UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POST-GRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

ECUACION DE DIRAC EN UN CAMPO DE MINKOWSKI

POR:

RAMIRO GOMEZ PINZON

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el Grado de Maestro en Ciencias con Especialización en Matemática.

Panamá, República de Panamá

-1986-

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico con todo cariño a quienes tuvieron la suficiente paciencia para conmigo, y que en todo momento se constituyeron en apoyo y estímulo para que este trabajo fuese una realidad.

A mi madre María M. Pinzón,
A mi esposa Elsa Tejada de Gómez
A mis hijos Guaira, Ramiro, Irishabeb

Y a mis amigos Julio, Dixiana, José e Inés.

RAMIRO

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar en estas líneas mi más profundo y eterno agradecimiento a mi Profesor Asesor Dr. OSCAR VALDIVIA por sus atinados consejos, y sabias enseñanzas hasta culminar mis estudio con la presentación de este trabajo.

A los Profesores de mis cursos JORGE ROJO, AUGUSTO ARRIAGADA, JOSE DEL ROSARIO GARRIDO, JULIO ALBERTO VALLARINO, por sus esfuerzos y paciencia.

TABLA DE CONTENIDO

Página

Página

CAPITULO IV

ECUACION DE DIRAC

INTRODUCCION

Nuestra Tesis: "Ecuación de Dirac en un Campo de Minkowski" se encuentra enmarcada en el área de interacción de la Geometría Diferencial y Física Teórica, por esta razón damos una Reseña Histórica de esta interacción.

El elemento básico de la Geometría Diferencial es el concepto de Variedad Diferenciable que proviene históricamente de la Mecánica. El primer ejemplo de variedad diferenciable de dimensión infinita está dado en la Mecánica Analítica de Lagrange. En estos estudios sobre el espacio (espacio-tiempo) de configuración de los sistemas dinámicos aparece implícitamente el concepto de variedad diferenciable y otros conceptos geométricos tratados en términos de coordenadas locales.

Posteriormente Riemann en su célebre disertación inaugural en la Universidad de Gottingen: Sobre las Hipótesis que sirven de Fundamento a la Geometría, elaboró nuevos conceptos geométricos, algunos de los cuales estaban implícitos en los trabajos anteriores y así nació la geometría de los espacios de Riemann. El concepto de Tensor que es uno de los instrumentos esenciales de la geometría diferencial fue introducido por el Cristalógrafo Voigt. El análisis tensorial desarrollado por Cristoffel en el dominio de la matemática pura era formal, pero gracias a los trabajos de Ricci y Levi-Civita de 1900 se inician las aplicaciones a la dinámica clásica, Elasticidad y a la teoría de los medios anisotrópicos.

En la memoria de Ricci y Levi-Civita están incluidos los conceptos modernos de la geometría. Así por ejemplo del punto de vista de la Geometría Riemanniana y de las aplicaciones físicas, ya se encuentra perfectamente desarrollada gran parte de los conceptos fundamentales, y así es posible traducir la dinámica analítica del sistema mecánico en término de una geometría refinada. El estudio del movimiento de tal sistema conduce al estudio del movimiento de un punto en una variedad o espacio de Riemann donde la variedad es el espacio de configuración y la métrica está dada por la energía cinética.

La aparición de la teoría de la relatividad general dió impulso al desarrollo de la geometría diferencial, así por ejemplo permitió generalizar la condición definida positiva para un producto interno al concepto de no degenerada para transformaciones bilineales. Por otra parte Levi-Civita y simultáneamente Schouten descubrieron la noción de paralelismo en un espacio de Riemann.

Los físicos de la época de Levi-Civita estudiando el campo electromagnético construyeron la teoría de la relatividad restringida y se interesaron en el estudio del espacio-tiempo de Minkowski con su métrica indefinida. En el dominio de la teoría de la relatividad general, que es esencialmente una teoría relativista de la gravitación, no interviene en forma natural el campo electromagnético , sino artificialmente desde el exterior.

Por esta razón la física teórica trato de descubrir una teoría de campo unificado, iniciando con el desarrollo de una teoría que permitiera la unificación de los campos gravitacionales y electromagnético en un único hiper campo que contuviera una estructura geométrica para el universo.

Hermann Weyl desarrolló en 1919 el primer ensayo de esa tal teoría. En este trabajo de Weyl aparecen espacios que hoy conocemos como espacios de Weyl,y aparece el espacio de Eddington, que es el primer ejemplo de un espacio con conexión afín.

Todos estos nuevos conceptos impulsaron el desarrollo de la geometría diferencial, pero estas construcciones importantes aparecieron aisladas entre sí hasta que en 1922 Elie Cartan realiza una síntesis introduciendo los "espacios generalizados" que en la física matemática conduce al estudio de los Campos de Calibración.

En las investigaciones de Elie Cartan sobre las representaciones irreducibles del grupo ortogonal aparece un nuevo objeto geométrico diferente del tensor, este es el Concepto de Spinor que Dirac utiliza en la física teórica.

El concepto de espacio fibrado fue desarrollado sistemáticamente por Ehresmamn y por Whitney entre 1937-1939. Posteriormente utilizando estos trabajos se introdujeron las conexiones sobre un fibrado principal.

Hemos organizado la tesis en cuatro capítulos.

En el Capítulo I se revisan los conceptos de Grupo de Lie, Algebra de Lie, y se establece el teorema 4.2 que da un isomorfismo entre el álgebra de Lie constituido por todos los campos vectoriales invariante por la izquierda de un grupo de Lie con el corchete de Lie y el espacio tangente en el elemento neutro del grupo de Lie dado.

En el Capítulo II estudiamos el Haz Fibrado Principal, y demostramos el teorema 3.24 que establece que la aplicación exponencial del espacio tangente del grupo de Lie en el elemento neutro al grupo de Lie es un difeomorfismo local.

Se estudian también las conexiones asociadas a un Haz Fibrado Principal. En el teorema 4.5 se prueba que son equivalentes las tres definiciones introducidas.

En el Capítulo III se estudia el grupo de Lorentz, estableciendo en las proposiciones 2.3, 2.4 que el grupo de Lorentz es un grupo topológico con cuatro componentes conexas.

Luego en la proposición 2.9 se construye un homomorfismo Λ del grupo SL(2$\mathbb{C}$) de las matrices complejas de orden 2 con determinante uno sobre la Componente Conexa $\mathcal{L}_+^\uparrow$ del grupo topológico de Lorentz.

Se prueba que el conjunto $\mathbb{Q}(r,s)$ de los automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservan el producto escalar de índice (r,s) es un grupo de Lie, y se determina su álgebra de Lie.

En el teorema 4.17 se le asocia a una variedad diferenciable M un Haz Fibrado Principal $(F(M), \pi, M, \mathbb{Q}(r,s))$ con grupo estructural $\mathbb{Q}(r,s)$.

En el Teorema 4.23 se establece que existe una única conexión en F(M) con forma torsión nula. A está conexión llamamos conexión de Levi-Civita.

Finalmente en el Capítulo IV se estudian la variedad de Minkowski, estructura Spin, Lagrangiano. El Teorema 5.1 prueba que dada una estructura Spin λ de S(M) en $F_0(M)$ y una conexión de Levi-Civita θ sobre $F_0(M)$ esta asociada una conexión θ sobre S(M).

En el Teorema 6.2 se define una función L, del espacio 1-Jets $J(S(M),\mathbb{C}^4)$ en $\mathbb{R}$, y se prueba que es un Lagrangiano; luego se calcula su ecuación de Lagrange en el teorema 7.6. Finalmente se prueba que para un campo de electrones libres la ecuación de Lagrange se reduce a la ecuación de Dirac. (Teorema 8.5).

CAPITULO I

PRELIMINARES, GRUPO DE LIE Y SUS ALGEBRAS DE LIE

1.- GRUPOS DE LIE.

Definición 1.1:

Una variedad diferenciable G con una estructura de grupo "$\bullet$" es un grupo de Lie si y solo si las dos estructuras (la diferenciable y la de grupo) son compatibles.

Es decir la aplicación

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto g.h^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable de clase C^{∞}.

Proposición 1.2:

Sea G un grupo de Lie, entonces:

a) La aplicación $\tau: G \longrightarrow G$ dada por $\forall g \in G$, $\tau(g) = g^{-1}$ es diferenciable.

b) La aplicación $m: G\times G \longrightarrow G$ dada por $\forall (g,h) \in G\times G$, $m(g,h) = g\bullet h$ es diferenciable.

Demostración:

Diremos que τ es diferenciable si logramos expresarla como la composición de dos aplicaciones diferenciables; en efecto:

Como G es un grupo de Lie, entonces tiene un elemento neutro; sea $e \in G$ dicho elemento luego:

a) $$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\text{const x id.}} \{e\} \times G \subseteq G\times G \longrightarrow G \\ g &\xrightarrow{\text{dif.}} (e,g) \xrightarrow{\text{dif.}} e.g^{-1} = g^{-1} \end{aligned}$$

De la misma manera vemos que m es diferenciable, puesto que

b) $$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xrightarrow{id \times \tau} & G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \xrightarrow{dif.} & (g,h^{-1}) & \xrightarrow{dif.} & g \cdot h \end{array}$$

Proposición 1.3:

Sea G una variedad diferenciable, con estructura de grupo "$\cdot$" tal que valen a) y b) de la proposición 1. entonces G es un grupo de Lie.

Demostración:

Sabemos que las aplicaciones τ y m en a) y b) son diferenciables, luego veremos que la aplicación (*) es la composición de τ con m y por lo tanto G es un grupo de Lie. En efecto:

$$\begin{array}{ccccc} G\times G & \xrightarrow{id \times \tau} & G\times G & \xrightarrow{m} & G \\ (g,h) & \xrightarrow{dif.} & (g,h^{-1}) & \xrightarrow{dif.} & g \cdot h^{-1} \end{array}$$

Corolario 1.4:

Sea G una variedad diferenciable con estructura de grupo "$\cdot$" entonces G es un grupo de Lie si y solo sí las aplicaciones τ y m son diferenciables.

1.5 Ejemplos de Grupos de Lie.

5.a $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie respecto a la adición vectorial.

5.b $\mathbb{C}^* - \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es una variedad diferenciable $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo, además

$$\begin{array}{rcl} m: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (g,h) & \longmapsto & m(g,h) = g \cdot h \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & (g) = g^{-1} \end{array}$$

son diferenciables.

5.c $S' = \{ z\in \mathbb{C}^* / |z| = 1\}$ con la multiplicación inducida de $\mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie.

5.d $Gl(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable, introducimos una estructura de grupo (con la multiplicación de matrices). $(GL(n, \mathbb{R}),\bullet)$ es un grupo.

$$m: Gl(n, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$(A,B) \longmapsto m(A,B) = A\bullet B \text{ es diferenciable.}$$

$$\mathcal{T} : Gl(n, \mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n, \mathbb{R})$$

$$A \longmapsto \mathcal{T}(A) = A^{-1} \text{ es diferenciable.}$$

luego $Gl(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

5.e Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ es una variedad diferenciable. Introducimos una estructura de grupo compatible con la estructura diferenciable.

$$m: \mathbb{K}\times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$((s,t),(s_1,t_1)) \longmapsto m((s,t),(s_1,t_1))= (s.s_1,s.t_1+t)$$

luego $(\mathbb{K},\bullet)$ es un grupo cuyo elemento identidad es $(1,0)$, entonces $\mathbb{K}$ es un grupo de Lie. A este grupo llamamos el grupo de movimientos afines de $\mathbb{R}$.

5.f Sea $\mathbb{L} = Gl(n, \mathbb{R})\times \mathbb{R}^n$, en $\mathbb{L}$ definimos $m: \mathbb{L}\times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ dada por $m((A,v),(A_1,v_1)) = (A.A_1,Av_1+v)$, se comprueba que $(\mathbb{L},\bullet)$ es un grupo, y es compatible con la estructura de variedad. A este grupo, que es un grupo de Lie, lo llamamos grupo de movimientos afines de $\mathbb{R}^n$.

2.- <u>Traslación por la Izquierda (Derecha) de un Grupo de Lie G.</u>

Dado $a\in G$ definimos l_a, R_a: $G \longrightarrow G$ por:

$g\in G, l_a(g) = a.g$; $R_a(g) = ga$. A estas aplicaciones, l_a, R_a las llamamos traslaciones por la izquierda y por la derecha mediante $a\in G$ respectivamente.

Proposición 2.1:

Las aplicaciones l_a, R_a son difeomorfismos para todo $a \in G$.

Demostración:

1. Verificaremos que "l_a" es diferenciable, en efecto:

$$G \xrightarrow{\text{const x id.}} \{a\} \times G \subseteq G\times G \longrightarrow G$$

$$g \xrightarrow{\text{dif.}} (a,g) \xrightarrow{\text{dif.}} a.g = l_a(g)$$

2. Comprobemos que $l_{a^{-1}}$ es la inversa de l_a, en efecto:

$$(l_a o l_{a^{-1}})(g) = l_a(l_{a^{-1}})(g) = l_a(a^{-1}g) = a(a^{-1}g) = (aa^{-1})g = eg = g$$
$$= id_G,$$

$$(l_{a^{-1}} \circ l_a)(g) = l_{a^{-1}}(l_a(g)) = l_{a^{-1}}(ag) = a^{-1}(a,g) = (a^{-1}a)g = eg =$$
$$= g = id_G.$$

por lo tanto $l_{a^{-1}} = (l_a)^{-1}$

además $(l_a \circ l_{a^{-1}})(g) = g = id_G$ es diferenciable, por consiguiente l_a es difeomorfismo.

En forma analoga demostramos que R_a es diferenciable.

3.- ALGEBRA DE LIE SOBRE $\mathbb{R}$.

Un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, si existe una aplicación bilineal (llamada corchete de Lie).

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$
$$(X,Y) \longrightarrow [\ ,\ ](X,Y) = [X,Y]$$

tal que $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ se tiene.

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ antisimétrica.

2. $[[X,Y], Z] + [[Y,Z], X] + [[Z,X], Y] = 0$ identidad de Jacobi.

Observación 3.1:

Sea M una variedad diferenciable. Sabemos que el conjunto de todas las secciones del haz fibrado (TM,π,M) que denotamos con $\Gamma(M,TM)$ tiene estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.2:

La aplicación $[\,,\,] : \Gamma(M,TM) \times \Gamma(M,TM) \longrightarrow \Gamma(M,TM)$ definida por $\forall\, X,Y \in \Gamma(M,TM)$, $[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi.

Demostración:

$$\forall p \in M, \forall X,Y \in \Gamma(M,TM), \forall f \in C^\infty(M) \text{ tenemos que:}$$

1. $[\,,\,]$ es bilineal, esto es:

$$\begin{aligned}
[X+Y,Z]_p f &= (X+Y)_p(Zf) - Z_p((X+Y)f)\\
&= X_p(Zf) + Y_p(Zf) - Z_p(Xf) - Z_p(Yf)\\
&= X_p(Zf) - Z_p(Xf) + Y_p(Zf) - Z_p(Yf)\\
&= [X,Z]_p f + [Y,Z]_p f.
\end{aligned}$$

En forma análoga se demuestra para $[X,Y+Z]_p f$.

2. $[\,,\,]$ es antisimétrica; esto es:

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p f &= X_p(Yf) - Y_p(Xf)\\
&= -(Y_p(Xf) - X_p(Yf))\\
&= -[Y,X]_p f
\end{aligned}$$

3. $[\,,\,]$ satisface la identidad de Jacobi; esto es:

$$[[X,Y]\,,Z]_p f + [[Y,Z]\,,\,X]_p f + [[Z,X]\,,\,Y]_p\, f = 0$$

En efecto:

$$[[X,Y]\,,\,Z]_p f = [X,Y]_p(Xf) - Z_p([X,Y]f)$$

$$= X_p(Y(Zf)) - Y_p(X(Zf)) - Z_p([X,Y]\, f)$$

Pero tenemos que

$$([X,Y]\; f)(p) = [X,Y]_p\; f$$

$$= X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

$$= X(Yf)(p) - Y(Xf)(p)$$

$$= (X(Yf) - Y(Xf))(p)$$

luego

$[X,Y]\; f = X(Yf)-Y(Xf)$ y asi tenemos que

$Z_p([X,Y]f) = Z_p(X(Yf)-Y(Xf)) = Z_p(X(Yf))-Z_p(Y(Xf))$ de donde vemos que

$$[[X,Y\,,Z]_p f = X_p(Y(Zf))-Y_p(X(Zf))-Z_p(X(Yf))+Z_p(Y(Xf))$$

$$[[Y,Z],X]_p f = Y_p(Z(Xf))-Z_p(Y(Xf)) - X_p(Y(Zf)) + X_p(Z(Yf))$$

$$[[Z,X],Y]_p f = Z_p(X(Yf)) - X_p(Z(Yf)) - Y_p(Z(Xf)) + Y_p(X(Zf))$$

Ahora sumando tenemos.

$$X_p(Y_p(Zf)) - Y_p(X(Zf)) - Z_p(X(Yf)) + Z_p(Y(Xf)) + Y_p(Z(Xf))$$
$$-Z_p(Y(Xf)) - X_p(Y(Zf)) + X_p(Z(Yf)) + Z_p(X(Yf)) - X_p(Z(Yf))$$
$$-Y_p(Z(Xf)) + Y_p(X(Zf)) = 0$$

4.- CAMPOS VECTORIALES INVARIANTES POR LA IZQUIERDA.

Definición 4.1:

Un campo vectorial $X:G \longrightarrow TG$ (no necesariamente diferenciable) es invariante por la izquierda si y solo si para todo $a \in G$ se tiene que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "dl_a"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "l_a"] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo o sea $dl_a \circ X = X \circ l_a$

Teorema 4.2:

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de todos los campos invariantes por la izquierda, entonces:

a) $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y

$$\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$$

definida por $\alpha(x) = x_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, por consiguiente $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

b) Todo elemento de $\mathfrak{g}$ es diferenciable.

c) El corchete de Lie de todo par de elementos de $\mathfrak{g}$ también pertenece a $\mathfrak{g}$.

d) $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie de campos vectoriales es un álgebra de Lie.

Demostración:

a) Observemos que si tenemos un campo vectorial X invariante por la izquierda sobre G,($X \in \mathfrak{G}$). Además para cada $a,g \in G$.

$$X_{ag} = X(ag) = X(l_a(g)) = (X \circ l_a)(g) = (dl_a \circ X)(g) = dl_a(X(g)) = dl_a(X_g)$$

Ahora $\forall t \in \mathbb{R}$; $X,Y \in \mathfrak{G}$; $g \in G$ definimos

$$(X+Y)(g) = X(g) + Y(g)$$

$$(t.X)(g) = t(X(g))$$

Ahora veremos que (X+Y) es invariante por la izquierda esto es que:

$$\begin{aligned}(X+Y)(ag) &= X(ag) + Y(ag) = X(l_a(g)) + Y(l_a(g)) = (X \circ l_a)(g) + (Y \circ l_a)(g)\\ &= (dl_a \circ X)(g)) + (dl_a \circ Y)(g) = dl_a(X\,(g)) + dl_a(Y\,(g)) =\\ &= dl_a(X(g)) + Y(g))\\ &= dl_a(X+Y)(g).\end{aligned}$$

luego ($\mathfrak{G}$,+ ,•) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Probaremos ahora que α es un isomorfismo, o sea que

$$\alpha : \mathfrak{G} \longrightarrow T_eG$$

$$X \longmapsto \alpha(X) = X(e) \quad \text{es:}$$

1. Lineal.

En efecto $\forall X,Y \in \mathfrak{G}$, $\forall t,s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\alpha(tX + sY) &= (tX + sY)(e) = (tX)(e) + (sY)(e) = t(X(e)) + s(Y(e))\\ &= t\alpha(X) + s\alpha(Y).\end{aligned}$$

2. Inyectiva.

En efecto; sea $\alpha(X) = \alpha(Y)$, luego $\forall a \in G$

$$X(a) = X(a.e) = X(l_a(e)) = (X \circ l_a)(e) = (dl_a \circ X)(e) = dl_a(X(e)) = dl_a(Y(e))$$

$$= (dl_a \circ Y)(e) = (Y \circ l_a)(e) = Y(l_a(e)) = Y(a.e) = Y(a)$$

luego α es inyectiva.

3. Suryectiva.

Sabemos que $(dl_a) : T_eG \longrightarrow T_aG$ es lineal, dado que $l_a(e) = a.e = a$. De la observación de a) tenemos que:

Un campo vectorial $X:G \longrightarrow TG$ es invariante por la izquierda si y solo si $\forall a, g \in G$ se tiene que

$$X_{ag} = dl_a(X_g)$$

Ahora bien: Sea $U \in T_eG$ fijo, luego $\forall a \in G$

$$(dl_a)_e : T_eG \longrightarrow T_aG$$
$$u \rightsquigarrow (dl_a)(e)(u)$$

Definimos una aplicación $X:G \longrightarrow TG$ por

$$X(a) = (dl_a)(e)(u)$$

y veamos que X es un campo vectorial invariante por la izquierda; en efecto:

$$X(ag) = (dl_{ag})(e)(u) = d(l_a \circ l_g)(e)(u) = dl_a(dl_g(u)) = dl_a(X(g))$$

Ahora tenemos que $\alpha(X) = X(e) = (dl_e)(e)(u) = u$ por lo tanto α es suryectiva,. y así resulta α un isomorfismo luego $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

b) Para probar que $X \in \mathfrak{g}$ es diferenciable, hay que probar que
$\forall f \in C^{\infty}(G)$, $Xf \in C^{\infty}(G)$, en efecto:

Sea $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^{\infty}(G)$ luego $\forall a \in G$ tenemos que

$$(Xf)(a) = X(a)f = X(a.e)f = X_{ae}\, f = dl_a(X_e f) \overset{\text{def.}}{\underset{\text{dif.}}{=}} X_e(f \circ l_a).$$

Definimos ahora $\rho : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a \rightsquigarrow \rho(a) = X_e(f \circ l_a)$$

Demostremos que ρ es composición de tres funciones diferenciables.

Sean $\varphi : G \times G \longrightarrow G$

$$(a,g) \rightsquigarrow \varphi(a,g) = a \cdot g$$

$$i_e^1 : G \longrightarrow G \times G$$

$$a \rightsquigarrow i_e^1(a) = (a,e)$$

$$i_e^2 : G \longrightarrow G \times G$$

$$g \rightsquigarrow i_e^2(g) = (e,g)$$

Sea Y un C^{∞} campo vectorial sobre G, con la condición que $X(e) = Y(e)$, con Y podemos construir el campo vectorial $(0,Y)$, donde $(0,Y)$ es un C^{∞} campo vectorial sobre $G \times G$, dado por $(0,Y) : G \times G \longrightarrow G \times G$

$$(a,g) \rightsquigarrow (0,Y)(a,g) = (0(a), Y(g)).$$

Además tenemos que

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \varphi"'] & G \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

asi que el campo vectorial $(0,Y)$, actua sobre $(f \circ \varphi)$ y tenemos que
$(0,Y)(f \circ \varphi) \in C^{\infty}(G \times G)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_e^1", "\text{dif.}"'] \arrow[rr, bend right, "(\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi)\circ i_e^1", "\text{dif.}"'] & G\times G \arrow[r, "(\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi)", "\text{dif.}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

<u>Afirmamos</u>

$$((\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi)\circ i_e^1)(a) = \rho(a)$$

En efecto:

$$((\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi)\circ i_e^1)(a) = ((\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi))\, i_e^1(a) = (\mathcal{O},Y)(f\circ\varphi)(a,e)$$

$$= (\mathcal{O},Y)_{(a,e)}(f\circ\varphi) = \mathcal{O}_a(f\circ\varphi\circ i_e^1)+Y_e(f\circ\varphi\circ i_a^2)$$

$$= Y_e(f\circ\varphi\circ i_a^2) = X_e(f\circ\varphi\circ i_a^2);$$

$$\{(\varphi\circ i_a^2)(g) = \varphi(a,g) = a.g = l_a(g)\}$$

$$= X_e(f\circ l_a)$$

$$= \rho(a)$$

luego $Xf\in C^{\infty}(G)$.

c) Recordemos que $\forall g\in G$, $\forall f\in C^{\infty}(G)$, X, Y campos vectoriales sobre G tenemos que.

$$[X,Y]_g\, f = X_g(Yf) - Y_g(Xf)$$

$$\begin{tikzcd} T_gG\subseteq TG \arrow[r, "dl_a"] & TG & \\ a,g\in G \arrow[u, "X{,}Y"', "{[X,Y]}"] \arrow[r, "l_a"] & G \arrow[u, "X{,}Y"', "{[X,Y]}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

además la regla de cálculo

$((dl_a \circ Y)f)(g) = Y_g(f \circ l_a)$

$$Yf: G \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \longmapsto Yf(g) = Y_g f$$

Ahora bien cuando X,Y son campos vectoriales invariantes por la izquierda, tenemos que ver también que el corchete de Lie es un campo vectorial invariante por la izquierda, esto es que:

$$dl_a \circ [X,Y] = [X,Y] \circ l_a$$

<u>En efecto</u>:

$$((dl_a \circ [X,Y])f)(g) = (dl_a \circ [X,Y])_g f$$

$$(dl_a \circ [X,Y]_g)f = (dl_a)([X,Y]_g)f \overset{\text{def. dif.}}{=} [X,Y]_g(f \circ l_a)$$

$$= X_g(Y(f \circ l_a)) - Y_g(X(f \circ l_a))$$

$$= X_g((dl_a \circ Y)f) - Y_g((dl_a \circ X)f)$$

como $((dl_a \circ Y)f)_g = (Y \circ l_a)f$ y además $(Yf \circ l_a)(g) = Y_{ag}f$

$$= (dl_a\, Y)f = ((Y \circ l_a)f)(g) \text{ luego}$$

$$= (Yf \circ l_a) = (Y \circ l_a)f \quad \text{y por lo tanto}$$

$$X_g(dl_a \circ Y)f - Y_g(dl_a \circ X)f = X_g(Yf \circ l_a) - Y_g(Xf \circ l_a)$$

$$= ((dl_a \circ X)Yf)(g) - ((dl_a \circ Y)Xf)(g)$$

$$= dl_a(X_g(Yf)) - dl_a(Y_g(Xf))$$

$$= X_{ag}(Yf) - Y_{ag}(Xf)$$

$$= [X,Y]_{ag} f$$

$$= [X,Y] \circ l_a$$

d) $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ es un álgebra de Lie.

En efecto:

1. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $[X,Y] \in \mathfrak{g}$, esto es por parte (c).

2. $[\,,\,]$ es antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi esto es, por la proposición 3.2 por lo tanto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.

<u>Definición 4.3:</u>

Sea G un grupo de Lie, al conjunto $\mathfrak{g}$ de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda que por el teorema 4.2 anterior tiene estructura de álgebra de Lie, llamamos álgebra de Lie del grupo G.

<u>Corolario 4.4:</u>

El espacio tangente a G en el elemento identidad "e", T_eG, tiene estructura de álgebra de Lie inducida por el isomorfismo α.

<u>Demostración:</u>

Puesto que $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, dado por $\alpha(x) = x(e)$ y además sabemos que $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ es un álgebra de Lie.

Queremos dotar de estructura de álgebra a T_eG de manera que α sea un isomorfismo de algebras.

Esto es:

Sean $X(e)$, $Y(e) \in T_eG$, luego

$$[X(e),\, Y(e)] \overset{\text{def.}}{=} \alpha([X,Y]) = [X,Y](e).$$

además,

1. $[\,,\,]$ en T_eG es bilineal, o sea:

$$[X(e) + Y(e),\ Z(e)] = \alpha([X+Y, Z]) = \alpha([X,Z] + [Y,Z]) = \alpha([X,Z]) + \alpha([Y,Z])$$
$$= [X(e),\ Z(e)] + [Y(e),\ Z(e)]$$

2. <u>Antisimétrica</u>.

$$[X(e),\ Y(e)] = \alpha([X,Y]) = \alpha(-[Y,X]) = -\alpha([Y,X]) = -[Y(e), X(e)]$$

3. <u>Identidad de Jacobi</u>.

$$[[X(e),\ Y(e)],\ Z(e)] + [[Y(e),\ Z(e)],\ X(e)] + [[Z(e),\ X(e)],\ Y(e)] = 0$$

3.a $[[X(e),\ Y(e)],\ Z(e)] = \alpha([[X,Y], Z]) = \alpha\{(X\circ Y - Y\circ X)\circ Z - Z\circ(X\circ Y - Y\circ X)\} = \alpha(X\circ Y\circ Z - Y\circ X\circ Z - Z\circ X\circ Y + Z\circ Y\circ X)$

$= \alpha(X\circ Y\circ Z) - \alpha(Y\circ X\circ Z) - \alpha(Z\circ X\circ Y) + \alpha(Z\circ Y\circ X).$

3.b $[[Y(e),\ Z(e)],\ X(e)] = \alpha([[Y,Z], X]) = \alpha([Y,Z]\circ X - X\circ [Y,Z])$

$= \alpha\{(Y\circ Z - Z\circ Y)\circ X - X\circ(Y\circ Z - Z\circ Y)\}$

$= \alpha(Y\circ Z\circ X - Z\circ Y\circ X - X\circ Y\circ Z + X\circ Z\circ Y)$

$= \alpha(Y\circ Z\circ X) - \alpha(Z\circ Y\circ X) - \alpha(X\circ Y\circ Z) + \alpha(X\circ Z\circ Y)$

3.c $[[Z(e),\ X(e)],\ Y(e)] = \alpha([[Z,X], Y]) = \alpha([Z,X]\circ Y - Y\circ[Z,X])$

$= \alpha\{(Z\circ X - X\circ Z)\circ Y - Y\circ(Z\circ X - X\circ Z)\}$

$= \alpha(Z\circ X\circ Y) - \alpha(X\circ Z\circ Y) - \alpha(Y\circ Z\circ X) + \alpha(Y\circ X\circ Z)$

así

$$\alpha(X\circ Y\circ Z) - \alpha(Y\circ X\circ Z) - \alpha(Z\circ X\circ Y) + \alpha(Z\circ Y\circ X) + \alpha(Y\circ Z\circ X) - \alpha(Z\circ Y\circ X)$$
$$-\alpha(X\circ Y\circ Z) + \alpha(X\circ Z\circ Y) + \alpha(Z\circ X\circ Y) - \alpha(X\circ Z\circ Y) - \alpha(Y\circ Z\circ X) + \alpha(Y\circ X\circ Z) = 0$$

<u>Observación 4.5</u>:

Al álgebra de Lie dada por el corolario 4.4 llamamos también álgebra de Lie del grupo G.

<u>Observación 4.6</u>.

Todo espacio vectorial real V de dimensión finita admite en forma natu ral una estructura diferenciable.

En efecto; si $\{e_i\}$ es una base de V, entonces los elementos de la base dual $\{\pi_i\}$ son las funciones coordenadas de un sistema global de coordenadas sobre V.

Tal sistema global determina una estructura diferenciable sobre V.

Para cada $p \in V$, existe una identificación natural del espacio tangente T_pV con V mediante

$$\sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial \pi_i}\right|_p \longrightarrow \sum a_i e_i$$

si $\sigma(t)$ es una curva diferenciable en V entonces

$$\dot{\sigma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0}$$

5.- <u>EJEMPLOS DE GRUPOS DE LIE Y SUS ALGEBRAS DE LIE</u>.

5.1 $(\mathbb{R},+)$ es un grupo de Lie.

Los campos vectoriales invariantes por la izquierda, son los campos vectoriales constantes $\left\{ \lambda\left(\frac{d}{d\pi}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. El corchete de Lie de dos de tales campos vectoriales es $\emptyset$.

5.2 "Grupo lineal General". El conjunto $M(n, \mathbb{R})$ de todas las nxn matrices reales es un espacio vectorial de dimensión n^2, con suma y multiplicación por escalares. Definiendo $[A,B] = AB-BA$. $M(n, \mathbb{R})$ es un álgebra de Lie.

El grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R})$ tiene su estructura diferenciable como subconjunto abierto de $M(n, \mathbb{R})$ donde la función determinante no se anula, y es un grupo de Lie bajo la multiplicación de matrices.

Sea X_{ij} la función coordenada global sobre $M(n, \mathbb{R})$ que asocia a cada matriz su ij-elemento. Entonces si $\sigma, \tau \in GL(n, \mathbb{R})$, $X_{ij}(\sigma, \tau^{-1})$ es una función racional de $\{X_{kl}(\sigma)\}$ y $\{X_{kl}(\tau)\}$ con denominador diferente de cero, lo que demuestra que la aplicación $(\sigma,\tau) \longrightarrow \sigma\tau^{-1}$ es C^{∞}.

Ahora sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$. Sea $\alpha : T_eM(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ la identificación canonica del espacio tangente a $M(m, \mathbb{R})$ en la matriz identidad "e" con $M(n, \mathbb{R})$. Luego para $v \in T_eM(n, \mathbb{R})$:

$$\text{i)} \quad \alpha(v)_{ij} = v(X_{ij})$$

Luego como $T_eGl(n, \mathbb{R}) = T_eM(n, \mathbb{R})$ tenemos una aplicación natural $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ definida por

$$\text{2i)} \quad \beta(X) = \alpha((X(e))$$

Demostraremos que β es un isomorfismo de álgebras de Lie y por tanto podemos considerar $M(n, \mathbb{R})$ como el álgebra de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$, claramente β es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sólo basta demostrar que

$$\beta([X,Y]) = [\beta(X), \beta(Y)] \qquad \forall\, X,Y \in \mathcal{G}$$

Ahora

$$(X_{ij} \circ l_{\sigma})(\tau) = X_{ij}(\sigma\tau) = \sum_k X_{ik}(\sigma)\, X_{kj}(\tau)$$

como Y es un campo vectorial invariante por la izquierda

$$\begin{aligned}(*) \quad Y(X_{ij})(\sigma) &= dl_{\sigma}(Y(e))(X_{ij}) = Y(e)(X_{ij} \circ l_{\sigma}) \\ &= \sum_k X_{ik}(\sigma)\, Y(e)(X_{kj}) = \sum_k X_{ik}(\sigma)\alpha(Y(e))_{kj} \\ &= \sum_k X_{ik}(\sigma)\, \beta(Y)_{kj}\end{aligned}$$

Utilizando (*) calculamos la componente ij de $\beta([X,Y])$

$$\beta([X,Y])_{ij} = [X,Y](e)(X_{ij}) = X(e)(Y(X_{ij})) - Y(e)(X(X_{ij}))$$

$$= \sum_k \left\{ X(e)(X_{ik})\,\beta(Y)_{kj} - Y(e)(X_{ik})\,\beta(X)_{kj} \right\}$$

$$= \sum_k \left\{ \beta(X)_{ik}\,\beta(Y)_{kj} - \beta(Y)_{ik}\,\beta(X)_{kj} \right\}$$

$$= [\beta(X), \beta(Y)]_{ij}$$

Por consiguiente, β es un isomorfismo de álgebras de Lie.

CAPITULO II

HAZ FIBRADO PRINCIPAL Y CONEXIONES

1.- HAZ FIBRADO PRINCIPAL.

Acción de un grupo de Lie sobre una variedad.

Definición 1.1:

Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie y M^n una variedad diferenciable.

Llamaremos acción por la izquierda, del grupo de Lie G sobre la variedad M^n a toda aplicación diferenciable

$$\phi : G\times M \longrightarrow M$$

tal que verifica:

i) $\forall m \in M$, si $e \in G$ es el elemento neutro entonces $\phi(e,m) = m$.

ii) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall m \in M$ se verifica: $\phi(g_1,\phi(g_2,m)) = \phi(g_1 g_2,m)$ similarmente definimos la acción por la derecha del grupo de Lie G sobre la variedad M^n por

$$\phi: M\times G \longrightarrow M$$

tal que verifica i) y ii) por la derecha.

Observación 1.2:

En lo sucesivo denotaremos $\phi(g,m)$ por $g\cdot m$. Y la acción por la derecha como $\phi(m,g)$ por $m\cdot g$.

Proposición 1.3:

Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie, M^n una variedad diferenciable y $\phi: G\times M \longrightarrow M$ una acción de G sobre M. Entonces $\forall g \in G$ la aplicación $\phi_g: M \longrightarrow M$ dada por $\forall m \in M$, $\phi_g(m) = \phi(g,m) = g.m$ es un difeomorfismo de M.

Demostración:

a) ϕ_g es diferenciable (fijado $g \in G$)

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{J} & \{g\} \times M \subseteq G{\times}M & \longrightarrow & M \\ m & \longmapsto & J(m) = (g,m) & \longmapsto & \phi(J(m)) = \phi(g,m) = g.m \end{array}$$

asi $\phi_g = \phi \circ J$ es diferenciable.

b) $\underline{\phi_g \text{ es biyectiva.}}$

En efecto:

$$(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g)(m) = \phi_{g^{-1}}(\phi_g(m)) = \phi_{g^{-1}}(g.m) = g^{-1}.(g.m) = g^{-1}g.m$$

$$= e.m = m$$

Además

$$(\phi_g \circ \phi_{g^{-1}})(m) = \phi_g(g^{-1}.m) = g.(g^{-1}.m) = gg^{-1}.m = e.m = m$$

luego $\phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ y por tanto ϕ_g es biyectiva.

c) $\underline{\phi_g^{-1} \text{ es diferenciable.}}$

Porque $\phi_{g^{-1}}$ es diferenciable por la parte a).

<u>Observación 1.4:</u>

$\{\phi_g\}_{g \in G}$ es una familia de difeomorfismo de M.

<u>Definición 1.5</u>:

Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Para cada $m \in M$ definimos $\gamma_m : G \longrightarrow M$ por $\gamma_m(g) = \phi(g.m) = g.m$. Se tiene que $\gamma_m(e) = m$.

<u>Proposición 1.6:</u>

Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie, M^n una variedad diferenciable y $\phi: G{\times}M \longrightarrow M$ una acción de $G \longrightarrow M$. Entonces $\forall m \in M$ la aplicación $\gamma_m : G \longrightarrow M$ dada por $\forall g \in G$, $\gamma_m(g) = \phi(g,m)$ es diferenciable.

Demostración:

$$G \xrightarrow{\tau} G\times\{m\} \subseteq G\times M \xrightarrow{\phi} M$$

$$g \xrightarrow{dif} \tau(g) = (g,m) \xrightarrow{dif} \phi(\tau(g)) = \phi(g,m) = \gamma_m(g)$$

luego $\phi \circ \tau = \gamma_m : G \longrightarrow M$ es diferenciable.

Observación 1.7:

$\{\gamma_m\}_{m\in M}$ es una familia de aplicaciones diferenciables de G en M.

ORBITA DE UN PUNTO.

Definición 1.8:

Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie M^n una variedad diferenciable y $\phi: G\times M \longrightarrow M$ una acción de G sobre M. Para $m\in M$ definimos la orbita de G que pasa por m como el conjunto.

$$\gamma_m(G) = \left\{ m' \in M \;/\; \exists g \in G \text{ y } m' = g\cdot m \right\}$$

FIBRA SOBRE UN PUNTO.

Definición 1.9:

Sean P y M variedades diferenciables, π una aplicación diferenciable de P sobre M.

Llamaremos fibra de $m\in M$ en P al conjunto

$$\pi^{-1}(m) = \left\{ p \in P \;/\; \pi(p) = m \right\}$$

ACCION LIBRE DE UN GRUPO DE LIE SOBRE UNA VARIEDAD.

Definición 1.10:

Sea $(G,\cdot)$ un grupo de Lie, M^n una variedad diferenciable y

ϕ: $G\times M \longrightarrow M$ una acción. Diremos que la acción ϕ: $G\times M \longrightarrow M$ es una acción libre de G sobre M si se verifica que

si $\phi(g,m) = m$ para algún $g \in G$, $m \in M$, entonces $g = e$.

HAZ FIBRADO PRINCIPAL.

Definición 1.11:

Sean P, M dos variedades diferenciables, $(G, \cdot)$ un grupo de Lie y π: $P \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable y suryectiva. A la cuaterna (P, π, M, G) lo llamaremos haz fibrado principal (H,F,P) si y solo si se verifica:

a) G actua libremente y diferenciablemente a Derecha sobre P, esto es, existe una acción libre ϕ: $P\times G \longrightarrow P$, o sea $\left\{\phi_g : g \in G\right\}$ es una familia de difeomorfismos de P.

b) $\forall p \in P, \pi^{-1}(\pi(p)) = \mathcal{J}_p(G)$, o sea, la fibra sobre $\pi(p)$ es la órbita de G que pasa por p.

c) $\forall m \in M$ existe una vecindad abierta U de m y un difeomorfismo $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times G$ tal que $\forall p \in \pi^{-1}(U)$; $T_u(p)=(\pi(p), S_u(p))$, esto es $T_u = \pi \times S_u$. Donde la aplicación $S_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tiene la propiedad $S_u(p.g) = S_u(p)g$, $\forall p \in \pi^{-1}(U), g \in G$.

Observación 1.12:

Al difeomorfismo T_u de la definición anterior lo denominamos Trivialización local del H.F.P. ó Calibrador del H.F.P.

Proposición 1.13:

Sea (P, π, M, G) un H.F.P. y $m \in M$. Entonces la aplicación α_p: $G \longrightarrow \pi^{-1}(m)$ dada por $\alpha_p(g) = p.g$ para cada $p \in \pi^{-1}(m)$ y $\forall g \in G$

es un difeomorfismo.

Demostración:

1) α_p es diferenciable.

Basta recordar que $\forall p \in P$, $\alpha_p : G \longrightarrow P$ dada por $\alpha_p(g) = p.g$ $\forall g \in G$ es diferenciable, luego en partícular $\forall p \in \pi^{-1}(m) \subseteq P$, $\gamma_p = \alpha_p : G \longrightarrow \pi^{-1}(m) \subseteq P$ es diferenciable.

2) α_p es suryectiva:

Sea $p' \in \pi^{-1}(m) = \pi^{-1}(\pi(p)) = \gamma_p = \{p.g \ / \ g \in G\}$ entonces $\exists g' \in G$ tal que $p.g' = p'$ luego $\alpha_p(g') = p'$ asi α_p es suryectiva.

3) α_p es Inyectiva.

$$
\begin{aligned}
\alpha_p(g) = \alpha_p(g') &\Longrightarrow p.g = p.g' \\
&\Longrightarrow (p.g).g^{-1} = (p.g').g^{-1} \\
&\Longrightarrow p.gg^{-1} = p.g'g^{-1} \\
&\Longrightarrow p.e = p.g'g^{-1} \\
&\Longrightarrow e = g'g^{-1} \\
&\Longrightarrow g = g^{-1}
\end{aligned}
$$

4) Sea $\beta : \pi^{-1}(m) \longrightarrow G$ la aplicación dada por

$\beta(p.g) = g$ luego

$\alpha_p \circ \beta = id_{\pi^{-1}(m)}$; $\beta \circ \alpha_p = id_G$, donde

$(\alpha_p \circ \beta)(p.g) = \alpha_p(\beta(p.g)) = \alpha_p(g) = p.g$

$(\beta \circ \alpha_p)(g) = \beta(\alpha_p(g)) = \beta(p.g) = g.$

luego β es la inversa de α_p, y la denotamos $\beta = \alpha_p^{-1}$. Además α_p^{-1} es diferenciable.

Observación 1.14:

Este difeomorfismo no es natural pues depende de p y todas las fibras $\pi^{-1}(x)$ son difeomorficas a G, pero no hay una identificación canónica de $\pi^{-1}(x)$ con G y por lo tanto no hay una estructura natural de grupo sobre $\pi^{-1}(x)$.

Proposición 1.15:

Sean, N una variedad diferenciable, G un grupo de Lie, $\pi_1 : N\times G \longrightarrow N$ dada por $\pi_1(n,g) = n \ \forall (n,g) \in N\times G$ y $\phi : (N\times G)\times G \longrightarrow N\times G$ dada por $\forall ((n,g),g') \in (N\times G)\times G$, $\phi((n,g),g') = (n,gg')$, entonces $(N\times G, \pi_1, N, G)$ es un haz fibrado principal.

Demostración:

$\pi_1 : N\times G \longrightarrow N$ por ser una proyección entre variedades diferenciables es Suryectiva y diferenciable.

a) ϕ es una acción libre de G sobre NxG.

i) Sea $(n,g) \in N\times G$ y $e \in G$ su elemento neutro, entonces

$$\phi((n,g),e) = (n,ge) - (n,g).$$

ii) Sean $In,g) \in N\times G$ y $g_1, g_2 \in G$ entonces

$$\phi(\phi((n,g),g_2),g_1) - \phi((n,gg_2),g_1) = (n,(gg_2)g_1)$$
$$= (n,g(g_1g_2)) \quad = \phi((n,g),g_1g_2)$$

iii) Supongamos $g' \in G$ y $(n,g) \in N\times G$ tales que

$\phi((n,g),g') = (n,g)$ entonces

$\phi((n,g),g') = (n,gg') = (n,g)$ luego $gg' = g$ con lo cual

$$g' = e$$

iv) Puesto que $\phi = (I_n \circ \pi_1 \times \bullet \circ \pi_2)$, porque

$(I_n \circ \pi_1 \times \bullet \circ \pi_2): N \times (G \times G) \longrightarrow N \times G$ dada por

$\forall (n,(g,g')) \in N \times (G \times G)$; $(I_n \circ \pi_1 \times \bullet \circ \pi_2)(n,(g,g')) = (n,gg')$

entonces $\phi: (N \times G) \times G \longrightarrow N \times G$ es diferenciable.

b) $\underline{\forall (n,g) \in N \times G,\ \pi^{-1}(\pi_1(n,g)) = \gamma_{(n,g)}}$

Sea $(n,g) \in N \times G$ entonces $\pi^{-1}(\pi_1(n,g)) = \pi^{-1}(n) = \{n\} \times G$

por otro lado

$$\gamma_{(n,g)} = \{(n',g') \in N \times G \,/\, \exists g_1 \in G \text{ y } \phi((n,g),g_1) = (n',g')\}$$

$$= \{(n',g') \in N \times G \,/\, \exists g_1 \in G \text{ y } (n,gg_1) = (n',g')\}$$

$$= \{(n',g') \in N \times G \,/\, \exists g_1 \in G : gg_1 = g' \text{ y } n = n'\}$$

$= \{n\} \times G$ luego $\forall (n,g) \in N \times G$, $\pi^{-1}(\pi(n,g)) = \gamma_{(n,g)}$

c) Sea $n \in N$, como N es una variedad diferenciable, existe un abierto tal que $n \in U$.

Consideremos $\pi_1^{-1}(U) = U \times G$ y definimos

$S_u: U \times G \longrightarrow G$ por $S_u(n,g) = g$, $\forall (n,g) \in U \times G$

observemos que $S_u((n',g').g) = S_u(n',gg') = gg' = S_u((n',g'),g)$

Ahora definimos $T_u: U \times G = \pi_1^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ dada por

$T_u(n',g) = (\pi_1(n',g), S_u(n',g)) = (n'g)$ $\forall (n',g) \in U \times G$

dado que $T_u = I_{N \times G / U \times G}$ tenemos que

$T_u : U \times G \longrightarrow U \times G$ es un difeomorfismo.

FUNCIONES DE TRANSICION.

Definición 1.16:

Sea (P,π,M,G) un haz fibrado principal y $T_u:\pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times G$, $T_v:\pi^{-1}(V) \longrightarrow V\times G$ dos trivializaciones locales con $U\cap V\neq\emptyset$. Definimos la función de transición de T_u a T_v que denotamos por g_{uv} como la aplicación $g_{uv} : U\cap V \longrightarrow G$ dada por

$g_{uv}(m) = S_u(p).\ S_v(p)^{-1}$ $\forall\, m\in U\cap V$ y algún $p\in\pi^{-1}(m)$.

Proposición 1.17:

La aplicación g_{uv}: $U\cap V \longrightarrow G$ anterior está bien definida.

Demostración:

Mostraremos que $g_{uv}(m)$, $\forall m\in U\cap V$ es independiente del elemento escogido en $\pi^{-1}(m)$ esto es: Sean $p,p'\in\pi^{-1}(m)$, puesto que $\pi^{-1}(m) = \gamma_p(G) = \gamma_{p'}(G)$, y $p'\in\gamma_p(G)$, existe $g'\in G$ tal que $p.g' = p'$ luego

$$
\begin{aligned}
g_{uv}(m) &= S_u(p')\ S_v(p')^{-1} \\
&= S_u(p.g')\ S_v(p.g')^{-1} \\
&= S_u(p)\ g'(S_v(p)g')^{-1} \\
&= S_u(p)\ g'g'^{-1}S_v(p)^{-1} \\
&= S_u(p)\ e\ S_v(p)^{-1} \\
&= S_u(p)\ S_v(p)^{-1}
\end{aligned}
$$

Proposición 1.18:

Sea $(P,\pi,\ M,\ G)$ un H.F.P $T_u: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times G$. $T_v:\pi^{-1}(V) \longrightarrow V\times G$, $T_w:\pi^{-1}(W) \longrightarrow W\times G$ Trivializaciones locales del H.F.P. con $U\cap V\cap W\neq\emptyset$.

Entonces:

1- $g_{uu}(m) = e \qquad \forall m \in U$

2- $g_{uv}(m) = g_{vu}(m)^{-1} \quad \forall m \in U\cap V$

3- $g_{uv}(m)\ g_{vw}(m)\ g_{wu}(m) = e \quad \forall m \in U\cap V\cap W$

4- $g_{uv}(m)\ g_{vw}(m) = g_{uw}(m) \ \forall m \in U\cap V\cap W$

Demostración:

1-) Sea $m\in U$ y $p\in \pi^{-1}(m)$ entonces

$$g_{uu}(m) = S_u(p)\ S_u(p)^{-1} = e$$

2-) Sea $m\in U\cap V$ y $p\in\pi^{-1}(m)$ entonces

$$\left[g_{uv}(m)\right]^{-1} = \left[S_u(p)\ S_v(p)^{-1}\right]^{-1} = S_v(p)\ S_u(p)^{-1} = g_{vu}(m)$$

3-) Sea $m\in U\cap V\cap W$ y $p\in\pi^{-1}(m)$ entonces

$$g_{uv}(m)\ g_{vw}(m)\ g_{wu}(m) = S_u(p)\ S_v(p)^{-1}\ S_v(p)\ S_w(p)^{-1}\ S_w(p)\ S_u(p)^{-1} = e$$

4-) Sea $m \in U\cap V\cap W$ y $p\in\pi^{-1}(m)$ entonces

$$g_{uv}(m)\ g_{vw}(m) = S_u(p)\ S_v(p)^{-1}\ S_v(p)\ S_w(p)^{-1} = S_u(p)\ S_w(p)^{-1} = g_{uw}(m)$$

Observación 1.19:

La propiedad 4-) se deduce de las propiedades 3-) y 2-).

Proposición 1.20:

Sea (P, π, M, G) un H.F.P. y $\{U_i\}_{i\in J}$ un cubrimiento abierto de M tal que $\pi^{-1}(U_i)$ es difeomorfa a $U_i\times G$.

En la unión $\bigsqcup_{i\in J} U_i\times G$ la relación binaria $\sim$ dada por $(m,g)\sim(m,g')$ sí y solo sí $\exists$ una función de transición $g_{ij}: U_i\times U_j \longrightarrow G$ tal que $g = g_{ij}(m)g'$, es una relación de equivalencia.

Demostración:

i) Puesto que $g = g.e = eg\ \forall g \in G$ y como $e = g_{ii}(m)$, entonces $g = g_{ii}(m)g$ con lo cual $(m,g) \sim (m,g)$ y asi $\sim$ es reflexiva.

ii) Supongamos que $(m,g) \sim (m,g')$, entonces existe $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow G$ tal que $g = g_{ij}(m)g'$ luego $g_{ij}(m)^{-1}g = g'$ de donde $g_{ji}(m)g = g'$ y así $(m,g') \sim (m,g)$ con lo cual $\sim$ es simétrica.

iii) Supongamos que $(m,g) \sim (m,g')$ y $(m,g') \sim (m,g'')$ entonces existen $g_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow G$ y $g_{jk}: U_j \cap U_k \longrightarrow G$.
tal que $g = g_{ij}(m)g' \wedge g' = g_{jk}(m)g''$ luego
$g = g_{ij}(m)\, g_{jk}(m)g'' = g_{ik}(m)g''$ con lo cual $(m,g) \sim (m,g'')$ y así $\sim$ es transitiva.

2.- SECCIONES DE UN HAZ FIBRADO PRINCIPAL.

SECCION LOCAL.

Definición 2.1:

Sea (P, π, M, G) un H.F.P. con grupo de Lie G. Una aplicación $\sigma: U \longrightarrow P$ donde $U \subseteq M$ es abierto y tal que $\pi \circ \sigma = I_u$, la llamamos una sección local.

TRIVIALIZACION GLOBAL.

Definición 2.2:

Sea (P, π, M, G) un H.F.P.

Una trivialización local $T_u: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ es global si y solo si $U = M$ y la denotamos con $T_u : P \longrightarrow M \times G$.

Un haz fibrado principal es trivial si y solo si existe una trivialización global T_u.

Proposición 2.3:

Sea (P,Π, M, G) un H.F.P. Entonces existe una biyección entre el conjunto de las secciones locales y el conjunto de las trivializaciones locales.

En efecto: Dada una sección local $\sigma : U \longrightarrow P$, observamos que para $m \in U$, $\sigma(m) \in \Pi^{-1}(m)$, porque $\Pi(\sigma(m)) = (\Pi \circ \sigma)(m) = I_u(m) = m$.

Luego por la proposición 1.13 existe un difeomorfismo $\phi_{\sigma(m)}$ de G sobre $\Pi^{-1}(m)$ que identifica el grupo G con la fibra $\Pi^{-1}(m)$.

De esta manera para cada $p \in \Pi^{-1}(m)$, $\exists ! g_p \in G$ tal que $\phi_{\sigma(m)}(g_p) = p$ o equivalentemente, $g_p = \phi^{-1}_{\sigma(m)}(p)$.

Definimos ahora $T_u : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow UxG$ por

$T_u(p) = (\Pi(p), \phi^{-1}_{\sigma(m)}(p)) = (\Pi(p), \phi^{-1}_{\sigma(\Pi(p))}(p)), \forall p \in \Pi^{-1}(U)$

observemos que $T_u : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow UxG$ es diferenciable.

Por otro lado definimos $\beta : UxG \longrightarrow \Pi^{-1}(U)$ por

$\beta(m,g) = \phi_{\sigma(m)}(g)$ $\forall (m,g) \in UxG$, β es diferenciable.

Verifiquemos que $\beta \circ T_u = I_{\Pi^{-1}(u)}$ y $T_u \circ \beta = I_{UxG}$.

En efecto:

Si $p \in \Pi^{-1}(U)$ entonces

$$(\beta \circ T_u)(p) = \beta(T_u(p)) = \beta(\Pi(p), \phi^{-1}_{\sigma(m)}(p)) = \sigma(\Pi(p)).\phi^{-1}_{\sigma(\Pi(p))}(p)$$

$$= \phi_{\sigma(\Pi(p))}(\phi^{-1}_{\sigma(\Pi(p))}(p)) = p = I_{\Pi^{-1}(u)}(p).$$

Por otro lado si $(m,g) \in UxG$ tendremos

$$\begin{aligned}(T_u \circ \beta)(m,g) &= T_u(\beta(m,g))\\ &= T_u(\phi_{\sigma(m)}(g))\\ &= (\pi(\phi_{\sigma(m)}(g)),\ \phi^{-1}_{\sigma(\pi(\phi_{\sigma(m)}(g)))}\phi_{\sigma(m)}(g))\\ &= (m,\ \phi^{-1}_{\sigma(m)}\ \phi_{\sigma(m)}(g))\\ &= (m,g) = I_{U\times G}(m,g)\end{aligned}$$

Luego T_u es un difeomorfismo.

Verifiquemos finalmente que $\phi^{-1}_{\sigma\circ\pi}:\pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tiene la propiedad requerida.

En efecto:

Si $p'.g' \in \pi^{-1}(m) \subseteq \pi^{-1}(U)$ entonces

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}(p'.g') &= \phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}(\phi(\sigma|\pi(p)),\ \phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}(p')g'))\\ &= (\phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}\circ\ \phi_{\sigma(\pi(p))})(\phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}(p')g')\\ &= \phi^{-1}_{\sigma(\pi(p))}(p')g'\end{aligned}$$

Reciprocamente si $T_u: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times G$ es una trivialización local, definimos $\sigma: U \longrightarrow P$ por $\sigma(m) = T_u^{-1}(m,e)$ $\forall m \in U$, observamos que $\sigma(m) = T_u^{-1}(m,e) \in \pi^{-1}(U)$ tal que $T_u(\sigma(m)) = T_u(T_u^{-1}(m,e)) = (m,e)$ y por otro lado $T_u(\sigma(m)) = (\pi(\sigma(m)),\ S_u(\sigma(m)))$ luego $(m,e) = (\pi(\sigma(m)),\ S_u(\sigma(m)))$ con lo cual $\pi(\sigma(m)) = m$ y así $\pi\circ\sigma = I_u$.

Proposición 2.4:

Existe una biyección entre el conjunto de las secciones globales y el conjunto de las trivializaciones globales, de un H.F.P.

Demostración:

La demostración es similar a la del teorema anterior.

Ejemplo 2.5:

Sea $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$ la circunferencia unitaria en el plano complejo. Sea la aplicación $\pi : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $\pi(z) = z^2$, y $\pi^{-1}(z^2) = \{z, -z\}$ la aplicación inversa de z^2; sea G el grupo formado por dos elementos (e,g) y $z.e = z$, $z.g = -z$ para $z \in S^1$, es una acción por la derecha de G sobre S' libre.

Demostraremos que (S^1, π, S^1, G) es un H.F.P, se comprueba sin dificultad que se satisfacen las condiciones a y b de la definición 1.11. Para probar la condición c usamos la proposición 2.3.

Sean los conjuntos abiertos $U = S^1 - \{1\}$ y $V = S^1 - \{-1\}$, y sea $\sigma : U \longrightarrow S^1$ la sección local definida por $\sigma(W)$ como la raíz cuadrada de W con $I_m(\sigma(W)) > 0$ mientras que, $\tau : V \longrightarrow S^1$ está definida por $\tau(W)$ como la raíz cuadrada de W con $R_e(\sigma(W)) > 0$; por el teorema anterior tenemos una trivialización local.

$T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ y $T_v : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ y donde:

$T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ pero $\pi^{-1}(U) = U$

$$\sigma(\pi(z)) = \sigma(z^2) = \begin{cases} z \text{ si } I_m(z^2) \geqslant 0 \\ -z \text{ si } I_m(z^2) < 0 \end{cases}$$

$T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$

$z \longmapsto T_u(z) = (z^2, \phi^{-1}_{\sigma(z^2)}(z))$ donde

$$\phi_{\sigma(z^2)} : \{1,-1\} \longrightarrow \pi^{-1}(z^2) = \{z,-z\} \quad \text{así}$$

$$\phi_{\sigma(z^2)}(1) = \phi(\sigma(z^2),1) = \begin{cases} z \text{ si } \sigma(z^2) = z, \ I_m(z^2) \geq 0 \\ -z \text{ si } \sigma(z^2) = -z, \ I_m(z^2) < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{\sigma(z^2)}(-1) = \phi(\sigma(z^2),-1) = \begin{cases} -z \text{ si } \sigma(z^2) = z, \ I_m(z^2) \geq 0 \\ z \text{ si } \sigma(z^2) = -z, \ I_m(z^2) < 0 \end{cases}$$

$$S_u(z) = \phi^{-1}_{\sigma(z^2)}(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } I_m(z^2) \geq 0 \Longleftrightarrow I_m(z) \geq 0 \\ -1 \text{ si } I_m(z^2) > 0 \Longleftrightarrow I_m(z) < 0 \end{cases}$$

$$T_v(z^2) = (z^2, \phi^{-1}_{\tau(z^2)}(z)) \text{ donde } \tau(\pi(z)) = \tau(z^2) = \begin{cases} z \text{ si } R_e(z^2) \geq 0 \\ -z \text{ si } R_e(z^2) < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{\tau(z^2)} : \{1,-1\} \longrightarrow \pi^{-1}(z^2) = \{z,-z\}$$

$$\phi_{\tau(z^2)}(-1) = \phi(\tau(z^2),1) = \begin{cases} z & R_e(z^2) \geq 0 \\ -z & R_e(z^2) < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{\tau(z^2)}(-1) = \phi(\tau(z^2),-1) = \begin{cases} -z & R_e(z^2) \geq 0 \\ z & R_e(z^2) < 0 \end{cases}$$

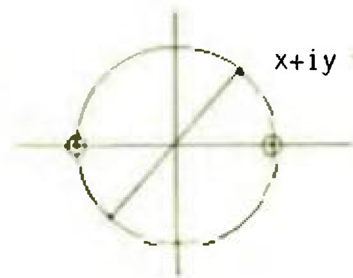
$$S_v(z) = \phi^{-1}_{\tau(z^2)}(z) = \begin{cases} 1 & R_e(z^2) \geq 0 \\ -1 & R_e(z^2) < 0 \end{cases}$$

$$g_{uv}(z^2) = S_u(z)\, S_v(z)^{-1} = \begin{cases} 1 & I_m(z^2) > 0 & R_e(z^2) > 0 \\ -1 & I_m(z^2) < 0 & R_e(z^2) < 0 \\ 1 & I_m(z^2) > 0 & R_e(z^2) > 0 \\ -1 & I_m(z^2) < 0 & R_e(z^2) < 0 \end{cases} \quad \text{fijando}$$

$z = re^{i\theta} \Longrightarrow z^{1/2} = e^{i\,\theta/2}$ donde $e^{i\,\theta/2} - (\cos\theta/2,\ i\ \text{sen}\ \theta/2)$

$I_m(e^{i\,\theta/2}) = \text{sen}\ \theta/2 \Longrightarrow 0<\theta<2\pi$

$R_e(e^{i\,\theta/2}) - \text{Cos}\ \theta/2 \Longrightarrow 3\pi<\theta<\pi$



3.- APLICACION EXPONENCIAL.

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Sea E^* el espacio dual de E, y sea $T^{0,0}(E,F) = F$ para $p,q > 0$ $T^{p,q}(E,F)$ es el espacio de las funciones multilineales, esto es $f \in T^{p,q}(E,F)$ si y solo si

$f\colon \underbrace{E^* x E^* x \ldots x E^*}_{p} \ \underbrace{x\ E x E x \ldots x E}_{q} \longrightarrow F$ es una aplicación (p+q)-lineal.

Denotamos $T^{p,q}(E, \mathbb{R})$ por $T^{p,q}(E)$. Si $U_1, U_2, \ldots U_p \in E$ y $v^{*1} x\ v^{*2}\ x \ldots x\ v^{*q} \in E^*$ recordamos que

$U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_p \otimes v^{*1} \otimes \ldots \otimes v^{*q} \in T^{pq}(E, \mathbb{R})$ esta definido por:

$(U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_p \otimes v^{*1} \otimes \ldots \otimes v^{*q})(x^{*1},\ldots,x^{*p}, y_1,\ldots,y_q) =$

$= x^{*1}(U_1) \ldots x^{*p}(U_p)\ \ v^{*1}(y_1) \ldots v^{*q}(y_q)$. Sea $e_1,\ldots,e_n$ una base de E y $e^{*1},\ldots,e^{*n}$ la base dual. Recordemos que cada $f \in T^{p,q}(E, \mathbb{R})$ puede escribirse en forma única como:

$$f = \sum f^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\ e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \ldots \otimes e^{*j_q}$$

con componente $f^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \in \mathbb{R}$.

Sea $\Lambda^k(E,F)$ el sub espacio de $T^{0,k}(E,F)$ cosistente de todas las aplicaciones k-lineales de E en F antisimétrica.

Observemos que $\Lambda^0(E,F) = F$, hacemos $\Lambda^k(E, \mathbb{R}) = \Lambda^k(E)$

Ahora para $\omega \in \Lambda^k(E)$, tenemos que:

$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_k}$. Donde $\omega_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ es antisimétrica en los indices $i_1, \dots, i_k$.

Definición 3.1:

Sean $\alpha \in \Lambda^i(E)$ y $\beta \in \Lambda^j(E)$. Definimos $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{i+j}(E)$ como:

$$(\alpha \wedge \beta)(U_1, \dots, U_{i+j}) = \frac{1}{i!\,j!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \alpha(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(i)}) \beta(U_{\sigma(i+1)}, \dots, U_{\sigma(i+j)}).$$

Donde la suma es sobre el conjunto de todas las permutaciones σ de $\{1, \dots, i+j\}$ y $(-1)^{\sigma} = \pm 1$ es el signo de σ.

Las componentes de $(\alpha \wedge \beta)$ son dada por:

$$(\alpha \wedge \beta)_{k_1 \dots k_{i+j}} = \frac{1}{i!\,j!} \sum \alpha_{m_1 \dots m_i} \beta_{m_{i+1} \dots m_{i+j}} \delta^{m_1 \dots m_{i+j}}_{k_1 \dots k_{i+j}}$$ donde

$\delta^{m_1 \dots m_{i+j}}_{k_1 \dots k_{i+j}} = \sum (-1)^{\sigma} e^{*k_1}(e_{m_{\sigma(i+j)}})$ Para $\alpha, \beta \in \Lambda^0(E)$ hacemos $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$.

Definición 3.2:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n". Sea $\mathcal{T}^{p,q}(M) = \bigsqcup_{x\in M} \mathcal{T}^{p,q}(T_xM)$, una 1-forma diferenciable en M es una función $\omega: M \longrightarrow \mathcal{T}^{0,1}(M)$ tal que $\omega_x \in \mathcal{T}^{0,1}(T_xM)$ y para cada $Y \in \Gamma(TM)$, la función $\omega(Y)$ dada por $\omega(Y)(x) = \omega_x(Y_x)$ es $C^\infty(M)$.

Definición 3.3:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n". Un campo tensorial del tipo (p,q) en M, es una función: $S:M \longrightarrow \mathcal{T}^{p,q}(M)$, tal que $S_x \in \mathcal{T}^{p,q}(T_xM)$ y para cada 1-forma $\alpha_1,\dots \alpha_p$ y campos vectoriales $Y_1,\dots Y_q$. en M, la función $S(\alpha_1\dots\alpha_p, Y_1,\dots Y_q)$ dada por

$S(\alpha_1,\dots\alpha_p, Y_1\dots Y_q)(x) = S(\alpha_{1x}\dots\alpha_{px}, Y_{1x},\dots Y_{qx})$ es $C^\infty(M)$.

El espacio de todos los campos tensoriales del tipo (p,q) en M, lo denotamos por $\mathfrak{T}^{p,q}(M)$.

Definición 3.4:

Una k-forma diferenciable en M es un campo tensorial $\omega \in \mathfrak{T}^{0,k}(M)$ tal que $\omega(x) = \omega_x \in \bigwedge^k(T_xM)$ para todo $x \in M$.

El espacio de las k-formas diferenciables en M es denotada por $\bigwedge^k(M)$. Para $\alpha \in \bigwedge^i(M)$ y $\beta \in \bigwedge^j(M)$, definimos $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{i+j}(M)$ por $(\alpha\wedge\beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$. Si $\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta local o sea $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$ $(x^i \in C^\infty(M))$, entonces $dx^1,\dots,dx^n$ son 1-formas diferenciables en U donde $dx^i(\partial_j) = \delta_{ij}$. Cada $\omega \in \bigwedge^k(M)$ Puede escribirse en U como:

$$\omega = \frac{1}{k!}\sum \omega_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

donde $\omega_{i_1\dots i_k} = \omega(\partial_{i_1},\dots,\partial_{i_k}) \in C^\infty(U)$

K-FORMAS VECTORIALES.

Sean M una variedad diferenciable, V un espacio vectorial de dimensión "m" y $V_1,\dots,V_m$ una base, si $\alpha^1,\dots,\alpha^m \in \bigwedge^k(M)$, entonces

$\alpha_x^i \in \bigwedge^k(T_xM)\ \forall x \in M$ donde $\alpha_x^i: \underbrace{T_xM \times T_xM \times \dots \times T_xM}_{k\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es

k-lineal y antisimétrica.

Definimos la aplicación

$$\alpha_x^1 V_1 + \dots + \alpha_x^m V_m : \underbrace{T_xM \times \dots \times T_xM}_{K\text{- veces}} \longrightarrow V \text{ por}$$

$$(\alpha_x^1 V_1 + \dots + \alpha_x^m V_m)(y^1,\dots y^k) = \alpha_x^1(y^1,\dots,y^k)V_1 + \dots + \alpha_x^m(y^1,\dots,y^k)V_m$$

Se observa que $\alpha_x^1V_1 + \dots + \alpha_x^mV_m \in \bigwedge^k(T_xM,V)$. Luego tenemos una aplicación de M en $\bigsqcup_{x\in M} \bigwedge^k(T_xM,V)$.

Definición 3.5:

Una aplicación α de M en $\bigsqcup_{x\in M}\bigwedge^k(T_xM,V)$ es una k-forma vectorial si $\alpha_x \in \bigwedge^k(T_xM,V)\ \forall x \in M$.

Sea $\bigwedge^k(M,V)$ el conjunto de todas las k-formas vectoriales en M.

Observemos que con la adición y la multiplicación con números reales;

$(\alpha+\beta)_x = \alpha_x + \beta_x$; $(a\beta)_x = a\beta_x$ es un espacio vectorial real.

Se observa que $\alpha^1V_1 + \dots + \alpha^mV_m \in \bigwedge^k(M,V)$.

Una k-forma vectorial $\alpha: M \longrightarrow \bigsqcup_{x\in M}\bigwedge^k(T_xM,V)$ es diferenciable, si para toda base $V_1,\dots,V_m$ de V, existe $\alpha^1,\dots,\alpha^m \in \bigwedge^k(M)$ tal que $\alpha = \alpha^1V_1 + \dots + \alpha^mV_m$.

HOMOMORFISMO ENTRE ALGEBRAS DE LIE.

Recordemos que si $Y_x \in T_xM$ entonces existe una curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$,

$\gamma'(0) = Y_x$ y que para $f \in C^{\infty}(M)$, $Y_x(f) = (f o \gamma)'(0)$; $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$.

Una aplicación $Y : M \longrightarrow TM$ es un campo vectorial si $Y_x \in T_xM$, $\forall x \in M$.

Y es un campo vectorial diferenciable (c.v.d) si la función $Y(f) : M$ dada por $Y(f)(x) = Y_x(f)$ es diferenciable.

Sea $\Gamma(TM)$ ó $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre M.

$(\mathfrak{X}(M), +, \cdot, [\ ])$ es un álgebra de Lie, donde

$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$

Sea $f:M \longrightarrow N$ diferenciable entonces tenemos

$df: TM \longrightarrow TN$ en diferenciable y

$(df)_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ es lineal, definida por

$(df)_x(\gamma'(0)) = (f o \gamma)'(0)$ o tambien

$(df)_x(V) \in T_{f(x)}N$ para $v \in T_xM$

$(df)_x(V)(g) = V(g o f)$

Definición 3.6:

Sea $f:M \longrightarrow N$ diferenciable, Y y $\tilde{Y}$ campos vectoriales diferenciables sobre M y N respectivamente.

Decimos que Y y $\tilde{Y}$ son f-relacionados y se escribe $Y \xrightarrow{f} \tilde{Y}$ sii $df \circ Y = \tilde{Y} \circ f$, es decir, el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] & TN \\ M \arrow[u, "Y"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\tilde{Y}"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Observación 3.7</u>:

$$Y \xrightarrow{f} \tilde{Y} \Longleftrightarrow (df)_x(Y_x) = \tilde{Y}_{f(x)} \quad \forall x \in M.$$

<u>Teorema 3.8</u>:

Sea $f:M \longrightarrow N$ diferenciable, Y, Z campos vectoriales diferenciables sobre M; $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ campos vectoriales diferenciables sobre N.

Si $Y \xrightarrow{f} \tilde{Y}$ y $Z \xrightarrow{f} \tilde{Z}$ entonces $[Y,Z] \xrightarrow{f} [\tilde{Y},\tilde{Z}]$

<u>Demostración</u>:

Utilizamos el diagrama;

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] & TN & \\ M \arrow[u, "{Y,Z}", "{[Y,Z]}"'] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "{\tilde{Y},\tilde{Z};\ [\tilde{Y},\tilde{Z}]}"'] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & f(x) \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & \end{tikzcd}$$

Por demostrar: $(df) \circ [Y,Z] = [\tilde{Y},\tilde{Z}] \circ f$.

Sean $x \in M$ y $g \in C^{\infty}(M)$. Hay que demostrar que

$$(df)_x ([Y,Z]_x)(g) = [\tilde{Y},\tilde{Z}]_{f(x)}(g)$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
(df)_x([Y,Z]_x)(g) &= [\tilde{Y},\tilde{Z}]_x(gof) \\
&= Y_x(Z(gof)) - Z_x(Y(gof)) \\
&= Y_x((dfoZ)(g)) - Z_x((dfoY)(g)) \\
&= Y_x(\tilde{Z}(g)of) - Z_x(\tilde{Y}(g)of) \\
&= df(Y_x)(\tilde{Z}(g)) - df(Z_x)(\tilde{Y}(g)) \\
&= \tilde{Y}_{f(x)}(\tilde{Z}(g)) - \tilde{Z}_{f(x)}(\tilde{Y}(g)) \\
&= [\tilde{Y},\tilde{Z}]_{f(x)}\ (g)
\end{aligned}
$$

Hemos utilizado la identidad $Z(gof) = (dfoZ)(g)$ que se comprueba facil mente.

Observación 3.9:

Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{G}$ el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre G. $(\mathfrak{G},+,o,[\ \ ])$ es un álgebra de Lie.

Recordemos que $\alpha : \mathfrak{G} \longrightarrow T_eG$ definido por $\alpha(X) = X_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (Ver Teorema I.42).

Dado $u \in T_eG$, $X_a^u = (dl_a)_e(u)$ donde X^u es un campo vectorial invariante por la izquierda tal que $X_e^u = (dl_e)_e(u) = u$; X^u es único con $X_e^u = u$.

Dados $u, v \in T_eG$. Definimos

$$[u,v] = [X^u,X^v]_e, \text{ por consiguiente}$$

$$[X^u,X^v]_e = [u,v] = [X_e^u, X_e^v]$$

$(T_eG, +, o,[\ \ ])$ es un álgebra de Lie.

$\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow T_eG$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Sea $f:G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie.

$(df)_e : T_eG \longrightarrow T_eH$ es lineal.

Observación: Construiremos δf a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\beta"] \\ T_eG \arrow[r, "(df)_e"] & T_eH \end{tikzcd}$$

Definición 3.10:

Sea $\delta f = \beta^{-1} \circ (df)_e \circ \alpha$, o sea si $X \in \mathcal{G}$

$\delta f(X) = (\beta^{-1} \circ (df)_e \circ \alpha)(X) = \beta^{-1} \circ (df)_e \alpha(X) = \beta^{-1} \circ (df)_e(X_e)$

o sea $\delta f(X)$ es el único campo vectorial invariante por la izquierda sobre H tal que:

$$\beta(\delta f(X)) = (df)_e(X_e)$$

$$\delta f(X)_e = (df)_e(X_e)$$

Teorema 3.11:

Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente, $f:G \longrightarrow H$ un homomorfismo, Entonces

a) X y $\delta f(X)$ son f-relacionados para todo $X \in \mathcal{G}$

b) $\delta f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ es homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración:

Sea $\tilde{X} = \delta f(X)$

Por demostrar que X y $\tilde{X}$ son f-relacionados.

Como $f:G \longrightarrow H$ es un homomorfismo,

$$f(ab) = f(a)\, f(b) \quad \forall a,b \in G$$

$$f(l_a(b)) = l_{f(a)}(f(b))$$

$$(f \circ l_a)(b) = (l_{f(a)} \circ f)(b)$$

o sea $f \circ l_a = l_{f(a)} \circ f \quad \forall\, a \in G \qquad (*)$

<u>Afirmación</u>:

Sea Y un campo vectorial sobre un grupo de Lie G. Entonces

$d\, l_a(Y_e) = Y_a \qquad (**)$

En efecto, $d\, l_a(Y_e)(g) = Y_e[g \circ l_a]$

Sea $Y_e = \gamma'(0)$, entonces $Y_e[g \circ l_a] = \frac{d}{dt}\Big|_0 (g \circ l_a \circ \gamma)(t) = \gamma(0) = e$

$(l_a \circ \gamma)(0) = a$

$$Y_a = (l_a \circ \gamma)'(0)$$

$$Y_a(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (g\, l_a \circ \gamma)(t)$$

luego $\qquad dl_a(Y_e)(g) = Y_a(g)$

ahora, utilizando estos resultados $(*)$, $(**)$ y tenemos

$\tilde{X}(f(a)) = dl_{f(a)}\,(\tilde{X}(e)) = dl_{f(a)}\,(df)_e X_e = d(l_{f(a)} \circ f)_e\, X_e$

$\qquad = d(f \circ l_a)\, X(e) = (df)\, dl_a(X(e)) = df(X(a))$

<u>Demostración de la parte b.</u>

Sean $\tilde{X} = \delta f(X)$, $\tilde{Y} = \delta f(Y)$

Ya sabemos que $X \xrightarrow{f} \tilde{X}$ y $Y \xrightarrow{f} \tilde{Y}$ por tanto $[X,Y] \xrightarrow{f} [\tilde{X},\tilde{Y}]$ (por resultado anterior) sea $\delta f([X,Y]) = \widetilde{[X,Y]}$, por demostrar que $\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X},\tilde{Y}]$.

Como $[X,Y] \xrightarrow{f} [\tilde{X},\tilde{Y}]$ se tiene

$df([X,Y](e)) = [\tilde{X},\tilde{Y}](e)$

Pero $\widetilde{[X,Y]}$ es el único campo vectorial invariante por la izquierda sobre H cuyo valor en la identidad es $df([X,Y](e))$ por consiguiente

$$\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X},\tilde{Y}]$$

Corolario 3.12:

Sea G un grupo de Lie, $g \in G$. La aplicación

$$Ad_g : G \longrightarrow G \text{ dado por}$$
$$Ad_g(g') = gg'g^{-1}$$

es un C^∞ isomorfismo que llamamos isomorfismo adjunto.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G.

Entonces $\delta Ad_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie por el teorema(3.10).

Corolario 3.13:

Sea $Ad: G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ dado por

$Ad(g) = \delta Ad_g$ es un homomorfismo.

Corolario 3.14:

Como $GL(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie, sea $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ su álgebra de Lie, tenemos $ad: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ determinado por Ad, o sea $ad = \delta Ad$. Entonces ad es un homomorfismo.

CONSTRUCCION DE LA APLICACION EXPONENCIAL.

Consideremos $\mathbb{R}$ con su estructura de grupo de Lie.

Definición 3.15:

Un flujo global sobre una variedad diferenciable M es una acción diferenciable $\phi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$. Dado un flujo global tenemos $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_t : M \longrightarrow M$ definida por $\phi_t(p) = \phi(p,t)$ es un difeomorfismo (Ver Proposición II.1.3) y $\forall\, p \in M$, $\gamma_p : \mathbb{R} \longrightarrow M$ dada por $\gamma_p(t) = \phi_t(p)$ es una curva diferenciable que pasa por p (Ver Proposición II. 1.6).

Proposición 3.16:

Dado un flujo global sobre una variedad diferenciable M.

La aplicación $X: M \longrightarrow TM$ dada por $X(p) = X_p = \gamma_p'(0)$, donde $\gamma_p'(0)$ es el vector velocidad de γ_p en 0, es un campo vectorial diferenciable.

Definición 3.17:

Al campo vectorial X sobre M asociando al flujo global ϕ llamamos generador infinitesimal de ϕ.

Lema 3.18:

Sea Y un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M, $p \in M$. Entonces existen una vecindad abierta U de "p" en M, un $\varepsilon > 0$ y una única función diferenciable $\phi: U \times I_\varepsilon \longrightarrow M$ donde $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, que verifica las condiciones siguientes:

a) Para todo $q \in U$, $\gamma_q : I_\varepsilon \longrightarrow M$ dada por $\gamma_q(t) = \phi_t(q)$ son curvas integrales de Y;

b) Para todo $s,t \in I_\varepsilon$ con $s+t \in I_\varepsilon$, $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ sobre $\phi_t(U) \cap U$; y

c) $\phi_0 = id_U$

Demostración:

(ver teorema 11) Tesis de José Fernández.

Lema 3.19:

Sea Y un campo vectorial invariante por la izquierda. Sobre un grupo de Lie G. Entonces Y es el generador Infinitesimal de un flujo global.

Demostración:

Como Y es un campo vectorial sobre G, "e" elemento identidad de G, por el lema 1, existen, una vecindad abierta U_e de e, un $\mathcal{E} > 0$ y una única función diferenciable $\Psi : U_e \times I_{\mathcal{E}} \longrightarrow G$ tal que Y es el generador infinitesimal de Ψ , es decir, para las curvas $\gamma_p : I_{\mathcal{E}} \longrightarrow G$ con $p \in U_e$ del flujo local Ψ se tiene $\gamma_p'(0)\ Y_p$, o sea $\frac{d}{dt}\ \gamma_p|_{t=0} = Y_p$.

Tenemos para $|t|<\mathcal{E}$, $\Psi_t : U_e \longrightarrow G$, pero hay que demostrar que se puede extender a G para $|t|<\mathcal{E}$.

Ya que Y es invariante por la izquierda, $\forall a,g \in G$ se tiene $(dl_a)_g(Y_g) - Y_{ag}$ y esto implica que

$(\frac{d}{dt})\ g\ \Psi_t(a)\ -(\frac{d}{dt})\ \Psi_t(ga)\quad \forall a,\ g,\ ga \in U_e$. Por consiguiente

$$g\ \Psi_t(a) = \Psi_t(ga) \qquad (*)$$

En particular $\Psi_t(g) = g\ \Psi_t(e)$ para $g \in U_e$

Ahora definamos $\hat{\Psi}_t : G \longrightarrow G$, $t \in \mathbb{R}$ por

$$\hat{\Psi}_t(g) = g(\Psi_{t/n})^n\ (e)$$

donde n es un número natural tal que $(t/n)<\mathcal{E}$.

Luego $\hat{\Psi} : G\times \mathbb{R} \longrightarrow G$ dado por $\hat{\Psi}(g,t) = \hat{\Psi}_t(g)$ es un flujo global y se deduce que es un generador infinitesimal de $\hat{\Psi}$.

Corolario 3.20:

Sea G un grupo de Lie, $v \in T_eG$, l_a el difeomorfismo traslación por la izquierda de G. Entonces la aplicación $X^v: G \longrightarrow TG$ definida por $X^v(a) = (dl_a)_e(v)$, que es un campo vectorial invariante por la izquierda, es el generador infinitesimal de un flujo global sobre G.

Demostración:

Ya se ha demostrado que X^v es un campo vectorial invariante por la izquierda, luego aplicando el lema 3.19 se obtiene la afirmación del Corolario.

Teorema 3.21:

Sea $\Psi^v: G \times \mathbb{R} \longrightarrow G$ el flujo global del cual es generador infinitesimal X^v. Entonces la aplicación $\Psi: T_eG \times G \times \mathbb{R} \longrightarrow G$ definida por $\Psi(v,g,t) = \Psi^v_t(g)$ es diferenciable y se tiene

a) $\Psi^v_t(ga) = g\,\Psi^v_t(a)$ y

b) $\Psi^{tv}_s = \Psi^v_{ts}$

Demostración:

Para $v \in T_eG$ fijado, Ψ^v es un flujo global diferenciable. Variando v justamente varían las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que determina el generador infinitesimal X^v de Ψ^v. Como las soluciones de tal sistema varían diferenciablemente con las condiciones iniciales, Ψ es diferenciable.

La parte (a) se deduce de (*) en la demostración del lema 3.19.

Para la parte (b) observamos que Ψ^{tv}_s y Ψ^v_{ts} son ambos flujos sobre G para t y v fijados.

Ahora X^{tv} es el generador infinitesimal de Ψ_s^{tv} y

$$\frac{d}{ds}\ \Psi_{st}^{v}(g)\ |_{s=0} = t\,\frac{d}{ds}\ \Psi_s^{v}(g)\ |_{s=0} = tX_g^{v} = X_g^{tv}$$

Luego X^{tv} también es generador infinitesimal de Ψ_{st}^{v} y por la unicidad de los flujos se obtiene (b).

Definición 3.22:

A la aplicación exp: $T_eG \longrightarrow G$ dada por $\exp(v) = \Psi_1^{v}(e)$, llamamos aplicación exponencial.

Observación 3.23:

Para el vector nulo θ de T_eG se tiene $\exp(\theta) = \Psi_1^{\theta}(e) = \Psi^{\theta}(e,1) = e$.

Teorema 3.24:

La aplicación exp: $T_eG \longrightarrow G$ definida por $\exp(v) = \Psi_1^{v}(e)$ es diferenciable y es un difeomorfismo en una vecindad de θ. Además $(d\exp)_\theta = id$.

Observación: Identificamos $T_o(T_eG)$ con T_eG.

Demostración:

La aplicación exp es diferenciable porque Ψ_1^{v} es diferenciable.

Usando la parte (b) del teorema 3.21 tenemos.

$$(d\exp)_o(v) = \frac{d}{dt}(\exp tv)\ |_{t=0} = \frac{d}{dt}\ \Psi_1^{tv}(e)\ |_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\ \Psi_t^{v}(e)\ |_{t=0} = X^{v}(e) = v$$

luego $(d\exp)_\theta = id_{T_eG}$

Por el teorema de la función inversa, existe una vecindad abierta U de θ en T_eG tal que la restricción $\exp|_U : U \longrightarrow \exp(U) \subseteq G$ es un difeomorfismo.

Ejemplo 3.25:

Recordemos que en el espacio vectorial de las nxn matrices reales $M(n, \mathbb{R})$ la exponencial de una nxn matriz A es

$$\operatorname{Exp} A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Sabemos que el álgebra de Lie $T_e\, Gl(n, \mathbb{R})$ del grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ podemos identificar con $M(n, \mathbb{R})$, usando esta identificación resulta que $\exp A = \operatorname{Exp} A$.

3.26 Otra Construcción de la exponencial.

Sea G un grupo de Lie, y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie correspondiente a dicho grupo. Sea X un elemento de $\mathfrak{g}$, es decir un campo vectorial invariante por la izquierda sobre G. Este campo determina un flujo global diferenciable sobre G,

$$\Psi^X : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G$$

Luego para cada $t \in \mathbb{R}$

$\Psi^X_t : G \longrightarrow G$ es un difeomorfismo.

En particular para $t = 1$.

$\Psi^X_1 : G \longrightarrow G$ es un difeomorfismo.

Ahora definimos una aplicación

$\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$ en la forma siguiente

$\exp: (X) = \Psi^X_1(e)$

donde "e" es el elemento identidad de G.

Se comprueba sin dificultad que esta aplicación es diferenciable.

4.- CONEXIONES.

Damos tres definiciones de conexiones y demostramos que son equivalentes.

En todo lo que sigue asumiremos que (P, π, M, G) es un haz fibrado principal con grupo de Lie G y dim M = n.

Recordemos que $\pi : P \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable, luego $d\pi : TP \longrightarrow TM$ también es diferenciable, entonces para cada $x \in P$ $(d\pi)_x : T_xP \longrightarrow T_{\pi(x)}M$ es lineal. Luego nos determina un subespacio vectorial de T_xP, que es el núcleo $(d\pi)_x$ y que denotamos por V_x. O sea $V_x = \left\{ Y \in T_xP : (d\pi)_x(Y) = 0 \right\} = \mathcal{N}((d\pi)_x)$.

Como G es un grupo de Lie que actua por la derecha diferenciable y libremente sobre P, sea $\phi : P\text{x}G \longrightarrow P$ tal acción.

Luego para $g \in G$ fijo, $\phi_g : P \longrightarrow P$ es un difeomorfismo y así la aplicación $d\phi_g : TP \longrightarrow TP$ es diferenciable además para $x \in P$, $(d\phi_g)_x : T_xP \longrightarrow T_{\phi_g(x)}P$ es lineal.

Definición 4.1:

Sea (P, π, M, G) un H.F.P.

Una conexión es una aplicación $\mathcal{C}$, que a cada $x \in P$ le asocia un subespacio H_x de T_xP o sea $\mathcal{C}(x) = H_x \subseteq T_xP$, y tal que verifica las condiciones siguientes:

1) $T_xP = H_x \oplus V_x$

2) $(d\phi_g)_x(H_x) = H_{xg}$ donde $x.g = \phi(x,g)$.

A los subespacios H_x y V_x llamamos subespacios horizontal y vertical respectivamente.

Decimos que una conexión $\mathcal{C}$ es diferenciable si $\forall x \in P$ existe una vecindad abierta U de x y "n" campos vectoriales $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \Gamma(TU)$ tal que en cada $y \in U$ $X_{1y}, X_{2y}, \ldots, X_{ny} \in T_y U$ generan a H_y.

Sea (P, π, M, G) un haz fibrado principal y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, y recordemos que:

a) Una 1-forma vectorial es una aplicación

$$\omega : P \longrightarrow \bigsqcup_{x \in P} \Lambda^1(T_x P, \mathfrak{g}) \text{ tal que}$$

$$\omega_x \cdot T_x P \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \text{es lineal y antisimétrica.}$$

b) De acuerdo con la construcción 3.25 la aplicación dada por $\exp(X) = \Psi_1^X(e)$ es diferenciable.

Consideremos ahora las construcciones siguientes:

1) Sea $X \in \mathfrak{g}$, o sea $X : G \longrightarrow TG$ es un campo vectorial invariante por la izquierda.

Comprobemos que la aplicación $tx : G \longrightarrow TG$ dada por $(tX)(y) = tX(y) = tX_y$ es un campo vectorial.

<u>En efecto</u>:

Sabemos que $X : G \longrightarrow TG$ es un campo vectorial luego para todo $p \in G$ tenemos que $X(p) = X_p \in T_p G$, es un vector así tambien λX_p es un vector de $T_p G$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual quiere decir que

$$[\pi \circ (\lambda X)](p) = \pi[(\lambda X)(p)] = \pi[\lambda X_p] = p = I_G$$

y por lo tanto $\lambda X : G \longrightarrow TG$ es un campo vectorial.

Además verifiquemos que tX es invariante por la izquierda, o sea, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{dl_a} & TG \\ {\scriptstyle tX}\uparrow{\scriptstyle X} & & {\scriptstyle X}\uparrow{\scriptstyle tX} \\ G & \xrightarrow{l_a} & G \end{array}$$

es conmutativa.

esto es, se cumple que $(dl_a \circ tX)(g) = (tX \circ l_a)(g)$.

<u>En efecto</u>:

$$\begin{aligned}(dl_a \circ tX)(g) &= dl_a(tX(g)) = t\, dl_a(X(g)) = t(dl_a \circ X)(g). \\ &= t(X \circ l_a)(g) = t(X(l_a(g))) = tX(l_a(g)) \\ &= (tX \circ l_a)(g)\end{aligned}$$

luego tX es invariante por la izquierda y así $tX \in \mathfrak{G}$.

Dado que G actua libremente sobre P, sea $\phi: P\times G \longrightarrow P$ tal acción que denotamos con $\phi(y,g) = y.g \in P$, $\forall (y,g) \in P\times G$. Sean $X \in \mathfrak{G}$, $y \in P$, definimos $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow P$ por $\gamma(t) = y.\exp(tX)$

Se comprueba sin dificultad que γ es diferenciable y $\gamma(0) = y.e = y$, Luego γ es una curva diferenciable que pasa por y, y su vector velocidad es

$$\gamma'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} y.\exp(tX) \in T_yP.$$

2) Sea $X \in \mathfrak{g}$. Definimos la aplicación

$X^*: P \longrightarrow TP$ por $X^*(y) = X^*_y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} y.\exp(tX) =$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t)$. Luego X^* es un campo vectorial diferenciable.

3) Por corolario 3.11 tenemos que la aplicación $\delta Ad_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de álgebra de Lie.

Definición 4.2:

Sea (P, Π, M, G) un H.F.P y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Una conexión ω es una 1-forma vectorial sobre P, es decir $\omega: P \longrightarrow \bigsqcup_{x \in P} \Lambda^1(T_xP, \mathfrak{g})$ tal que verifica las condiciones siguientes:

a) Para cada $X \in \mathfrak{g}$;

Se tiene $\omega_y(X^*_y) = X$ con $y \in P$.

b) Se tiene

$\omega_{y.g}((d\phi_g)_y(U)) = (\delta Ad_g)^{-1}(\omega_y(U))$ $\forall g \in G$, $\forall y \in P$.

Sea (P, Π, M, G) un H.F.P.

Recordemos que:

1-) Una Trivialización local es una aplicación T_u de $\Pi^{-1}(U)$ en UxG dada por $T_u(y) = (\Pi(y), S_u(y))$, $\forall y \in \Pi^{-1}(U)$ donde $S_u: \Pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ está dada por $S_u(y.g) = S_u(y).g$. Además tenemos la función de transición g_{uv} de $U \cap V$ en G dada por $g_{uv}(x) = S_u(x)\, S_v(x)^{-1}$ $\forall x \in U \cap V$.

2-) La aplicación $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ dada por $\alpha(X) = X_e$ es un isomorfismo (ver Corolario 2.6). Veamos ahora la siguiente definición:

Definición 4.3:

Una conexión es una aplicación que a cada Trivialización local

T_u le asocia una 1-forma vectorial ω_u en U con valores en $\mathfrak{g}$.

Si T_v es otra Trivialización local y g_{uv} la función de transición de T_u en T_v, entonces requerimos que:

$$\omega_{vx}(Y_x) = \alpha^{-1}\left[(dl^{-1}_{g_{uv}}(x))((dg_{uv})_x(Y_x))\right] + (\delta Ad^{-1}_{g_{uv}(x)})(\omega_{ux}(Y_x))$$

$\forall\, Y_x \in T_xM$ y $x \in U \cap V$.

Observación 4.4

Sea G un grupo de Lie de matrices, γ una curva tal que $\gamma'(0) = Y_x$ entonces la condición anterior tenemos

$$\begin{aligned}(dl^{-1}_{g_{uv}(x)})(dg_{uv}(Y_x)) &= (dl^{-1}_{g_{uv}(x)})(\frac{d}{dt}(g_{uv}(\gamma(t)))\\ &= \frac{d}{dt}\, g_{uv}(x)^{-1} g_{uv}(\gamma(t))\\ &= g_{uv}(x)^{-1}\, dg_{uv}(Y_x)\end{aligned}$$

donde dg_{uv} es la derivada de la matriz de funciones g_{uv}.

Además para un grupo de Lie de matrices tenemos:

$$\delta Ad_A = \frac{d}{dt}\, Ad_A(Exp(tB))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A^{-1}\ Exp\ t\ BA)_{t=0} = A^{-1}BA$$

Luego $\delta Ad_{g_{uv}(x)}{}^{-1}\ \omega_u(Y_x) = g^{-1}_{uv}(x)\,\omega_u(Y_x) g_{uv}(x)$

Por consiguiente la regla de transformación de ω_u a ω_v de la definición anterior puede ser expresada por:

$$\omega_v = g^{-1}_{uv}\, dg_{uv} + g^{-1}_{uv}\, \omega_u g_{uv}.$$

Teorema 4.5:

Las definiciones 4.1, 4.2 y 4.3 son equivalentes.

<u>Demostraciones</u>:

La demostración la haremos siguiendo la cadena siguiente;

4.1 $\Longrightarrow$ 4.2 $\Longrightarrow$ 4.3 $\Longrightarrow$ 4.1.

En efecto: (1) 4.1 $\Longrightarrow$ 4.2.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una conexión en el sentido 4.1, es decir para cada $y \in P$ se tiene un subespacio $H_y \subseteq T_yP$ tal que:

a) $H_y \oplus V_y = T_yP$

b) $(d\,\phi_g)_y\,(H_y) = H_{y.g} \qquad \forall g \in G$

vamos a construir una 1-forma ω sobre P, es decir, $\omega_y : T_yP \longrightarrow \mathfrak{g}$ lineal tal que verifique las condiciones siguientes:

a') Dado $A \in \mathfrak{g}$ · $\omega_y(A^*_y) = A$

b') Dado $U \in T_yP = H_y \oplus V_y$

$$\omega_{y.g}((d\phi_g)_y(U)) = (\,\delta\,Ad_g)^{-1}(\omega_y(U))$$

de la manera siguiente:

Sean $A \in \mathfrak{g}$ y $X_y \in H_y \subseteq T_yP$

Definimos $\omega_y(A^*_y + X_y) = A$, y extendemos por linealidad.

Se verifica la condición (a') porque $\omega_y(A^*_y) = \omega_y(A^*_y + \theta) = A$.

Para verificar la condición (b'). Sea $U \in T_yP = H_y \oplus V_y$.

Si $U \in H_y \subseteq T_yP$ entonces $(d\phi_g)_y(U) \in H_{y.g}$

y por tanto $\omega_{y.g}((d\phi_g)_y(U)) = \omega_{y.g}(\theta^*_{y.g} + (d\phi_g)_y(U)) = \theta$

además se comprueba que

$(\delta Ad_g)^{-1}(\omega_y(U)) = \theta$, y por tanto queda verificada la condición (b') en este caso.

Si $u = A^*_y$ para algun $A \in \mathcal{G}$, entonces (para $t=0$)

$$
\begin{aligned}
\omega_{y.g}((d\phi_g)_y(A^*_y)) &= \omega_{y.g}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left[p(\exp t\, A)g\right]\right) \\
&= \omega_{y.g}\left(\frac{d}{dt}\left[pgg^{-1}(\exp t\, A)g\right]\right) \\
&= \omega_{y.g}\left(\frac{d}{dt}\left[pg \exp\left(t\,\delta Ad_g^{-1} A\right)\right]\right) \\
&= \omega_{y.g}((\delta Ad_g^{-1} A)^*_{y.g}) = \delta Ad_g^{-1} A \\
&= \delta Ad_g^{-1}(\omega_y(A^*_y))
\end{aligned}
$$

luego tenemos 4.2(b) y por tanto ω es una conexión 1-forma.

(2) 4.2 $\Longrightarrow$ 4.3

Sea ω una conexión 1-forma como en 4.2, o sea $\omega : P \longrightarrow \bigsqcup_{x\in P} \Lambda^1(T_xP, \mathcal{G})$ y tal que verifica

a) $\omega_y(X^*_y) = X$ con $X \in \mathcal{G}$, $y \in P$

b) $\omega_{y.g}((d\phi_g)_y)(U) = (\delta\, Ad_g)^{-1}(\omega_y(U)) \quad \forall\, g \in G.$

Ahora se trata de construir una aplicación $\mathcal{C}$ que asocia a cada trivialización local $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\text{x}G$ una 1-forma vectorial $\omega_u : U \longrightarrow \bigsqcup_{x\in U} \Lambda^1(T_xU, \mathcal{G})$ tal que:

$$\omega_{vx}(Y_x) = \alpha^{-1}\left[(dl^{-1}_{g_{uv}(x)})(((dg_{uv})_x(Y_x))\right] + (\delta\, Ad^{-1}_{g_{uv}(x)})(\omega_{ux}(Y_x))$$

$$\forall\, Y_x \in T_xM,\ x \in U\cap V.$$

Dada $T_u : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\text{x}G$ una trivialización local, queda determinada de manera única una sección local $\sigma_u : U \longrightarrow P$.(Ver proposición II. 2.3)

Ahora asociaremos a una sección local diferenciable $\Psi: U \longrightarrow P$, una aplicación $(d\Psi)^*$ de la manera siguiente:

Para $y \in U$; $(d\Psi)_y : T_y U \longrightarrow T_{\Psi(y)}P$ es lineal, luego para cada $h: T_{\Psi(y)}P \longrightarrow \mathcal{G}$ lineal, definimos la aplicación $(d\Psi)_y^* : \bigwedge^1(T_{\Psi(y)}P, \mathcal{G}) \longrightarrow \bigwedge^1(T_y U, \mathcal{G})$ dada por $(d\Psi)_y^*(h) = h \circ (d\Psi)_y$, luego $(d\Psi)_y^*$ es lineal; ahora definimos $(d\Psi)^* : \bigsqcup_{\substack{\Psi(y)\in P \\ y\in U}} \bigwedge^1(T_{\Psi(y)}P, \mathcal{G}) \longrightarrow \bigsqcup_{y\in U} \bigwedge^1(T_y U, \mathcal{G})$ por $(d\Psi)^*(y) = (d\Psi)_y^*$. y a la restricción $(d\Psi)^* / \bigwedge^1(T_{\Psi(y)}P, \mathcal{G})$ seguiremos denotando con $(d\Psi)^*$, ahora para el caso de σ_u tenemos

$$(d\sigma_u)^* : \bigsqcup_{\substack{\sigma_u(y)\in P \\ y\in U}} \bigwedge^1(T_{\sigma_u(y)}P, \mathcal{G}) \longrightarrow \bigsqcup_{y\in U} \bigwedge^1(T_y U, \mathcal{G})$$

y podemos definir $\omega_u : U \longrightarrow \bigsqcup \bigwedge^1(T_y U, \mathcal{G})$ como $\omega_u = (d\sigma_u)^* \circ \omega \circ \sigma_u$ o sea

$$U \xrightarrow{\sigma_u} \sigma(U) \xrightarrow{\omega} \bigsqcup_{x=\sigma_u(y)\in P} \bigwedge^1(T_{\sigma_u(y)}P, \mathcal{G}) \xrightarrow{(d\sigma_u)^*} \bigsqcup_{y\in U} \bigwedge^1(T_y U, \mathcal{G})$$

En forma análoga construimos ω_v, y probaremos que la aplicación que asocia a cada trivialización local "T_u" una 1-forma vectorial ω_u es una conexión en el sentido de la definición 4.3.

A continuación analizaremos la relación entre dos secciones locales utilizando la función de transición

Escribiendo $T_u(p) = (\pi(p), S_u(p))$, considerando $x \in U \cap V$ $\pi(p) = x$ tal que $S_u(\sigma_u(x)) = e$ vemos que

$$\begin{aligned} T_u(p) &= (\pi(p), S_u(p)) = (x, S_u(p)) = (x, e\, S_u(p)) \\ &= (x, S_u(\sigma_u(x)))\, S_u(p)) = (x, S_u(\sigma_u(x). S_u(p))) \\ &= (\pi(\sigma_u(x). S_u(p)), S_u(\sigma_u(x). S_u(p))) = T_u(\sigma_u(x). S_u(p)) \end{aligned}$$

y como "T_u" es biyectiva tenemos que $p = \sigma_u(x). S_u(p)$, además en forma análoga obtenemos tambien que $p = \sigma_v(x).\ S_v(p)$, de donde

$\sigma_u(x).\ S_u(p) = \sigma_v(x).\ S_v(p)$ y así $\sigma_v(x) = \sigma_u(x).\ S_u(p)\ S_v(p)^{-1}$ luego

$\sigma_v(x) = \sigma_u(x).\ g_{uv}(x)$; dado que $g_{uv}(x) = S_u(p)S_v(p)^{-1}$.

Además tenemos para ω_{ux} la regla de cálculo siguiente:

$$\omega_{ux} = \omega_u(x) = ((d\sigma_u)^* o\omega o\sigma_u)(x) = ((d\sigma_u)^* o\omega)\sigma_u(x)$$
$$= (d\sigma_u)_x^*(\omega\sigma_u(x)) = \omega\sigma_u(x) o (d\sigma_u)_x$$

Luego para $Y_x \in T_xM$ tenemos que

$$\omega_{ux}(Y_x) = (\omega\sigma_u(x)\ o\ (d\sigma_u)_x)(Y_x) = (\omega\sigma_u(x)((d\sigma_u)_x(Y_x))$$

Analicemos ahora la expresión $(d\sigma_u)_x(Y_x)$.

Sea $Y_x \in T_xM$, $x \in U \cap V$ y supongamos que $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ es una curva con $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = Y_x$, luego $(\sigma_u o\gamma)'(0) = (d\sigma_u)_x(Y_x) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\sigma_u\ o\gamma)(t) \in T_{\sigma_u(x)} P \text{ así}$$

$$(d\sigma_v)_x(Y_x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\sigma_v o\gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \sigma_v(\gamma(t))$$
$$= \frac{d}{dt}[\sigma_u(\gamma(t)).\ g_{uv}(\gamma(t))] = \frac{d}{dt}[\sigma_u(x).g_{uv}(\gamma(t))] + \frac{d}{dt}[\sigma_u(\gamma(t).g_{uv}(x)]$$
$$= \frac{d}{dt}[\sigma_v(x).g_{uv}(x)^{-1}\ g_{uv}(\gamma(t))] + \frac{d}{dt}[\phi_{g_{uv}(x)}\ \sigma_u(\gamma(t))]$$
$$= \sigma_v(x).[\frac{d}{dt}(g_{uv}(x)^{-1}\ g_{uv}(\gamma(t))] + (d\phi_{g_{uv}(x)})_{\sigma_{u(x)}} (\frac{d}{dt}(\sigma_u(\gamma(t)))$$
$$= \sigma_v(x).[(\frac{d}{dt}(1g_{uv}^{-1}(x)\ o\ g_{uv})(\gamma(t))] + (d\phi_{g_{uv}(x)})_{\sigma_{u(x)}} (d\sigma_u)_x(Y_x)$$
$$= [(d1_{g_{uv}(x)}^{-1})_e(dg_{uv})_x(Y_x)]^*_{\sigma_{v(x)}} + (d\phi_{g_{uv}(x)})_{\sigma_u(x)}(d\sigma_u)_x(Y_x). \in T_{\sigma_v(x)} P$$

luego tenemos que

$$\omega_{vx}(Y_x) = (\omega\, \sigma_v(x))(d\sigma_u)_x(Y_x))$$

$$= (\omega\,\sigma_v(x))\left\{\left[\alpha^{-1}(dl\bar{g}^{1}_{uv}(x))_e(dg_{uv})_x(Y_x)\right]^*_{\sigma_v(x)} + (d\phi g_{uv}(x))_{\sigma_u(x)}(d\sigma_u)_x(Y_x)\right\}$$

$$= \omega_{\sigma_v(x)}\left[\alpha^{-1}(dl^{-1}_{g_{uv}(x)})_e(dg_{uv})_x(Y_x)\right]^*_{\sigma_v(x)} + \omega_{\sigma_v(x)}(d\phi_{g_{uv}(x)})_{\sigma_u(x)}(d\sigma_u)_x$$

(Y_x).

Aplicando las condiciones (a) y (b) de 4.2 tenemos

$$\omega_{vx}(Y_x) = \alpha^{-1}(dl^{-1}_{g_{uv}(x)})_e(dg_{uv})_x(Y_x) + (\delta\,Ad_{g_{uv}(x)})^{-1}(\omega_{ux}(Y_x))$$

y así vemos que la aplicación $\mathscr{C} = (d\sigma_u)^*$ es la conexión que asocia a T_u la 1-forma ω_u.

c) 4.3 $\Longrightarrow$ 4.1

Supongamos que tenemos una conexión en el sentido de 4.3 o sea que asocia a cada trivialización local T_u una 1-forma vectorial ω_u tal que

$$\omega_{vx}(Y_x) = \alpha^{-1}\left[(dl^{-1}_{g_{uv}(x)})(dg_{uv})_x(Y_x) + (\delta Ad^{-1}_{g_{uv}(x)})(\omega_{ux}(Y_x))\right.$$

sea $\sigma_u : U \longrightarrow P$ la sección local asociada a T_u.

Se trata de construir una conexión que a cada $\sigma_u(x) \in P$ asocie un subespacio $H_{\sigma_u(x)} \subseteq T_{\sigma_u(x)} P$. y que se verifiquen las condiciones siguientes:

1. $T_{\sigma_u(x)} P = H_{\sigma_u(x)} \oplus V_{\sigma_u(x)}$

2. $(d\phi_g)_{\sigma_u(x)}(H_{\sigma_u(x)}) = H_{\sigma_u(x).g}$ donde

$\sigma_u(x).g = \phi(\sigma_u(x),g)$.

Para $\sigma_u(x)\in P$, $x\in U$, $Y_x\in T_xM$ y $Z\in\mathfrak{g}$

definimos $\omega^u : T_{\sigma_u(x)}P \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$\omega^u\left[(d\sigma_u)_x(Y_x) + Z^*_{\sigma_u(x)}\right] = \omega_{ux}(Y_x) + Z$$

Como
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ M & \end{tikzcd}$$
es un H.F.P.

$$\sigma_u(x).g\in P \quad \text{y} \quad Y_{\sigma_u(x).g}\in T_{\sigma_u(x).g}P \quad \forall g\in G$$

restringimos ω^u a todo $\pi^{-1}(U)$ via la formula

$$\omega^u(Y_{\sigma_u(x).g}) = (\delta\, Ad_g^{-1})(d\phi_g^{-1})(Y_{\sigma_u(x).g}$$

El miembro izquierdo de esta igualdad nos muestra que ω^u es una conexión 1-forma en la restricción del H.F.P.

Supongamos que ω^u es la conexión 1-forma dada en 4.2.

Sea $H_{\sigma_u(x)} = \left\{ Y_{\sigma_u(x)} \in T_{\sigma_u(x)}P \,/\, \omega^u_{\sigma_u(x)}(Y_{\sigma_u(x)}) = 0 \right\}$

Probaremos que la 1-forma que a cada $\sigma_u(x)$ asigna $H_{\sigma_u(x)}$ es una conexión en el sentido de 4.1.

De 4.2 (a) tenemos que $\omega^u_{\sigma_u(x)}(Y^*_{u(x)} + X_{\sigma_u(x)}) = Y$ con $Y\in\mathfrak{g}$, $X_{\sigma_u(x)}\in T_{\sigma_u(x)}P$ luego podemos ver que $H_{\sigma_u(x)} + V_{\sigma_u(x)} = T_{\sigma_u(x)}P$.

Además $(d\phi_g)(H_{\sigma_u(x)}) = H_{\sigma_u(x)}.g$, dado que de 4.2(b) tenemos que $\omega^u_{\sigma_u(x)}(d\phi_g(Y_{\sigma_u(x)}) - (\delta Ad_g^{-1})(\omega^u_{\sigma_u(x)}(Y_{\sigma_u(x)})) = 0$ para todo $Y_{\sigma_u(x)}\in H_{\sigma_u(x)}$.

CAPITULO III

GRUPO TOPOLOGICO DE LORENTZ Y CONEXION DE LEVI-CIVITA

1. PRELIMINARES.

Proposición 1.1

Sean $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\forall x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ y $= (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$, $\langle x, y\rangle = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$; entonces $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ antes definida es una forma bilineal simétrica con matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respecto a la base canonica.

Demostración:

a) $\langle , \rangle$ es bilineal; o sea $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

y $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$

En eefcto.

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z\rangle &= \langle \alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) + \beta(y_0, y_1, y_2, y_3), (z_0, z_1, z_2, z_3)\rangle \\ &= \langle (\alpha x_0 + \beta y_0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3), \\ &\quad (z_0, z_1, z_2, z_3)\rangle \\ &= \alpha x_0 z_0 + \beta y_0 z_0 - \alpha x_1 z_1 - \beta y_1 z_1 - \alpha x_2 z_2 - \beta y_2 z_2 - \alpha x_3 z_3 - \\ &\quad \beta y_3 z_3 \\ &= \alpha(x_0 z_0 - x_1 z_1 - x_2 z_2 - x_3 z_3) + \beta(y_0 z_0 - y_1 z_1 - y_2 z_2 - y_3 z_3) \\ &= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \end{aligned}$$

Analogamente se demuestra para $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$

b) $\langle\ ,\ \rangle$ es simétrica.

$$\langle x,y\rangle = x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$$
$$= y_0x_0-y_1x_1-y_2x_2-y_3x_3$$
$$= \langle y,x\rangle$$

c) Sea $B = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, luego $\langle e_i,e_j\rangle=0$ si $i \neq j$ además $\langle e_1,e_1\rangle = 1$; $\langle e_2,e_2\rangle = -1$ $\langle e_3,e_3\rangle = -1$; $\langle e_4,e_4\rangle = -1$.

luego tenemos la matriz
$$\begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \langle e_1,e_3\rangle & \langle e_1,e_4\rangle \\ \cdot & \langle e_2,e_2\rangle & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \langle e_3,e_3\rangle & \cdot \\ \langle e_4,e_1\rangle & \cdot & \cdot & \langle e_4,e_4\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \eta$$

<u>Observación 1.2</u>:

Consideremos los vectores columnas $x,y \in \mathbb{R}^4$ luego $x^T\eta\, y = \langle x,y\rangle$

En efecto: calculando

$$x^T\eta\, y = (x_0,x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_0\ -x_1\ -x_2\ -x_3)\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3 = \langle x,y\rangle$$

Definición 1.3:

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^4$. Denotamos por ℓ al conjunto de todas las transformaciones lineales $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tales que $\forall x,y \in \mathbb{R}^4 \quad \langle Bx,By\rangle = \langle x,y\rangle$ donde $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el considerado en la proposición anterior. Así

$$\ell = \left\{ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \;/\; \forall x,y \in \mathbb{R}^4,\ \langle B(x),\ B(y)\rangle = \langle x,y\rangle \right\}$$

Proposición 1.4:

ℓ es un grupo respecto a la composición de aplicaciones.

Demostración:

a) ℓ es cerrada respecto a la composición de aplicaciones

En efecto:

Sean $A,B,D \in \ell$ luego

$$\langle (AoB)x,\ (AoB)y\rangle = \langle ABx,ABy\rangle = \langle Bx,By\rangle = \langle x,y\rangle$$

luego ℓ es cerrada.

b) La composición de aplicaciones es Asociativa.

En efecto:

Sean $A,B,D \in \ell$; $x,y \in \mathbb{R}^4$ luego P.D.

$$\langle Ao(BoD)(x),\ Ao(BoD)(y)\rangle \qquad \langle (AoB)oD(x),(AoB)oD(y)\rangle$$

luego:

a) $\langle Ao(BoD)(x),Ao(BoD)(y)\rangle \qquad \langle A(BoD)(x),A(BoD)(y)\rangle$

$= \langle A(B(D(x))),A(B(D(y)))\rangle = \langle B(D(x)),B(D(y))\rangle = \langle D(x),D(y)\rangle$

$= \langle x,y\rangle$

2) $\langle (AoB)oD(x),(AoB)oD(y)\rangle = \langle (AoB)D(x),(AoB)D(y)\rangle$

$= \langle A(B(D(x))),\ A(B(D(y)))\rangle = \langle B(D(x)),\ B(D(y))\rangle =$

$= \langle D(x),D(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

$\therefore$ o es Asociativa.

c) El elemento neutro de $\mathcal{L}$ es la aplicación identidad de $\mathbb{R}^4$, o sea
$\langle \mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}(x), \mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

d) Para mostrar que existen inversos en ($\mathcal{L}$,o) bastara comprobar que toda aplicación de $\mathcal{L}$ posee inverso en $\mathcal{L}$. Sea $A \in \mathcal{L}$, mostraremos que A es inyectiva, esto es $A(x) = A(y) \Longrightarrow x=y$: Sean $x ,y \in \mathbb{R}^4$, entonces $A(x) = A(y) \Longrightarrow A(x)-A(y) = 0 \Longrightarrow A(x-y) \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R}^4$ $\langle A(x-y), A(z)\rangle = 0 \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R}^4, \langle x-y,z\rangle = 0 \Longrightarrow x-y = 0$ $\Longrightarrow x = y$.

A es suryectiva dado que A es un operador lineal.

e) $A\in \mathcal{L}$ ¿$A^{-1}\in \mathcal{L}$

$\langle A^{-1}(x), A^{-1}(y)\rangle = \langle A(A^{-1}(x), A(A^{-1}(y))\rangle = \langle \mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}(x), \mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}(y)\rangle = \langle x,y\rangle$
luego $\mathcal{L}$ es grupo para o.

2.- GRUPO DE LORENTZ.

Definición 2.1:

Llamaremos grupo de Lorentz de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ al grupo $(\mathcal{L},o)$.

Proposición 2.2:

Sea $\mathcal{L}$ el grupo de Lorentz, $\beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ con matriz asociada $B(\beta \rightleftarrows B)$, y η la matriz asociada a $\langle,\rangle : \mathbb{R}^4 x\, \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $\beta\in \mathcal{L}$ si y solo si $B^T\eta\, B = \eta$.

Demostración:

Sea $\beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ con matriz asociada B entonces
$\beta \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \langle\beta(x), \beta(y)\rangle = \langle x,y\rangle \Longleftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^4$
$(Bx)^T\eta\, (By) = x^T\eta\, y \Longleftrightarrow x^TB^T\eta\, By = x^T\eta\, y\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}^4 \Longleftrightarrow B^t\eta\, B = \eta$

Proposición 2.3:

El grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ es un grupo topologico.

Demostración:

Mediante la identificación $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ con $\mathcal{M}_{4x4}(\mathbb{R})$ y la identificación de $\mathcal{M}_{4x4}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{16}$ proveemos a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de la topología usual de $\mathbb{R}^{16}$. Ahora se provee a $\mathcal{L}$ de la topología inducida de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Para mostrar que $(\mathcal{L},\circ)$ es un grupo topológico bastará con observar que $(\mathcal{L},\circ)$ es un subgrupo del grupo topológico $(GL(\mathbb{R}^4),\circ)$ y siendo la topología de $\mathcal{L}$ la inducida por la de $GL(\mathbb{R}^4)$ obtenemos el resultado.

Proposición 2.4 :

El grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ tiene cuatro componentes conexas.

Demostración:

Sea $\beta \in \mathcal{L}$ entonces $B^T \eta\, B = \eta$ luego

$\det(B^T\eta\, B) = \det \eta$ pero $\det(B^T\eta\, B) = \det\eta$ entonces

$$\det B^T \det\eta \,.\, \det B = \det\eta$$

$$\det B^T \det B = 1$$

$$(\det B)(\det B) = 1$$

$$(\det B)^2 = 1$$

$$\det B = \pm 1$$

Por otro lado tenemos que para el vector basal $e_0 = (1,0,0,0)$

$\langle e_0,e_0\rangle = 1$ y tambien $\langle e_0,e_0\rangle = \langle \beta e_0,\beta e_0\rangle = \beta_{00}^2 - \beta_{10}^2 - \beta_{20}^2 - \beta_{30}^2$ donde $\langle \beta e_0,\beta e_0\rangle = \beta_{00}^2 - (\beta_{10}^2+\beta_{20}^2+\beta_{30}^2) = \beta_{00}^2 - K = 1.$ luego

$\beta_{00}^2 \geqslant 1$ entonces $\beta_{00} \geqslant 1$ o $\beta_{00} \leqslant -1$ y de aquí podemos presentar los cuatro conjuntos disjuntos siguientes.

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ B \in \mathcal{L} \ : \ \det B = 1; \quad \beta_{00} \geqslant 1 \right\}$$
$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ B \in \mathcal{L} \ : \ \det B = -1; \quad \beta_{00} \geqslant 1 \right\}$$
$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \left\{ B \in \mathcal{L} \ : \ \det B = 1; \quad \beta_{00} \leqslant -1 \right\}$$
$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ B \in \mathcal{L} \ : \ \det B = -1; \quad \beta_{00} \leqslant -1 \right\}$$

Luego $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$ donde podemos presentar un elemento de cada uno de los conjuntos; como son:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+^\uparrow ; \qquad I_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = \eta \in \mathcal{L}_-^\uparrow$$

$$I_t = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -\eta \in \mathcal{L}_-^\downarrow \ ; \ I_{s.t} = I_s \cdot I_t = \eta \cdot -\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora es suficiente mostrar que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es conexa. Consideremos el conjunto $H = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : \langle x, x\rangle = 1, \ x_0 \geqslant 1 \right\}$ ciertamente $\phi(x_0, \ldots, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ define un difeomorfismo de H con $\mathbb{R}^3$. Si $v^0 \in H$ entonces $\langle v^0, v^0 \rangle = 1$, y podemos completar con v^0 una base orto-normal de $\mathbb{R}^4$, decimos que $v^0, \ldots, v^3$ con la matriz de vectores columnas $[v^0, \ldots, v^3] \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ (notese que $v_0^0 > 1$, como $v^0 \in H$; podemos siempre cambiar v^3 por $-v^3$ donde tenemos que $\det [v^0, \ldots, v^3] = 1$).

Si $e_0 = (1,0,0,0) \in H$; entonces $[v^0, \ldots, v^3]\, e_0 = v^0$.
Esto es la aplicación $\pi : \mathcal{L}_+^\uparrow \longrightarrow H$ dada por $\pi(B) = Be_0$ es sobre, vemos que $\pi^{-1}(e_0) = \left\{ B \in \mathcal{L}_+^\uparrow \ / \ Be_0 = e_0 \right\} = \overline{SO}(3)$, y tambien

$\pi^{-1}(v^0) = [v^0, \ldots, v^3]\ \overline{SO}(3)$ por lo tanto $\overline{SO}(3)$ actua en $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ por la derecha, en tal via $\pi : \mathcal{L}_+^{\uparrow} \longrightarrow H$ es un Haz Fibrado principal sobre $H \cong \mathbb{R}^3$ con grupo $\overline{SO}(3) \cong SO(3)$. Todo Haz sobre $\mathbb{R}^n$ es trivial, y también $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ es topologicamente $\mathbb{R}^3 x SO(3)$ el cual es conexo.

Observación 2.5:

Sea $H(2,\mathbb{C})$ el espacio de las matrices hermitianas de orden 2 o sea $A \in H(2,\mathbb{C})$ sí y solo sí $A^T = \overline{A}$.

Una base para $H(2,\mathbb{C})$ esta dada por:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposición 2.6:

Cada una de las funciones $\varphi ; \psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow H(2,\mathbb{C})$ definidas por: $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) ; \psi(x) \in H(2,\mathbb{C})$ donde

$$\varphi(x) = \underset{\sim}{X} = x_0 \tau^0 + x_1 \tau^1 + x_2 \tau^2 + x_3 \tau^3$$

y

$$\psi(x) = \tilde{X} - x_0 \tau^0 - x_1 \tau^1 - x_2 \tau^2 - x_3 \tau^3$$

son isomorfismos.

Demostración:

Tenemos que

$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow H(2,\mathbb{C})$ tal que $\varphi(x) - x_0 \tau^0 + x_1 \tau^1 + x_2 \tau^2 + x_3 \tau^3$

y $\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow H(2,\mathbb{C})$ tal que $\psi(x) = x_0 \tau^0 - x_1 \tau^1 - x_2 \tau^2 - x_3 \tau^3$

a) tanto φ, como ψ son homomorfismos, o sea:

$\forall x,y \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= (x_0+y_0)\,\tau^0 + (x_1+y_1)\,\tau^1 + (x_2+y_2)\,\tau^2 + (x_3+y_3)\,\tau^3 \\
&= x_0\,\tau^0 + y_0\,\tau^0 + x_1\,\tau^1 + y_1\,\tau^1 + x_2\,\tau^2 + y_2\,\tau^2 + x_3\,\tau^3 \\
&\quad + y_3\,\tau^3 \\
&= x_0\,\tau^0 + x_1\,\tau^1 + x_2\,\tau^2 + x_3\,\tau^3 + y_0\,\tau^0 + y_1\,\tau^1 + y_2\,\tau^2 \\
&\quad + y_3\,\tau^3 \\
&= \varphi(x) + \varphi(y).
\end{aligned}$$

así tambien $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

b) Además;

φ es inyectiva.

$\forall x,y \in \mathbb{R}^4$ si $\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow x = y$.

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow x_0\,\tau^0 + x_1\,\tau^1 + x_2\,\tau^2 + x_3\,\tau^3 = y_0\,\tau^0 + y_1\,\tau^1 + y_2\,\tau^2 + y_3\,\tau^3$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ix_2 \\ ix_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy_2 \\ iy_2 & -0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 & 0 \\ 0 & -y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0+y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1+iy_3 & y_0 - y_3 \end{pmatrix}$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} x_0+x_3 = y_0+y_3 \\ x_1-ix_2 = y_1-iy_2 \\ x_1+ix_2 = y_1+iy_2 \\ x_0-x_3 = y_0-y_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y$$

c) Se comprueba sin dificultad que φ es suryectiva.

Proposición 2.7:

Dadas φ y ψ como en la proposición 2.6 se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}^4$:

1) $\det \varphi(x) = \det \psi(x) = \langle x,x \rangle$

2) $\varphi(x).\psi(x) = \psi(x).\varphi(x) = \langle x,x \rangle\, I$

Demostración:

1) Puesto que $\varphi(x) = x_0\tau^0 + x_1\tau^1 + x_2\tau^2 + x_3\tau^3$

y $\psi(x) = x_0\tau^0 - x_1\tau^1 - x_2\tau^2 - x_3\tau^3$

entonces tenemos que

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ix_2 \\ ix_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{X}$$

además

$$\det \varphi(x) = \det \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = (x_0+x_3)(x_0-x_3)-(x_1+ix_3)(x_1-ix_2) = x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Ahora

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -ix_2 \\ ix_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0-x_3 & -x_1+ix_2 \\ -x_1-ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix} = \tilde{x}$$

$$\det \Psi(x)=\det\begin{pmatrix} x_0-x_3 & -x_1+ix_2 \\ -x_1-ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix} = (x_0-x_3)(x_0+x_3)-(-x_1-ix_2)(-x_1+ix_2)=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

$$\det \varphi(x) = \det \Psi(x) = \langle x,x\rangle \ .$$

2) $$\varphi(x).\Psi(x) = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0-x_3 & -x_1+ix_2 \\ -x_1-ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 & 0 \\ 0 & x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \langle x,x\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle x,x\rangle\ I$$

Tambien

$$\Psi(x).\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0-x_3 & -x_1+ix_2 \\ -x_1-ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 & 0 \\ 0 & x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \end{pmatrix} = \langle x,x\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \langle x,x\rangle\ I$$

$$\varphi(x).\ \Psi(x) = \Psi(x).\ \varphi(x) = \langle x,x\rangle\ I$$

Observación 2.8:

Recordemos que $SL(2,\mathbb{C})$ es el grupo de las matrices complejas A, de orden 2 con determinante igual a 1.

Proposición 2.9:

Sea $A \in SL(2,\mathbb{C})$ y $A^* = A^t$; sea $\Lambda: SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$

dada por: $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$ y $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $(\Lambda(A)(x))_{\sim} = A\underset{\sim}{x}A^*$, entonces Λ es un homomorfismo suryectivo con $\Lambda^{-1}(I) = \pm I$.

Demostración:

Como tenemos que $A\,\varphi(x)A^*$ es lineal en x o sea; $\forall x, y \in \mathbb{R}^4$; $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$ se tiene que

$A\,\varphi(x+y)A^* = A\left[\varphi(x)+\varphi(y)\right]A^* = \left\{A\left[\varphi(x)+\varphi(y)\right]\right\}A^*$

$\left[A\,\varphi(x) + A\,\varphi(y)\right]A^* = A\,\varphi(x)A^* + A\,\varphi(y)A^*$. Entonces tambien $\Lambda(A)$ es lineal.

Veamos ahora que Λ esta bien definida, o sea que $\forall A \in SL(2,\mathbb{C}), \Lambda(A) \in \mathcal{L}$.

Por el teorema anterior tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}^4$,

$$\langle\Lambda(A)(x),\Lambda(A)(x)\rangle = \det\left[(\Lambda(A)(x))_{\sim}\right] = \det(A\,\varphi(x)A^*)$$
$$= \det A \det\varphi(x) \det A^* - \det\varphi(x) = \langle x,x\rangle$$

donde $\Lambda(A) \in \mathcal{L}$

Probaremos ahora que $SL(2,\mathbb{C})$ es conexo.

En verdad, sea $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, definida como anteriormente, o sea $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$ $\pi(A) = Ae_o$ ó $\pi(A) = A\begin{pmatrix}1\\o\end{pmatrix}$; esto es

$$\pi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$

Notese que $\pi^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} / \ b \quad \mathbb{C}\right\} = \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$

Vemos que $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es un H.F.P con grupo $\mathbb{C}$.

Existe una sección (global) $\sigma : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$

definida por

$$\Gamma(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b}/\gamma \\ b & \bar{a}/\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{donde}$$

$\gamma = a\bar{a} + b\bar{b}$. Por el teorema II. 2.3 tenemos que $SL(2,\mathbb{C})$ es difeomorfica a $(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \cong S^3 \times R)$ $S^3 \times R^3$ que es conexo. Esto es $\Lambda(SL(2,\mathbb{C})) \subseteq \mathcal{L}_+^\uparrow$. Supongase que $\Lambda(A) = I$.

Entonces $\underset{\sim}{x} = A\underset{\sim}{x} A^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$.

Escribiendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y tomando $\underset{\sim}{x} = \tau^0 = I$, obtenemos $a\bar{a}+b\bar{b} = 1$; $c\bar{c}+d\bar{d} = 1$. Luego tomando $\underset{\sim}{x} = \tau^3$ obtenemos $a\bar{a}-b\bar{b} = 1$; $c\bar{c}-d\bar{d} = 1$. Ahora tenemos que $b=0$ y $c=0$, de donde $1=\det A= ad$ y $a\bar{a} = 1$. Esto es $d=\bar{a}$ y además

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Tomando $\underset{\sim}{x} = \tau^1$ tenemos $a^2 = 1$, de donde $a^2 = a\bar{a} = 1$, y así $\Lambda^{-1}(I) = \{\pm I\}$.

Notemos que $\Lambda(AB) = \Lambda(A)\Lambda(B)$, dado que

$$(\Lambda(AB)(x))_\sim = AB\underset{\sim}{x}(AB)^* = A(B\underset{\sim}{x}B^*)A^* = A((\Lambda(B)(x))_\sim)A^* =$$
$$= (\Lambda(A)\Lambda(B)(x)))_\sim$$

Esto es Λ es un homomorfismo, y en particular, Λ lleva la curva $t \longrightarrow \exp(tA)$ de $S\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$ en la curva $t \longrightarrow \exp(td\Lambda_1(A))$

de aquí $(d\Lambda)_I : T\, S\mathcal{L}(2C) \longrightarrow T\mathcal{L}$ es un difeomorfismo donde $\dim(TS\,\mathcal{L}(2\mathbb{C})) = \dim(S^3 \times R^3) = 6 = \dim(SO(3) \times \mathbb{R}^3) = \dim \mathcal{L}_+^\uparrow = \dim \mathcal{L}$.
ya que $d\Lambda_A = dl_{\Lambda(A)} \circ (d\Lambda)_I \circ dl_A^{-1}$, donde se sigue que Λ es un difeomorfismo local sobre un subgrupo abierto $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Ahora $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es la unión disjunta de conjuntos abiertos de $\mathcal{L}_o$ en $\mathcal{L}_+^\uparrow$ donde la conexidad de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ implica que $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_o - \Lambda(SL(2,\mathbb{C}))$ y por tanto Λ es suryectiva.

3.- REPRESENTACION LINEAL DE GRUPOS.

Definición 3.1:

Una representación lineal del grupo finito G en el espacio vectorial V de dimensión "n" es un homomorfismo ρ del grupo G en el grupo $G\ell(V)$ de los automorfismos de V, tal que $\forall s,g \in G$

$$\rho(sg) = \rho(s) \circ \rho(g)$$

Observación 3.2:

De la definición anterior tenemos que

$$\rho(1) = I$$
$$\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$$

Denotaremos $\rho(s) = \rho_s$

Dada ρ se dice que V es un espacio de representación de G.

Definición 3.3:

Sea $\rho: G \longrightarrow G\ell(V)$ una representación lineal, y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que W es estable por las operaciones de G, es decir $\rho_s(W) \subset W \quad \forall s \in G$. En este caso la restricción de ρ_s a W que denotamos ρ_s^W es un automorfismo de W y ciertamente $\rho^W(sg) = \rho^W(s) \circ \rho^W(g)$. Luego $\rho^W : G \longrightarrow G\ell(W)$ es una representación lineal de G en W.

Decimos que W es una subrepresentación de V.

Definición 3.4:

Una representación $\rho : G \longrightarrow G\ell(V)$ se dice irreducible si $V \neq \{0\}$ y ningún subespacio de V es estable por G, excepto $\{0\}$ y V.

Teorema 3.5:

Sea ρ una representación lineal finita de un grupo de Lie compacto G en $G\ell(V)$, y sea W un subespacio de V estable por G. Existe entonces, un subespacio W^{o} suplementario de W en V que es estable por G.

Demostración:

Sea W' un suplementario de W en V, y p el proyector de V sobre W que le corresponde.

Formemos la mediana de p como sigue:

$$p^{o} = \int_G \rho_x p\, \rho^{-1}\ dx,$$

donde la integral es de Haar. De aquí tenemos que,

$$p^{o}(v) = \int_G \rho_x p . \rho_x^{-1}(v)\ dx \qquad \forall v \in V$$

Puesto que p aplica V en W y ρ_x deja invariante W, p^{o} aplica V en W; por otra parte, si $v \in W$, $\rho_x^{-1}(v) \in W \Longrightarrow p\, \rho_x^{-1}(v) = \rho_x^{-1}(v) \Rightarrow \rho_x p \rho_x^{-1}(v) = v.$ y por tanto $p^{o}(v) = v$, y asi p^{o} es un proyector de V sobre W; al cual corresponde un suplementario de W en V. Sea $W^{o} = (I - p^{o})(V)$.

Mostraremos ahora que W^{o} es invariante por ρ .
tenemos que $\rho_g . p^{o} = p^{o} . \rho_g \ \forall g \in G.$

En efecto:

Al calcular $\rho_g\, p^{o}\, \rho_g^{-1}$ tenemos;

$$\rho_g p^{o} \rho_g^{-1} = \int_G \rho_g \rho_x p \rho_x^{-1} \rho_g^{-1}\ dx = \int_G \rho_{gx}\, p\, \rho_{gx}^{-1}\ dx = p^{o}$$

y resulta que si $y \in W^0$, $p^0(y) = 0$ donde $p^0 \rho_g(y) = \rho_g\, p^0(y) = 0$ es decir $\rho_g(y) \in W^0$; $\forall g \in G$ y esto es W^0 es invariante por

Teorema 3.6:

Todo espacio de representación lineal finita es suma directa de espacios de representaciónes irreducibles.

Demostración:

Sea V un espacio de representación lineal de G y razonando por inducción sobre la dimensión de V tenemos que:

1) Si $\dim(V) = 0$, el teorema es evidente puesto que $\{0\}$ es suma directa de la familia vacia de representaciones irreductibles, y por lo tanto el teorema queda demostrado.

2) Si $\dim(V) = n \geq 1$ y V es irreductible, el teorema tambien es cierto.

(H.I) Supongamos valido el teorema para todo V tal que $\dim(V) < n$

3) Si $\dim(V) = n \geq 1$ y V no es irreductible, entonces por teorema anterior podemos descomponer a V en suma directa de $W' \oplus W''$ con $\dim(W') < \dim(V) = n$ y $\dim(W'') < \dim(V) = n$. Ahora por la (H.I) W' y W" son suma directa de representaciones irreductibles y por tanto lo mismo le ocurre a V, y así queda demostrado el teorema.

Observación 3.7:

Sea ρ una representación de $S\ell(2,\mathbb{C})$ en $G\ell(4,\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \qquad \forall A \in S\ell(2,\mathbb{C})$$

es obvio que ρ es suma directa de dos representaciones irreductibles; (puesto que ρ es lineal y finita) dadas por:

$$\rho^{(\frac{1}{2},0)} : S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\ell(2,\mathbb{C})$$

$$\rho^{(0,\frac{1}{2})} : S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\ell(2,\mathbb{C})$$

y tal que

$$\rho^{(\frac{1}{2},0)}(A) = A \simeq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{(0,\frac{1}{2})}(A) = A^{*-1} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

Definición 3.8:

Dos representaciones $\rho^{1}: G \longrightarrow G\ell(V^{1})$ y $\rho^{2} : G \longrightarrow G\ell(V^{2})$ son equivalentes si existe un isomorfismo $f: V^{1} \longrightarrow V^{2}$ tal que $f \circ \rho^{1}_{x} = \rho^{2}_{x} \circ f \quad \forall x \in G$.

Teorema 3.9:

Las representaciones $\rho^{(\frac{1}{2},0)}$ y $\rho^{(0,\frac{1}{2})}$ no son equivalentes.

Demostración:

Demostraremos que para todo isomorfismo f de $G\ell(2,\mathbb{C})$ no se verifica que $f \circ \rho^{(\frac{1}{2},0)} = \rho^{(0,\frac{1}{2})} \circ f$ o sea que $f \circ \rho^{(\frac{1}{2},0)} f^{-1} \neq \rho^{(0,\frac{1}{2})}$.

Como $f: G\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\ell(2,\mathbb{C})$ es una transformación lineal, existe una matriz asociada a f; sea B dicha matriz. Veremos que existe $A \in S\ell(2,\mathbb{C})$ tal que $BAB^{-1} \neq A^{*-1}$.

En efecto:

Basta tomar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \in S\ell(2,\mathbb{C}) \text{ luego } A^{*-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \quad \text{y así}$$

Para

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{con } b_1b_4-b_2b_3 = 1 \text{ y } B^{-1} = \begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix}$$

tenemos que
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2ib_4 & 2ib_2 \\ \frac{-b_3 i}{2} & \frac{b_1 i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ib_1b_4-\frac{ib_2b_3}{2} & 2ib_1b_2+\frac{ib_1b_2}{2} \\ -2ib_3b_4-\frac{ib_3b_4}{2} & 2ib_2b_3+\frac{ib_1b_4}{2} \end{pmatrix}$$

Luego $\frac{5}{2}\ ib_1b_2 = 0 \Longrightarrow b_1 = 0$ ó $b_2 = 0$

$-\frac{5}{2}\ ib_3b_4 = 0 \Longrightarrow b_3 = 0$ ó $b_4 = 0$

de donde

$$-2ib_1b_4 - \frac{ib_2b_3}{2} \neq -\frac{1}{2}i$$

$$2ib_2b_3 + \frac{ib_1b_4}{2} \neq 2i$$

y así $B\,A\,B^{-1} \neq A^{*-1} \qquad \forall B \in G\ell(2,C)$

Teorema 3.10:

No existe representación $\rho' : \mathcal{L}_+^{\uparrow} \longrightarrow G\ell(4,\mathbb{C})$ tal que $\rho'(\Lambda(A)) = \rho(A)$, con $A \in S\ell(2,\mathbb{C})$ y ρ representación del grupo $S\ell(2,\mathbb{C})$ en $G\ell(4,\mathbb{C})$.

Demostración:

Puesto que $\Lambda : S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$, tenemos que $\Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow \ \forall A \in S\ell(2,\mathbb{C})$.

Ahora supongamos que ρ' existe, entonces $\rho'(I) = I$.

Además sabemos que $\Lambda(\pm I) = I$ con $I \in S\ell(2,\mathbb{C})$, luego $\rho(I) = I$ y $\rho(-I) = -I$ y así tenemos $\rho'(I) = \rho'(\Lambda(-I)) = \rho(-I) = -I$, donde $\rho'(I) = -I$ lo cual es una contradicción, luego ρ' no existe.

Ejemplo 3.11:

Examinemos un poco el estado físico paradógico, tal que el campo de electrón de Dirac es transformado sobre negativo cuando el espacio pasa una rotación completa.

Sea
$$A_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \in S\ell(2,\mathbb{C})$$

Mostremos que $\Lambda(A) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es una rotación alrededor del eje X_3 por 2θ, con x_0 fijo realmente.

$$(\Lambda(A_\theta)x)_\sim = A_\theta \underset{\sim}{x} A_\theta^* = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & e^{-2\theta i}(x_1-ix_2) \\ e^{2\theta i}(x_1+ix_2) & x_0-x_3 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que $\Lambda(A_\theta)$ deja a x_0 y x_3 fijo, mientras que x_1 y x_2 cambian de acuerdo a la aplicación $x_1+ix_2 \longrightarrow e^{2i\theta}(x_1+ix_2)$. Si $\theta = \pi$ entonces $\Lambda(A_\pi) = I$ es una rotación de 2π, pero $\rho(A_\pi) = -I$, y por ende para $\psi \in (P,\mathbb{C}^4)$, $\psi(pA_\pi) = \rho(A_\pi)^{-1}.\psi(p) = -\psi(p)$ donde los campos de electron de Dirac serán los campos de partícula en $C(P,\mathbb{C}^4) \equiv \{\psi : P \longrightarrow \mathbb{C}^4 / \psi(pA) = \rho(A^{-1})\,\psi(p)\}$.

Observación 3.12:

Las representaciones irreductibles de $S\ell(2,\mathbb{C})$ con espacios de representación compleja, forman una familia de doble índice $\rho^{(\mu,\tau)}$ donde μ y τ se escogen independientemente del conjunto $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right\}$.

Para una representación irreductible $\rho^{(\mu,\tau)}$ de $S\ell(2,\mathbb{C})$ se tiene:

$$\rho^{(\mu,\tau)} = \underbrace{\rho^{(\frac{1}{2},0)} \otimes \rho^{(\frac{1}{2},0)} \otimes \cdots \otimes \rho^{(\frac{1}{2},0)}}_{2\mu\text{ - veces}} \otimes$$

$$\underbrace{\rho^{(0,\frac{1}{2})} \otimes \cdots \otimes \rho^{(0,\frac{1}{2})}}_{2\tau\text{-veces}}$$

Con espacio de representación dado por el espacio de tensores $T^{(\mu,\tau)}$ y de dimensión $(2\mu+1)(2\tau+1)$ (Ver)

Definición 3.13:

Sea $\rho^{(\mu,\tau)}$ una representación irreductible de $S\ell(2,\mathbb{C})$. Llamaremos "SPIN" de la representación $\rho^{(\mu,\tau)}$ al número $\mu+\tau$.

Observese que para una representación irreductible $\rho^{(\mu,\tau)}$ de $S\ell(2,\mathbb{C})$ se tendra que:

$\rho^{(\mu,\tau)}(-I) = (-1)^{2(\mu+\tau)}\,(I)$ con lo cual

$\rho^{(\mu,\tau)}(-I) = I$ si $\mu+\tau$ es un entero y

$\rho^{(\mu+\tau)}(-I) = -I$ si $\mu+\tau$ es múltiplo de un medio.

Así la propiedad examinada en el ejemplo (3-11) es característica de las partículas con spin múltiplo de un medio.

4.- CONEXION DE LEVI-CIVITA.

4.1 Preliminares:

Sea $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $\langle , \rangle$ es el producto escalar de indice (r,s) en $\mathbb{R}^n$, si para todo $v,w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$\langle v,w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_r w_r - v_{r+1} w_{r+1} \dots - v_{r+s} w_{r+s}$ donde

$(1 \leqslant r,s < n;\ r+s = n)$.

El producto escalar en $\mathbb{R}^4$ dado por $\langle v,w \rangle = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 - v_4 w_4$ es un producto escalar de indice (1,3).

Definición 4.2:

Sea $T^{02}(V) = \left\{ f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ /\ f \text{ es bilineal} \right\}$.

Una métrica sobre un espacio vectorial real V es un elemento $g \in T^{02}(V)$ tal que g es simétrica y no degenerada, esto es $g(x,y) = 0$ $\forall y \in V$ implica que $x = 0$.

Definición 4.3:

Un elemento g de $T^{02}(V)$ es una métrica de indice $(r,s)(1 \leqslant r,s < n, r+s=n)$ si y solo si g es métrica, y existe una base $e_1,\dots,e_n$ de V para el cual $g(x,y) = \underbrace{x_1 y_1 + \dots + x_r y_r}_{r} - \underbrace{x_{r+1} y_{r+1} - \dots - x_{r+s} y_{r+s}}_{s}$ $\forall x,y \in V$ con $x = \sum x_i e_i$ e $y = \sum y_i e_i$ o sea la matriz asociada a g es diagonal con $\underbrace{1,\dots,1}_{r}$, $\underbrace{-1,\dots,-1}_{s}$ en la diagonal principal respecto a la base $e_1,\dots,e_n$.

Ejemplos 4.4:

1- El producto escalar $\langle , \rangle$ de indice (1,3) en $\mathbb{R}^4$ es una métrica de indice (1,3).

2- El producto escalar $\langle , \rangle$ de indice (r,s) en $\mathbb{R}^n$ es una métrica de indice (r,s).

Definición 4.5:

Sea V un espacio vectorial real de dimensión "n". Una base $e_1,\dots,e_n$ de V es ortonormal respecto a la métrica g si y solo si

$$g(e_i e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \pm 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Definición 4.6:

Sea V un espacio vectorial real de dimensión "n", g una métrica sobre V, $T^{02}(\wedge^k(V)) = \left\{ \ell : \wedge^k(V) x \wedge^k(V) \longrightarrow R / \ell \text{ bilineal} \right\}$ una métrica inducida por g es un elemento $\tilde{g}$ de $T^{02}(\wedge^k(V))$ definida de la manera siguiente: Sea $e_1,\dots,e_n$ una base de V y sea $g_{ij} = g(e_i,e_j)$, consideremos la matriz $(g_{ij})_{nxn}$ y su matriz inversa $(g^{ij})_{nxn}$. Sean $\alpha, \beta \in \wedge^k(V)$, con $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_k}$ donde $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ es antisimetrica en los indices y $\beta = \sum \beta_{j_1 \dots j_k} e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_k}$ donde $\beta_{j_1 \dots j_k} \in \mathbb{R}$ es antisimetrica en los indices.

Definimos $\tilde{g}(\alpha, \beta) = 1/k! \sum g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_k j_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} \beta_{j_1 \dots j_k}$ para $\alpha \beta \in \wedge^0(V)$ definimos $\tilde{g}(\alpha, \beta) = \alpha\beta$

Se comprueba que $\tilde{g}(\alpha, \beta)$ es independiente de la elección de la base de V.

METRICA SOBRE UNA VARIEDAD M.

Definición 4.7:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n", consideremos

$$\mathcal{T}^{02}(M) = \left\{ S: M \longrightarrow T^{0,2}(M) \mid S_x \in T^{0,2}(T_x M) \right.$$

Un elemento g de $\mathcal{T}^{0,2}(M)$ es una métrica sobre M si el elemento g_x de $T^{0,2}(T_x M)$ $\forall x \in M$ es una métrica sobre el espacio vectorial $T_x M$.

Definición 4.8:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n". Un elemento g de $\mathcal{T}^{0,2}(M)$ es una métrica de indice $(r,s)(1\leq r,s<n,\ r+s=n)$ sobre M, si el elemento g_x de $T^{0,2}(T_xM)$ $\forall x\in M$ es una métrica de indice (r,s) sobre el espacio vectorial T_xM.

Definición 4.9:

Sea $\mathcal{O}(r,s)$ el subgrupo del grupo de los automorfismos de $\mathbb{R}^n$, $G\ell(n,\mathbb{R})$ que preserva el $\langle , \rangle$ de indice (r,s) sobre $\mathbb{R}^n$, en el sentido siguiente $A\in\mathcal{O}(r,s)$ si y solo si $\langle Av,Aw\rangle = \langle v,w\rangle$ $\forall v,w\in\mathbb{R}^n$

Observación 4.10:

1- Se comprueba sin dificultad que $\mathcal{O}(r,s)$ es un grupo de Lie.

2- Si η es la matriz diagonal de orden nxn tal que la diagonal principal de la forma $(\underbrace{1,\ldots 1}_{r},\ \underbrace{-1,\ldots -1}_{s})$ entonces para los vectores columnas $v,w\in\mathbb{R}^n$ tenemos que $v^T\eta\, w - \langle v,w\rangle$, y $A\in\mathcal{O}(r,s)$ si y solo si $A^T\eta\ A=\eta$.

Proposición 4.11:

Si la aplicación A de $(-\varepsilon,\varepsilon)$ en $\mathcal{O}(r,s)$ es una curva con $A(0)$ I, matriz identidad, entonces $\langle A'(0)v,w\rangle + \langle v,A'(0)w\rangle = 0$.

Demostración:

Se comprueba la afirmación derivando la expresión $\langle A(t)v,\ A(t)w\rangle = \langle v,w\rangle$.

Observación 4.12:

De la proposición 4.11 resulta que el algebra de Lie de $\mathcal{O}(r,s)$ es $\mathcal{O}(r,s) = \left\{ B\in\mathcal{G}\mathcal{L}(n,\mathbb{R})/\ \langle Bv,w\rangle + \langle v,Bw\rangle = 0\right\}$ $= \left\{ B\in\mathcal{G}\mathcal{L}(n,\mathbb{R})/\ B^T\eta + \eta B = 0\right\}$ donde $\mathcal{G}\mathcal{L}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie $G\mathcal{L}(n,\mathbb{R})$.

HAZ DE MARCOS ORTONORMALES.

Definición 4.13:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n". Llamaremos un marco $x \in M$, a un isomorfismo $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$.

Al conjunto de todos los marcos en x lo denotaremos por $L(M)_x$. Y sea

$$L(M) = \bigsqcup_{x \in M} L(M)_x \text{ (unión disjunta)}$$

es decir cada elemento de L(M) es un par ordenado (x,u_x) donde $x \in M$, u_x es un isomorfismo de R^n sobre $T_x M$.

Observación 4.14:

Tambien se puede expresar la unión disjunta en la forma siguiente:

$$L(M) = \bigsqcup_{x \in M} \{x\} \times L(M)_x$$

Definición 4.15:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n" y con metrica g. Un marco ortonormal en $x \in M$ es un marco $u \in L(M)_x$ tal que $g(u(v),u(w)) = \langle v,w \rangle$.

Al conjunto de todos los marcos ortonormales en x lo denotamos por $F(M)_x$.

Observación 4.16:

1. Consideramos la unión disjunta $F(M) - \bigsqcup_{x \in M} F(M)_x$, es decir cada elemento de F(M) es un par ordenado (x,u_x) donde $x \in M$ y u_x es un marco ortonormal en x.

Definimos la aplicación $\pi : F(M) \longrightarrow M$ por $\pi(u) = x$, si $u \in F(M)_x$.

2. Sea $u \in F(M)_x$, $\pi(u) = x$ y $A \in \mathcal{O}(r,s)$ entonces la composición $uoA \in F(M)_x$. Esto determina una aplicación de $F(M) \times \mathcal{O}(r,s) \longrightarrow F(M)$ que designamos con ϕ, y escribimos

$\phi(u,A)$ $u o A$.

Teorema 4.17:

Sea M una variedad diferenciable de dimensión "n", con métrica g de indice (r,s).

$\mathcal{O}(r,s)$ el grupo ortonormal de Lie, entonces $(F(M), \pi, M, \mathcal{O}(r,s))$ es un haz fibrado principal.

Demostración:

Introduciremos sin mucha dificultad una estructura diferenciable en F(M) y probaremos que tanto $\pi: F(M) \longrightarrow M$ como $\phi: F(M) \times \mathcal{O}(r,s) \longrightarrow F(M)$ son diferenciables.

Sea $W \subseteq M$ una vecindad coordenada con sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$, y consideremos los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ en W, asociados al sistema de coordenadas dado.

Definimos una aplicación $\sigma: W \longrightarrow F(M)$ de la manera siguiente: Consideramos la base canónica $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ donde tenemos la métrica de indice (r,s), para todo $y \in W$ hacemos $\sigma(y)(e_i) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_y \in T_yM$, resulta que $\sigma(y): \mathbb{R}^n \longrightarrow T_yM$ es un isomorfismo; pero se comprueba utilizando esta construcción que $g_y(\sigma(y)(e_i), \sigma(y)(e_j)) = \langle e_i, e_j \rangle$, por tanto $\sigma(y) \in F(M)_y$.

Ahora construimos $S_W: \pi^{-1}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(r,s)$ de la manera siguiente: Sea $u \in \pi^{-1}(W)$, luego u es un marco ortonormal en el punto $\pi(u) \in W$ además $\sigma(\pi(u))$ tambien es un marco ortonormal en el punto $\pi(u)$. Y se comprueba sin dificultad que $\sigma(\pi(u))^{-1} o u \in \mathcal{O}(r,s)$, luego podemos definir $S_W(u) = \sigma(\pi(u))^{-1} o u$. Se deduce de la construcción que $S_W(u o A) = S_W(u) o A$.

Ahora definimos $T_W: \Pi^{-1}(W) \longrightarrow W \times \mathcal{O}(r,s)$ por $T_W(u) = (\Pi(u), S_W(u))$, claramente T_W es biyectiva como $W \times \mathcal{O}(r,s)$ tiene estructura de variedad diferenciable podemos trasladar esta estructura mediante la biyección a $\Pi^{-1}(W)$ ya que $M = \coprod_{i \in j} W_i$ donde W_i son las vecindades coordenadas entonces $F(M) - \coprod_{i \in j} \Pi^{-1}(W_i)$, luego $F(M)$ admite una estructura de variedad diferenciable.

Ahora demostraremos que la familia de los $\Pi^{-1}(W)$, donde W recorre el atlas diferenciable de M es un atlas diferenciable de un haz fibrado principal. Sea W' otra vecindad coordenada con sistema de coordenada $x_1', \dots x_n'$ y campos vectoriales asociados $\frac{\partial}{\partial x_1'}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n'}$. Deducimos de

$T_W(u) = (\Pi(u), S_W(u))$ y

$T_{W'}(u) = (\Pi(u), S_W(u))$ para $y = \Pi(u) \in W \cap W'$ que

$T_{W'} o T_W^{-1}(y,A) = (y, S_{W'}(u)\, S_W(u)^{-1} A) = (y, g_{W'W}(y) A)$

Ahora hay que demostrar que $g_{W'W}: W \cap W' \longrightarrow \mathcal{O}(r,s)$ es diferenciable.

En efecto:

para $y = \Pi(u) \in W \cap W'$, $g_{W'W}(y) - S_{W'}(u) S_W(u)^{-1} - (\sigma'(y)^{-1} o\ u)(\sigma(y)^{-1} o\ u)^{-1} =$

$= \sigma'(y)^{-1}\sigma(y)$, pero esto justamente es la matriz Jacobiana cuyos elementos son $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i')$, acción del campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sobre la función diferenciable x_i', que son diferenciables sobre $W \cap W'$.

Por consiguiente las aplicaciones $T_{W'}, T_W \dots$ son difeomorfismos y por tanto son trivializaciones locales.

Las aplicaciones $\Pi: F(M) \longrightarrow M$ y $\phi: F(M) \times \mathcal{O}(r,s) \longrightarrow F(M)$ corresponden via las trivializaciones locales a las aplicaciones diferenciales de $W \times \mathcal{O}(r,s)$ en W y de $(W \times \mathcal{O}(r,s)) \times \mathcal{O}(r,s)$ en $W \times \mathcal{O}(r,s)$ y por lo tanto son diferenciable de 2.3 y 2.4 del Capítulo II se deduce que el H.F.P.

$\pi : F(M) \longrightarrow M$ es trivial si y solo si existe una sección de M en F(M), en otras palabras si existe una sucesión de campos vectoriales $x_1,\dots,x_n$ que son l.i en cada punto.

Definición 4.18:

A una 1-forma vectorial sobre F(M), $\varphi \in \bigwedge^1(F(M), \mathbb{R}^n)$ definida por $\varphi_u(x_u) = (u^{-1} \circ (d\pi)_u)(x_u)$ $\forall u \in F(M)$ y toda $x_u \in T_uF(M)$ llamamos una 1-forma canónica sobre F(M).

Observación 4.19:

Sea $\hat{\varphi} \in \bigwedge^1(L(M), \mathbb{R}^n)$ definida por $\hat{\varphi}_u(x_u) = (u^{-1} \circ (d\pi)_u)(x_u)$ $\forall u \in L(M)$ y toda $x_u \in T_u L(M)$ observemos que $\hat{\varphi}_u/T_uF(M) = \varphi_u$ por consiguiente $\hat{\varphi}/F(M) = \varphi$.

CAMPOS DE PARTICULAS.

Definición 4.20:

Sea (P,π, M, G) un haz fibrado principal, V un espacio vectorial real, y por consiguiente es una variedad diferenciable.

Supongamos que $L: G\times V \longrightarrow V$ es una acción por la izquierda de G sobre V entonces $L_g: V \longrightarrow V$ es un isomorfismo, o sea $L_g \in G\ell(V)$ $\forall g \in G$. A la aplicación $\rho: G \longrightarrow G\ell(v)$ definida por $\rho(g) = L_g$. Llamamos una representación de G asociada a la acción L.

Dos representaciones $\rho: G \longrightarrow G\ell(v)$ y $\rho': G \longrightarrow G\ell(v')$ son equivalentes si existe un isomorfismo lineal $T:V \longrightarrow V'$ tal que $T \circ L_g = L'_g \circ T$ $\forall g \in G$.

Definición 4.21:

Sea (P,π, M, G) un haz fibrado principal y V un espacio vectorial real. Supongamos que L es una acción por la izquierda de G en V.

Sea

$$C(P,V) = \left\{ \tau : P \longrightarrow V \ / \ \tau(y.g) = g^{-1}.\tau(y) \right\}$$

Cuando la acción de G sobre V determina una representación $\rho : G \longrightarrow G\ell(V)$ dada por $\rho(g) = L_g$ llamamos a los elementos de $C(P,V)$ <u>Campos de Partículas</u>.

<u>Definición 4.22:</u>

Sea (P,Π, M, G) un haz fibrado principal, ω una conexión 1-forma sobre P.

Podemos escribir cada $X \in T_yP$ como $X = X^V + X^H$ donde X^V es vertical o sea $(d\Pi)_y X^V = 0$ y X^H es horizontal con $\omega(X^H) = 0$.

<u>Definición 4.23</u>:

Sea (P,Π, M, G) un H.F.P. V espacio vectorial real $L: GxV \longrightarrow V$ $(L(g,x) = g.x)$ una acción, ϕ: $PxG \longrightarrow P$ es la acción libre del H.F.P.

Sea $\Lambda^k(P,V)$ el espacio de k-formas φ diferenciables v-valuadas en P tal que

a) Para $x_1,\ldots,x_k \in T_yP$ y $g \in G$ tenemos

$$\varphi_{y.g}((d\phi_g)_y x_1,\ldots,(d\phi_g)_y x_k) = g^{-1}.\varphi_y(X_1,\ldots,X_k) \text{ (esto es } \phi_g^*\varphi = g^{-1}.\varphi)$$

b) Si uno de los $X_1,\ldots,X_k$ es vertical entonces $\varphi_y(X_1,\ldots,X_k) = 0$.

Notese que en el caso especial en que $V = \mathfrak{g}$, y ρ^* la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$ dada por $\rho^*(g) = \delta Ad_g$ $\forall g \in G$ tenemos que $\Omega^w \in \Lambda^2(P,\mathfrak{g})$.

<u>Teorema 4.23</u>:

Sea (P,Π, M, G) un haz fibrado principal, $\mathcal{C}$ el espacio de todas las 1-formas de conexiones sobre P, entonces dada $\omega \in \mathcal{C}$ la aplicación $h : \Lambda^1(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{C}$ definida por $h(\theta) = \theta + \omega$ es biyectiva.

Demostración:

Sea $\theta : P \longrightarrow \bigsqcup_{y \in P} \Lambda^1 (T_yP, \mathcal{G})$ con la condición (a) y (b)

$\theta_y : T_yP \longrightarrow \mathcal{G}$

$\omega : P \longrightarrow \bigsqcup_{y \in P} \Lambda^1 (T_yP, \mathcal{G})$

$\omega_y : T_yP \longrightarrow \mathcal{G}$

$\theta + \omega : P \longrightarrow \bigsqcup_{y \in P} \Lambda^1 (T_yP, \mathcal{G})$

$(\theta + \omega)_y : T_yP \longrightarrow \mathcal{G}$ donde

$(\theta + \omega)_y = \theta_y + \omega_y$, y así

Sea $A \in \mathcal{G}$ entonces $A^* : P \longrightarrow TP$ campo vectorial

$\forall y \in P$, $A^*_y \in T_yP$ luego

$(\theta + \omega)_y(A^*_y) = \theta_y(A^*_y) + \omega(A^*_y) = 0 + A = A$, mientras que

$\phi^*_g(\theta + \omega) = \phi^*_g(\theta) + \phi^*_g(\omega) = \delta Ad_{g-1}(\theta) + \delta Ad_{g-1}(\omega) = \delta Ad_{g-1}(\theta + \omega)$ de donde $\theta + \omega = \mathcal{C}$

Ahora como $\theta + \omega \in \mathcal{C}$, entonces h es inyectiva, dado que

$\forall \theta, \tau \in \bar{\Lambda}^1 (P, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{C}$, si $h(\theta) = h(\tau) \Longrightarrow \theta = \tau$ en efecto $h(\theta) = h(\tau) \Longrightarrow \theta + \omega = \tau + \omega \Longrightarrow \theta = \tau$.

h es sobre, puesto que $\forall \omega' \in \mathcal{C}$, existe $\theta' \in \bar{\Lambda}^1(P, \mathcal{G})$ donde $\theta' = \omega' - \omega$ y tal que $h(\theta') = h(\omega' - \omega) = (\omega' - \omega) + \omega = \omega'$.

Luego h es biyectiva.

Definición 4.25:

Sea (P,Π, M, G) una haz fibrado principal, $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie del grupo de Lie G. Si $\varphi \in \Lambda^k(P,\mathfrak{g})$, definimos $\varphi^H \in \Lambda^k(P,\mathfrak{g})$ por $\varphi^H_g(X_1,\ldots X_k) = \varphi(X_1^H,\ldots X_k^H)$ donde $X_i \in T_yP$, $1 \leq i \leq k$.

Definición 4.26:

Sean (P,Π, M, G) un H.F.P, $\mathfrak{g}$ el algebra de Lie del grupo de Lie G, ω una conexión 1-forma sobre P y $d: \Lambda^k(P,\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(P,\mathfrak{g})$ la derivada exterior usual.

Definimos la aplicación $D^\omega : \Lambda^k(P,\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(P,\mathfrak{g})$ por $D^\omega\varphi = (d\varphi)^H$. A $D^\omega\varphi$ llamamos derivada covariante exterior de φ, y a la aplicación D^ω llamamos operador derivada covariante exterior.

Definición 4.27:

Sea (P,Π, M, G) un H.F.P, $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie del grupo de Lie G. Dada una conexión $\omega \in \Lambda^1(P,\mathfrak{g})$ al elemento $D^\omega\omega \in \Lambda^2(P,\mathfrak{g})$ llamamos curvatura de la conexión ω y designamos con Ω^ω. Cuando ω es considerada como un potencial llamamo a Ω^ω el campo fuerte de ω.

Definición 4.28:

Sea $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ el homomorfismo de álgebra de Lie, inducido por la representación $G \longrightarrow G\ell(V)$ o sea para $A \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$ tenemos que

$$A.v = d/dt(\exp t A).v|_{t=0}$$

Si $\varphi \in \Lambda^k(F(M),V)$ y $\rho \in \Lambda^j(F(M),\mathfrak{g})$, entonces definimos $\rho \dot{\wedge} \varphi \in \Lambda^{j+k}(F(M)$ por la fórmula

$$(\rho \dot{\wedge} \varphi)(X_1,\ldots X_{j+}) = \frac{1}{j!k!} \sum (-1)^\sigma \rho(X_{\sigma(1)},\ldots, X_{\sigma(j)}).$$

$\varphi(X_{\sigma(j+1)},\ldots,X_{\sigma(j+k)})$ donde σ es el rango de la permutación en

$\{1,\ldots,j+k\}$

Teorema 4.29:

Existe una única conexión ω llamada conexión de Levi-Cevita en F(M) con forma torsión nula o sea $D^{\omega}\varphi = 0$.

Demostración:

Sea $\mathscr{C}$ una conexión en F(M), además sabemos que cualquier haz fibrado principal admite una conexión, luego para la conexión $\mathscr{C}$, la aplicación de $\overline{\wedge}^1(F(M),\mathscr{G})$ en $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C}$ es el espacio de todas las conexiones 1-formas en F(M); y dada por $\tau \longrightarrow \tau + \mathscr{C}$, es biyectiva.

Probemos que existe una única $\sigma \in \overline{\wedge}^1(F(M),\mathscr{O}(r,s))$ tal que $D^{\mathscr{C}-\sigma}\varphi = 0$.

Puesto que para $\tau \in \overline{\wedge}^k(F(M),\mathscr{O}(r,s))$ tenemos que $D^{\omega}\tau = d\tau + \omega \dot{\wedge} \tau$, luego tenemos que $D^{\mathscr{C}-\sigma}\varphi = d\varphi + (\mathscr{C}-\sigma)\dot{\wedge}\varphi = \theta^{\mathscr{C}} - \sigma\dot{\wedge}\varphi$. Asi es suficiente probar que existe una única $\sigma \in \overline{\wedge}^1(F(M),\mathscr{O}(r,s))$ tal que $\theta^{\mathscr{C}} = \sigma\dot{\wedge}\varphi$. Notemos que $(\sigma\dot{\wedge}\varphi)(X,Y) = \sigma(X)\varphi(Y) - \sigma(Y)\varphi(X)$, de acuerdo a la definición (**). Y asumiendo que existe una σ tal que $\theta^{\mathscr{C}} = \sigma\dot{\wedge}\varphi$ tenemos

(A) $\langle\varphi(Z), \theta^{\mathscr{C}}(X,Y)\rangle = \langle\varphi(Z),\sigma(X)\varphi(Y)\rangle - \langle\varphi(X),\sigma(Y)\varphi(X)\rangle$ para todo $X,Y,Z \in T_{\mu(v)}F(M)$ y todo $\mu(v) \in F(M)$. Sea

$$\sum(X,Y,Z) = \langle\varphi(Z), \theta^{\mathscr{C}}(X,Y)\rangle + \langle\varphi(Y), \theta^{\mathscr{C}}(Z,X)\rangle - \langle\varphi(X), \theta^{\mathscr{C}}(Y,Z)\rangle$$

por (A) tenemos

$$\begin{aligned}\sum(X,Y,Z) = &\langle\varphi(Z),\sigma(X)\varphi(Y)\rangle - \langle\varphi(Z),\sigma(Y)\varphi(X)\rangle + \\ &+\langle\varphi(Y),\sigma(Z)\varphi(X)\rangle - \langle\varphi(Y),\sigma(X)\varphi(Z)\rangle - \\ &-\langle\varphi(X),\sigma(Y)\varphi(Z)\rangle + \langle\varphi(X),\sigma(Z)\varphi(X)\rangle\end{aligned}$$

Puesto que $\sigma(X) \in \mathscr{O}(r,s)$ tenemos que

$$\langle\varphi(Z),\sigma(X)\varphi(Y)\rangle = -\langle\sigma(X)\varphi(Z),\varphi(Y)\rangle$$

(B) $\sum(X,Y,Z) = 2\langle\varphi(Z),\Gamma(X)\varphi(Y)\rangle$

donde $\varphi(Z)$ y $\Gamma(Y)$ recorren independientemente sobre $\mathbb{R}^n$ así como Y y Z recorren sobre $T_{\mu(v)}F(M)$, vemos que $\Gamma(X)$ es unicamente determinada por (B). Esto es, asumiendo que Γ existe, tenemos que Γ es única. Ahora supongamos definida Γ por (B). Entonces $\Gamma(X)$ es lineal en X, donde

$\sum(X,Y,Z)$ es lineal en X, para $A\in\mathcal{O}(r,s)$ tenemos $\langle\varphi(d\phi_A Z),\theta(d\phi_A X,d\phi_A Y)\rangle$

$= \langle A^{-1}\varphi(X),\ A^{-1}\theta(X,Y)\rangle = \langle\varphi(Z),\ \theta(X,Y)\rangle$ esto es,

$\sum(d\phi_A X,\ d\phi_A Y,\ d\phi_A Z) = \sum(X,Y,Z)$, y también

$$2\langle A^{-1}\varphi(Z),\Gamma(d\phi_A X)A^{-1}\varphi(Y)\rangle - 2\langle\varphi(d\phi_A Z),\Gamma(d\phi_A X)\varphi(d\phi_A Y)\rangle$$

$$= \sum(d\phi_A X,\ d\phi_A Y,\ d\phi_A Z) = \sum(X,Y,Z)$$

$$= 2\langle\varphi(Z),\Gamma(X)\varphi(Y)\rangle = 2\langle A^{-1}\varphi(Z),\ A^{-1}\Gamma(X)A,A^{-1}\varphi(Y)\rangle$$

Esto es, $\Gamma(d\phi_A X) = A^{-1}\Gamma(X)A = \delta\,Ad_A 1\Gamma(X)$ donde $\sum(X,Y,Z)$ es nula para X,Y ó Z vertical, donde vemos que $\Gamma(X) = 0$ para X vertical. Esto es $\Gamma\in\overline{\wedge}^1(F(M),\mathcal{O}(r,s))$. Finalmente de (B) tenemos

$\langle\varphi(Z),\Gamma(X)\varphi(Y)\rangle - \langle\varphi(Z),\Gamma(Y)\varphi(X)\rangle = 1/2\sum(X,Y,Z) - \sum(Y,X,Z) =$

$= \langle\varphi(Z),\ \theta^{\mathcal{C}}(X,Y)\rangle$, donde $\theta^{\mathcal{C}} = \Gamma\dot{\wedge}\varphi$. Esto es lo requerido para la existencia de Γ.

CAPITULO IV

ECUACION DE DIRAC

1.- INTRODUCCION.

En este capítulo consideraremos una variedad diferenciable M de dim 4 con métrica de índice (1,3) a la que llamamos variedad de Minkowski o Espacio - Tiempo.

Sea $\pi: F(M) \longrightarrow M$ el Haz Fibrado de marcos ortonormales, observamos que una fibra $\pi^{-1}(x) = F(M)_x$ tiene cuatro componentes conexas correspondiente a las cuatro componentes del grupo topológico de Lorentz $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1,3)$. Sin embargo puede suceder que F(M) tenga menos de cuatro componentes conexas, porque puede unirse un punto en una componente de $F(M)_x$ a otra componente mediante una curva en F(M) que sale de $F(M)_x$ y luego regresa.

Supondremos que F(M) tiene cuatro componentes conexas. Seleccionamos una componente $F_0(M)$ de F(M) y observamos que $\pi: F_0(M) \longrightarrow M$ es un Haz Fibrado Principal con grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ en lugar de $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1,3)$.

2.- ESTRUCTURA SPIN.

Una estructura Spin sobre $F_0(M)$ consiste de un Haz Fibrado Principal $\pi_s: S(M) \longrightarrow M$ con grupo $S\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$ y de una aplicación diferenciable $\lambda: S(M) \longrightarrow F_0(M)$ tal que $\pi(\lambda(p)) = \pi_s(p)$ para todo $p \in S(M)$ y $\lambda(pA) = \lambda(p)\Lambda(A)$. Para todo $p \in S(M)$, $A \in S\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$, donde $\Lambda: S\mathcal{L}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ es el homomorfismo dado por $(\Lambda(A)(x))_\sim = A \underset{\sim}{x} A^*$ con $A^* = \bar{A}^{-t}$, $x \in \mathbb{R}^4$.

Observemos que si $\pi: F_0(M) \longrightarrow M$ es un Haz Fibrado Principal Trivial entonces existe una estructura Spin sobre $F_0(M)$.

En todo este capítulo supondremos que existe una estructura Spin $\lambda: S(M) \longrightarrow F_0(M)$, y construiremos un Lagrangiano y calcularemos su ecuación de Lagrange.

Demostraremos que esta ecuación de Lagrange se reduce a la ecuación de Dirac para un campo de electrones libres.

3.- FORMA HERMITIANA EXOTICA.

Definimos la aplicación $H : \mathbb{C}^4 x \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ por:

$H\left[(z_1,z_2,z_3,z_4),(w_1,w_2,w_3,w_4)\right] = z_1\overline{w}_3+z_2\overline{w}_4+z_3\overline{w}_1+z_4\overline{w}_2$ para todo $(z_1,z_2,z_3,z_4),(w_1,w_2,w_3,w_4) \in \mathbb{C}^4$.

Considerando estos elementos de $\mathbb{C}^4$ como vectores columnas

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_4 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_4 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos que}$$

$H(z,w) = z^t \gamma_o \overline{w}$ donde $\gamma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow G\ell(4,\mathbb{C})$ es una aplicación lineal dada por

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{x} \\ \tilde{x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_o-x_3 & -x_1+ix_2 \\ 0 & 0 & -x_1-ix_2 & x_o+x_3 \\ x_o+x_3 & x_1-ix_2 & 0 & 0 \\ x_1+ix_2 & x_o-x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\gamma(e_i) = \gamma_i$ $i = 0,1,2,3$ para e_i una base canonica de $\mathbb{R}^4$

$$\gamma_o = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

A esta aplicación H llamamos forma hermitiana exotica sobre $\mathbb{C}^4$.

A las matrices $\gamma(e_i) = \gamma_i$ $i = 0,1,2,3$ se llama matrices de Dirac.

Recordemos que $\rho: S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\ell(4,\mathbb{C})$ dada por

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \qquad \text{con } A \in S\ell(2,\mathbb{C})$$

es una representación de $S\ell(2\mathbb{C})$ en $G\ell(4,\mathbb{C})$.

Se comprueba sin dificultad que $\gamma(x)\gamma(y)+\gamma(y)\gamma(x) = 2\langle x,y\rangle I$ (3.1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^4$, además $H(\rho(A)z, \rho(A)w) = H(z,w)$ para todo $z,w \in \mathbb{C}^4$.

4.- METRICA SOBRE $\mathbb{C}^4$.

Definimos $\hat{h}: \mathbb{C}^4 x \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{h}(z,w)=1/2(H(z,w)+H(w,z))$. Se comprueba sin dificultad que $\hat{h}$ es bilineal, simétrica y no degenerada, es decir, es una métrica sobre $\mathbb{C}^4$. Además se tiene que $\hat{h}(\rho(A)z, \rho(A)w) = \hat{h}(z,w)$ es decir ρ es ortogonal con respecto a la métrica $\hat{h}$.

Proposición 4.1:

Con respecto a la métrica $\hat{h}$ sobre $\mathbb{C}^4$, $\gamma(x)$, para todo $(x) \in \mathbb{R}^4$ es auto adjunta, es decir $\hat{h}(\gamma(x)v,w) = \hat{h}(v, \gamma(x)w)$.

Demostración:

Tenemos que $\hat{h}(\gamma(x)v,w) = v^t \gamma(x)^t \gamma_0 \bar{w}$ y $\hat{h}(v, \gamma(x)w) = v^t \gamma_0 \overline{\gamma(x)\bar{w}}$. Hay que demostrar que $\gamma(x)^t \gamma_0 = \gamma_0 \overline{\gamma(x)}$, pero γ es lineal por consiguiente basta demostrar esta última igualdad para $x = e_0, e_1, e_2, e_3$. Esto se comprueba facilmente utilizando la igualdad (3.1).

5.- LAGRANGIANO.

Sea $\pi: P \longrightarrow M$ una haz fibrado principal con grupo G y sea $G \longrightarrow G\ell(v)$ una representación.

El espacio de 1-Jets de aplicaciones de P en V es $J(P,V) = \left\{ (p,v,\theta)/p\in P,\ v\in V,\ y\ \theta: T_pP \longrightarrow V \text{ es lineal} \right\}$ con el procedimiento utilizado en capítulos anteriores, se introduce una estructura de variedad diferenciable sobre J(P,V).

Un Lagrangiano es una aplicación diferenciable $L: J(P,V) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(pg, g^{-1}.v, g^{-1}.\theta o dR_{g-1}) = L(p,v,\theta)$. Por ejemplo si consideramos la estructura Spin sobre $F_o(M)$, esto es $\pi_s: S(M) \longrightarrow M$ es un Haz Fibrado Principal con grupo $S\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$ y $\lambda: S(M) \longrightarrow F_o(M)$ aplicación diferenciable y considerando también la representación $\rho: S\mathcal{L}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\mathcal{L}(4,\mathbb{C})$ tenemos el espacio de 1-Jets $J(S(M),\mathbb{C}^4)$.

Recordemos las construcciones que hemos introducido en el capítulo III referente a los campos de partículas.

Sea $\pi: P \longrightarrow M$ un Haz fibrado Principal con grupo G, y supongamos que G actua por la izquierda sobre una variedad diferenciable F. Entonces se tiene el espacio $C(P,F) = \left\{ \tau: P \longrightarrow F \ /\ \tau \text{ diferenciable}, \ \tau(pg) = g^{-1}.\tau(p) \right\}$, es decir consideramos este conjunto provisto de una topología (p.e. top. comp. abierta).

Cuando F es un espacio vectorial V, y la acción de G es una representación sobre V. entonces a los elementos del espacio C(P,V) se le llaman <u>Campos de Partículas</u>.

Por ejemplo, como hemos supuesto que se tiene una estructura Spin sobre $F_o(M)$ o sea $\pi_s: S(M) \longrightarrow M$ es una Haz Fibrado principal con grupo $S\mathcal{L}(2,\mathbb{C})$, y recordamos que $\rho: S\mathcal{L}(2\mathbb{C}) \longrightarrow G\mathcal{L}(4,\mathbb{C})$, es una representación tenemos el espacio de campos de partículas

$C(S(M),\mathbb{C}^4)$. Pero en este caso, a estos campos de partículas llamamos <u>campos de electrones libres</u>.

<u>Teorema 5.1</u>:

Sean $\lambda : S(M) \longrightarrow F_0(M)$ una estructura Spin, $\Lambda_* : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{L}$ el isomorfismo de algebras de Lie inducido por el isomorfismo de grupos de Lie.

$\Lambda : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{L}_+^\uparrow$. Además sea θ la conexión de Levi-Cevita sobre $F_0(M)$ o sea $\theta \in \overline{\Lambda}^1 (F_0(M), \mathfrak{L})$. Entonces $\tilde{\theta}$ definido por $\tilde{\theta}(p) = \Lambda_*^{-1} \circ \theta(\lambda(p)) \circ \lambda_* = \Lambda_*^{-1} \circ \lambda^*(\theta(\lambda(p)))$, con $p \in S(M)$ o sea $\tilde{\theta} = \Lambda_*^{-1} \circ \lambda^* \theta$, es una conexión sobre $S(M)$.

<u>Demostración</u>:

Como $\lambda : S(M) \longrightarrow F_0(M)$ para $p \in S(M)$, además $\lambda^* : Hom(T_{\lambda(p)}F_0 M, \mathfrak{L}) \longrightarrow Hon(T_p S(M), \mathfrak{L})$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es el algebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$, luego para $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ tenemos que

$\lambda(p \exp tA) = \lambda(p) \Lambda(\exp tA) = \lambda(p) \exp(t\Lambda_*(A))$.

$\lambda_*(A_p^*) = (\Lambda_*(A))^*_{\lambda(p)}$, además $\tilde{\theta}(A_p^*) = \Lambda_*^{-1}(\theta(\lambda_*(A_p^*))) = \Lambda_*^{-1}(\Lambda_*(A)) = A$.

para $g \in SL(2\mathbb{C})$, $R_g^* \tilde{\theta}(p) = \tilde{\theta}(p) \circ R_{g*} = \Lambda_*^{-1} \circ \theta(p) \circ \lambda_* \circ R_{g*}$

"(como $\lambda \circ R_g = R_{\Lambda(g)} \circ \lambda$)"

$= \Lambda_*^{-1} \circ \theta(p) \circ R_{\Lambda(g)*} \circ \lambda_* = \Lambda_*^{-1} \circ A\delta_{\Lambda(g)^{-1}}\, \theta_{(p)} \circ \lambda_* =$

$= A\delta_{g^{-1}}(\Lambda_*^{-1} \circ \theta_{(p)} \circ \lambda_*) = A\delta_{g^{-1}} \tilde{\theta}$.

Recordemos de la definición (4-18) del capítulo III que se tiene 1-forma canónica $\varphi \in \Lambda^1(F_0(M), \mathbb{R}^n)$ dada por

$\varphi_u(X_u) = (u^{-1} \circ \pi_{*u})(X_u)$, $u \in F_0(M)$ y toda $X_u \in T_u(F_0(M))$.

Teorema 5.2

Sea $\widetilde{\varphi}_p = \varphi_{\lambda(p)} \circ \lambda_* = \lambda^* \varphi_{\lambda(p)}$, donde φ es una conexión 1-forma canonica sobre $F_0(M)$. Para $g \in S\ell(2,\mathbb{C})$ tenemos que $R_g^* \widetilde{\varphi} = \Lambda(g)^{-1}.\widetilde{\varphi}$, donde $\widetilde{\varphi}$ es nula sobre vectores verticales. O sea $\widetilde{\varphi} \in \overline{\Lambda}^1(S(M), \mathbb{R}^4)$ con representación $S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow G\ell(\mathbb{R}^4)$ dada por $g.v = \Lambda(g)(v)$.

Demostración:

Dado que φ es nula sobre los vectores verticales y la restricción de λ_* es un Isomorfismo entre subespacios verticales, se sigue que $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \lambda_*$ es nula sobre vectores verticales, además

$$R_g^* \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi} \circ R_{g*} = \varphi \circ \lambda_* \circ R_{g*} = \varphi \circ R_{\Lambda(g)*} \circ \lambda_* = \Lambda(g)^{-1} \varphi \circ \lambda_* = \Lambda(g)^{-1} \widetilde{\varphi}$$

6.- LAGRANGIANO DE CAMPOS DE ELECTRONES LIBRES.

Para la estructura Spin que estamos considerando $\pi_s : S(M) \longrightarrow M$ construimos un Lagrangiano $L: J(S(M), \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente: Sea $p \in S(M)$, y $\sigma \in \overline{\Lambda}^1(S(M), \mathbb{C}^4)$. Sean $E_0, \ldots, E_3 \in T_p S(M)$ vectores horizontales, con respecto a la conexión $\widetilde{\theta}$ dada en el Teor:(5.1) y tal que $\widetilde{\varphi}_p(E_i) = e_i$, donde e_i es la base canonica de $\mathbb{R}^4$, y $\widetilde{\varphi} = \lambda^* \varphi$ o en forma equivalente $\widetilde{\varphi}(X) = \lambda(p)^{-1}(\pi_{s*}X)$, $X \in T_p S(M)$.

Definimos $\gamma \dot{x} \sigma_p \in \mathbb{C}^4$ por

$$\gamma \dot{x} \sigma_p = \sum_{0 \le i,j \le 3} \eta_{ij}\, \gamma(e_i)(\sigma_p(E_j))$$

donde $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $\gamma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow G\ell(\mathbb{C}^4)$

Ahora, para $v \in \mathbb{C}^4$, definimos

$$L(p, v, \sigma_p) = \hat{h}(i(\gamma \dot{x} \sigma_p), v) - m\hat{h}(v,v).$$

donde $m \in \mathbb{R}$.

Para demostrar que esta función es un Lagrangiano necesitamos el siguiente:

<u>Lema 6.1</u>:

Sean $E_0',\dots,E_3' \in T_pS(M)$ vectores horizontales, con respecto a la conexión $\tilde{\theta}$ y tal que $\tilde{\varphi}(E_0'),\dots,\tilde{\varphi}(E_3')$ sean ortonormales con respecto a $\langle,\rangle$. Entonces se tiene $\gamma\,\dot{x}\,\Gamma_p = \sum \eta_{ij}\,\gamma(\tilde{\varphi}(E_i'))\,\Gamma_p(E_j')$. para todo $\Gamma \in \Lambda^1(S(M),\mathbb{C}^4)$.

<u>Demostración</u>:

Existe $A \in L\,\mathcal{O}(1,3)$ tal que $e_i = \sum A_{ki}\,\varphi(E_k')$ y donde $E_j = \sum A_{mj}E_m'$. Entonces.

$$\gamma\,\dot{x}\,\Gamma_p = \sum \eta_{ij}\,\gamma(e_i)\,\Gamma_p(E_j) - \sum A_{ki}\,\eta_{ij}A_{mj}\,\gamma(\varphi(E_k'))\,\Gamma_p(E_m')$$

$$= \sum \eta_{km}\,\gamma(\varphi(E_k'))\,\Gamma_p(E_m').$$

<u>Teorema 6.2</u>:

La función $L\colon J(S(M),\mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $L(p,v,\Gamma_p) = \hat{h}(i\,\gamma\,\dot{x}\,\Gamma_p,v) - m\,\hat{h}(v,v)$, es un Lagrangiano.

<u>Demostración</u>:

Debemos probar que $L(pg,g^{-1}v,g^{-1}\Gamma_p \circ R_{g_*^{-1}}) - L(P,v,\Gamma_p)$ utilizando la definición de L, $\hat{h}$ y H resulta que basta demostrar que $\gamma\,\dot{x}(g^{-1}\Gamma_p \circ R_{g_*^{-1}}) = g^{-1}.(\gamma\,\dot{x}\,\Gamma_p)$

En efecto:

Sea $E_0,\dots E_3 \in T_pS(M)$ vectores horizontales tales espacios a la conexión $\tilde{\theta}$, tal que $\tilde{\varphi}(E_i) = e_i$ base canonica.

Aplicando el teorema 5.2 tenemos que $\tilde{\varphi}(R_{g*}E_i) = \Lambda(g)^{-1}\,\tilde{\varphi}(E_i) = \Lambda(g)^{-1}e_i$. Por consiguiente $R_{g*}E_i$ se puede tomar como el elemento o E_1' de $T_{pg}\, S(M)$ de lema 6.1 y se deduce que $\gamma\, x(g^{-1}.\Gamma \circ R_{g^{-1}_*}) = \sum \eta_{1j}\, \gamma(\Lambda(g)^{-1} e_1)\rho(g)^{-1} \left[\Gamma_p(R_{g^{-1}*}(R_{g*}E_j))\right] =$

$= \sum \eta_{1j}\, \rho(g)^{-1}\gamma(e_1)\rho(g)\rho(g)^{-1}\Gamma_p(E_j) = \rho(g)^{-1}(\gamma \dot{x}\, \Gamma_p) = g^{-1}(\gamma \dot{x}\, \Gamma_p)$

7.- ECUACION DE LAGRANGE.

Recordemos que dada una 1-forma conexión ω sobre un H.F.P. $\pi: P \longrightarrow M$ con grupo G se puede expresar $X \in T_pP$ en la forma $X = X^V + X^H$ donde X^V es vertical, es decir $\pi_*(X^V) = 0$ y X^H es horizontal es decir $\omega(X^H) = 0$.

Ademas si $\varphi \in \Lambda^k(P, \mathfrak{G})$ se define $\varphi^H \in \Lambda^k(P, \mathfrak{G})$ por $\varphi^H(X_1, \ldots, X_k) = \varphi(X_1^H, \ldots X_k^H)$.

7.1 La derivada Covariante exterior de $\varphi \in \Lambda^k(P, \mathfrak{G})$ esta definida por $D^\omega\varphi = (d\varphi)^H \in \Lambda^{k+1}(P, \mathfrak{G})$ donde $d\varphi$ es la derivada exterior usual de φ.

Sea $\pi: P \longrightarrow M$ un H.F.P. con grupo G, $G \longrightarrow G\ell(V)$ una representación, h una métrica definida sobre M y suponemos que la variedad M es orientada, por consiguiente existe una forma volumen μ sobre M asociada con la métrica h.

La métrica h_x sobre T_xM induce una métrica h_p sobre el espacio horizontal $H_p \subseteq T_pP$ $(p \in \pi^{-1}(x))$ mediante el isomorfismo $\pi_*: H_p \longrightarrow T_xM$; es decir $\bar{h}_p(X, Y) = h_x(\pi_*X, \pi_*Y)$ $\forall X, Y \in T_pP$).

Analogamente se tiene un elemento volumen $\tilde{\mu}$ inducido sobre H_p de T_xM. Ahora podemos definir un operador estrella $\tilde{*}_p: \Lambda^k(H_p) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(H_p)$ (n=dim M) por $\tilde{*}_p(\pi^*\tau) = \pi^*(*_x \tau)$ donde $\pi^*: \Lambda^k(T_xM) \longrightarrow \Lambda^k(H_p)$ es el pull-back inducido por $\pi_*: H_p \longrightarrow T_xM$ y $*_x$ es el único isomorfismo línea de $\wedge^k(T_xM)$ en $\wedge^{n-k}(T_xM)$ tal que $\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha,\beta)\mu \ \forall \alpha,\beta \in \wedge^k(T_xM)$.

Ahora definimos $\bar{*} : \bar{\wedge}^k(P,V) \longrightarrow \bar{\wedge}^{n-k}(P,V)$ por:

$(\bar{*}\varphi)_p$ igual a la única extensión de $\tilde{*}_p(\varphi|H_p)$ a una $(n-k)$ forma vectorial sobre T_pP que se anula sobre vectores verticales. Es decir $(\bar{*}\varphi)$ es la única forma en $\wedge^{n-k}(P,V)$ tal que $(\bar{*}\varphi) \mid H_p = \tilde{*}_p(\varphi \mid H_p)$.

7.2 El operador Codiferencial Covariante $\delta^\omega : \bar{\wedge}^k(PV) \to \bar{\wedge}^{k-1}(P,V)$ esta definido por $\delta^\omega(\varphi) = -(-1)^h(-1)^{n(k+1)}\,\bar{*}\,D^\omega(\bar{*}\varphi)$ donde $(-1)^h$ es el signo del determinante de $(h(\partial_i,\partial_j))$ y $n = \dim M$.

Observamos que cuando M es una variedad de Minkowski, $(-1)^h = -1$ y $n = 4$ luego $\delta^\omega = \bar{*}D^\omega\bar{*}$.

7.3 Sea $L: J(P,V) \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano y denotamos con $\bar{\wedge}^1(P,V)_p$ el espacio de aplicaciones lineales de T_pP en V que se anulan sobre vectores verticales. Para $(p,v,\theta) \in J(P,V)$ definimos $\nabla_3 L(p,v,\theta) \in \bar{\wedge}(P,V)_p$ por la ecuación:

$$(\bar{h}\hat{h})_p(\nabla_3 L(p,v,\theta),\beta) = \frac{d}{dt} L(p,v,\theta + t\beta)\,\Big|_{t=0}.$$

para $\Psi \in C(P,V)$ definimos una 1-forma V-valuada $\dfrac{\partial L}{\partial(D^\omega\varphi)}$ sobre P por:

$$\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\Psi)_p} = \nabla_3 L(p, \Psi(p), D^\omega\Psi_p).$$

7.4 Sea $L: J(P,V) \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano y, ω una conexión dada sobre P y $\Psi \in C(P,V)$ un campo de Partículas.

A la ecuación $\delta^{\omega}\left[\frac{\partial L}{\partial(D^{\omega}\Psi)}\right] + \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0$ llamamos ecuación de Lagrange del Lagrangiano L.

Ahora determinaremos la ecuación de Lagrange del Lagrangiano $L : J(S(M), \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(p,v,\Gamma_p) = \hat{h}(\imath(\gamma \times \Gamma_p),v) - m\hat{h}(v,v)$.

Lema 7.5: Para el Lagrangiano $L:J(S(M),\mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $L(p,v,\Gamma_p) = \hat{h}(\imath(\gamma \dot{x} \Gamma_p),v) - m\hat{h}(v,v)$ se tiene que $\nabla_3 L(p,v,\Gamma_p) ; T_p S(M) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ esta dado por $\nabla_3 L(p,v,\Gamma_p)(X) = -\imath\gamma(\tilde{\varphi}(X))(v)$.

Demostración:

Sea $\beta \in \overline{\Lambda}^1(S(M))_p$ entonces tenemos

$$(\bar{h}\hat{h})(\beta, \nabla_3 L(p,v,\Gamma_p)) = \frac{d}{dt} L(p,v,\Gamma + t\beta)|_{t=0}$$

$$= \hat{h}(\imath\gamma \dot{x}\beta, v) = \sum_{jk} \eta_{jk}\, \hat{h}(\gamma(\tilde{\varphi}(E_j))(\imath\beta(E_k)),v)$$

$$= \sum_{jk} \eta_{jk}\, \hat{h}(\imath\beta(E_k), \gamma(\tilde{\varphi}(E_j))(v))$$

$$= (\bar{h}\hat{h})(\imath\beta, (\gamma \circ \tilde{\varphi})(v)) = (\bar{h}\hat{h})(\beta, -\imath(\gamma \circ \tilde{\varphi})(v))$$

$$\nabla_3 L(p,v,\Gamma_p) = -\imath(\gamma \circ \tilde{\varphi})(v).$$

Teorema 7.6:

Para el Lagrangiano $L\cdot J(S(M), \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $L(p,v,\Gamma_p) = \hat{h}(\imath\gamma \dot{x} \Gamma_p, v) - m\hat{h}(v,v)$. La ecuación de Lagrange es:

$$-\imath\,\delta^{\tilde{\theta}}[(\gamma_o \tilde{\varphi})(\Psi)] + \imath(\gamma \dot{x} D^{\tilde{\theta}}\Psi) - 2m\Psi = 0 \quad \text{donde}$$

$\Psi \in C(S(M),\mathbb{C}^4)$ y $\tilde{\theta}$ es una conexión sobre $S(M)$ asociado a la conexión de Lovi-Civita θ sobre $F_o(M)$.

Demostración:

Aplicando el lema 7.5 se deduce que $\dfrac{\partial L}{\partial(D^{\theta}\Psi)} = -i(\gamma \circ \tilde{\varphi})(\Psi)$, pero sustituyendo la expresión de L obtenemos $\dfrac{\partial L}{\partial \Psi} = i(\gamma \dot{\times} D^{\tilde{\theta}}\Psi) - 2m\Psi$

Como $\delta^{\tilde{\theta}}$ conmuta con todo operador lineal dado sobre $\mathbb{C}^4$, por ejemplo multiplicación por i, encontramos que la ecuación de Lagrange es

$$-i\,\delta^{\tilde{\theta}}\left[(\gamma \circ \tilde{\varphi})(\Psi)\right] + i(\gamma \dot{\times} D^{\tilde{\theta}}\Psi) - 2m\Psi = 0$$

8.- ECUACION DE DIRAC.

En esta sección demostraremos que la ecuación de Lagrange obtenido en el teorema 7.6. Se reduce a la ecuación de Dirac para un campo de electrones libres. Con este objeto establecemos algunos lemas.

Lema 8.1:

Para $B \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{R}^4$, y $v \in \mathbb{C}^4$ se tiene

$$\gamma(\Lambda_*(B)\cdot x)(v) = B.(\gamma(x)(v)) - \gamma(x)(B.v)$$

Demostración:

Como $B \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\exp(tB) \in SL(2,\mathbb{C})$ pero para todo $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{R}^4$ se tiene:

$$\rho(A)\,\gamma(x)\,\rho(A)^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{x} \\ \tilde{x} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A\underset{\sim}{x}\,A^{*} \\ A^{*-1}\tilde{x}A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{(\Lambda(A)x)} \\ (\Lambda(A)x)^{\sim} & \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(\Lambda(A)x).$$

Haciendo A = exp (tB) en la ecuación anterior y aplicando ambos miembros a "v" y derivando con respecto a t en t=0 se obtiene la afirmación del lema.

Lema 8.2:

Sean $\Psi \in C(S(M), \mathbb{C}^4)$ y $\lambda : S(M) \longrightarrow F_0(M)$ la estructura Spin definida en 2. Entonces se tiene

$$\delta^{\tilde{\theta}}\left[(\gamma \circ \tilde{\varphi})(\Psi)\right] = \left[\gamma \circ \lambda^*(\delta^{\theta}\varphi)\right](\Psi) - \bar{*}\left[(\gamma \circ (\bar{*}\tilde{\varphi}))\wedge(D^{\tilde{\theta}}\Psi)\right]$$

donde

$$\left[(\gamma \circ (\bar{*}\tilde{\varphi}))\wedge(D^{\tilde{\theta}}\Psi)\right](X_1,\dots X_4) =$$

$$= \frac{1}{3!1!}\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\gamma\,(\bar{*}\tilde{\varphi}(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(3)}))(D^{\tilde{\theta}}\Psi(X_{\sigma(4)})).$$

Demostración:

Puesto que $D^{\tilde{\theta}}\tau = d\tau + \tilde{\theta}\dot{\wedge}\tau$ para $\tau \in \bigwedge^k(S(M),\mathbb{C}^4)$ y además $\delta^{\tilde{\theta}}(\varphi) = -(-1)^k(-1)^{n(k+1)}\bar{*}\,D^{\tilde{\theta}}(\bar{*}\varphi)$, tenemos

$$\delta^{\tilde{\theta}}\left[(\gamma \circ \tilde{\varphi})(\Psi)\right] = \bar{*}\left\{d\left[(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})(\Psi)\right] + \tilde{\theta}\dot{\wedge}\left[(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})(\Psi)\right]\right\}$$

El segundo término del segundo miembro de esta igualdad, se puede reescribir usando el lema 8.1 como sigue

$$\tilde{\theta}\dot{\wedge}\left[(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})(\Psi)\right] = -(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})\wedge(\tilde{\theta}.\Psi) + (\gamma \circ \left[(\wedge_* \circ \tilde{\theta})\dot{\wedge}(\bar{*}\tilde{\varphi})\right])(\Psi)$$

$$= -(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})\wedge(\tilde{\theta}.\Psi) + (\gamma \circ \left[\lambda^*(\theta\dot{\wedge}(\bar{*}\varphi))\right])(\Psi).$$

por consiguiente.

$$d\left[(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})(\Psi)\right] = \left[\gamma \circ (d\bar{*}\tilde{\varphi})\right](\Psi) - (\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})\wedge d\Psi.$$

y combinando estos resultados se obtiene

$$\delta^{\theta}\left[(\gamma \circ \tilde{\varphi})(\Psi)\right] = \bar{*}\left\{\left[(\gamma \circ \lambda^*(d\bar{*}\varphi + \theta\wedge(\bar{*}\varphi))\right](\Psi) - (\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})\wedge(d\Psi + \tilde{\theta}.\Psi)\right\} = \left[\gamma \circ \lambda^*(\delta^{\theta}\varphi)\right](\Psi) - \bar{*}\left[(\gamma \circ \bar{*}\tilde{\varphi})\wedge(d^{\theta}\Psi)\right]$$

Lema 8.3:

Para La Conexión de Levi-Cevita θ y la forma canónica φ , se tiene $\delta^{\theta}\varphi = 0$.

Demostración:

Como $\delta^{\theta}\varphi = \pm * D^{\theta} * \varphi$, basta demostrar que $D^{\theta} * \varphi - 0$. En efecto:

$* \varphi = (* \varphi^{1},\ldots,* \varphi^{n})$ donde $* \varphi^{i} = (-1)^{i-1}\eta_{ii}\ \varphi^{1}\wedge\ldots\wedge \hat{\varphi}^{i}\wedge \ldots \wedge \varphi^{n}$.

Aplicando d a las componente de $*\varphi$ y utilizando $d\varphi^{i} = -\sum \theta^{i}_{k}\wedge\varphi^{k}$, se obtiene que $d(*\varphi)$ se anula sobre los subespacios horizontales, a causa de los factores θ^{i}_{k}. Por consiguiente

$$D^{\theta} * \varphi - (d * \varphi)^{H} = 0$$

Lema 8.4:

Para $\psi \in C(S(M),C^{4})$, se tiene

$$*\left[(\gamma \circ * \tilde{\varphi})\wedge D^{\tilde{\theta}}\psi)\right] = \gamma \dot{x}\ D^{\theta}\psi$$

Demostración:

Sea $\tilde{\varphi} - (\tilde{\varphi}^{0},\ldots \tilde{\varphi}^{3}) = \sum \tilde{\varphi}^{i}e_{i}$. Supongamos que $E_{0},\ldots,E_{3} \in T_{p}S(M)$ son vectores horizontales con respecto a la conexión $\tilde{\theta}$ tal que $\tilde{\varphi}(E_{i}) = e_{i}$ base canonica de $\mathbb{R}^{4}$. Entonces se tiene

$$\overline{*}\left[(\gamma o \overline{*}\tilde{\varphi})\wedge(D^{\tilde{\theta}}\psi)\right] = \overline{*}\left[\gamma(\sum \overline{*}\tilde{\varphi}^{i}e_i)\wedge(\sum_j (D^{\theta}\psi)(E_j)\ \tilde{\varphi}^{i})\right]$$

$$-\sum \overline{*}\left[(\overline{*}\,\tilde{\varphi}^{i})\wedge\tilde{\varphi}^{j}\right]\ \gamma(e_i)\ \left[(D^{\theta}\psi)(E_j)\right]$$

$$\sum_{ij} -\overline{*}\left[\bar{h}(\varphi^{i},\varphi^{j})\mu\right]\ \gamma(e_i)\ \left[(D^{\theta}\psi)(E_j)\right]$$

$$-\sum_{ij} \eta_{ij}\gamma(e_i)\ \left[(D^{\theta}\psi)(E_j)\right] = \gamma\,\dot{x}\ D^{\tilde{\theta}}\psi\ .$$

Teorema 8.5:

La ecuación de Lagrange obtenida en el teorema 7.6 se reduce a la siguiente ecuación de Dirac.

$$"\ \gamma\,\dot{x}\ D^{\tilde{\theta}}\psi + im\psi = 0"$$

Demostración:

Para esto debemos demostrar que

$$\delta^{\tilde{\theta}}\left[(\gamma o\tilde{\varphi})(\psi)\right] = -\ \gamma\,\dot{x}\ D^{\tilde{\theta}}\psi\ .$$

Pero utilizando los lema 8.2 y 8.3 se tiene que

$\delta^{\tilde{\theta}}\left[(\gamma o\tilde{\varphi})(\psi)\right] = -\overline{*}\left[(\gamma o(\overline{*}\,\tilde{\varphi}))\wedge(D^{\tilde{\theta}}\psi)\right]$. Y ahora aplicando el lema 8.4 se obtiene el resultado deseado.

CONCLUSIONES

En la elaboración del Capítulo I Preliminares, Grupos de Lie y Sus Algebras de Lie, hemos utilizado fundamentalmente las aplicaciones especializadas [19], [20] y [21], que se indican en las referencias bibliográficas, además de las publicaciones [7], [8], [11] y [14]

Con un enfoque personal hemos demostrado (Teorema 4.2) que existe un isomorfismo entre el álgebra de Lie que consiste del conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda de un grupo de Lie dado con el corchete de Lie y el espacio tangente en el elemento neutro del grupo de Lie dado.

En el desarrollo del Capítulo II Haz Fibrado Principal y Conexiones, hemos utilizado fundamentalmente las publicaciones especializadas [1], [3], [7], [19], [20] y [21] además de las publicaciones, [9], [11] y [17].

Hemos presentado en forma sistemática la noción importante de Haz Fibrado Principal y sección local, demostrando con un enfoque personal (proposiciones 2.3, 2.4) que existe una biyección entre el conjunto de todas las secciones locales (globales) de un Haz Fibrado Principal y el conjunto de todas las trivializaciones locales (globales) de dicho Haz.

En forma constructiva hemos obtenido (Lema 3.19) que todo campo vectorial invariante por la izquierda sobre un grupo de Lie es el generador infinitesimal de un flujo global. También construimos sistemáticamente la aplicación exponencial y demostramos (Teorema 3.24) que la aplicación exponencial definida en el espacio tangente del grupo de Lie en el elemento neutro y con valores en el grupo de Lie dado es un difeomorfismo local.

Luego se introducen sistemáticamente tres definiciones de conexiones asociadas a un Haz Fibrado Principal; y de manera constructiva demostramos (Teorema 4.5) que las tres definiciones son equivalentes.

Para el Capítulo III: Grupo Topológico de Lorentz y Conexión de Levi-Civita, hemos utilizado las publicaciones especializadas [3], [11], [13], [16] y [18]. En forma constructiva introducimos el grupo Topológico de Lorentz (Proposición 2.3) y establecemos que tiene cuatro componentes conexas (Proposición 2.4) y demostramos también (Proposición 2.9) que existe un epimorfismo de la componente conexa $\mathcal{L}_+^\uparrow$ de este grupo topológico sobre el grupo de todas las matrices complejas de orden 2 con determinante 1.

Luego construimos dos representaciones de $SL(2,\mathbb{C})$ en $GL(2,\mathbb{C})$ y demostramos (Teorema 3.9) que no son equivalentes.

Hemos modificado algunas demostraciones de [3] para la construcción del grupo de Lie $Q(r,s)$ que consiste del conjunto de los automorfismos del espacio $\mathbb{R}^n$ con producto escalar de índice (r,s) que preservan este producto escalar; así como para la determinación de su álgebra de Lie. Luego a toda variedad diferenciable M (Teorema 4.17) asociamos un Haz Fibrado Principal $(F(M), \pi, M, Q(r,s))$ con grupo estructural $Q(r,s)$.

Al final de este capítulo se construye (Teorema 4.23) una única conexión llamada conexión de Levi-Civita en $F(M)$ con forma torsión nula.

Para el Capítulo IV: Ecuación de Dirac hemos utilizado las publicaciones especializadas [3] y [18] modificando algunas de sus demostraciones para presentar en forma constructiva la variedad de Minkowski, Estructura Spin, espacio de 1-Jets asociado a un Haz Fibrado Principal, Lagrangiano, Campo de electrones libres. Hemos asociado (Teorema 5.1) a una conexión de Levi-Civita θ sobre $F_0(M)$ una conexión $\tilde{\theta}$ sobre $S(M)$.

Construimos una función L definida en el espacio de 1-Jets, $J(S(M),\mathbb{C}^4)$ con valores en $\mathbb{R}$ y demostramos (Teorema 6.2) que es un Lagrangiano.

A continuación calculamos su ecuación de Lagrange (Teorema 7.6).

Finalmente se interpreta la ecuación de Lagrange para un campo de electrones libres y demostramos (Teorema 8.5) que esta ecuación se reduce a la ecuación de Dirac.

REFERENCIAS

[1] Arnold, V. Les methodes mathématiques de la mécanique classique. (Traducido del Ruso por Djilali Embarek) Editions Mir Moscou (1976).

[2] Arnold, V. Chapitres Supplementaires de la théories des équations différentielles ordinaires. (Traducido del Ruso por Djilali Embarek) Editions Mir, Moscou (1980).

[3] Bleeker, D. Gauge Theory and Variational Principles Addison-Wesley Publishing Company, INC. Reading Massachusetts U.S.A. (1981).

[4] Brocker, T. Janick, K. Introducción a la Topología Diferencial. (Traducción del Alemán por J. Vásquez) Editorial AC. Madrid, España (1977).

[5] Carmo, M. do Formas Diferenciais e Aplicacóes IMPA, Rio de Janeiro (1971).

[6] Fernandez, J. Tesis

[7] Golubitsky, M. Guillemin, V. Stable Mappings and Their Singularities Springer-Verlag New York INC. (1973).

[8] Holmann, H. Rummler, H. Alternierender Differential formen Bibliographisches Institut AG, ZURICH. (1981).

[9] Husemoller, D. Fiber Bundles, 2nd ed. Springer-Verlag New York (1975).

[10] Klingenberg, W. Riemannian Geometry Walter de Gruyfer, Berlin, New York (1982).

[11] Kobayashi, S. Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry Vol. I, II Intersciece Publishers U.S.A. (1969).

[12] Lima, E. Variedades Diferenciaveis, Instituto de Matemática pura y Aplicada, Río de Janeiro Brasil (1978).

[13] Pichon, G. Groupes de Lie Représentations linéaires et applications Hermann, Paris. (1973).

[14] Price, J.F. Lie Groups and Compact Groups Cambridge University-Great Britain (1977).

[15] Salam, A. Gauge Unificatión of fundamental forces, Rev. Mod. Phys. Vol. 52 No. 3, 525-538. (1980).

[16] Serre, J.P. Representaciones Lineales de Los Grupos Finitos. (Traducción del Frances por S. XAMBO). Editorial Ediciones Omega S.A. Barcelona (1970).

[17] Spivak, M. A comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol. I, II publish or Perishi, INC. Boston, Mass. 02108, U.S.A (1970).

[18] Trautman, A. Fiber Bundles associated with space-time, Rept. Math, Phys. Vol. I No. 1, 29-62 (1970).

[19] Valdivia, O. Introducción a la Topología Diferencial. Universidad de Panamá, Panamá (1984).

[20] Valdivia, O. Tópicos de Geometría Diferencial, Universidad de Panamá (1981).

[21] Warner, F. Foundations de Diferentiable Manifolds and Lie Groups, scott, Foresman and Company, Illinois, United States of America (1971).

[22] Weinstein, A. A universal Phase Space for Particles Yang-Mills fields, Lett. Math Phys Vol. 2, 417-420. (1978).