*, d_2^*, d_3^*, \dots, d_{\alpha-1}^*, d_\alpha^*\}$ , conjuntos formados por las entradas distintas de las matrices de Concordancia y de Discordancia respectivamente, y que constituyen posibles umbrales para el problema. Luego se le cuestiona al decisor sobre cual es el máximo índice de discordancia y el mínimo índice de concordancia admisibles por él.

Consideremos que el índice máximo de discordancia es  $d_r^*$  y el índice mínimos de concordancia es  $c_b^*$ . A partir de ellos es posible generar los conjuntos de umbrales

$$\mathcal{E}^{**} = \{c_{b_1}^*, c_{b_2}^*, c_{b_3}^*, \dots, c_{b_\lambda}^*\} \subset \mathcal{E}^*,$$

donde  $c_{b_\lambda}^* - c_b^*, c_{b_1}^* > c_{b_2}^* > c_{b_3}^* > \dots > c_{b_\lambda}^*$ ,

$$\text{y } \mathcal{D}^{**} = \{d_{r_1}^*, d_{r_2}^*, d_{r_3}^*, \dots, d_{r_\sigma}^*\} \subset \mathcal{D}^*,$$

donde  $d_{r_\sigma}^* - d_r^*, d_{r_1}^* < d_{r_2}^* < d_{r_3}^* < \dots < d_{r_\sigma}^*$

A partir de los posibles pares de umbrales de concordancia y de discordancia se pueden formar algunas relaciones, de las cuales interesan las relaciones de sobreclasificación.

Definición 44:

Sean  $\mathbf{d}_{r_p}^* \in \mathcal{D}^{**}$  y  $\mathbf{c}_{b_q}^* \in \mathcal{C}^{**}$ . Se dice que  $a_i$  sobreclasifica  $a_j$  y se denota por  $a_i \mathbf{S} a_j$  si  $\mathbf{c}_{ij} \geq \mathbf{c}_{b_q}^*$  y  $\mathbf{d}_{ij} \leq \mathbf{d}_{r_p}^*$ , donde  $c_y$  y  $d_y$  son las entradas correspondientes de la matriz de concordancia  $\mathcal{C}$  y de discordancia  $\mathcal{D}$  respectivamente.

Proposición 16:

La relación  $\mathbf{S}$  definida anteriormente es reflexiva. Cuando  $\mathbf{S}$  es transitiva, prolonga el preorden producto.

Prueba:

Obviamente  $\mathbf{S}$  es reflexiva ya que  $c_{ii} = 1$  y  $d_{ii} = 0$  así que  $c_{ii} \geq c_{b_k}^*$  con  $k = 1, 2, 3, \dots, \lambda$  y  $d_{ii} \leq d_{r_n}^*$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, \sigma$

Se supone que  $\mathbf{S}$  es transitiva, entonces si  $a_i$  sobreclasifica  $a_j$  en el preorden producto ocurre que  $r_{ik} \geq r_{jk}$ ,  $\forall k = \overline{1, n}$  lo cual indica que  $c_{ij} = 1$  y  $d_{ij} = 0$ , luego

$a_i \mathbf{S} a_j$ , pero obviamente existen alternativas  $a_p$  y  $a_q$  donde  $a_p \mathbf{S} a_q$ , dado que puede darse que  $c_{pq} \geq c_{b_k}^*$  y  $d_{pq} \geq d_{r_1}^*$ , sin que se de que  $c_{pq} = 1$  y  $d_{pq} = 0$ , es decir no necesariamente ocurre que  $r_{pk} \geq r_{qk}$ ,  $\forall k = \overline{1, n}$ . Así la relación  $\mathbf{S}$  es más rica en lo que respecta a las alternativas que relaciona, es decir, clasifica más pares de alternativas. Por lo que  $\mathbf{S}$  prolonga al preorden producto

Es necesario que  $\mathbf{S}$  sea transitiva para que ésta conserve la propiedad de un preorden.

Dado que la relación  $\mathbf{S}$  no es transitiva en la mayoría de los casos se requiere extraer de la teoría de grafos el concepto de núcleo de la relación que fue empleado por primera vez por el Doctor Bernard Roy.

#### Definición 45:

Se llama núcleo asociado a una relación de sobreclasificación  $\mathbf{S}$  a todo subconjunto  $N$  de las alternativas  $A$  tal que:

$$\forall a_k \in A - N, \exists a_i \in N, \text{ tal que } a_i \mathbf{S} a_k$$

$$\forall a_k, a_i \in N, (a_i, a_k) \notin \mathbf{S} \text{ y } (a_k, a_i) \notin \mathbf{S}$$

Observación:

La primera de las condiciones es denominada estabilidad externa del grafo y la segunda estabilidad interna del grafo o propiedad de absorción del grafo.

Proposición 17:

Si  $\mathbf{S}$  es transitiva y el conjunto de Pareto de  $\mathbf{S}$  respecto a  $A$  es completo minimal, entonces el núcleo es único y se confunde con el conjunto de Pareto

Prueba:

Sea  $N$  el núcleo y  $E$  el conjunto de Pareto. Considérese  $a_p \in N$  y  $a_p \notin E$  entonces existe  $a_q \in E$  tal que  $a_q \mathbf{S} a_p$ . Dado el hecho de que  $a_q \notin N$  entonces por la estabilidad externa del núcleo existe  $a_k \in N$  tal que  $a_k \mathbf{S} a_q$  que luego por la transitividad de  $\mathbf{S}$ ,  $a_k \mathbf{S} a_p$  lo que contradice la estabilidad interna del núcleo. Así se tiene que  $N \subset E$ .

De manera similar considérese que  $a_p \in E$  y  $a_p \notin N$  entonces por la estabilidad externa del núcleo existe  $a_k \in N$  tal que  $a_k \mathbf{S} a_p$ , pero esto contradice el hecho de que  $E$  sea completo, minimal y además que contiene al conjunto de los eficientes, por lo tanto  $a_p \in N$  por lo que  $E \subset N$ .

Luego se verifica que  $N = E$ . Además  $N$  es único debido a la unicidad de  $E$ .

Definición 46:

Se denomina Alfa-nivel a cada uno de los elementos del producto cartesiano  $\mathcal{E}^{**} \times \mathcal{D}^{**}$ .

Observación:

- ◆ Cada alfa-nivel define una relación de sobreclasificación y en consecuencia el grafo correspondiente. Esto justifica que el alfa-nivel, determinado por los índices  $c_b^* \in \mathcal{E}^{**}$  y  $d_r^* \in \mathcal{D}^{**}$ , se denote por  $G(c_b^*, d_r^*)$ .

Una vez se determinan los alfa-niveles y se construye el grafo de la relación de sobreclasificación correspondiente a cada uno, se deberá seguir los siguientes pasos para lograr la clasificación de las alternativas:

1. De cada grafo se determina el núcleo. Se eliminarán aquellos alfa-niveles para los que el núcleo es vacío o bien esté formado por todas las alternativas.
2. Para cada grafo se consideran dos direcciones:
  - (a) Dirección Derecha del vértice  $i$ : es la mayor longitud de camino (elemental) entre los que se inician en el vértice  $i$  y finaliza en un vértice cualquiera distinto de él.

- (b) Dirección Inversa del vértice  $i$ : es la mayor longitud de camino (elemental) entre los que se inician en un vértice cualquiera distintos de  $i$  y finalizan en el vértice  $i$ .
3. Se interactuará entre el decisor y el analista para determinar los pesos (en el intervalo  $[0,1]$ ) para cada uno de los alfa-niveles restantes del paso 1, obteniéndose, por ejemplo, un orden de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
 G(c_{i_1}^*, d_{f_1}^*) & \longrightarrow & 1 \\
 G(c_{i_2}^*, d_{f_2}^*) & \longrightarrow & 0.95 \\
 G(c_{i_3}^*, d_{f_3}^*) & \longrightarrow & 0.80 \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot \\
 G(c_{i_a}^*, d_{f_a}^*) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

La asignación de los pesos para los alfa-niveles puede establecerse por medio de la técnica del valor medio o bien por una colocación del mayor valor para el alfa-nivel de más rigidez y el menor valor para el alfa-nivel de menor rigidez, para luego linealizar los alfa-niveles intermedios. Debe entenderse que el alfa-nivel de mayor rigidez es el que tiene el mayor umbral de concordancia y el menor umbral de discordancia, el alfa-nivel de menor rigidez es aquel que tiene el menor umbral de concordancia y el

mayor umbral de discordancia. Esta manera de ponderar tiene la desventaja de que puede asignar un mismo peso a dos alfa-niveles diferentes.

4. Se calcula el grado de cada vértice restando su alcance a inversa de su alcance a derecha. El alcance a derecha de un vértice es la suma de sus direcciones a derecha en cada alfa-nivel, ponderada por el peso del alfa-nivel. Análogamente el alcance a inversa es la suma de sus direcciones a inversa en cada alfa nivel, ponderada por el peso del alfa-nivel. Las alternativas (vértices) se ordenarán de mayor a menor según su grado.

## **CAPÍTULO III**

### **APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS BORROSOS EN UN PROBLEMA DE SELECCIÓN Y PROMOCIÓN DE PERSONAL EN UNA EMPRESA**

Considérese una compañía que para dar respuesta a ciertas necesidades, debe abocarse a la selección y promoción salarial de cierto personal.

Suponga que se desea escoger 3 individuos de un total de 67 que participan. El director de personal establece, conjuntamente con el departamento al cual se le adjudicarán las plazas solicitadas, 10 características que consideran importantes para ser satisfechas por las personas que aspiran a ocupar dichas posiciones, además evalúan a cada uno de los participantes para obtener así el perfil de cada uno de ellos, según estas características.

Para la selección se establece emplear el criterio del mejor promedio, es decir, utilizar la media de las evaluaciones para cada uno de los 67 participantes. Al procederse se presenta la dificultad de que los 8 candidatos con las mejores calificaciones tienen igual promedio.

Por otro lado se define el perfil ideal  $P_0$  que deben reunir los individuos que van a ocupar las posiciones.

La siguiente matriz muestra las calificaciones de los 8 candidatos mejor calificados, el perfil ideal y los correspondientes promedios

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	Media
$P_0$	0.90	0.75	0.80	0.90	0.90	0.95	0.85	0.95	0.98	1.00	0.898
$P_1$	0.65	0.50	0.70	0.85	0.80	0.45	0.85	0.75	0.90	0.65	0.71
$P_2$	0.90	0.60	0.50	0.65	0.70	0.75	0.80	0.70	0.85	0.65	0.71
$P_3$	0.60	0.55	0.60	0.75	0.45	0.80	0.95	0.85	0.95	0.60	0.71
$P_4$	0.65	0.40	0.80	0.65	0.90	0.55	0.80	0.60	0.85	0.90	0.71
$P_5$	0.80	0.60	0.65	0.70	0.80	0.50	0.85	0.70	0.60	0.90	0.71
$P_6$	0.80	0.90	0.70	0.80	0.50	0.45	0.80	0.60	0.90	0.65	0.71
$P_7$	0.70	0.80	0.45	0.65	0.85	0.80	0.50	0.80	0.70	0.85	0.71
$P_8$	0.90	0.60	0.80	0.75	0.50	0.85	0.75	0.80	0.50	0.65	0.71

Una manera de resolver la dificultad presentada por el uso del criterio del mejor promedio y ayudar al problema de ordenamiento de los candidatos es utilizar la Distancia Hamming al punto ideal y los coeficientes borrosos.

Los resultados de los cálculos de estos parámetros, para cada alternativa, se muestran en el siguiente cuadro, en el que:

- La Distancia Hamming está abreviada en el cuadro por D H.
- Los coeficientes Borrosos I, II, III, IV y V están denotados, respectivamente por  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$  y  $Q_5$ .

Cuadro #1

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	Medi a	D H.	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$
$P_0$	0.90	0.75	0.80	0.90	0.90	0.95	0.85	0.95	0.98	1.00	0.898	0	8.120	8.281	0.825	1	1
$P_1$	0.65	0.50	0.70	0.85	0.80	0.45	0.85	0.75	0.90	0.65		1.88	6.399	6.719	0.661	0.812	0.890
$P_2$	0.90	0.60	0.90	0.65	0.70	0.75	0.80	0.70	0.85	0.65		1.88	6.415	6.751	0.663	0.812	0.890
$P_3$	0.60	0.55	0.60	0.75	0.45	0.80	0.95	0.85	0.95	0.60	0.71	2.08	6.415	6.757	0.664	0.782	0.878
$P_4$	0.65	0.40	0.80	0.65	0.90	0.55	0.80	0.60	0.85	0.90		1.88	6.425	6.771	0.666	0.812	0.890
$P_5$	0.80	0.60	0.65	0.70	0.80	0.90	0.85	0.70	0.60	0.90		1.88	6.390	6.701	0.660	0.812	0.890
$P_6$	0.80	0.90	0.70	0.80	0.50	0.45	0.80	0.60	0.90	0.65		2.14	6.334	6.580	0.650	0.782	0.871
$P_7$	0.70	0.80	0.45	0.65	0.85	0.80	0.50	0.80	0.70	0.85		1.98	6.421	6.762	0.665	0.802	0.854
$P_8$	0.90	0.60	0.80	0.75	0.50	0.85	0.75	0.80	0.50	0.65		1.88	6.370	6.660	0.656	0.812	0.890

Del cuadro anterior se obtienen las siguientes clasificaciones de acuerdo a cada uno de los coeficientes borrosos descritos y a la Distancia

**Hamming.** El ordenamiento que se presenta va del mejor al peor clasificado.

#### ORDENAMIENTO SEGÚN LA DISTANCIA HAMMING AL PUNTO IDEAL

1°	$\{P_1, P_2, P_4, P_5, P_8\}$
2°	$\{P_7\}$
3°	$\{P_3\}$
4°	$\{P_6\}$

#### ORDENAMIENTO SEGÚN EL COEFICIENTE BORROSO I

1°	$\{P_4\}$
2°	$\{P_7\}$
3°	$\{P_3\}$
4°	$\{P_2\}$
5°	$\{P_1\}$
6°	$\{P_5\}$
7°	$\{P_8\}$
8°	$\{P_6\}$

## ORDENAMIENTO SEGÚN EL COEFICIENTE BORROSO II

1°	<b>{P<sub>4</sub>}</b>
2°	<b>{P<sub>7</sub>}</b>
3°	<b>{P<sub>3</sub>}</b>
4°	<b>{P<sub>2</sub>}</b>
5°	<b>{P<sub>1</sub>}</b>
6°	<b>{P<sub>5</sub>}</b>
7°	<b>{P<sub>8</sub>}</b>
8°	<b>{P<sub>6</sub>}</b>

## ORDENAMIENTO SEGÚN EL COEFICIENTE BORROSO III

1°	<b>{P<sub>4</sub>}</b>
2°	<b>{P<sub>7</sub>}</b>
3°	<b>{P<sub>3</sub>}</b>
4°	<b>{P<sub>2</sub>}</b>
5°	<b>{P<sub>1</sub>}</b>
6°	<b>{P<sub>5</sub>}</b>
7°	<b>{P<sub>8</sub>}</b>
8°	<b>{P<sub>6</sub>}</b>

ORDENAMIENTO SEGÚN EL COEFICIENTE BORROSO IV

1°	$\{P_1, P_2, P_4, P_5, P_8\}$
2°	$\{P_7\}$
3°	$\{P_3\}$
4°	$\{P_6\}$

ORDENAMIENTO SEGÚN EL COEFICIENTE BORROSO V

1°	$\{P_4\}$
2°	$\{P_7\}$
3°	$\{P_3\}$
4°	$\{P_2\}$
5°	$\{P_1\}$
6°	$\{P_5\}$
7°	$\{P_8\}$
8°	$\{P_6\}$

Observaciones:

- a) La Distancia Hamming al igual que el Coeficiente Borroso IV producen la misma clasificación.

- b) Los Coeficientes Borrosos I, II, III y IV originan los mismos resultados en cuanto a la clasificación.
- c) Aunque no siempre ocurrirá lo mencionado en a) y b), existe una gran similitud entre la clasificación que se presenta internamente entre los dos grupos, es decir, por un lado la Distancia Hamming y el Coeficiente Borroso IV, y por otro lado los Coeficientes Borrosos I, II, III y IV.
- d) La selección de los coeficientes para la selección o clasificación de los candidatos dependerá de la interacción entre el analista y el decisor, teniendo éste la última palabra en cuanto a la decisión a tomar, analizando, con alguna otra perspectiva las cualidades de cada uno de los coeficientes.

Cualquier duda respecto a las clasificaciones suministradas por los recursos anteriores puede ser resuelta utilizando esta variante del Método ELECTRE. De la matriz de calificaciones dada al inicio del ejemplo se puede extraer directamente la matriz de decisión  $\mathfrak{R}$  que contiene a los perfiles de las alternativas, como renglones, según los 10 criterios establecidos, donde cada entrada  $r_{ij}$  de la matriz  $\mathfrak{R}$  corresponde a la evaluación dada al participante o candidato  $P_i$  en el criterio  $c_j$ .



$$d_{ij} = \begin{cases} \max[r_{jk} - r_{ik}], & J^-(i, j) \neq \phi \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

de manera que

$$\mathcal{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.30 & 0.35 & 0.25 & 0.25 & 0.40 & 0.35 & 0.40 \\ 0.20 & 0 & 0.15 & 0.30 & 0.25 & 0.30 & 0.20 & 0.30 \\ 0.35 & 0.30 & 0 & 0.45 & 0.35 & 0.35 & 0.40 & 0.30 \\ 0.20 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.20 & 0.50 & 0.40 & 0.30 \\ 0.30 & 0.25 & 0.35 & 0.25 & 0 & 0.30 & 0.30 & 0.35 \\ 0.30 & 0.30 & 0.35 & 0.40 & 0.30 & 0 & 0.35 & 0.40 \\ 0.35 & 0.30 & 0.45 & 0.35 & 0.35 & 0.30 & 0 & 0.35 \\ 0.40 & 0.35 & 0.45 & 0.40 & 0.30 & 0.40 & 0.35 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se definen los conjuntos  $\mathcal{E}^*$  y  $\mathcal{D}^*$  dados en este caso por  $\mathcal{E}^* = \{0.80, 0.70, 0.60, 0.50, 0.40\}$  que corresponde a los índices de concordancia diferentes y  $\mathcal{D}^* = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50\}$  que corresponden a las entradas diferentes de la matriz  $\mathcal{D}$ .

Se solicita al decisor recomendar los umbrales mínimo de concordancia y máximo de discordancia admisibles.

A tal solicitud escogió respectivamente, al menor de  $\mathcal{E}^*$  (0.40) y al elemento (0.40) de  $\mathcal{D}^*$ , por lo que  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{**}$  y  $\mathcal{D}^{**} = \{0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$

El producto cartesiano  $\mathcal{E}^{**} \times \mathcal{D}^{**}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{**} \times \mathcal{D}^{**} = & \{(0.80, 0.15), (0.80, 0.20), (0.80, 0.25), (0.80, 0.30), (0.80, 0.35), \\ & (0.80, 0.40), (0.70, 0.15), (0.70, 0.20), (0.70, 0.25), (0.70, 0.30), \\ & (0.70, 0.35), (0.70, 0.40), (0.60, 0.15), (0.60, 0.20), (0.60, 0.25), \\ & (0.60, 0.30), (0.60, 0.35), (0.60, 0.40), (0.50, 0.15), (0.50, 0.20), \\ & (0.50, 0.25), (0.50, 0.30), (0.50, 0.35), (0.50, 0.40), (0.40, 0.15), \\ & (0.40, 0.20), (0.40, 0.25), (0.40, 0.30), (0.40, 0.35), (0.40, 0.40)\} \end{aligned}$$

Cada una de estas parejas es un alfa-nivel, por lo que se tendrán 30 alfa-niveles que se denotarán:

$$G_1(0.8, 0.15), G_2(0.8, 0.20), \dots, G_{30}(0.40, 0.40)$$

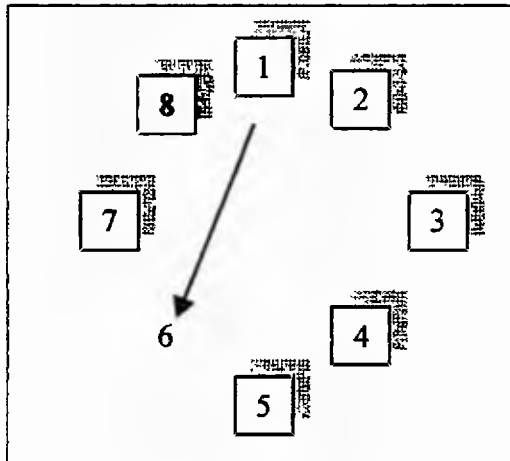
luego se establecen los núcleos de cada uno de los grafos de las relaciones definidas y las direcciones a derecha e inversa de cada uno de sus vértices.

Para el alfa-nivel  $G_1(0.80, 0.15)$  se define su correspondiente relación de sobreclasificación  $\mathcal{S}_1$ .

Se recuerda que  $a_i \in \mathcal{S}_1 a_j$  si  $c_{ij} \geq 0.80$  y  $d_{ij} \leq 0.15$ , lo que no se cumple para ninguna de las alternativas  $\mathcal{S}_1 = \Phi$  se refleja en el grafo pues no existen arcos trazados; en consecuencia, el núcleo correspondiente contiene a todas las alternativas y las direcciones derechas e inversas son cero para cada vértice

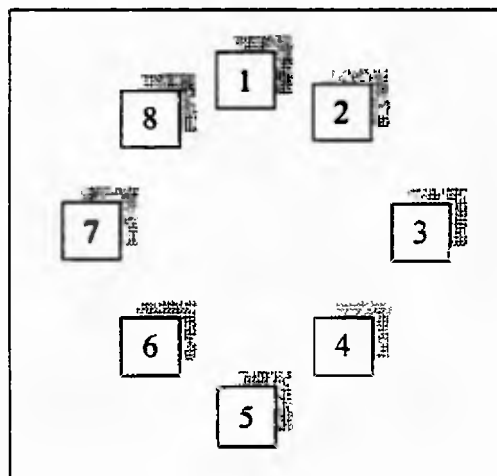


$G_6(0.80, 0.40)$ , Núcleo = {1,2,3,4,5,7,8}



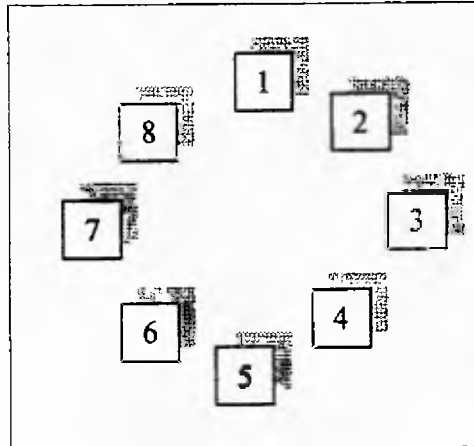
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	1	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	1
7	0	0
8	0	0

$G_7(0.70, 0.15)$ , Núcleo = {1,2,3,4,5,6,7,8}



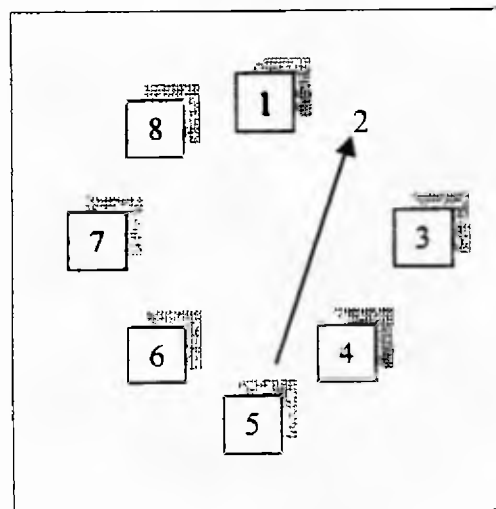
	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_8(0.70, 0.20)$ , Núcleo = {1,2,3,4,5,6,7,8}



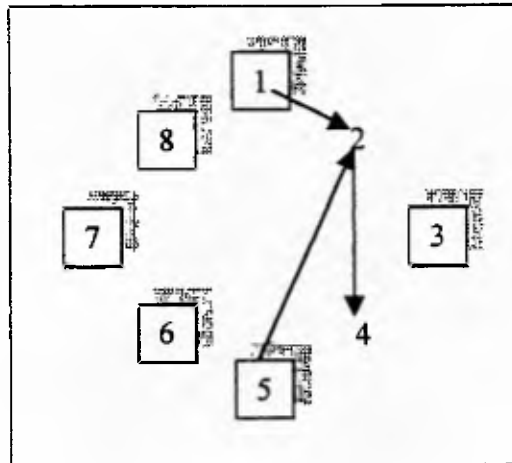
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_9(0.70, 0.25)$ , Núcleo = {1,3,4,5,6,7,8}



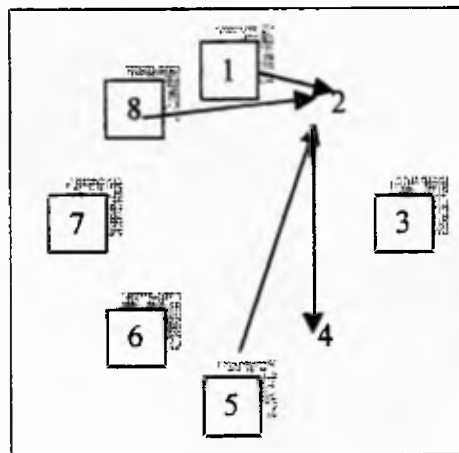
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	0	1
3	0	0
4	0	0
5	1	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_{10}(0.70, 0.30)$ , Núcleo = {1,3,5,6,7,8}



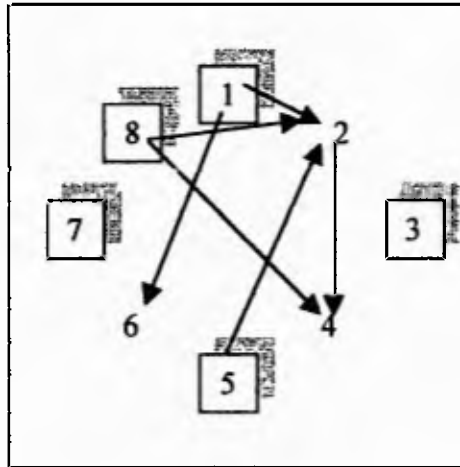
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	2	0
2	1	1
3	0	0
4	0	2
5	2	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_{11}(0.70, 0.35)$ , Núcleo = {1,3,5,6,7,8}



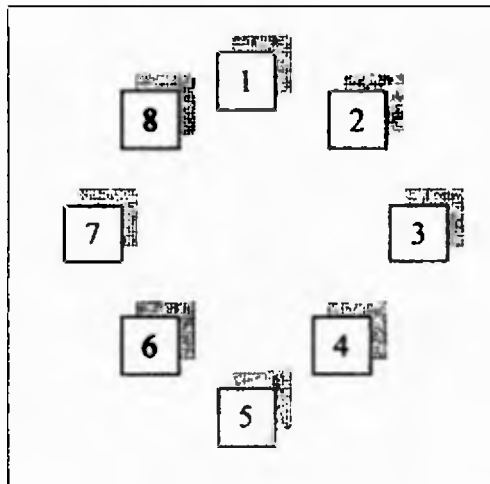
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	2	0
2	1	1
3	0	0
4	0	2
5	2	0
6	0	0
7	0	0
8	2	0

$G_{12}(0.70, 0.40)$ , Núcleo = {1,3,5,7,8}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	2	0
2	1	1
3	0	0
4	0	2
5	2	0
6	0	1
7	0	0
8	2	0

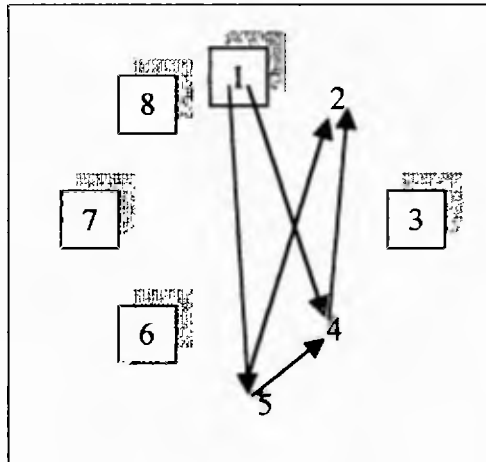
$G_{13}(0.60, 0.15)$ , Núcleo = {1,2,3,4,5,6,7,8}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

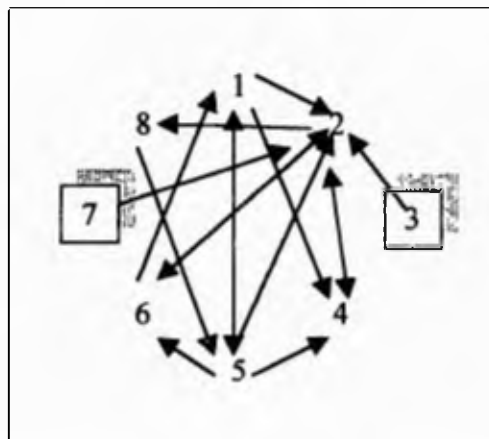
$G_{14}(0.60, 0.20)$ , Núcleo = {1,2,3,4,5,6,7,8}, grafo idéntico al anterior

$G_{15}(0.60, 0.25)$ , Núcleo = {1,3,6,7,8}



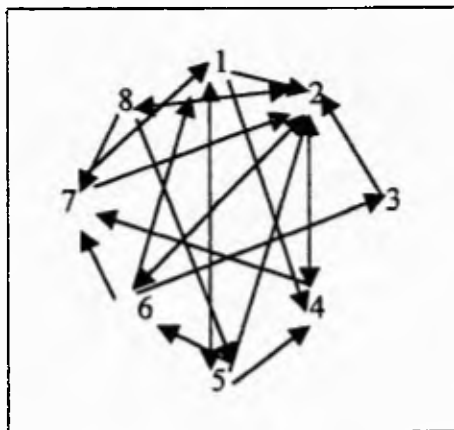
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	3	0
2	0	3
3	0	0
4	0	2
5	2	1
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_{16}(0.60, 0.30)$ , Núcleo = {3,7}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	4	5
2	4	5
3	5	0
4	3	5
5	5	4
6	4	4
7	6	0
8	5	5

$G_{17}(0.60, 0.35)$ , Núcleo = { }

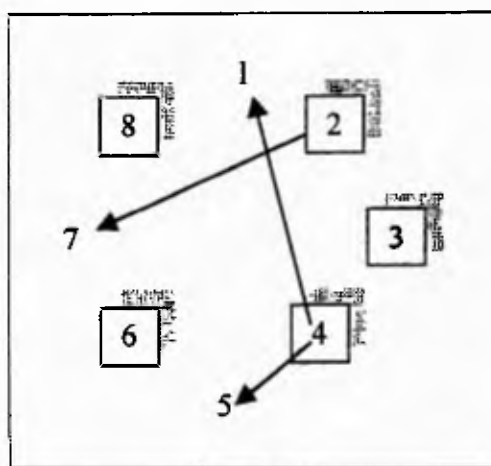


Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_{18}(0.60, 0.40)$ , Núcleo = { }

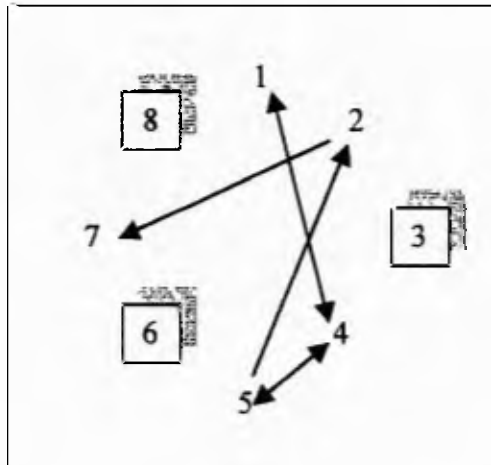
$G_{19}(0.50, 0.15)$ , Núcleo = { }

$G_{20}(0.50, 0.20)$ , Núcleo = { 2,3,4,6,8 }



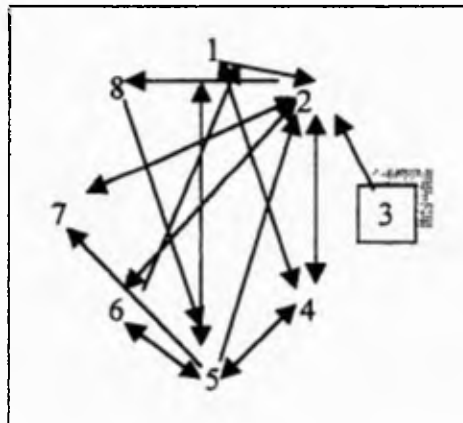
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	1
2	1	0
3	0	0
4	1	0
5	0	1
6	0	0
7	0	1
8	0	0

$G_{21}(0.50, 0.25)$ , Núcleo = {3,6,8}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	4	2
2	1	3
3	0	0
4	3	1
5	2	1
6	0	0
7	0	4
8	0	0

$G_{22}(0.50, 0.30)$ , Núcleo = {3}

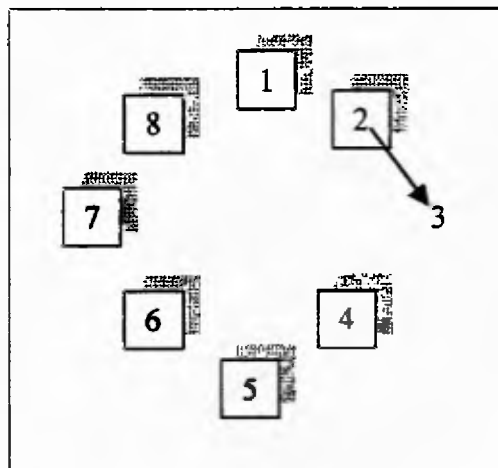


Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	5	5
2	4	4
3	5	0
4	5	5
5	5	5
6	5	5
7	0	5
8	5	5

$G_{23}(0.50, 0.35)$ , Núcleo = { }

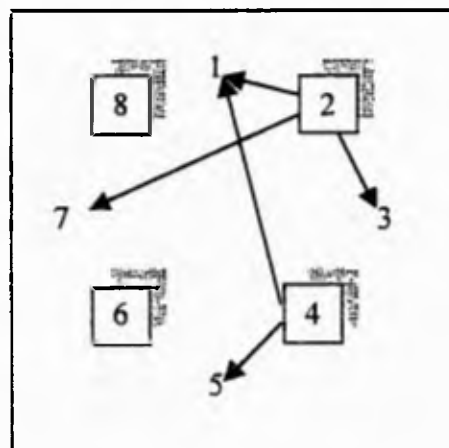
$G_{24}(0.50, 0.40)$ , Núcleo = { }

$G_{25}(0.40, 0.15)$ , Núcleo = {1,2,4,5,6,7,8}



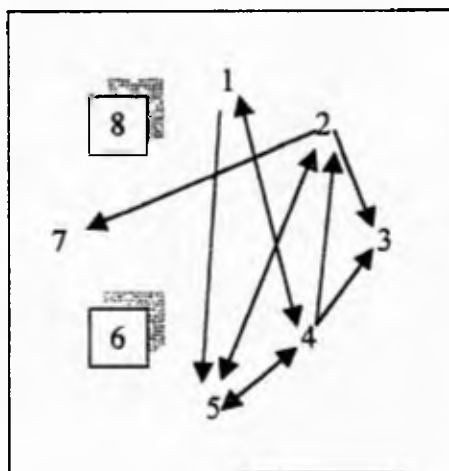
Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

$G_{26}(0.40, 0.20)$ , Núcleo = { 2,4,6,8}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	0	1
2	1	0
3	0	1
4	1	0
5	0	1
6	0	0
7	0	1
8	0	0

$G_{27}(0.40, 0.25)$ , Núcleo = {6,8}



Vértice Número	Dirección	
	Derecha	Inversa
1	4	4
2	3	3
3	0	4
4	2	2
5	3	3
6	0	0
7	0	4
8	0	0

$G_{28}(0.40, 0.30)$ , Núcleo = { }

$G_{29}(0.40, 0.35)$ , Núcleo = { }

$G_{30}(0.40, 0.40)$ , Núcleo = { }

Al cuestionar al decisor sobre la ponderación de los diferentes alfa-niveles, responde que él reserva la calificación de 1 al alfa-nivel  $G(0.9, 0.1)$ , no alcanzado en este problema y que asigna la calificación de 0 al alfa-nivel  $G(0.4, 0.4)$ , ambos denominados alfa-niveles extremos.

Es decir, el decisor le asigna una ponderación máxima de uno (1) al alfa-nivel cuyo índice de concordancia es de 0.90 y de discordancia de 0.10, y califica con cero (0) al alfa-nivel que tiene un índices de concordancia de 0.40 y de discordancia de 0.40.

Para ponderar a los alfa-niveles intermedios, se escoge la vía de la linealización. Si  $G(c_i^*, d_i^*)$  es el i-ésimo alfa-nivel, se procede de la siguiente manera.

#### LINEALIZACIÓN DE LOS UMBRALES DE CONCORDANCIA:

Se calcula

$$P_{c_i^*} = \frac{c_i^* - \text{Menor Valor De Los Umbrales De Concordancia}}{\text{Diferencia Entre Los Umbrales De Concordancia De Los Alfa - Niveles Extremos}}$$

donde  $c_i^*$  es el valor del i-ésimo umbral de concordancia.

#### LINEALIZACIÓN DE LOS UMBRALES DE DISCORDANCIA:

Y se calcula

$$P_{d_i^*} = \frac{\text{Mayor Valor De Los Umbrales De Discordancia} - d_i^*}{\text{Diferencia Entre Los Umbrales De Discordancia De Los Alfa - Niveles Extremos}}$$

donde  $d_i^*$  es el valor del i-ésimo umbral de discordancia.

La ponderación de este Alfa-nivel, que se denotará por  $\mathcal{P}_i$ , se obtiene sumando estos dos pesos, es decir,

$$\mathcal{P}_i = \frac{\mathbf{P}_{c_i} + \mathbf{P}_{d_i}}{2}$$

Las fórmulas de  $\mathbf{P}_{c_i}$  y  $\mathbf{P}_{d_i}$  para el caso particular que se estudia son

$$\mathbf{P}_{c_i} = \frac{c_i^* - 0.4}{0.5} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_{d_i} = \frac{0.4 - d_i^*}{0.3}$$

de allí que

$$\mathcal{P}_i = \frac{\mathbf{P}_{c_i} + \mathbf{P}_{d_i}}{2} = \frac{15c_i^* - 25d_i^* + 4}{15}$$

Por ejemplo, el cálculo del peso del alfa-nivel  $\mathbf{G}_{27}(0.40, 0.25)$  que con el nuevo ordenamiento de los alfa-niveles le corresponde  $\mathbf{G}_{13}(0.40, 0.25)$  es

$$\mathcal{P}_i = \frac{15(0.4) - 25(0.25) + 4}{15} = 0.250$$

Es claro que este proceso se realiza para los alfa-niveles cuyos núcleos no son vacíos o no contienen a todas las alternativas

Esto conduce a la necesidad de reordenar los alfa-niveles restantes de acuerdo a los umbrales de concordancia considerados, es decir, si los índices de los alfa-niveles son  $j=1,2,3,\dots,q$ , entonces se reordenarán con los índices  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_q$  donde  $G_{\beta_1}$  es el alfa-nivel de mayor rigidez, respecto al umbral de concordancia, y  $G_{\beta_q}$  es el alfa-nivel de menor rigidez en lo que respecta a los umbrales de concordancia. La rigidez respecto a los umbrales de discordancia se puede usar como segundo criterio para el ordenamiento.

Los pesos de los Alfa-niveles ordenados  $G_{\beta_s}$ ,  $s=1,2,3,\dots,13$  son:

ALFA-NIVELES	PESOS $P_{\beta_s}$
$G_7(0.80;0.40)$	0.400
$G_2(0.70;0.25)$	0.550
$G_3(0.70;0.30)$	0.467
$G_4(0.70;0.35)$	0.383
$G_5(0.70;0.40)$	0.300
$G_6(0.60;0.25)$	0.450
$G_7(0.60;0.30)$	0.367
$G_8(0.50;0.20)$	0.433
$G_9(0.50;0.25)$	0.350
$G_{10}(0.50;0.30)$	0.267
$G_{11}(0.40;0.15)$	0.417
$G_{12}(0.40;0.20)$	0.333
$G_{13}(0.40;0.25)$	0.250

El último paso para lograr la clasificación de las alternativas consiste en el cálculo de los alcances a derecha, a inversa y los grados de cada uno de ellas.

El alcance a derecha del vértice  $i$  (de la  $i$ -ésima alternativa o perfil), que se denotará por  $P_{v_i}^+$ , se define como:

$$P_{v_i}^+ = \sum_{s=1}^q P_{\beta_s} n_{\beta_s}^i,$$

donde  $n_{\beta_s}^i$  es la dirección a derecha del vértice  $i$  en el alfa-nivel  $G_{\beta_s}$ .

Y el alcance a inversa del vértice  $i$  (de la  $i$ -ésima alternativa o perfil), que se denotará por  $P_{v_i}^-$ , se define como:

$$P_{v_i}^- = \sum_{s=1}^q P_{\beta_s} m_{\beta_s}^i,$$

donde  $m_{\beta_s}^i$  es la dirección a inversa del vértice  $i$  en el alfa-nivel  $G_{\beta_s}$ .

Así finalmente la diferencia de los alcances a derecha menos el alcance a inversa de cada alternativa, se dan en la siguiente tabla:

Número de Vértice	Alcance A Derecha	Alcance A Inversa	Grado
1	8 803	5 636	3.167
2	5.969	6.753	-0.784
3	3.170	1 333	1.837
4	4.752	7.220	-2.468
5	7.920	5.119	2.801
6	2 803	3.503	-0.700
7	2 202	4.501	-2.299
8	4.536	3.170	1.366

De donde se desprende como resultado la clasificación siguiente.

<b>Clasificación Borrosa</b>
1
5
3
8
6
2
7
4

Finalmente se aprecia que los candidatos seleccionados son los que corresponden a las alternativas 1, 5 y 3, el candidato correspondiente a la alternativa 8 sería el siguiente a considerar en el caso de ocurra una eventualidad y alguno de los tres primero no pueda cubrir la plaza obtenida

## **CONCLUSIONES**

El desarrollo de este trabajo generó diversas ideas que considero son necesarias exponer en esta sección.

- ❖ La Teoría Borrosa permite el trabajo con conjuntos que representan situaciones de la vida real y que la teoría booleana manejaría superficialmente.
- ❖ En la Teoría de Conjuntos Borrosos se pueden tomar decisiones sobre alternativas bajo evaluaciones cualitativas para luego ser transformadas a evaluaciones cuantitativas en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , valorización necesaria para utilizar el Método ELECTRE I.
- ❖ El Método ELECTRE I permite el uso de pesos que bien pudieran representar consideraciones políticas del decisor.
- ❖ El Método ELECTRE I cuenta con recursos para manejar situaciones de incomparabilidad de las alternativas.
- ❖ El Método ELECTRE I introduce los conceptos de Concordancia y de Discordancia, surgidos de los conocidos procesos de votación..
- ❖ La técnica descrita para el ordenamiento de las alternativas, también representa un tratamiento más justo de la decisión pues se evita la subjetividad al considerar un ordenamiento por simple inspección de los alfa-niveles y de las alternativas que los integran.
- ❖ La introducción de los conceptos de alcance a derecha y a inversa de las alternativas y del grado de cada uno de ellas, permite manejar de una manera sencilla los diversos resultados surgidos por el uso del Método ELECTRE I.

## RECOMENDACIONES

El método de ordenamiento expuesto está diseñado para el caso en el que el núcleo correspondiente a cada alfa-nivel es único, es decir la relación de sobreclasificación es transitiva. Sería de gran interés continuar este trabajo abordando el caso donde resulte más de un núcleo para algunos de los alfa-niveles que se consideran.

1. Sería de gran provecho el diseño de un programa de computación interactivo que agilice los cálculos inherentes a esta teoría y conduzca al ordenamiento de las alternativas de solución al problema de decisión.
2. La Teoría de Decisiones Multicriterio es muy rica en cuanto a la gran cantidad de trabajos producidos, en los que se explican los fundamentos de diversas metodologías para resolver problemas de toma de decisiones. Sin embargo en nuestro medio no se ha encontrado una forma efectiva para que la Universidad de Panamá, como institución de estudios superiores deseosa de estar a la vanguardia pueda adquirir este tipo de literatura. Considero que el esfuerzo que representa esta obra puede ser un elemento para cubrir en cierta forma esta necesidad. El programa de Maestría en Matemática debe capitalizar los recursos disponibles para que este recinto sea una fuente de material bibliográfico, tanto para docentes como para estudiantes.
3. El trabajo desarrollado en esta tesis debe ser puesto a la disposición de las Facultades de ciencias administrativas y de ciencias sociales para que sirva de guía para el tratamiento de problemas de toma de decisiones y particularmente los que se refieren a la promoción, selección y contratación de personal.

4. Exhortamos a los colegas del Departamento de Matemática a realizar los esfuerzos necesarios para que cursos sobre Métodos Cuantitativos sean introducidos en carreras de las ciencias administrativas y sociales, y puedan ser incorporados a los curriculum métodos matemáticos para el tratamiento de fenómenos propios de su especialidad.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Antún, Juan Pablo **TOMA DE DECISIONES CON CRITERIO MULTIPLE.** Seminario Matemáticas y Ciencias Sociales. México, 1989.
2. Barba-Romero, Sergio y Pomerol, Jean-Charles **DECISIONES MULTICRITERIO.** **Fundamentos Teóricos y Utilización Práctica.** Servicios de Publicaciones de la Universidad de Alcalá. España, 1997
3. Bellman, R. E. and Giertz, M. **ON THE ANALYTIC FORMALISM OF THE THEORY OF FUZZY SETS.** Inf. Sci., 1973.
4. Dubois, Didier y Prade, Henri **FUZZY SETS AND SYSTEMS.** Academic Press, Inc., New York, 1980
5. Fung, L. W and Fu, K. S. **AN AXIOMATIC APPROACH TO RATIONAL DECISION-MAKING IN A FUZZY ENVIRONMENT.** Academic Press. New York, 1975
6. Kaufmann, A. **INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS.** Editorial Continental, S.A.. México, 1977.
7. Hernández M., Jorge E. **FUZZY LOGIC.** **Fundamentos de Lógica Difusa.** Revista Electrónica & Computadores • CEKIT, 1997.

8. Hsiao, J. C. y Cleaver, D. S. **ADMINISTRACIÓN. APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.** 1ª Edición Editorial Limusa, México, 1987.
9. Makarov, I. M y otros. **THE THEORY OF CHOICE AND DECISION MAKING.** Mir Publisher, Moscow, 1987
10. Massan, Bryan H. **MULTI-CRITERIO DECISION MAKING TECHNIQUES IN PLANNING.** Pergamon Press, Canadá, 1988.
11. Mercado R., Ernesto **TÉCNICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES.** Editorial LIMUSA. México, 1991.
12. Rheault, Jean Paul **INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS DECISIONES CON APLICACIÓN A LA ADMINISTRACIÓN.** Editorial Limusa. México, 1997.
- 13 Roy, B. **CLASSEMENT ET CHOIX EN PRÉSENCE DE POINTS DE VUE MULTIPLES, LA MÉTHODE ELECTRE.** EDITORIAL R.I.R.O , 1968.

- 14 Schroeder, R.G **ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES. Toma de Decisiones en la Función de Operaciones.** 3ª Edición, Editorial McGraw–Hill.1994
15. Solow, D. y Mathur, K. **INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.** El Arte de la Toma de Decisiones Prentice Hall. 1996.
16. Thierauf, R. J. y Grosse, R. A. **TOMA DE DECISIONES POR MEDIO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.** Editorial Limusa, S.A. México, 1972
- 17 Wayne, W. **INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.** Aplicaciones y Algoritmos. 2ª Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.1994.