



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POST-GRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

**LA INTEGRACIÓN DEL COMPUTADOR AL PROCESO DE ENSEÑANZA
APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS MEDIANTE SISTEMAS
COMPUTACIONALES SIMBÓLICOS**

MARÍA GUADALUPE CORRALES GARCÍA

**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA
OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Panamá, República de Panamá
1995

TM



UNIVERSIDAD DE PANAMA

ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

26 FEB 1996

Aprobado por:

Eduardo Steele

EDUARDO STEELE M.Sc.
Director de Tesis

Diego Santimateo

DIEGO SANTIMATEO M.Sc.
Miembro del Jurado

Xenia de Moscote

XENIA DE MOSCOTE
Miembro del Jurado

Fecha:

14 de diciembre, 1995

obs del autor

281784

DEDICATORIA

Con todo mi amor, dedico este trabajo, a mis dos hijos: Jessica Beatríz y José Félix, a quienes -con mucho dolor- tuve que negarles tiempo de atención, para culminarlo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios Todopoderoso la fuerza y sabiduría
brindada que me ha permitido terminar este trabajo.

A los profesores de la Maestría que compartieron sus conocimientos
y experiencias formándonos para servir mejor. En particular,
al profesor Eduardo Steele quien sacrificó tiempo, esfuerzo y salud
al asesorarnos esta investigación

A mis familiares y compañeros de estudios quienes siempre
me apoyaron y alentaron a continuar la batalla

¡GRACIAS!

CONTENIDO

	Página
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS Y EL ROL DE LA COMPUTACIÓN SIMBÓLICA EN ESE PROCESO	
1.1 Las Computadoras y el Futuro de la Educación Matemática	6
1.1.1 Ventajas de las Computadoras en Educación	8
1.2 Usos de la microcomputadora como herramienta intelectual para el aprendizaje de las Matemáticas	10
1.2.1 Clasificación de los Sistemas Computacionales	11
1.2.1.1 Clasificación de Alan Schoenfeld	11
1.2.1.2 Clasificación evolutiva de los sistemas computacionales de Alvarado y Ray	16
1.3 Los Sistemas Computacionales Simbólicos. Aspectos Generales	17
1.3.1 Investigaciones foráneas sobre el uso de la computación simbólica en la educación	18
1.4 Bases Psico-Pedagógicas para el uso de la computación simbólica en la educación	21
1.5 Aspectos pedagógicos de la computación simbólica	26

CAPÍTULO II. CAPACIDADES EDUCACIONALES DEL SISTEMA COMPUTACIONAL DERIVE	
2.1 Breve descripción de los menús y opciones de DERIVE	33
2.1.1 Capacidades del sistema computacional DERIVE	43
2.1.2 Archivos de Utilitarios	53
2.2 Objetivos educativos de DERIVE	55
CAPÍTULO III OBSERVACIONES METODOLÓGICAS Y DIDÁCTICAS UTILIZANDO COMPUTACIÓN SIMBÓLICA	
3.1 Introducción	59
3.2 Implementación de Laboratorios	61
3.2.1 Orientaciones al confeccionar un Laboratorio	62
3.3 Algunos usos de la Computación simbólica en Geometría	85
3.4 Explorando Álgebra con Sistemas Computacionales	94
3.5 Cómo puede ser usado en Álgebra Lineal?	98
3.6 La Computación Simbólica y los Cursos de Cálculo	104
3.7 Explorando conceptos de Geometría Diferencial Clásica	109
3.8 Explorando y visualizando transformaciones complejas	115
CONCLUSIONES	118
RECOMENDACIONES	119
BIBLIOGRAFÍA	120

RESUMEN

Basado en las ideas constructivistas de aprendizaje y utilizando una poderosa herramienta como lo son las computadoras, presentamos una estrategia metodológica para la enseñanza de la matemática asistido por un sistema computacional simbólico (o CAS: Computer Algebra System). Proponemos actividades en forma de laboratorios, utilizando el sistema simbólico DERIVE (desarrollado por Soft Warehouse, Inc. De Honolulu, Hawaii), que contiene poderosas capacidades simbólicas, gráficas en dos y tres dimensiones y métodos numéricos. Éstas están integradas en una ventana dirigida por un menú, con ayuda en línea, de manera que es fácil de aprender. La combinación de poder, bajo costo, requisitos modestos de hardware lo hace altamente adecuado para las matemáticas a nivel de investigación y educación. Un ambiente de laboratorio, a la par de las facilidades de los CAS de manejar la matemática, permite al estudiante descubrir y explorar conceptos matemáticos de una forma excitante e intelectualmente estimulante.

SUMMARY

Based on Constructivist ideas and using a powerful tool - the computer - we present a methodological approach to the teaching of Mathematics assisted by the computer through the Computer Algebra System (C. A. S). We propose activities using a laboratory approach with the Computer Algebra System DERIVE which has powerful symbolic capacities with graphics in 2D and 3D and numerical methods. These are integrated in a screen with a menu , with on line help, making learning easier. The combination of power, low cost, and modest hardware requirements make it highly adequate for Mathematics at an Educational and Research Level. A Laboratory environment together with the facilities the C. A.S offers to handle mathematics, let the student discover and explore Mathematical concepts in an exciting and intellectually stimulating way.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de conceptos matemáticos ha constituido desde siempre una problemática en todos los niveles escolares. Por ello, como docente en esta área, buscamos alternativas que contribuyan a solucionar esta problemática educativa. Observando los efectos positivos que han tenido las grandes invenciones tecnológicas en el proceso educativo, nos preguntamos sobre el papel que desempeñan las computadoras en el mismo y cuál es la forma más productiva de utilizarla para lograr nuestro objetivo; y es por ello que realizamos esta investigación.

El último decenio de este siglo ha visto el surgimiento de software o paquetes computacionales de aplicación, conocidos en inglés como CAS (Computer Algebra System) o sistemas computacionales simbólicos. Tienen el poder de realizar cálculos simbólicos con las notaciones de los textos en matemática. En todas las áreas de esta ciencia realiza extensos cálculos numéricos en segundos y ofrecen un poder extraordinario de visualización en dos y tres dimensiones. Ellos factorizan, simplifican, derivan, integran, aproximan raíces y funciones; resuelven ecuaciones diferenciales de manera simbólica y numérica, junto al poder de manipulación de gráficas en el plano y el espacio. Actualmente existe una gran variedad de estos programas, y nosotros hemos trabajado con uno de ellos y estamos convencidos que de ponerse en práctica esta propuesta se cambiará drásticamente nuestra didáctica de la matemática.

Nuestro objetivo principal es promover la implementación curricular del enfoque de laboratorios, utilizando computación simbólica, en los cursos de la Licenciatura en Matemática. Surge como una respuesta a la evidente necesidad de cambios metodológicos

que mejoren la calidad de la enseñanza de la matemática en Panamá, a fin de obtener un mejor aprendizaje en los conceptos básicos

Los trabajos de investigación, tales como los realizados por las profesoras Abad, Adela, Ávila, Teresita de, y Castillo, Guadalupe de: "*Elementos perturbadores en el aprendizaje de los conceptos de Límite y continuidad*" y el presentado por el profesor Jorge Hernández, "*El Teorema de Weierstrass y sus implicaciones en la enseñanza del Cálculo*" son una muestra de que existen problemas de aprendizaje del Cálculo (y otras materias de la Licenciatura) en nuestros estudiantes y se están buscando alternativas metodológicas, como la que presentamos en este trabajo, para mejorar esta situación

Los sistemas computacionales simbólicos constituyen uno de los caminos en los cuales podemos hacer uso de la tecnología de computadora para mejorar la práctica metodológica de las matemáticas. Otra vía la constituyen los sistemas computacionales con ambiente de programación. Algunas Universidades y Colegios foráneos han experimentado una combinación de ambos. Sin embargo, nuestro trabajo se limitará a la computación simbólica, para lo cual hemos seleccionado DERIVE, entre la variedad de sistemas de este tipo, a causa de su gran poder y más bajo costo

El trabajo se ha estructurado en tres capítulos que detallamos a continuación.

El primer capítulo "Aspectos generales acerca del aprendizaje de las matemáticas y el rol de la computación simbólica en ese proceso" Se inicia resaltando el papel de la tecnología de computadoras en la enseñanza, luego se presentan algunas clasificaciones de los usos de la computación simbólica en la enseñanza. Dentro de esta clasificación se encuentran los sistemas computacionales simbólicos, a los que se refiere el resto del capítulo. Se describe qué es computación simbólica y los antecedentes que motivaron su

implementación en el aula de clases; luego, algunos resultados generales de experiencias foráneas llevadas en Universidades prestigiosas con este sistema. Por último se destacan aspectos psicológicos y pedagógicos que respaldan su utilización en el aula

En el segundo capítulo se hace una descripción del sistema computacional que estamos utilizando (DERIVE) y sus capacidades, tanto simbólicas como gráficas. La misma se ha efectuado tomando ejemplos particulares de distintas áreas de la matemática y explicando los comandos utilizados para resolverlos. Se mencionan los objetivos que pueden lograrse, en mayor grado, que con la enseñanza tradicional expositiva, si incorporamos un sistema computacional como DERIVE, al proceso educativo.

El tercer capítulo se inicia resaltando la importancia de un ambiente de “laboratorio” para que el alumno construya su conocimiento matemático. A continuación se dan algunas orientaciones que se deben tener en cuenta al preparar una sesión de laboratorio utilizando computación simbólica donde se pretenda lograr que el estudiante descubra y pruebe sus conjeturas de tal manera que se integre al proceso de aprendizaje y no sea un receptor de conocimientos matemáticos acabados. Luego se presentan varios modelos de laboratorios, con sugerencias al profesor y actividades para el estudiante. Estos laboratorios se han desarrollado de la forma que se espera que el alumno lo haga en su curso, y tratan de mostrar (por lo menos, teóricamente) que los CAS pueden ser utilizados en el aula de clases de manera que contribuyan a fortalecer el aprendizaje de conceptos y principios matemáticos en el estudiante. Por último se desarrollan algunos ejemplos en distintas áreas de la Matemática que sirven de guía para realizar laboratorios adicionales a los presentados.

Finalmente se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que se desprenden de este trabajo de investigación y las referencias bibliográficas consultadas.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS Y EL ROL DE LA COMPUTACIÓN SIMBÓLICA EN ESE PROCESO

1.1 Las Computadoras y el Futuro de la Educación Matemática

Al buscar formas de salir de las actuales dificultades educativas, los caminos parecen ser muy pocos. La educación actual, con una decadencia en la calidad y escasos recursos didácticos, nos permite pocas oportunidades. Muchos informes de la situación sugieren direcciones, que en su mayoría son difíciles de implementar o inadecuadas.

A menudo se sugiere a las computadoras como la “solución” de nuestras dificultades educativas. Otros consideran que la computadora podría mejorar la educación. El conocimiento acerca de las computadoras aumenta cada día en nuestra sociedad, las mismas penetran en todas las áreas provocando una gran publicidad y atención hacia ellas. Muchos factores indican que las computadoras se utilizarán en un futuro en nuestro sistema escolar y otros ambientes educativos. La buena razón es que pueden ayudar en el aprendizaje, interactivamente y con atención individualizada.

Los avances tecnológicos que surgen como consecuencia de la utilización de la computadora en los distintos quehaceres cotidianos han motivado su aplicación en el proceso enseñanza-aprendizaje. La evolución científica y tecnológica sugiere que nuestra sociedad se prepare para interactuar no sólo con la tecnología ya existente, sino con aquella que inevitablemente será inventada en el futuro. Es por ello que se requiere orientar el proceso educativo con miras a proporcionar un alto nivel de aprendizaje; desarrollando capacidades creadoras y habilidades computacionales en los estudiantes, para dar un uso más adecuado a las nuevas oportunidades que ofrecen las computadoras en la educación. Sin embargo, en nuestro país, vemos que no se ha aprovechado esta

tecnología moderna accesible (como computadoras, calculadoras, software de Matemática) para lograr ese objetivo. Se hace imperante promover actividades a fin de impulsar esta corriente que nos llevará a provechosas consecuencias en Educación Matemática, como lo son:

- Que ideas importantes sean accesibles al estudiante en una etapa temprana de sus estudios (secundaria, por ejemplo); aliviando la molestia de los extensos cálculos, gráficas y complicadas ecuaciones que se encuentran en los problemas de contextos reales.
- Que se facilite el descubrimiento, la exploración o el reforzamiento de conceptos y principios matemáticos y la resolución de problemas; al permitirnos examinar instancias múltiples del mismo concepto.

Además, el uso de esta tecnología en forma sabia no va a terminar en la pérdida de habilidades aritméticas con lápiz y papel, sino que liberará tiempo del curriculum para ser dedicado a otros tópicos y permitirá guiar al estudiante a que se concentre en el aprendizaje de conceptos y principios matemáticos.

1.1.1 Ventajas de las Computadoras en Educación

La importancia que se ha dado a la computadora en la enseñanza, como medio para producir un aprendizaje más efectivo de las matemáticas y las diferentes formas de su uso en el aula de clases han motivado diversas investigaciones como la que presentamos en este trabajo. Las mismas están tratando de “responder” preguntas, tales como: ¿cuándo debemos utilizar la computadora para lograr un mejor aprovechamiento en el proceso de aprendizaje? y la otra que se refiere a un gran problema en Educación Matemática” ¿Cómo se pueden usar las computadoras para despertar el entendimiento matemático? Para responder la primera pregunta nos basaremos en la sugerencia que hace el Consejo Nacional de Investigaciones de Estados Unidos: “Las computadoras apropiadas deben estar disponibles en todo momento:

- a. Cuando la solución de un problema requiere manipulación algorítmica que sobrepase la capacidad física del ser humano
- b. Cuando no se dispone de tiempo suficiente para cálculos tediosos que nos distraen de nuestro objetivo
- c. Cuando queremos visualizar más variedad de ejemplos para establecer patrones de similitud entre ellos que nos lleven a una generalización particular.
- d. Cuando puede contribuir a visualizar mayores aplicaciones en tópicos relacionados ”

Para dar respuesta a la segunda, realizamos la presente investigación. Sin embargo, en términos generales entre las ventajas que ofrece la utilización de la computadora en la

* Noveno problema presentado por el Dr. Hans Freudental, en su Conferencia “Problemas Mayores de la Educación Matemática”, en sesión plenaria del ICME, Berkeley (1980)

educación está que el aprendizaje se lleva a cabo en un ambiente abierto y experimental, por parte del alumno, a la vez que se facilita la labor del profesor, ya que el computador es un poderoso material didáctico que puede reemplazar el tablero, la tiza y la calculadora. Otro aspecto fundamental, que se ha evidenciado al utilizar la computadora en la educación, es la motivación y confianza que adquirirá el estudiante de que su problema puede ser resuelto, sin la inhibición del profesor^{*}. Esto lo hará avanzar a su propio ritmo de aprendizaje inspirándole un sentido de independencia al realizar sus “propias” experiencias sobre un fenómeno matemático y con la posibilidad de repetir un análisis cuantas veces sea necesario, hasta llegar a “probar” o “rechazar” su conjetura.

Resumiendo, las ventajas educacionales de la computadora son las siguientes:

Cuadro I. VENTAJAS DE LA COMPUTADORA EN LA EDUCACIÓN

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - Tiene un gran poder motivacional - Permite atención individualizada que responde a las necesidades del estudiante - Provee una experiencia interactiva de aprendizaje. - Provee una capacidad de información visual interactiva, comunicación o aprendizaje cooperativo. |
|---|

^{*} Resultados encontrados en investigación realizada en 1993 por un grupo de profesores de Matemática de la Universidad de Panamá sobre el descubrimiento de propiedades geométricas utilizando micromundos de LOGO

1.2 Usos de la Computadora como Herramienta Intelectual para el Aprendizaje de las Matemáticas

Muchos son los usos que se le han dado a la computadora en la enseñanza, sobre los que se han realizado investigaciones en todo el mundo. Los programas tutoriales (C.A.I.), en los cuales se imparte una enseñanza individualizada, donde el computador suplanta al maestro en el estudio de un determinado tema; con el limitante de que el estudiante se ajusta a responder preguntas y no descubre sus propias conjeturas y muchas veces no llega a plantearlas. Los micromundos de LOGO, que permiten **explorar y descubrir conceptos geométricos**, los paquetes estadísticos, que facilitan una variedad de **técnicas estadística descriptiva e inferencial** y que poco a poco están cambiando la enseñanza de esta disciplina. Los programas de **graficación**, que sirven como apoyo al profesor para mostrar rápida y precisamente las gráficas de funciones, los programas que realizan **cómputos simbólicos y numéricos**, que ayudan a los estudiantes en la búsqueda de soluciones a problemas, evitando los cálculos inapropiados. Otro de los usos de la computadora, como herramienta intelectual de aprendizaje, es el relacionado con la exploración y descubrimiento de estrategias de **resolución de problemas**. En este punto es importante señalar que no estamos considerando resolver problemas como sinónimo de realizar cálculos para dar respuesta a una necesidad, sino más bien a explorar situaciones (matemáticas) interesantes que requieran una respuesta, que con el uso apropiado de una computadora se puedan obtener.

Todas estas consideraciones sobre el papel de las computadoras en la educación, a la par de las reformas al currículo del contenido de cursos de matemática, (en particular,

Cálculo) tienen la finalidad de alentar los posibles cambios metodológicos, curriculares, educativos en general, que motivarían la implementación del uso de los denominados *sistemas computacionales*, o paquetes computacionales de aplicación, en el aula de clases

Existen dos clasificaciones de los sistemas computacionales de acuerdo a sus usos en educación, ellas serán tratadas a continuación.

1.2.1 Clasificación de los Sistemas Computacionales

1.2.1.1 Clasificación de Alan Schoenfeld

Alan H. Schoenfeld, profesor de matemática e investigador distinguido en la Universidad de California, sugiere una clasificación de los sistemas computacionales desde el punto de vista de la utilización que se le da en la educación:^{*}

1 Aquellos de ambiente de práctica y ejercicios

Son sistemas computacionales que ayudan a reforzar técnicas de resolución de ejercicios sobre un tema específico de matemáticas. Se utilizan para practicar ejercicios de diversos grados de dificultad debido a su gran capacidad de ejecución de cálculos numéricos.

2 Aquellos que actúan como herramienta haciendo el trabajo difícil para que el estudiante se concentre en la parte conceptual. Estos sistemas fueron diseñados para resolver un gran número de operaciones matemáticas (cálculos numéricos,

^{*} Resumen del artículo "Questions for the future: what about the horse?" De David A. Smith, citando la clasificación de Schoenfeld M.A.A. Notes 24

factorizaciones, álgebra matricial, derivadas, integrales, representaciones gráficas de funciones en dos y tres dimensiones y muchas otras aplicaciones) en un corto periodo de tiempo. Esto ha permitido integrar el uso de estos sistemas computacionales a la educación, ya que por su gran capacidad en la resolución de operaciones, elimina cálculos tediosos ahorrando tiempo y esfuerzo para que el estudiante se concentre en la parte conceptual. Formulando conjeturas y tratando de probarlas se realiza la actividad matemática que se busca fomentar en el aula de clases donde el estudiante construya activamente su propio conocimiento matemático. Estos paquetes o sistemas computacionales reciben el nombre de manipuladores simbólicos o CAS*. La investigación que hemos realizado se refiere a este tipo de sistemas; entre los que tenemos DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB, etc. Los mismos poseen la capacidad de interrelacionar los aspectos numérico, gráfico y simbólico al estudiar un problema matemático cualquiera. Su poder de resolución de largos y complicados cálculos, en corto tiempo, permite que el estudiante (bajo la guía del profesor) pueda concentrar su atención en el estudio de conceptos y propiedades relativas al tema en cuestión. En el desarrollo de este trabajo ampliaremos el uso, en la enseñanza de la Matemática, de DERIVE considerado uno de los más transparentes en cuanto a facilidad de manipulación.

Este tipo de sistemas de herramienta se distingue de los de ambiente de práctica y ejercicios en que permite hacer generalizaciones sobre un grupo de observaciones particulares de un determinado problema y fomenta así el análisis de las mismas.

* CAS son las siglas en inglés de Computer Algebra System o sea sistemas computacionales que integran el aspecto numérico, simbólico y gráfico de las Matemáticas.

Además, muchos de estos manipuladores simbólicos van más allá de simples “herramientas”, pues algunos incluyen facilidades de programación, procesador técnico de palabras, un poco de representación dinámica, etc.

3. Representaciones dinámicas, simulaciones, juegos.

Estos sistemas han fomentado numerosas controversias sobre su aceptabilidad en la educación, debido a que gran cantidad de personas sostienen que su utilización trae como consecuencia sólo adiestramiento motor, pero no influyen en la capacidad de pensar. Sin embargo, creemos que estimulan la creatividad y espontaneidad del usuario, además, permiten más participación y despiertan la motivación sobre el uso de las computadoras como una actividad agradable, sin presiones por parte del instructor o maestro.

4. Aquellos de ambiente de programación

Este tipo de sistemas permite al usuario reconstruir procesos mentales, en la formación de un conocimiento. El desarrollo lógico involucrado en la construcción de un programa permite un aprendizaje en forma gradual y progresiva.

Un ejemplo de este tipo de sistemas es el lenguaje de programación estructurada TRUE BASIC, el cual está siendo utilizado ampliamente en algunas Universidades de Estados Unidos, España, Inglaterra, etc. TRUE BASIC es un poderoso sistema estructurado que permite introducir al usuario a la programación, la cual fomenta el razonamiento lógico y nos hace pensar en cómo trabaja la computadora al seguir las instrucciones programadas, al resolver problemas complejos. Es un lenguaje simple y poderoso que tiene acceso a herramientas tales como gráficas, sonidos, álgebra

matricial, funciones, etc. Otros sistemas de este tipo son ISETL (Interactive Set Theoric Language), que además de ofrecer un ambiente de programación posee un simbolismo conjuntista muy parecida a la notación matemática actual y PASCAL (un lenguaje de alto nivel) que se utiliza para introducir a los estudiantes de la Licenciatura en Matemática a la Programación

5. Sistemas inteligentes, tutores.

Esta denominación se debe al hecho que en esta modalidad los sistemas computacionales, incorporados a una microcomputadora, sustituyen una clase o conferencia dictada por un profesor sobre un determinado tema. El alumno se sienta frente al computadora y recibe información de un "profesor electrónico" en un ambiente educativo convencional; con actividades similares al desarrollo ordinario de una clase: introducción, repaso de la sesión, explicaciones con ejemplos, preguntas orientadas para medir qué tanto se comprendió el tema en estudio, seguido de la retroalimentación y reforzamiento después de las respuestas. Entre sus ventajas está la calidad uniformemente alta de instrucción individualizada en la que el estudiante avanza a su propio ritmo sin inhibiciones por parte del profesor.

6. Micromundos

Son sistemas computacionales capaces de definir espacios de operaciones limitados pero accesibles, en los que se puede operar con objetos concretos respetando un conjunto de leyes sencillo, fácil y coherente. El objetivo de los micromundos, en la educación, es que permite la exploración de los conceptos de manera casual y acumulativa. El alumno, al sentirse inmerso en ese mundo donde puede manipular

objetos concretos descubre experimentalmente las leyes que rigen ese espacio y de esta manera va construyendo sus propios conceptos matemáticos.

Un ejemplo es el micromundo de LOGO; sistema diseñado para que los alumnos se encuentren con un mundo agradable en el que puedan experimentar con un ente concreto como lo es un triángulo luminoso que obedece a ciertas ordenes y que goza de ciertas propiedades como ubicación, orientación y que puede desplazarse de un lugar a otro. Al desplazar el objeto de un lugar a otro (o para realizar un dibujo particular), se ponen en juego mecanismos de aprendizaje ya que se reflexiona sobre el propio movimiento y de esta manera se aprende geometría formal

7 Tecnología trascendente:

Son programas tan abarcadores cuya principal característica es que afectan radicalmente la manera de hacer las cosas (o la enseñanza). Por ejemplo, los procesadores de palabras, que dieron un giro trascendental a la escritura de textos, eliminando el uso de diccionarios, máquinas de escribir, líquidos correctores, etc. Los CAS actualmente no encajan aquí, porque no incluyen todavía representaciones dinámicas, bases de datos, comunicaciones, interfaces a videodiscos, etc. Con este sistema se podría "hablar matemáticas" a la computadora, pues aún el teclado estaría configurado con teclas para realizar operaciones matemáticas particulares, como derivada, por ejemplo.

1.2.1.2 Clasificación evolutiva de los sistemas computacionales de Alvarado y Ray

Otra clasificación de los usos de los sistemas computacionales, en la educación., es el sugerido por Alvarado y Ray, que presenta una clasificación “evolutiva” que ellos llaman “eras”[Smith (1992)]. Ella tiene relación con la forma en que han evolucionado los sistemas de computación y, por lo general, se traslapan.

La primera de estas eras es la “era de la programación”. Dentro de esta clasificación, tanto profesores como estudiantes tienen como objetivo primordial programar. Esta fue la era donde sólo existía aplicación para matemática con ambiente de programación, con lenguajes tales como FORTRAN, PASCAL, etc.

Luego vino la “era de paquetes de aplicaciones” para matemáticas con mayor énfasis en el aspecto simbólico, usados más bien como herramientas. Incluye en forma integrada capacidades gráficas y numéricas. La mayoría de los CAS encajan aquí, aunque algunos poseen facilidades de programación, como DERIVE, MATHEMATICA, etc.

Existe además una evolución hacia la “era del lenguaje declarativo”. En esta categoría el maestro asume el rol de creador del ambiente para motivar la formación del conocimiento. Ellos incluyen muchos de los aspectos que encontramos en la segunda era (o mejor dicho, de los CAS), tales como la capacidad de modelación (que posee MATHEMATICA), procesadores técnicos de palabras integrado, capacidad numérica, gráfica, ambiente de programación, etc. Hacia esta categoría podemos decir que van algunos manipuladores simbólicos tales como DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE,

aunque no encajan perfectamente, pues les hace falta algunas facilidades como hemos señalado en nuestra nota sobre tecnología trascendente

1.3 Los Sistemas Computacionales Simbólicos. Aspectos Generales

Hemos mencionado, en párrafos anteriores, que la utilización de la computadora en la enseñanza provee un ambiente adecuado al proceso de aprendizaje en el alumno. Vamos a cerrar el compás y referirnos, más concretamente, a las ventajas que ofrecen algunos programas de asistencia en matemática y que se denominan sistemas computacionales simbólicos o como en inglés se les conoce CAS

Podemos considerar los sistemas computacionales simbólicos como paquetes o aplicaciones computacionales para el área de matemática y que integran el aspecto simbólico, numérico y gráfico con interfaces que permiten al usuario interactuar y en algunos casos, programar (como en el caso de DERIVE). A través de estos sistemas podemos manipular expresiones matemáticas en forma simbólica, muy parecida a la forma usual del lenguaje notacional; característica que ofrece muchas ventajas al ser utilizado en la enseñanza

Según los profesores Liliana Jiménez y Carlos Arce, de la Universidad de Costa Rica, cuando el lenguaje computacional es una extensión del lenguaje matemático se tienen dos implicaciones importantes para el proceso de aprendizaje:

- *Supone que el estudiante usará el computador como una herramienta bajo su dominio, es decir, gobernará la máquina acudiendo principalmente al poder de las descripciones matemáticas de los procesos de interés.*
- *En sus trabajos, el estudiante podrá vincular directamente el lenguaje simbólico de la matemática con las acciones perceptibles del computador, de manera que constituyan una oportunidad de manipular objetos y conceptos*

matemáticos en un ambiente donde se les visualice con más facilidad que aquel de lápiz y papel." [Jiménez y Arce (1993)]

La capacidad que tienen los sistemas de computación simbólica para ejecutar procedimientos numéricos, simbólicos y gráficos, a la vez, provee un ambiente de exploración y experimentación muy adecuado al proceso de aprendizaje que lleva el estudiante

1.3.1 Investigaciones foráneas sobre el uso de la computación simbólica en la educación

La implementación de la computación simbólica como una alternativa de enseñanza de las matemáticas se ha debido, en gran parte, al surgimiento de los programas de reforma del Cálculo que se dieron en los Estados Unidos a principios de los años ochenta, aunado a la incorporación de la computadora en la enseñanza

En 1989 La Fundación Nacional de la Ciencia, en Estados Unidos, patrocinó una conferencia titulada *"El Cálculo y las computadoras: Hacia un curriculum para los años 90"*. Esta conferencia se desarrolló en la Universidad de Berkely, donde los participantes presentaron investigaciones, charlas, talleres sobre los diferentes aspectos de la problemática de la tecnología y la instrucción. Después de ésta se han realizado muchas conferencias que tratan sobre el tema y el consenso de los participantes es que estamos en una etapa de exploración para determinar qué es lo que funciona y qué no funciona en la instrucción asistida por computadoras, en especial, en la enseñanza del Cálculo, ya que es la materia que presenta más dificultad a los estudiantes cuando ingresan a sus estudios universitarios.

Un gran número de colegios de Estados Unidos, Italia, España, Gran Bretaña y otros países han incluido en su currículo de Cálculo, Álgebra, Ecuaciones Diferenciales, etc., el uso de las computadoras mediante aplicaciones diseñadas a la asistencia en la enseñanza de la matemática. Estas aplicaciones son de diversos tipos, como aquellos con ambiente de programación, los de ambiente de práctica y ejercicios, los manipuladores simbólicos (que estudiaremos en este trabajo), etc. Los manipuladores simbólicos más conocidos en la enseñanza de la matemática son: MATHEMATICA, MAPLE, DERIVE, MATHLAB, MATHCAD; MUMATH y han sido adoptados, con mucho entusiasmo, en algunos colegios y universidades para el estudio y la investigación en Matemática; sin embargo, algunos planes no pasan de la simple adición de una sesión de laboratorios a los cursos actuales. Entre ellas, las Universidades de Plymouth, Illinois, West Point y otras usan DERIVE para enseñar algunos tópicos de Matemáticas. Por ejemplo, en Plymouth, el uso de la computadora en el aula toma varias formas:

- El alumno hace una investigación previa antes de la presentación formal en el aula, para motivar la enseñanza del tópico o concepto.
- Investigación de lo que posee el estudiante después de la exposición de la clase, para ampliar o enriquecer puntos desarrollados formalmente en el aula. En esta etapa es donde el alumno explora los conceptos aprendidos o desarrollados en clase.
- Uso con un datashow durante la clase. Aquí el instructor usa un instrumento para proyectar la imagen de la computadora y obtener una representación más exacta de la gráfica.

En la Universidad de Purdue se está utilizando ISETL, ya que es un interactivo lenguaje de programación en el cual se implementa un gran número de construcciones matemáticas con una sintaxis similar a la notación matemática usual, poderosa para la manipulación de conjuntos y funciones, pero limitados en la representación gráfica. Combinan su uso con MAPLE, otro manipulador simbólico de gran poder.

La Universidad de Illinois usa MATHEMATICA bajo el principio que: “los cálculos matemáticos y el trazado o representación gráfica preparan para la teoría”, lo cual a su vez pone la base para más cálculos y más gráficas. Esta es la forma en que se hace matemática y este enfoque le da vida a las matemáticas. Esto, en oposición a la forma tradicional de enseñar matemáticas, en donde se ofrece un poco de teoría para luego ilustrar la teoría con ejemplos. Donde el profesor evoca la imagen de un juez de la verdad y las matemáticas son las leyes, que se recitan mecánicamente, como si fueran objeto de un culto y no una actividad científica.

1.4 Bases Psico-Pedagógicas Para el Uso de la Computación Simbólica en la Educación

a. El concepto de Abstracción Reflexiva de Jean Piaget

Existen diversas teorías de aprendizaje relativas a la naturaleza básica del proceso de aprendizaje. Recientemente se hacen planteamientos sobre el aprendizaje por medio de la computadora, como herramienta intelectual, y todas ellas convergen hacia la más rigurosa de todas: la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget*, que en sus bases fundamentales sostiene que el proceso de aprendizaje no se puede producir en condiciones de acto reflejo, de comportamiento automático, o en situación de aprendizaje pasivo y memorístico, ya que sin la manipulación no se puede realizar el proceso de asimilación y acomodación de las ideas. A este respecto se refiere R. Gorman cuando afirma:

“Para Piaget, el conocimiento surge de la acción, es decir de la asimilación activa de la realidad por las coordinaciones generales de acción (estructuras). Conocer algo es ejercer alguna acción sobre él, organizarlo y transformarlo y, de ese modo incorporarlo a su propia estructura cognitiva”. [Gorman (1986)]

Los razonamientos e investigaciones de Jean Piaget han demostrado ser tan convincentes como para alentar la aplicación de su teoría a la labor educacional.

Muchos profesionales han extendido los puntos de vista de Piaget para explicar e incrementar el aprendizaje en los alumnos, y han desarrollado lo que se ha llamado teoría **constructivista** de aprendizaje. Ed Dubinsky, de la Universidad de Purdue aplica las ideas de Piaget para incluir el análisis de conceptos matemáticos más

* Jean Piaget, psicólogo europeo de valiosas contribuciones al campo de la Psicología Genética

avanzados con la ayuda del computador, utilizando ambiente de programación. También, Sisko Repo, profesor e investigador de la Universidad de Joensuu, realizó una investigación similar sobre el concepto de derivada, basándose en las ideas de Piaget y Dubinsky y utilizando el sistema de computación simbólica DERIVE como herramienta.

b. El poder motivacional de la computadora

En nuestra sociedad las computadoras tienen un alto valor motivacional. Se presentan como una tecnología nueva excitante. Los estudiantes están preparados y desean tener contacto con ellas. Este es un mecanismo de aprendizaje que los estudiantes disfrutan y puede motivar el aprendizaje, por lo cual, no debe ser ignorado.

c. La individualización:

La mayoría de las teorías de aprendizaje coinciden en que el aprendizaje es un proceso individualizado. Con materiales educativos adecuados las computadoras pueden responder a las necesidades individuales de los estudiantes.

d. La interacción

Otro factor que incide en el proceso de aprendizaje, según afirman los psicólogos que estudian este proceso, es que "el aprendizaje activo obra mejor que el pasivo". Los psicólogos cognitivos argumentan generalmente que la internalización del material es necesaria y que la misma se da sólo a través de la participación activa. Pero, ¿a qué tipo de interacción nos referimos en la educación basada en computadoras?. Un buen modelo es el tipo socrático. A la manera de Sócrates el maestro hace preguntas, raras veces presenta "información". Este enfoque puede ser seguido en la computadora y lo

podríamos describir como “descubrimiento dirigido”. Las computadoras tienen la capacidad de proveer una experiencia de aprendizaje interactiva. Sin embargo, el uso de la computadora no es garantía de interactividad. Muchos usos inadecuados de la computadora en educación imponen al estudiante un rol pasivo en el cual hace solamente decisiones menores

e. La visualización:

Otro aspecto ventajoso de la computadora en educación es la capacidad creciente de proveer información interactiva visual. Estas representaciones que proveen las computadoras al estudiante, de manera rápida y precisa, son extremadamente importantes en el proceso de aprendizaje

f. Aprendizaje cooperativo o comunicación:

Un potencial de las computadoras es su capacidad de estimular la interacción personal durante el aprendizaje, a través del intercambio de experiencias y conocimientos de una manera espontánea, entre estudiantes y maestros o entre otros estudiantes, lo cual es muy valioso en el proceso de aprendizaje.

Según Chávez, H.; Cruz, M. y Rivera, R.; profesores e investigadores destacados en Matemática Educativa - México, la computadora se ha convertido en una herramienta educativa extensiva, ya que ha provocado una serie de cambios en el medio educativo, como lo son:

1. *Resulta un lenguaje cognitivo: la asociación de palabra e imagen.*
2. *Permite explorar la información visual para ayudar en el proceso enseñanza-aprendizaje.*
3. *Las representaciones dinámicas de los procesos matemáticos proporcionan cierto grado de realidad psicológica que permite a la mente manipular los diferentes procesos de una forma mucho más fructífera.*

4. *Modelar los conceptos para proporcionar elementos importantes, reforzar y / o modificar las estructuras cognitivas que lleven a la construcción del significado matemático de los mismos.*
5. *Proporciona modelos visuales de la actividad simbólica. Por ejemplo: de lo que va apareciendo en la pantalla se puede observar la manera en que van formándose los objetos en el mundo matemático.*
6. *Los resultados, hasta la fecha, muestran que aquellos que emplean la computadora tienen una estructura cognitiva significativamente mejor de los conceptos.*
7. *Permite a los estudiantes explorar las ideas y desarrollar sus propias conceptualizaciones. También, incrementa considerablemente, las representaciones visuales.*
8. *La mayoría de los conceptos matemáticos tienen representaciones que son más simbólicas que visuales. [Chávez et al (1993)],*

Pretendemos, pues, incorporar los productos informáticos al campo de la psicopedagogía, con el fin de proveer los materiales y útiles necesarios para crear entornos propicios que conlleven a una mayor participación del estudiante en la construcción de su conocimiento. Creemos que la utilización de la computadora promueve un aprendizaje eficaz, ya que utilizamos ese lenguaje común que sugieren las recientes investigaciones en Matemática Educativa (si deseamos incrementar el aprendizaje en nuestros estudiantes) y que consta de las siguientes palabras: *actividad, descubrimiento, investigación y resolución de problemas*. Al manipular la máquina el alumno está ejerciendo actividad sobre ella. A través de la visualización, simbólica y gráfica, que ofrecen los sistemas computacionales simbólicos, el estudiante puede llegar a descubrir e investigar sus propias conjeturas sobre fenómenos matemáticos. Y al ejecutar en breves segundos cálculos engorrosos permite que el estudiante se concentre en la exploración de estrategias de resolución de problemas. Es decir, al utilizar los sistemas de computación simbólica se están ejecutando esas cuatro actividades que permiten un mejor aprendizaje de conceptos matemáticos.

Con objeto de fundamentar aún más este trabajo, resumiremos algunos comentarios de investigadores que están trabajando en esta línea.

“La microcomputadora vía la simulación de fenómenos, puede presentar los conceptos en forma atractiva y ágil a los alumnos. Además, con la posibilidad de construir un medio de comunicación entre las ideas intuitivas y los conceptos formales a través del modelo de los procesos cognoscitivos empleando las nociones de los conceptos imagen y definición. [Chávez (1991)]

Igualmente, Elfriede Wenzelburger G., Maestro en Educación en Matemática e investigador de la UNAM, México, expresa.

“ A partir de los estudios revisados se traza entonces un marco teórico que parte de una visión constructivista de la enseñanza. Se considera la visualización de un ambiente computacional como potencialmente rico para la formación de imágenes conceptuales de funciones matemáticas y la adquisición de estos conceptos” [Wenzelburger (1991)]*

Al respecto, Stoiner, en la revista Computadoras/Psicología afirma:

No existe una Teoría de aprendizaje única que atienda todos los problemas del proceso enseñanza-aprendizaje. Todas presentan aspectos psicológicos que permiten construir mejores ambientes de aprendizaje. Estos aspectos y otras experiencias deben guiar en forma responsable, la creación y desarrollo de ambientes educativos con la participación de la nueva tecnología Informática usando como herramienta básica de trabajo al computador. [Stoiner (1994)]

Es decir, independientemente de la Teoría de Aprendizaje que escojamos, en lo que sí debemos estar de acuerdo es que para enseñar matemáticas, utilizando la computadora, tenemos primordialmente que dominar el tema que deseamos transmitir para poder luego crear el ambiente propicio al proceso de enseñanza donde se intenten responder las preguntas ¿qué queremos enseñar?, ¿para qué lo enseñamos? y ¿cómo debemos enseñarlo?

* Se refiere a la base teórica que respalda su investigación

1.5 Aspectos Pedagógicos de la Computación Simbólica

Según L. Carl Leinbach, profesor de Gettysburg College e investigador en Matemática Educativa, el uso de los sistemas de computación simbólica pueden cambiar nuestra perspectiva sobre la enseñanza a estudiantes de nivel medio (secundario) y universitarios (no graduados) de matemática. Al cambiar el énfasis de la enseñanza tradicional enfocamos la instrucción en el razonamiento matemático.

Los sistemas computacionales simbólicos ya son de uso generalizado en los Estados Unidos, Europa, Austria; y en otros países, tales como Costa Rica, Méjico, Brasil, se están realizando estudios al respecto y se han encontrado algunas ventajas de su uso en el aula de clases, que podemos sintetizar aquí

1 Realiza procedimientos engorrosos en un corto periodo de tiempo.

Uno de los principales usos que se le da a los sistemas de computación simbólica es como facilitador en la resolución de cálculos tediosos y engorrosos que hacen que el estudiante pierda el interés de practicar matemática cuando ve que su respuesta no coincide con la que aparece en el libro de texto o que el profesor dió en el aula. Estos cálculos complicados y extensos, que en la mayoría de los casos, no enriquecen la formación de un concepto matemático alejan al alumno de nuestra materia. Con el apoyo de la computación simbólica los mismos pueden ser resueltos en escasos segundos eliminándose así una barrera potencial al proceso de aprendizaje de la matemática.

Un sistema computacional calculará la inversa de una matriz como la siguiente

$$Z: \begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 & 1 \\ 18 & 8 & 4 & -2 \\ 9 & 2 & -5 & 8.3 \\ -6 & 7 & 2 & 25 \end{bmatrix}^{-1}$$

3: "matriz inversa"

$$4: \begin{bmatrix} 1.04223412 & 8.8117570 & 8.8688836 & 8.6877818 \\ -8.198395 & 8.217728 & -8.8257389 & 8.8688985 \\ 8.88421229 & 8.184263 & -8.8994469 & 8.8382186 \\ 8.8631844 & -8.8664818 & 8.8388355 & 8.8184974 \end{bmatrix}^{-1}$$

en breves segundos, mientras que si realizamos los cálculos manualmente, tardaríamos horas y tal vez, a causa de un pequeño error numérico, no obtendríamos la respuesta correcta

2. Permite presentar progresivamente diferentes tópicos matemáticos

La manera progresiva en que se pueden ir presentando los conceptos matemáticos es uno de los aspectos fundamentales que aportan los sistemas computacionales a la educación. La presentación de un problema particular y su análisis, para luego pasar a la generalización del mismo estableciendo comparaciones entre ellas, es posible gracias al carácter interactivo de la computación simbólica, a la vez que puede ser usado como una vía para incluir aplicaciones más complejas y realistas en nuestros cursos de matemática.

Por ejemplo para introducir los conceptos de límite y continuidad de una función, se presenta primero la idea intuitiva del concepto de límite, con la visualización

geométrica que ofrecen los sistemas computacionales y luego se presentan varias funciones con un punto de discontinuidad y se pide al estudiante que comente sobre si existe o no límite en todos los puntos de la función (podría orientárseles preguntádoles sobre la existencia del límite en el punto de discontinuidad de la misma). El alumno progresivamente podrá conjeturar (como se mostrará, más adelante) que una condición para la continuidad de una función es que exista el límite en el punto analizado.

3. Hace al estudiante más creativo e independiente

La experiencia que viven los estudiantes al tratar de resolver un problema con un sistema computacional los hace razonar en forma individual, sobre las posibles soluciones. El estudiante se siente motivado a practicar matemáticas; ya que puede hacer conjeturas (de sus observaciones y experimentaciones), probar estas conjeturas y por último, verse involucrado en su verificación. Participar en la "creación" de una solución a un problema matemático hace que el alumno se sienta independiente y, al avanzar a su propio ritmo, adquiere cierta seguridad que lo impulsa a intentar una y otra vez si su respuesta no es la correcta.

4. Permite resolver un problema desde distintos puntos de vista

La computación simbólica en la instrucción ha provocado algunos cambios en las actividades de enseñanza, en particular, en la forma como se resuelven los problemas. Anteriormente, el estudiante perdía tiempo y esfuerzo en cálculos y procedimientos tediosos al resolver un problema, ahora, con la ayuda de la computación simbólica se libera de estos cálculos para concentrarse en la base conceptual del mismo. Los

cálculos de un problema a menudo oscurecen el punto central del concepto que se está estudiando y la computación puede ayudar a evitar que se pierda la idea a causa de los tediosos procedimientos numéricos. Para ser un “resolvidor” de problemas efectivo se necesita estimar, considerar alternativas, experimentar, conjeturar, probar y analizar resultados. Los sistemas de computación simbólica, al liberar al estudiante de la necesidad de realizar cálculos manuales y al ofrecerle un ambiente multimodal, provee el ambiente conducente al desarrollo de un enfoque inquisitivo y experimental.

Por el ambiente multimodal que ofrecen los sistemas computacionales un problema tal como la obtención de la ecuación de una circunferencia dadas ciertas condiciones puede ser resuelto de varias maneras. Por ejemplo, a través de relaciones con vectores, utilizando parámetros, utilizando conceptos geométricos sencillos como distancias (entre dos puntos, o de un punto al radio) y fórmulas relacionadas. Un alumno, en una clase normal, tendrá apenas tiempo de aventurarse por uno de estos métodos; que tal vez no sea el más adecuado; y tal vez no pueda llegar a realizar una comprobación

5. **Se elimina la imagen inquisitiva del profesor creándose un ambiente adecuado al proceso.**

El rol del maestro como facilitador, guía, apoyo, socio de aprendizaje es más efectivo, ya que cuenta con la ayuda de la computadora como herramienta para lograrlo. Utilizando la computación simbólica el profesor se convierte en colaborador al proceso de aprendizaje, dirigiendo cuidadosamente las sesiones, dando oportunidad

al estudiante de descubrir sus conceptos y analizar sus propias conjeturas matemáticas.

6. Incorpora al estudiante a las exigencias del mundo actual.

El mundo del futuro será automatizado y debemos preparar a nuestros estudiantes a vivir en ese mundo para que no funcione como una "máquina" inferior. A lo largo del desarrollo de la historia de la humanidad se observa que el hombre, por su capacidad de razonar, se vale de las herramientas que le permitan realizar su trabajo con el menor esfuerzo posible, esta es una de las razones para utilizar los sistemas computacionales en la educación; ya que elimina el trabajo pesado (como los extensos cálculos) para que nos concentremos en la parte conceptual, en la observación y análisis de propiedades y lograr así un mejor aprendizaje de las matemáticas.

7. Integra la tecnología al proceso de enseñanza aprendizaje.

La tecnología debe ser utilizada por su capacidad de enriquecer el aprendizaje de las matemáticas. Los sistemas computacionales, que hacen uso de la misma, siguen esta línea, ya que permiten al estudiante profundizar en el análisis conceptual del problema, extendiendo su conocimiento matemático, le ayudan a dominar fundamentos matemáticos básicos y desarrollar una intuición sobre ciertos temas como: la idea de función, el significado de convergencia, etc. La experiencia que tienen al ver y manipular modelos matemáticos les ayudará, además, a construir modelos mentales más complejos.

8. Exige cambios curriculares

La utilización de los sistemas computacionales nos llevarán a cambios curriculares, ya que se podrán eliminar temas que consisten en cálculos y procedimientos memorísticos y podrán ser incluidos mayor cantidad de tópicos que lleven al estudiante a pensar y realizar generalizaciones abstractas de observaciones particulares sobre un fenómeno matemático.

Hemos mencionado una serie de aspectos positivos de la computación simbólica, pero debemos recalcar que su uso inadecuado puede ser desventajoso para el estudiante. La dependencia de esta herramienta, hasta tal punto que no se puedan resolver cálculos mínimos sin su ayuda o que se tienda a pensar que los trabajos realizados con ella son responsabilidades de estas máquinas son errores que se deben evitar cuando se prepara una sesión de matemáticas usando computación simbólica

CAPÍTULO II

CAPACIDADES EDUCACIONALES DEL SISTEMA

COMPUTACIONAL DERIVE

2.1 Breve Descripción de los Menús y Opciones de DERIVE

En este capítulo haremos una breve presentación del manipulador simbólico DERIVE, con sus comandos y capacidades, los cuales mostraremos a través de ejemplos. Al final, describiremos los objetivos educacionales que pueden ser alcanzados, en mayor grado que en nuestra enseñanza tradicional, si hacemos uso de las capacidades de los sistemas computacionales simbólicos. Utilizaremos (para el desarrollo del mismo) uno de los más poderosos, eficientes y confiables de estos sistemas (DERIVE, versión 2.5 de Soft Warehouse, Inc); con un simbolismo muy parecido al usual de la matemática y que facilita la interacción del estudiante con el computador.

DERIVE es un paquete de asistencia matemática que resuelve problemas de cualquier área de esta ciencia. Ejecuta operaciones y aproximaciones en distintos tópicos matemáticos, que incluyen el Álgebra y Trigonometría, Cálculo Diferencial e Integral, Teoría de números, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal, etc.; y representa gráficas en dos y tres dimensiones con la precisión y rapidez necesarias para resolver, analizar y estudiar muchos tipos de problemas. Con él se pueden realizar operaciones algebraicas tales como simplificación y expansión, sustitución simbólica, integración y diferenciación y poderosas técnicas de solución de ecuaciones y de ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, algunos de los usos que pueden darse en áreas de nuestro campo científico es en la exploración y descubrimiento de conceptos y principios matemáticos; en el reforzamiento de técnicas de resolución de problemas, en la simplificación de cálculos matemáticos complejos, en la exploración de conjeturas sobre

problemas matemáticos, en la visualización de relaciones matemáticas mediante gráficas de curvas en el plano y el espacio, superficies, etc. Es por ello que se le considera una poderosa herramienta en el proceso didáctico, facilitando los trabajos que requieren memoria y cálculos extensos y complejos, para liberar tiempo que se dedicará a reforzar los conceptos introducidos en clases, y descubrir estrategias de resolución de problemas.

La siguiente figura muestra como aparece la pantalla de trabajo (o ventana de Álgebra) de DERIVE al escribir una serie de expresiones matemáticas (observemos el simbolismo),

1: $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 5$

2: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 4\sqrt{2}x + 5)$

3: $\sin(\alpha)$

4: $F(x) := e^{x^2}$

5: $\int_x^{\cdot} x \cos(x)^2 dx$

6: $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

7: $\|N(a, b)\|$

COMMAND: **Quit** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer solve Window approx

Enter option

User

C:\SC.NTH

Free:89%

Derive Algebra

Fig. 1. Pantalla de DERIVE con siete expresiones en su área de trabajo (o ventana de Álgebra)

Podemos ver, en la figura anterior, que este sistema computacional simbólico posee un menú de comandos que permiten ejecutar las acciones del programa, algunos de ellos

contienen submenús de opciones. Veremos brevemente algunos ejemplos como ilustración:

- **Author:** acepta la expresión y la coloca en el área de trabajo.
Por ejemplo, al seleccionar **Author** y escribir: $2x^2-4\sqrt{2}+5$ (Enter), DERIVE responde $2x^2 - 4\sqrt{2} + 5$ y va enumerando las expresiones escritas y las respuestas.
- **Solve:** resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones para la variable deseada.
- **Expand:** expande expresiones numéricas y algebraicas.
- **Factor:** descompone en factores las expresiones, tanto numéricas como algebraicas, que se deseen factorizar.
- **Simplify.** simplifica operaciones expresadas en el área de trabajo; ecuaciones de diferente grado o cualquier comando de DERIVE.

Ejemplo 1:

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas

Para resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Usamos **Author** para definirlo, y aparecerá en la pantalla:

$$1: x^2 + 3x - 4 = 0$$

Seleccionamos **soLve** o pulsamos **L** para resolverla. DERIVE da la solución,

$$2: x = 1$$

$$3: x = -4$$

El alumno puede verificar su respuesta factorizando la expresión 1 (resaltándola, utilizando las flechas del teclado) y seleccionando **Factor** para obtener:

$$4. (x+4)(x-1) = 0$$

Puede visualizar su respuesta graficando el miembro izquierdo de la expresión 1 y utilizando el comando **Plot** (que estudiaremos con más detalle posteriormente), que le permite realizar una gráfica en la pantalla, visualizando la expresión algebraica y su gráfica con las raíces, simultáneamente

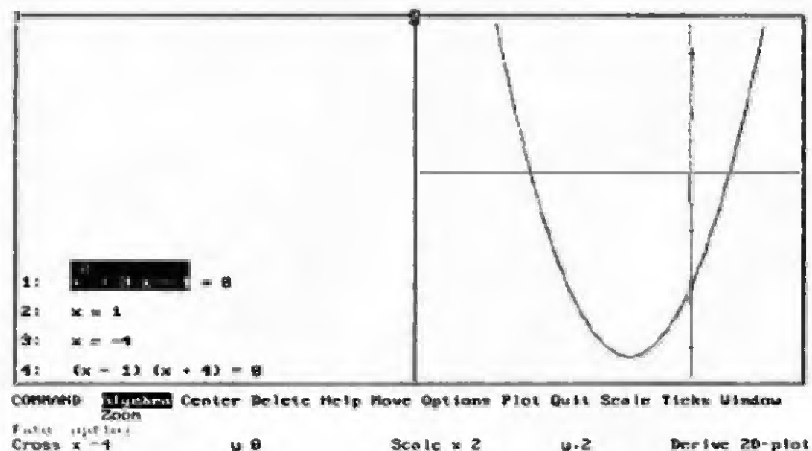


Fig. 2: Representación de una ecuación de segundo grado en DERIVE

Si la ecuación cuadrática es del tipo $x^2 + 2x - 6 = 0$ y aplicamos **soLve**,

DERIVE da la siguiente respuesta:

$$2. x = -\sqrt{7} - 1$$

$$3. x = \sqrt{7} - 1$$

porque se encuentra en el "modo exacto". Una respuesta más precisa se puede obtener seleccionando **Options, Precision y Mixed o Aproximate**, que nos da la respuesta de manera aproximada a las raíces de la ecuación. Al resaltar nuevamente la expresión obtenemos,

$$2: x = 1.64575$$

$$3: x = -3.64575$$

como valores de las raíces

Si las raíces son complejas como en $5x^2 + 2x + 1 = 0$ **DERIVE** responde al seleccionar la expresión y pulsar **soLve** (en modo exacto):

$$2: x = -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$$

$$3: x = -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$$

Se pueden tener varias expresiones cuadráticas, lineales o polinómicas en el área de trabajo y hacer estudios de raíces, parámetros e intersecciones. Por ejemplo, al entrar con **Author** las expresiones en el área de trabajo de **DERIVE**,

$$1: 2x + 3y = 2$$

$$2: 4x - 2y = -7$$

Y resolver con **soLve** el sistema que se escribe entre paréntesis, así,

$$3: [2x + 3y = 2, 4x - 2y = -7]$$

obtenemos,

$$4: [x = -17/16, y = 11/8]$$

- **Plot**

Si además deseamos representar gráficamente estas dos expresiones, resolvemos con **soLve**, para la variable "y", obteniendo en el área de trabajo:

$$5: y = \frac{-2(x-1)}{3}$$

$$6: y = \frac{4x + 7}{2}$$

Con **Plot**, **Plot** se grafican las dos rectas a un lado o debajo del área de trabajo de Álgebra. Con las teclas de flecha se puede mover una cruz (**Cross**), que indica la posición en el plano, al punto de intersección de las dos rectas. Hagamos una aproximación de las raíces que satisfacen ambas ecuaciones encontradas en el punto 4 Resaltando la expresión 3: y pulsando el comando **AproX**, obtenemos los valores en forma aproximada, con tres cifras decimales (expresión 8.) Veamos una representación,

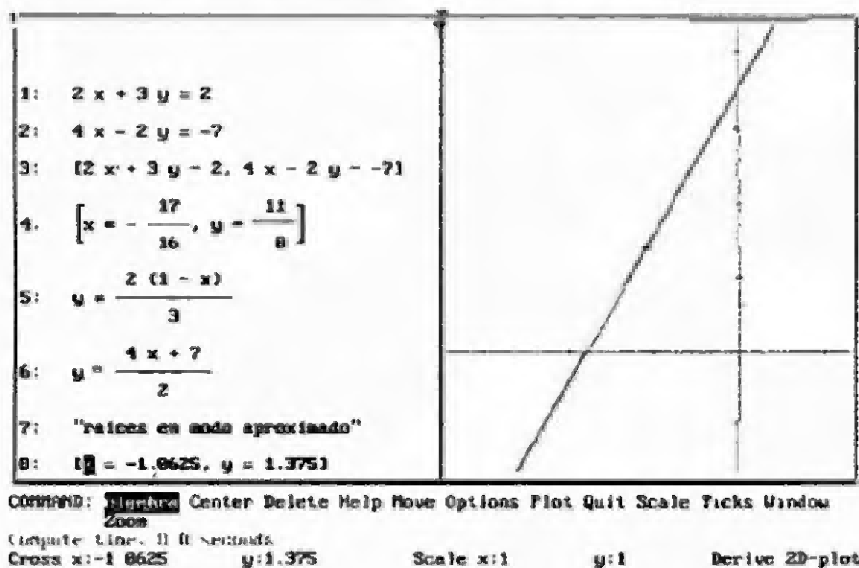


Fig. 3. Pantalla en DERIVE que muestra la solución simbólica y gráfica de un sistema de ecuaciones

- **Declare**

Permite declarar valores a.

- **Funtion:** define funciones en dos y tres variables. Por ejemplo, para declarar la función $f(x,y) = xy - \sqrt{5x} + y$, seleccionamos **Declare, Funtion** y escribimos el nombre de la función, es decir, f . Luego el programa nos pide el valor de la función y escribimos: $xy - \text{Alt-Q } (5x) + y$. Aparecerá en la pantalla:

$$1: F(x,y) := xy - \sqrt{5x} + y,$$

- **Variable:** asigna el dominio de una variable que puede ser: positivo, real, complejo, o un intervalo o asigna el valor numérico de la variable. Por ejemplo, en la función anterior se puede asignar, con **Declare variable:** x Positivo; y , Real.
- **Matrix y Vector** Con **Declare Matrix** (o **Vector**) se establece, en primer lugar, la dimensión de la matriz (o del vector) y luego el programa acepta sus elementos. Por ejemplo para declarar la matriz identidad $I_{2,2}$, seleccionamos **Declare-Matrix**, el programa nos pide la dimensión de la matriz, se asigna entonces los valores 2, 2 (para filas y columnas) y luego nos pide los valores, uno a uno, de la matriz, de acuerdo a su posición en la misma. Se introducen los valores 1, 0, 0, 1, presionando **Enter** después de cada uno. Aparecerá en la pantalla,

- **Funciones especiales:**

DERIVE permite realizar evaluación simbólica de funciones tales como seno, coseno, e integrales exponenciales; evaluación numérica de funciones de Bessel, gamma y de error y cerca de más de 20 funciones especiales predefinidas (como por ejemplo: funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas e inversas de las anteriores). Además, funciones de probabilidad, de estadística, R-zeta, CHI, financieras, etc

- **Gráficos: Ambiente de ventanas**

Realiza gráficos en dos dimensiones, en coordenadas rectangulares y polares de funciones univariadas; en ecuaciones paramétricas, de arreglos y gráficos en tres dimensiones.

Mostraremos, con un ejemplo sencillo, cómo DERIVE interrelaciona la manipulación algebraica con la representación gráfica de funciones, y sus derivadas. Ilustraremos con la función $f(x) = y = x^2$. Gracias a su ambiente de ventanas podremos hacer los cálculos algebraicos de su primera y segunda derivada en la ventana No 1, denominada "Álgebra"; y en la No 2 representaremos gráficamente estas funciones.

Primero escribiremos la expresión que se desea analizar. Para ello ejecutaremos el comando **Author** y escribimos: $y = x^2$, al presionar la tecla "enter", la expresión aparece en la ventana N° 1, denominada **Álgebra**, con el número de expresión correspondiente (en este caso 1 ya que es la primera expresión aceptada). Para graficar esta función se presiona el comando **Plot** que nos activará una nueva

ventana, denominada **2D-Plot** y luego dentro de su menú de opciones se presiona **Plot** nuevamente para que aparezca la gráfica (dentro de este menú se puede variar la escala que inicialmente es $x = 1$, $y = 1$; mover el centro; cambiar el color del área de trabajo o de las gráficas, para una mejor visualización) Para regresar a la ventana de **Álgebra** se presiona el comando **Algebra** y se pasa allí a calcular la derivada de la función en estudio, se presiona el comando **Calculus** y dentro de sus opciones **Differentiate**, sobre la expresión 1, obtendremos entonces la expresión 3 y para determinar la función derivada de y se simplifica con el comando **Simplify** y aparecerá la derivada Para graficarla y obtener la segunda derivada se sigue un procedimiento análogo al anterior Tenemos, a continuación, la representación gráfica

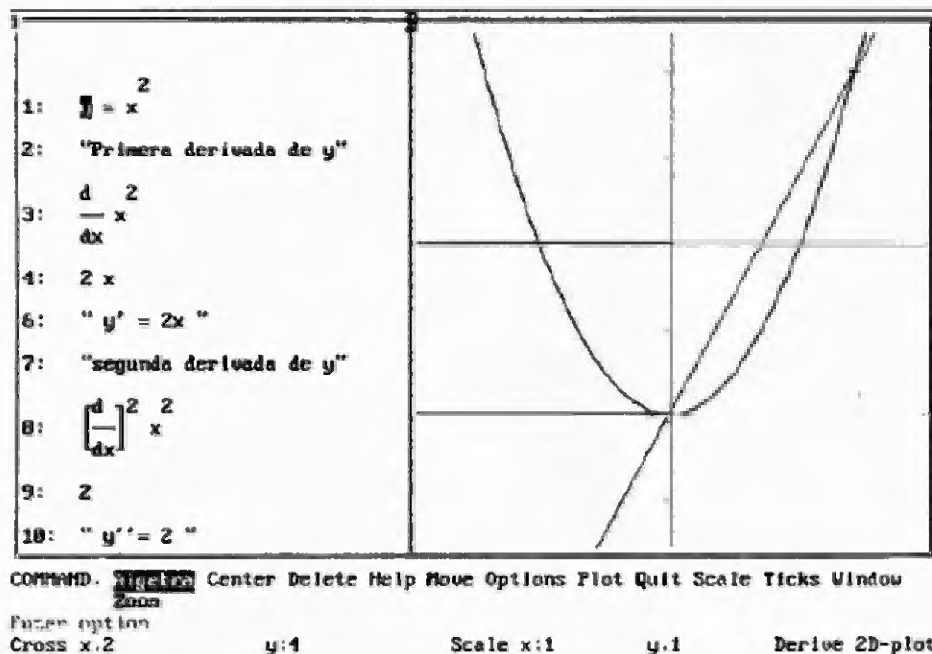


Fig. 5: Pantalla de DERIVE con dos ventanas donde aparecen cálculos simbólicos y gráficos de las derivadas de una función

- Facilidad para declarar, manipular y combinar funciones usando notación matemática habitual
- Programación Recursiva e Iterativa: permite utilizar procedimientos elementales para construir otros de manera recursiva

A continuación brindamos una breve descripción de la capacidad de DERIVE, como sistema computacional simbólico, en distintas áreas de la matemática.

2.1.1 Capacidades del Sistema Computacional DERIVE

- **Operaciones en Calculo Diferencial e Integral**

Ejemplo 3.

Calcular el límite y derivadas de la siguiente función.

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(xx)^3.$$

Deseamos determinar la derivada de la función, el límite cuando x tiende a cero, la integral definida y evaluar valores para la variable x . DERIVE realiza todos estos cálculos (que se muestran en la figura 6) seleccionando **Calculas** y su menú de opciones.

Diferenciaste (para calcular derivadas de cualquier orden), **Integrate** (determina el valor de la integral), **Limit** (halla el límite de una expresión en una de sus variables hacia un punto dado). Otra forma de calcular límites, derivadas de orden n e integrales de a hasta b , sin utilizar el menú de opciones es escribiendo en **Author** las fórmulas:

LIM(f(x), x, a) para calcular el límite de una función $f(x)$, cuando x tiende hacia a

DIF(f(x), x, n) para calcular la derivada de orden n de la función $f(x)$, respecto a x

INT($f(x)$), x , a , b) para calcular el valor de una integral de una función $f(x)$ respecto a la variable x , definida de un punto a hasta un punto b

Para evaluar una función en un punto dado se utiliza el comando **Manage Substitute** que reemplaza el valor deseado en la o las variables de la expresión, y luego presionando **Simplify** obtenemos el valor.

A continuación mostramos la gráfica 6, con dos ventanas. En Álgebra aparece la manipulación simbólica del cálculo del límite, la primera derivada y el valor de la integral de $f(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$. En la ventana 2 representamos la función con una escala de $x = 1$, $y = 0.5$, para observar su comportamiento en $x = 0$.

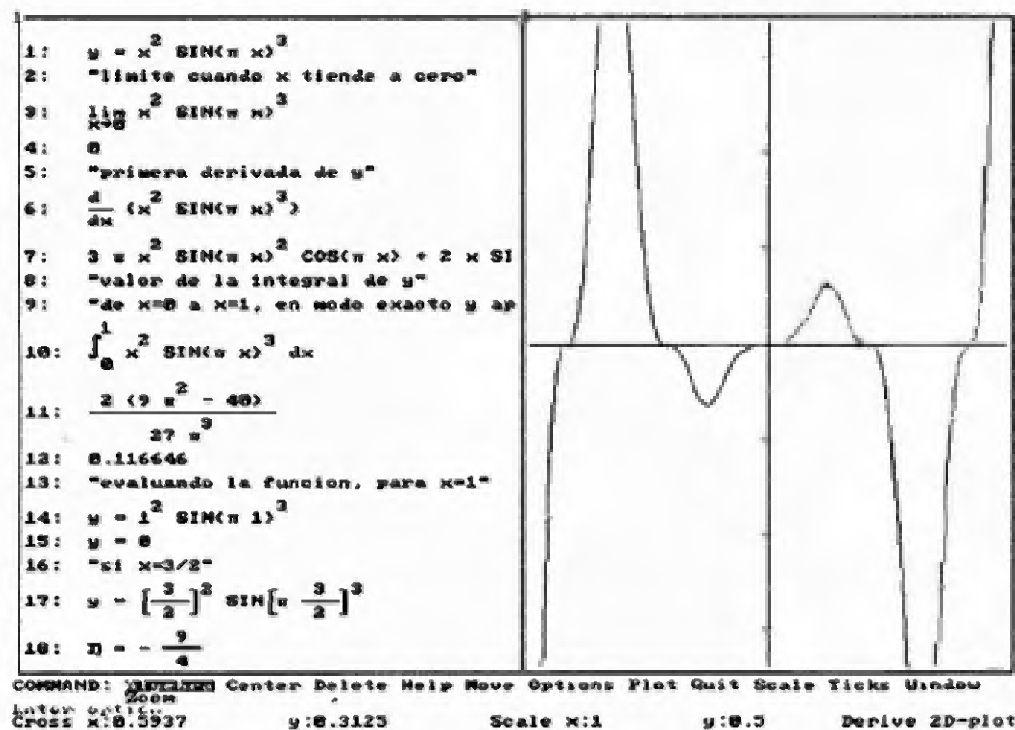


Fig. 6. Pantalla en DERIVE que muestra procedimientos simbólicos y gráficos para una función, en Cálculo

- Realiza gráficas de funciones en dos y tres dimensiones.

Luego de definir una función en forma explícita, DERIVE realiza la gráfica en dos o tres dimensiones. En la gráfica siguiente se muestran tres ventanas, en la número 1 (álgebra) están definidas las dos funciones a graficar. La ventana 2 (3D-Plot) representa la gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ y en la ventana 3 (2D-Plot) tenemos la

representación gráfica de la función $y = \frac{1}{x(e^x + 1)}$

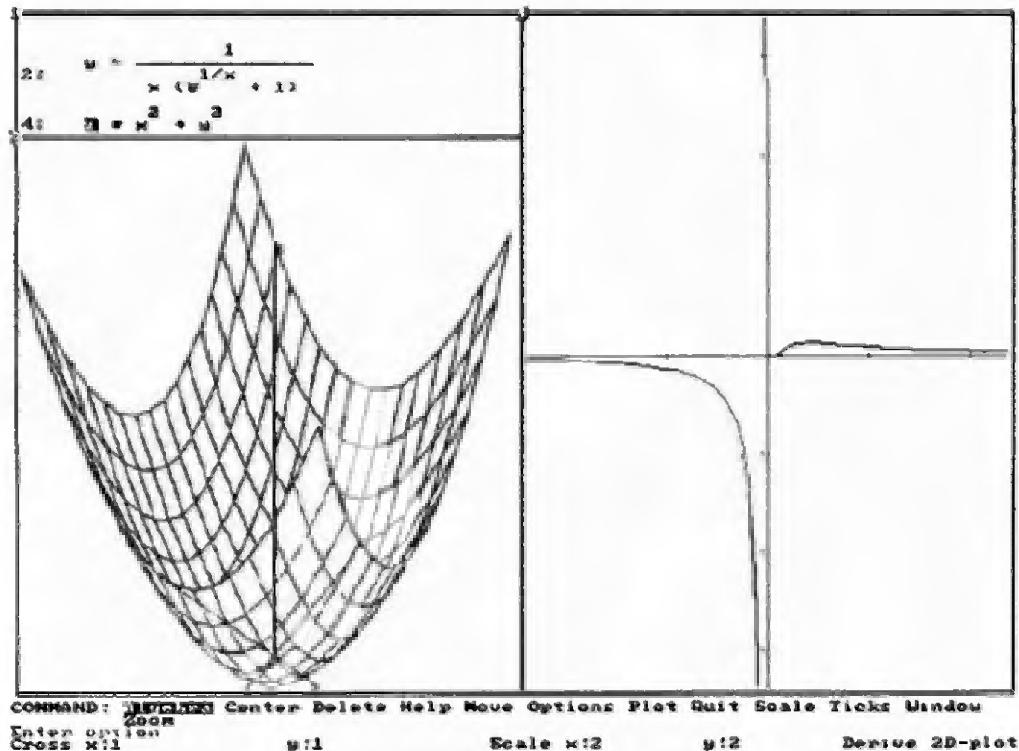


Fig. 7. Representación en DERIVE de gráficas en dos y tres dimensiones.

Observe la cruz en la ventana 3 de la figura 7, esta puede ser utilizada para centrar la gráfica en puntos interesantes y realizar estudios locales de la misma.

- **Álgebra Lineal:**

Realiza manipulación simbólica de matrices, sumas, potencias; incluyendo inversas y transpuestas; productos, cálculo de determinantes, vectores propios, valores propios; producto interno, cruzado, etc

Ejemplo 4:

Calcular potencias de matrices.

Consideremos la matriz de transición A , declarada en DERIVE a través del comando Declare-Matrix y se van dando los valores de los elementos en el orden en que el programa los va pidiendo. Este sistema computacional calcula en dos segundos (o menos) cualquier potencia de A y da su respuesta en modo exacto o aproximado

En la gráfica siguiente se calculan las potencias de m , m^2 , m^4 , m^{16} .

```

1:  m := [ 0.8  0.2  0.1 ]
      [ 0.1  0.7  0.3 ]
      [ 0.1  0.1  0.6 ]

2:  m^2 = [ 0.67  0.31  0.2 ]
          [ 0.30  0.54  0.4 ]
          [ 0.15  0.15  0.4 ]

3:  m^4 = [ 0.534659  0.4051  0.338 ]
          [ 0.2776  0.4074  0.412 ]
          [ 0.1875  0.1875  0.25 ]

4:  m^16 = [ 0.458288  0.449926  0.449659 ]
           [ 0.349794  0.358076  0.358328 ]
           [ 0.2      0.2      0.289812 ]

```

```

COMMAND: Build  Calculus  Declare  Expand  Factor  Help  Jump solve  Manage
          Options  Plot  Quit  Remove  Simplify  Transfer  Window  approx
Enter option
User      C:\POTM.MTH      Free:98%      Derive Algebra

```

Fig. 8. Cálculo de potencias de una matriz con DERIVE

- Resuelve operaciones con matrices. Calcula inversas, traspuestas, etc.

Mostraremos como DERIVE calcula la inversa de una matriz. Se declara, ejecutando el comando **Declare** y luego **Matrix**, el orden de la matriz y luego se copian los elementos (en este caso hemos definido una matriz 5x5). La inversa se calcula realizando la operación de elevar la matriz definida a la potencia -1. Esta acción se ejecuta accionando **Build** sobre la matriz previamente definida (en la expresión 1) y escogiendo la operación potenciación y luego elevar a la -1. Al simplificar esta expresión obtendremos la inversa de la matriz original, como lo muestra la figura 9:

```

1:  a = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2:  "matriz inversa de a"
3:  a-1 = 
$$\begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4000 & -10900 & 26000 & -12600 \\ 1050 & -10900 & 79300 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26000 & -117600 & 179200 & -80200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -80200 & 40100 \end{bmatrix}$$

4:  "matriz identidad"
5:  a a-1 = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


```

COMMAND: **BUILD** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
 Enter option: **Options** Plot Quit Remove Simplify Transfer mode Window approx
 User: C:\INVER.MTH Free:99% Derive Algebra

Fig. 9. Cálculo de la inversa de una matriz

Para comprobar que efectivamente la matriz encontrada es la inversa, realizamos su producto, accionando el comando **Build** nuevamente entre las expresiones

1 y 2, y escogiendo la operación * Al simplificar este producto se obtiene la matriz identidad, por lo tanto, la matriz encontrada en la expresión 2 es la inversa de la matriz original.

DERIVE también realiza otras operaciones matriciales tales como reducción de matrices a su forma escalonada, uso de pivotes, extracción de elementos, etc.

Veamos un ejemplo donde se encuentra la solución de un sistema de ecuaciones aplicando el método de reducción.

Ejemplo 5:

Resolver el sistema

$$x - 2y + z = 7$$

$$2x - y + 4z = 17$$

$$3x - 2y + 2z = 14$$

Consideremos la matriz formada por los coeficientes del sistema; DERIVE resuelve esta matriz y determina su solución. Veamos:

```

1:  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$ 
2: ROW_REDUCE  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$ 
3:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 
4: "SOLUCION DEL SISTEMA"
5: "X=2, Y=-1, Z=3"

```

```

COMMAND  Window Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Merge
           Options Plot Quit Remove Simplify Transfer solve Window approx
Enter option
User                                           Free 99%                               Derive Algebra

```

Fig. 10 Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **Ecuaciones Diferenciales y Derivación Implícita**

Los sistemas computacionales tienen la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales en escasos segundos; en particular, DERIVE se vale de sus archivos de utilidad (archivos que realizan operaciones particulares para cada área en matemática y que presentaremos en la sección 2.1.2) para resolver estas ecuaciones. Llamando con **Transfer Load Utility** el archivo deseado (en este caso escogemos ODE1.MTH para ecuaciones de primer orden), resolvemos la ecuación dada

Ejemplo 6:

Resolver la ecuación diferencial

$$y - 2xe^{-x} - x^2 + \frac{dy}{dx}x = 0.$$

En **Author** escribimos la expresión $y - 2x \text{ Alt } e^{-x} - x^2 + dy/dx = 0$ y aparecerá en la pantalla,

$$2. \quad y - 2xe^{-x} - x^2 + \frac{dy}{dx}x = 0$$

DERIVE resuelve, en forma general, una ecuación diferencial, utilizando funciones definidas en sus filas de utilidad y que se clasifican de acuerdo al tipo a que pertenezcan. Como esta es una ecuación de primer orden utilizaremos la función DSOLVE1_GEN, que resuelve una ecuación diferencial de la forma $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$, escribiendo en **Author**: $\text{DSOLVE1_GEN}(p(x,y), q(x,y), x, y, c)$ y con **Simplify** encontramos la solución, la cual resolvemos (con **soLve**) respecto a la variable y para obtener la solución general, como lo muestra la figura 12. Se pueden resolver también ecuaciones diferenciales con valores iniciales (como en los pasos 8, 9 y 10) y verificar la

solución, derivando implícitamente la función determinada y reemplazando su valor en la ecuación original. Si la solución obtenida es correcta, al simplificar esta ecuación (12 de la figura 11) obtendremos la igualdad. Para calcular derivadas implícitas se llama la fila de utilidad DIF_APPS y luego se escribe en Author la función IMP_DIF(u(x,y),x,y,n). Con Simplify se obtiene la derivada implícita de u(x,y); veamos,

```

1: "SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL"
2:  $y - 2x e^{-x} - x^2 + \frac{dy}{dx} x = 0$ 
3: "solucion general"
4: DSOLVE1_GEN(y - 2 x e-x - x2, 1, x, y, c)
5:  $- e^x (x^2 - 2x - y + 2) - x^2 = c$ 
6:  $y = e^{-x} (x^2 + c) + x^2 - 2x + 2$ 
7: "solucion particular, tal que y(0)=1"
8: DSOLVE1(y - 2 x e-x - x2, 1, x, y, 0, 1)
9:  $- e^x (x^2 - 2x - y + 2) - x^2 + 1 = 0$ 
10:  $y = e^{-x} (x^2 - 1) + x^2 - 2x + 2$ 
11: "verificando la solucion"
12:  $y - 2x e^{-x} - x^2 + 1$  IMP_DIF( $- e^x (x^2 - 2x - y + 2) - x^2 + 1$ ) = 0
13: 0 = 0
14: "donde IMP_DIF es la derivada implícita de la funcion"
15: IMP_DIF( $- e^x (x^2 - 2x - y + 2) - x^2 + 1$ )
16:  $2x e^{-x} + x^2 - y$ 
17: "Verificando si es una ecuacion exacta"
18: EXACT(y - 2 x e-x - x2, 1, x, y)
19: "inaplicable"

```

```

COMMAND: TABLE Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
          Options Plot Quit Remove Simplify Transfer mode Window approx
Enter option
User      C:ECDIF.MTH          Free:88% Ins          Derive Algebra

```

Fig. 11. Solución de Ecuaciones Diferenciales con DERIVE

DERIVE resuelve ecuaciones diferenciales por diversos métodos* (variables separables, ecuaciones lineales, exactas, homogéneas, etc.) y determina la forma de la ecuación, respondiendo con el mensaje “inaplicable”, cuando se aplica un método que no corresponde al tipo de ecuación diferencial que se desea resolver.

Otra aplicación interesante de DERIVE en ésta área es la solución de ecuaciones de primer orden por métodos aproximados, como la construcción de los campos direccionales de la ecuación diferencial.

Ejemplo 7

Construir el campo de dirección de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 2x \quad (1)$$

En primer lugar se llama la fila de utilidad ODE_APPR.MTH, que resuelve ecuaciones de primer orden por métodos aproximados, y luego se escribe en Author la instrucción

`DIRECTION_FIELD(r, x, x0, xm, m, y, y0, yn, n),`

que produce una matriz de vectores que despliega la gráfica de un campo de dirección para $y' = r(x,y)$; con m vectores en la dirección x y n vectores en la dirección y . Así, en la figura siguiente, se muestra el campo de dirección para la ecuación (1) con escala de 0.5 para x y 2 para y .

* Para mayor información ver DERIVE User Manual Version 2.5 of Soft Warehouse, Inc

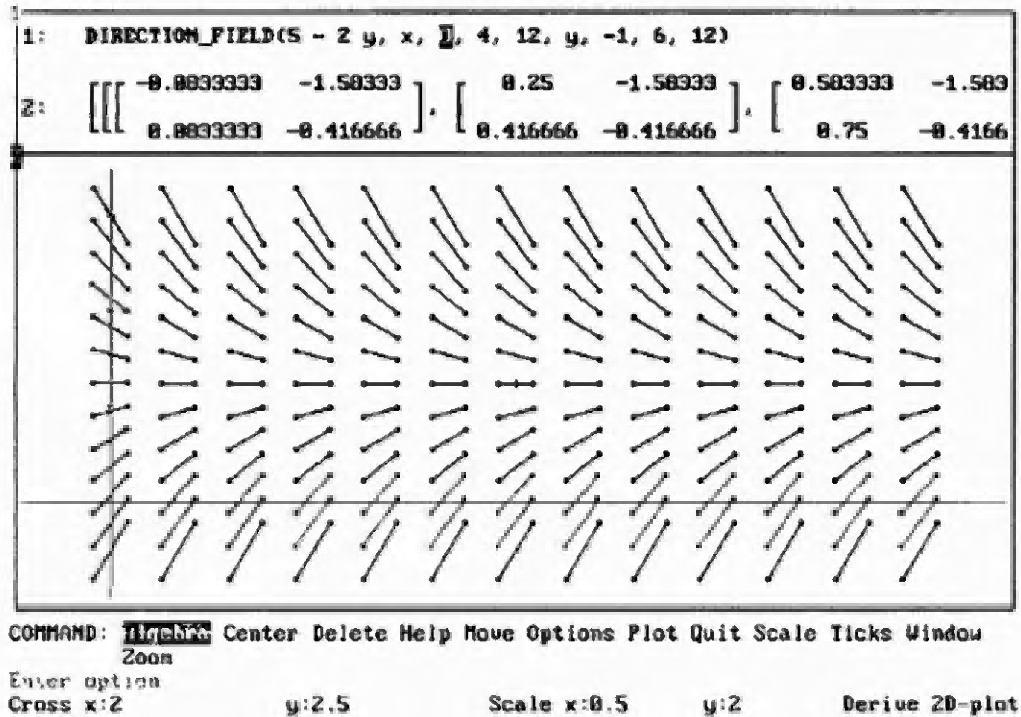


Fig. 12. Campo direccional para $\frac{dy}{dx} = 5 - 2x$

Regresando a la pantalla de Álgebra y escribiendo en Author

$$\text{Vector}(2.5 - 2ae^{-2x}, a, -5, 5),$$

simplificando y graficando esta expresión se produce una familia de curvas, cuya ecuación es:

$$y = 2.5 - 2ae^{-2x}, \quad (2)$$

donde a puede tomar cualquier valor. La ecuación (2) es llamada solución general de la ecuación diferencial, y para cada valor de a tendremos una solución particular de la misma. Veamos la representación gráfica

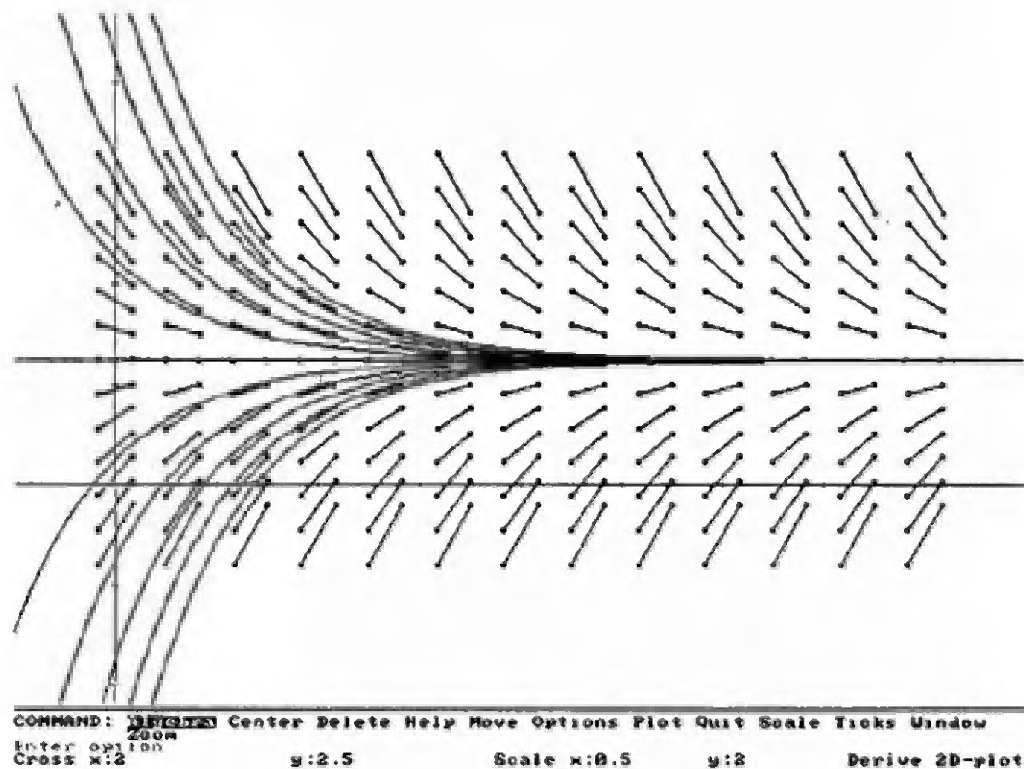


Fig. 13. Soluciones particulares para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 5 - 2x$

2.1.2 Archivos de Utilitarios

La versión 2.5 de DERIVE contiene una colección de archivos para un trabajo más profundo en matemáticas avanzadas. Entre ellos podemos mencionar los siguientes:

1. SOLVE.MTH: Resuelve sistemas no lineales y da soluciones complejas.
2. VECTOR.MTH: Contiene funciones adicionales de vectores y matrices; por ejemplo Pivot, Adjoint, rank, etc

3. NUMERIC.MTH : Diferenciación e integración numérica
4. DIF_APPS MTH: Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales: curvaturas, centros de curvatura, círculo osculador, etc.
5. INT_APPS.MTH : Aplicaciones de integración. Transformadas de Laplace, Series de Fourier truncada, Áreas de superficies, etc.
- 6 ODE1.MTH. Ecuaciones diferenciales de primer orden.
7. ODE2.MTH: Ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- 8 ODE_APPR MTH: Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales
- 9 RECUREQN MTH: Ecuaciones recurrentes
10. EXP_INT MTH: Integrales exponenciales de seno, coseno y logaritmo.
11. PROBABIL.MTH. Funciones de probabilidad. Psi(z), Beta (z,w), etc.
12. FRESNEL.MTH: Integrales de Fresnel
13. BESSEL MTH. Funciones de Bessel por aproximaciones
- 14 HIPERGEOM MTH: Funciones hipergeométricas
15. ELLIPTIC.MTH Integrales elípticas con aproximaciones hasta tercer orden.
16. ORTH_POL.MTH. Polinomios ortogonales.
17. ZETA.MTH: Funciones Riemann-Zeta generalizados
18. GRAPHICS.MTH. Gráficas de curvas en el espacio y expresiones complejas.
19. NUMBER.MTH: Funciones de Teoría de números: Bernoulli, enésimo primo, etc.
- 20 MISC.MTH: Funciones misceláneas.

2.2 Objetivos Educativos de DERIVE

Algunos objetivos que pueden ser alcanzados, en mayor grado que en nuestra enseñanza tradicional, con la utilización de sistemas computacionales son los siguientes:

1. Explorar muchos ejemplos.

Gracias a la capacidad que tiene DERIVE de interrelacionar aspectos simbólicos, algebraicos y gráficos en un determinado problema, el mismo puede ser abordado desde diferentes puntos de vista, hasta poder hacer las generalizaciones necesarias para su solución. Además, se pueden explorar mayor cantidad de problemas por la rapidez con que se ejecutan los cálculos.

2. Descubrir estructuras matemáticas por medio de sus propias experiencias.

El alumno al manipular un sistema computacional algebraico, para explorar un fenómeno matemático, y descubrir, ya sea un principio o un concepto se siente más motivado que al escucharlo recitar por el profesor en el aula de clases. Formulando sus propias conjeturas llega a sentir que esa relación descubierta fue obra suya y esto hace que se interiorice en su mente para poder aplicarla en otras áreas, hasta llegar a desarrollar conocimientos sistemáticos en las mismas.

3. Practicar métodos matemáticos sin el limitante de los extensos cálculos matemáticos

La ejecución y práctica de algoritmos se llevan a cabo con mayor rapidez debido a que se concentra toda la atención en el proceso involucrado (o secuencia de los pasos) y no en la verificación de los cálculos matemáticos.

4. **Es un medio de aumentar el poder de la modelación matemática y las herramientas en la resolución de problemas en una etapa temprana del desarrollo del estudiante.**

En efecto, en cuanto a la modelación matemática nos permite extraer información de los esquemas que preparamos, en una forma rápida y gráfica, reorientando así nuestra atención a proceso de formulación del modelo y a la interpretación y validación de la información que ella produce. Además permite ampliar el rango de las herramientas de modelación disponibles a estudiantes de nivel medio

5. **Puede ser utilizado como un manipulador algebraico, para ayudar al estudiante en el razonamiento formal.**

Una aptitud difícil de desarrollar es el pensamiento formal en nuestros estudiantes de la Licenciatura en Matemática. Con ayuda de los sistemas computacionales, utilizándolos como manipuladores algebraicos, se puede fomentar este tipo de razonamiento, a través de generalizaciones sobre un determinado problema, por inducción, analogía, etc.; procesos que pueden presentarse fácilmente en un sistema computacional como DERIVE y que el estudiante va explorando por sí mismo

6. **Permite la visualización de relaciones matemáticas.**

Por su ambiente de ventanas y poder de graficación de funciones en dos y tres dimensiones, DERIVE ofrece una fácil visualización de relaciones matemáticas, que pueden observarse gráfica y simbólicamente. Esta coordinación visual y simbólica provee al estudiante de una poderosa introducción a abstracciones complejas

7. Es una poderosa herramienta al tratar problemas que requieren de cálculos numéricos extensos o donde se necesiten varios enfoques (analítico y gráfico) para su solución.

Los cálculos engorrosos al tratar de resolver un problema (que muchas veces causan equivocaciones que llevan a la frustración en el estudiante) pasan a un segundo plano dentro de las actividades desarrolladas al utilizar sistemas computacionales, ya que son resueltos por la computadora. Se presta más atención a la observación de características particulares de un fenómeno matemático, relacionando los enfoques simbólico, gráfico y algebraico

CAPÍTULO III

OBSERVACIONES METODOLÓGICAS Y DIDÁCTICAS UTILIZANDO COMPUTACIÓN SIMBÓLICA

3.1 Introducción:

Al realizar este trabajo de investigación hemos considerado nuestra responsabilidad como docente de la Universidad de Panamá el investigar sobre las nuevas tecnologías y herramientas que se utilizan actualmente en la enseñanza de las matemáticas. Ignorar el impacto en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas tecnologías de computadora sería como un fraude a nuestros alumnos.

Nuestro objetivo no es que el docente conozca a la perfección las nuevas herramientas sino proponer algunas sugerencias metodológicas que con la incorporación de estos sistemas computacionales al curriculum, podrían resultar en oportunidades para que el estudiante reflexione y trabaje los conceptos matemáticos en una forma diferente y probablemente más efectiva.

La tarea del estudiante no será realizar cálculos rápidamente sino analizar y razonar sobre los resultados que le muestre el computador. Para enfatizar esta reflexión y razonamiento hemos aprovechado las ventajas pedagógicas de las computadoras: rapidez de computación, visualización, interacción, aprendizaje de los errores, retroalimentación, etc., y un número de propiedades adecuadas que nos brinda DERIVE (sistema computacional simbólico utilizado) tales como su capacidad gráfica, numérica, simbólica, facilidad de uso, capacidad para la programación, etc.

La utilización de paquetes para la computación simbólica como herramientas para provocar el razonamiento implicará un esfuerzo del docente en la preparación de actividades convenientes para su uso.

Con miras a ilustrar lo anterior hemos escogido una serie de problemas pertenecientes a tópicos de Cálculo, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y diseñado algunas sugerencias metodológicas que se implementarán mediante “laboratorios”, en donde se delinearán los pasos sucesivos y se presentan hojas de trabajo para responder preguntas orientadoras y anotar observaciones. En esta actividad lo importante no es el resultado final sino el proceso involucrado: observación, reflexión, corrección, prueba de resultados. Se busca así que el estudiante aprenda y no que responda acertadamente a una larga lista de ejercicios. No cabe entonces la exposición magistral de “recetarios” que se memorizan por breve tiempo. El método por descubrimiento es el recomendado, donde el alumno explore sus conjeturas a través de preguntas orientadas hacia un concepto o relación específica y tenga la oportunidad de explorar patrones y no sólo memorizar las fórmulas.

Se plantea un cambio radical, de un método pasivo de recepción de información a un método activo de construcción de un conocimiento matemático, por lo cual la participación del estudiante es fundamental, según revelan los últimos estudios psicológicos de aprendizaje. La experimentación en la máquina le permitirá al alumno sentirse parte activa del proceso de aprendizaje, construyendo sus actividades y replanteando una y otra vez sus ideas a través del lenguaje simbólico de los sistemas algebraicos. Es por ello que planteamos la necesidad de proveer el ambiente adecuado donde el alumno pueda ejecutar estas actividades que le llevarán a niveles más altos de aprendizaje de conceptos y principios matemáticos y proponemos *“la implementación de laboratorios en los cursos de la Licenciatura en Matemática, utilizando sistemas computacionales como herramienta intelectual”*.

3.2 Implementación de Laboratorios

El término “laboratorio” se refiere más que a un salón lleno de computadoras, con software de tipo simbólico seleccionado por el profesor, a un lugar donde se dé el ambiente para que el estudiante pueda explorar sobre una situación matemática. Implica que debe ser un lugar donde el estudiante tenga libertad para hacer comentarios sobre el tema en estudio, preguntas y conjeturas, que el profesor debe estar dispuesto a aclarar; no sin antes permitirle al estudiante la “comprobación” de su análisis para que pueda, por sí mismo, determinar las fallas en su razonamiento y retroalimentar su conocimiento. Debe a su vez, reunir condiciones físicas que permitan una gran concentración del estudiante, sin distracciones innecesarias mientras está realizando su proyecto de laboratorio y donde se facilite la intercomunicación entre los compañeros de grupo, el profesor y los asistentes.

Mediante el desarrollo de una sesión de laboratorio, utilizando la computación simbólica, se ponen en juego los pasos del método científico: la observación, identificación y la investigación experimental, que conlleva al estudiante al análisis y explicación de fenómenos naturales.

Al plantear un problema los estudiantes intentan, por diversos métodos y después de observar su comportamiento, formular conjeturas para su solución. Si después notan que la conjetura es incorrecta, buscan contraejemplos y reformulan la conjetura y tratan nuevamente de justificarla; esta es la parte crucial del laboratorio, en esta parte están interiorizando los conceptos matemáticos involucrados en el problema.

3.2.1 Orientaciones al Confeccionar un Laboratorio

La preparación de una clase de laboratorio requiere de mucho más tiempo en su elaboración, para poder lograr la exploración y descubrimiento de un concepto. Señalaremos algunas consideraciones generales que nos servirán de orientación al confeccionar un laboratorio.

a De acuerdo a los objetivos propuestos, el proyecto de laboratorio se debe ubicar en alguno de los tres casos siguientes

- Que se desarrolle antes de presentar un tema. Debe entonces iniciarse con un problema que motive discusión (o expectativa) sobre el mismo. Caben dentro de este tipo los de descubrimiento de un concepto o de familiarización con el software.
- Aquellos que tratan con aplicaciones interesantes cuyos datos no han sido manipulados por lo extenso de los cálculos. Se sugieren preguntas sobre el análisis e interpretación de resultados obtenidos, para que la experiencia no se reduzca a un simple cálculo numérico. Como los laboratorios de tipo modelación de un fenómeno matemático y de exploración de características y propiedades de una relación matemática.
- Y aquellos donde se pretende ampliar o reforzar el material presentado en clases. Se sugieren en este tipo las preguntas elaboradas por el profesor que motiven el análisis de la situación y que lleven al estudiante a observar y predecir resultados de acuerdo a lo explicado en clases.

- b Es indispensable que el profesor domine muy bien el contenido a tratar, más que si se tratara de una clase expositiva, para poder dar respuestas acertadas a preguntas que surjan de la experimentación en la computadora.
- c Los problemas a estudiar deben ser cuidadosamente seleccionados de manera que no se resuelvan inmediatamente, sino que requieran análisis y planteamiento de la situación, además deben ser interesantes para los alumnos.
- d Los proyectos de laboratorio deben ser un vehículo para profundizar los conceptos o principios matemáticos de la asignatura
- e El tiempo dispuesto para las preguntas de los alumnos debe ser considerado, sin restringirlo innecesariamente
- f Deben tener como componentes esenciales su informe de laboratorio de la experiencia, los mismos revelarán el nivel de comprensión obtenido

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de posibles actividades de laboratorio para un tópico dado dentro del currículum. Como hemos visto anteriormente, éstos pueden ser de familiarización con el software, de exploración de conceptos, de descubrimiento, de modelación, de enriquecimiento o reforzamiento del material presentado en clases.

EJEMPLO 1:**LABORATORIO N° 1****FAMILIARIZACIÓN****GRÁFICAS EN TRES DIMENSIONES**

En el curso Cálculo III, de la Licenciatura en Matemática, se introduce al estudiante en funciones de varias variables y la representación de superficies en tres dimensiones, sobre el plano XY . Es muy difícil estudiar el gráfico de estas superficies sobre el tablero, porque estamos restringidos a una representación en dos dimensiones y la mayoría de los docentes no somos buenos dibujantes. Las computadoras pueden ser de gran ayuda en el estudio de superficies, ya que las mismas pueden ser rápidamente dibujadas y manipuladas en la pantalla desde diferentes puntos de vista. Podemos estudiar sus formas y descubrir propiedades importantes.

Sugerencias para el profesor

Guíe al estudiante a experimentar con varios puntos de vista y a graficar la superficie desde diversos ángulos visuales, observando aspectos como picos, valles, puntos de sillar de montar, los cuales debe verificar que formen parte del conocimiento preliminar del estudiante.

Conocimientos preliminares.

- Nociones de gráficas de funciones en tres dimensiones
- Valores extremos y su representación.
 - Picos
 - Valles
 - Puntos de sillar de montar.

Actividades:

Desarrolle, utilizando el sistema computacional DERIVE, los puntos descritos en la siguiente hoja de trabajo y entregar un informe de laboratorio, comentando las experiencias de sus actividades

LABORATORIO N° 1
FAMILIARIZACIÓN
GRÁFICAS EN TRES DIMENSIONES
HOJA DE TRABAJO

Usando la facilidad de representación gráfica de DERIVE en 3D, dibuje las siguientes funciones. Imprima una copia, de ser posible.

a $f(x,y) = 10e^{-x^2-5y^2}$

b. $z = xy(y - x)$

Usted deberá experimentar con diversos puntos de vista y graficar la superficie desde distintos ángulos. Observe aspectos interesantes como máximos relativos (picos), mínimos relativos (valles), puntos de silla de montar, etc

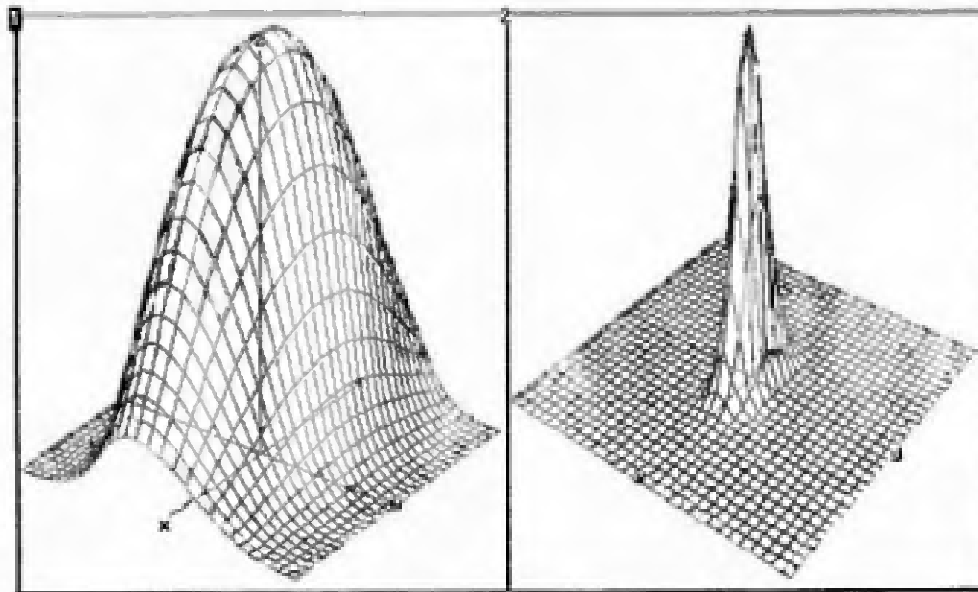
Descripción del desarrollo del proyecto de laboratorio:

Por ser un laboratorio de tipo familiarización, se deja al alumno que avance a su propio ritmo, realizando sus observaciones y redactando su informe del experimento.

Se espera que represente gráficamente las funciones dadas y observe varias escalas, desde diferentes ángulos visuales. Por ejemplo, las gráficas para la función

$$f(x,y) = 10e^{-x^2-5y^2}, \text{ utilizando dos escalas diferentes}$$

(ventana 1: $x = 2, y = 2, z = 10$ y ventana 2. $x = 10, y = 10, z = 10$), serán:



COMMAND: Algebra Center Eye Focal Grids Hide Length Options Plot Quit Window
Zoom

Enter option

Center x:8

y:8

Length x:2

y:2

Derive 3D-plot

Fig. 1. Gráfica de la función $f(x,y) = 10e^{-x^2-5y^2}$ en dos escalas diferentes

Observando la forma de la gráfica se pueden explorar principios y relaciones en la función dada.

EJEMPLO 2:**LABORATORIO N° 2****DESCUBRIMIENTO****CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA****Sugerencias metodológicas a los docentes:**

Guíe a los estudiantes para que después de construir la gráfica de una función cualquiera y su primera derivada, observe la característica de la función original en el intervalo donde la primera derivada es mayor que cero. Igualmente cuando f' es menor que cero. Análogamente, realice el mismo razonamiento para la función en estudio y su segunda derivada. Oriéntelos para que puedan descubrir el criterio de la primera y segunda derivada y formularla simbólicamente.

Conocimientos preliminares:

- Representación de gráfica de funciones
- Derivadas
- Concepto de función creciente y decreciente
- Conceptos de concavidad y convexidad
- Valores extremos.

Actividades:

LABORATORIO N° 2

HOJA DE TRABAJO

Dada la función

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$

1. Determine su primera derivada y represente ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados
- 2 Utilizando el concepto de valores extremos, determine los extremos de f
3. Observando, detenidamente, el comportamiento de las gráficas,
 - a) ¿Qué puede decir de los extremos relativos de f respecto a f' ?
 - b) ¿Qué comportamiento adquiere la gráfica de f en los intervalos donde f' es mayor que cero?
 - c) Realice el mismo análisis para los intervalos donde f' es menor que cero

Anote sus observaciones en la siguiente tabla:

INTERVALO	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
c en (a, b)			
Signo de $f'(x)$			
Comportamiento			

4 Determine la segunda derivada de la función y represente, en un mismo sistema de ejes cartesianos, la función y su segunda derivada

- a) Observe la característica de la función en los intervalos donde f'' es mayor que cero, y donde la misma es menor que cero. Anote sus observaciones en la siguiente tabla:

INTERVALO	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, \infty)$
c en (a,b)			
Signo de $f(x)$			
Comportamiento			

5. Realice un estudio similar para la función $y = xe^x - \text{sen } x - 1$
6. Redacte sus conclusiones

Descripción del proceso de ejecución del proyecto de laboratorio

Graficando en un mismo sistema de ejes coordenados una función cualquiera, su primera y segunda derivada, se pueden observar características importantes de la función original, como por ejemplo los intervalos donde la función es creciente o decreciente, donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo, sus puntos críticos y de inflexión. Este es un punto donde podemos aprovechar esta poderosa herramienta que son los sistemas computacionales para fomentar el análisis de relaciones y no perder tiempo en cálculos numéricos

Al analizar la función

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$

a través de su gráfica, de la de su primera y segunda derivada, que se calculan rápidamente utilizando **Calculus Differentiate** de la función dada y seleccionando el orden de la derivada y pulsando **Enter**. Luego simplificamos para obtener la derivada deseada de la función $f(x) = y$. En la gráfica siguiente tenemos la primera derivada de $f(x)$ en el paso 8 y la segunda en el 10 (que se determinó derivando sobre $f'(x)$).

DERIVE permite, en un mismo sistema de ejes cartesianos, representar la gráfica de una función y la de sus derivadas (que aparecen en diferentes colores en la pantalla a medida que se grafican) y estudiando su comportamiento individualmente, respecto a la función original podemos descubrir ciertas relaciones entre ellas. Cambiando la escala de los ejes se pueden hacer estudios locales de la curva. Veamos,

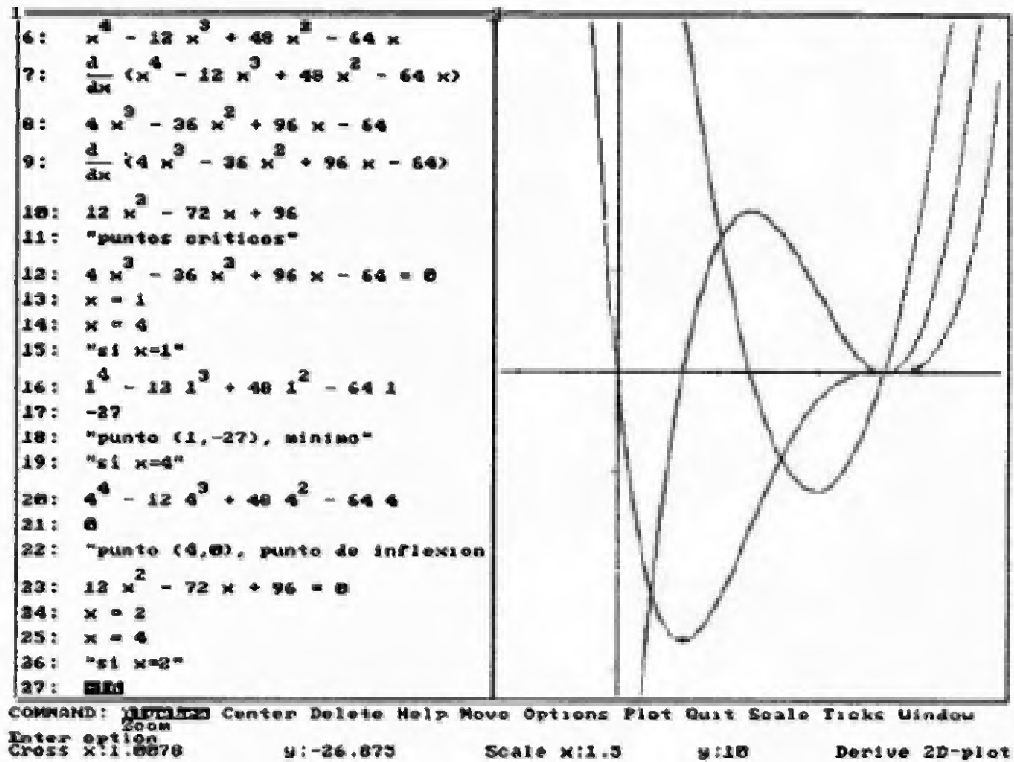


Fig. 2. Gráfica de una función, su primera y segunda derivada

En la figura observamos, en la ventana de Álgebra cómo se han determinado las derivadas de la función en estudio, además, igualando la primera derivada a cero y resolviendo la ecuación con Solve encontramos los puntos críticos que son $x = -1$ y $x = 4$. De igual manera, igualando a cero la segunda derivada encontramos los puntos de inflexión y son: $x = 2$, $x = 4$. Reemplazando con **Manage Substitute** en la función original encontramos el valor de y para cada uno de estos puntos y determinamos si se

trata de máximos o mínimos de la función en un intervalo dado. Podemos pedir al estudiante que haga un cuadro anotando los intervalos donde y' cambia de signo y observe en el mismo la característica de y . Igualmente para y'' . Así,

- Extremos locales: y' , y'' , mínimos, máximos, puntos de inflexión

Igualando y' a cero encontramos, con solve, $x = 1$, $x = 4$ como puntos críticos y utilizando **Manage Substitute**, sobre la función original, para cada uno de estos valores hallamos que si $x = 1$, $y = -27$, por lo tanto se trata de un mínimo de la función.

Igualando y'' a cero encontramos que sus puntos de inflexión son $x = 2$ y $x = 4$ son puntos de inflexión y sustituyendo en la función original para $x = 2$ obtenemos $y = -16$.

Analizando la función por intervalos, observando la gráfica de y' ,

INTERVALO	$(-\infty, 1)$	$(1,4)$	$(4, \infty)$
c en (a,b)	0	2	5
Signo de $f(x)$	-	+	+
Comportamiento	decrece	crece	crece

- Al observar la concavidad de la función el estudiante confeccionará la siguiente tabla:

INTERVALO	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, \infty)$
c en (a,b)	0	3	5
Signo de $f(x)$	+	-	+
Comportamiento	cóncava arriba	hacia cóncava abajo	hacia cóncava arriba

Realizando, de igual manera, la gráfica de la función $y = xe^x - \text{sen } x - 1$ para hacer un estudio de su comportamiento en el intervalo $-4 < x < 4$. Representando su primera y segunda derivada se puede realizar el mismo análisis, con la única diferencia que las raíces de las ecuaciones no son exactas. Al tratar de resolver (con `soLve`) la ecuación de la primera derivada, igualada a cero, para determinar los puntos críticos, DERIVE responde con la misma expresión

$$e^x(x+1) - \cos x = 0$$

Para resolverla se utiliza el comando `Options Precision Approximate`, con el cual DERIVE calcula las raíces por el método de bisección. Por lo tanto, es necesario representar la función $e^x(x+1) - \cos x = 0$ para introducir los extremos que permiten ejecutar el algoritmo de bisección. Como se observa en la gráfica,

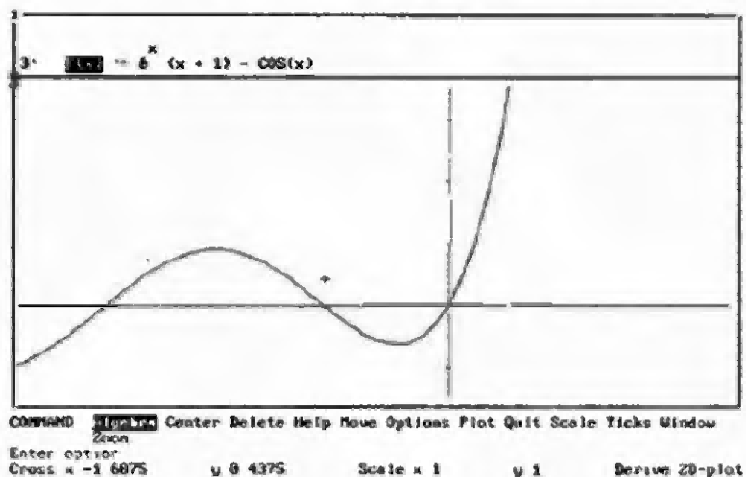


Fig. 3. Gráfica de $y' = e^x(x+1) - \cos x$

una raíz está en $x = 0$ y la otra entre -2 y -1 . Así, al resolver la ecuación se introduce -2 como extremo inferior y -1 como superior y DERIVE da la solución

$x = -1.69896$ De igual manera se resuelve para la segunda derivada, representando la gráfica y dando los extremos donde se observa (con ayuda del Cross), que están las raíces

Analicemos, ahora, las gráficas de la función definida anteriormente y sus derivadas de primer y segundo orden:

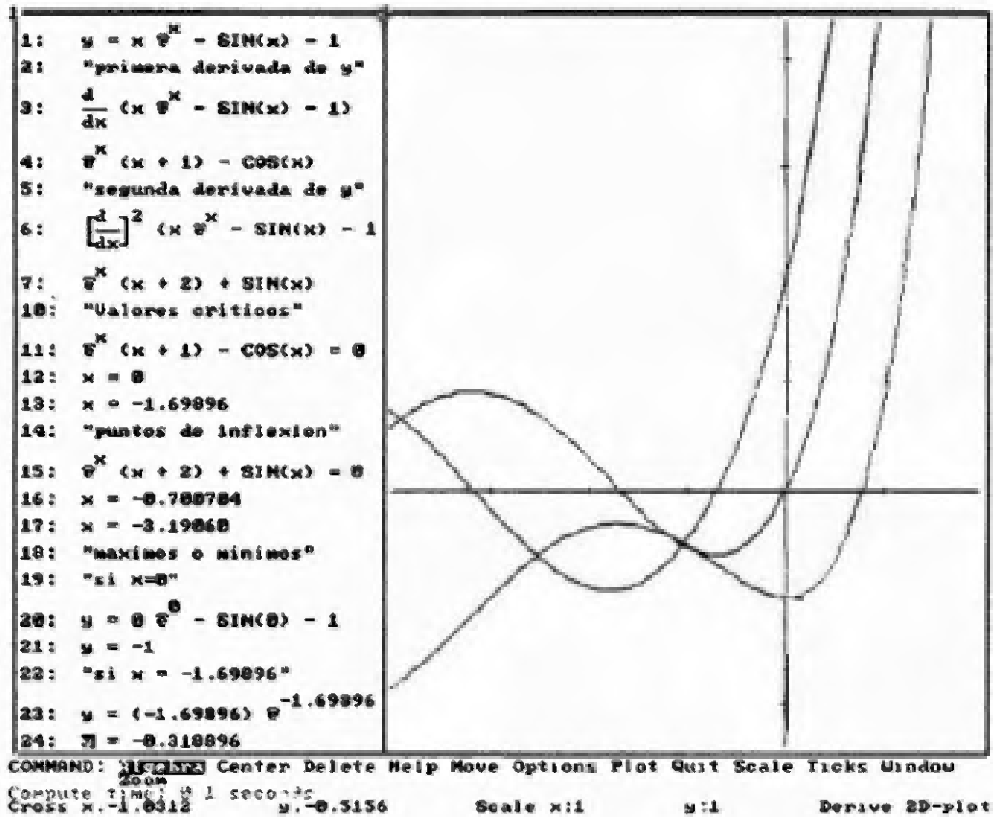


Fig. 4. Representación de una función, su primera y segunda derivada

observando las mismas características, para los intervalos donde y' es mayor (o menor) que cero; al igual que y'' , se puede llegar a formular el criterio de la primera y segunda derivada para una función. Observando varios ejemplos el estudiante puede explorar por sí mismo hasta llegar a descubrir que cuando y' es mayor que cero, la función es creciente,

cuando es menor que cero, será decreciente. Además, cuando y'' es mayor que cero la función es cóncava hacia arriba y cuando es menor que cero, es cóncava hacia abajo. Esta conjetura y el proceso involucrado en su formulación es lo que permitirá que el alumno aprenda mejor este principio, de modo que se internalice en él y pueda aplicarlo a otros campos de aplicación de la matemática. Cabe destacar que el tiempo ahorrado al utilizar un sistema computacional como DERIVE en este tipo de gráficas es valioso para aprovecharlo en análisis de propiedades y relaciones matemáticas.

EJEMPLO 3:**LABORATORIO N° 3.****EXPLORACIÓN Y REFORZAMIENTO****POLINOMIOS DE TAYLOR**

La presentación y discusión de este tema en forma clásica (magistral expositiva) es bastante difícil, y en la mayoría de los casos el estudiante asume una actitud mecanicista al resolver estos problemas, lo que a su vez influye en que no se interioricen los conceptos en su mente. Aún llegando a resolver una serie de Taylor correctamente no entiende que significado tiene el polinomio encontrado ni qué relación tiene con la función original. Utilizando DERIVE u otro manipulador simbólico profesional, el profesor puede lograr que el estudiante comprenda, por medio de la observación y exploración, qué significa una serie de polinomios de Taylor y cuál es su relación con la función original, en una vecindad de un punto.

Sugerencias para el profesor:

Haga una introducción al tema y luego oriente a sus estudiantes para que descubran y exploren relaciones entre el grado del polinomio y la función dada. Igualmente, que observen la influencia que tiene el valor aproximado al punto de expansión del Polinomio de Taylor.

Actividades:

Responda las preguntas que aparecen en la hoja de trabajo, realizando el experimento con ayuda de DERIVE. Redacte su informe de laboratorio.

LABORATORIO N° 3
POLINOMIOS DE TAYLOR
HOJA DE TRABAJO

1. Dada la función $f(x) = \text{sen}(x)$, obtenga los polinomios de Taylor de grado $n = 1, 3, 5, 8, 10, 15$.
2. Represente gráficamente, en la ventana de gráfica de DERIVE, la función $f(x) = \text{sen}(x)$. A continuación, represente - uno a la vez - los polinomios encontrados en el paso 1, observando su mayor o menor "aproximación gráfica" con la función original.
3. ¿Qué puede decir sobre la influencia del grado en la "mejor aproximación gráfica" del polinomio?. Comente.
4. Determine ahora los Polinomios de Taylor para la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y valores aproximados a su punto de expansión $x = 0$, tales como $x = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8$
5. Represente gráficamente estos polinomios encontrados en el paso 4.
6. ¿Qué influencia ejerce la cercanía de los valores aproximados a $x = 0$ sobre la confiabilidad de la gráfica de la función?. Comente sus observaciones

Descripción del proceso de resolución del laboratorio

A. Influencia del grado

Al analizar la gráfica para polinomios en series de Taylor de grado $n = 1, 3, 5, 8, 10, 14$ y 15 , de la función $\text{sen}(x)$. Primero calculemos los polinomios de Taylor, con nuestro sistema computacional. En la gráfica siguiente aparecen los cálculos de los polinomios para la función $f(x) = \text{sen}(x)$ para los valores de n mencionados anteriormente

```

1: F(x) := SIN(x)
2: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 1)
3: x
4: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 3)
5:  $x - \frac{x^3}{6}$ 
6: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 5)
7:  $\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$ 
8: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 8)
9:  $-\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$ 
10: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 10)
11:  $\frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$ 
12: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 14)
13:  $\frac{-x^{12}}{622720000} - \frac{x^{11}}{39916800} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$ 
14: TAYLOR(F(x)) := SIN(x), x, 0, 15)
15:  $-\frac{x^{15}}{1307674368000} + \frac{x^{12}}{622720000} - \frac{x^{11}}{39916800} + \frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} -$ 
16: "aproximaciones por series de Taylor a la función sen(x)"
17: "para n = 1, 3, 5, 8, 10, 14, 15"
18: 3)

```

COMMAND: **DETAILED** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer mode Window approx
Enter option C:TAYL.MTH Free:100% Inc Derive Algebra

Fig. 5. Polinomios de Taylor para la función $y = \text{sen}(x)$

A continuación tenemos la representación gráfica de la función y de sus polinomios de aproximación, determinados arriba de aproximación, determinados arriba

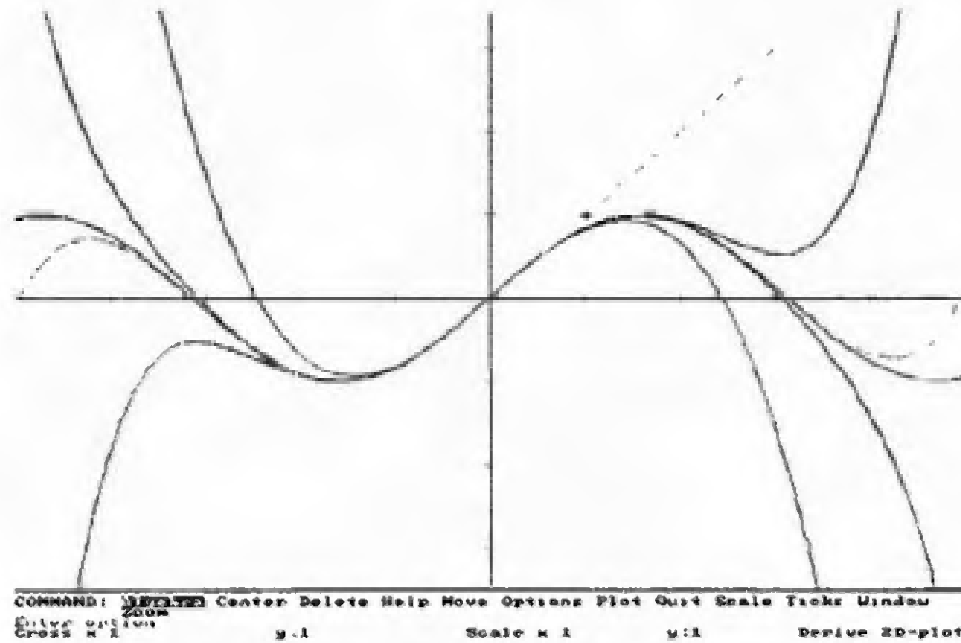


Fig. 6. Representación gráfica de los polinomios de Taylor ($n = -3, 5, 8, 10, 14, 15$)

A través de toda esta manipulación simbólica y gráfica el estudiante puede explorar o conjeturar que a mayor grado del polinomio mejor es la aproximación a la función dada.

B. Influencia de la cercanía de los valores al punto de expansión:

Otra forma de aclarar el concepto es observando qué papel juega la cercanía de los valores al punto de expansión. Analicemos ahora los polinomios de Taylor de la

función $y = \sin(x)$ de grado $n = 5$, para valores de $x = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8$, en torno a $x = 0$.

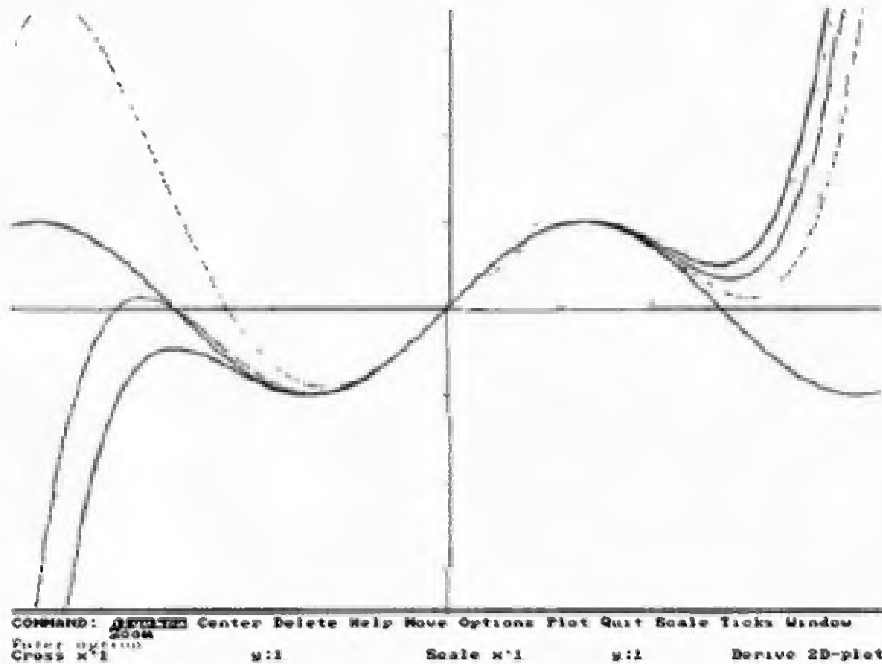


Fig. 7. Representación de los Polinomios de Taylor de grado 5, variando x en torno al punto de expansión

Se gráfica primero la función $f(x)=\sin(x)$ y luego sus polinomios de Taylor, el estudiante comprobará gráficamente que mientras más cercano esté el punto de aproximación al centro, mejor será la aproximación del polinomio de Taylor a la función original en la cercanía de ese punto.

La visualización en este tópico le permitirá al alumno tener una idea más clara del concepto de polinomios en series de Taylor, esto le motivará a resolver problemas y comprobar resultados

EJEMPLO N° 4:

LABORATORIO N° 4

MODELACIÓN

LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Exploración del Decaimiento Exponencial

Una de los principales usos de DERIVE como herramienta intelectual es en el campo de las aplicaciones; en particular, cuando se trata de problemas que requieren se plantee un modelo matemático para resolver un problema de otra disciplina: Física, Química, etc. Conviene clasificar la utilización que se dará del mismo para un determinado tema. Esbozaremos un cuadro planteando, dentro del currículo, los usos que se le pueden dar al sistema computacional DERIVE, al desarrollar el tema. Ley del Enfriamiento de Newton, como una aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.

CUADRO N° 1 MODELO PARA EL USO DIDÁCTICO DE DERIVE DENTRO DEL CURRÍCULO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

OBJETIVOS	CONTENIDO	ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	USO DIDÁCTICO DE DERIVE
Aplicar las ecuaciones diferenciales a la solución de problemas en Física, Biología y Química.	Ecuaciones diferenciales de primer orden - Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden - Ley del Enfriamiento de Newton	-Clase magistral, tratando de fomentar la discusión del tema presentado -Sesión de laboratorio, fomentando la exploración del fenómeno matemático -Resolución de problemas -Asignación de tareas	- Calculadora simbólica -Herramienta para la visualización - Instrumento didáctico - Instrumento metodológico didáctico

A través de este laboratorio se pretende lograr que el alumno represente un fenómeno físico a través de un modelo matemático, por medio del cual puede encontrar la solución a su problema. Para ello utilizará el sistema computacional DERIVE como un instrumento didáctico que le permite resolver sus cálculos numéricos rápidamente, a la vez que observa las representaciones gráficas del fenómeno matemático en estudio.

Sugerencias a los docentes:

Haga una breve introducción del fenómeno físico y su representación matemática. Déle al alumno el modelo matemático y la solución, la cual deberá ser verificada. El punto principal es dirigir al estudiante en la exploración del comportamiento de la solución, en un contexto real e inducir al estudiante a pensar en formas en que la matemática se relaciona con el fenómeno físico. El análisis gráfico se usa para construir una intuición y un conocimiento geométrico acerca del objeto matemático que se está manipulando.

Conocimientos preliminares:

- Derivada de la función exponencial
- Resolución de ecuaciones diferenciales
 - Valores iniciales
- Material introductorio al tema. Ley del Enfriamiento de Newton

Actividades:

Se presentará al estudiante un ejercicio introductorio, para motivar la discusión del tema

Ejercicio introductorio:

Si T es la temperatura de un objeto y T_s la del ambiente, entonces la proporcionalidad de la Ley de Newton da la ecuación:

$$dT/dt = -k(T - T_s) \quad (1)$$

en donde t representa el tiempo y k es constante, dT/dt representa la rata de cambio de la temperatura al tiempo t . La parte derecha de la ecuación tiene la constante k y la diferencia de la temperatura entre un objeto y su ambiente es $T - T_s$. El signo $-$ significa que el objeto se está enfriando.

Asumiendo que T_s no cambia cuando se enfría el objeto

1. Si T_0 = temperatura inicial cuando $t = 0$, verifique que

$$T = T_s - (T_0 - T_s)e^{-kt} \quad (2)$$

satisface la ecuación (1).

2. Suponga que usted es un patólogo forense y ha sido llamado para investigar un homicidio. La temperatura del cuarto en la escena del crimen ha sido constante 45°F por varias horas, y a la medianoche se mide la temperatura del cuerpo de la víctima como 60°F .

Si asumimos $k = 0.5 \text{ h}^{-1}$ para un cuerpo, estime de la gráfica apropiada de T vs t (usando ecuación 2) cuándo murió la víctima.

Si queremos saber a qué hora el cuerpo tenía una temperatura de 80°F debemos resolver $80 = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ para t .

LABORATORIO N° 4

LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON

HOJA DE TRABAJO

1. Hallar la derivada T' de T en la ecuación 2. Verifique la ecuación 1 y halle

$$-k(T - T_s), \text{ compare con } T'.$$

2. Escriba la forma general para la temperatura de la ecuación 2:

$$T = \underline{\hspace{10cm}}$$

Sustituya los valores especiales T_0 , T_s , k .

Haciendo uso de las capacidades simbólicas y gráficas de DERIVE, simplifique y grafique T .

Hallar la derivada y gráfica T' . $\underline{\hspace{10cm}}$

Represente la condición inicial: $T(0) = \underline{\hspace{10cm}}$

$T'(0) = \underline{\hspace{10cm}}$

Haga su gráfica como se le pidió

- 3 La variable de temperatura que estás usando es actualmente “el tiempo desde que empezó a enfriarse el cuerpo”, esto es sencillamente el tiempo transcurrido desde que observamos el objeto enfriándose, $T = T_0$ Luego podemos estimar el tiempo de la muerte haciendo la gráfica T vs t , t mayor o igual que cero

Determinando cuántas horas t le toma al cuerpo alcanzar la temperatura deseada, nombre el eje del tiempo que corresponde a “hora reloj” y estime la hora de muerte.

Deberá seleccionar la escala en el eje vertical, el cual dependerá de cuál era la temperatura del cuerpo a la hora del crimen.

A continuación se presentan, por áreas de estudio, sugerencias generales para la exploración y discusión de algunos temas, con el objeto de mostrar la aplicabilidad que tienen los sistemas computacionales para lograr un mejor aprendizaje en nuestros estudiantes.

3.3 Algunos Usos de la Computación Simbólica en Geometría

a. Exploración de conceptos geométricos

Una de las principales ventajas de utilizar sistemas computacionales simbólicos, en Matemática, es el poder de visualización de la manipulación algebraica, en particular, en problemas geométricos. Es una herramienta poderosa, ya que su utilización en Geometría permite que el alumno pueda enfocar un problema desde diferentes puntos de vista y verifique su solución inmediatamente, sin la molestia de rehacer los cálculos.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita a un triángulo de vértices dados.

Consideremos los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ como vértices del triángulo. Para determinar la ecuación de una circunferencia es necesario conocer las coordenadas de su centro, que denotaremos $C(x_m, y_m)$, y el radio, denotado por r . Para hallar las coordenadas del centro de la circunferencia, el alumno debe hacer uso de la igualdad de los radios, desde cualquier punto de la circunferencia al centro, y expresando estas

igualdades en nuestro sistema computacional, resolvemos un sistema de ecuaciones, para determinar el valor de x_m , y_m . Primero se definen los tres puntos, escribiendo en **Author**. $P := (x_1, y_1)$, $Q := (x_2, y_2)$ y $S := (x_3, y_3)$

y luego se escriben las dos relaciones de igualdad entre los radios y utilizando todos los puntos; resolviendo con **soLve**, encontramos las expresiones correspondientes para x_m , y_m (en los puntos 6 y 7). Y gracias a la facilidad que nos ofrece **DERIVE**, utilizamos un ejemplo particular para determinar, utilizando **Manage Substitute**, las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(3, 3)$, $(-2, 1)$. Tendríamos las siguientes expresiones en el área de trabajo de **DERIVE**.

```

1: p := [x 1, y 1]
2: q := [x 2, y 2]
3: s := [x 3, y 3]
4: (xm - x1)2 + (ym - y1)2 = (xm - x2)2 + (ym - y2)2
5: (xm - x1)2 + (ym - y1)2 = (xm - x3)2 + (ym - y3)2
6: ym = - (x12 (x2 - x3) - x1 (x22 - x32) + (y2 - y3) (y2 + y3)) + x22 x3 - x2
          2 (x1 (y2 - y3) + x2 (y3 - y1) + x3 (y1 - y2))
7: xm = (x12 (y2 - y3) + x22 (y3 - y1) + (x32 + (y1 - y3) (y2 - y3)) (y1 - y2))
          2 (x1 (y2 - y3) + x2 (y3 - y1) + x3 (y1 - y2))
8: r = √ [ [x1 - (x12 (y2 - y3) + x22 (y3 - y1) + (x32 + (y1 - y3) (y2 - y3)) (y1 - y2))
          2 (x1 (y2 - y3) + x2 (y3 - y1) + x3 (y1 - y2)) ]2
9: r = √ [ [0 - (02 (3 - 1) + 32 (1 - 0) + ((-2)2 + (0 - 1) (3 - 1)) (0 - 3))
          2 (0 (3 - 1) + 3 (1 - 0) + (-2) (0 - 3)) ]2
10: r =  $\frac{\sqrt{298}}{6}$ 
11: ym = - (02 (3 - -2) - 0 (32 - (-2)2) + (3 - 1) (3 + 1)) + 32 (-2) - 3 ((-2)2)
          2 (0 (3 - 1) + 3 (1 - 0) + (-2) (0 - 3))
12: ym =  $\frac{17}{6}$ 
13: xm = (02 (2 - 1) + 22 (1 - 0) + ((-2)2 + (0 - 1) (2 - 1)) (0 - 3))
          2 (0 (3 - 1) + 3 (1 - 0) + (-2) (0 - 3))
14:

```

COMMAND: **Options** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
 Options Plot Quit Remove Simplify Transfer mode Window approx
 Enter option
 User C:\CENTVR.MTH Free:96% Ins Derive Algebra

Fig. 8. Ecuaciones de las coordenadas del centro y del radio de una circunferencia que pasa por tres puntos dados

Encontramos que el centro de la circunferencia está en $(1/6, 17/6)$ y el radio es igual a $\sqrt{290}/6$ unidades. Es aconsejable, ahora realizar la representación gráfica de la circunferencia y el triángulo circunscrito en ella. Para ello procederemos utilizando ecuaciones paramétricas, para graficar el segmento de recta que une los vértices del triángulo; y luego, la circunferencia circunscrita a éste. Quedaría como ejercicio que el estudiante encontrara las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en un punto $C(h,k)$ y radio r .

En la gráfica siguiente se muestra el procedimiento utilizado para determinar las ecuaciones paramétricas de los segmentos de recta con extremos en los puntos dados, a partir de las ecuaciones paramétricas generales. A partir del punto 24: se escriben las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en un punto (h,k) y radio r y luego se utiliza el comando **Manage Substitute** para reemplazar los valores determinados anteriormente. Al final, representamos gráficamente cada una de estas ecuaciones paramétricas ejecutando **Plot-Plot** y dando los extremos del parámetro entre 0 y 1 (en este punto sería interesante pedir al estudiante que cambie los extremos del parámetro y analice su representación). Por último graficaremos las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con variación del parámetro (interrogando al grupo sobre cuáles serán los valores extremos del parámetro y motivándolos a explorar en la computadora), hasta llegar a concluir que está entre $-\pi$ y π .

Al comprobar que la circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo (como se observa en la figura 9) y que el análisis realizado es el correcto, el estudiante se sentirá motivado a seguir explorando conceptos y relaciones. En caso tal que no coincida la

representación con lo esperado, podrá volver a los primeros pasos sin sentir la frustración de tener que realizar manualmente todos los cálculos. Este análisis retrospectivo le ayudará a comprender mejor el concepto que está explorando e influirá en la confianza que debe tener el estudiante de que puede resolver el problema.

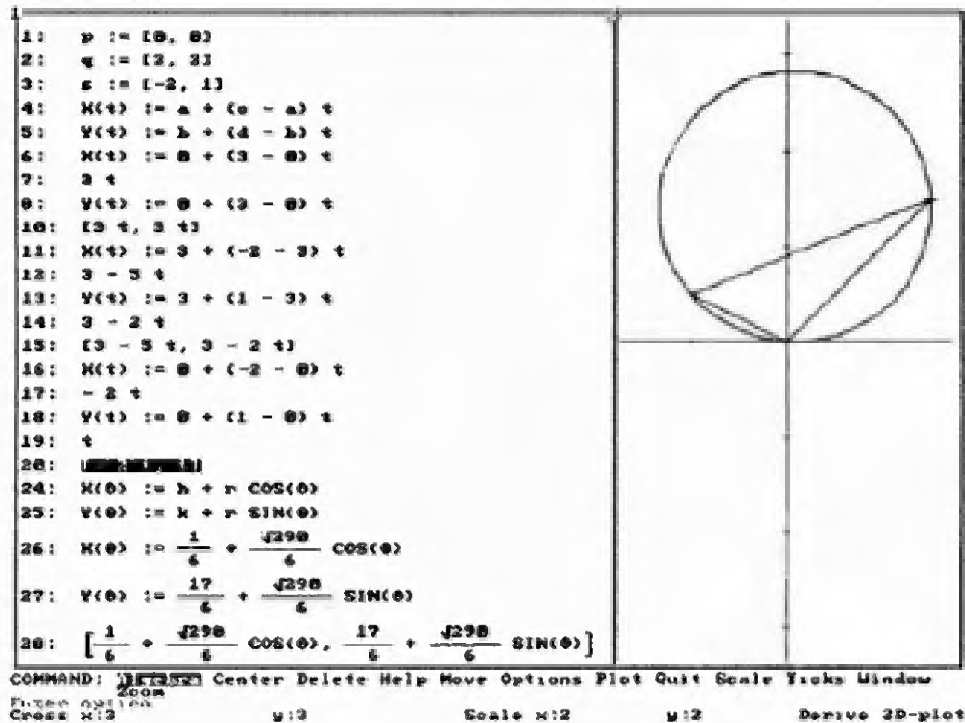


Fig. 9. Circunferencia circunscrita al triángulo de vértices en los puntos $(0,0)$, $(3,3)$, $(-2,1)$

Ejemplo 2

Determinar si el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo dado está situado en el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo.

Las ecuaciones, en forma paramétrica, de las mediatrices de un segmento con extremos en los puntos (a,b) , (c,d) son las siguientes:

$$x(t) = (a+c)/2 + (d-b)t, \quad y(t) = (b+d)/2 + (c-a)t$$

Veamos un ejemplo particular de esta relación, en DERIVE. Consideremos los puntos P, Q, R con las coordenadas del ejemplo anterior y determinemos las ecuaciones en forma paramétrica de las mediatrices a estos segmentos. Al graficar cada una de estas ecuaciones paramétricas encontramos que se intersecan en un punto y moviendo la cruz que indica su posición en el plano, encontramos que es igual a las coordenadas del centro de la circunferencia (difiere en milésimas por la precisión de la gráfica)

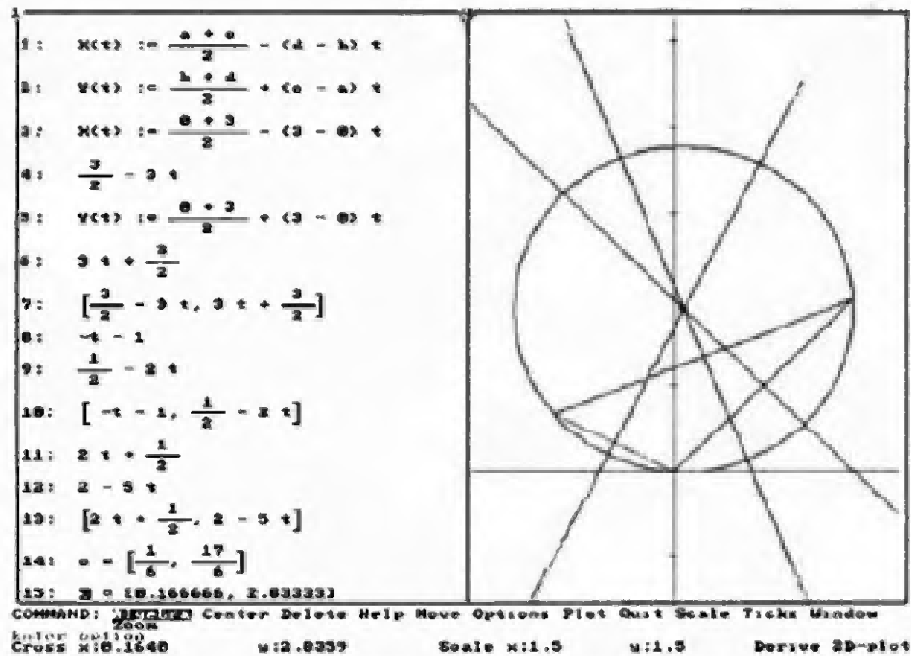


Fig. 10. Intersección de las mediatrices de un triángulo

Hemos construido, experimentalmente, un resultado importante de Geometría y el hecho de haber participado en esta construcción es lo que permitirá la formación de este principio en nuestra mente, a la par de otros conceptos que utilizamos como alternos,

como en este caso el de ecuaciones paramétricas de la recta mediatriz a un segmento con extremos en dos puntos dados

b. Explorar relaciones de la circunferencia y su ecuación

Veamos ahora otra aplicación de los manipuladores simbólicos en Geometría Analítica.

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + 3y = 21$ y que pasa también por los puntos $P(-6,3)$ y $Q(2,5)$.

Este problema requiere de un análisis cuidadoso para su solución. Lo primero que podríamos hacer es representar gráficamente, en una ventana 2D-Plot, los datos para hacer un bosquejo de la situación. Para ello utilizaremos el comando **Declare** y definiremos los puntos

$p = [-6,3]$ y $q = [2,5]$

con **declare variable p, value [-6,3]**, y la recta con **Declare function f value 7 - x/3** y luego con el comando **Plot** graficamos estos elementos. El siguiente paso consiste en analizar de qué manera puedo trazar la gráfica de una circunferencia que pase por esos puntos y que tenga centro en dicha recta. Tendremos la situación de la figura

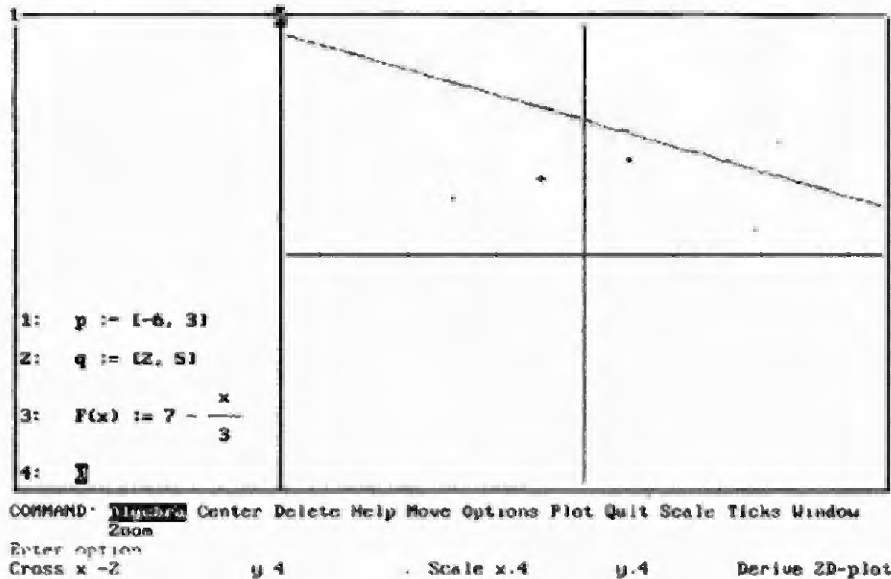


Fig. 11. Representación de datos en DERIVE como bosquejo en la resolución de un problema

En este momento el alumno puede enfocar su procedimiento de resolución del problema desde diferentes puntos de vista, por ejemplo, utilizando la propiedad geométrica (o conjeturándola, en caso tal que no la conozca) que nos dice que “Toda recta mediatriz a un segmento que une dos puntos de la circunferencia pasa por el centro”, asumimos que la mediatriz del segmento PQ se intercepta con la recta dada en el centro de la circunferencia buscada. En este punto es donde interviene el papel de facilitador de cálculos de nuestro sistema computacional, al determinar rápidamente la ecuación de la recta mediatriz. Y se procede en DERIVE de la siguiente manera: **Author** acepta la expresión

$$\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 5)^2}$$

y resolviendo, para encontrar la ecuación de la recta mediatriz, ejecutando **Solve** sobre la expresión anterior, para la variable y , se obtiene:

$$S: y = 4(x+1), \quad \text{que es la ecuación buscada}$$

Al resolver el sistema (formado por la ecuación de la recta sobre la cual está el centro de la circunferencia y la recta mediatriz del segmento PQ) encontraremos las coordenadas del centro. **DERIVE** resuelve un sistema de ecuaciones en breves segundos; para ello escribimos en **Author** las ecuaciones entre corchetes, separadas por una coma; así.

$$\text{Author expression } [y = 4(x+1), y = 7-x/3]$$

y resolviendo, con **Solve**, encontramos que $x = -3$, $y = 8$, que son las coordenadas del centro del sistema. Ahora, con uno de los puntos dados y las coordenadas del centro podremos determinar el radio de la circunferencia, calculando con la fórmula de la distancia entre dos puntos; escribiremos en **Author**

$$r = \sqrt{((-3 - 6)^2 + (8 - 3)^2)}$$

y con **Simplify** encontramos el valor de r , $r = \sqrt{34}$. Determinados el centro y radio de la circunferencia procedemos a escribir su ecuación en forma ordinaria y para graficarla en la ventana 2, despejamos para la variable dependiente y y ejecutamos **Plot** a las dos expresiones obtenidas (11 y 12 de la siguiente figura). Todos estos pasos se van representando gráficamente (sin presiones de tiempo o errores gráficos), para tener una idea de si el razonamiento es correcto o no; es decir, se podrá verificar, paso por paso el desarrollo de su análisis.

Veamos una representación de este problema en **DERIVE**

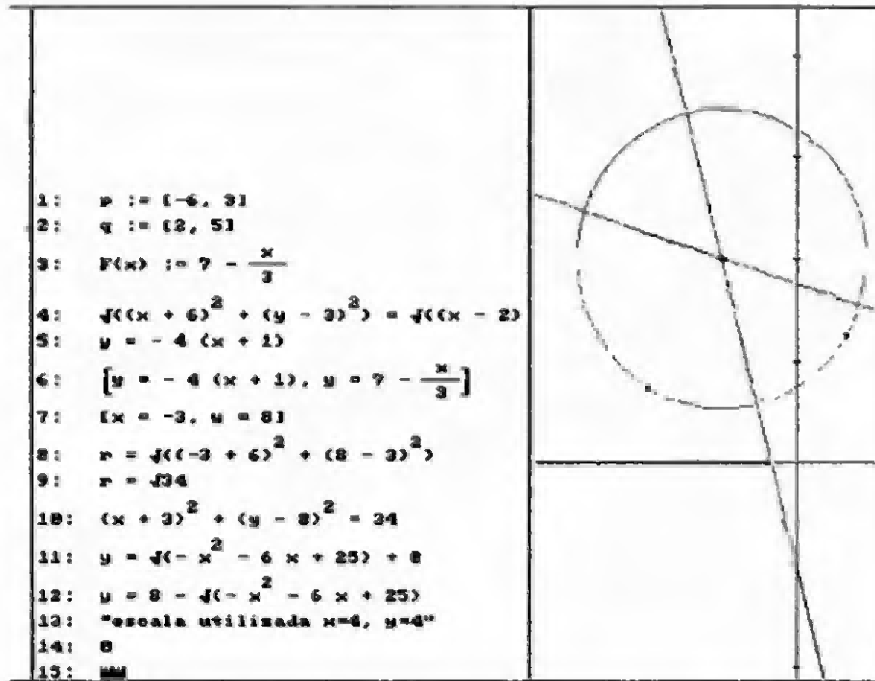


Fig. 12. Circunferencia con centro en la recta $x + 3y = 7$ y pasa por $(-6,3)$ y $(2,5)$

Hemos encontrado así la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-6,3)$ y $(2,5)$, y tiene por centro en la recta que tiene por ecuación $x + 3y = 7$.

3.4 Explorando Álgebra con Sistemas Computacionales

Un sistema computacional simbólico es muy útil para el estudio de funciones cuadráticas; ya que integra los conceptos algebraicos y gráficos. El éxito en muchos aspectos de los estudios en matemáticas dependen de la habilidad del estudiante de integrar la representación algebraica y gráfica de funciones. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 4

Estudiar cómo afectan los cambios de parámetros la representación de la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Si deseamos hacer un estudio de funciones cuadráticas y su representación gráfica donde el alumno descubra relaciones matemáticas, entre los parámetros de la función. Escribimos en forma general la ecuación cuadrática, luego fijamos dos de los parámetros y hacemos variar el tercero para observar el efecto que tiene en la representación gráfica de la función,

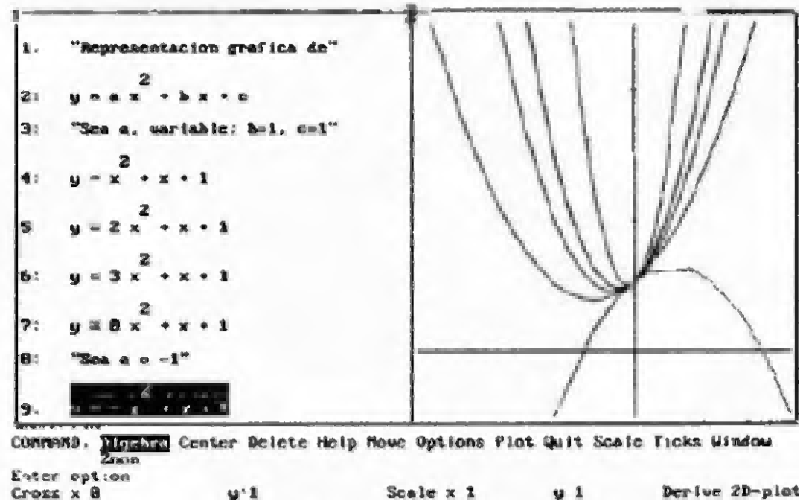


Fig. 13. Representación gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ variando los valores del parámetro a

Dando los valores $b = 1$, $c = 1$ y $a = 1, 2, 3, 8, -1$ y observando su respectiva gráfica, podemos realizar las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se espera que sea la gráfica de $y = -5x^2 + x + 1$?
- ¿Por qué todas estas funciones pasan por el punto $P(0,1)$?
- ¿A qué corresponde el hecho que la función no corte el eje x cuando $a > 0$?
- Calcule la función Discriminante, definida por $\text{Disc} = b^2 - 4ac$, para los valores de los parámetros descritos anteriormente, ¿qué relación hay entre sus valores?
- ¿Cree usted que podría existir relación entre el signo de Disc y las raíces de la función? Comente

Otro estudio similar se puede efectuar fijando el valor del parámetro $a = 1$ y $c = 1$ y dando valores variables a b . La representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ con $b = 1, 2, 3, -3$ se observa en la siguiente figura.

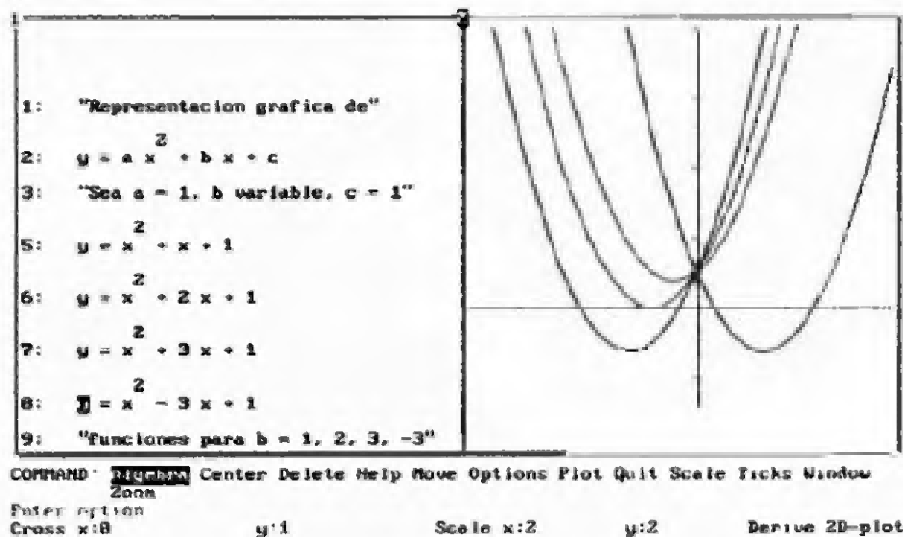


Fig. 14. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ variando b .

El profesor redactará las preguntas de acuerdo a los objetivos propuestos y buscando siempre una mayor participación del alumno en el descubrimiento de conceptos matemáticos.

Ejemplo 6:

Estudiar el comportamiento de las funciones $f(x) = x^\alpha$ y $g(x) = a^x$ al variar su parámetro

En cada una de estas funciones se puede estudiar el efecto del parámetro sobre su representación gráfica. Veamos el caso de la función $f(x) = x^\alpha$.

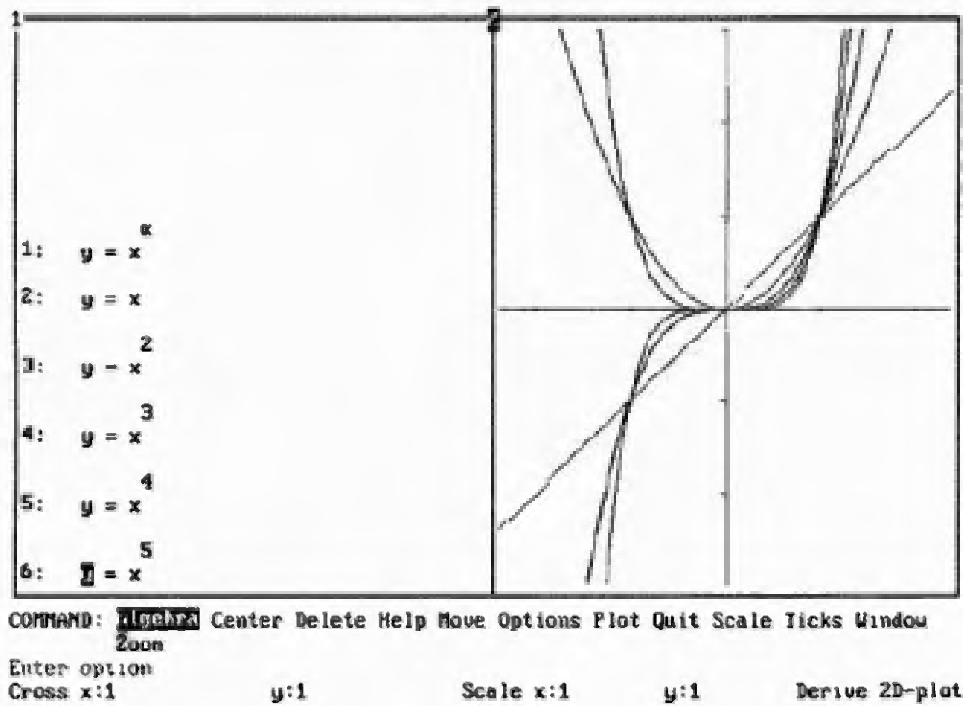


Fig. 15. Representación gráfica de $y = x^\alpha$ variando el parámetro α .

Al ir representando una por una las gráficas de las funciones correspondientes para $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ se puede ir conjeturando la forma que tendrá la siguiente. Además, podríamos preguntar sobre la forma de la curva si el valor de α fuera negativo, con el objeto de llevar a los estudiantes a una modelación de la situación observada hacia fenómenos abstractos. Un estudio similar se puede realizar sobre la función $y = a^x$.

Ejemplo 7:

Comprobar, para casos elementales, el *Teorema Fundamental del Álgebra*:

“Un polinomio de grado 3, 4, ..., n tiene n raíces y se puede escribir en la forma

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)”$$

Para que el estudiante pueda descubrir este teorema se escogen polinomios de grado tres, cuatro, cinco y seis (que tengan raíces reales) y se resuelven, de tal manera que aparezcan las raíces de cada uno

```

1:  3 x3 + 2 x2 - 12 x - 8 = 0
2:  x = - 2/3
3:  x = 2
4:  x = -2
5:  2 x4 - 7 x3 - 10 x2 + 13 x + 10 = 0
6:  x = - 1/2
7:  x = 1
8:  x = -2
9:  x = 5
10: x3 - 3 x2 - 5 x2 + 10 x2 + 4 x - 12 = 0
11: x = 1
12: x = -1
13: x = 2
14: x = -2
15: x = 3
16: 2 x6 - 7 x5 - 7 x4 + 35 x3 - 7 x2 - 20 x + 12 = 0
17: x = 1/2
18: x = 1
19: x = -1
20: x = 2
21: x = -2
22: x = 3

```

COMMAND **ANSWER** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Rename Simplify Transfer mode Window Approx
User: C:\PNOMIO\MTM Free 99A Inv Derive Algebra

Fig. 16. Raíces de polinomios de grado 3, 4, 5 y 6

Si además se pide que factorice cada una de estos polinomios, podrá llegar a generalizar, para un polinomio de grado n , que se puede escribir de la forma

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$$

En DERIVE, la factorización de estos polinomios se calcula seleccionando Factor sobre las expresiones dadas y obtenemos:

```

1:  3 x3 + 2 x2 - 12 x - 8 = 0
2:  (x - 2) (x + 2) (3 x + 2) = 0
3:  2 x4 - 7 x3 - 10 x2 + 13 x + 10 = 0
4:  (x - 5) (x - 1) (x + 2) (2 x + 1) = 0
5:  x5 - 3 x4 - 5 x3 + 15 x2 + 4 x - 12 = 0
6:  (x - 3) (x - 2) (x - 1) (x + 1) (x + 2) = 0
7:  2 x6 - 7 x5 - 7 x4 + 35 x3 - 7 x2 - 20 x + 12 = 0
8:  (x - 3) (x - 2) (x - 1) (x + 1) (x + 2) (2 x - 1) = 0

```

```

COMMAND Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer solve Window approx
Enter option
User          C:FPNOM10.MTH          Free:99% Ins          Derive Algebra

```

Fig. 17. Factorización de polinomios de grado 3, 4, 5, 6

3.5 Cómo puede ser usado en Álgebra Lineal?

En años recientes la demanda para el entrenamiento en Álgebra Lineal ha aumentado en disciplinas tales como Ingeniería, Ciencias de la Computación, Investigación de Operaciones, Economía y Estadística. Simultáneamente, mejoras en los hardware y software en las ciencias de la computación han aumentado el poder del Álgebra Lineal

para resolver problemas que son de un orden de magnitud mayor de lo que se soñaba posible hace una década

Con el advenimiento de las computadoras digitales se ha eliminado el tedio de los extensos cálculos asociados con los sistemas lineales. Con las computadoras, modelos lineales tales como la programación lineal y regresión lineal ahora son utilizados para organizar y optimizar virtualmente todas las actividades de negocios tales como investigaciones del mercado, control de refinerías de petróleo, etc. Sin embargo, en muchos cursos la importancia del Álgebra lineal, en campos aplicados, no se hace sentir en el aula de clases. Por medio de la computadora los estudiantes de álgebra Lineal podrán ser capaces de experimentar aspectos numéricos y computacionales de la asignatura que están presentes en todas las aplicaciones serias.

Algunas de las ventajas que ofrecen el uso de los CAS en Álgebra Lineal son las siguientes:

- Remueve la carga computacional asociado con los cálculos manuales de los algoritmos matriciales, con el objeto que presten atención a la teoría y aplicaciones.
- Fomenta un ambiente experimental y de descubrimiento que permite considerar aplicaciones más interesantes y realistas de este tópico.
- Permite al estudiante involucrarse con algunos de los aspectos computacionales del Álgebra Lineal.
- Demuestra alguna de las ventajas y poder de la tecnología en Matemática

Los métodos iterativos elementales (tales como el método de Jacobi y Gauss-Seidel) para resolver sistemas lineales y el método de potencias para hallar los valores propios dominantes y el vector propio asociado, son ejemplos concretos de tópicos donde se reconocen estos beneficios. Además de mostrar las matemáticas útiles en acción, ellos muestran en forma efectiva el rol de la teoría vs computación en Álgebra Lineal.

Veamos un problema donde se utilizan conceptos de Álgebra Lineal para su resolución y se hace necesaria la utilización de sistemas computacionales que faciliten los cálculos.

Ejemplo 8.

Suponga que en un sistema económico con seis industrias NMT (no metálico), MT (metálico terminal), MB (metálico básico), NMB (no metálico básico), E (energía), S (servicio), las demandas externas son $NMT = 99,640$, $MT = 75,548$, $MB = 14,444$, $NMB = 33,501$, $E = 23,527$; $S = 263,985$ (en millones de dólares, respectivamente). Supóngase además que se dan las demandas internas basadas en las cantidades de Leontief^{*} descritas en la tabla de entradas y salidas siguiente.

	NMT	MT	MB	NMB	E	S
NMT	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NMB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

CUADRO 2. DEMANDAS INTERNAS DE LA ECONOMÍA NORTEAMERICANA

* Ver Álgebra Lineal con Aplicaciones de Stanley I Grossman

Las unidades en el Cuadro 2 representan millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.104 en la posición 6,3 significa que a fin de producir \$ 1 millón en artículos metálicos básicos (MB) es necesario proporcionar \$ 0.104 millones = 104,000 de servicios. ¿Cuántas unidades tuvo que haber producido cada uno de los seis sectores a fin de mantener la marcha en la economía norteamericana y satisfacer todas las demandas externas en ese año?

Para resolver este problema el alumno debe poseer conocimientos de Modelos de Leontief aplicados a sistemas económicos y reconocer que el sistema de entradas y salidas se puede escribir como

$$A x + e = x = I x \quad (1)$$

o bien, $(I - A)x = e, \quad (2)$

donde A es la matriz de demandas internas llamada matriz de tecnología y la matriz $(I - A)$ se llama *matriz de Leontief*. Si esta es invertible, entonces los sistemas (1) y (2) tienen solución única.

Observe que esta es una aplicación importante del Álgebra Lineal a la Economía, pero tratar de resolver este sistema a lápiz y papel (o aún con la calculadora) resulta un trabajo tedioso. Los sistemas computacionales resuelven en pocos minutos el problema, después que el estudiante ha bosquejado la situación problemática. Así, en DERIVE se procedería de la siguiente manera. Se definirán, en primer lugar, los elementos del sistema en DERIVE (pasos 1, 2, 3) y luego utilizando el comando **Build** (entre 3 y 1 y la operación sustracción) se obtiene la matriz de Leontief $(I-A)$.

```

1: A := [ [ 0.17 0.004 0 0.029 0 0.000
           0.003 0.295 0.018 0.002 0.004 0.016
           0.025 0.173 0.46 0.007 0.011 0.007
           0.348 0.037 0.021 0.403 0.011 0.048
           0.007 0.001 0.029 0.025 0.258 0.025
           0.12 0.074 0.104 0.123 0.173 0.234 ] ]

2: v := [ 99640
         75548
         14444
         33501
         23527
         263983 ]

3: I := [ [ 1 0 0 0 0 0
           0 1 0 0 0 0
           0 0 1 0 0 0
           0 0 0 1 0 0
           0 0 0 0 1 0
           0 0 0 0 0 1 ] ]

4: "MATRIZ DE LEONTIEF"
5: I - A = [ [ 0.83 -0.004 0 -0.029 0 -0.000
              -0.003 0.705 -0.018 -0.002 -0.004 -0.016
              -0.025 -0.173 0.54 -0.007 -0.011 -0.007
              -0.348 -0.037 -0.021 0.597 -0.011 -0.048
              -0.007 -0.001 -0.029 -0.025 0.742 -0.025
              -0.12 -0.074 -0.104 -0.123 -0.173 0.766 ] ]

COMMAND: Quit Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Layer option Options Plot Quit Remove Simplify Transfer move Window approx
User C:\LEONTIEF.MTH Free:99% Ins Derive Algebra

```

Fig. 18. Matriz de Leontief para un sistema de entradas y salidas

Ahora, se procede a calcular la inversa a la matriz encontrada en 4, de la figura 18, escribiendo en **Author** $(I - A)^{-1}$ y presionando **Control-Enter**, para obtener la matriz buscada. Como último paso, aplicamos nuevamente **Build** entre las expresiones 6 y 2 y la operación multiplicación para determinar la solución del sistema.

```

6:  $(I - a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.0130 & 0.00674 & 0.0639 & 0.00399 & 0.0174 \\ 0.0174 & 1.43 & 0.00399 & 0.0137 & 0.0100 & 0.0021 \\ 0.0701 & 0.466 & 1.07 & 0.0336 & 0.0041 & 0.0314 \\ 0.731 & 0.123 & 0.1 & 1.74 & 0.0654 & 0.122 \\ 0.0607 & 0.0451 & 0.13 & 0.0029 & 1.57 & 0.0094 \\ 0.24 & 0.228 & 0.206 & 0.314 & 0.370 & 1.34 \end{bmatrix}$ 
7: "SOLUCION DEL SISTEMA"
8:  $x = (I - a)^{-1} \cdot b$ 
9:  $x = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.0130 & 0.00674 & 0.0639 & 0.00399 & 0.0174 \\ 0.0174 & 1.43 & 0.00399 & 0.0137 & 0.0100 & 0.0021 \\ 0.0701 & 0.466 & 1.07 & 0.0336 & 0.0041 & 0.0314 \\ 0.731 & 0.123 & 0.1 & 1.74 & 0.0654 & 0.122 \\ 0.0607 & 0.0451 & 0.13 & 0.0029 & 1.57 & 0.0094 \\ 0.24 & 0.228 & 0.206 & 0.314 & 0.370 & 1.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77440 \\ 73340 \\ 14444 \\ 22001 \\ 20007 \\ 263905 \end{bmatrix}$ 
10:  $x = \begin{bmatrix} 1.3 \cdot 10^4 \\ 1.19 \cdot 10^3 \\ 80516.8 \\ 1.78 \cdot 10^3 \\ 66738.4 \\ 4.29 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$ 
COMMAND  UNDO  Undo  Calculus  Declars  Express  Factor  Help  Jump  solve  Menus
          OPTIM  Plot  Quit  Answer  Simplify  Transfer  mode  Window  approx
00000  00000  0 LEONTIEF.MEM  Free 99%  Inv  Derive Algebra

```

Fig. 19. Solución del sistema utilizando el Método de Leontief

Queda un paso importante en nuestro proceso de solución del problema y es verificar la respuesta de acuerdo a los datos del problema ¿Qué hemos encontrado?, ¿qué significan estos valores de x , respecto al problema original?

El estudiante debe estar en capacidad de responder que se habrían requerido aproximadamente* 130000 unidades (o \$ 130000 millones) de productos no metálicos, 119000 unidades de productos metálicos terminales, 80 516.8 unidades de metálicos básicos, 178000 unidades de no metálicos básicos, 66738.4 unidades de energía y 29000 unidades de servicio para hacer funcionar la economía norteamericana y satisfacer las demandas externas en ese año.

* Las cantidades son aproximadas ya que se han considerado solamente tres dígitos decimales

3.6 La Computación Simbólica y los Cursos de Cálculo

Uno de los principales usos de los sistemas computacionales es en el área de Cálculo Diferencial e Integral, debido a la diversidad de opciones que ofrece, como lo son: la facilidad de graficar de funciones, que ahorra tiempo y permite al estudiante analizar características especiales de las mismas; la experimentación numérica, que ofrece la oportunidad de observar el comportamiento particular de una función para muchos valores de la variable y poder llegar a realizar análisis y generalizaciones sobre los mismos. Y la integración de estos dos aspectos: gráfico y numérico que permite modelar situaciones abstractas a partir de la observación simbólica y gráfica de situaciones.

Entre los principales usos de algunos sistemas computacionales simbólicos, tales como DERIVE, MAPPLE, MATHEMATICA, etc., en la enseñanza del Cálculo, tenemos:

- Ilustrar y explorar la idea de cálculos gráficos y numéricos. Más adelante se presentarán ejemplos concretos a esta aplicación
- Desarrollar poderes de visualización, especialmente en tres dimensiones

Muchas veces la representación gráfica de algunas funciones es tan complicada que el alumno, a mitad del camino, pierde el interés de seguir analizando las relaciones o propiedades que se deducen de ella. Con ayuda de un sistema computacional podemos centrar nuestra atención en esas relaciones y sacar mayor provecho al proceso de aprendizaje por parte del estudiante.

Ejemplo 9.

Identificar la superficie cuadrática y trazas dadas por $x^2 - y^2 + z = 0$; realizando la gráfica con el sistema, podemos visualizar las características de esta superficie y las particularidades de sus trazas.

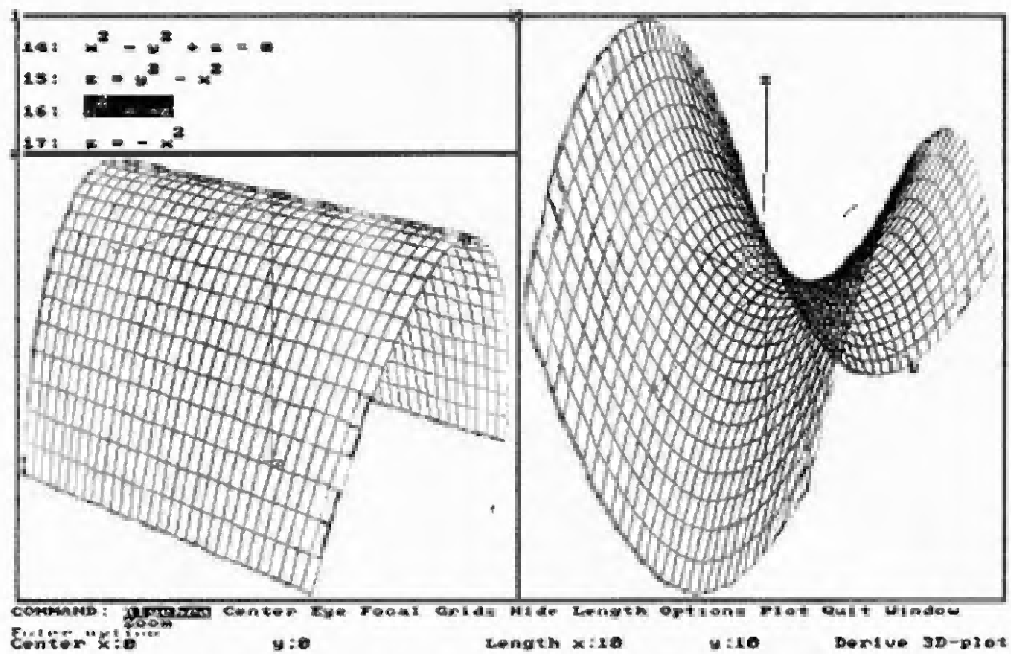


Fig. 20. Representación de una función de dos variables y su traza

Realizando, igualmente varias representaciones de otras superficies se podrían hacer generalizaciones sobre sus características geométricas y su ecuación.

- Ser capaz de expresar nociones en procedimientos algorítmicos, tales como el Método de Newton y la definición de la integral definida, en una forma más natural usando un lenguaje programado

- Hacer el estudio del Cálculo más agradable y estimulante

Los sistemas computacionales permiten que los estudiantes descubran y exploren sus ideas y esto los motiva, a conjeturar sobre ellas y una vez “probadas” por ellos mismos (en la computadora) a utilizarlas. Esto hace que no vean esta materia como fórmulas terminadas y sientan interés por participar en el descubrimiento de sus propios conceptos y propiedades.

Veamos otro de los innumerables usos de los manipuladores simbólicos, en Cálculo:

Exploración de una función por medio de la gráfica

Una gráfica vale más que cientos de cálculos ya que nos da una idea intuitiva del comportamiento de una función en una vecindad de un punto, lo cual podemos comprobar por medio de los respectivos cálculos. Veamos algunas aplicaciones del concepto de límite y estudio de una función a través de su primera y segunda derivada.

- a Aplicaciones del concepto de límite

Ejemplo 10

Analizar la continuidad de la función $y = \frac{1}{x^2-16}$.

Primero realizaremos la gráfica. Utilizaremos una escala de $x = 2$, $y = 2$ para visualizar mejor la gráfica de la función.

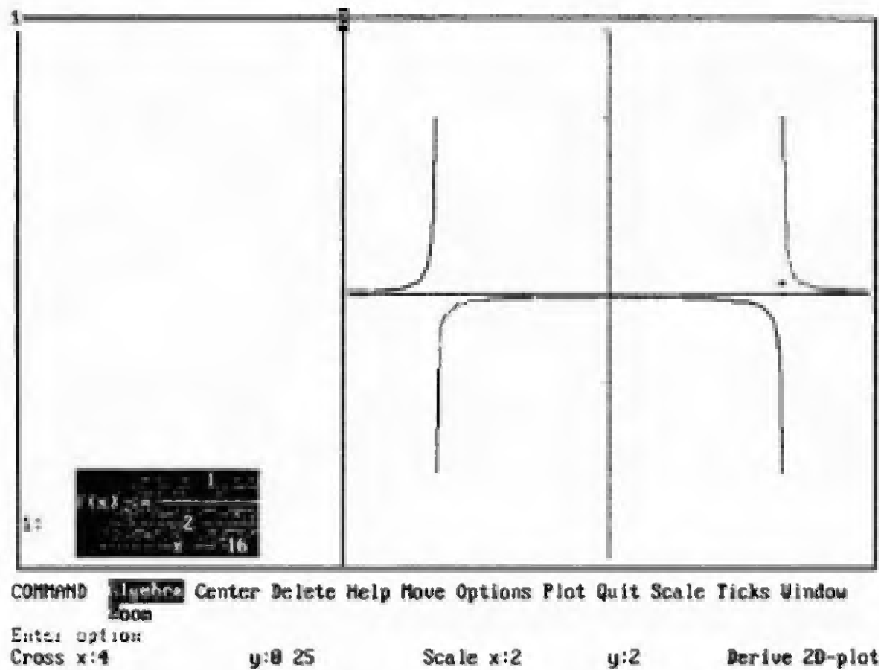


Figura 21. Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

observamos que hay un salto en $x = \pm 4$, es decir, vemos que en $x = 4$, $x = -4$ hay un punto de interés, intuitivamente podríamos conjeturar que la función anteriormente definida no es continua en $x = \pm 4$. Para comprobar nuestras hipótesis (de discontinuidad en esos puntos) calculamos $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ y observamos que son distintos (ver 2, 3, 4, 5 en la figura 22); por lo tanto, podemos afirmar que $f(x)$ no es continua en $x = \pm 4$.

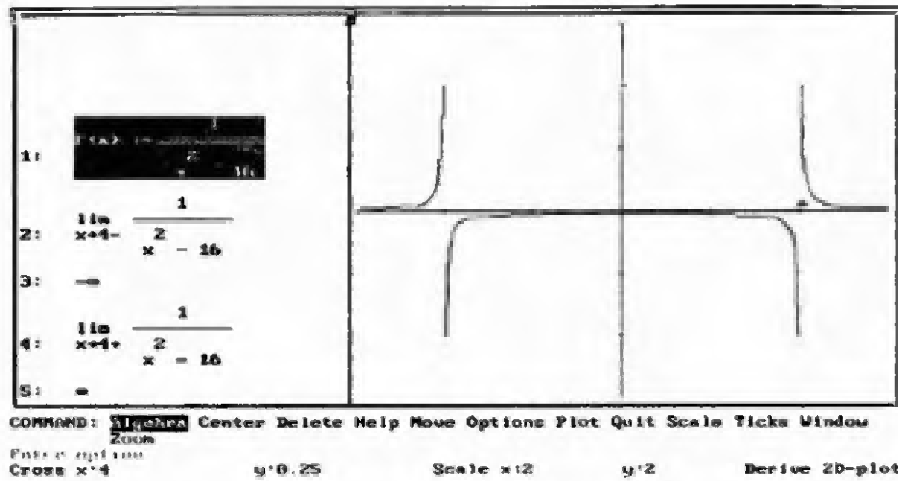


Fig. 22. Cálculo de los límites unilaterales, en $x = 4$, de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

Otra aplicación inmediata del concepto de límite, que surge espontáneamente al observar el ejemplo anterior, es la de asíntotas de la función $f(x)$ y que se pueden introducir en este punto

3.7 Explorando Conceptos de Geometría Diferencial Clásica

Existen conceptos importantes que se omiten de los cursos de la Licenciatura por razones de tiempo, ya que su presentación y discusión, a lápiz y papel es monótona y tediosa. La utilización de sistemas computacionales simbólicos motiva su introducción e incentiva a explorar relaciones y propiedades de los mismos. Tal es el caso del estudio del concepto de Curvatura y sus elementos, en el área de Geometría Diferencial Clásica.

DERIVE permite medir, en breves segundos, la rapidez con que una curva C cambia de forma, en un punto P , dado, es decir, calcular su curvatura. Llamando la fila de Utilidad

DIF_APPS y escribiendo en **Author** la función

$$\text{CURVATURE}(f(x),x)$$

se halla la fórmula de la curvatura de la función $f(x)$ y sustituyendo el valor de x calculamos la curvatura de la función en ese punto de la gráfica. Además se pueden determinar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia que mejor se adapta a la curva C en P , cuyo centro se encuentra al lado cóncavo de C y que tiene la misma recta tangente en P que C , llamada circunferencia de curvatura (o círculo osculador) en un punto P , escribiendo en **Author**:

$$\text{OSCULATING_CIRCLE}(f(x), x, t)$$

y simplificando (con **Simplify**) Se determina su centro de curvatura con

$$\text{CENTER_OF_CURVATURE}(f(x), x),$$

simplificando y reemplazando (con **Manage Substitute**) el valor de x del punto deseado. Veamos:

Ejemplo 11

Determinar la circunferencia de curvatura de la función $y = f(x) = x + 1/x$ en el punto $P(1,2)$ y representarla gráficamente.

Primero determinamos la fórmula para la curvatura, escribiendo

$$\text{CURVATURE}(x + 1/x, x)$$

y simplificamos para obtenerla, como muestra la figura 23 en el paso 3. Si deseamos determinar el valor de la curvatura en un punto específico sólo tenemos que reemplazar x en la fórmula encontrada. Luego escribimos $\text{OSCULATING_CIRCLE}(x + 1/x, x, t)$ y simplificamos para obtener las ecuaciones en forma paramétrica de las circunferencias de curvatura. Reemplazando luego en esta ecuación, con el valor de $x = 1$, encontramos la ecuación de la circunferencia que mejor se adapta al punto $P(1,2)$ de la curva. Podemos visualizar este resultado representando gráficamente la función $f(x)$ y la circunferencia de curvatura. Se puede, además, reemplazar otros valores ($x = 0.5$, $x = 1.5$) para observar el comportamiento de estas circunferencias sobre la curva. Para determinar los centros de estas circunferencias se escribe $\text{CENTER_OF_CURVATURE}(x + 1/x, x)$, se simplifica para obtener la fórmula para localizar los centros de curvatura, y reemplazando por los valores de x , se obtienen los respectivos centros. Al representar gráficamente esta fórmula se puede observar que pasa por todos los centros de curvatura. Se introduce, en este punto el concepto de “**evoluta**” como ‘el lugar geométrico de los centros de curvatura’.

Representando gráficamente la fórmula de la curvatura de la función, el estudiante puede observar cierta relación con la misma. Es tarea del profesor propiciar el ambiente para descubrir estas relaciones. Puede verificar también que la recta tangente a la

circunferencia de curvatura es la misma que la tangente a la curva $y = f(x)$, utilizando $\overline{\text{TANGENT}(f(x), x, x_0)}$ que halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en un punto $x = x_0$. Veamos el procedimiento realizado en DERIVE.

```

1:  $y = x + \frac{1}{x}$ 
2: CURVATURE  $[x + \frac{1}{x}, x]$ 
3:  $\frac{2x^3}{(2x^4 - 2x^2 + 1)^{3/2}}$ 
4: "circunferencia de curvatura"
5: OSCULATING_CIRCLE  $[x + \frac{1}{x}, x, t]$ 
6:  $\left[ \frac{(2x^4 - 2x^2 + 1)^{3/2} \cos(t)}{2x^3} - \frac{2x^6 - 6x^4 + 3x^2 - 1}{2x^3}, \frac{(2x^4 - 2x^2 + 1)^{3/2} \sin(t)}{2x^3} + \frac{2x^6 - 6x^4 + 3x^2 - 1}{2x^3} \right]$ 
7: "Circunferencia de curvatura en P(1,2)"
8:  $\left[ \frac{\cos(t)}{2} + 1, \frac{\sin(t)}{2} + \frac{5}{2} \right]$ 
9: "Circunferencia de curvatura en  $x = 0.5$ "
10:  $\left[ \frac{5 \sqrt{10} \cos(t)}{8} + \frac{19}{8}, \frac{5 \sqrt{10} \sin(t)}{8} + \frac{25}{8} \right]$ 
11: "Circunferencia de curvatura para  $x = 1.5$ "
12:  $\left[ \frac{53 \sqrt{106} \cos(t)}{216} + \frac{59}{216}, \frac{53 \sqrt{106} \sin(t)}{216} + \frac{35}{8} \right]$ 
13: "recta tangente a y en  $x = 1$ "
14: TANGENT  $[x + \frac{1}{x}, x, 1]$ 
15:  $3 = 2$ 

```

```

COMMAND: QUIT Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer move Window approx
Enter equation C:CURVATUR.NTH Free:94% Ins Derive Algebra
User

```

Fig. 23. Expresiones de DERIVE para determinar la curvatura de una función

La representación gráfica de las expresiones del área de trabajo se presentan en la siguiente figura y son de gran apoyo didáctico en el estudio de este tema

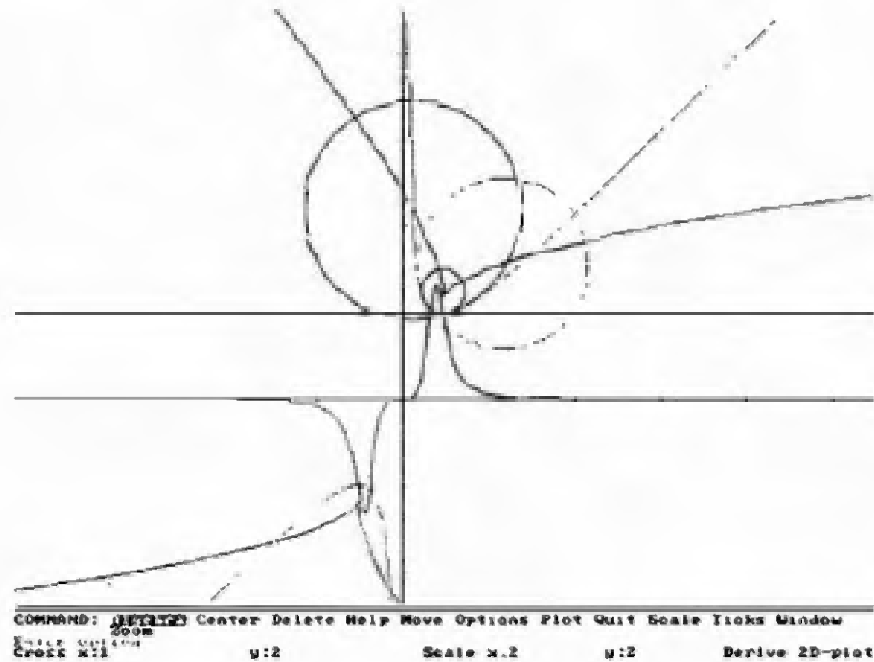


Fig. 24. Representación de la función $y = x + 1/x$, y su envolvente

Ejemplo 12:

Estudiar la curvatura en la cicloide

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide (de radio unitario), son las siguientes:

$$x(t) = t - \text{sen}(t), \quad y(t) = 1 - \text{cos}(t)$$

Para hallar la fórmula de curvatura de la cicloide, escribimos las ecuaciones en forma de vector. Así, $v = [x(t), y(t)]$ y simplificamos luego la función $\text{PARA_CURVATURE}(v, t)$. Realizaremos un estudio de manera análoga al problema anterior, determinando la evoluta de la cicloide, con la función

$$\text{PARA_CENTER_OF_CURVATURE}(v, t)$$

y simplificando para obtener la fórmula de los centros de curvatura de los círculos osculadores. Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de curvatura cuando $t = 1$ se calculan escribiendo

$$\text{PARA_OSCULATING_CIRCLE}(v, t, 1, \theta)$$

que determina las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de curvatura de la cicloide, cuando $t = 1$. En la figura siguiente se muestran las ecuaciones paramétricas de la cicloide (en los puntos 1 y 2), en el paso 3, está escrita en forma vectorial. Además determinamos la fórmula para los centros de curvatura (en 5), que al sustituir el valor de t se obtiene el centro de curvatura de la circunferencia que mejor se ajusta a la curva en el parámetro t . También las ecuaciones de la circunferencia con $t = 1$ (en el paso 6). También la tangente a la cicloide en el mismo punto, escribiendo en **Author**:

$$\text{PARA_TANGENT}(v, t, 1, \theta)$$

Por último se determina el centro de la circunferencia de curvatura para la cicloide cuando $t = 1$, reemplazando este valor en la expresión 4 de la figura 25.

```

1: X(t) := t - SIN(t)
2: Y(t) := 1 - COS(t)
3: V := {X(t), Y(t)}
4: PARA_CENTER_OF_CURVATURE(v, t)
5: (SIN(t) + t, COS(t) - 1)
6: PARA_OSCULATING_CIRCLE(v, t, 1, \theta)
7: [ \frac{5959}{3236} - \frac{1235}{644} \cos(\theta), -\frac{1235}{644} \sin(\theta) - \frac{4591}{9987} ]
8: PARA_TANGENT(v, t, 1, \theta)
9: \frac{2 \cos(1) + (1 - \theta) \sin(1) - 2}{\cos(1) - 1}
10: "centro de la circunferencia de curvatura para t = 1"
11: {1.04147, -0.459697}

```

COMMAND **Window** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer solve Window approx
Compute View: 0 0 0 0 0 0 0 0
User C:\CICLOIDE.MTH Free:99% Inv Derive Algebra

Fig. 25. Expresiones que determinan la curvatura de la Cicloide y su círculo osculador en $t = 1$

Al representar gráficamente estas expresiones, tenemos la siguiente figura

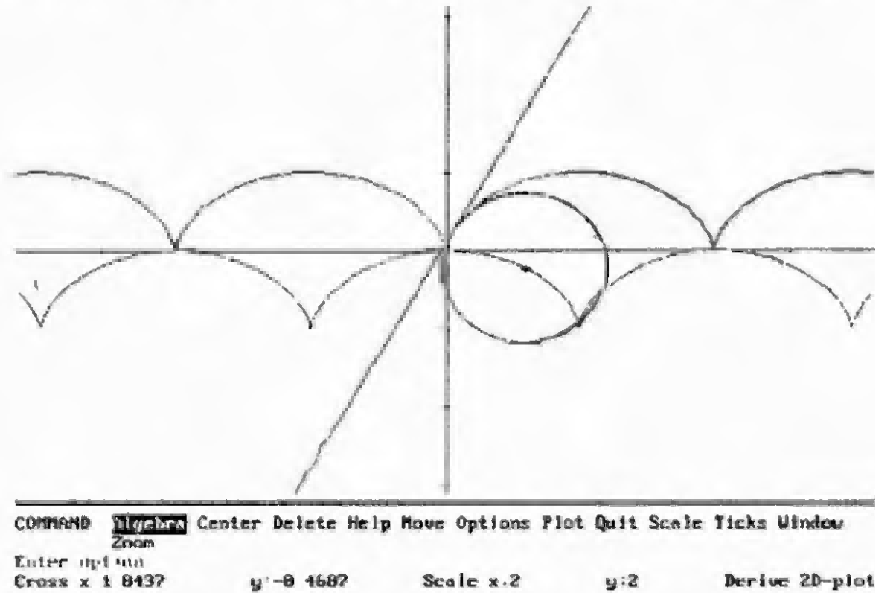


Fig. 26. Gráfica de la cicloide, su evoluta y su círculo osculador en $t=1$

Observemos que al reemplazar el valor de t por 1 en la fórmula de los centros de curvatura, obtenemos el punto $(1.84147, -0.459697)$, que al representarlo gráficamente queda exactamente sobre la evoluta de la cicloide.

3.8 Explorando y Visualizando Transformaciones Conformes

Sea C el conjunto de los números complejos. Sea $M: C \rightarrow C$

Consideremos la función $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$, con $z = x + iy$

llamada la transformación de Möbius. Representemos una familia de rectas paramétricas, de la forma $x(t) = a + (c-a)t$, $y(t) = b + (d-b)t$, como en los pasos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 de la figura 26. Representemos también las circunferencias, con centro en el origen, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por 13, 14, 15, 16, 17 de la figura siguiente.

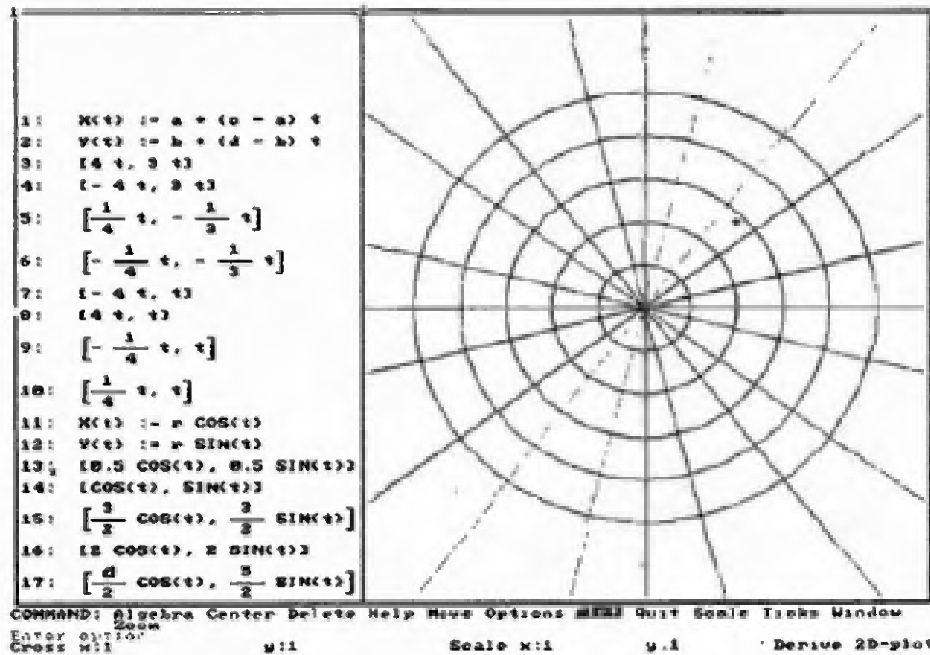


Fig. 27. Representación de rectas y círculos en el plano xy

Representemos ahora las transformadas de Möbius para cada una de estas rectas y círculos. Esto se puede hacer rápidamente debido a la capacidad de los sistemas computacionales de resolver operaciones y representar gráficas. Para encontrar la

transformada se utiliza **Manage Substitute** sobre la función de Mobius para el valor z y luego se selecciona **Simplify** para resolverla. La representación gráfica de cada una de estas transformadas, escritas en forma paramétrica, aparece en la siguiente figura:

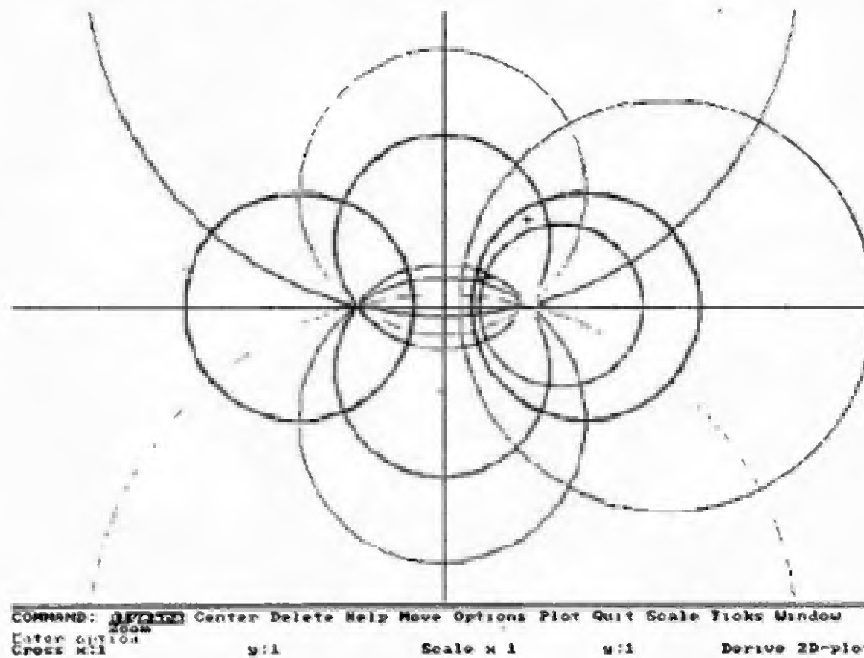


Fig. 28. Representación de las imágenes bajo M de las rectas y los círculos de la figura 26

En este momento, podemos motivar el poder de análisis de los alumnos sugiriendo interrogantes como las siguientes:

- a ¿Qué puede usted decir sobre el hecho de que las líneas sólo tienen un punto en común mientras que sus imágenes bajo M tienen dos puntos en común?
- b ¿Qué puede usted decir de los ángulos que se forman entre las imágenes de las rectas y los círculos?

- c. Al graficar dos líneas rectas que se interceptan y representar sus imágenes bajo M , ¿qué relación hay entre estos ángulos que se forman?

Al hacer esta representación, como en la figura siguiente.

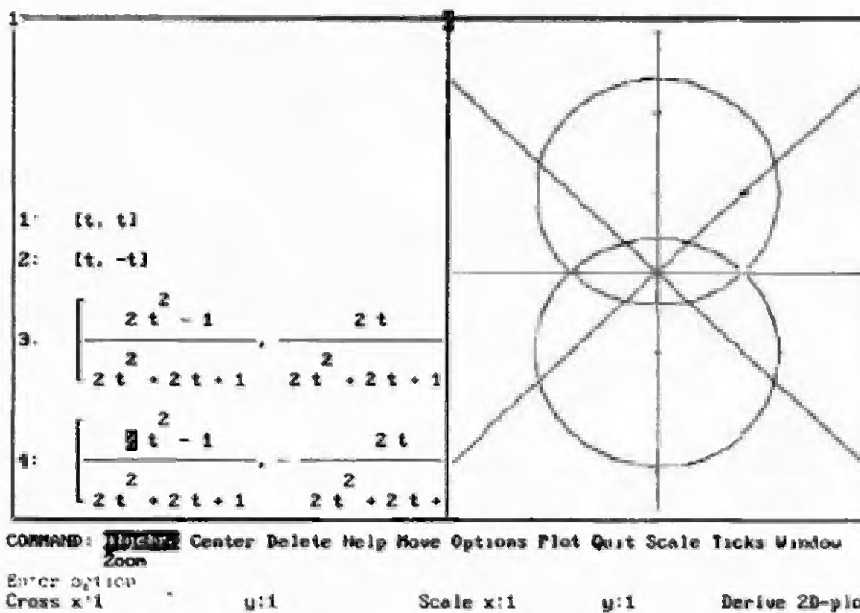


Fig. 29. Representación de dos rectas perpendiculares y sus respectivas imágenes

el alumno podrá descubrir que esta transformada preserva los ángulos entre las rectas y sus imágenes

CONCLUSIONES

- 1 Los sistemas computacionales simbólicos son de gran beneficio a la educación, ya que:
 - Facilitan el trabajo arduo y mecánico liberando al estudiante de presiones de tiempo al resolver un problema, condición que podría disminuir el alto grado de aversión hacia las matemáticas
 - Ofrecen la oportunidad de explorar por sí mismo conceptos y relaciones matemáticas; creando un ambiente que permite enfocar la matemática como una materia exploratoria viva y no como una descripción de trabajo pasado
 - Permiten la visualización gráfica y simbólica de un problema, a la vez, condición que facilita la modelación de situaciones abstractas a partir de observaciones de casos particulares.
- 2 La implementación de laboratorios en los cursos de matemática es necesaria. A través de este enfoque garantizamos que el alumno ejerza actividad sobre la computadora experimentando y descubriendo sus propios conceptos.
3. La confección de un informe de laboratorio estimula el pensamiento reflexivo de los alumnos y nos indica el nivel de comprensión que han logrado obtener sobre un determinado concepto.

RECOMENDACIONES

1. **Divulgar la utilización de los sistemas computacionales como herramienta didáctica**
2. **Promover seminarios de divulgación sobre el uso de los sistemas computacionales simbólicos, sus capacidades y limitaciones en algunas áreas**
3. **Formar grupos de investigación sobre las capacidades didácticas de los sistemas computacionales simbólicos en distintas áreas de la matemática**
4. **Crear una comisión encargada de solicitar, a las autoridades competentes, la instalación de un salón para laboratorio para la Escuela de Matemática**
5. **Implementar sesiones de laboratorio con los estudiantes en cursos de la Licenciatura de Matemática, como Cálculo, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales.**

BIBLIOGRAFÍA

1. ARNEY, David “Exploring Calculus with DERIVE”. Adison-Wesley Publishing Company. New York.
2. BERRY, J., GRAJAM, E y WATKINS, A J. P. Learning mathematics through DERIVE ELLIS Horwood. New York. 1993
3. CHÁVEZ R. Hector . “Hacia una comprensiva de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas usando la microcomputadora” Memorias de la quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Honduras, 1991.
- 4 CHÁVEZ R. Hector y otros “Un nuevo acercamiento a la enseñanza del Cálculo Diferencial en la propuesta del cambio curricular dentro de la UAEM”. Memorias de la Septima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa Panamá, 1993
5. CHÁVEZ R , Hector y otros “Obtención de la fórmula del área de figuras planas a través del programa computacional Capri Geomere”. Memorias de la Septima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa Panamá, 1993.
- 6 CHURCHILL, Ruel V y WARD B , James “Variable compleja y aplicaciones” Mc Graw-Hill Cuarta edición México, 1990
7. DE FARIA C , Edison “Cálculo diferencial e integral con apoyo de la calculadora HP-48”. Memorias de la Septima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa Panamá, 1993.

8. DIÁZ G., José L. “Un curso para la enseñanza de las matemáticas a través de la microcomputadora. Diseño de experiencias de aprendizaje”. Memorias de la quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Honduras, 1991.
9. GARCÍA, Alfonsa, MIÑANO, Rubio, RINCÓN, Félix. Using DERIVE to teach mathematics for computer science students Madrid. España.
- 10 GORMAN, Richard Introducción a Piaget Una guía para maestros Editorial Paidós Barcelona, 1986
11. GROSSMAN, Stanley I. “Álgebra lineal con aplicaciones” Mc Graw-Hill Tercera Edición México, 1992
- 12 JIMENEZ R, Liliana, ARCE S, Carlos L. “Manipulando gráficos de funciones en un ambiente LogoWr” Memorias de la séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Panamá, 1993
13. JIMENEZ R, José R., BIELI, Yury A. “La calculadorización de la enseñanza de las matemáticas posibilidad, necesidad e inestabilidad” Memorias de la quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa Honduras, 1991
14. LEINBACH, L. Carl. “Using a symbolic Computation system in a laboratory calculus course”. The Laboratory Approach to Teaching -Calculus, MAA Notes. Volume 20. The Mathematics
15. SCOTT, Patrick “Las computadoras y la enseñanza de las matemáticas”. Revista Educación Matemática. Vol 2 N° 1. Editorial Iberoamérica. México, 1990.

16. SISKI, Repo. "Understanding and Reflexive Abstraction: Learning the concept of derivate in the computer enviroments. University of Joensuu. U.S.A ,1990.
17. SMITH, David A. "Questions for the Future: What About the Horse?". M.M.A Notes 24, 1992.
18. STAINER, "Computadoras y psicología educativa". PC World. 1994.
19. TRIGUEROS, María; ALDANA, Silvia. "Representación paramétrica de curvas". Memorias de la quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educatva Honduras, 1991
20. WENZELBURGER G., Elfriede. "Ambientes gráficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en matemáticas" Revista Educación Matemática Vol 3. Nº 2 Editorial Iberoamérica. México, 1991.
21. SOFT WAREHOUSE INC. User Manual DERIVE Versión 2.5. A Mathematical Assistant for your Personal Computer. Honolulu, U.S.A.
22. THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMÉRICA. "The Laboratory approach to Calculus" M.M.A. U.S.A., 1992
23. THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMÉRICA. "Symbolic Computation in Undergraduate". M.M.A. U.S.A., 1992.