UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO MEDIADO CON SITUACIONES PROBLÉMICAS DEL ÁREA DE AMINISTRACIÓN DE EMPRESAS: UNA ALTERNATIVA PARA FORTALECER EL PROCESO DE ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS.

ARGELIA PINILLA ACHURRA

Proyecto Final De Graduación Presentado como Requisito Parcial para Optar por el Título de Maestría en Docencia Superior en la Universidad de Panamá.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ.
2004

AGRADECIMIENTO

Elevo una plegaria a mi Dios, Padre todopoderoso, por darme la oportunidad de culminar este trabajo, el cual me pone a un paso de lograr una meta anhelada.

Expreso mi eterno agradecimiento al profesor Cesar A. García , asesor de esta tesis por toda sus colaboración y de manera muy especial a los profesores José Camarena y Víctor Guevara quienes aceptaron formar parte del jurado para la evaluación de este trabajo.

A mi muy querida amiga Graciela por su ayuda desinteresada en todo momento.

Finalmente agradezco con mucho cariño a todos mis profesores y compañeros de grupo, pero muy especialmente a los de mi grupo de trabajo Mario, Benilda, Hector y Elena, míl gracias porque siempre supieron ser tolerantes solidarios, comprensivos y sobre todo mis mejores amigos.

Gracias por Siempre.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE GRÁFICAS

RESUMEN

Con la realización de esta investigación pretendemos puntualizar un poco más sobre el enfoque que se le da al Cálculo Diferencial e Integral en la Facultad de Administración de Empresas, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de dicho curso, debido que a diario encontramos un alto índice de estudiantes con deficiencias académicas en esta asignatura, tan importante de la referida facultad, y más aún, cuando la gran mayoría de éstos no le encuentran sentido ni significado al desarrollo de estos cursos. Nuestro trabajo va encaminado a conocer la opinión que tienen los estudiantes sobre su forma de aprendizaje de este curso y la manera como fue presentada por el docente que le dictó el mismo. De manera que contemos con evidencias para poder identificar claramente situaciones importantes en cuanto al enfoque de la enseñanza del Cálculo que los profesores le están brindando a los cursos de esta facultad, por medio de la misma nos proponemos averiguar que la enseñanza del Cálculo no se está haciendo en contexto, por lo que esta situación está provocando serías dificultades en el acceso y construcción de los saberes. Formularemos algunos ejemplos que nos permitirá ofrecer una alternativa metodológica en la enseñanza del Cálculo en contexto y con un corte Constructivista, citando temas centrales del Cálculo Diferencial e Integral para ofrecer a cada uno de ellos una alternativa de enseñanza y aprendizaje que los docentes y estudiantes de esta facultad pueden poner en práctica para el aprendizaje significativo del Cálculo.

ABSTRACT

This research stresses the use of differential and integral calculus in the Business Administration Faculty and its relationship in the teaching learning courses. Due to the fact that there is a high rate of academic deficiencies in the calculus subject as well as a lack of direction on the part of the students who do not see any relevance and meaning to the calculus subject making it necessary to do something to solve this situation. This research tries to know the opinion of the students in relation to the learning process of the calculus subject, and the way teachers present the courses. The researcher will gather enough evidences to identify specific data on how professors teach the course of calculus in this Faculty. Also through this research, we will try to confirm that the calculus teaching hasn't been taught in context provoking several difficulties in the adquisition of knowledge. We will present some samples of calculus operations in context which allow professors to offer methodological alternatives in the teaching of calculus in context with a constructivist approach by citing central topics of integral and differential calculus so that professors and students of this faculty can apply it in their daily activities.

INTRODUCCIÓN

Las situaciones problémicas que vive cada área del saber humano requiere de soluciones científicamente optimizadas y éstas se van a fundamentar en el empleo de una rama de la Matemática que fue creada con tal propósito, nos referimos al Cálculo Diferencial e Integral. El sector de Administración de Empresas no es ajeno a tal problemática y no sólo las dificultades se enmarcan a dar respuestas óptimas a los problemas encontrados sino entre otras cosas al gran número de estudiantes de la Facultad de Administración de Empresas que año tras año reprueban los cursos de Cálculo, se han realizados enormes esfuerzos para minimizar las referidas dificultades en distintas direcciones tales como la validación de las pruebas de Cálculo y la articulación de los saberes de entradas de los participantes con los cursos de Cálculo de esta área, pero poco se ha realizado en cuanto a la mediación didáctica constructivista por medio de situaciones reales del área de formación de los estudiantes, es pues este el eje central de esta tesis de maestría en docencia superior en la cual pretendemos ofrecer un nuevo enfoque para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la Escuela de Administración de Empresas de la Universidad de Panamá. En ningún momento hemos pensado que el Cálculo no está resolviendo problemas de aplicación del área de administración sino que la forma de introducir un nuevo concepto de estudio no se está realizando por medio de una situación problémica del área de formación de los participantes esto le va a ofrecer mayor rigor a la fundamentación de los temas tratados y fortalecerá el proceso de adquisición de dichos conocimientos, propiciando de esta manera, aprendizajes significativos en el sujeto que aprende.

Nuestro trabajo lo hemos dividido en cinco capítulos, en el primero presentamos toda la fundamentación teórica que requiere la investigación desde los aspectos relacionados con el problema de investigación, como lo son los antecedentes, la justificación, el planteamiento, los alcances y límites, los objetivos y la hipótesis de nuestra investigación. El segundo capítulo titulado Marco Teórico presenta aspectos referentes a las bases teóricas que enmarcan nuestra alternativa de solución a la problemática planteada en esta investigación, como lo son: el tronco común de todo curso de cálculo, un vistazo al enfoque tradicional en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, la enseñanza del cálculo en contexto y la didáctica contructivista. El tercer capítulo titulado Marco Metodológico presenta aspectos relevantes de la forma y estrategias estadísticas que son implementadas en nuestro trabajo tales como: la descripción del tipo de investigación, las fuentes de donde se obtuvo la información, los tipos de variables, los instrumentos para la captura de datos y el tratamiento que se le dio a los datos recabados.

En el cuarto capítulo que denominamos, Análisis e Interpretación de los Resultados del instrumento e investigación desarrolla principalmente aspectos relacionados con la encuesta aplicada, donde se le da un tratamiento individualizado a cada reactivo de la misma, presentando cuadros y gráficas que muestran los resultados y además hacemos un breve comentario de cada uno.

El quinto capítulo denominado, Alternativas Didácticas de corte Constructivista para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en el Contexto de la Administración, el cual es nuestra inspiración principal, en donde presentamos ejemplos de cómo crear ambientes constructivista para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, y lo más importante de este capítulo es la ejemplificación de cómo se pueden introducir el estudios de los conceptos de límite, derivada e integral definida en la Escuela de Administración de Empresas, lo verdaderamente impactante en nuestra tesis es la forma como por medio de un problema real del sector de formación de los participantes se introduce el nuevo concepto estudiado, y posteriormente, se formalizan todas las definiciones, teoremas y propiedades inherentes al tema. Esto va a motivar a los estudiantes, producirá aprendizajes significativos, y por ende fortalecerá el proceso de adquisición de estos conocimientos.

Como todo trabajo de investigación en el área de docencia universitaria presentamos una lista de conclusiones y recomendaciones encaminadas a la divulgación y aplicación de la alternativa didáctica constructivista para fortalecer el proceso de adquisición de conocimientos en la enseñaza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de la Licenciatura en Administración de Empresas.

CAPITULO PRIMERO

ASPECTOS PRELIMINARES

1.1 PRESENTACIÓN

Este capítulo lo dedicamos al estudio de los conceptos teóricos que son necesarios para la adecuada interpretación de nuestra investigación. Desarrollamos secciones referentes a los antecedentes del problema de investigación que hemos formulado, como también se pretende justificar claramente, el porqué de nuestra investigación, delimitar hasta donde comprende esta investigación, presentar los objetivos que pretendemos lograr con la realización de la misma y finalmente presentaremos nuestra hipótesis de trabajo.

1.2 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

A través de una revisión previa de trabajos de investigación nos hemos podido percatar de que, en efecto, existen algunos relacionados con los fracasos de nuestros estudiantes en matemática, y siendo algunos más específicos en Cálculo. Sin embargo, no se ha realizado estudio alguno sobre el que pretendemos llevar a cabo.

Un gran número de investigaciones, tanto a nivel nacional con internacional, se vienen dando en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo; para nosotros es más importante lo que a nivel de nuestro país se está haciendo respecto al referido tema, sin embargo, no podemos trabajar a espaldas de lo que otros países más avanzados están investigando y proponiendo en esta área de formación. Nos vamos a referir a dos investigaciones extranjeras y a tres investigaciones nacionales que en los últimos años se han dado en el área de Cálculo. En octubre de 1994, "Una Empresa Docente" realizó en Bogotá, Colombia el Segundo Simposio internacional en Educación Matemática, en donde fue invitada la profesora Michele Artigue de la Universidad de París, Francia; en dicho Simposio ella presentó un artículo titulado "La Enseñanza de los Principios del Cálculo: Problemas Epistemológicos, Cognitivos y Didácticos".

Este es un artículo muy completo que presenta una clara radiografía de cómo ha ido evolucionando la enseñanza del Cálculo desde las Reformas de 1902 y la introducción del Cálculo en el Liceo hasta el tratamiento de la Didáctica del Cálculo y el Análisis no Estándar. Nos parece interesante los aportes de la profesora Michele, cuando ella confronta dos enfoques en la enseñanza del Cálculo, el primero más preocupado por los procesos algorítmicos y el segundo más dado a propiciar una enseñanza mejor fundamentada académicamente desde el punto de vista de la propia Matemática, esto lo identificamos claramente en una de sus conclusiones que textualmente dice : "*En este artículo nos centramos en los inicios del Cálculo, en los problemas que se le presentan a quien quiere hacer de esta enseñanza algo más que la enseñanza de técnicas de cálculo diferencial e integral, algo más que un simple "Calculus" ; sino que quiere realizar una iniciación a los métodos, ideas y conceptos que constituyen el corazón de este campo, una iniciación a la* *vez rigurosa, operacional y adaptada a las capacidades cognitivas de los alumnos y estudiantes a los cuales va dirigida."*

Por otro lado, nos referiremos a algunas consideraciones de la Profesora **Patricia Camarena Gallardo** de nacionalidad Mexicana, la cual en una investigación sobre **Los Modelos Matemáticos y el Contexto de la Ingeniería** expresa opiniones referentes a la matemática en contexto, donde con su utilidad, considera la autora, el estudiante se motiva, le encuentra sentido a los cursos de matemática que recibe, entiende por qué se le imparten, cómo y donde los aplica. Ve a las matemáticas sin aplicaciones artificiales, con la notación que usará durante su carrera y vida profesional, modelando problemas que son propios de su carrera.

El profesor **César A. García E.** de nacionalidad panameña realizó en 1998 una investigación como tesis de Maestría en Matemática la cual se tituló: **Historia y Análisis del Concepto de Integral Definida**. Este trabajo es dedicado, principalmente, al estudio de los obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos que involucran el tratamiento o construcción del referido concepto, analizando aspectos históricos del nacimiento evolución hasta nuestros días del concepto de integral definida, resaltando las concepciones iniciales de la integración como un procesos inverso al de diferenciación hasta que aparece Agustin Cauchy a sentar las pautas de que ambos procesos son inversos pero bajo ciertas condiciones de continuidad de la función, puesto que demuestra que existen funciones que son integrables y no poseen primitiva, y más aún funciones que teniendo primitivas no son integrables. En definitiva el profesor García nos deja importantes aportes en el enfoque que se le debe de dar en la mediación didáctica del concepto de integral definida.

La profesora **Ángela Franco** de nacionalidad panameña realizó en el año 2002 una investigación como tesis de Maestría en Docencia Superior la cual se tituló **Propuesta Curricular para Elevar el Grado de Articulación entre los Programas de Cálculo de la Licenciatura de Administración de Empresas y los Programas de Matemática del Bachiller en Comercio.** En este trabajo se proponen significativos cambios en el conjunto de saberes de la formación de los bachilleres en comercio de modo que los alumnos que ingresan a la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad de Panamá puedan hacerle frente con mayor éxito a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

El profesor **Víctor J. Guevara P.** de nacionalidad panameña realizó en el año 2003 una investigación como tesis de Maestría en Docencia Superior la cual se tituló **La Validez de Contenido de las pruebas de Cálculo I, en la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad del Centro Regional Universitario de Veraguas, y su repercusión en el rendimiento académico de los estudiantes.** En este trabajo se presentaron algunas consideraciones para que las pruebas de Cálculo que se aplican en los cursos correspondientes de la referida facultad tengan mayor relación con los contenidos , objetivos y actividades de aprendizajes planteados. En definitiva este trabajo sugiere que una mejor formulación de las pruebas de Cálculo implicaría bajar el índice de estudiantes reprobados en los cursos de esta asignatura. Apoyándonos en estas investigaciones como antecedentes de nuestro problema es que daremos inicio a nuestra investigación.

1.3 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL PROBLEMA.

El enfoque en la enseñanza de la matemática puede representar la herramienta utilizada por el docente para lograr que el estudiante alcance el aprendizaje (Alemán, 1999).

Los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que se dictan en la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad de la Universidad de Panamá se han constituido muchas veces en una barrera para la obtención de los títulos de los participantes, provocando inclusive las deserciones de un gran número de estudiantes, es tanto el problema que según registros académicos, un considerable porcentaje de estudiantes matriculan esta asignatura en cursos de verano donde el 62% de los alumnos son graduandos que manifiestan estar recogiendo las colas que le faltan para completar el plan de estudios. El hecho de cursar la asignatura en este periodo implica que los alumnos tengan que hacer gastos adicionales de dinero en pago de matrícula, más aún los grupos que no completan los 30 estudiantes que se requieren, si los estudiantes están interesados en el curso, entonces tienen que pagar la matrícula de los alumnos que faltan para completar los que se requieren, todo esto, aunado a la compra de libros o módulos de aprendizajes que por la naturaleza del curso se necesitan. De gran provecho sería que los estudiantes cursaran sin dificultades esta asignatura durante los semestres regulares, dejando para el verano los cursos de menos créditos y horas de estudio, es decir materias culturales, que por su naturaleza sea favorable desarrollarlas en una temporada seca. Es lamentable que el estudio del Cálculo como una herramienta poderosa para optimizar problemas de administración no sea admitido como tal por parte de los estudiantes que reciben estos cursos.

1.4 FORMULACIÓN O PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tradicionalmente la enseñanza del cálculo se interpreta como una asignatura que se desarrolla de manera muy algorítmica basada en reglas y procesos mecánicos en donde no se le da rigor a la fundamentación de los conceptos tratados. Es posible que por lo abstracto y complejo de estos contenidos, al conversar con algunos estudiantes que han recibido estos cursos de cálculo, son muchos los que manifiestan el haber estudiado los contenidos de esta asignatura de manera mecánica y muy generalizada, donde no le encontraron utilidad y aplicación a dichos temas.

Es posible que esta situación, entre otras, motivó la realización de dos investigaciones muy recientes en la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad del Centro Regional Universitario de Veraguas, las cuales fueron citadas en la sección de antecedentes, una sobre la articulación de los saberes de entrada de los participantes con los contenidos previos que se necesitan para el estudio del Cálculo, y la otra, sobre la validación de las pruebas de Cálculo, sin embargo, el problema persiste sin encontrar una notable mejoría.

Es oportuno el momento para sustentar este comentario citando a (Alemán, 1999), cuando señala que "en nuestras aulas de clases es significativo el número de estudiantes que muestran gran indiferencia y hasta rechazo en el aprendizaje de la matemática lo que se traduce en un considerable índice de fracasos".

Ahora, planteamos una investigación en el estudio del enfoque que se le está dando al desarrollo de los cursos de Cálculo en la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad, para lo cual tenemos que examinar las estrategias metodológicas que utilizan los docentes de Matemática al desarrollar los cursos de Cálculo y, además, las estrategias de aprendizaje lo cual va a estar en estrecha relación con la perspectiva de cómo los alumnos perciben esta asignatura. El problema lo centramos en que los cursos de Cálculo no son desarrollados en contexto, por lo cual los participantes no le encuentran sentido y significado a los conocimientos que se les tratan de enseñar razón por la cual se obtiene un alto índice de estudiantes reprobados.

Es por todo lo antes expuesto que en búsqueda de solución a este problema y ordenar de manera clara y precisa nuestras ideas, nos hacemos las siguientes interrogantes:

- ¿Se podrá fortalecer el proceso de adquisición de los conocimientos de Cálculo Diferencial e Integral de la Licenciatura en Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas, utilizando situaciones problémicas del área de formación de los participantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del mismo?

- ¿Encuentran los estudiantes de la Licenciatura en Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas, aplicaciones de los conocimientos de Cálculo en su área de formación?

1.5 ALCANCES, LÍMITES Y PROYECCIONES

1.5.1. ALCANCE

En los antecedentes del problema hemos identificado la gran importancia que tiene la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, aunado a las nuevas tendencias en los cambios curriculares que se intentan formular en la Educación Panameña donde el estudio de esta asignatura está ubicándose en una posición preferencial, todo esto implica que nuestro problema de investigación que es planteado para resolver una situación en la dirección de la docencia superior, en un futuro no muy lejano, sin lugar a dudas, será un punto central en la formación de los nuevos profesionales de la Administración de Empresas.

Esta investigación se llevará a cabo en la Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Veraguas, Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad, escuela de Administración de Empresas.

1.5.2 LIMITACIONES

Algunas limitantes encontradas en el desarrollo de esta investigación, pero que de alguna manera tratamos de superar, fueron:

- ❖ Escaso material Bibliográfico, ya que no se cuenta con suficientes libros de Cálculo que orienten la formación de esta asignatura en el contexto de la Administración de Empresa Panameña.

- ❖ Veracidad de las respuestas y comentarios proporcionados por algunos docentes entrevistados.

- ❖ Poca disposición por parte de los estudiantes en llenar, objetivamente, las encuestas asignadas.

1.5.3 PROYECCIONES

Con el desarrollo de esta investigación lo que pretendemos es proponer un cambio en la metodología tradicional por una de carácter Constructivista, que fundamente su mediación didáctica con situaciones de aprendizaje del área de formación de los participantes, cuyo enfoque metodológico tiene como objetivo principal despertar y motivar el interés del alumno hacia el estudio de los conceptos fundamentales del cálculo, los cuales serán presentados con situaciones reales de la Administración de Empresas, permitiendo al estudiante visualizar la utilidad y aplicación de los temas tratados, en sus futuras labores profesionales. Esto implica que los docentes que imparten clases en la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad deben que estar involucrados en el problema que estamos investigando, conocer a fondo cuál es la intencionalidad didáctica de la propuesta o estudio de un nuevo enfoque en la enseñanza del Cálculo que estamos formulando.

1.6 OBJETIVOS

1.6.1 GENERALES

1. Analizar el enfoque que se le está dando a la enseñanza del Cálculo en la Escuela de Administración de Empresas, del Centro Regional Universitario de Veraguas.

2. Conocer la percepción que tienen los estudiantes en torno al estudio del Cálculo en la Escuela de Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas.

3. Presentar una alternativa metodológica para fortalecer el proceso de adquisición de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la Escuela de Administración de Empresas de la Universidad de Panamá

1.6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar el enfoque de enseñanza del Cálculo en la Facultad de Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas, por medio de una encuesta aplicada a los estudiantes.

2. Definir la enseñanza del Cálculo en contexto.

3. Analizar los resultados de la encuesta aplicada a los estudiantes.

4. Presentar los componentes básicos que caracterizan a una Mediación Didáctica Constructivista.

5. Ofrecer un modelo de Mediación Didáctica Constructivista para la enseñanza del concepto de límite, derivada e integral definida en la formación de los estudiantes de la Escuela de Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas.

1. 6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Hipótesis General:

Se puede fortalecer el proceso de adquisición de los conocimientos del Cálculo en el área de Administración de Empresas, mediante el uso de una alternativa de enseñanza y aprendizaje mediada con situaciones problémicas del área de formación.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 PRESENTACIÓN

La enseñanza del cálculo es una labor compleja, los diferentes grupos que constituyen la comunidad matemática deben asumir una responsabilidad conjunta y colaborar juntos para abordar con eficiencia y eficacia los variados temas que se presentan en los programas de cálculo. La problemática en el aprendizaje del cálculo, es un compromiso del sistema educativo, es necesario contar con recursos y alternativas didácticas que viabilicen de manera mas efectiva la adquisición de los conocimientos matemáticos, aparentemente la utilidad de esta ciencia carece de sustento cuando , gran cantidad de estudiantes de la muestra seleccionada manifestaron que no le encuentran sentido ni aplicación a esta ciencia, es por esta razón que estamos convencido que un aprendizaje mal orientado influye significativamente en la calidad del profesional que se esta formando, cualquiera que sea su área de conocimiento.

En este capitulo presentaremos el tronco común de todo curso de cálculo, aportes fundamentales sobre la enseñanza de la matemática en contexto, es decir orientada al área de formación de los estudiantes, como también la importancia de la mediación didáctica constructivista tan necesaria para el proceso de adquisición de los conocimientos.

2.2 EL TRONCO COMÚN EN TODO CURSO DE CÁLCULO

Los avances científicos, tecnológicos y humanistas hacen que décadas a décadas las asignaturas de estudios se vean en la necesidad de ir modificando el currículo explícito que se encuentra en los planes y programas de estudio que hemos denominado Tronco Común, el cual para una misma asignatura en diferentes carreras se mantiene prácticamente sin cambios, puesto que lo sustancialmente diferente es el enfoque que debe imprimir el docente al momento de desarrollar un determinado curso. Sin embargo, podemos encontrar cambios significativos en las ramificaciones que contiene el tronco común de un curso específico, según la intencionalidad didáctica en la formación de un área en particular.

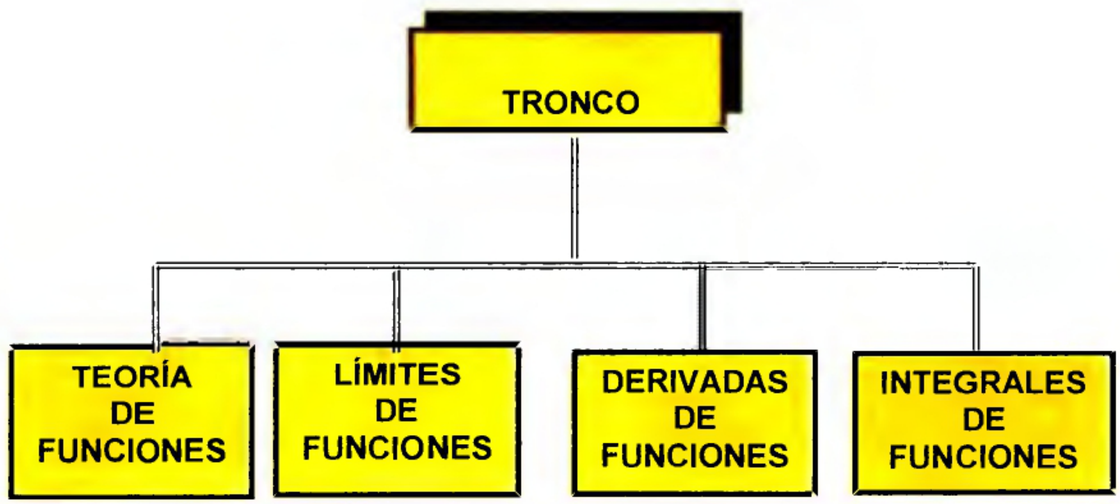
Los cursos de Cálculo no son ajenos a la situación que hemos planteado, es por tal razón que el enfoque de un curso de cálculo varía de acuerdo al área de formación de los participantes. Es decir, supongamos que se está desarrollando el curso de cálculo para las carreras de Licenciatura en Administración de Empresas y la Licenciatura en Biología, y que el tema del tronco común que nos ocupa en ambos cursos es el de extremos de una función, entonces para la primera carrera los problemas típicos a estudiar son los que maximizan ingresos o minimizan costos de producción; sin embargo, para la carrera de Biología los problemas tienen que ver con el maximizar la producción de cierto antídoto o minimizar el crecimiento bacteriano.

Esta ejemplificación global que hemos presentado deja claramente establecido cual es la diferencia en el desarrollo del tronco común para dos o mas carreras diferentes, pero queda una situación que deseamos especificar, y es el hecho, por ejemplo, que la definición de extremos de una función no cambia según la carrera que se estudia, pero si debe cambiar la Situación de

Aprendizaje planteada para introducir tal concepto dependiendo de un tema de interés del área de formación de los participantes.

En la actualidad los cursos de Cálculo en las diversas Facultades de las Universidades de nuestro país, y en particular, en la Universidad de Panamá comparten un contenido temático que denominaremos tronco común, el cual en múltiples ocasiones es desarrollado con un mismo estilo sin importar el área de formación de los participantes y sin considerar algunas ramificaciones que involucran dicho tronco común.

Podríamos caracterizar el tronco común con el siguiente diagrama:



Cada parte de este tronco común que comparten los distintos cursos de Cálculo tiene una serie de ramificaciones que deben caracterizar el enfoque dado al curso dependiendo de la facultad donde sea desarrollado, es decir, los contenidos subordinados a los temas centrales del tronco común pueden ser bastantes similares para dos o más cursos en distintas facultades pero la diferencia la hace el docente en el enfoque que ofrece al desarrollo de la asignatura; dichos contenidos podríamos clasificarlos de la siguiente manera:

TEORÍA DE FUNCIONES

- Concepto de Función
- Funciones Elementales
- Operaciones con funciones
- La composición de funciones.
- Funciones inyectivas y suryectivas.
- Función inversa.

LÍMITES DE FUNCIONES

- Concepto de límite de funciones reales de una variable
- Cálculo de límites de funciones
- Formas de indeterminaciones
- Límites cuando la variable se aproxima a un número real finito
- Límites cuando la variable se aproxima al infinito

- Discontinuidad y continuidad de funciones

DERIVADA DE FUNCIONES

- Concepto de Derivada
- El Problema de la Tangente
- El Problema de la Velocidad Instantánea-Razón de Cambio
- Definición de Derivada
- Reglas para determinar derivadas
- Regla de la cadena
- Derivación implícita
- Derivada de orden superior
- Aplicación de la derivada

INTEGRALES DE FUNCIONES

- Antiderivadas. Integrales Indefinidas
- Reglas Básicas de Integración
- Cambio de Variable en Integrales Indefinidas
- La Integral Definida
- Técnicas de integración
- Integrales impropias
- Aplicaciones de la integral

2.3 ENSEÑANZA TRADICIONAL DEL CÁLCULO

Más de 600 científicos se reunieron en la ciudad de Washington (1987) para participar en el coloquio Cálculo para un Nuevo Siglo, organizado por la Academia Nacional de Ciencias y la Academia Nacional de Ingeniería de EEUU, el cual había sido gestado en otro coloquio realizado en la Universidad de Tulane, New Orleans, en enero de 1986.

Entre los asistentes al coloquio en Washington habían, aproximadamente: 100 investigadores de matemática, 400 profesores universitarios de matemática, 100 profesores de disciplinas diferentes (física, ingeniería, etc.), 50 profesores de secundaria, editores y periodistas. Su misión era estudiar la reforma de la enseñanza del cálculo. Se presentaron opiniones diversas, todos coincidieron en que los programas actuales de cálculo son deficientes, sin embargo, no se pusieron de acuerdo en los nuevos contenidos; consideraban que la enseñanza actual del cálculo es insatisfactoria, sin embargo no compartieron sus opiniones sobre la forma de mejorarla. Para la gran mayoría de ellos la enseñanza del cálculo está en crisis.(Hernández , 1989)

Desde los años 60 comenzó a sentirse una insatisfacción en las universidades respecto al curso de cálculo. Tanto profesores como estudiantes han perdido el entusiasmo en la asignatura. Los porcentajes de reprobados subieron, los profesores tuvieron que enfrentarse con estudiantes mal preparados y con textos cada vez más abultados. Las asignaciones casi se han perdido y, lo que es peor, esta interesante asignatura ha quedado reducida a recetas médicas. Por otro lado, la popularidad de la matemática discreta, gracias al auge de la computación parecía desplazar de su sitial privilegiado al cálculo, sin embargo, de acuerdo a los conferencistas, está sucediendo lo contrario: la computadora presenta nuevas oportunidades para la aplicación y el entendimiento del cálculo.

Hay el consenso de que, como lo dice Paul Zorr (1988), "debemos cambiar no sólo lo que enseñamos sino también cómo lo enseñamos y cómo evaluamos los resultados". Sin embargo, también se tiene la certeza de que estos cambios no serán producto de una o pocas mentes sino de un esfuerzo general de toda la comunidad matemática y educacional. "Cambiar el Cálculo es una enorme y compleja tarea. Casi todo el mundo tiene que ver con el Cálculo" (Douglas, 1988, p.5)

Fundamentalmente existen dos corrientes medulares en el tratamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, caracterizados de la siguiente forma:

La primera se centra en los procesos algorítmicos de cálculos de límites, derivadas e integrales, en donde se entrena al participante en el dominio de reglas puramente procedimentales para resolver los ejercicio planteado.

La segunda se preocupa en primer lugar por la fundamentación de los conceptos estudiados y resolver los ejercicios vía la definición del nuevo saber construido, y posteriormente, se dedica a los procesos algorítmicos sin descuidar el adecuado uso de propiedades, teoremas o reglas. Esta corriente o enfoque la llamaremos enseñanza del Cálculo vías la construcción del conocimiento.

La primera corriente la hemos clasificado como La Enseñanza Tradicional del Cálculo, y es lo que comúnmente hacen los profesores que dictan cursos de Cálculo de servicio, sustentando su proceder en que los participantes de estas asignaturas no son Matemáticos y lo que ellos necesitan es conocer como resolver problemas, abandonando casi por completo toda actividad demostrativa tendiente a profundizar en la comprensión de los teoremas o propiedades estudiadas.

No dudamos que en la enseñanza de los principios del Cálculo existen dificultades de diversas índoles las cuales provocan la tendencia a enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas típicos de procedimientos algorítmicos, impidiendo hacerlos entrar en verdad en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las Matemáticas; la primera tendencia coincide con lo que nosotros hemos llamado enseñanza tradicional del Cálculo y la segunda con la enseñanza del Cálculo vías la construcción del conocimiento. Queremos destacar que en recientes investigaciones en el área de Didáctica del Cálculo se ha caracterizado la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria " *con una tendencia a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio* " (M. Artigue, 1995) .

Para darle mayor rigor a las ideas de esta sección citemos la contra – reforma de los años 80 sobre la enseñanza del Cálculo que en Francia da la Asociación de Profesores de matemáticas del Sector Oficial (APMEP) y el instituto de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática (IREM), en donde las criticas que se hicieron a la enseñanza del Cálculo de los años setenta son las siguientes:

- Introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos al estudiante.
- Construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas.
- Predominio de lo cualitativo sobre lo cuantitativo.
- Empleo muy precoz de un lenguaje formalizado, a veces hermético.
- Enseñanza muy centrada en el discurso del profesor.

La intención de los grupos citados no era simplemente hacer críticas sin plantear algunas alternativas para superar el enfoque dado a la enseñanza del Cálculo, y es así que plantearon las siguientes proposiciones:

- Modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes.
- Equilibrar mejor lo cuantitativo y lo cualitativo.

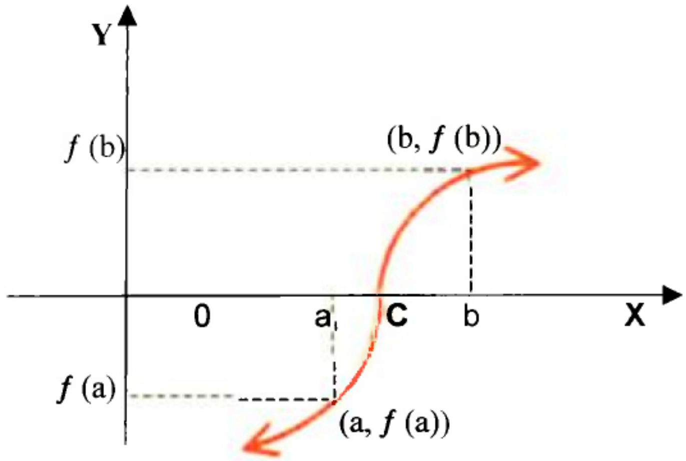
- Apoyarse en objetos típicos sencillos que más adelante servirán de referencia.
- Teorizar únicamente lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes.
- Promover un enfoque Constructivista del aprendizaje.

Si los estudiantes y profesores convertimos al Cálculo en una rama más de la matemática que se dedica a resolver problemas algorítmicos sin preocuparnos por la adecuada fundamentación , los procesos infinitesimales y las aplicaciones que esta ciencia del saber tiene, entonces son múltiples las situaciones académicas de enseñanza y aprendizaje en las que se puede encontrar afectado el estudiantes en estudios posteriores. Citemos dos situaciones en que la enseñanza tradicional del Cálculo a afectado notablemente a nuestros estudiantes, la primera tiene que ver con el concepto de función y la segunda con los teoremas sobre cálculo de límites de funciones.

El teorema de Bolzano establece que:

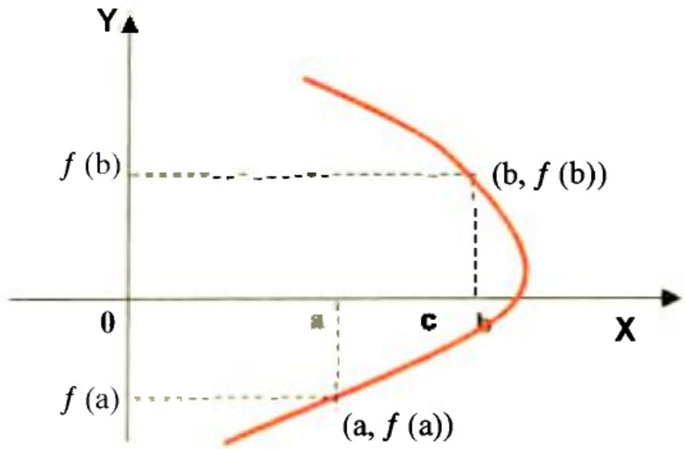
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que: $f(c) = 0$.

Interpretación geométrica del Teorema de Bolzano:



Si la función es continua en [a, b] y f (b) es positivo y f (a) es negativo, entonces la gráfica de la función tiene que cortar el eje x, al menos una vez entre a y b. Y en ese punto x = c, se tiene que f (c) = 0.

Algunos estudiantes sustentaron que la grafica de la función podría ser de la siguiente manera:



Evidentemente que los estudiantes que están pensando en esta forma no tienen claro el concepto de función puesto que este comportamiento de la última gráfica no corresponde a la gráfica de una función debido a que podemos trazar al menos una recta perpendicular al eje x la cual cortaría a la gráfica en dos puntos lo que implica que para un mismo valor de x en el dominio de definición existirían dos valores distintos de y en el rango.

El segundo ejemplo que a continuación citamos, es el cálculo de límite de una función en un punto dado:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1 - \cos t}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1 - \cos t}{t} \cdot \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1 - \cos^2 t}{t(1 + \cos t)}.\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}^2 t}{t(1 + \cos t)}.\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen} t \operatorname{Sen} t}{t(1 + \cos t)}.\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen} t}{t}.\right) \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen} t}{1 + \cos t}.\right)$$

$$= (1)\left(\frac{0}{2}\right)$$

L = 0 (existe).

Nótese que si no se aplica la propiedad de que el límite de un producto es producto de límites, entonces la solución del problema no sería posible, de esta forma queda claramente establecido como la enseñanza tradicional de los límites de funciones sin preocuparnos por la adecuada enseñanza de los teoremas para calcular límites está afectando a nuestros estudiantes.

2.4 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN CONTEXTO

"En la actualidad la enseñanza de la matemática se efectúa a través de una transmisión casi dogmática, por lo que al adoptarse un nuevo enfoque se estaría dando un gran avance al proporcionar a la estructura afectiva del alumno, el estado de motivación e interés para el aprendizaje (A. Alemán, 1999).

Es nuestro interés primordial ofrecer una alternativa de enseñanza constructivista para la enseñanza del cálculo en contexto. Es decir, que si estamos formando a cierto tipo de profesionales y las situaciones de aprendizaje que se les proponen son del área de formación de dichos profesionales entonces se dice que estamos haciendo un proceso en contexto, más específicamente, supongamos que estamos formando Administradores de Empresas y que las situaciones de aprendizaje de nuestro curso de Cálculo son del área de administración, entonces podemos afirmar que estamos haciendo Cálculo en contexto. Para analizar con más detalles lo que se entiende por matemática en contexto citaremos a la profesora **Patricia Camarena Gallardo** de nacionalidad Mexicana la cual en una investigación sobre **Los Modelos Matemáticos y el contexto de la ingeniería** expresa las siguientes opiniones:

En general el hablar de la Matemática en Contexto no es simplemente el ofrecer aplicaciones, sino desarrollar la teoría matemática a las necesidades y ritmo que dictan los cursos de ingeniería, esto no debe confundirse con que se de un curso mecánico, ni un curso no formativo, pues estos elementos son determinados por la forma como imparten estos temas el profesor.

Que dicho sea de paso, el carácter formativo, así como el ser un curso no solamente operativo depende del profesor, ya que los programas de estudio en ninguna parte indican el carácter formativo de la Matemática, ni tampoco el que sea o no un curso de tipo operativo, esos elementos son huellas que deja cada profesor con su formación y experiencia.

Con la Matemática en contexto el estudiante se motiva, le encuentra sentido a los cursos de matemática que recibe, entiende por qué se le imparten, y como y donde los aplica. Ve a las matemáticas sin aplicaciones artificiales, con la notación que usará durante su carrera y vida profesional, modelando problemas que son propios de su carrera.

La matemática en contexto con la concepción que se ha dado, posee varias etapas:

1. Planteamiento del problema.
2. Determinación de las variables y de las constantes del problema.
3. Determinación del modelo matemático.
4. Solución matemática del problema.

5. Determinación de la solución requerida por el problema.
6. Interpretación de la solución en términos del problema.

Hemos citado a la profesora Camarena porque es precisamente la dirección en la cual proponemos los referidos ejemplos. Vamos a presentar ejemplos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el área de Administración, es pues nuestra hipótesis de que : **La enseñanza del Cálculo mediada con situaciones problémicas del área de formación favorece aprendizajes significativos.** Es muy hermoso contar con opiniones como las de la autora que hemos citado, cuando expresa que debemos hacer énfasis en ofrecer un curso con carácter formativo y no solamente operativo, esto lo podemos interpretar en la forma de que los cursos deben ser orientados en primer lugar a una sólida fundamentación de los conceptos estudiados y en segundo lugar que no sean cursos que propician solamente el desarrollo de procesos algorítmicos.

2.5 CONCEPTO DE DIDÁCTICA CONSTRUCTIVISTA

El concepto de Didáctica no es sencillo de definir dado que esta disciplina a tomado carácter de una Ciencia Teórica – Práctica, puesto que tiene una basta teoría la cual encuentra sus aplicaciones, principalmente, en las aulas de clases, sin olvidar todo lo que se está haciendo en investigación sobre Didáctica. Frecuentemente se suele interpretar la Didáctica como el arte de enseñar, claro que este es un punto central en la labor del aula de clases, pero a eso no sólo se circunscribe la Didáctica, más aún cuando en los últimos años se habla de una Ingeniería Didáctica. Ahora es más complejo poder definir lo que es Didáctica Constructivista, sin dejar la multiplicidad de parámetros con que tiene que ver este término.

Por las razones anteriormente expuestas, en esta sección no vamos a dar una definición explícita de lo que es Didáctica Constructivista, sino más bien vamos analizar este término desde la perspectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Cuando se habla de constructivismo se infiere de antemano la construcción del conocimiento, y muchas veces equivocadamente pretendemos que nuestros estudiante de manera independiente logren este propósito, olvidándonos de la labor orientadora que debe hacer el docente, "cuando un alumno se limita a memorizar, esos conocimientos repetitivos resultan poco funcionales, poco útiles cuando se trata de abordar un nuevo contenido de aprendizaje, ello va generando un autoconcepto académico negativo, una baja autoestima, lo que difícilmente inducirá a un aprendizaje significativo y lo llevará a perder el interés por aprender" (Mauri, 1990). Apoyándonos en este aporte de la citada autora, consideramos que en la mediación didáctica que realizan los profesores de Matemática debe existir una intencionalidad didáctica muy bien planificada con el propósito de que el estudiante por medio de ciertos procesos pueda descubrir el nuevo concepto estudiado y de esta manera pueda formular en términos matemáticos el nuevo conocimiento construido, esto implica que en la labor de enseñanza que efectuamos los matemáticos deben ir en forma paralela tres ideas centrales:

Procesos Heurísticos – Descubrimiento – Constructivismo

El método Heurístico es una forma de enseñanza mediante la cual se le plantea a los estudiantes preguntas, sugerencias, indicaciones, situaciones problémicas de aprendizaje a manera de impulsos o estímulos que facilitan:

- La interpretación de situaciones reales.
- La búsqueda independiente de problemas análogos.
- La búsqueda de la solución a la situación planteada.

En esta dirección plantea Flores Ochoa, (1994) que el conocimiento no se descubre sino que se construye, es por ello que los procesos heurísticos deben conducir al descubrimiento, y no pensamos en el descubrimiento de un concepto o saber totalmente nuevo, para esto están los investigadores en Matemática Pura, sino que es un conocimiento nuevo para el que aprende. Lo que se pretende es crear situaciones de aprendizajes guiadas para que el estudiante descubra ya sea un concepto, fórmula, propiedad o teorema matemático.

Posteriormente al descubrimiento que se ha logrado gracias a los procesos heurísticos, el estudiante puede formular el nuevo concepto o saber debidamente construido.

Lo que proponemos es un cambio en la metodología tradicional por una mediación didáctica encaminada en base a los procesos o parámetros presentados anteriormente. No pretendemos que se anule la exposición magistral del docente y que se dejen a los estudiantes trabajando libremente en forma independiente, sino más bien comprometer a los profesores de Matemática para que organicemos nuestra exposición de las clases con una buena intencionalidad didáctica, puesto que son los profesores de Matemática que tienen los saberes académicos que requieren aprender nuestros estudiantes.

Podrán existir muchos recursos didácticos tecnológicos de gran potencialidad para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, pero estos jamás van a poder sustituir la exposición presencial de un Profesor de Matemática, en la cual debe existir un nutrido intercambio de ideas poderosas entre Estudiante ↔ Profesor. El alumno debe tener la oportunidad de escuchar el pensamiento de su profesor, es decir, el profesor debe pensar en voz alta. Por otro lado, el profesor debe tener la oportunidad de poder conducir la forma de razonar de sus estudiantes, no es que el va a pensar por ellos sino que va a interpretar la forma como sus alumnos están aprendiendo el tema, para valorar las formas apropiadas de pensamiento y / o aprovechar los errores de pensamiento para realimentar el procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y en especial del Cálculo, sustentamos aún más este aporte citando a Flores Ochoa, (1994) cuando manifiesta que "los docentes deben conocer el nivel de pensamiento lógico que poseen sus estudiantes para que en esta medida propicie las experiencias que promuevan habilidades de pensamiento en vías de la construcción del conocimiento".

2.6 LA MEDIACIÓN DIDÁCTICA CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO.

En esta sección se pretende, en primer lugar, analizar algunos lineamientos generales que pueden favorecer la creación de ambientes apropiados para que los estudiantes puedan accesar los conocimientos matemáticos por medio de la Didáctica Constructivista.

El tema de la mediación ha adquirido gran relevancia en el discurso didáctico de los últimos años. En relación a la temática de la mediación didáctica en la educación, existen innumerables investigaciones y publicaciones que se ocupan de su tratamiento, pero es necesario aclarar que, si nos referimos a la mediación didáctica constructivista como práctica educativa hablamos de tender puentes, de construir nuevos vínculos desde una perspectiva inclusora, dando una posibilidad de reconstrucción a la situación de modo de establecer un nivel comunitario superador de rupturas que impiden la comprensión del discurso en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con referencia a ello dice Daniel Prieto Castillo (1996) que "entre un área del conocimiento y de la práctica humana y quienes están en situación de aprender, la sociedad ofrece mediaciones. Llamamos pedagógica a una mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje". En el caso de rupturas epistemológicas, la acción mediadora desde la interacción social (acción docente), estará caracterizada por la búsqueda de estrategias que permitan al alumno reposicionarse con relación al objeto de conocimiento.

En esta situación educativa, el acto de mediar pues, deberá estar dirigido a la superación de la ruptura entre teoría y práctica, entre teoría y teoría, entre teoría y puesta en acto, es decir, establecer vínculos entre el sujeto y el objeto de conocimiento que permitan al que aprende una apropiada comprensión, una motivación a aprender el nuevo concepto y más aún a ser capaz de aplicar posteriormente lo aprendido. Sin embargo, existen situaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje donde el concepto de mediación debe ser reconsiderado y reconstruido como es el caso de la mediación didáctica constructivista para la enseñanza del cálculo. En esta modalidad, el concepto de mediación adquiere una particular importancia dado que la relación entre el docente, el sujeto que conoce y el contenido de la materia está mediado por una situación problémica constrctivista, orientada específicamente, al área de formación de los participantes.

Una Metodología de enseñanza de la Matemática tiene carácter Constructivista si en ella se identifican los siguientes rasgos:

- El enunciado del título del tema que se va a estudiar le ofrece a los alumnos una clara panorámica de lo que se va a tratar.
- Considera los conocimientos previos que son necesarios para accesar el nuevo conocimiento.
- Considera una Situación de aprendizaje problémica mediante una serie de instrucciones o lineamientos claros; la misma debe estar al

alcance de los alumnos y preferiblemente que sea del área de formación de los participantes.

- Permite a los alumnos el poder interpretar la situación problémica planteada.
- Comparte los mejores logros de sus estudiantes.
- El docente expone magistralmente distintas vías de solución de la situación problémica planteada.
- Enuncia formalmente el nuevo concepto o saber estudiado, en base a la resolución heurística de la situación de aprendizaje.

La experiencia nos dice que el estudiante valora más una fórmula cuando él participa en su deducción o en su descubrimiento, razón por la cual proponemos que en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática se debe crear un ambiente o nicho ecológico donde las fórmulas o reglas puedan vivir en la mente de nuestros estudiantes, más específicamente, donde puedan nacer, crecer y reproducirse. Preferiblemente al ambiente que nos referimos debe ser Geométrico de carácter gráfico, y este se combinaría con el algebraico para que de esta forma el estudiante pueda recibir el nacimiento de una nueva fórmula. No proponemos que esto se tiene que hacer para la más mínima fórmula, pero sí para las reglas o leyes centrales de un determinado curso de Matemática. Estas consideraciones son favorables para crear ambientes que permitan a nuestros estudiantes construir los conocimientos.

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 PRESENTACIÓN

Este capítulo es dedicado al desarrollo de aspectos íntimamente relacionados con la metodología empleada en nuestra investigación tales como: el tipo de investigación, las fuentes de donde se obtuvieron los datos y los tipos de variables que intervienen. Además se describe el instrumento utilizado para finalmente detallar el tratamiento dado a la información recopilada.

3. 2 DESCRIPCIÓN DEL TIPO DE INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación va dirigida a estudiar aspectos referentes al enfoque que se le está dando al estudio del cálculo en la Escuela de Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas, resaltaremos aspectos del tratamiento metodológico que algunos docentes de cálculo están empleando en la referida escuela. Desde este punto de vista, dado que vamos a describir situaciones que tienen que ver con la formación profesional de la carrera en estudio, entonces nuestra investigación es de *tipo descriptiva* , ya que vamos a medir o evaluar aspectos o componentes del enfoque de enseñanza dado al estudio del Cálculo.

3. 3 FUENTES DE INFORMACIÓN

3.3.1 MATERIALES

A continuación se mencionan las fuentes materiales de información que se usaron:

- Planes de estudio de la carrera de Licenciatura en Administración de Empresas.
- Programas de estudio de la materia de Cálculo I y Cálculo II para la Licenciatura en Administración de Empresas.
- Recursos Bibliográficos y Documentos.
- Instrumentos aplicados a los sujetos.
- Estadística de estudiantes aprobados y reprobados de Cálculo I y Cálculo II de la Escuela de Administración de Empresas de los años 2002 y 2003 tomados de registros académicos.
- Internet

3.3.2 HUMANAS

3.3.2.1 POBLACIÓN

Nuestra investigación va dirigida, específicamente, a identificar como perciben los estudiantes la enseñanza del cálculo para aplicarlo en su labor profesional. Razón por la cual las encuestas se aplicaron única y exclusivamente a los estudiantes.

En estudios de Estadística y Probabilidad se pueden considerar poblaciones infinitas y finitas; sin embargo, la primera consideración es excesivamente amplia, en cuanto que en múltiples ocasiones no puede considerarse que la población posea esta característica, por lo que resulta preciso referirse al caso en que el tamaño poblacional, N, sea finito; que es el caso de nuestro trabajo en donde la población que estudiaremos esta constituida por los estudiantes de la carrera de Licenciatura de Administración de Empresa de la Universidad de Panamá, específicamente del Centro Regional Universitario de Veraguas. Otro aspecto que es importante resaltar de la población y por ende de la muestra es que por la naturaleza de nuestra investigación la población fue seleccionada para la aplicación de las encuestas atendiendo a lo estudiantes que ya han cursado los cursos de cálculo I y II, puesto que ellos peden ofrecernos mayores informaciones respecto a la aplicabilidad del cálculo en su carrera y en su vida profesional. Esto último lo indicamos debido a que contamos con estudiante que estando en su último año de estudio realizan su práctica profesional y otros por razones económicas ya están en el campo laboral.

3.3.2.2 TIPO DE MUESTREO

La referencia realizada con relación a una población finita puede efectuarse a través de una muestra a cuya selección puede procederse por diversos tipos de muestreo; algunos de ellos son los siguientes:

1. *Muestreo aleatorio con reemplazamiento:* Cada muestra posee la misma probabilidad de ser escogida y cada unidad de la población también, puesto que cada elemento tomado de ésta es reintegrado a ella.
2. *Muestreo aleatorio sin reemplazamiento:* Cada unidad de la población pose la misma probabilidad de ser escogida que las restantes para formar parte de la muestra, bien entendido que la probabilidad de que un elemento sea extraído dependerá de los que anteriormente hayan sido ya elegidos.
3. *Muestreo estratificado:* Consiste en que la población se divide en estratos, dentro de cada uno de los cuales se procede como en los dos casos anteriores.
4. *Muestreo* sistemático*:* Consiste en elegir, entre los r primeros elementos de la población (numerados a estos efectos) uno de ellos al azar, y a partir de éste los que se encuentren alejados de él en r lugares, $2r$, $3r$, $4r$, etc.

3.4 VARIABLES

En esta sección nos preocuparemos principalmente por especificar las dos variables principales de nuestra investigación, y para cada una de ellas las definiremos desde el punto de vista conceptual, operacional e instrumental, ello lo haremos por medio del siguiente cuadro.

VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DEFINICIÓN INSTRUMENTAL: Encuesta Aplicada
1. Problemas de Aprendizaje (Variable Dependiente)	Desórdenes en uno o más de los procesos psicológicos básicos (memoria, percepción visual o auditiva, lenguaje), que se puede manifestar en la falta de la aplicabilidad de los saberes obtenidos en los cursos de Cálculo.	Se define como la deficiencias en procesos tales como: 1.1 Rendimiento Académico y sus causas. 1.2 Falta de aplicación de los conocimientos en sus área laboral. 1.3 Motivación en el curso.	Se enmarcan en los reactivos de nuestra encuesta caracterizados por los siguientes numerales. R: 3 ,4 , 5 R: 7 , 8

		1.4 Habilidades en la solución de problemas. 1.5 Construcción apropiada de los nuevos conocimientos.	
2. Enfoque en la Enseñanza del Cálculo (Variable Independiente)	Referida a las relaciones entre dos o más enfoques en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, entre los cuales están principalmente el enfoque tradicional y el enfoque problémico Constructivista en el área de formación de los participantes.	Se define como la deficiencias en procesos tales como: 2.1 Aplicabilidad de saberes. 2.2 Construcción de conocimiento. 2.3 Uso de conocimientos en su área de formación. 2.4 Desempeño laboral.	Se enmarcan en los reactivos de nuestra encuesta caracterizados por los siguientes numerales. R: 6 ,9 , 10 R: 12 , 14

Cuadro 1: Definición de Variables.

3.5 DESCRIPCION DE INSTRUMENTOS

Para recopilar la información que se necesitó para este trabajo de investigación, se utilizaron instrumentos como la Encuesta aplicada a los estudiantes, los cuestionarios aplicados a los funcionarios de registros académicos, los cuestionarios aplicados el coordinador de la escuela de Administración de Empresas; se consultaron diversas fuentes bibliográficas y otros recursos que sirvieron de referencias para el estudio del enfoque en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

El instrumento fundamental en nuestro trabajo fue la encuesta aplicada a los estudiantes, puesto que los otros cuestionarios fueron utilizados para averiguar aspectos generales tales como características de la población, horarios de clases, profesores que atienden a los grupos, cantidad de estudiantes aprobados y reprobados en los cursos de Cálculo durante el año lectivo 2003, la referida encuesta fue un instrumento cerrado y consistió en un cuestionario claro de opción múltiple, con la cual logramos conocer aspectos concretos acerca del enfoque que se le está dando al desarrollo de los curso de Cálculo I y II en la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad de Panamá.

3.6 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Después de obtenida la información preliminar referentes a horarios de clases, cantidad de estudiantes matriculados por grupos, identificación de los profesores que atienden a los grupos y cantidad de estudiantes aprobados y reprobados en el año 2003, procedimos a efectuar un cronograma para la aplicación de la encuesta a los estudiantes procurando lograr un ambiente apropiado para llevar acabo la captura de datos lo cual lo realizamos por medio del tipo de Muestreo sistemático, el cual consiste en elegir, entre los r primeros elementos de la población (numerados a estos efectos) uno de ellos al azar, y a partir de éste los que se encuentren alejados de él en r lugares, $2r$, $3r$, $4r$, etc. esto fue posible gracias a que registros académicos nos facilitó las listas de los estudiantes matriculados en cada curso de Cálculo. Posteriormente, cada reactivo de la encuesta aplicada fue cuidadosamente analizado por medio de cuadros y gráficas estadística emitiendo seguidamente un breve comentario sobre los resultados de cada uno. Finalmente, son estos comentarios emitidos para cada reactivo los que nos dan las conclusiones y recomendaciones presentadas sobre esta investigación con el único objetivo de poder contribuir a mejorar el enfoque en la enseñanza y aprendizaje del cálculo en el área de Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas.

CAPITULO CUARTO

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LOS INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

4.1 PRESENTACIÓN

El presente capítulo está dedicado al análisis de la encuesta aplicada a los estudiantes de la Facultad de Administración de Empresas y Contabilidad de la Universidad de Panamá, específicamente a los estudiantes de IV , V y VI año de la Licenciatura en Administración de Empresas del Centro Regional Universitario de Veraguas.

Presentaremos los resultados de cada pregunta de la encuesta y seguidamente ofreceremos algunos comentarios, apoyándonos, en donde sea posible, con gráficas las cuales nos van a ayudar a un mejor análisis de los resultados obtenidos; cada pregunta del cuestionario será escrita aquí tal cual fue presentada en el instrumento de investigación, esto lo haremos en la sección de resultados de la encuesta aplicada.

4.2 RESULTADOS DE LA ENCUESTA APLICADA

Vamos a presentar cada una de las preguntas que fueron formuladas en la encuesta aplicada a los estudiantes y su respectiva estadística, en donde por medio de un cuadro mostraremos los resultados de las mismas, indicando la cantidad y porcentaje de la elección realizada por los encuestados.

1. ***Último año de estudio que has cursado***

Último año de estudio cursado	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes de III año de licenciatura	28	33.74
Estudiantes de IV año de licenciatura	22	26.50
Estudiantes de V año de licenciatura	33	39.76
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Cantidad de Estudiantes Encuestados por Nivel.

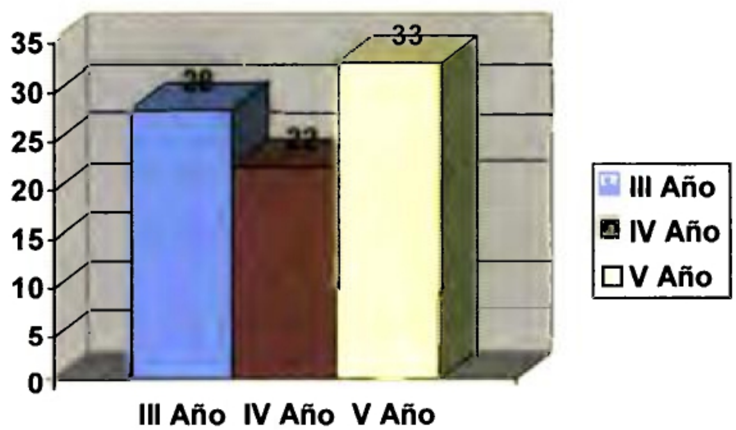


Gráfico Nº 1

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: El cuadro anterior muestra que la cantidad de estudiantes encuestados pertenecen a los últimos años de estudios de la carrera de

Licenciatura en Administración de Empresas lo cual nos garantiza estudiantes de mayor grado de madurez en sus respuestas.

2. ***Curso de Cálculo que has tomado y / o estas cursando:***

Curso de Cálculo que has tomado	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes que han cursado Cálculo I	70	84.34
Estudiantes que han cursado Cálculo II	64	77.11

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Curso de Cálculo Tomado.

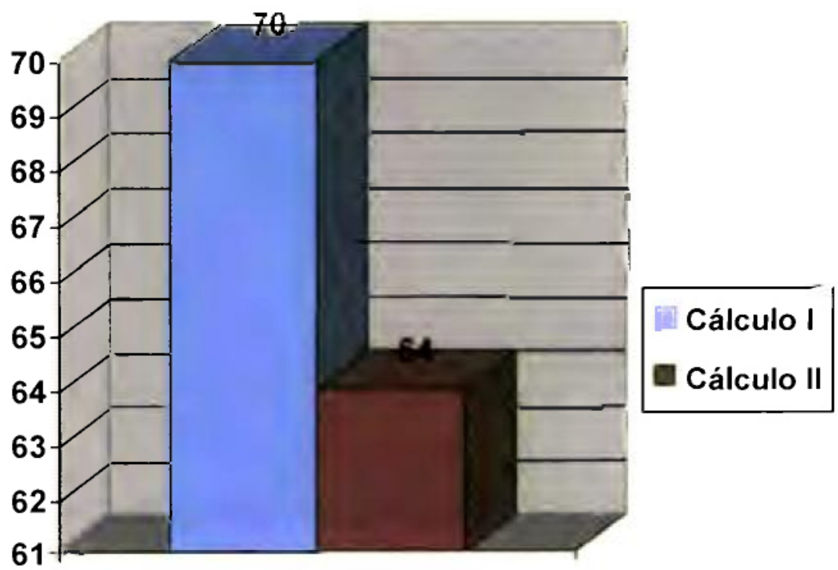


Gráfico Nº 2

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: El cuadro anterior muestra que la mayor cantidad de estudiantes encuestados son alumnos que ya han cursado Cálculo I y II, puesto que el total de la muestra considerada fue de 83 estudiantes.

3. ***Te gustaría tomar los cursos de Cálculo en :***

Semestre en el cual tomarías el curso de Cálculo	**Cantidad**	**Porcentaje**
Semestre regular	17	20.48
Semestre de verano	66	79.52
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Semestre en que Prefieren tomar los Cursos de Cálculo.

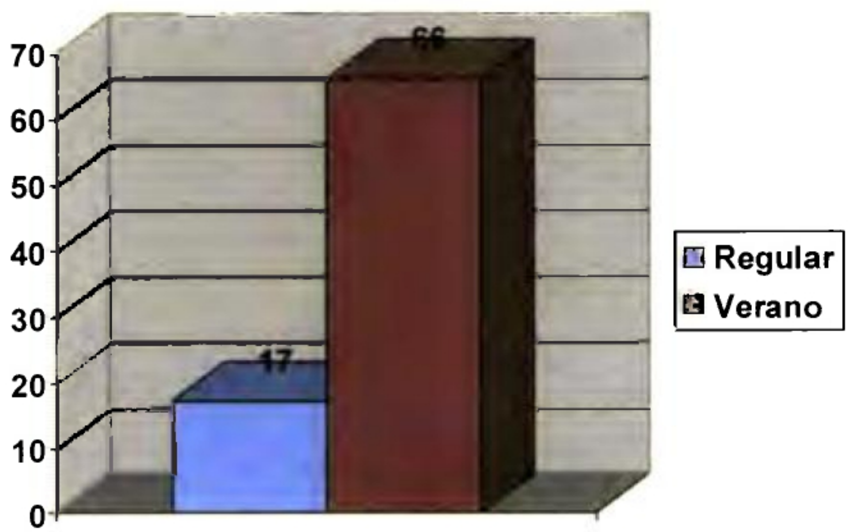


Grafico Nº 3

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Nótese que la gran mayoría de los estudiantes encuestados respondieron que prefieren tomar los cursos de Cálculo en semestre de Verano, y dentro de sus explicaciones hacen referencias a que es un tiempo más corto y estarían dedicados exclusivamente a esa materia que es muy difícil para ellos.

Esto lo podemos interpretar como un temor hacia el estudio del Cálculo y no brindarle un espacio preferencial en su formación.

4. ***Has tenido dificultades de rendimiento académico en los cursos de Cálculo:***

Caracterización de los Estudiantes	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes que si han tenido dificultades	52	62.65
Estudiantes que no han tenido dificultades	31	37.35
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

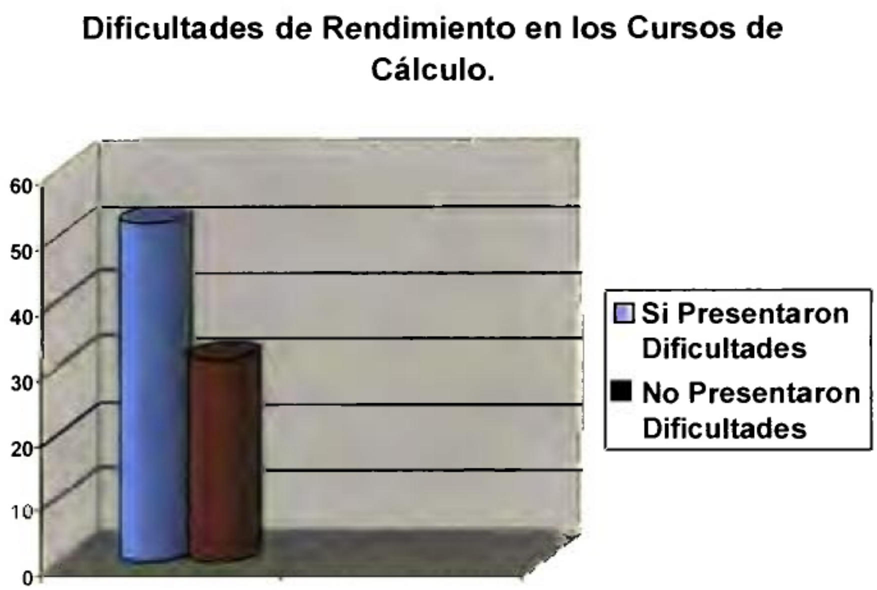


Gráfico Nº 4

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Nótese que un alto porcentaje de los estudiantes encuestados han presentado dificultades de rendimiento académico en los cursos de Cálculo.

5. ***Le encuentras sentido y significado a los cursos de Cálculo que has recibido:***

Caracterización de los estudiantes	Cantidad	Porcentaje
Estudiantes que si le encuentran sentido y significado a los cursos de Cálculo	42	50.60
Estudiantes que no le encuentran sentido y significado a los cursos de Cálculo	41	49.40
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Sentido y Significado encontrado a los Cursos de Cálculo.

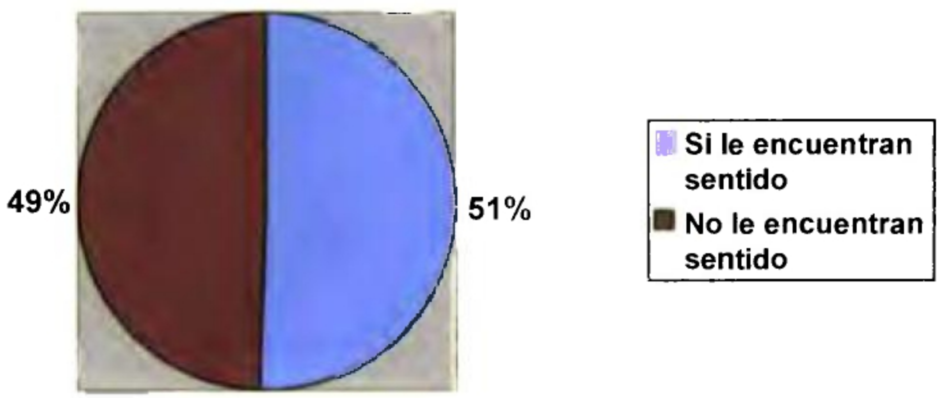


Gráfico Nº 5

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Observe que la diferencia entre los porcentajes de las dos alternativas de este reactivo no es considerable, puesto que solo existe una diferencia de 1.20 %

6. Sabes para que te sirven los conocimientos de Cálculo que has recibido:

Caracterización de los estudiantes	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes que sí saben para que les sirven los conocimientos de Cálculo	41	49.39
Estudiantes que no saben para que les sirven los conocimientos de Cálculo	42	50.60
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Porcentaje de Estudiantes que saben para qué le sirven los Cursos de Cálculo.

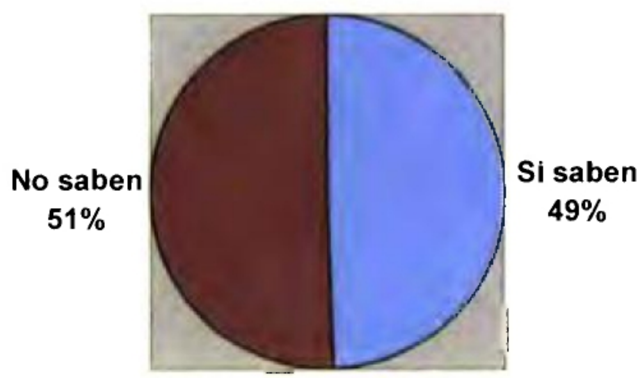


Gráfico Nº 6

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Es lamentable el resultado de este reactivo cuando un alto porcentaje de estudiantes encuestados manifiestan no saber para que le sirven los conocimientos de Cálculo que han recibido.

7. ***Los conocimientos de Cálculo que has recibido son de utilidad en el estudio de las asignaturas de tu especialidad:***

Caracterización de los Estudiantes	Cantidad	Porcentaje
Estudiantes que si le encuentran utilidad al Cálculo	32	38.55
Estudiantes que no le encuentran utilidad al Cálculo	51	61.45
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Utilidad del Cálculo en otras Asignaturas de la Especialidad.

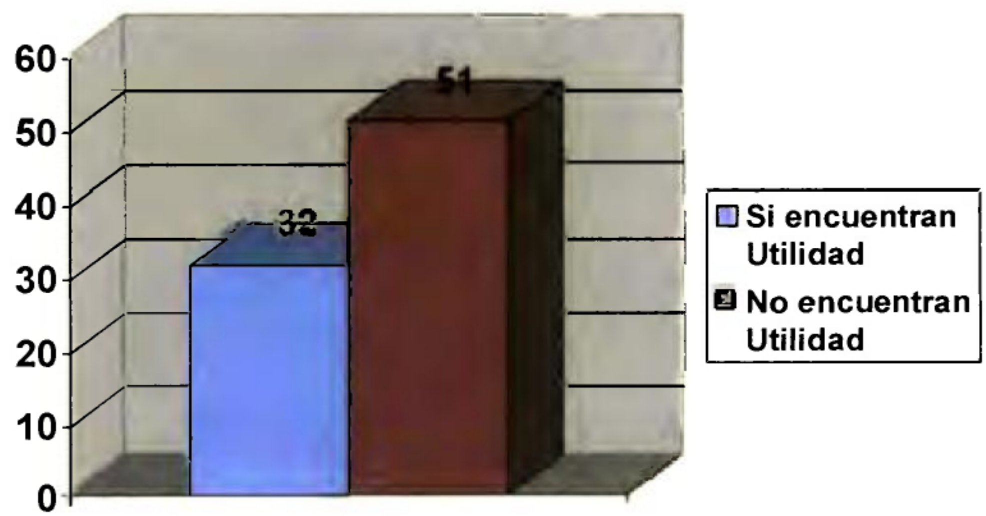


Gráfico Nº 7

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentario: Obsérvese que mucho mas de la mitad de los estudiantes no le encuentran utilidad a los conocimientos de Cálculo en el estudio de las otras asignaturas de su especialidad.

8. Consideras que los conocimientos recibidos en los cursos de Cálculo son importantes para su desempeño como profesional:

Caracterización de los Estudiantes	**Cantidad**	**porcentaje**
Estudiantes que consideran que los conocimientos de Cálculo son importante en su desempeño profesional	47	56.63
Estudiantes que consideran que los conocimientos de Cálculo no son importante en su desempeño profesional	36	43.37
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Importancia de los conocimientos de Cálculo para el Desempeño profesional.

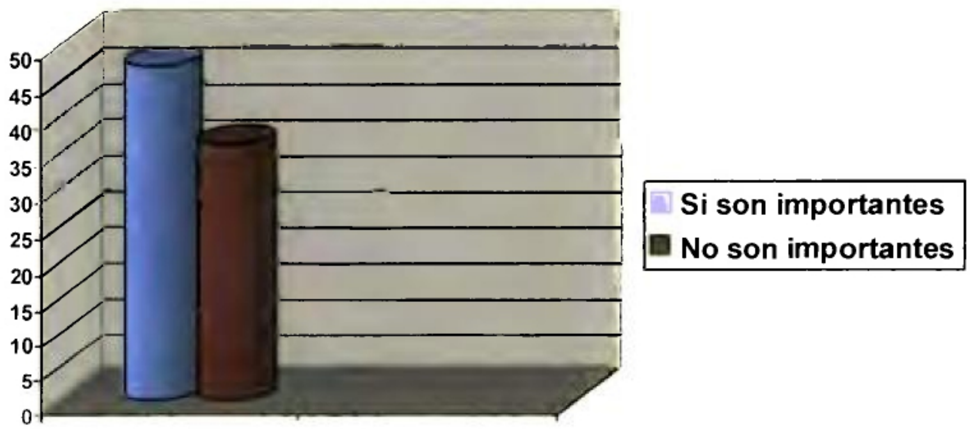


Gráfico Nº 8

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentario: obsérvese que más del 50% de los estudiantes encuestados son concientes de que los conocimientos de cálculo son importante para su desempeño profesional.

9. Consideras que el Cálculo es una asignatura importante en tu formación:

Caracterización de los Estudiantes	Cantidad	porcentaje
Estudiantes que consideran que el Cálculo si es importante en su formación.	47	56.63
Estudiantes que consideran que el Cálculo no es importante en su formación.	36	43.37
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Importancia del Cálculo en la formación Profesional.

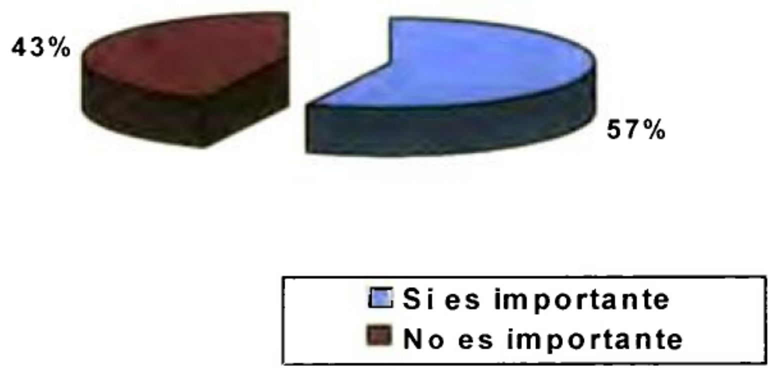


Gráfico Nº 9

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Es favorable encontrar a un alto porcentaje de estudiantes que manifiestan que el Cálculo si es importante en su formación profesional.

10. Cuando el profesor de Cálculo ha iniciado un tema nuevo lo hace con una situación problémica del área de administración de empresas :

Caracterización de las respuestas	**Cantidad**	**porcentaje**
Siempre	13	15.66
Algunas veces	47	56.63
Nunca	23	27.71

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Uso de Situaciones Problémicas en el área de Administración para Introducir un tema de Cálculo.

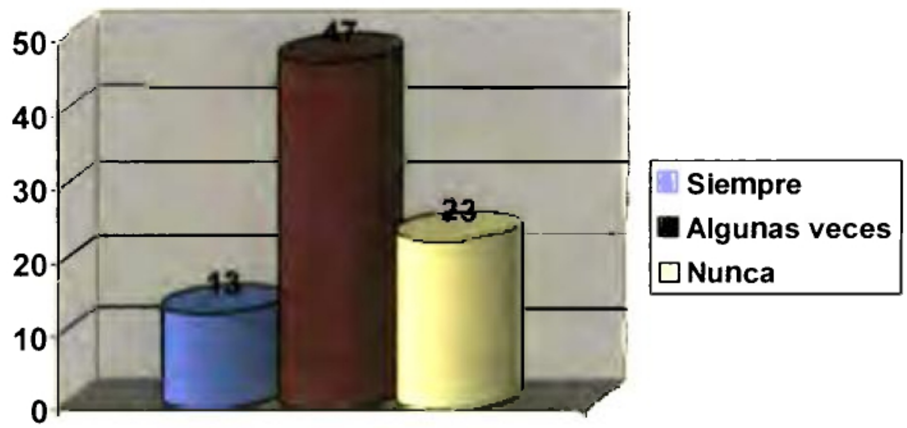


Gráfico Nº 10

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: He aquí nuestro punto central de interés cuando la gran mayoría de los estudiantes ha manifestado que solo algunas veces el profesor de Cálculo ha iniciado el estudio de un nuevo concepto por medio de una situación problémica del área de administración.

11. El profesor de Cálculo te ha explicado las clases con una metodología Constructivista del área de tu formación:

Caracterización de las respuestas	Cantidad	Porcentaje
Siempre	10	12.05
Algunas veces	51	61.44
Nunca	22	26.51

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Gráfico Nº 11

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Lo relevante en los resultados de esta pregunta fue encontrar que mas de la mitad de los estudiantes encuestados respondieron que sus profesores solo algunas veces utilizaron una metodología constructivista en su área de formación y mas alarmante, cuando un porcentaje bastante considerable manifiesta que sus profesores nunca utilizaron metodología contructivista.

12. Selecciona sólo tres alternativas marcando 1, 2, 3 en orden de prioridad, 1 es la más utilizada, y así sucesivamente. Las tres estrategias o métodos de enseñanza más utilizados por tu profesor de Cálculo son:

Caracterización de las Respuestas	**Denominación**	**Cantidad**	**Porcentaje**
Metodología que obtuvo mayor ponderación con uno (1)	Exposición Magistral	26	31.32
Metodología que obtuvo mayor ponderación con dos (2)	Investigaciones	20	24.10
Metodología que obtuvo mayor ponderación con tres (3)	Constructivista	16	19.28

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Estrategias o Metodologías más utilizadas por los Profesores de Cálculo

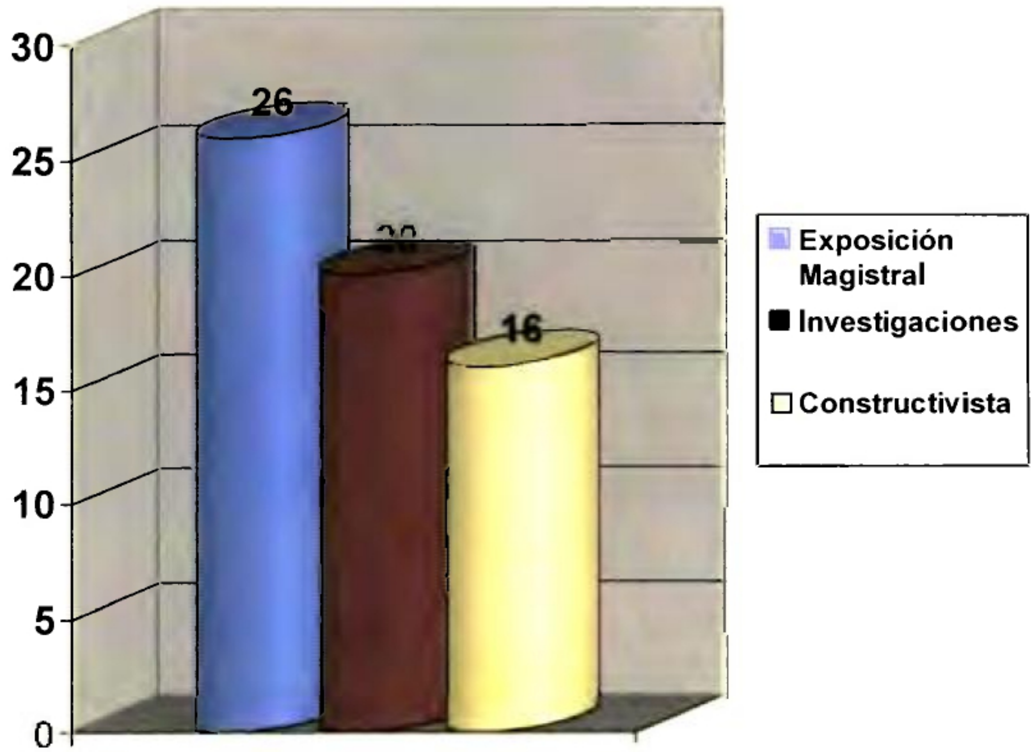


Gráfico Nº 12

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios : El cuadro anterior nos indica que la metodología más empleada por los profesores de Cálculo en la Facultad de Administración de Empresas es la Exposición Magistral seguida de las Investigaciones y en tercer lugar la Constructivista.

13. Te es agradable la metodología empleada por tu profesor de Cálculo:

Caracterización de los Estudiantes	**Cantidad**	**porcentaje**
Estudiantes que han respondido que si es agradable la metodología de su profesor.	33	39.76
Estudiantes que han respondido que no es agradable la metodología de su profesor.	50	60.24
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Aceptación de la Metodología Empleada por los Profesor de Cálculo.

Gráfico Nº 13

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: Existe una mayor cantidad de estudiantes que manifiestan que no les agrada las metodologías empleadas por sus profesores de Cálculo.

14. Te gustaría aprender el Cálculo por medio de una situación real del área de la Administración de Empresas Panameña:

Caracterización de los Estudiantes	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes que han respondido que sí les gustaría aprender Cálculo por medio de una situación real del área de administración.	78	93.98
Estudiantes que han respondido que no les gustaría aprender Cálculo por medio de una situación real del área de administración	5	6.02
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Aprendizaje del Cálculo por medio de una Situación Real del Área de la Administración de Empresas Panameña

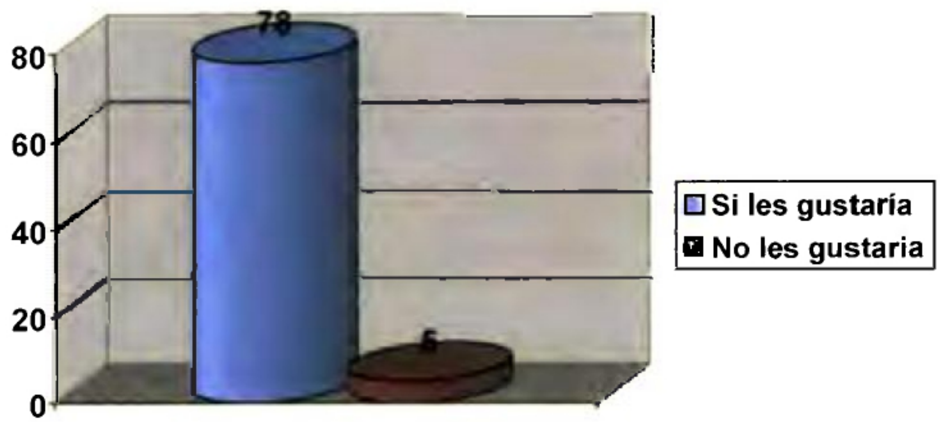


Gráfico Nº 14

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: El cuadro anterior muestra que casi el 100% de los estudiantes manifestó que si les gustaría aprender el Cálculo por medio de una situación real del área de administración.

15. ***Consideras que los profesores de Cálculo deben hacer una reformulación de su metodología de enseñanza para esta asignatura:***

Caracterización de los Estudiantes	**Cantidad**	**Porcentaje**
Estudiantes que consideran que los profesores de Cálculo deben hacer una reformulación de su metodología.	81	97.59
Estudiantes que consideran que los profesores de Cálculo no deben hacer una reformulación de su metodología.	2	2.41
Totales	83	100

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Debe Hacerse una Reformulación en la Metodología de Enseñanza del Cálculo

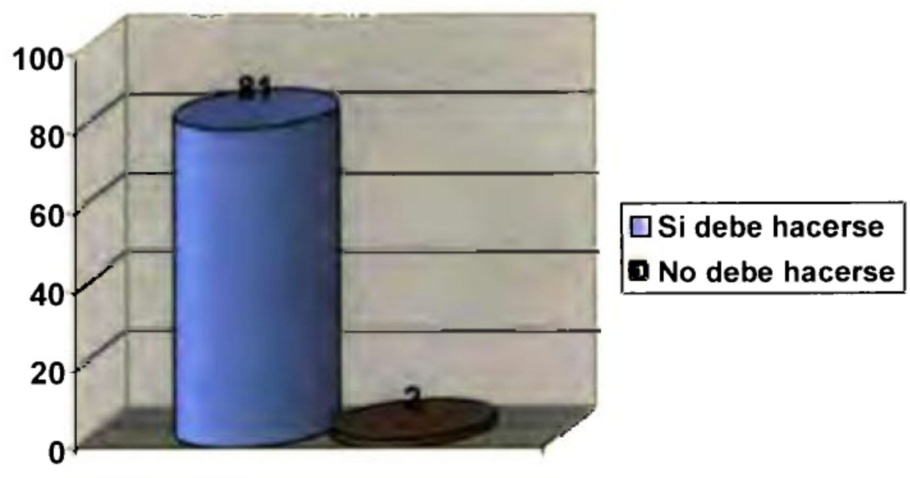


Gráfico Nº 15

Fuente: encuesta aplicada a estudiantes, abril 2004.

Comentarios: La gran mayoría de los estudiante manifestaron que los profesores de Cálculo deben hacer una reformulación de su metodología.

4.3 SOBRE LA VERIFICACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Dado el caso de que nuestra investigación es de tipo descriptiva, hemos formulado una única hipótesis de la investigación, denominada por algunos autores (Arauz-Rovira, 1996) como Hipótesis General, la cual difiere de las hipótesis científicas, puesto que esta últimas son sometidas a pruebas estadísticamente rigurosas con el fin de determinar si son apoyadas o refutadas de acuerdo con lo que el investigador observa. Sin embargo la hipótesis general, le sirve al investigador como una guía u orientación donde se plantean las posibles soluciones del problema de investigación.

Este tipo de hipótesis se limita a formular ciertos supuestos generales sobre la presumible relación entre las variables, donde la variable dependiente será el efecto y la variable independiente será la causa, convirtiéndose en la explicación o solución tentativa, que de realizarse la investigación, ésta quedará como una verdad, como una inquietud o una alternativa pendiente de poner en práctica.

CAPITULO QUINTO

ALTERNATIVAS DIDÁCTICAS DE CORTE CONSTRUCTIVISTA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN EL CONTEXTO DE LA ADMINISTRACIÓN

5.1 PRESENTACIÓN

Luego de haber analizado cuidadosamente los resultados de la encuesta aplicada para nuestro trabajo de investigación hemos podido identificar la necesidad de ofrecer algunos ejemplos de corte constructivista como una alternativa didáctica y que fundamente su quehacer en situaciones reales del área de formación de los participantes, es pues esta la dirección en que hemos orientado el desarrollo de este capítulo. Preliminarmente estudiaremos algunos aspectos que tienen que ver con los ambientes matemáticos para hacer constructivismo. Posteriormente, presentamos las alternativas didácticas constructivistas para estudiar conceptos centrales del Cálculo como lo son: el concepto de **Límites de funciones,** en el cual pretendemos la construcción del concepto de límites al infinito y cuando la variable se aproxima a un número real finito, ambos casos lo vamos a estudiar por medio de una misma situación problémica real del sector administrativo. Inicialmente estudiaremos los límites cuando la variable de producción crece indefinidamente en donde lograremos deducir una regla administrativa de mucha importancia, la cual establece que "al aumentar las cantidades de unidades producidas por una empresa o fábrica, el costo de producción unitario disminuye". En segundo lugar, estudiaremos el comportamiento de las unidades producidas cuando el costo unitario de producción se aproxima a un valor real finito, resaltando aquí una situación de especial interés como es el caso de que cuando el costo unitario de producción se aproxima tanto por la izquierda como por la derecha al costo fijo de producción que establece la compañía o fábrica, entonces las unidades producidas crecen indefinidamente. Seguidamente estudiaremos el concepto de **Derivada** en el cual pretendemos la construcción del referido concepto por medio del análisis de una situación problémica real del sector administrativo. Estudiaremos un problema donde se tiene que maximizar un área sujeta a algunas condiciones iniciales, en donde por medio de la aproximación infinitesimal de dos áreas de interés lograremos determinar la solución más viable al problema planteado, esto nos va servir de apoyo para introducir y construir el concepto de derivada. Además, formalizamos la definición de derivada de una función en un punto, y la definición de derivada como función. No podríamos cerrar esta sección sin presentar el concepto de **Integral definida** el cual se introduce oportunamente por medios del análisis de la aproximación del área de una finca que colinda con un río de forma parabólica, aquí se comprueba como el cálculo rutinario que realiza el administrador de la finca coincide con la integral definida de una función en un intervalo; luego, se formaliza la definición de integral definida y se introducen los teoremas y propiedades referentes a la integral definida.

5.2 AMBIENTES MATEMÁTICOS PARA HACER CONSTRUCTIVISMO

"Un modelo matemático de enseñanza es todo aquel material capaz de traducir o sugerir ideas matemáticas" (Adames, 1999).

La selección de un motivo o problema inicial, entendemos por motivo todo aquel "medio" que se convierte en mediador para facilitar una situación de aprendizaje, es el punto inicial para la elaboración de una situación problémica de aprendizaje, luego la organización básica de los contenidos, es decir establecer niveles de conceptualización y simbolización que permitan un acercamiento progresivo a la significación matemática.

Al respecto escribe Carmen Chamorro "el carácter jerárquico de los contenidos obliga a una elección minuciosa que respete los procesos de construcción de la ciencia matemática, cualquier situación de aprendizaje que desconozca o ignore esta jerarquía provocaría grandes discontinuidades del pensamiento y haría imposible la comprensión por parte del alumno". Otro aspecto importante que debemos considerar es que el conocimiento que se transmite en cualquier situación de aprendizaje debe estar estructurado no solo en si mismo, sino respecto al conocimiento previo que ya posee el alumno, (Carretero, 1995). Se trata de que el docente produzca situaciones problémicas que favorezcan la comprensión por parte del alumno, de que exista un conflicto entre sus ideas sobre un determinado tema de estudio y la concepción científica correcta y significativa.

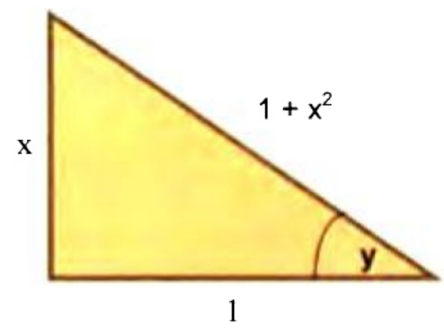
Las alternativas didácticas no son las únicas ni definitivas herramientas de las que puede valerse el docente, pero si suficientemente orientadoras hacia la construcción del aprendizaje significativo y la vivienda de una nueva metodología en la línea de los principios constructivistas. Además de que ofrecen la oportunidad de ajustarlos a la realidad concreta del profesional que se está formando para que sea capaz de enfrentarse a su vida laboral eficientemente.

Es precisamente el enfoque que hemos dado a cada uno de los ejemplos que presentamos a continuación, con el único objetivo de ilustrar algunos ambientes apropiados que nos permiten hacer constructivismo

5.3 EJEMPLOS DE AMBIENTES CONSTRUCTIVISTA.

5.3.1. DERIVADA DE LA FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

<u>Situación de Aprendizaje :</u> Si consideramos la relación $y = \arctan(x)$ o bien, $y = \tan^{-1}(x)$ y la siguiente figura :



De la referida relación se obtiene $\tan(y) = x$. Deriva implícitamente esta última relación respecto a x , y determina y' en términos de x.

<u>Desarrollo:</u>

Como $y = \tan^{-1}(x)$, esto implica que $\tan(y) = x$. Significa que y es un ángulo agudo del triángulo rectángulo dado cuyo lado opuesto es x y su lado adyacente es 1 , por consiguiente la hipotenusa es $1 + x^2$. Si derivamos implícitamente respecto a x la relación :

Tan(y) = x, se tiene : $Sec^2(y)\ y' = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{Sec^2(y)}$, por la identidad trigonométrica $1 + Tan^2(y) = Sec^2(y)$, se tiene que :

$$y' = \frac{1}{1 + Tan^2(y)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1 + x^2},$$

este es el resultado esperado.

Ahora bien, consideremos dos funciones f y u ambas de variable independiente x tales que ellas sean derivables respecto a x y estén relacionadas por medio de la siguiente relación:

$f(x) = Tan^{-1}(u(x))$, entonces

$Tan(f(x)) = u(x)$, derivando esta relación se tiene:

$Sec^2(f(x))\, f'(x) = D_x(u(x))$

$f'(x) = \dfrac{D_x(u(x))}{Sec^2(f(x))}$, de donde se obtiene:

$$f'(x) = \frac{D_x(u(x))}{1 + Tan^2(f(x))}$$

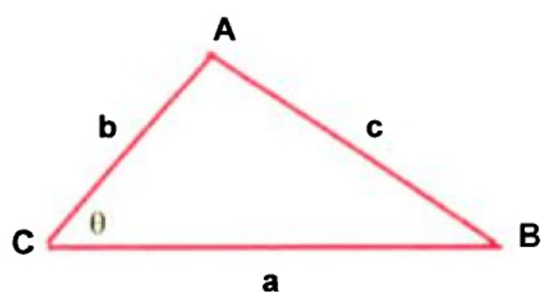
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (u(x))^2} D_x(u(x)),$$

este es el resultado esperado, el cual se enuncia como la regla de la derivada de la función tangente inversa, expresándolo de la siguiente forma:

$$D_x[\ Tan^{-1}(u)\ ] = \frac{1}{1+u^2}\ D_x(u).$$

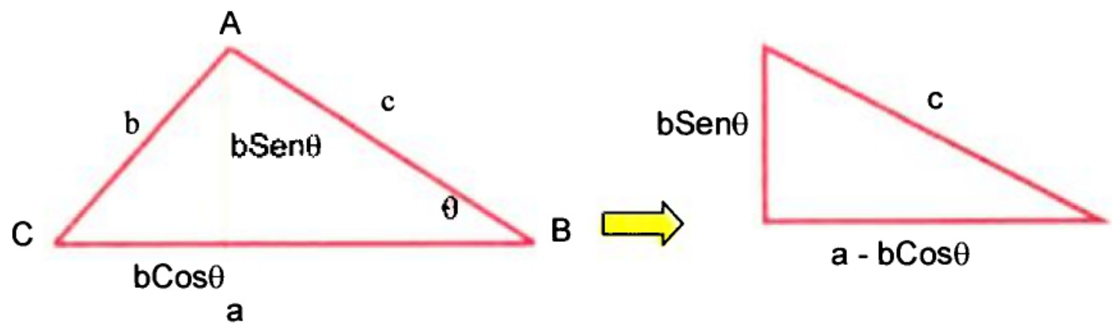
5.3.2. RELACIÓN ENTRE DOS LADOS, EL ÁNGULO COMPRENDIDO Y EL LADO OPUESTO DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA.

Situación de Aprendizaje : En la siguiente figura los lados de longitudes a y b , y el ángulo θ comprendido entre dichos lados se consideran conocidos. El propósito es encontrar el valor de la longitud del lado c en términos de los datos conocidos. Traza la altura del triángulo desde el vértice A para dividir el triángulo dado en dos triángulos rectángulos, de modo que apliques en el triángulo rectángulo de hipotenusa c las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.



Desarrollo

Consideremos un triángulo cualquiera cuyos lados miden a , b y c , el ángulo θ está entre los lados de longitudes a y b.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la derecha, se tiene:

$$(c)^2 = (a - b\cos\theta)^2 + (b\,\mathrm{Sen}\,\theta)^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\,\mathrm{Sen}^2\,\theta$$

$$c^2 = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2(\cos^2\theta + \mathrm{Sen}^2\,\theta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

De manera que la ley que deseamos deducir es la siguiente:

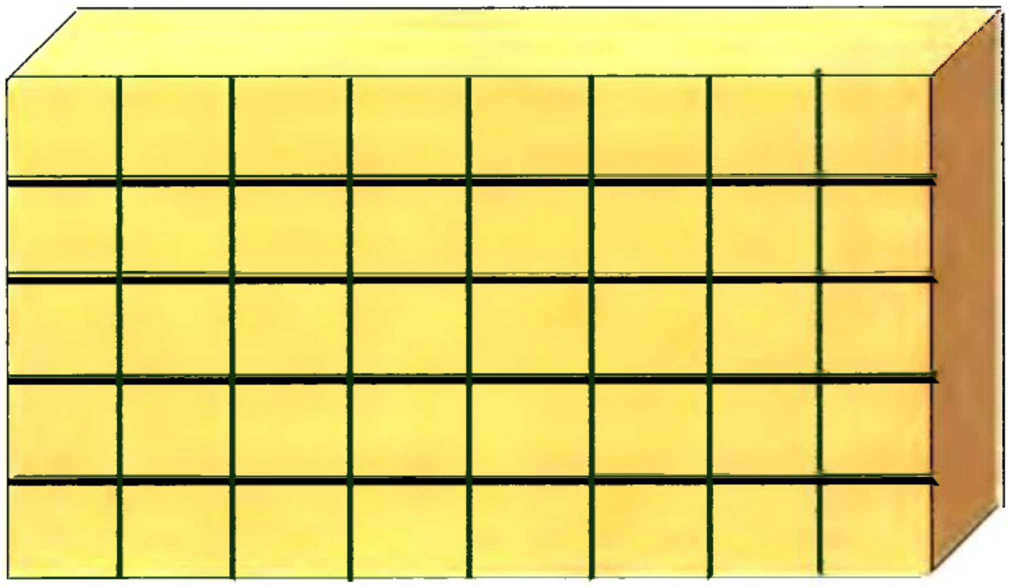
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Esta Ley se conoce con el nombre de **La Ley de los Cosenos.**

5.3.3. ENSEÑANZA CONSTRUCTIVISTA PARA EL CONCEPTO DE MATRIZ EN EL AREA DE ADMINISTRACIÓN.

Situación Problémica de Aprendizaje: El gerente de una compañía distribuidora de piezas de automóvil le comunica al jefe de un departamento que está por llegar un pedido que debe almacenar de 40 nuevos tipos de piezas para autos sedan, la entrega debe incluir 12 000 piezas de cada tipo. Le solicita al jefe del departamento que busque la forma de almacenar dicho pedido de piezas de tal forma que cuando se requiera un cierto tipo de pieza se pueda encontrar con rapidez y efectividad.

Solución de la situación de Aprendizaje: El jefe del departamento piensa dos (2) veces y dice: debo diseñar un anaquel grande que tenga 40 cubículos para que cada uno de ellos almacene un tipo diferente de pieza, y cada uno de los cubículos debe tener capacidad para las 12 000 piezas. Luego, analiza que si coloca un cubículo sobre el otro (o uno al lado del otro), entonces el cubículo No. 40 quedaría muy alto en cuyo caso tendría que utilizar una escalera para llegar al él (o una patineta). Por lo cual se le ocurre diseñar el anaquel con cinco (5) hileras de cubículos cada una de las cuales debe contener 8 cubículos, de manera tal que así tendría los 40 cubículos de forma más accesible. Su diseño se muestra en la siguiente figura.



Para identificar cada cubículo él hace los siguiente: Enumera las hileras de los cubículos de arriba hacia abajo usando la notación: h_1 , h_2 , h_3 , h_4 , h_5 ; luego, los cubículos de cada hilera los enumeras de izquierda a derecha usando la notación: h_{11} , h_{12} , h_{13} , h_{14} , . . . ,h_{18} , estos son todos los cubículos de la primera hilera. Con esta notación él puede manejar en su escritorio la información sobre donde está ubicado cada tipo de pieza de automóvil, esto con la ayuda de un cuadro guía tal como el siguiente:

Cubículo de ubicación	Nombre y detalle del tipo de pieza
h_{11}	Nombre : x_1 , . . .
h_{12}	Nombre : x_2 , . . .
h_{13}	Nombre : x_3 , . . .
h_{58}	Nombre : x_{40} , . . .

Cuadro N° 2

Ahora bien, la idea creativa del jefe del departamento de diseñar un anaquel con cinco (5) hileras, renglones o filas y con ocho (8) columnas, se conoce con el nombre de arreglo matricial o simplemente Matriz, cuya definición formalizaremos seguidamente.

Definición : Se llama Matriz A, al arreglo rectangular de filas y columnas, los arreglos horizontales se llaman filas y los arreglos verticales se llaman columnas. El elemento a_{ij} , se dice que está en la i – ésima fila y en la j-ésima columna .

En nuestra situación de aprendizaje el jefe del departamento diseñó el anaquel en base a una matriz de 5 filas por 8 columnas, es decir, de tamaño o dimensión 5 x 8. En términos generales esta matriz puede ser escrita de la siguiente manera:

A =

5.4 EJEMPLOS DE ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA, PROPUESTOS COMO ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS CENTRALES DEL CÁLCULO EN EL ÁREA DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS.

5.4.1. EL CONCEPTO DE LÍMITE:

Situación Problémica Constructivista de Enseñanza y Aprendizaje:

Una compañía azucarera de Coclé tiene gastos fijos de producción por \$ 900. 00 más \$ 15.00 por quintal de azúcar producido, se desea analizar el costo unitario de producción por quintal expresado este como una función al producir x cantidad de quintales de azúcar, y demostrar que a medida que la cantidad producida aumenta el costo de producción se aproxima al gasto unitario por quintal.

En efecto, los gastos de producción de x quintales de azúcar es la función:

$$C(x) = 900.00 + 15.00\,x\,,$$

esta es la cantidad de dinero que invierte la compañía para producir x quintales de azúcar, de manera que la función de costo promedio es:

$$f(x) = \frac{900.00 + 15.00x}{x}$$

Analicemos el comportamiento de esta función cuando la cantidad x de quintales de azúcar producidos aumenta indefinidamente.

Si x = 100 (quintales de azúcar producidos), entonces el costo promedio de producción es : $f(100) = \frac{900.00 + 15.00\ (100)}{100}$

$$f(100) = \frac{900.00 + 1500.00}{100}$$

$$f(x) = 24.00$$

Si x = 1000 (quintales de azúcar producidos), entonces el costo promedio de producción es : $f(1000) = \frac{900.00 + 15.00\ (1000)}{1000}$

$$f(1000) = \frac{900.00 + 15000.00}{1000}$$

$$f(x) = 15.90$$

Si x = 10 000 (quintales de azúcar producidos), entonces el costo promedio de producción es : f(10 000) $= \dfrac{900.00 + 15.00\ (10000)}{10000}$

$$f(10000) = \frac{900.00 + 150\,000.00}{10000}$$

$$f(x) = 15.09$$

Si x = 100 000 (quintales de azúcar producidos), entonces el costo promedio de producción es: f(100 000) $= \dfrac{900.00 + 15.00\ (10\,0\,000)}{100\,000}$

$$f(100000) = \frac{900.00 + 150\,0000.00}{100\,000}$$

$$f(x) = 15.009$$

Si continuamos con este proceso cada vez más observamos que el costo de producción promedio se aproxima al gasto unitario de producción.

Supongamos en términos generales que x es de la forma siguiente:

Si x = 10^n (quintales de azúcar producidos), entonces el costo de producción es:

$$f(10^n) = \frac{900.00 + 15.00\ (10^n)}{10^n}$$

$$f(10^n) = \frac{900.00}{10^n} + \frac{15.00\ (10^n)}{10^n}$$

$$f(10^n) - 0 + 15.00.$$

$$f(10^n) = 15.00,$$

cuando n crece indefinidamente, es decir, cuando n tiende o se aproxima al infinito, lo cual se escribe como $n \to \infty$. Esto prueba una regla comercial que comúnmente expresamos diciendo, "al aumentar la cantidad de artículos producidos se disminuye el costo de producción". Dicha regla la formularemos de la siguiente manera :

A medida que la cantidad de producción aumenta el costo de producción unitario disminuye.

Se ve claro que a medida que la cantidad x de quintales de azúcar producidos aumenta indefinidamente el costo promedio de producción se aproxima a $ 15.00 , que es el gasto fijo de producción de un quintal de azúcar que ha fijado la compañía, lo cual se puede escribir en notación de límite como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{900.00 + 15.00x}{x} \right) = 15.00$$

Lo cual se lee " límite cuando x tiende al infinito de f de x es igual a 15 " .

<u>Definición</u> : La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que f(x) se puede acercar arbitrariamente a L escogiendo a x suficientemente grande.

Continuando con la misma situación problémica, recordemos que " x " es la cantidad de quintales de azúcar producidos y, " y " es el costo unitario de producción, las variables se relacionan por medio de la siguiente ecuación:

$$y = \frac{900 + 15x}{x}$$, de donde tenemos que

$$yx = 900 + 15x$$

$$yx - 15x = 900$$

$$x(y - 15) = 900$$

$$x = \frac{900}{y - 15}$$, de aquí tenemos la función g(y)

definida por, $$x = g(y) = \frac{900}{y - 15}$$

la cual podría ser analizada y graficada invirtiendo los ejes coordenados. Sin embargo, para no romper el esquema tradicional intercambiemos el papel de las variables, es decir, " x " representará el costo unitario de producción, mientras que " y " representará la cantidad de quintales de azúcar producidos, de modo que la función quedará definida de la siguiente manera:

$$y = g(x) = \frac{900}{x - 15}$$, lo cual representa la forma tradicional de estudiar las funciones.

Ahora bien, analicemos primero el comportamiento de la cantidad de quintales de azúcar cuando el costo unitario de producción se aproxima a

$ 24.00, claro que el costo puede aproximarse a dicho valor por medio de valores tomados tanto por la derecha como por la izquierda del mismo, es decir, por medio de valores mayores y menores, respectivamente, al costo de $ 24.00

Analizando por la derecha, se tiene :

Si $x = 24.03$, entonces $g(24.03) = \dfrac{900}{24.03 - 15}$

$= \dfrac{900}{9.03}$

$y = 99.66777409$;

Si $x = 24.02$, entonces $g(24.02) = \dfrac{900}{24.02 - 15}$

$y = \dfrac{900}{9.02}$

$y = 99.7782705$;

Si $x = 24.0$, entonces $g(24.01) = \dfrac{900}{24.01 - 15}$

$y = \dfrac{900}{9.01}$

$y = 99.88901221$;

Se ve claro que a medida que x se aproxima a 24 por la derecha el valor de y se aproxima o se acerca a 100, este límite se llama límite por la derecha, y se escribe:

$$\lim_{x \to 24^+} g(x) = 100 \ , \quad (1) .$$

Analizando por la izquierda, se tiene :

Si $x = 23.97$, entonces $g(23.97) = \dfrac{900}{23.97 - 15}$

$$y = \frac{900}{8.97}$$

$$y = 100.3344482 ;$$

Si $x = 23.98$, entonces $g(23.98) = \dfrac{900}{23.98 - 15}$

$$y = \frac{900}{8.98}$$

$$y = 100.222717 ;$$

Si $x = 23.99$, entonces $g(23.99) = \dfrac{900}{23.99 - 15}$

$$y = \frac{900}{8.99}$$

$$y = 100.1112347;$$

Se ve claro que a medida que x se aproxima a 24 por la izquierda el valor de y se aproxima o se acerca a 100, este límite se llama límite por la izquierda , y se escribe : $\underset{x \to 24^-}{Lím}\ g(x) = 100,$ (2).

Como los límites (1) y (2), ambos existen y son iguales, se puede concluir que:

$$\underset{x \to 24}{Lím}\ g(x) = 100, \quad (\text{ existe }).$$

Por otro lado, analicemos el límite cuando x se aproxima a 15 tanto por la derecha como por la izquierda, como sigue:

Analizando por la derecha, se tiene :

Si $x = 15.03$, entonces $g(15.03) = \dfrac{900}{15.03 - 15}$

$= \dfrac{900}{0.03}$

$y = 30\,000$;

Si $x = 15.02$, entonces $g(15.02) = \dfrac{900}{15.02 - 15}$

$= \dfrac{900}{0.02}$

$y = 45\,000$;

Si $x = 15.01$, entonces $g(15.01) = \dfrac{900}{15.01 - 15}$

$= \dfrac{900}{0.01}$

$y = 90\,000$;

Se ve claro que a medida que x se aproxima a 15 por la derecha el valor de y crece indefinidamente, es decir, el límite es infinito y no existe, este límite se llama límite por la derecha, y se escribe:

$$\underset{x \to 15^+}{Lím}\, g(x) = \infty \quad \text{(no existe),} \quad (3)\,.$$

Analizando el limite por la izquierda, se tiene:

Si $x = 14.97$, entonces $g(14.97) = \dfrac{900}{14.97 - 15}$

$$= \frac{900}{-0.03}$$

$$y = -30\,000 \ ;$$

Si $x = 14.98$, entonces $g(14.98) = \dfrac{900}{14..98 - 15}$

$$= \frac{900}{-0.02}$$

$$y = -45\,000 \ ;$$

Si $x = 14.99$, entonces $g(14.99) = \dfrac{900}{14.99 - 15}$

$$= \frac{900}{-0.01}$$

$$y = -90\,000 \ ;$$

Se ve claro que a medida que x se aproxima a 15 por la izquierda el valor de y decrece indefinidamente, es decir, el límite es infinito y no existe, este límite se llama límite por la izquierda, y se escribe como sigue:

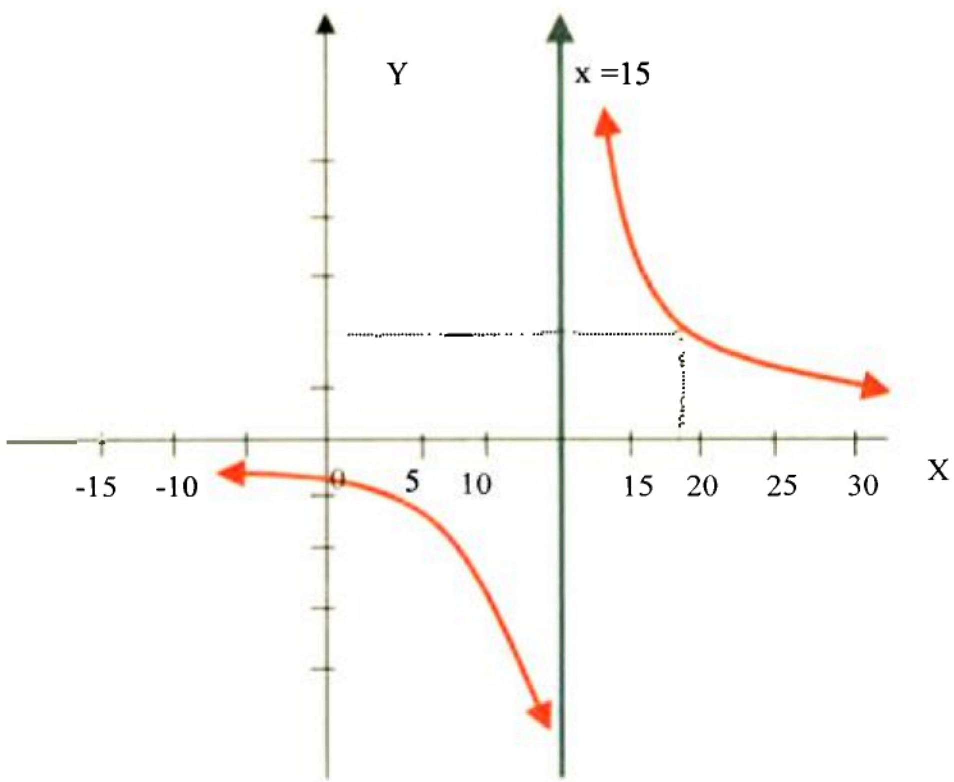
$$\underset{x \to 15^-}{Lím} \ g(x) = \infty \quad \text{(no existe),} \qquad (4).$$

Como los límites (3) y (4) no existen (es suficiente que no exista uno de los dos), entonces podemos concluir que el límite de la función no existe, lo cual se escribe:

$$\lim_{x \to 15} g(x) = \infty \quad \text{(no existe)},$$

esto se interpreta por el hecho de que para que el costo unitario de producción esté cerca de $ 15.00 , las cantidades de quintales de azúcar producidos tiene que crecer indefinidamente.

Veamos la gráfica de la función $y = g(x) = \dfrac{900}{x - 15}$, en la cual identificamos que el límite se encuentra sobre el eje y, mientras que sobre el eje x, la variable independiente toma valores muy próximos a los valores de interés.



Del análisis de este problema real hemos podido deducir que para la existencia del límite de una función f en un punto x = a es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Debe existir el límite por la derecha, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, existe.

2. Debe existir el límite por la izquierda, es decir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, existe.

3. Los límites unilaterales, derecho e izquierdo deben ser iguales, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, existen.

Ahora podemos escribir formalmente una definición de límite que pueden manejar los estudiantes de la facultad de administración, la misma es la siguiente:

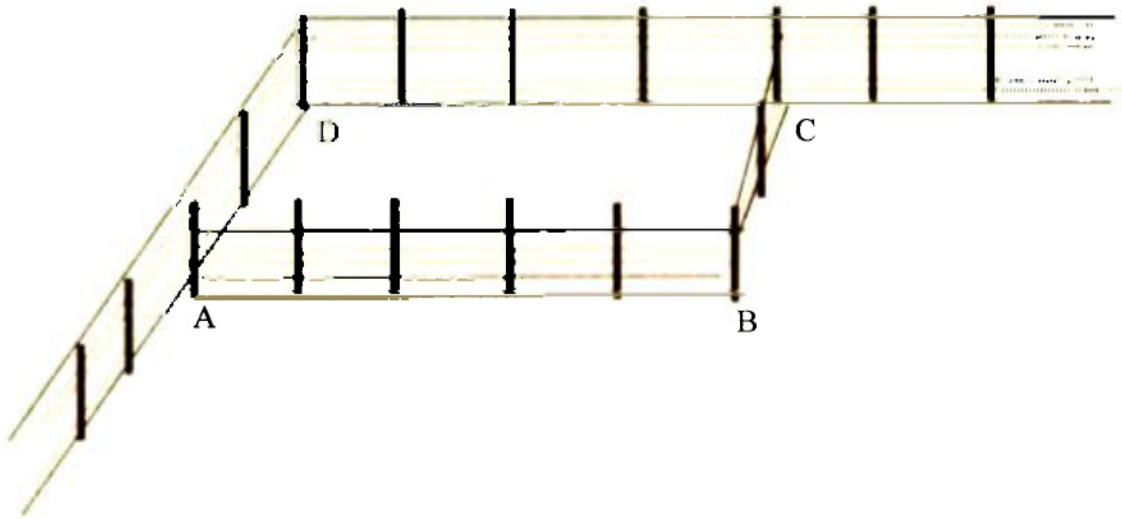
<u>Definición :</u> Sea a un punto de un intervalo abierto, y sea f una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en a, y L un número real. Entonces, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, significa que f(x) puede acercarse arbitrariamente a " L" si x se elige suficientemente cercano a " a ".

5.4.2. EL CONCEPTO DE DERIVADA

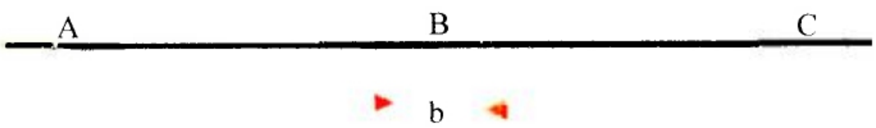
Situación Problémica Constructivista de Enseñanza y Aprendizaje:

Un administrador de una finca tiene construido un corral rectangular grande, desea aprovechar una esquina del corral para construir con cierta cantidad b de metros de alambre un sub-corral o jaula para crear pollos de fomento, pero él desea que el área que va a cercar sea máxima.

Veamos la siguiente figura que ilustra la situación problérmica presentada:

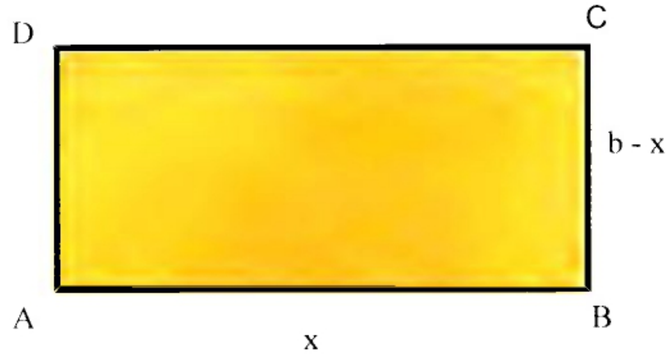


El problema consiste en determinar el punto B sobre el segmento AC de modo que el rectángulo ABCD que se forma tenga área máxima.



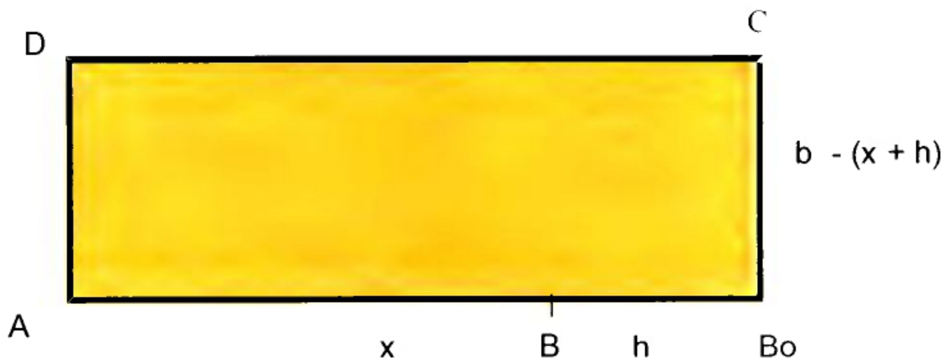
El segmento AC tiene longitud b, de manera que $\overline{AB} + \overline{BC} = b$ metros.

Sea x la longitud del segmento AB, esto implica que el segmento $\overline{BC}$ tiene longitud b - x, el rectángulo formado es el siguiente :



El área de este rectángulo es: $A_1 = x(b - x)$.

Consideremos un número real $h > 0$ de manera que al tomar un punto B_0 sobre el segmento AC, entonces el segmento $\overline{AB_0}$ tenga longitud $x + h$, esto implica que el segmento $\overline{B_0C}$ tiene longitud $b - (x + h)$, bajo estas condiciones el rectángulo formado es el siguiente:



El área de este rectángulo e : $A_2 = (x + h)(b - x - h)$.

Si el punto B hace que el área sea máxima, entonces el área A_2 determinada por B_0 será prácticamente igual al área A_1 determinada por B, esto sucede cuando h es suficientemente pequeño, es decir, cuando $h \to 0$. Bajo estas condiciones tendríamos que:

$$A_2 = A_1$$

$$(x + h)(b - x - h) = x(b - x)$$

$$bx - x^2 - hx + bh - hx - h^2 = bx - x^2$$

$$-h^2 - 2hx + bh = 0$$

$$h^2 + 2hx - bh = 0,$$

como $h > 0$, se puede dividir entre h para obtener :

$$\frac{h^2 + 2hx - bh}{h} = \frac{0}{h}$$

$$h + 2x - b = 0,$$

y además, como $h \to 0$, se tiene que:

$$0 + 2x - b = 0$$

$$2x = b$$

$$x = \frac{b}{2},$$

de lo cual se concluye que el rectángulo de área máxima corresponde a un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.

Analizando la situación presentada en este problema administrativo, se tiene: Si B en un punto máximo (o bien mínimo), entonces cuando h se hace infinitamente pequeño ($h \to 0$), los valores de la función (en este caso el área del rectángulo construido) en x y en $x + h$ van a estar muy cercanos, esto es, tomando a f como función tenemos:

SI $h \to 0$, entonces $f(x + h) \cong f(x)$, de donde se tiene que:

$$f(x + h) - f(x) \cong 0,$$

si dividimos entre h, obtenemos:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cong 0,$$

como h se aproxima a cero (0), entonces si aplicamos límite, el miembro izquierdo define precisamente la derivada de la función f denotada por f '(x), que se lee " f prima de x ", la cual queda como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right), \qquad (1).$$

Nótese que en nuestro problema la función planteada es $f(x) = x(b - x)$

$f(x) = bx - x^2$, si a esta función le aplicamos el límite (1), se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{b(x + h) - (x + h)^2 - (bx - x^2)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{bx + bh - x^2 - 2xh - h^2 - bx + x^2}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{bh - 2xh - h^2}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{h(b - 2x - h)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} (b - 2x - h) \\
&= b - 2x - 0
\end{aligned}$$

$$f'(x) = b - 2x,$$

cuando $f'(x) = 0$ se presenta el máximo, de modo que $b - 2x = 0$ de donde $x = \frac{b}{2}$.

Ahora estamos preparados para definir formalmente el concepto de derivada:

Definición : L a derivada de una función f es otra función f ' (léase efe prima), cuyo valor para un número cualquiera x es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right), \quad \text{si éste límite existe.}$$

Si $f'(x)$ existe , diremos que f es diferenciable en el punto x , o que f tiene derivada en el punto x .

En la definición anterior si hacemos $x - a = h$, entonces cuando $h \to 0$ se tiene que $x \to a$. Este cambio de variable da origen a la siguiente definición alternativa de la derivada de la función f en el punto $x = a$.

Definición: La derivada de la función f en el punto $x = a$, se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

cuando $f'(x) = 0$ se presenta el máximo, de modo que $b - 2x = 0$ de donde $x = \frac{b}{2}$.

Ahora estamos preparados para definir formalmente el concepto de derivada:

Definición : L a derivada de una función f es otra función f ' (léase efe prima), cuyo valor para un número cualquiera x es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right),$$ si éste límite existe.

Si $f'(x)$ existe , diremos que f es diferenciable en el punto x , o que f tiene derivada en el punto x .

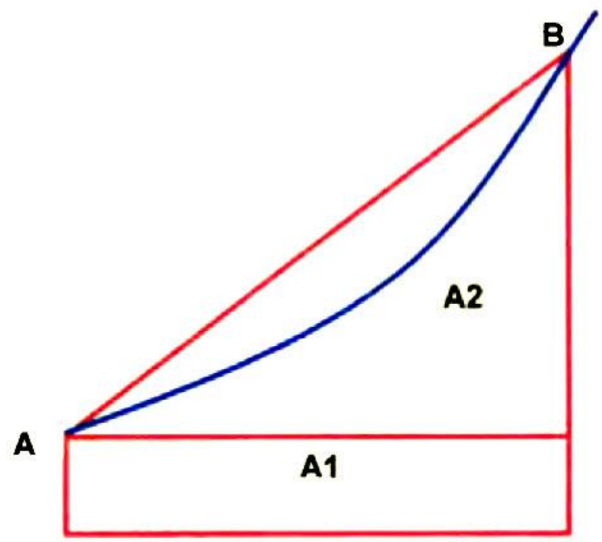
En la definición anterior si hacemos $x - a = h$, entonces cuando $h \to 0$ se tiene que $x \to a$. Este cambio de variable da origen a la siguiente definición alternativa de la derivada de la función f en el punto $x = a$.

Definición: La derivada de la función f en el punto $x = a$, se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

DESARROLLO

El administrador dice: Si divido el área en dos regiones formadas por un rectángulo y un triángulo uniendo los puntos A y B, tendrías un área de la finca pero esta área estaría incluyendo una superficie que se encuentra sobre el río como lo vemos en la siguiente figura:



Si llamamos A_1 el área del rectángulo tendríamos

$$A_1 = (3 \text{ Km})(4\text{Km}) = 12 \text{ km}^2.$$

Si llamamos A_2 el área del triángulo rectángulo tendríamos

$$A_2 = \tfrac{1}{2}(3 \text{ Km})(21 \text{ Km}) = 31.5 \text{ Km}^2.$$

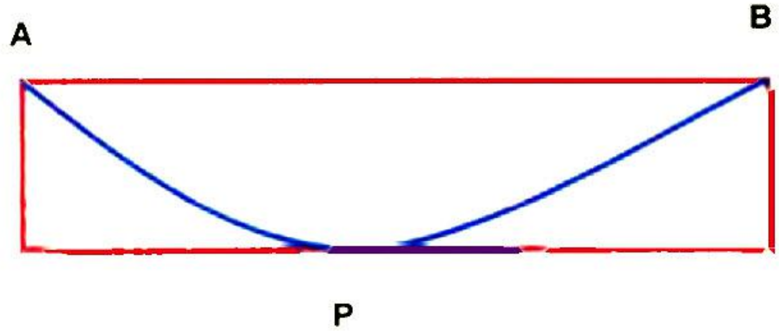
La primera aproximación del área es:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 12 \text{ km}^2 + 31.5 \text{ Km}^2$$

$$A = 43.5 \text{ km}^2,$$

pero esta área está incluyendo por lo cual el administrador dice si encuentro la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2 , 4) y B(5 , 25) que son los puntos sobre la Parábola $y = x^2$, luego para el valor de x = 3.5 que es el punto medio de x =2 hasta x = 5, buscamos el punto sobre la parábola, es decir, el punto P(3.5 ,12.25), posteriormente la longitud del segmento AB y la distancia de la recta AB hasta el punto P. Formaríamos un rectángulo como el que se muestra en la siguiente figura, cuya mitad de área sería la que hace exceso en nuestra primera aproximación.



Busquemos la ecuación de la recta que pasa por los punto A y B, de la siguiente manera:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{25 - 4}{5 - 2}$$

$$m = \frac{21}{3}$$

m = 7 , de modo que la ecuación de la recta es:

$$y - 4 = 7(x - 2)$$

$$y - 4 = 7x - 14$$

$$7x - 14 - y + 4 = 0$$

$$7x - y - 10 = 0.$$

La distancia de esta recta al punto P(3.5 , 12.25) es:

$$h = \frac{|\ Ax_1 + By_1 + C\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$h = \frac{|\ 7(3.5) - 12.25 - 10\ |}{\sqrt{(7)^2 + (-1)^2}}$$

$h = \dfrac{|\ -2.25\ |}{\sqrt{49 + 1}}$, luego altura del rectángulo es aproximada a h

$$h = \frac{2.25}{\sqrt{50}}.$$

La base del rectángulo es la distancia entre los puntos A y B, por lo tanto:

$$b = \sqrt{(5-2)^2 + (25 - 4)^2}$$

$$b = \sqrt{9 + 441}$$

$$b = \sqrt{450}$$

$$b = 3\sqrt{50}$$

El área del rectángulo es : $A_3 = (3\sqrt{50})(\dfrac{2.25}{\sqrt{50}})$

$$A_3 = 6.75 \text{ Km}^2.$$

La mitad de esta área es : $A_4 = 3{,}375 \text{ Km}^2 \approx 3{,}4 \text{ Km}^2$

De manera que una segunda aproximación del área de interés es:

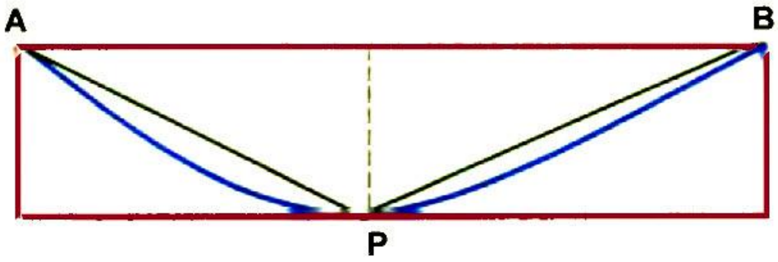
A = 43.5 km^2 - 3.4. Km^2 = 40.1 km^2 . Este es el valor estimado del área total de la finca que el administrador le proporciona al dueño de la misma.

Ahora bien, continuando con nuestra situación problémica, el área de interés se podría calcular por medio de una integral definida como el área comprendida entre las rectas x = 2, x = 5, el eje x y por debajo de la función f(x) = x^2, de la siguiente manera:

$$A = \int_2^5 x^2\,dx$$

$$A = \frac{1}{3}x^3\Big|_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39 \text{ Km}^2,$$ que es el valor exacto del área de total de la finca. Nótese que existe una diferencia de 1.1 km^2 en la estimación que efectúo el administrador de la finca, lo cual en área es significativa.

Deseamos resaltar el hecho de que el administrador consideró de que a la primera estimación del área se le debía restar la mitad del área del rectángulo puesto que él pensaba que las áreas se compensaban, esto sucedería si el segmento que une el punto medio con los puntos A y B fuesen segmentos de rectas , más no en nuestro caso que se trata de una curva, esto significa que su estimación tiene un margen de error. Veamos la situación planteada.



Si el hubiese considerado que le tenía que restar dos tercios (2 / 3) del área de este rectángulo, sus cálculos serían los siguientes:

Dos tercios de esta área es : $A_4 = 4.5 \text{ Km}^2$

De manera que la segunda aproximación del área de interés es:

$A = 43.5 \text{ km}^2 - 4.5. \text{ Km}^2 = 39 \text{ km}^2$, este es exactamente el valor que hemos encontrado por la Integral definida como el área bajo la gráfica de la función.

Como hemos visto la integral definida corresponde al área comprendida por debajo de la gráfica de la función $y = f(x)$, y acotada por el eje **x** y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Ahora vamos a formalizar algunas ideas que hemos introducido por medio del análisis de esta situación problémica real.

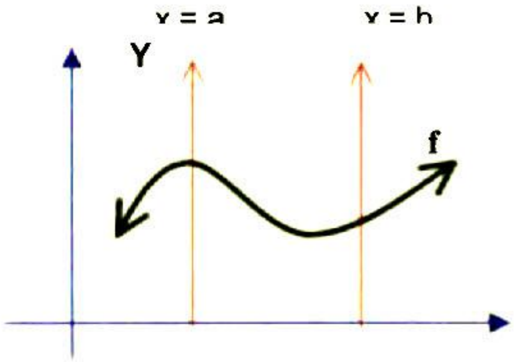
<u>TEOREMA</u>:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, existe una función **F** definida en $[a, b]$ tal que: $\mathbf{F}'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, es decir, f posee antiderivada en $[a, b]$.

El siguiente teorema es una aplicación de las antiderivadas, el cual nos permite calcular el área bajo la gráfica de una función continua, de una manera más sencilla que el método descrito y aplicado en el ejemplo anterior.

TEOREMA:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y sea **F** una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces el área A de la región limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las rectas $x = a$; $x = b$ y el eje x está dada por $A = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$.

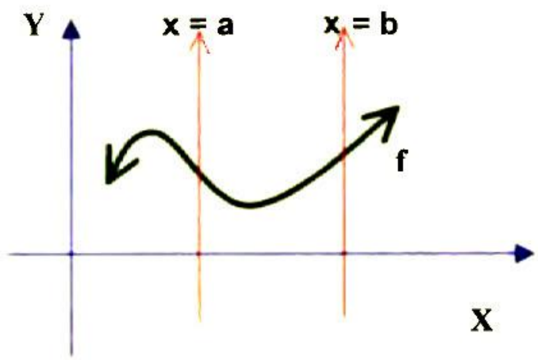


Si en el teorema anterior se reemplaza la hipótesis $f(x) \geq 0$ por $f(x) \leq\leq 0$ se concluye que:

$$A = -[\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)] = -\int_a^b f(x)dx$$

$$A = \mathbf{F}(a) - \mathbf{F}(b) = \int_b^a f(x)dx,$$

esto nos indica que: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a , b] y sea **F** una antiderivada de f en [a , b] , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

El teorema fundamental del cálculo nos permite evaluar integrales con mayor facilidad que el método geométrico analítico empleado inicialmente en la situación problémica planteada por el administrador de la finca.

CONCLUSIONES y RECOMENDACIONES

- Todo proceso algorítmico es sumamente importante en la gama de herramientas que debe poseer un estudiante para hacerle frente a la resolución de problemas en Cálculo, pero la enseñanza de esta ciencia no debe enmarcarse exclusivamente en lo referido anteriormente, debemos ir en primera instancia al acceso y construcción de los conceptos del Cálculo para posteriormente pasar a los procesos puramente algorítmicos.

- La enseñanza del Cálculo en Contexto, es fundamental para que los participantes le encuentren sentido y significado a los contenidos tratados en el proceso de enseñanza y aprendizaje ya que con este enfoque de mediación didáctica exponemos al estudiante ante una situación real del área de su formación profesional.

- Las siguientes conclusiones se refieren a los resultados de nuestro instrumento aplicado a los estudiantes:

- Un alto porcentaje de estudiantes (79.5 %) encuestados prefieren tomar la asignatura de cálculo en curso de verano, justificándose en que le dedicarían todo el tiempo al estudio de esta materia que consideran muy difícil. Sin embargo, consideramos que una asignatura de la cantidad de créditos y horas de estudio como el cálculo debe ser desarrollada en un semestre regular, para que los profesores dispongan del tiempo necesario que permita implementar una buena metodología.

- En cuanto a los estudiantes que manifiestan haber tenido dificultades en el estudio de los cursos de cálculo se obtuvo que más del 50% de los estudiantes presentaron alguna vez dificultades en el estudio de estos cursos, situación esta que está a favor de nuestra hipótesis de investigación.

- Un aspecto notable en los resultados de la encuesta aplicada es que casi el 60% de la muestra consideran que los cursos de cálculo son una asignatura importante en su formación, lo que nos permite visualizar que dicha asignatura debe mantenerse y prestársele mayor atención como una materia fundamental en la formación de los Licenciados en Administración de Empresas.

- Considerando que el cálculo por su naturaleza es una materia muy compleja y abstracta, se hace necesario que los docentes implementen metodologías especiales y motivadoras ya que los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 60% de los estudiantes no encuentran agradable la metodología empleada por algunos profesores. Hecho este que debe ser meditado por los profesores de matemática que imparten clase en la escuela de Administración de Empresas de la Universidad de Panamá, Centro Regional de Veraguas.

- Los estudiantes manifiestan de una manera sorprendente, casi el 100% de la muestra, que desean aprender el cálculo por medio de una situación real del área de la administración de empresas panameña, actitud ésta que debemos atender como un grito de auxilio, proporcionándoles las herramientas que les servirán para su desempeño profesional posteriormente.

- Dentro del estudio del cálculo existen conceptos centrales tales como, límite, derivada e integral, que para que sean accesados significativamente por los participantes recomendamos, que los mismos se presenten con una Situación Problémica de Aprendizaje del área de formación, con una intencionalidad didáctica constructivísta que les permita la apropiada construcción del saber.

- Sabemos que los cursos de cálculos en las diferentes escuelas tienen una temática similar que nosotros hemos denominado el tronco común, sin embargo, en el desarrollo o ejecución de las clases, es permitido enfocar estos contenidos en función de la carrera de estudio, ya que de esta manera los participantes se verán más motivados al estudio, identificarán la aplicación de los mismos en su campo laboral futuro.

- En la enseñanza del concepto de derivada frecuentemente se encuentra fundamentado en el concepto de la pendiente, de la recta tangente a una curva en un punto, pero este enfoque es muy pasivo para los estudiantes de administración de empresas, por lo cual, proponemos en esta investigación que para la enseñanza de este concepto principal de cálculo se coloque tras bastidores el concepto de extremos de una función. Más específicamente el concepto de número crítico de la función.

- Finalmente, recomendamos que los profesores del Departamento de Matemática del Centro Regional Universitario de Veraguas, conozcan los resultados de esta investigación, de manera que estén al tanto de las opiniones de los estudiantes en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del cálculo y puedan en alguna medida poner en práctica el enfoque de enseñanza que se propone en esta investigación, el cual está orientado en función de los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFÍA

1. ARAÚZ-ROVIRA, H. **Metodología de la Investigación.** Guía Práctica para Elaborar Propuestas de Tesis de Grado. Editado en la Imprenta de la Universidad Santa María la Antigua. Panamá, 1996.

2. APÓSTOL T.M. **Cálculus.** Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. Volumen 1. Impreso en España. 1982.

3. BARBETTM R, URIBE, J. **Matemáticas 4.** Segunda Edición Adaptada. McGraw-Hill. Inc. U.S.A Bogotá, Colombia, 1994.

4. BERNAL T. CÉSAR A **Metodología de la Investigación para Administración y Economía** . Pearson Educación de Colombia, Ltda. Editorial Nomos S.A. Colombia , 2000.

5. BOYER, C. **Historia de la Matemática.** Versión Española de Mariano Martínez p. Alianza Universitaria Texto, 1994.

6. BUDNICK , FRANK S. **Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales.** Tercera Edición, Libros Mc Grauw-Hill. México , 1993.

7. CARRETERO, MARIO **Constructivismo y Educación,** Madrid, España, 1995.

8. CLAME, COMITE LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, RELME, Volumen 13,República Dominicana, 2000. Volumen 14, Panamá, 2001 Impreso en México, grupo Editorial Iberoamericana, S. A.

9. CHAMORRO, CARMEN **El Aprendizaje Significativo en el Área de las Matemáticas.** España, 1992.

10. FLORES OCHOA, RAFAEL **Investigación Educativa y Pedagógica**, Mc. Graw Hill, Colombia, 2001.

11. FREUND , JOHN E. **Introducción a las Matemáticas de los Negocios y la Economía.** Editorial Prentice / hall. México, 1985.

12. GOLCHER, E. **Escriba y Sustente su Tesis. Metodología para la Investigación Social.** Servicios Gráficos, Panamá, 1995.

13. HAEUSSLER, ERNEST. **Matemática para Administración y Economía.** Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1992.

14. HERNÁNDEZ SAMPIERI, R. **Metodología de la Investigación.** Segunda Edición. McGraw-Hill, México, 2000.

15. LARSON, R.E. **El Cálculo con Geometría Analítica.** Sexta Edición Harla. México, 1994.

16. LEITHOLD, L. **El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.** Alianza Editorial, S.A. Madrid, 1992. Tomo I y II.

17. MERCER D, CECIL **Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas.** Ediciones CEAC, España, 1999.

18. MORRIS, K. **Didácticas de las Matemáticas.** Cuestiones, Teoría y Práctica en el Aula. Madrid. Ediciones Morata, 1996.

19. NELSEN, ROGER B. **Proofs Without Exercises in Visual Thinking.** Classroom Kesource Materials / Number 1. The Mathematical Association of America.

20. PINILLA, A. CAMARENA, J. **Cálculo con Geometría Analítica.** Segunda Edición, 2003. Panamá, Santiago de Veraguas.

21. PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral.** Montaner y Simon, S.A. Impreso en España, 1970.

22. PUIG ADAMES, PEDRO. **Modelos Preparados y Modelos Hechos. En: El Material para la Enseñanza de Las Matemáticas.** Versión Española de Gustavo Medina

23. PURCELL, E. **Cálculo y Geometría Analítica.** Editorial Norma. Cali Colombia, 1973.

24. SWOKOWSKI, E. **Cálculo con Geometría Analítica.** Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición. México. 1989.

25. THOMAS G.B. **Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.** Ediciones Aguilar, S.A. Segunda Reimpresión. Impreso en España. 1972.

26. WEBER, JEAN E **Matemática para Administración y Economía** Harla , cuarta edición . México , 1982.

Anexos

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN DOCENCIA SUPERIOR

INSTRUMENTO PARA CAPTURAR INFORMACIÓN

Estimado Estudiante :
Estamos realizando una investigación que servirá para elaborar una tesis de grado de **Maestría en Docencia Superior**, haremos un Estudio del Enfoque en la Enseñanza del Cálculo en la Facultad de Administración de Empresas. Solicitamos su ayuda contestando una preguntas que serán para uso confidencial y exclusivo de nuestro trabajo. Agradecemos su valiosa colaboración.

Instrucciones Generales: Marque con una **X** la casilla de su preferencia.

I Parte : Aspectos Generales.

1. Último año de estudio que has cursado: ______________________
2. Curso de Cálculo que has tomado y / o estas cursando:
   Cálculo I ☐
   Cálculo II ☐

3. Te gustaría tomar los cursos de Cálculo en :
   Semestre Regular ☐
   Semestre de Verano ☐

Por qué? : ____

II Parte : Problemas de Enseñanza y Aprendizaje

4. Has tenido dificultades de rendimiento académico en los cursos de Cálculo:
   SÍ ☐
   No ☐

5. Le encuentras sentido y significado a los cursos de Cálculo que has recibido:
   SÍ ☐
   No ☐

6. Sabes para que te sirven los conocimientos de Cálculo que has recibido:
   SÍ ☐
   No ☐

7. Los conocimientos de Cálculo que has recibido son de utilidad en el estudio de las asignaturas de tu especialidad:
   SÍ ☐
   No ☐

   Explique : ____

8. Consideras que los conocimientos recibidos en los cursos de Cálculo son importantes para su desempeño como profesional:
   SÍ ☐
   No ☐

9. Consideras que el Cálculo es una asignatura importante en tu formación:
   SÍ ☐
   No ☐

Explique ____

10. Cuando el profesor de Cálculo ha iniciado un tema nuevo lo hace con una situación problémica del área de administración:
    Siempre ☐
    Algunas veces ☐
    Nunca ☐

11. El profesor de Cálculo te ha explicado las clases con una metodología Constructivista del área de tu formación:

    Siempre ☐
    Algunas veces ☐
    Nunca ☐

12. Selecciona sólo tres alternativas marcando 1 , 2 , 3 en orden de prioridad , 1 es la mas utilizada, y así sucesivamente. Las tres estrategias o métodos de enseñanza más utilizados por tu profesor de Cálculo son :

    _____ Exposición Magistral.
    _____ Conversatorio.
    _____ Módulos de auto-aprendizaje.
    _____ Charlas.
    _____ Investigaciones.
    _____ Heurística.
    _____ Contructivista.

13. Te es agradable la metodología empleada por tu profesor de Cálculo:
    Sí ☐
    No ☐

14. Te gustaría aprender el Cálculo por medio de una situación real del área de la Administración Panameña:
    Sí ☐
    No ☐

15. Consideras que los profesores de Cálculo deben hacer una reformulación de su metodología de enseñanza para esta asignatura:
    Sí ☐
    No ☐

Explique : ____
____

Mil gracias por tu colaboración