UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA

EL ESPACIO DE HILBERT l^2 Y SUS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS

TEMÍSTOCLES ZEBALLOS MITRE

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ
2011

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología
Programa de Maestría en Matemática

TESIS
Sometida para optar al título de Maestría en Matemática.

El estudiante: **Temístocles Zeballos Mitre** Cédula N° 9-700-920.

Título de la Tesis:
"El Espacio de Hilbert l^2 y sus propiedades Topológicas"

APROBADO POR:

Jorge Hernández

Doctor Jorge Hernández,
Presidente

Jaime Gutiérrez

Doctor Jaime Gutiérrez,
Miembro

Doctor Rogelio Rosas,
Miembro

REFRENDADO POR:

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 2 de diciembre de 2011

DEDICATORIA

Con mucho amor y respeto dedico este trabajo

A mis hijos ***Yanina Yarelí***, ***Yarelí Yanina***, ***Temístocles***, y a mi esposa ***Yanina***, por haberme rodeado de amor y compresión

A mis padres ***Temístocles*** y ***Esther María***, quienes con sus esfuerzos y amor contribuyeron para lograr esta meta

Asimismo, a mis hermanas, sobrinos, tíos, abuelos y demás personas que con su apoyo me han ayudado a superarme

AGRADECIMIENTO

A Dios nuestro padre por darnos la oportunidad de vivir y de hacer realidad este sueño

Al ***Dr. Jorge Hernández*** quién además de asesorarme, me brindó su amistad en la cual encontré el apoyo suficiente para lograr muy felizmente la culminación de este trabajo

A los demás profesores del programa de Maestría en Matemática, por todos los conocimientos que me ofrecieron

Eternamente Agradecido.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En esta investigación presentamos los resultados más importantes sobre los espacios L^p, los cuales son fundamentales en muchas ramas del análisis moderno. Como un caso especial y muy importante incluimos el espacio de sucesiones l^p. Mostramos algunos resultados de los espacios de Hilbert, que serán utilizados posteriormente para la construcción de una biyección no lineal y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua en todas partes Probaremos que todo espacio de Hilbert de dimensión infinita separable H es isométricamente isomorfo a l^2 También probaremos que los espacios L^p y l^p son homeomorfos entre ellos. Utilizando la función de Mazur, probaremos que existe una función biyectiva y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua no acotadamente en todas partes Finalmente, determinaremos una familia no enumerable disjunta dos a dos de subconjuntos densos y convexos de l^2, lo cual marca una diferencia entre los espacios de Hilbert de dimensión finita y los espacios de Hilbert de dimensión infinita.

ABSTRACT

This work presents the most important results about the L^p spaces, which are fundamental to many areas of modern analysis The space of sequences l^p is included as a special and very important case Some results of Hilbert spaces are shown, which will later be used to construct a non-linear, continuous bijection from l^2 onto a subset of l^2 whose inverse is everywhere discontinuous It will be proven that every separable infinite dimensional Hilbert space H is isometrically isomorphic to l^2 It will also be proven that the space L^p and l^p are homeomorphic Mazur's function will be used to prove the existence of a continuous bijective from l^2 onto a subspace of l^2 whose inverse is everywhere unboundedly discontinuous Finally, an uncountable, mutually disjoint family of dense and convex subsets of l^2 is determined This marks a difference between finite and infinite dimensional Hilbert spaces

INTRODUCCIÓN

Probablemente el más útil y sin duda uno de los mejores desarrollos matemáticos, es el de la teoría de espacios de Hilbert como una generalización de la teoría de espacios con producto interno de dimensión finita Toda esta teoría alcanza su belleza y madurez a partir de los métodos de dimensión finita Las nociones de ortogonalidad y de conjunto ortonormal completo se pueden definir de manera natural e incluso los pasos constructivos del proceso de Gram-Schmidt se pueden realizar fácilmente Sin embargo, situaciones fundamentalmente diferentes suceden en el caso infinito-dimensional, sólo para ilustrar las posibilidades, mencionamos, por ejemplo que el inverso del operador lineal acotado $T-\lambda I$ puede existir pero ser no acotado, que no existe una generalización útil del concepto de determinante, y por ende, de la ecuación característica, que un operador lineal acotado puede no tener valores propios, que existen espacios de Hilbert con una cantidad no enumerable de subconjuntos densos y convexos disjuntos dos a dos

Un importante espacio de Hilbert, que recuerda en su aspecto al espacio de coordenadas de dimensión finita, es el espacio de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales o complejos para las que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge Éste es el espacio de Hilbert l^2 el cual es el centro de nuestra investigación Exploramos la geometría de l^2 que es isométricamente isomorfo a cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita Probamos que existe una colección no enumerable mutuamente disjunta de subespacios afines de l^2, cada uno denso y convexo en l^2. Y construimos una función que mapea l^2 homeomórficamente a la unión de estos subespacios afines. También, probamos que existe una función no lineal biyectiva y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua no acotadamente en todo punto. Finalmente, estudiamos algunas propiedades geométricas de las esferas $S(x,r)=\{y\in l^2:\|x-y\|_2=r\}$ de l^2.

CAPÍTULO I
LOS ESPACIOS L^p

I. LOS ESPACIOS L^p.

El propósito de este capítulo es presentar los resultados más importantes sobre los espacios L^p, los cuales son fundamentales en muchas ramas del análisis moderno Como un caso especial y muy importante incluimos el espacio de sucesiones l^p Mostramos algunos resultados de los espacios de Hilbert que serán utilizados posteriormente para la construcción de una biyección no lineal continua cuya inversa es discontinua en todas partes Supondremos conocida toda la teoría relacionada con los espacios normados, espacios con producto interno, operadores lineales acotados y los espacios de medida, sin embargo, presentaremos algunas demostraciones, las cuales facilitarán la comprensión del presente trabajo

1.1 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO.

Si X es un espacio con producto interno, escribiremos el producto interno de $x, y \in X$ como $\langle x, y\rangle$ y la norma inducida por este producto interno como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (donde el cuerpo de los escalares, denotado por $\mathbb{F}$, puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) Entre las propiedades que satisface la norma inducida se encuentra la Ley del Paralelogramo

Teorema 1.1.1 (Ley del Paralelogramo): Sea $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno Entonces

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

para todo $x,y\in X$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\
&= \langle x,x+y\rangle+\langle y,x+y\rangle+\langle x,x-y\rangle+\langle -y,x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle+\langle x,-y\rangle+\langle -y,x\rangle+\langle -y,-y\rangle \\
&= \|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2 \\
&= 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).
\end{aligned}$$

Lema 1.1.1: Sean X un espacio con producto interno, $x,y,z\in X$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. Entonces,

$a)$ $\langle 0,y\rangle=\langle x,0\rangle=0.$

$b)$ $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle.$

$c)$ $\langle \alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y\rangle=|\alpha|^2\langle x,x\rangle+\alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle+\beta\overline{\alpha}\langle y,x\rangle+|\beta|^2\langle y,y\rangle.$

Demostración:

$a)$
$$\begin{aligned}
\langle 0,y\rangle &= \langle 0\cdot 0,y\rangle \\
&= 0\langle 0,y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\langle x,0\rangle &= \overline{\langle 0,x\rangle} \\
&= \overline{0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \langle x, \alpha y+\beta z\rangle &= \overline{\langle \alpha y+\beta z, x\rangle} \\
&= \overline{\langle \alpha y, x\rangle + \langle \beta z, x\rangle} \\
&= \overline{\alpha\langle y, x\rangle} + \overline{\beta\langle z, x\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle z, x\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\quad \langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle &= \overline{\alpha}\langle \alpha x+\beta y, x\rangle + \overline{\beta}\langle \alpha x+\beta y, y\rangle \qquad \text{Por } (b) \\
&= \overline{\alpha}\left[\langle \alpha x, x\rangle + \langle \beta y, x\rangle\right] + \overline{\beta}\left[\langle \alpha x, y\rangle + \langle \beta y, y\rangle\right] \\
&= \overline{\alpha}\left[\alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle y, x\rangle\right] + \overline{\beta}\left[\alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, y\rangle\right] \\
&= \overline{\alpha}\,\alpha\langle x, x\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle + \beta\overline{\beta}\langle y, y\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle y, x\rangle + |\beta|^2\langle y, y\rangle .
\end{aligned}
$$

Lema 1.1.2: Sea X un espacio con producto interno y sean $x, y \in X$

Entonces,

$a)$ $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ para todo $x, y \in X$.

$b)$ La función $\|\cdot\| \cdot X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es una norma en X

Demostración:

$a)$ Si $x=0$ ó $y=0$ el resultado es obvio Supongamos que tanto x como y son diferentes de cero

Por la parte (c) del Lema 1.1.1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha\langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle
\end{aligned}
$$

Tomando

$$\alpha = -\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle},$$

obtenemos

$$0 \le \left| -\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle} \right|^2 \langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\overline{\langle x, x\rangle}} + \langle y, y\rangle$$

$$0 \le \frac{|\langle x, y\rangle|^2 \langle x, x\rangle}{|\langle x, x\rangle|^2} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle$$

$$0 \le \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle$$

$$\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} \le \langle y, y\rangle.$$

Por lo tanto,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Esta desigualdad la podemos escribir como

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \|x\|\|y\|,$$

la cual se llama ***desigualdad de Cauchy-Schwarz***.

$b)$

$N_1)$ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ge 0.$

$N_2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0.$

$N_3)$ $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle} \\
&= \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} \\
&= |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} \\
&= |\alpha|\|x\|.
\end{aligned}$$

$N_4)$ $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \quad \text{Por la parte } (c) \text{ del Lema 1.1 1} \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\Re e\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{Por } (a) \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Lema 1.1.3: Sea X un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces para todo $u, v, x, y \in X$

$a)$ $\langle u+v, x+y\rangle - \langle u-v, x-y\rangle = 2\langle u, y\rangle + 2\langle v, x\rangle.$

$b)$ $4\langle u, y\rangle = \langle u+v, x+y\rangle - \langle u-v, x-y\rangle + i\langle u+iv, x+iy\rangle - i\langle u-iv, x-iy\rangle.$

Demostración:

$a)$ $\langle u+v, x+y\rangle = \langle u, x+y\rangle + \langle v, x+y\rangle$

$$= \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle + \langle v, x\rangle + \langle v, y\rangle \quad (*)$$

$$\begin{aligned}\langle u-v,x-y\rangle &= \langle u,x-y\rangle+\langle -v,x-y\rangle\\ &= \langle u,x\rangle+\langle u,-y\rangle+\langle -v,x\rangle+\langle -v,-y\rangle\\ &= \langle u,x\rangle-\langle u,y\rangle-\langle v,x\rangle+\langle v,y\rangle \quad (**)\end{aligned}$$

Restando $(**)$ de $(*)$ obtenemos

$$\langle u+v,x+y\rangle-\langle u-v,x-y\rangle=2\langle u,y\rangle+2\langle v,x\rangle.$$

$b)$ Reemplazando v por iv y y por iy obtenemos

$$\begin{aligned}\langle u+iv,x+iy\rangle-\langle u-iv,x-iy\rangle &= 2\langle u,iy\rangle+2\langle iv,x\rangle\\ &= -2i\langle u,y\rangle+2i\langle v,x\rangle\end{aligned}$$

Multiplicando esta ecuación por i obtenemos

$$i\langle u+iv,x+iy\rangle-i\langle u-iv,x-iy\rangle=2\langle u,y\rangle-2\langle v,x\rangle \quad (***).$$

Sumando $(***)$ y la igualdad de la parte (a) obtenemos

$$4\langle u,y\rangle=\langle u+v,x+y\rangle-\langle u-v,x-y\rangle+i\langle u+iv,x+iy\rangle-i\langle u-iv,x-iy\rangle.$$

Teorema 1.1.2 (Identidad de Polarización): Sean X un espacio con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y norma inducida $\|\cdot\|$ Entonces para todo $x,y\in X$:

$a)$ Si X es real, entonces

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$$

$b)$ Si X es complejo, entonces

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2$$

Demostración:

$a)$ Haciendo $u = x$ y $v = y$ en la identidad de la parte (a) del Lema 1.1 3 y usando que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, obtenemos

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle &= 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle \\ &= 4\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$$

$b)$ Haciendo $u = x$ y $v = y$ en la identidad de la parte (b) del Lema 1.1 3 obtenemos.

$$\begin{aligned}4\langle x, y\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle \\ &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.\end{aligned}$$

Teorema 1.1.3: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado tal que, para todo $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Entonces $\|\cdot\|$ es inducida por un producto interno

Demostración: En el caso de que el espacio normado es real, el producto interno se define por

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

En el caso de que el espacio normado es complejo, el producto interno se define por

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] + \frac{i}{4}\left[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right].$$

Es algo rutinario probar (ver [58]) que, en efecto, estos son productos internos, y que la norma dada proviene de este producto interno.

Lema 1.1.4: Sea X un espacio con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Entonces la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ es continua

Demostración: Es suficiente probar que, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ en X, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle \text{ en } \mathbb{F}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Como $\{x_n\}$ es convergente, $\|x_n\|$ es acotada, digamos $\|x_n\| \le M$ para todo n Entonces, dado $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que, para $n \ge N$,

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2M+1} \quad \text{y} \quad \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2\|y\|+1}.$$

Entonces, si $n \ge N$,

$$
\begin{aligned}
\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| &\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2M+1}M + \|y\|\frac{\varepsilon}{2\|y\|+1} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$$

y

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F} \text{ es continua}$$

1.2 ESPACIOS L^p

Definición 1.2.1: Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible real o compleja (posiblemente de valor infinito) definida sobre el espacio X. Para cualquier $0 < p < \infty$ la función $|f|^p$ es medible Definimos la $p-norma$ de f por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación: Para $0 < p < 1$ la $p-norma$ no es una norma, ya que no se satisface la desigualdad triangular (ver [45]) Para $1 \le p < \infty$ la $p-norma$ es una norma en L^p, si se supone que

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \mu - c.t.p..$$

Definición 1.2.2: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Denotaremos por $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ o simplemente $L^p(\mu)$ la colección de todas las funciones medibles f de valor real o complejo definidas sobre X tal que $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$, es decir, las funciones que tienen una $p-norma$ finita

Definición 1.2.3: Por l^p, denotamos la colección de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ de números reales (o complejos) tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

Observación: Los espacios l^p $(1 \leq p < \infty)$ son casos particulares de los espacios L^p Son precisamente los espacios L^p tomados sobre el espacio de medida $\mathbb{N}$ con la medida de conteo μ Estos espacios son de dimensión infinita

Las herramientas básicas en el estudio de los espacios L^p para $1 \leq p < \infty$ son las desigualdades de Holder y Minkowski.

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Hölder):

$i)$ Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, sean p,q índices conjugados $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ y sean $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Entonces el producto fg es integrable y

$$\int_X |f\,g|\,d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

La desigualdad es estricta salvo en el caso cuando existan constantes c_1, c_2 $(c_1c_2 \neq 0)$ tal que $c_1|f|^p = c_2|g|^q$ $\mu - c.t.p.$

ii) Para cualesquiera números $x_1, \cdots, x_n, \cdots;$ $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q < \infty$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 1.2.2 (Desigualdad de Minkowski)

i) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$ Para todo par de funciones $f, g \in L^p(\mu)$ se tiene que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

La desigualdad es estricta salvo en el caso cuando existan constantes no negativas c_1, c_2 $(c_1c_2 \neq 0)$ tal que $c_1 f = c_2 g$ $\mu - c.t.p.$

ii) Para cualesquiera números $x_1, \cdots, x_n, \cdots;$ $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

se tiene que

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Teorema 1.2.3: Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida Los espacios $L^p(\mu)$ para $1\leq p<\infty$ con la norma $\|f\|_p$ son espacios de Banach.

Demostración: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ Podemos pasar a una subsucesión tal que

$$\left\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right\|_p<2^{-i} \text{ para } i=1,2,3,\cdots$$

Escribamos

$$g_k=\sum_{i=1}^{k}\left|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right|$$

y

$$g=\lim_{k\to\infty} g_k=\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right|.$$

Note que la función g se define en todas partes, pero puede ser infinita Por la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\begin{aligned}\|g_k\|_p&\leq\sum_{i=1}^{k}\left\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right\|_p\\&\leq\sum_{i=1}^{k}2^{-i}<1.\end{aligned}$$

Luego, por el Lema de Fatou, tenemos

$$\begin{aligned}\int_X|g|^p d\mu&\leq\lim_{k\to\infty}\inf\int_X|g_k|^p d\mu\\&\leq 1.\end{aligned}$$

En particular, $g(x)<\infty$ $\mu-c.t.p.$ en X y, por consiguiente, el límite

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) \\ &= f_{n_1}(x)+\sum_{i=1}^{k}\left(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)\right) \end{aligned}$$

proporciona un valor finito para μ-casi en todo punto $x\in X$, ya que la serie converge absolutamente Podemos definir $f(x)=0$ en todos los otros puntos, y esto da una función medible de valor finito definida en todas partes sobre el espacio X

Esta es nuestra candidata para el límite de la sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sea $\varepsilon>0$, y elijamos N lo suficientemente grande tal que

$$\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon \text{ para todo } m,n\geq N$$

Fijemos $m\geq N$, y apliquemos el Lema de Fatou a la sucesión $\{f_{n_i}\}$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_X |f-f_m|^p d\mu &\leq \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_{n_i}-f_m|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Esto da la $p-norma$ estimada $\|f-f_m\|_p\leq\varepsilon$ para todo $m\geq N$

Por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \|f-f_m\|_p+\|f_m\|_p \\ &<\infty, \end{aligned}$$

y así, f es un miembro del espacio L^p y evidentemente

$$\lim_{m\to\infty}\|f-f_m\|_p=0.$$

Así pues, $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach

Teorema 1.2.4: Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida finita, y suponga que $1 \leq p < q \leq \infty$ Entonces

$$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$$

Demostración: Claramente, en este caso $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ se satisface para cada $1 \leq p < \infty$.

Así, supongamos que $1 \leq p < q < \infty$

Sea

$$r = \frac{q}{p} > 1,$$

y entonces elijamos $s > 1$ tal que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

Si $f \in L^q(\mu)$, entonces claramente,

$$|f|^p \in L^r(\mu).$$

Como la función constante 1 pertenece a $L^s(\mu)$ y $\mu(X) < \infty$, de la desigualdad de Holder tenemos que

$$|f|^p = |f|^p \cdot 1 \in L^1(\mu) \quad \text{Esto es, } f \in L^p(\mu)$$

Teorema 1.2.5: Si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $l^p \subseteq l^q$. Además, la inclusión es propia.

Demostración: Note que si $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$ pertenece a algún espacio l^p con $1\leq p<\infty$, entonces $\{x_n\}$ necesariamente es una sucesión acotada (realmente, convergente a cero), y por lo tanto, $x\in l^\infty$. Esto es, $l^p\subseteq l^\infty$ se satisface para todo $1\leq p<\infty$

Así, supongamos que $1\leq p<q<\infty$. Sea $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty,$$

existe algún k tal que $|x_n|<1$ para todo $n\geq k$.

Esto implica que

$$|x_n|^q\leq|x_n|^p \text{ para todo } n\geq k,$$

y por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q<\infty \text{ (por el criterio de comparación)}$$

Así,

$$x\in l^q \text{ y } l^p\subseteq l^q$$

Para la última parte, tomemos $x_n=n^{-\frac{1}{p}}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|n^{-\frac{1}{p}}\right|^q\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{q}{p}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{q}{p}}}\\&<\infty, \quad \text{ya que } \frac{q}{p}>1.\end{aligned}$$

Así, $\{x_n\} \in l^q$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|n^{-\frac{1}{p}}\right|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Así, $\{x_n\} \notin l^p$

1.3 LOS ESPACIOS L^2 Y l^2.

Los espacios L^2 y l^2 juegan un papel muy especial en nuestra investigación Examinaremos la estructura de estos espacios y veremos la forma en que se distinguen del resto de los espacios de funciones, lo cual nos lleva al mundo de los espacios de Hilbert

Definición 1.3.1: Sea X un espacio con producto interno X es un espacio de Hilbert si X con la norma inducida por el producto interno es un espacio de Banach Es decir, si d es la métrica inducida por la norma en X, inducida a su vez por el producto interno, entonces (X,d) es completo

Teorema 1.3.1: El espacio l^p con $p \neq 2$ no es un espacio con producto interno, por lo tanto, el espacio l^p con $p \neq 2$ no es un espacio de Hilbert

Demostración: Consideremos el espacio normado $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$.

Tomemos

$$x, y \in l^p, \quad x = (1,1,0,0,0,\cdots), \quad y = (1,-1,0,0,0,\cdots)$$

Luego,

$$x + y = (2,0,0,0,\cdots) \text{ y } x - y = (0,2,0,0,0,\cdots)$$

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(1^p + 1^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|y\|_p &= \left(\sum |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(1^p + 1^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|x+y\|_p &= \left(2^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2. \\ \|x-y\|_p &= \left(2^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \\ 4+4 &= 2\left[2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right] \\ 8 &= 2\left[2\left(2^{\frac{2}{p}}\right)\right] \\ 8 &= 4\left(2^{\frac{2}{p}}\right) \\ 2 &= 2^{\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1 = \tfrac{2}{p} \Rightarrow p = 2$$

Así, la ley del paralelogramo no se satisface en l^p para $p \neq 2$ Esto implica que la norma $\|\cdot\|_p$ no proviene de un producto interno para $p \neq 2$.

Observación: Ningún $l^p\,(p \neq 2)$ es un espacio con producto interno Sin embargo, l^p es completo; por lo tanto, l^p con $p \neq 2$ es un espacio de Banach que no es un espacio de Hilbert

1.3.1 EL ESPACIO L^2.

Definición 1.3.2: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Denotamos por $L^2 = L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ el conjunto de todas las funciones medibles Lebesgue f de valor real o complejo definidas sobre X tal que $\int_X |f|^2\, d\mu < \infty$, donde la integral se entiende en el sentido de Lebesgue

Observación: Estamos operando con clases de equivalencia de funciones, es decir, cada $f \in L^2$ consiste de una familia de funciones, cada par de las cuales son iguales casi en todas partes con respecto a la medida de Lebesgue En el caso especial $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathrm{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo, L^2 se convierte en el espacio l^2 de sucesiones $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales o complejos tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$

Teorema 1.3.2: La función

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{F}$$
$$\langle f,g \rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

es un producto interno sobre $L^2(X)$

Demostración: Sean $f,g \in L^2(X)$ Entonces por el Teorema 1 2 1, con $p=q=2$ y por la Definición 1 3 2, tenemos

$$\int_X |f\,\overline{g}|\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$< \infty.$$

Así, $f\,\overline{g} \in L^1(X)$

y la fórmula

$\langle f,g \rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$ está bien definida

Además,

$i)$ $\langle f,f \rangle = \int_X |f|^2 d\mu \geq 0$

$ii)$ $\langle f,f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^2 d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad c.t.p.$

$iii)$ $$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_X (\alpha f + \beta g)\overline{h}\,d\mu \\ &= \alpha \int_X f\,\overline{h} + \beta \int_X g\,\overline{h} \\ &= \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle g,h \rangle. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
iv)\quad \langle f,g\rangle &= \int_X f\,\overline{g}\,d\mu \\
&= \overline{\int_X g\,\overline{f}\,d\mu} \\
&= \overline{\langle g,f\rangle}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $(L^2(X),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno

Teorema 1.3.3: El espacio $L^2([a,b])$ es un espacio de Hilbert

Demostración Consideremos el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido en el Teorema 1 3 2 Entonces

$$\langle f,f\rangle = \int_X |f|^2 dx = \|f\|_2^2$$

Lo que implica que $\|f\|_2$ es la norma inducida por el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Así pues, por el Teorema 1 2 3, $(L^2([a,b]),\|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert

1.3.2 EL ESPACIO l^2.

Definición 1.3.3: Denotamos por l^2 al espacio de todas las sucesiones de números reales o complejos $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$ es finita

El espacio l^2 es un ejemplo clásico de un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

El espacio l^2 es un espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\} \quad \text{y} \quad \lambda\{x_n\}=\{\lambda x_n\}$$

Note que, estas operaciones están bien definidas, ya que por la desigualdad triangular en $\mathbb{F}^N$ con la norma euclideana,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n+y_n|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}\\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}\end{aligned}$$

para todo N, porque

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2$$

convergen, y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^2 \text{ converge, así que } \{x_n+y_n\}\in l^2$$

Similarmente, $\{\lambda x_n\}\in l^2$, y no es difícil verificar que estas operaciones satisfacen los axiomas de un espacio vectorial

Teorema 1.3.4: La función $\langle\cdot,\cdot\rangle : l^2\times l^2 \to \mathbb{F}$ definida por

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n$$

es un producto interno y la norma inducida por este producto interno es

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle\{x_n\},\{x_n\}\rangle} &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{x}_n}\\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\\ &= \|\{x_n\}\|_2 .\end{aligned}$$

Demostración: Note que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{F}^N$, si $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in l^2$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|x_n y_n| &\le \sqrt{\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|y_n|^2}\\ &\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}\end{aligned}$$

para todo N, por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_n$ converge absolutamente; por lo tanto, la función está bien definida

Probemos que es un producto interno

Sean $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\} \in l^2, \lambda \in \mathbb{F}$.

i) $\langle\{x_n\},\{x_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \ge 0$, y es 0 si y sólo si $x_n = 0$ para todo n; o sea, $\{x_n\} = \{0\}$

ii) Para todo N, $\sum_{n=1}^{N} x_n\overline{y}_n = \overline{\sum_{n=1}^{N} y_n\overline{x}_n}$, lo que demuestra que, en el límite,

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle = \overline{\langle\{y_n\},\{x_n\}\rangle}$$

iii) Como todas las series siguientes son convergentes, tenemos

$$\begin{aligned}\langle\{x_n\}+\{y_n\},\{z_n\}\rangle &= \langle\{x_n+y_n\},\{z_n\}\rangle\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)\,\overline{z}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n\,\overline{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,\overline{z}_n\\ &= \langle\{x_n\},\{z_n\}\rangle + \langle\{y_n\},\{z_n\}\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle \lambda\{x_n\},\{y_n\}\rangle &= \langle \{\lambda x_n\},\{y_n\}\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n \bar{y}_n \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \\ &= \lambda \langle \{x_n\},\{y_n\}\rangle .\end{aligned}$$

Teorema 1.3.5: l^2 es un espacio de Hilbert

Demostración: A pesar de que este resultado es consecuencia inmediata de los Teoremas 1.2.3 y 1 3.4, presentaremos una demostración independiente

En efecto, sea $\{A_k\}$ una sucesión en l^2. Escribiremos cada $A_k = \{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$, donde el índice de cada sucesión A_k lo hemos escrito como superíndice. Probaremos que, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge Recuerde que la norma $\|\cdot\|$ inducida por el producto interno está dada por $\|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$

Primeramente, para cada n y cada k,

$$|x_k^n| \le \|A_k\|,$$

y por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n| < \infty$$

Así, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^n$ converge para cada n, digamos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^n = x^n$

Probemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge a la sucesión $\{x^n\}$ en l^2

Verifiquemos que $\{x^n\} \in l^2$ Para cada n, sea $s_k^n = \sum_{l=1}^{k} x_l^n$ la $k-ésima$ suma parcial de cada serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^n$ Como cada $s_k^n \to x^n$, para cada N podemos encontrar k tal que

$$\left|x^n - s_k^n\right| < \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{ para } n = 1, \cdots, N$$

Luego,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|x^n\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|x^n - s_k^n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|s_k^n\right|^2}$$

Por la selección de k tenemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|x^n - s_k^n\right|^2} &< \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sea $M = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|s_k^n\right|^2} &= \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|\sum_{l=1}^{k} x_l^n\right|^2} \\ &\leq \sum_{l=1}^{k} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left|x_l^n\right|^2} \end{aligned}.$$

$$\le \sum_{l=1}^{k} \|A_l\|$$
$$\le M.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{N} |x^n|^2 \le (1+M)^2$$

y, como N es arbitrario, $\{x^n\} \in l^2$.

Sea

$$s_k = \sum_{l=1}^{k} A_l \text{, la } k-ésima \text{ suma parcial de } \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos K tal que, para $k \ge K$,

$$\sum_{l>k} \|A_l\| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Tal K existe porque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty .$$

Probemos que, para $k \ge K$,

$$\left\| s_k - \{x^n\} \right\| < \varepsilon$$

Sea $k \ge K$, y tomemos $N \in \mathbb{N}$ Escogemos $p > k$ tal que, para cada $n = 1, \cdots, N$,

$$\left| s_p^n - x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{N}}$$

Tal p existe porque $s_l^n \to x^n$ cuando $l \to \infty$ para cada n (note que p depende de N) Entonces

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_k^n - x^n\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_k^n - s_p^n\right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_p^n - x^n\right|^2}$$

Por la selección de p, el segundo sumando puede ser estimado por

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_p^n - x^n\right|^2} < \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon^2}{4N}}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para el primero,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_k^n - s_p^n\right|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{k<l\leq p} x_l^n\right|^2}$$
$$\leq \sum_{k<l\leq p}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|x_l^n\right|^2}$$
$$\leq \sum_{k<l\leq p}\left\|A_l\right\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2},$$

porque $k \geq K$ Entonces,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left|s_k^N - x^n\right|^2} < \varepsilon,$$

y como N es arbitrario,

$$\left\|s_k - \{x^n\}\right\| < \varepsilon.$$

Así, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ es convergente. Esto implica que l^2 es completo, es decir, l^2 es un espacio de Hilbert

1.4 ORTOGONALIDAD

Definición 1.4.1: Sea X un espacio con producto interno Los vectores $x,y\in X$ son ortogonales y lo denotamos por $x\perp y$ si $\langle x,y\rangle=0$. Similarmente, si $A,B\subset X$,

$$x\perp A\Leftrightarrow\langle x,a\rangle=0 \text{ para todo } a\in A$$

y

$$A\perp B\Leftrightarrow\langle a,b\rangle=0 \text{ para todo } a\in A \text{ y para todo } b\in B$$

Definición 1.4.2: Sean X un espacio con producto interno y $M\subset X, M\neq\varnothing$ M es un conjunto ortogonal si $\langle x,y\rangle=0$ para todo $x,y\in M$, $x\neq y$

Definición 1.4.3: Sean X un espacio con producto interno y $A\subset X$, $A\neq\varnothing$ El complemento ortogonal de A se denota por $A^{\perp}$ y se define por

$$\begin{aligned}A^{\perp}&=\{x\in X/\langle x,a\rangle=0 \quad \text{para todo } a\in A\}\\&=\{x\in X/x\perp A\}.\end{aligned}$$

Teorema 1.4.1: Sean X un espacio con producto interno y $A,B\subset X$. Entonces:

1) $0\in A^{\perp}$

2) Si $0\in A$, entonces $A\cap A^{\perp}=\{0\}$

3) $\{0\}^{\perp}=X$ y $X^{\perp}=\{0\}$.

4) Si A contiene una bola abierta $B(a,R)$, entonces $A^{\perp}=\{0\}$

5) Si $A\subset B$, entonces $B^{\perp}\subset A^{\perp}$.

6) $A^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X

7) $A\subset A^{\perp\perp}$

Demostración:

1) Como $\langle 0,a\rangle=0$ para todo $a\in A$ entonces $0\in A^{\perp}$

2) Supongamos que $A\cap A^{\perp}=\{x\}, \quad x\neq 0$ Entonces,

$$x\in A \text{ y } x\in A^{\perp}$$

Luego,

$$x\in A \text{ y } \langle x,a\rangle=0 \text{ para todo } a\in A$$

Por lo tanto,

$$\langle x,x\rangle=0 \text{, lo cual implica que } x=0$$

3) Es claro que.

$$\begin{aligned}\{0\}^{\perp}&=\{x\in X/\langle x,0\rangle=0\}\\&=X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^{\perp}&=\{y\in X/\langle x,y\rangle=0,\ \forall x\in X\}\\&=\{0\}.\end{aligned}$$

4) Por reducción al absurdo

Sea $x\in A^{\perp}, \quad x\neq 0$ y tomemos

$$y = \|x\|^{-1} x$$

Note que

$$z = a + \tfrac{1}{2} Ry \in B(a, R),$$

ya que

$$\|a + \tfrac{1}{2} Ry - a\| = \tfrac{1}{2} R \|y\| = \tfrac{1}{2} R < R.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle z, x \rangle, \quad \text{ya que } z \in A \text{ y } x \in A^{\perp} \\
&= \langle a + \tfrac{1}{2} Ry, x \rangle \\
&= \langle a, x \rangle + \langle \tfrac{1}{2} Ry, x \rangle \\
&= 0 + \tfrac{1}{2} R \langle y, x \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} R \left\langle \tfrac{x}{\|x\|}, x \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2} R \|x\|^{-1} \langle x, x \rangle.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $0 = \langle x, x \rangle$ y por lo tanto, $x = 0$; lo que es una contradicción.

5) Note que

$$B^{\perp} = \{x \in X : \langle x, b \rangle = 0, \quad \text{para todo } b \in B\}$$

y

$$A^{\perp} = \{x \in X : \langle x, a \rangle = 0, \quad \text{para todo } a \in A\}$$

Sea $x \in B^{\perp}$ y $a \in A$ Entonces $a \in B$ (ya que $A \subset B$)

Así,

$$\langle x, a \rangle = 0$$

Como esto se satisface para todo $a \in A$, tenemos que $x \in A^{\perp}$.

Por lo tanto,

$$B^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

6) Sea

$$y, z \in A^{\perp}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \text{y} \quad a \in A,$$

entonces

$$\langle \alpha y + \beta z, a \rangle = \alpha \langle y, a \rangle + \beta \langle z, a \rangle = 0$$

Así,

$$\alpha y + \beta z \in A^{\perp}$$

y por lo tanto, $A^{\perp}$ es un subespacio de X

Ahora, sea $\{x_n\}$ una sucesión en $A^{\perp}$ que converge a $x \in X$ Entonces, para cualquier $a \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \langle x - x_n, a \rangle \\ &= \langle x, a \rangle - \lim_{n \to \infty} \langle x_n, a \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

(ya que $\langle x_n, a \rangle = 0$ para todo n)

Así,

$$x \in A^{\perp}$$

y por lo tanto, $A^{\perp}$ es cerrado

7) Sea $a \in A$, entonces para todo $x \in A^{\perp}$,

$$\langle a,x\rangle = \overline{\langle x,a\rangle} = 0$$

Así,

$$a \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$$

Por lo tanto,

$$A \subset A^{\perp\perp}.$$

Note que:

$$\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{x \in X \,/\, \langle x,a\rangle = 0 \text{ para todo } a \in A^{\perp}\right\}$$

y

$a \in A^{\perp}$ significa que $a \in X$ tal que $\langle a,b\rangle = 0$ para todo $b \in A$

Definición 1.4.4: Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$ A es convexo si para todo $x,y \in A$ y para todo $\lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$; o equivalentemente, si para todo $\alpha,\beta \in [0,1]$ con $\alpha + \beta = 1$ se tiene que $\alpha x + \beta y \in A$.

Teorema 1.4.2: Sea Y un subespacio de un espacio con producto interno X. Entonces

$$x \in Y^{\perp} \Leftrightarrow \|x-y\| \geq \|x\| \quad \text{para todo } y \in Y$$

Demostración:

$\Rightarrow]$ Supongamos que $x \in Y^{\perp}$, entonces para cada $y \in Y$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&\geq \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Así,

$$\|x-y\| \geq \|x\| \quad \text{para todo } y \in Y$$

$\Leftarrow$] Supongamos que $\|x-y\| \geq \|x\|$ para todo $y \in Y$ Sea $y \in Y$, luego por hipótesis $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, de donde

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &\leq \|x+\alpha y\|^2 \\
&\leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\
&\leq \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2 \geq 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{F}$$

Supongamos que $\langle x, y\rangle \neq 0$ y tomemos

$$\alpha = -\frac{|\langle x, y\rangle|}{\langle y, x\rangle} t ,$$

con $t > 0$. Note que

$$\overline{\alpha} = -\frac{|\langle x, y\rangle|}{\langle x, y\rangle} t$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &\le -\frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle x,y\rangle} t\langle x,y\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,x\rangle} t\langle y,x\rangle + \left|\frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,x\rangle} t\right|^2 \|y\|^2 \\
0 &\le -|\langle x,y\rangle| t - |\langle x,y\rangle| t + t^2 \|y\|^2 \\
0 &\le -2|\langle x,y\rangle| t + t^2 \|y\|^2
\end{aligned}$$

De donde,

$$0 \le |\langle x,y\rangle| \le \tfrac{1}{2} t \|y\|^2, \quad \text{para todo } t > 0$$

y

$$0 \le |\langle x,y\rangle| \le \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{2} t \|y\|^2 = 0.$$

Así, $|\langle x,y\rangle| = 0$; por lo tanto, $\langle x,y\rangle = 0$, lo que es una contradicción. Así, $\langle x,y\rangle = 0$ para todo $y \in Y$. Por consiguiente, $x \in Y^{\perp}$

Teorema 1.4.3: Sean X un espacio con producto interno real, $x, y \in X$ Entonces, $x \perp y$ si y sólo si

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$\Rightarrow]$ supongamos que $x \perp y$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x+\alpha y\|^2 &= \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\
&= \langle x, x+\alpha y\rangle + \langle \alpha y, x+\alpha y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,\alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|x-\alpha y\|^2 &= \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle\\ &= \langle x, x-\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x-\alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,-\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle + \langle -\alpha y, -\alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$$

$\Leftarrow]$ Recíprocamente

$$\begin{aligned}\|x+\alpha y\|^2 &= \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle\\ &= \langle x, x+\alpha y\rangle + \langle \alpha y, x+\alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,\alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|x-\alpha y\|^2 &= \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle\\ &= \langle x, x-\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x-\alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,-\alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle + \langle -\alpha y, -\alpha y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle.\end{aligned}$$

Como $\|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\langle y,y\rangle.$$

De donde obtenemos

$$\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle=0$$
$$2\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+2\alpha\langle y,x\rangle=0 \quad \text{para todo } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Luego, $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle=0$ y por lo tanto, $x\perp y$

Teorema 1.4.4: Sea X un espacio con producto interno Entonces, $x\perp y$ implica que $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$ para todo $\alpha\in\mathbb{F}$.

Demostración: Supongamos que $x\perp y$, entonces para todo $\alpha\in\mathbb{F}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|x+\alpha y\|^2&=\langle x+\alpha y,x+\alpha y\rangle\\&=\langle x,x+\alpha y\rangle+\langle\alpha y,x+\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,\alpha y\rangle+\langle\alpha y,x\rangle+\langle\alpha y,\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle+|\alpha|^2\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+|\alpha|^2\|y\|^2\geq\|x\|^2.\end{aligned}$$

Así,

$$\|x+\alpha y\|\geq\|x\| \text{ para todo } \alpha\in\mathbb{F}$$

Teorema 1.4.5 (La Mejor Aproximación): Sean X un espacio con producto interno y $M\neq\varnothing$ un subconjunto convexo y completo de X Entonces para cada $x\in X$ existe un único $y\in M$ tal que

$$\delta=\inf\left\{\|x-z\|\cdot z\in M\right\}=d(x,M)=d(x,y)$$

Demostración: Por la definición de ínfimo, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe un $y_n\in M$ tal que

$$\delta_n = \|x - y_n\| \text{ y } \delta_n \downarrow \delta.$$

Probemos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

Denotemos

$$v_n := y_n - x, \quad \|v_n\| = \delta_n$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|v_m + v_n\| &= \|y_m + y_n - 2x\| \\ &= 2\left\|\left(\tfrac{1}{2}y_m + \tfrac{1}{2}y_n\right) - x\right\| \qquad \text{note que } \left(\tfrac{1}{2}y_m + \tfrac{1}{2}y_n\right) \in M \\ &\geq 2\delta.\end{aligned}$$

Por otro lado, por la Ley del Paralelogramo

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2 \\ &= \|v_m - v_n\|^2 \\ &= 2\left[\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2\right] - \|v_m + v_n\|^2 \\ &= 2\left[\delta_m^2 + \delta_n^2\right] - \|v_m + v_n\|^2 \\ &\leq 2\left[\delta_m^2 + \delta_n^2\right] - 4\delta^2.\end{aligned}$$

Así,

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left[\delta_m^2 + \delta_n^2\right] - 4\delta^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

por lo tanto, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X con $y_n \in M$ Esto implica que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M Como M es completo, existe un $y \in M$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y.$

Así,

$$\|x - y\| \geq \delta = d(x, M).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\delta \le \|x-y\| &< \|x-y_n\| + \|y_n - y\| \\ &= \delta_n + \|y_n - y\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta\end{aligned}$$

de donde $\|x-y\| = \delta$

Unicidad: Supongamos que $y, y_0 \in M$ y

$$\|x-y\| = \delta, \quad \|x-y_0\| = \delta$$

Luego, por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2 &= \|(y-x)-(y_0-x)\|^2 \\ &= 2\|y-x\|^2 + 2\|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - \|y+y_0-2x\|^2 \\ &= 4\delta^2 - 4\|(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}y_0)-x\|^2.\end{aligned}$$

Note que $(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y_0) \in M$ y la distancia de x a un punto de M es mayor o igual que δ. Por lo tanto, $4\|(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y_0)-x\|^2 \ge 4\delta^2$.

Luego,

$$0 \le \|y-y_0\|^2 \le 0,$$

lo que implica que

$$\|y-y_0\|^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$y = y_0.$$

Corolario 1.4.1: Sean H un espacio de Hilbert y $M \neq \varnothing$ un subconjunto convexo y cerrado de H. Entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in M$ tal que

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$$

Corolario 1.4.2: Sean X un espacio con producto interno y $Y \neq \varnothing$ un subespacio completo de X Entonces para cada $x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in Y\}$$

Corolario 1.4.3: Sean H un espacio de Hilbert y $Y \neq \varnothing$ un subespacio cerrado de H Entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in Y$ tal que

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in Y\}$$

Notación: Sean X un espacio con producto interno y M un subconjunto no vacío, convexo y completo de X El único elemento de M que minimiza la distancia $d(x,M)$ lo denotaremos por $P_M(x)$. O sea que

$$P_M(x) \in M \text{ y } \|x - P_M(x)\| = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$$

$P_M(x)$ se llama ***la mejor aproximación a*** x ***por elementos de*** M.

Teorema 1.4.6: Sea Y un subespacio completo de un espacio con producto interno X, entonces para cada $x \in X$ se tiene que

$$z := x - P_Y(x) \in Y^{\perp}.$$

Demostración: Sea $u \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\|z-u\| &= \|x - P_Y(x) - u\| \\
&= \|x - (P_Y(x) + u)\| \quad \text{note que } (P_Y(x)+u) \in Y \\
&\geq \|x - P_Y(x)\| \\
&= \|z\|.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|z-u\| \geq \|z\|, \quad \text{para todo } u \in Y$$

Por el Teorema 1 4 2 tenemos que $z \in Y^{\perp}$.

Teorema 1.4.7: Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces $H = Y \oplus Y^{\perp}$

Demostración: Sea $x \in H$, entonces

$$z = x - P_Y(x) \in Y^{\perp}.$$

Luego, $x = P_Y(x) + z$ con $P_Y(x) \in Y, z \in Y^{\perp}$.

O sea que, $H = Y + Y^{\perp}$ Como $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ se tiene que $H = Y \oplus Y^{\perp}$.

Teorema 1.4.8: Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H entonces $Y = Y^{\perp\perp}$

Demostración: Sabemos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$

Sea $x \in Y^{\perp\perp}$ Luego, $x \in H$

Como $H = Y \oplus Y^{\perp}$, existen $y \in Y$, $z \in Y^{\perp}$ tal que $x = y + z$

Luego, $z = x - y$ con $x, y \in Y^{\perp\perp}$ y por lo tanto, $z \in Y^{\perp\perp}$.

Así,

$$z \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$$

Lo anterior nos permite concluir que $z = 0$ y por lo tanto, $x = y \in Y$

Por consiguiente,

$$Y^{\perp\perp} \subset Y$$

Así,

$$Y = Y^{\perp\perp}$$

CAPÍTULO II
HOMEOMORFISMOS ENTRE ESPACIOS DE HILBERT

II. HOMEOMORFISMOS ENTRE ESPACIOS DE HILBERT.

En este capítulo probaremos que todo espacio de Hilbert de dimensión infinita separable H es isomorfo a l^2 También probaremos que los espacios L^p y l^p son homeomorfos entre ellos. Por último, utilizando la función de Mazur, probaremos que existe una función biyectiva y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua en todo punto En lo que sigue supondremos que los espacios L^p y l^p son reales

2.1 BASES ORTONORMALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

Definición 2.1.1: Sean X un espacio con producto interno y $M \subset X, M \neq \varnothing$ M es un conjunto ortonormal si

$$\langle x,y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases} \qquad \text{para todo } x, y \in M.$$

Lema 2.1.1: Todo conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ en un espacio con producto interno X es linealmente independiente En particular, si X es k-dimensional entonces el conjunto $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ es una base para X y cualquier vector $x \in X$ puede ser expresado en la forma $x = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n$ (en este caso $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ usualmente se llama ***base ortonormal*** y los números $\langle x, e_n \rangle$ son las componentes de x con respecto a esta base, los cuales son llamados los ***coeficientes de Fourier*** de x con respecto a esta base ortonormal)

Demostración: Supongamos que $\sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n = 0$ para algunos $\alpha_n \in \mathbb{F}$, $n = 1, \cdots, k$. Entonces tomando el producto interno con e_m y usando la ortonormalidad obtenemos

$$0 = \left\langle \sum_{n=1}^{k}\alpha_n e_n, e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{k}\alpha_n \left\langle e_n, e_m \right\rangle = \alpha_m$$

Así,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 .$$

Por lo tanto, el conjunto $\{e_1, \cdots, e_k\}$ es linealmente independiente. Ahora, si $\{e_1, \cdots, e_k\}$ es una base para X, entonces existen $\lambda_n \in \mathbb{F}$, $n = 1, \cdots, k$, tal que $x = \sum_{n=1}^{k}\lambda_n e_n$. Luego, tomando el producto interno de esta fórmula con e_m y usando la ortonormalidad obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle x, e_m \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{k}\lambda_n e_n, e_m \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k, e_m \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_1 e_1, e_m \right\rangle + \left\langle \lambda_2 e_2, e_m \right\rangle + \cdots + \left\langle \lambda_k e_k, e_m \right\rangle \\
&= \lambda_1 \left\langle e_1, e_m \right\rangle + \lambda_2 \left\langle e_2, e_m \right\rangle + \cdots + \lambda_k \left\langle e_k, e_m \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{k}\lambda_n \left\langle e_n, e_m \right\rangle .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\langle x, e_m \right\rangle = \lambda_m, \quad m = 1, \cdots, k .$$

Por lo tanto,

$$x=\sum_{n=1}^{k}\lambda_n e_n=\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle e_n.$$

Lema 2.1.2: Sea $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio con producto interno X y sea $Y=[\{v_1,\cdots,v_k\}]$ Entonces existe una base ortonormal $\{e_1,\cdots,e_k\}$ para Y

Demostración: La prueba es por inducción sobre k.

Para $k=1$, como $v_1\neq 0, \|v_1\|\neq 0$ Así, podemos tomar $e_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$, y $\{e_1\}$ es la base requerida

Ahora supongamos que el resultado es cierto para un entero arbitrario $k\geq 1$. Sea $\{v_1,\cdot,v_{k+1}\}$ un conjunto linealmente independiente y sea $\{e_1,\cdots,e_k\}$ la base ortonormal para $[\{v_1,\cdots,v_k\}]$ dada por la hipótesis de inducción. Como $\{v_1,\cdots,v_{k+1}\}$ es linealmente independiente,

$$v_{k+1}\notin[\{v_1,\cdots,v_k\}].$$

Así,

$$v_{k+1}\notin[\{e_1,\cdots,e_k\}]$$

Sea

$$b_{k+1}=v_{k+1}-\sum_{n=1}^{k}\langle v_{k+1},e_n\rangle e_n$$

Entonces

$$b_{k+1}\in[\{v_1,\cdots,v_{k+1}\}] \text{ y } b_{k+1}\neq 0 \text{ (de otro modo } v_{k+1}\in[\{e_1,\cdots,e_k\}])$$

También, para cada $m = 1,\cdots,k$;

$$\begin{aligned}\langle b_{k+1}, e_m \rangle &= \langle v_{k+1}, e_m \rangle - \sum_{n=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \langle v_{k+1}, e_m \rangle - \langle v_{k+1}, e_m \rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

(usando la ortogonalidad del conjunto $\{e_1,\cdots,e_k\}$) Por lo tanto, b_{k+1} es ortogonal a todos los vectores $\{e_1,\cdots,e_k\}$ Sea $e_{k+1} = \dfrac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$ Entonces $\{e_1,\cdots,e_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal con

$$[\{e_1,\cdots,e_{k+1}\}] \subset [\{v_1,\cdots,v_{k+1}\}].$$

Pero estos subespacios son $(k+1)$-dimensional, por lo que deben ser iguales, lo que completa la prueba inductiva

La construcción inductiva de la base del Lema 2 1 2, usa la fórmula

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \qquad b_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{n=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_n \rangle e_n, \qquad e_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}, \quad k \geq 1$$

llamada el ***algoritmo de Gram-Schmidt***

Definición 2.1.2: Sea X un espacio con producto interno Una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ se dice que es una sucesión ortonormal si $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$; es decir,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Teorema 2.1.1: Todo espacio con producto interno X de dimensión infinita contiene una sucesión ortonormal.

Demostración:

Sea $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$. Sea $Y_1 = [\{x_1\}]$ Como $\dim(X) = \infty$, entonces $[\{x_1\}] = Y_1 \neq X$ (ya que $[\{x_1\}]$ es de dimensión finita) Como $\dim(Y_1) < \infty$ entonces Y_1 es cerrado

Así, Y_1 es un subespacio cerrado de X y $Y_1 \neq X$ Luego, por el Lema de Riesz, existe un $x_2 \in X$ tal que

$$\|x_2\| = 1,\ \|x_2 - x_1\| > \tfrac{1}{2} \text{ y } \{x_1, x_2\} \text{ linealmente independiente}$$

Sea $Y_2 = [\{x_1, x_2\}]$. Luego, Y_2 es un subespacio cerrado de X y $Y_2 \neq X$. Por el Lema de Riesz existe un $x_3 \in X$ tal que

$$\|x_3\| = 1,\ \|x_3 - x_2\| > \tfrac{1}{2},\ \|x_3 - x_1\| > \tfrac{1}{2} \text{ y } \{x_1, x_2, x_3\} \text{ linealmente independiente}$$

Repitiendo este proceso (que no termina, porque la $\dim(X) = \infty$) podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\|x_n\| = 1,\ \|x_n - x_m\| > \tfrac{1}{2}, \text{ para todo } n \neq m \text{ y } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ linealmente independiente}$$

Ahora, aplicando inductivamente el algoritmo de Gram-Schmidt a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ podemos construir una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}] = [\{e_n : n \in \mathbb{N}\}].$$

Teorema 2.1.2 (Desigualdad de Bessel): Sea X un espacio con producto interno y sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en X Para cualquier $x \in X$ la serie (real) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|x - y_n\|^2 &= \langle x - y_n, x - y_n \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, y_n \rangle - \langle y_n, x \rangle + \langle y_n, y_n \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, x \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} + \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_i \rangle} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x, e_i \rangle} \langle x, e_i \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2
\end{aligned}$$

De donde

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Teorema 2.1.3: Sean H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{F}$ Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ converge en H si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ converge en $\mathbb{R}$ Si este es el caso, entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$$

Demostración:

$\Rightarrow$] Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ es convergente en H, y sea

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\in H$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle x,e_m\rangle&=\left\langle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,e_m\right\rangle\\&=\left\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,e_m\right\rangle\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle e_i,e_m\rangle\\&=\alpha_m.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\le\|x\|^2.$$

Así, $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ es convergente en $\mathbb{R}$

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

Luego, para $m > n$ se tiene que

$$\|x_m - x_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H Como H es completo, existe un $x \in H$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Como consecuencia de los Teoremas 2 1 2 y 2 1.3, se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.1.1: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en H. Para cualquier $x \in H$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge en H

Teorema 2.1.4: Sean X un espacio con producto interno y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en X. Entonces para cada $x \in \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ Luego existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$y = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \alpha_k e_k \quad \text{y} \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

Denotemos $Y_{n_\varepsilon} = \left[e_1, e_2, \cdots, e_{n_\varepsilon}\right]$ Como Y_{n_ε} es un subespacio completo, entonces $P_{Y_{n_\varepsilon}}(x) = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, e_k \rangle e_k$; por lo tanto,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\| = \|x - y\| < \varepsilon$$

Ahora bien, si $n \geq n_\varepsilon$ entonces $\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, e_k \rangle e_k \in [e_1, e_2, \cdots, e_n]$, por lo tanto,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon$$

Hemos probado así que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\varepsilon$ implica que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon$$

Por consiguiente,

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Teorema 2.1.5: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en el espacio de Hilbert H Los siguientes enunciados son equivalentes

(a) $\overline{[e_1,e_2,\cdots]}=H$, es decir, el subespacio generado por el conjunto ortonormal $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}$ es denso en H.

(b) $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$, para todo $x\in H$; es decir, todo elemento de H es igual a su serie de Fourier.

(c) $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle\overline{\langle y,e_n\rangle}$, para todo $x,y\in H$.

(d) $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$, para todo $x\in H$ Identidad de Parseval

(e) No existe un conjunto ortonormal en H que contiene propiamente al conjunto $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}$ O sea que $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}$ es maximal en el sentido ortonormal

(f) $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}^{\perp}=\{0\}$

(g) $\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle$, para todo $n\in\mathbb{N}\Rightarrow x=y$

Demostración:

$(a)\Rightarrow(b)]$ Sea $x\in H$, luego por (a) $x\in\overline{[e_1,e_2,\cdots]}$. Por el Teorema 2 1.4,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n .$$

$(b) \Rightarrow (c)]$ Sean $x, y \in H$, entonces por (b)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.
\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (d)]$ Tomando $x = y$ en (c) obtenemos que

$$\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_n \rangle}$$

de donde

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$(d) \Rightarrow (e)]$ Supongamos que existe un $x \in H - \{e_1, e_2, \cdots\}$ tal que $\|x\| = 1$ y $\langle x, e_n \rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (d)

$$1 = \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = 0,$$

lo que es una contracción. Así, (e) se cumple

$(e)\Rightarrow(f)]$ Supongamos que (f) es falso, entonces existe un $x\in\{e_n / n\in\mathbb{N}\}^{\perp}-\{0\}$. Note que $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}\cup\left\{\frac{1}{\|x\|}x\right\}$ es un conjunto ortonormal que contiene propiamente al conjunto $\{e_n / n\in\mathbb{N}\}$, lo que contradice (e). Así, (f) se cumple.

$(f)\Rightarrow(g)]$ Sean $x,y\in H$ tales que $\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle$, para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $\langle x-y,e_n\rangle=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $x-y\in\{e_n / n\in\mathbb{N}\}^{\perp}=\{0\}$. Así, $x-y=0$, de donde $x=y$.

$(g)\Rightarrow(a)]$ Sea $x\in H$, entonces por el Corolario 2.1.1, $y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\in H$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x-y,e_n\rangle &= \langle x,e_n\rangle-\langle y,e_n\rangle \\
&= \langle x,e_n\rangle-\left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle e_k,e_n\right\rangle \\
&= \langle x,e_n\rangle-\left\langle \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k,e_n\right\rangle \\
&= \langle x,e_n\rangle-\lim_{m\to\infty}\left\langle \sum_{k=1}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k,e_n\right\rangle \\
&= \langle x,e_n\rangle-\lim_{m\to\infty}\langle x,e_n\rangle \\
&= \langle x,e_n\rangle-\langle x,e_n\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O sea que $\langle x-y,e_n\rangle=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$; pero como $\langle 0,e_n\rangle=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que $\langle x-y,e_n\rangle=\langle 0,e_n\rangle$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Por (g) se tiene que $x-y=0$; por lo tanto,

$$x = y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \in \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$$

Así, $x \in \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$ Por consiguiente, $H = \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$

Definición 2.1.3: Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en el espacio de Hilbert H $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H si se satisface una de las condiciones del Teorema 2 1 5. En este caso se dice también que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal total o completa

2.2 ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES.

Ahora que se han estudiado las bases ortonormales en detalle, es natural preguntarse qué espacios de Hilbert poseen una base ortonormal

Definición 2.2.1: Un espacio de Hilbert H se llama separable si existe una familia enumerable de vectores $\{v_1, v_2, \cdots\}$ tal que $\overline{\{v_1, v_2, \cdots\}} = H$

Teorema 2.2.1: Todo espacio de Hilbert de dimensión finita es separable.

Demostración: Sea H un espacio de Hilbert tal que $\dim(H) = n < \infty$ y sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base para H Definamos,

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k : (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n \right\} \text{ si } H \text{ es real}$$

y

$$S=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k : \alpha_k = a_k + ib_k;\quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}\right\} \text{ si } H \text{ es complejo}$$

En cualquier caso S es enumerable y $\overline{S}=H$ Por lo tanto, H es separable.

Teorema 2.2.2 (Caracterización de los Espacios de Hilbert Separables): Un espacio de Hilbert de dimensión infinita H es separable si y sólo si posee una base ortonormal

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea H un espacio de Hilbert separable y $\dim(H)=\infty$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H=\overline{\{x_n / n\in\mathbb{N}\}}$ Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se obtiene de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omitiendo los términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que son combinaciones lineales de los términos precedentes de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$

Así, $y_1 = x_1$. Si x_2 es combinación lineal de x_1 entonces no lo tomo, si x_2 no es combinación lineal de x_1 entonces tomo $y_2 = x_2$. Si x_3 no es combinación lineal de x_1 y x_2 entonces lo tomo y procedo de esa forma

Por construcción, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto linealmente independiente y

$$[x_1, x_2, \cdots] = [y_1, y_2, \cdots]$$

Por el proceso de Gram-Schmidt podemos construir una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$[e_1, e_2, \cdots] = [y_1, y_2, \cdots] = [x_1, x_2, \cdots]$$

Por lo tanto,

$$\overline{[e_1, e_2, \cdots]} = \overline{[x_1, x_2, \cdots]} \supset \overline{\{x_1, x_2, \cdots\}} = H$$

Así pues, $H = \overline{[e_1, e_2, \cdots]}$ con $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión ortornormal, de donde $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que H posee una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ Luego para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

Sea

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \,/\, \alpha_k \in \mathbb{Q} \left(ó\ \alpha_k = p_k + \imath q_k, \quad p_k, q_k \in \mathbb{Q} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Luego, S es un conjunto enumerable

Probemos que S es denso en H Sea $x \in H$, entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \cdots, N$ tomemos $\alpha_n \in \mathbb{F}$ racional o complejo racional (según sea el caso) tal que

$$\left|\langle x,e_n\rangle-\alpha_n\right|^2<\frac{\varepsilon^2}{2N}.$$

Tomemos $y=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\in S$ entonces

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2&=\left\|\sum_{n=1}^{N}\left(\langle x,e_n\rangle-\alpha_n\right)e_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2\\&=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle x,e_n\rangle-\alpha_n\right|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\langle x,e_n\rangle\right|^2\\&\le\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\\&=\varepsilon^2\end{aligned}$$

de donde $\|x-y\|<\varepsilon$. Esto implica que $\overline{S}=H$ y por lo tanto, H es separable

Teorema 2.2.3: La sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para l^2, donde

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0,0,\cdots)\\e_2&=(0,1,0,\cdots)\\&\vdots\\e_n&=(0,0,\cdots,0,1,\cdots,0,0,\cdots)\\&\vdots\end{aligned}$$

Demostración:

Es claro que para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $e_n\in l^p$ para todo $1\le p\le\infty$.

Note que $\|e_n\|_2=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\langle e_m,e_n\rangle=0$ para todo $n\neq m,\quad n,m\in\mathbb{N}$.

Así, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es, en efecto, una sucesión ortonormal en l^2

Por otro lado, sea $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$, entonces

$$\langle x, e_n \rangle = x_n,$$

por lo tanto,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

O sea, se satisface la identidad de Parseval Por lo tanto, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para l^2 (Por la Definición 2 1 3)

Corolario 2.2.1: l^2 es separable

Demostración: Se deduce directamente de los Teoremas 2 2.2 y 2 2 3.

Lema 2.2.1: Sean $[a,b]$ un intervalo acotado y $1 \leq p < \infty$ Entonces el conjunto $C[a,b]$ es denso en $L^p[a,b]$

Lema 2.2.2: Para cualquier $b > a$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es denso en el espacio $\left(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Demostración: Consideremos el espacio $C_{\mathbb{R}}([a,b])$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, y supongamos que $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario Por el teorema de Stone-Weierstrass existe un polinomio real $p_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ tal que $\|f - p_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ Ahora, para cada $k = 0, \cdots, n$, elijamos coeficientes racionales β_k, tal que

$|\beta_n - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2n\gamma^k}$ (donde $\gamma = \max\{|a|,|b|\}$, y sea $p_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k$

Entonces

$$\|p_1 - p_2\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} |\beta_n - \alpha_n| \gamma^k < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ y por lo tanto, } \|f - p_2\|_\infty < \varepsilon,$$

lo que demuestra el resultado.

Para el caso complejo aplicamos este resultado a la parte real e imaginaria de $f \in C_{\mathbb{C}}([a,b])$

Teorema 2.2.4: Para cualquier $b > a$ el conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es denso en el espacio $\left(L^2([a,b]), \|\cdot\|_2\right)$

Demostración: Consideremos el espacio $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$, con la norma $\|\cdot\|_2$, y supongamos que $f \in L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario Por el Lema 2 2 1 existe una función $g \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ Por le Lema 2 2 2, existe un polinomio p con coeficientes racionales tal que $\|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{|b-a|}}$ Luego, en $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ la norma $\|g - p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto, $\|f - p\|_2 < \varepsilon$, lo que prueba el resultado en el caso real

Para el caso complejo aplicamos este resultado a la parte real e imaginaria de f.

Corolario 2.2.2: $L^2([0,1])$ es separable

Demostración: El conjunto de polinomios con coeficientes racionales (o complejos racionales) es enumerable y denso en $L^2([0,1])$ Por lo tanto, $L^2([0,1])$ es separable

Definición 2.2.2: Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ T es una isometría si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$ Si T es una isometría suryectiva, entonces se dice que X y Y son espacios normados isométricamente isomorfos

Teorema 2.2.5: Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces existe una isometría suryectiva $T : H \to l^2$ tal que $T(u_n) = e_n = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demostración: Sea $x \in H$, entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$

Denotemos

$$\alpha_n := \langle x, u_n \rangle .$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty .$$

Esto implica que

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 .$$

Definamos $T: H \to l^2$ por

$$T(x) = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ donde } \alpha_n = \langle x, u_n \rangle .$$

Probemos que T es lineal

Sean $x, y \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ Entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n \quad \text{y} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n$$

Luego,

$$\alpha x + \beta y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \alpha x + \beta y, u_n \rangle u_n$$

y

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \{\langle \alpha x + \beta y, u_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \alpha \{\langle x, u_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} + \beta \{\langle y, u_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es lineal

Probemos que T es una isometría. En efecto, por la identidad de Parseval se tiene que

$$\|T(x)\|_2^2 = \left\| \{\langle x, u_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 = \|x\|^2$$

de donde

$$\|T(x)\|_2 = \|x\|, \text{ para todo } x \in X$$

Así, T es una isometría

Probemos que T es suryectiva.

Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$

Luego, por el Teorema 2 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \in H$ Denotemos $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, entonces $\alpha_n = \langle x, u_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n \text{ y } T(x) = \{\langle x, u_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Así, T es suryectiva Hemos probado que T es una isometría suryectiva y

$$T(u_n) = e_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Corolario 2.2.3: Todo espacio de Hilbert H separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a l^2, es decir, existe una isometría $T: H \to l^2$ tal que es un isomorfismo

Demostración: Como H es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita entonces por el Teorema 2 2 2, H posee una base ortonormal y, por el Teorema 2.2 5, H es isométricamente isomorfo a l^2.

Corolario 2.2.4: $L^2([0,1])$ es isométricamente isomorfo a l^2

Demostración: Por el Corolario 2.2.2 $L^2([0,1])$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, luego por el Corolario 2 2.3 $L^2([0,1])$ es isométricamente isomorfo a l^2.

2.3 HOMEOMORFISMO ENTRE LOS ESPACIOS L^p Y l^q.

Definición 2.3.1: Una función $f:(X,\tau)\to(X',\tau')$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo si es una función biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas En este caso se dice que (X,τ), (X',τ') son espacios topológicos homeomorfos

Definición 2.3.2: Una función $f:(X,\tau)\to(X',\tau')$ entre dos espacios topológicos es un homeomorfismo uniforme si es una función biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son uniformemente continuas.

Teorema 2.3.1: $L^1([0,1])$ es homeomorfo a $L^p([0,1])$ para todo $p>1$.

Demostración: Sean $p>1$ y

$$F:L^1([0,1])\to L^p([0,1])$$

definida por

$$F(f)=\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}}$$

donde $\operatorname{sgn}(f)$ es la función definida por $\operatorname{sgn}(f(x))$, donde $\operatorname{sgn}(f(x))$ es el signo de $f(x)$.

Note que

$$\int_0^1|F(f)|^p\,d\mu=\int_0^1|f|\,d\mu<\infty.$$

Luego, F está bien definida

Probemos que F es inyectiva.

En efecto, sean $f,g\in L^1([0,1])$ tal que $F(f)=F(g)$, entonces

$$\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}}=\operatorname{sgn}(g)|g|^{\frac{1}{p}}.$$

Esto implica que $\operatorname{sgn}(f)=\operatorname{sgn}(g)$ y $|f|^{\frac{1}{p}}=|g|^{\frac{1}{p}}$ Por lo tanto, $f=g$

Probemos que F es suryectiva

Sea $h\in L^p([0,1])$ Tomemos $f=\operatorname{sgn}(h)|h|^p$ Como

$$\int_0^1|f|\,d\mu=\int_0^1|h|^p\,d\mu<\infty,$$

se tiene que $f\in L^1([0,1])$ y

$$\begin{aligned}F(f)&=\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{1}{p}}\\&=\operatorname{sgn}(h)\left(|h|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\operatorname{sgn}(h)|h|\\&=h.\end{aligned}$$

Por lo tanto, F es suryectiva.

De todo lo anterior se concluye que F es una biyección Además la inversa F^{-1} de F está definida por

$$\begin{aligned}F^{-1}:L^p([0,1])&\to L^1([0,1])\\F^{-1}(h)&=\operatorname{sgn}(h)|h|^p.\end{aligned}$$

Probemos ahora que F es una función continua

Sea $f_0\in L^1([0,1])$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L^1([0,1])$ que converge a f_0

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\|_1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu = 0$$

Ahora bien, como para todo número $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{sgn}(a)\cdot|a|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(b)|b|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leq 2^p|a-b|$$

se tiene que

$$\begin{aligned}|F(f_n) - F(f_0)|^p &= \left|\operatorname{sgn}(f_n)|f_n|^{\frac{1}{p}} - \operatorname{sgn}(f_0)|f_0|^{\frac{1}{p}}\right|^p \\ &\leq 2^p|f_n - f_0|\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p\, d\mu \leq 2^p\int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu$$

de donde

$$\begin{aligned}\|F(f_n) - F(f_0)\|_p &= \left(\int_0^1 |F(f_n) - F(f_0)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left(\int_0^1 |f_n - f_0|\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\|f_n - f_0\|_1^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\|F(f_n) - F(f_0)\|_p \leq 2\left(\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_0\|_1\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f_0) \text{ en } L^p([0,1]).$$

Esto implica que F es una función continua en $L^1([0,1])$

Finalmente probemos que la función $G := F^{-1}$ es continua en $L^p([0,1])$

En efecto, sea $h_0 \in L^p([0,1])$ y sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $L^p([0,1])$ que converge a h_0. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Note que para todo número real $a,b \in \mathbb{R}$

$$\left|\operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p\right| \le p|a-b|\left(|a|+|b|\right)^{p-1}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |G(h_n)-G(h_0)| &= \left|\operatorname{sgn}(h_n)|h_n|^p - \operatorname{sgn}(h_0)|h_0|^p\right| \\ &\le p|h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1} \end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 |G(h_n)-G(h_0)| \, d\mu \le p\int_0^1 |h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1} d\mu$$

Pero por la desigualdad de Holder-Riesz para $q = \dfrac{p}{p-1}$,

$$\int_0^1 |h_n - h_0|\left(|h_n|+|h_0|\right)^{p-1} d\mu \le \left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(|h_n|+|h_0|\right)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|G(h_n)-G(h_0)\|_1 &= \int_0^1 |G(h_n)-G(h_0)| \, d\mu \\ &\le p\left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(|h_n|+|h_0|\right)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Pero

$$\int_0^1 (|h_n|+|h_0|)^p \, d\mu \le 2^p \int_0^1 (\max(|h_n|,|h_0|))^p d\mu$$
$$\le 2^p \left[\int_0^1 |h_n|^p \, d\mu + \int_0^1 |h_0|^p \, d\mu \right].$$

Además, como

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |h_n - h_0|^p d\mu = 0$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |h_n|^p d\mu = \int_0^1 |h_0|^p d\mu.$$

Así pues,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \|G(h_n) - G(h_0)\|_1$$
$$\le p 2^{p-1} \left[\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |h_n - h_0|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^1 |h_n|^p \, d\mu + \int_0^1 |h_0|^p \, d\mu \right]^{1-\frac{1}{p}}$$
$$= 0$$

es decir, que la sucesión $\{G(h_n)\}$ converge a $G(h_0)$ en $L^1([0,1])$ Por consiguiente, $G = F^{-1}$ es continua en $L^p([0,1])$

Hemos probado así que la función $F . L^1([0,1]) \to L^p([0,1])$ es un homeomorfismo para todo $p > 1$. Así pues, $L^1([0,1])$ es homeomorfo a $L^p([0,1])$ para todo $p > 1$

Como la relación "es homeomorfo a" es una relación de equivalencia, por el Teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3.1: Sean $p, q \ge 1$, entonces $L^p([0,1])$ es homeomorfo a $L^q([0,1])$

Corolario 2.3.2: La bola unitaria cerrada en $L^p([0,1])$ es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada de $L^q([0,1])$ para $p,q \geq 1$

Demostración: Sean $f,g \in L^1([0,1])$ tal que $\|f\|_1 \leq 1$ y $\|g\|_1 \leq 1$ y $F: L^1([0,1]) \to L^p([0,1])$ la función definida en el Teorema 2 3 1. Entonces, $\|F(f)\|_p \leq 1$ y $\|F(g)\|_p \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\|F(f)-F(g)\|_p &= \left(\int_0^1 |F(f)-F(g)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\|f-g\|_1^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Luego, F es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0,1) = \overline{B}(L^1)$ de $L^1([0,1])$.

Análogamente, sea $f,g \in L^p([0,1])$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ y $\|g\|_p \leq 1$. Entonces, $\|G(f)\|_1 \leq 1$ y $\|G(g)\|_1 \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\|G(f)-G(g)\|_1 &= \left(\int_0^1 |G(f)-G(g)| \, d\mu\right) \\ &\leq p2^{p-1} 2^{\frac{p-1}{p}} \|f-g\|_p.\end{aligned}$$

Por lo tanto, G es uniformemente continua en la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0,1) = \overline{B}(L^p)$ de $L^p([0,1])$.

Finalmente, como la relación “es uniformemente homeomorfo a” es una relación de equivalencia, se tiene que $\overline{B}(L^p)$ es uniformemente homeomorfa a $\overline{B}(L^q)$ para todo $p,q \geq 1$

Teorema 2.3.2: l^1 es homeomorfo a l^p, para todo $p>1$

Demostración: Definamos la función

$$F: l^1 \to l^p$$
$$F(x)=\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}}, \cdots\right)$$

donde $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^1$

Note que F está bien definida, ya que

$$\|F(x)\|_p^p=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{p}}\right|\right)^p=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=\|x\|_1<\infty.$$

Definamos la función

$$G: l^p \to l^1$$
$$G(y)=\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \cdots\right)$$

donde $y=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in l^p$.

Note que G está bien definida, ya que

$$\|G(y)\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^p\right|=\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p=\|y\|_p^p<\infty$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(F\circ G)(y)&=F(G(y))\\&=F\left(\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|^p, \cdots\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F\circ G)(y)&=\left(\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p\right)\left|\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^p\right|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p\right)\left|\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^p\right|^{\frac{1}{p}}, \cdots\right)\\&=\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|, \operatorname{sgn}(y_2)|y_2|, \operatorname{sgn}(y_3)|y_3|, \cdots\right)\\&=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\\&=y\end{aligned}$$

para todo $y=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in l^p$ y

$$
\begin{aligned}
(G\circ F)(x) &= G(F(x))\\
&= G\left(\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{p}},\cdots\right)\right)\\
&= \left(\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{p}}\right|^p, \operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right)\left|\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{p}}\right|^p,\cdots\right)\\
&= \left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|, \operatorname{sgn}(x_3)|x_3|,\cdots\right)\\
&= (x_1,x_2,x_3,\cdots)\\
&= x
\end{aligned}
$$

para todo $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^1$

Así pues, F es una función biyectiva y $G=F^{-1}$

Probemos que F es continua en l^1 En efecto, supongamos que $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\cdots)\in l^1$ y sea $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en l^1 tal que $x^n=(x_1^n,x_2^n,x_3^n,\cdots)$ y $\lim_{n\to\infty}\|x^n-x^0\|_1=0$.

Como para todo número real $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{sgn}(a)|a|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}(b)|b|^{\frac{1}{p}}\right|^p\le 2^p|a-b|$$

se tiene que

$$\left|\operatorname{sgn}(x_i^n)|x_i^n|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}(x_i^0)|x_i^0|^{\frac{1}{p}}\right|^p\le 2^p|x_i^n-x_i^0| \text{ para todo } i=1,2,\cdots$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}(x_i^n)|x_i^n|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sgn}(x_i^0)|x_i^0|^{\frac{1}{p}}\right|^p\le 2^p\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^n-x_i^0|$$

y

$$0\le\left\|F(x^n)-F(x^0)\right\|_p^p\le 2^p\left\|x^n-x^0\right\|_1$$

lo que implica que

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left\| F(x^n) - F(x^0) \right\|_p \le 2\left(\lim_{n\to\infty} \left\| x^n - x^0 \right\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| F(x^n) - F(x^0) \right\|_p = 0$$

Por consiguiente, F es continua en x^0, para todo $x^0 \in l^1$

Probemos que $G = F^{-1}$ es continua en l^p En efecto, supongamos que $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, \cdots) \in l^p$ y sea $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en l^p tal que $y^n = (y_1^n, y_2^n, y_3^n, \cdots)$ y $\lim_{n\to\infty} \left\| y^n - y^0 \right\|_p = 0$

Como para todo número real $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \operatorname{sgn}(a)|a|^p - \operatorname{sgn}(b)|b|^p \right| \le p|a-b|\left(|a|+|b|\right)^{p-1}$$

se tiene que

$$\left| \operatorname{sgn}(y_i^n)|y_i^n|^p - \operatorname{sgn}(y_i^0)|y_i^0|^p \right| \le p\left|y_i^n - y_i^0\right|\left(|y_i^n| + |y_i^0|\right)^{p-1} \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots;$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{sgn}(y_i^n)|y_i^n|^p - \operatorname{sgn}(y_i^0)|y_i^0|^p \right| \le p\sum_{i=1}^{\infty} \left|y_i^n - y_i^0\right|\left(|y_i^n| + |y_i^0|\right)^{p-1}$$

Por la desigualdad de Hölder-Riesz se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n-y_i^0\right|\left|y_i^n-y_i^0\right|^{p-1}\le\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n-y_i^0\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|+\left|y_i^0\right|\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$=\left\|y^n-y^0\right\|_p\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|+\left|y_i^0\right|\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le\left\|y^n-y^0\right\|_p\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(2\max\left(\left|y_i^n\right|,\left|y_i^0\right|\right)\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le 2^{p-1}\left\|y^n-y^0\right\|_p\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max\left(\left|y_i^n\right|,\left|y_i^0\right|\right)\right)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le 2^{p-1}\left\|y^n-y^0\right\|_p\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|y_i^n\right|^p+\left|y_i^0\right|^p\right)\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le 2^{p-1}\left\|y^n-y^0\right\|_p\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^n\right|^p+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|y_i^0\right|^p\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le 2^{p-1}\left\|y^n-y^0\right\|_p\left(\left\|y^n\right\|_p^p+\left\|y^0\right\|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|G\left(y^n\right)-G\left(y^0\right)\right\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\operatorname{sgn}\left(y_i^n\right)\left|y_i^n\right|^p-\operatorname{sgn}\left(y_i^0\right)\left|y_i^0\right|^p\right|$$

$$\le p\,2^{p-1}\left\|y^n-y_0\right\|_p\left(\left\|y^n\right\|_p^p+\left\|y^0\right\|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Además, como

$$\left|\left\|y^n\right\|_p-\left\|y_0\right\|_p\right|\le\left\|y_n-y_0\right\|_p$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y^n\right\|_p=\left\|y_0\right\|_p.$$

Por lo tanto,

$$0\le\lim_{n\to\infty}\left\|G\left(y^n\right)-G\left(y^0\right)\right\|_1\le p\,2^{p-1}\lim_{n\to\infty}\left\|y_n-y_0\right\|_p\left(\lim_{n\to\infty}\left\|y_n\right\|_p^p+\left\|y^0\right\|_p^p\right)^{\frac{p-1}{p}}=0$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left\|G(y^n)-G(y_0)\right\|_1=0$$

Por consiguiente, G es continua en y^0, para todo $y^0 \in l^p$.

Así pues, l^1 es homeomorfo a l^p, para todo $p>1$.

Observación: La función F definida en los Teoremas 2.3.1 y 2 3.2 se llama la función de Mazur y la función G se llama la función inversa de Mazur

Como consecuencia inmediata del Teorema 2 3 2, se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.3.3: Sean $p,q\geq 1$, entonces l^p es homeomorfo a l^q.

Teorema 2.3.3: Sean $p\geq 1$, $\overline{B}(l^1)=\left\{x\in l^1:\|x\|_1\leq 1\right\}$ y $\overline{B}(l^p)=\left\{y\in l^p:\|y\|_p\leq 1\right\}$. Entonces $\overline{B}(l^1)$ y $\overline{B}(l^p)$ son uniformemente homeomorfas

Demostración: Consideremos la función de Mazur $F:l^1\to l^p$ y su inversa $G:l^p\to l^1$ definida en el Teorema 2.3.2

Como para todo $x\in\overline{B}(l^1)$, $\|F(x)\|_p=\left(\|x\|_1\right)^{\frac{1}{p}}\leq 1$ y para todo $y\in\overline{B}(l^p)$, $\|G(y)\|_1=\left(\|y\|_p\right)^p\leq 1$, se tiene que

$$F:\overline{B}(l^1)\to\overline{B}(l^p) \quad \text{y} \quad G:\overline{B}(l^p)\to\overline{B}(l^1) \quad \text{y} \quad G=F^{-1}$$

Además, por el Teorema 2.3.2, para todo $x_1, x_2 \in \overline{B}(l^1)$,

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_p \leq 2\,\|x_1 - x_2\|_1^{\frac{1}{p}}$$

y para todo $y_1, y_2 \in \overline{B}(l^p)$

$$\|G(y_1) - G(y_2)\|_1 \leq p\,2^{p-1} \cdot 2^{\frac{p-1}{p}}\,\|y_1 - y_2\|_2$$

lo que implica que F y G son uniformemente continuas. Por consiguiente, $\overline{B}(l^1)$ y $\overline{B}(l^p)$ son uniformemente homeomorfas

Como consecuencia del Teorema 2 3 3, se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.3.4: Sean $p, q \geq 1$, entonces la bola unitaria cerrada $\overline{B}(l^p)$ es uniformemente homeomorfa a la bola unitaria cerrada $\overline{B}(l^q)$.

Teorema 2.3.4: Sean $p, q \geq 1$ Entonces $L^p([0,1])$ es homeomorfo a l^q

Demostración: Por el Corolario 2 3 1, $L^p([0,1])$ es homeomorfo a $L^2([0,1])$ y, por el Corolario 2.2 4, $L^2([0,1])$ es homeomorfo a l^2. Pero por el Corolario 2 3.3, l^2 es homeomorfo a l^q Por consiguiente, $L^p([0,1])$ es homeomorfo a l^q, para todo $p, q \geq 1$

En lo que sigue probaremos que existe una función no lineal biyectiva y continua de l^2 sobre un subconjunto de l^2 cuya inversa es discontinua en todo punto. Pero antes veamos un ejemplo para el caso lineal.

Ejemplo 2.3.1: Sea $f: l^2 \to l^2$ la función definida por

$$f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Como

$$\begin{aligned} f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n}(x_n + y_n)\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty} + \left\{\frac{1}{n}y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) + f\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) &= f\left(\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \\ &= \left\{\frac{1}{n}\lambda x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \lambda f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

se tiene que f es una función lineal.

Note que

$$f\left(l^2\right) = \left\{\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2\right\} =: Y$$

Notación: Para cada $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$ y $N\in\mathbb{N}$ denotemos

$$x^{[N]}=(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\ \cdot)$$
$$x^{(N)}=x-x^{[N]}=(0,\cdots,0,x_{N+1},x_{N+2},\cdots)$$

Probemos que Y es denso en l^2. En efecto, sea $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$ y definamos

$$x^{[n]}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$$

Como $z^n=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n,0,0,\cdots)\in l^2$ y $f(z^n)=x^{[n]}$, se tiene que $x^{[n]}\in Y$ para todo $n\in\mathbb{N}$

Por otro lado,

$$\left\|x-x^{[n]}\right\|_2^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en l^2 y $\overline{Y}=l^2$; es decir, Y es denso en l^2

Para cada $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$ se tiene que

$$\|f(x)\|_2=\left\|(x_1,\tfrac{1}{2}x_2,\ \cdots)\right\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tfrac{1}{n}x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_2.$$

Esto implica que f es un operador lineal acotado y $\|f\|\leq 1$ Así pues, f es continua en l^2.

Es claro que $f: l^2 \to Y$ es biyectiva y su inversa está definida por

$$f^{-1}: Y \to l^2$$
$$f^{-1}((y_1, y_2, y_3, \cdots)) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \cdots)$$

Consideremos la sucesión ortonormal $\{e_1, e_2, \cdots\}$ de l^2, entonces como

$$f(ne_n) = f((0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-esima posicion}}}{0,n},0,\cdots)) = (0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-esima posicion}}}{0,1},0,\cdots) = e_n$$

se tiene que $e_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ Además

$$f^{-1}(e_n) = ne_n \quad \text{y} \quad \left\|f^{-1}(e_n)\right\|_2 = n$$

de donde

$$\left\|f^{-1}\right\| = \sup_{\|x\| \le 1} \left\|f^{-1}(x)\right\|_2 \ge \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|f^{-1}(e_n)\right\|_2 = \infty$$

Por lo tanto, f^{-1} es un operador lineal no acotado. Esto implica que f^{-1} es discontinua en todo punto $y \in Y$

Observación: Recordemos que l^1 es denso en l^2 bajo la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$.

Teorema 2.3.5: Sea $G = F^{-1}: l^2 \to l^1 \subset l^2$ La inversa de la función de Mazur Para todo $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$ y $\varepsilon > 0$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que si $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ y $\|x - y\|_2 < \delta$, entonces

i) $|x_i| < 1$ y $|y_i| < 1$, para todo $i \ge N+1$

$ii)$ $\left\|x^{(N)}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$.

$iii)$ $\left\|y^{(N)}\right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

$iv)$ $\left\|\left(G(x)\right)^{(N)} - \left(G(y)\right)^{(N)}\right\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Demostración: Como $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, existe un número natural N tal que

$$|x_i| < \tfrac{1}{2} \text{ para } i \geq N+1 \text{ y } \left\|x^{(N)}\right\|_2 < \tfrac{\varepsilon}{4}$$

Tomemos $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Sea $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ tal que $\|x - y\|_2 < \delta$, entonces

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta,$$

por lo tanto, para todo $i \geq N+1$ se tiene que

$$|y_i| \leq |y_i - x_i| + |x_i| < \delta + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Además,

$$\left\|x^{(N)} - y^{(N)}\right\|_2 = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x - y\|_2 < \delta \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

de donde

$$\left|\left\|x^{(N)}\right\|_2 - \left\|y^{(N)}\right\|_2\right| \leq \left\|x^{(N)} - y^{(N)}\right\|_2 \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\left\|y^{(N)}\right\|_2 \leq \tfrac{\varepsilon}{4} + \left\|x^{(N)}\right\|_2 < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Finalmente, como $|x_i| < 1$, $|y_i| < 1$ para $i \geq N+1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left\|(G(x))^{(N)}-(G(y))^{(N)}\right\|_2^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty}\left[\operatorname{sgn}(x_i)x_i^2-\operatorname{sgn}(y_i)y_i^2\right]^2 \\
&= \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^4-2\operatorname{sgn}(x_i)\operatorname{sgn}(y_i)\,x_i^2y_i^2+y_i^4\right) \\
&\le \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^4+2x_i^2y_i^2+y_i^4\right) \\
&\le \sum_{i=N+1}^{\infty}\left(x_i^2+2x_i^2+y_i^2\right) \\
&= \sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^2+2\sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^2+\sum_{i=N+1}^{\infty}y_i^2 \\
&= \left\|x^{(N)}\right\|_2^2+2\left\|x^{(N)}\right\|_2^2+\left\|y^{(N)}\right\|_2^2 \\
&= 3\left\|x^{(N)}\right\|_2^2+\left\|y^{(N)}\right\|_2^2 \\
&< 3\left(\tfrac{\varepsilon^2}{16}\right)+\tfrac{\varepsilon^2}{4}=\tfrac{7\varepsilon^2}{16}<\tfrac{\varepsilon^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\left\|(G(x))^{(N)}-(G(y))^{(N)}\right\|_2<\tfrac{\varepsilon^2}{2}$$

Teorema 2.3.6: Sean $G=F^{-1}:l^2\to l^1\subset l^2$ la inversa de la función de Mazur, $x=(x_1,x_2,\cdot)\in l^2$, $\varepsilon>0$ y $N\in\mathbb{N}$. Entonces existe un $\delta>0$ tal que si $\|x-y\|_2<\delta$, entonces $\left\|(G(x))^{[N]}-(G(y))^{[N]}\right\|_2^2<\tfrac{\varepsilon^2}{2}$

Demostración: Note que la función

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\
f(t)=\operatorname{sgn}(t)t^2
\end{aligned}
$$

es continua en $\mathbb{R}$. Luego, para cada $i=1,2,\cdots,N$ existe un $\delta_i>0$ tal que:

$$|x_i-t|<\delta_i\Rightarrow\left(\operatorname{sgn}(x_i)x_i^2-\operatorname{sgn}(t)t^2\right)^2<\tfrac{\varepsilon^2}{2N}$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N\}$

Sea $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$ tal que $\|x - y\|_2 < \delta$ Entonces $|x_i - y_i| < \delta$ para todo $i = 1, 2, \cdots, N$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|(G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]}\right\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{N}\left(\operatorname{sgn}(x_i)x_i^2 - \operatorname{sgn}(y_i)y_i^2\right)^2 \\ &< N\left(\tfrac{\varepsilon^2}{2N}\right) = \tfrac{\varepsilon^2}{2}.\end{aligned}$$

Teorema 2.3.7: Sea $G = F^{-1} : l^2 \to l^1 \subset l^2$ la inversa de la función de Mazur Entonces G es continua en l^2

Demostración: Sean $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 2 3 5 existe un número $N \in \mathbb{N}$ y $\delta_1 > 0$ tal que

$$y \in l^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta_1 \Rightarrow \left\|(G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)}\right\|_2^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Luego, por el Teorema 2 3 6 existe un δ_2 tal que

$$y \in l^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta_2 \Rightarrow \left\|(G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]}\right\|_2^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego, si $y \in l^2, \|x - y\|_2 < \delta$; entonces

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\|^2 &= \left\|(G(x))^{(N)} + (G(x))^{[N]} - (G(y))^{(N)} - (G(y))^{[N]}\right\| \\ &\leq \left\|(G(x))^{(N)} - (G(y))^{(N)}\right\| + \left\|(G(x))^{[N]} - (G(y))^{[N]}\right\| \\ &< \tfrac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por consiguiente, G es continua en x, para todo $x \in l^2$.

Teorema 2.3.8: Sea $F: l^1 \subset l^2 \to l^2$ la función de Mazur Entonces F es discontinua en x, para todo $x \in l^1$

Demostración: Sea $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$ y $\delta > 0$. Probemos que existe un punto $y \in l^1$ tal que $\|x - y\|_2 < \delta$ y $\|F(x) - F(y)\|_2 > \frac{1}{2}$

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ Note que la función

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g_n(t) = \sqrt{|t| + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{|t|}$$

es continua en $\mathbb{R}$ Luego, $\lim_{t \to 0} g_n(t) = g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Por lo tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $g(t) > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ siempre que $|t| < \varepsilon$

Como $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$; lo que implica que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i| < \varepsilon$, siempre que $i > N$

Definamos la sucesión $y = (y_1, y_2, \cdots)$ por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\operatorname{sgn}(x_i)}{n}, & \text{si } N+1 \le i \le N+n \\ x_i \quad , & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Como $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$ y $y = (y_1, y_2, \cdots)$ sólo difieren en una cantidad finita de términos, se tiene que $y \in l^1$

Note que $\operatorname{sgn}\left(t + \frac{\operatorname{sgn}(t)}{n}\right) = \operatorname{sgn}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ Por lo tanto, $\operatorname{sgn}(x_i) = \operatorname{sgn}(y_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ Además,

$$\|x-y\|_2^2=\sum_{i=N+1}^{N+n}\tfrac{(-\operatorname{sgn}(x_i))^2}{n^2}=n\left(\tfrac{1}{n^2}\right)=\tfrac{1}{n}<\delta^2$$

de donde

$$\|x-y\|_2<\delta$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|F(x)-F(y)\|_2^2&=\left\|\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{2}},\cdots\right)-\left(\operatorname{sgn}(y_1)|y_1|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(y_2)|y_2|^{\frac{1}{2}},\cdots\right)\right\|_2^2\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{2}}-\operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{\left|x_i+\tfrac{\operatorname{sgn}(x_i)}{n}\right|}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{|x_i|+\tfrac{1}{n}}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|+\tfrac{1}{n}}-\sqrt{|x_i|}\right)^2\\
&=\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(g_n(x_i)\right)^2\\
&>\sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2,\ \text{ ya que } |x_i|<\varepsilon\\
&=n\left(\tfrac{1}{4n}\right)\\
&=\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

de donde, $\|F(x)-F(y)\|_2>\frac{1}{2}$.

De todo lo anterior se deduce que F es discontinua en x, para todo $x\in l^1$.

Como consecuencia de los resultados anteriores, se tiene el siguiente corolario

Corolario 2.3.5: Sea $G = F^{-1} : l^2 \to l^1 \subset l^2$ Entonces G es una biyección continua y $G^{-1} = F$ es discontinua en todo punto $x \in l^1$

Observación: Si $G : l^2 \to l^1$ es la inversa de la función de Mazur y la topología en l^1 es la inducida por la norma $\|\cdot\|_1$ entonces G es un homeomorfismo. Sin embargo, si en l^1 consideramos la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$, entonces la función $G : l^2 \to l^1 \subset l^2$ es una biyección continua, pero su inversa $G^{-1} = F : l^1 \subset l^2 \to l^2$ es discontinua en todo punto $x \in l^1$.

Definición 2.3.3: Sea $f : D(f) \subset l^2 \to l^2$ una función f es discontinua no acotadamente en todas partes si para todo $k, \delta > 0$ y $x \in D(f)$ existe un $y \in D(f)$ tal que

$$\|x - y\|_2 < \delta \quad \text{y} \quad \|f(x) - f(y)\|_2 > k.$$

Teorema 2.3.9: Sea $F : l^1 \subset l^2 \to l^2$ la función de Mazur Entonces F es discontinua no acotadamente en todas partes

Demostración: Sea $x = (x_1, x_2, \cdots) \in D(F) = G(l^2) = l^1 \subset l^2$ y sean $\varepsilon, k > 0$.

Denotemos $M = 2k$

Fijemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{M}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

y definamos la función

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g_n(t) = \sqrt{|t| + \tfrac{M^2}{n}} - \sqrt{|t|}$$

Como g_n es una función continua en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{t \to 0} g_n(t) = g_n(0) = \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

Por lo tanto, existe un $\delta > 0$ tal que

$$g(t) > \frac{M}{2\sqrt{n}}, \text{ para todo } t, |t| < \delta.$$

Como $x \in G(l^2) = l^1, \quad x = (x_1, x_2, \cdots)$ es absolutamente sumable

Por lo tanto, existe un N tal que

$$|x_i| < \delta \text{ para todo } i > N.$$

Consideremos la sucesión $y = (y_1, y_2, \cdots)$ definida por

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{\operatorname{sgn}(x_i) M}{n}, & \text{si } N+1 \leq i \leq N+n \\ x_i, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Luego $y \in l^1, \quad \operatorname{sgn}(x_i) = \operatorname{sgn}(y_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{i=N+1}^{N+n} \frac{(-\operatorname{sgn}(x_i))^2 M^2}{n^2} = n\left(\frac{M^2}{n^2}\right) = \frac{M^2}{n} < \varepsilon^2$$

de donde $\|x - y\|_2 < \varepsilon$. Finalmente,

$$\|F(x) - F(y)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\operatorname{sgn}(x_i)|x_i|^{\frac{1}{2}} - \operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\|F(x)-F(y)\|_2^2 &= \sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{\left|x_i+\frac{\operatorname{sgn}(x_i)M}{n}\right|}\right)^2 \\
&= \sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|}-\sqrt{|x_i|+\frac{M}{n}}\right)^2 \\
&= \sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\sqrt{|x_i|+\frac{M}{n}}-\sqrt{|x_i|}\right)^2 \\
&= \sum_{i=N+1}^{N+n}\left(g_n(x_i)\right)^2 \\
&> \sum_{i=N+1}^{N+n}\left(\frac{M}{2\sqrt{n}}\right)^2 \qquad \text{, ya que } |x_i|<\delta \\
&= \frac{M^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\|F(x)-F(y)\|_2 > \frac{M}{2} = k \text{, donde } \|x-y\|_2 < \varepsilon$$

Esto implica que F es discontinua no acotadamente en todas partes.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 2.3.9.

Corolario 2.3.6: Sea $F: l^1 \subset l^2 \to l^2$ la función de Mazur Entonces, para cada $x \in l^1$ existe una sucesión no acotada $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en l^1 tal que

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n - x\|_2 = 0 \quad \text{y} \quad \|F(x)-F(x^n)\|_2 > k_n$$

Finalizamos este capítulo presentando una interpretación geométrica del

Teorema 2 3.9 En efecto, sean $x \in l^2$, $R > 0$, $B = B(x,R)$ la bola abierta en l^2 de centro x y radio R

Como l^1 es denso en $(l^2, \|\cdot\|_2)$, existe un $x' \in l^1 \subset l^2$ y $R' < R$ tal que $B' = B(x',R') \subset B$. Por el Teorema 2.3 9 y el Corolario 2 3 6, existe una sucesión $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de B' que converge a x' en l^2 y una sucesión no acotada $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos tal que

$$\|F(x') - F(z^n)\|_2 > k_n.$$

Tomemos una subsucesión $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|x' - y^{n+1}\|_2 < \|x' - y^n\|_2 \text{, para todo } n \geq 1$$

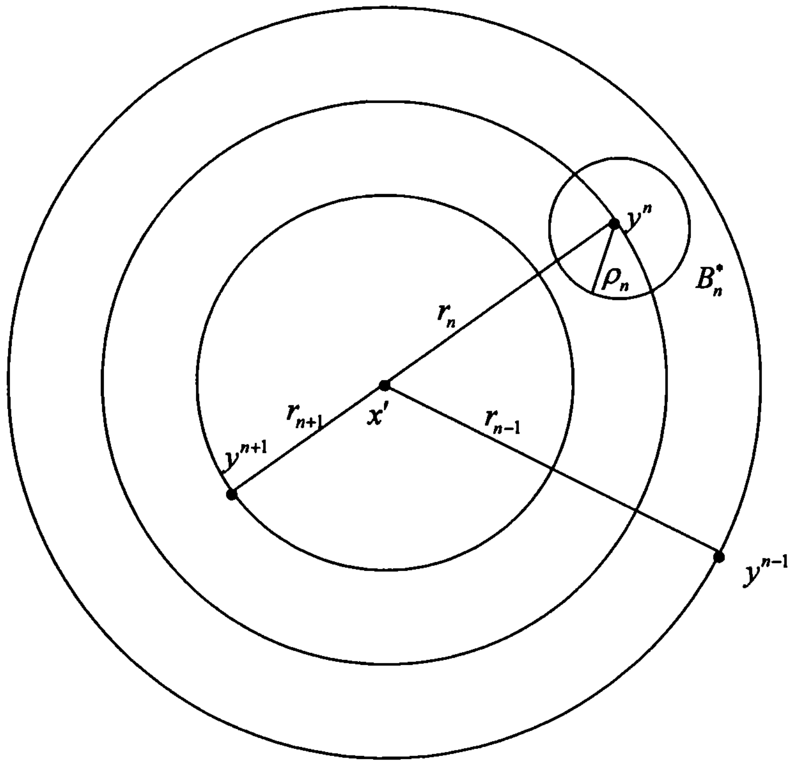
Luego, $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge monótonamente a x'.

Note que los miembros de la sucesión $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ son puntos de esferas concéntricas en l^2, cada una con centro en x' Denotemos

$$r_n = \|x' - y^n\|_2 \text{ y } S_n = S(x', r_n) = \{u \in l^2 . \|u - x'\|_2 = r_n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$\rho_n < \frac{\min(r_{n-1} - r_n, r_n - r_{n+1})}{2} \quad \text{y} \quad B_n^* = B(y^n, \rho_n)$$



$$\left\|y^{n-1}-y^n\right\|_2 \geq r_{n-1}-r_n$$

Luego $B_n^* \cap B_m^* = \varnothing$ si $n \neq m$. Por lo tanto, $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión mutualmente disjunta de bolas en $B' \subset B$, donde cada bola B_n^* está centrada en y^n

Por otro lado, como para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|F(x')-F(y^n)\right\|_2 > k_n$$

por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\left\|F(x')\right\|_2 + \left\|F(y^n)\right\|_2 > k_n$$

Como $\|F(x')\|_2$ es fijo y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no acotada de números reales positivos, se tiene que $\left\{\|F(y^n)\|_2\right\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente Por consiguiente, existe una subsucesión $\{w^n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|F(w^{n+1})\|_2 > 1 + \|F(w^n)\|_2 \text{, para todo } n \geq 1$$

Luego

$$\|F(w^n) - F(w^{n+1})\|_2 > 1$$

Note que la función $F^{-1} = G : l^2 \to l^1 \subset l^2$ es continua en $F(w^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ Por lo tanto, existe un ε_n, $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ tal que si $A_n = B(F(w^n), \varepsilon_n)$, entonces $F^{-1}(A_n) \subset B_n^* \subset B' \subset B$

Así pues, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión mutualmente disjunta de bolas en l^2

CAPÍTULO III
GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE HILBERT l^2

III. GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE HILBERT l^2.

En este capítulo determinaremos una familia no enumerable disjunta dos a dos de subconjuntos densos y convexos de l^2, lo cual marca una diferencia entre los espacios de Hilbert de dimensión finita y los espacios de Hilbert de dimensión infinita En lo que sigue supondremos que

$$l^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

3.1 SUBESPACIOS AFINES EN l^2.

Definición 3.1.1: Para cada número real c definamos el subconjunto X_c de l^1 por

$$X_c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = c \right\}$$

Teorema 3.1.1: Para cada número real c

$i)$ $X_c \subset l^2$

$ii)$ La función $f : l^1 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es un funcional lineal acotado y $\|f\| = 1$

$iii)$ X_c es un subconjunto cerrado de l^1

$iv)$ $l^1 = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} X_c$.

Demostración:

$i)$ Como $X_c \subset l^1$ y $l^1 \subset l^2$, se tiene que $X_c \subset l^2$

$ii)$ Como para todo $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente Por lo tanto, f está bien definida Además, claramente f es una función lineal Por otro lado, para todo $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$ se tiene que

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

Luego, f es un funcional lineal y $\|f\| \le 1$ Más aún, como

$$x = (1,0,0,\cdots) \in l^1 \quad \text{y} \quad |f(x)| = 1 = \|x\|_1$$

se tiene que $\|f\| = 1$

$iii)$ Como f es una función lineal continua y $X_c = f^{-1}(\{c\})$ se tiene que X_c es un subconjunto cerrado de l^1

$iv)$ Es claro que $\bigcup_{c \in \mathbb{R}} X_c \subset l^1$ Además, como para todo $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \in X_c$, donde $c = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ Por consiguiente,

$$l^1 = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} X_c$$

Teorema 3.1.2: Para cada $c \in \mathbb{R}$, X_c es denso como subconjunto de l^2.

Demostración: Sean $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ y $\varepsilon > 0$. Para cada par de números naturales N y M definamos

$$x^{[N]} := (x_1, x_2, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots)$$
$$s := x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

$$y := \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{N\text{-términos}}, \underbrace{\tfrac{c-s}{M}, \tfrac{c-s}{M}, \cdots, \tfrac{c-s}{M}}_{M\text{-terminos}}, 0, 0, \cdots \right)$$

$$z := x^{[N]} + y$$

Fijemos N lo suficientemente grande tal que

$$\left\| x - x^{[N]} \right\|_2 < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Fijemos ahora un M lo suficientemente grande tal que

$$\|y\|_2 = \left[M \left(\tfrac{c-s}{M} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{|c-s|}{M^{\frac{1}{2}}} < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Note que $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1 \subset l^2$ Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s + M \left(\tfrac{c-s}{M} \right) = c$$

Por lo tanto, $z \in X_c$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \|x - z\|_2 &= \left\| x - \left(x^{[N]} + y \right) \right\|_2 \\ &= \left\| \left(x - x^{[N]} \right) + y \right\|_2 \\ &\leq \left\| x - x^{[N]} \right\|_2 + \|y\|_2 \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

lo que implica que X_c es denso como subconjunto de l^2.

Teorema 3.1.3: Para cada $c \in \mathbb{R}$, X_c es convexo como subconjunto de l^2.

Demostración: Sean

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \text{y} \qquad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

dos elementos de X_c y $t \in \mathbb{R}$

Definamos

$$z := \{z_n\}_{n=1}^{\infty} := tx + (1-t)y = \{t\,x_n + (1-t)\,y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}|t\,x_n + (1-t)\,y_n| \\ &\leq |t|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| + |1-t|\sum_{n=1}^{\infty}|y_n| \\ &< \infty\end{aligned}$$

lo que implica que $z \in l^1$. Por lo tanto, $z \in l^2$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} z_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(t\,x_n + (1-t)\,y_n\right) \\ &= t\sum_{n=1}^{\infty} x_n + (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} y_n \\ &= t\,c + (1-t)\,c \\ &= c\end{aligned}$$

lo que implica que $z \in X_c$.

Así pues, $t\,x + (1-t)\,y \in X_c$ para todo $x, y \in X_c$ y $t \in \mathbb{R}$

Por consiguiente, X_c es convexo como subconjunto de l^2

Observaciones:

1) Sean $N_0 = N(f) = \{x \in l^1 : f(x) = 0\}$ y $z_0 \in X_c$

Entonces N_0 es un subespacio de l^1 y l^2 Además, $X_c = N_0 + z_0$, por lo tanto, X_c es un subespacio afín de l^2

2) El número real t en el Teorema anterior se ha tomado sin la restricción de que $t \in [0,1]$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces por el Teorema 3 1 1-(iii) X_c es un subconjunto cerrado de $(l^1, \|\cdot\|_1)$ Luego, como $X_c \neq l^1$, se tiene que X_c no es denso como subconjunto de $(l^1, \|\cdot\|_1)$, en contraste con el Teorema 3 1 2 que prueba que X_c es denso como subconjunto de $(l^2, \|\cdot\|_2)$

4) A diferencia de l^2, los subespacios afines de $\mathbb{R}^n$, diferente de $\mathbb{R}^n$, son convexos pero no densos en $\mathbb{R}^n$ El único subconjunto denso y convexo de $\mathbb{R}^n$ es él mismo

Teorema 3.1.4: Sea $\mathcal{K} = \{X_c : c \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{K}$ es una familia no enumerable disjunta dos a dos de subconjuntos densos y convexos de l^2

Demostración: Por la definición de X_c se tiene que $X_c = X_d$ si y sólo si $c = d$. Además, como $\mathbb{R}$ es no enumerable y cada conjunto X_c es denso y convexo en l^2, se tiene que $\mathcal{K}$ es una familia no enumerable disjunta dos a dos de subconjuntos densos y convexos de l^2

Consideremos la función de Mazur $F:l^1 \to l^2$ definida en la demostración del Teorema 2 3 2 Si $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, entonces

$$F(x)=\left(\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{1}{2}},\operatorname{sgn}(x_3)|x_3|^{\frac{1}{2}},\cdots\right).$$

Luego, F es biyectiva y $G=F^{-1}:l^2 \to l^1$ está definida por

$$G(y)=\left(\operatorname{sgn}(y_1)y_1^{\,2},\operatorname{sgn}(y_2)y_2^{\,2},\operatorname{sgn}(y_3)y_3^{\,2},\cdots\right)$$

donde $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$. Además, F y G son continuas

Como $l^1=\bigcup_{c\in\mathbb{R}} X_c$ es un subespacio de l^2, gracias a S Mazur, podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema

Teorema 3.1.5: La función $G:l^2 \to l^1=\bigcup_{c\in\mathbb{R}} X_c$ definida por Mazur es un homeomorfismo cuya imagen es la unión disjunta de una familia no enumerable de subconjuntos densos y convexos de l^2 Pero si en l^1 se considera la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$, entonces G^{-1} es discontinua en todo punto de l^1

3.2 ESFERAS EN l^2.

Recordemos que la bola abierta de centro x y radio r en l^2 es el conjunto $B(x,r)=\{y\in l^2:\|x-y\|_2<r\}$ La bola cerrada de centro x y radio r en l^2 es el conjunto $\overline{B}(x,r)=\{y\in l^2:\|x-y\|_2\leq r\}$ y la esfera de centro x y radio r en l^2 es $S(x,r)=\{y\in l^2:\|x-y\|_2=r\}$. Además,

- El interior de $\overline{B}(x,r)$ es $B(x,r)$
- La clausura de $B(x,r)$ es $\overline{B}(x,r)$
- $\overline{B}(x,r)$ y $S(x,r)$ son subconjuntos cerrados de l^2
- $B(x,r)$ es un subconjunto abierto de l^2.
- $B(x,r)$ y $\overline{B}(x,r)$ son subconjuntos convexos de l^2

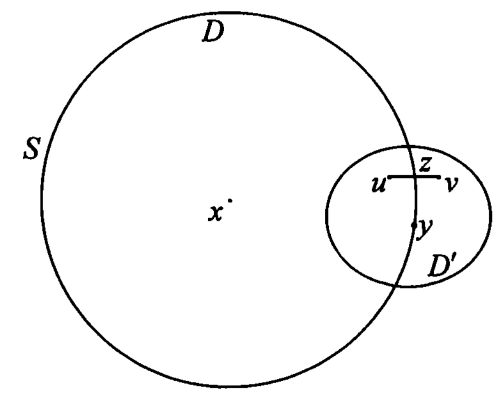
Teorema 3.2.1: Sean $S=S(x,r)$ una esfera en l^2 y $c\in\mathbb{R}$ Sean $y\in S$ y $\varepsilon>0$ Entonces existe un $z\in S\cap X_c$ tal que $\|z-y\|_2<\varepsilon$. En particular, $S\cap X_c$ es un subconjunto infinito y denso de S

Demostración: Sean $D=\overline{B}(x,r)$ y $D'=\overline{B}(y,\varepsilon)$ Como $y\in S\subset D$ se tiene que $B(x,r)\cap B(y,\varepsilon)\neq\varnothing$ Además, como $B(x,r)\cap B(y,\varepsilon)$ es un subconjunto abierto de l^2 y X_c es denso en l^2, se tiene que existe

$$u\in X_c\cap\left(B(x,r)\cap B(y,\varepsilon)\right).$$

De igual manera, como $y\in S$, existe un

$$v\in X_c\cap\left[B(y,\varepsilon)\cap\left(l^2-D\right)\right].$$



Note que

$$\|x-u\|_2 < r \text{ y } \|x-v\|_2 > r .$$

Definamos la función

$$f:[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(t) := \|x-(tu+(1-t)v)\|_2$$

Es obvio que f es una función continua en $[0,1]$ Por otro lado

$$f(0) = \|x-v\|_2 > r \quad \text{y} \quad f(1) = \|x-u\|_2 < r .$$

Luego, por el Teorema del Valor Intermedio existe un $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) = r$ Denotemos $z = t_0\, u + (1-t_0)v$ Como $u, v \in X_c$ y X_c es convexo, se tiene que $z \in X_c$. Además, como

$$\|x-z\|_2 = \|x-(t_0\, u+(1-t_0)v)\|_2 = f(t_0) = r$$

se tiene que $z \in S$ Por consiguiente, $z \in S \cap X_c$

Finalmente, como $u, v \in B(y,\varepsilon)$ y $B(y,\varepsilon)$ es convexo,

$$z = t_0\, u + (1-t_0)v \in B(y,\varepsilon)$$

Por lo tanto, $\|y-z\|_2 < \varepsilon$ Así pues, $S \cap X_c$ es denso en S, y por ende infinito

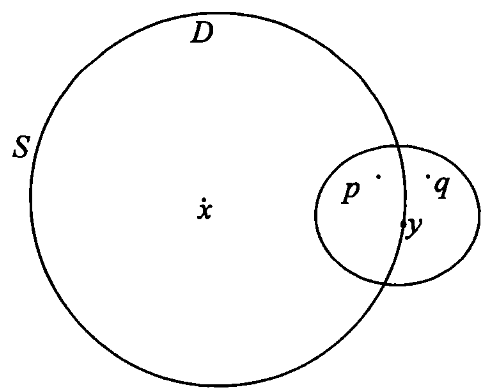
Teorema 3.2.2: Sean $S = S(x,r)$ una esfera en l^2, $y \in S$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ tal que $\|y-z\|_2 < \varepsilon$ y z no es sumable, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \notin \mathbb{R}$. Luego, $z \notin l^1$

Demostración:

Sean $D = \overline{B}(x,r)$ y $D' = \overline{B}(y,\varepsilon)$. Tomemos $h := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots) \in l^2$

Note que h no es sumable Euler probó que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; por lo tanto, $\|h\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ Como X_1 es denso en l^2, existen $p, q \in X_1$ tal que

$$p \in B(x,r) \cap B(y,\varepsilon) \quad \text{y} \quad q \in B(y,\varepsilon) \cap (l^2 - D)$$



Sea

$$\delta < \frac{\sqrt{6}}{\pi} \min\{r - \|p-x\|_2, \varepsilon - \|p-y\|_2, \|q-x\|_2 - r, \varepsilon - \|q-y\|_2\}$$

y definamos $u := \delta h$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x-(p+u)\|_2 &= \|(x-p)-u\|_2 \\ &\le \|x-p\|_2 + \|u\|_2 \\ &\le \|x-p\|_2 + \delta\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \\ &< \|x-p\|_2 + r - \|p-x\|_2 \\ &= r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y-(p+u)\|_2 &= \|(y-p)-u\|_2 \\ &\le \|y-p\|_2 + \|u\|_2 \\ &\le \|y-p\|_2 + \delta\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \\ &< \|y-p\|_2 + \varepsilon - \|p-y\|_2 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y-(q+u)\|_2 &= \|(y-q)-u\|_2 \\ &\le \|y-q\|_2 + \|u\|_2 \\ &\le \|y-q\|_2 + \delta\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \\ &< \|y-q\|_2 + \varepsilon - \|q-y\|_2 \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\|x-q\|_2 &\le \|x-(q+u)\|_2 + \|u\|_2 \\ &= \|x-(q+u)\|_2 + \delta\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)\end{aligned}$$

y

$$\|x-q\|_2 - \delta\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \le \|x-(q+u)\|_2$$

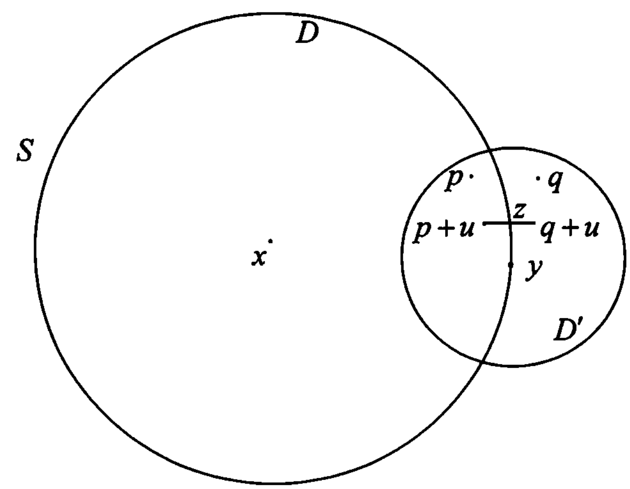
Luego, como

$$\delta\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) < \|x-q\|_2 - r$$

se tiene que

$$r < \|x-q\|_2 - \delta\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \leq \|x-(q+u)\|_2 .$$

Así pues, $p+u \in B(x,r) \cap B(y,\varepsilon)$ y $q+u \in B(y,\varepsilon) \cap (l^2 - D)$



Definamos la función

$$f \cdot [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = \|x-(t(p+u)+(1-t)(q+u))\|_2$$

Es obvio que f es una función continua en $[0,1]$. Además,

$$f(0) = \|x-(q+u)\|_2 > r \qquad \text{y} \qquad f(1) = \|x-(p+u)\|_2 < r$$

Luego, por el Teorema del Valor Intermedio, existe un $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) = r$ Denotemos

$$\begin{aligned} z &= t_0(p+u)+(1-t_0)(q+u) \\ &= t_0 p + (1-t_0) q + u. \end{aligned}$$

Luego, $\|x-z\|_2 = r$ y $z \in S$ Por otro lado, como $p+u, q+u \in B(y,\varepsilon)$ y $B(y,\varepsilon)$ es convexo, se tiene que $z \in B(y,\varepsilon)$; es decir, $\|y-z\|_2 < \varepsilon$ Finalmente, como $p,q \in X_1$, se tiene que p y q son absolutamente sumables Así, $t_0 p$ y $(1-t_0)q_0$ son sumables y $u = \delta h$ no es sumable. Por ende

$$z = t_0 p + (1-t_0)q + u$$

no es sumable, de donde $z \notin l^1$

Corolario 3.2.1: Sean $S = S(x,r)$ una esfera en l^2 y $c \in \mathbb{R}$ Entonces $S \cap X_c$ no es un subconjunto cerrado de l^2

Demostración: Por el Teorema 3 2 2 existe un $y \in S$ que no es sumable Por lo tanto, $y \notin l^1$ y $y \notin X_c$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el Teorema 3 2 1 existe un $z_n \in S \cap X_c$ tal que $\|z_n - y\|_2 < \frac{1}{n}$. Luego, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $S \cap X_c$ que converge a y Pero $y \notin X_c$, lo que implica que $S \cap X_c$ no es un subconjunto cerrado de l^2

Notación: Denotaremos por C el conjunto

$$C = \left\{x \in l^2 : x \text{ no es sumable}\right\}$$

Corolario 3.2.2: Sea $S = S(x,r)$ una esfera en l^2 Entonces $S \cap C$ no es un subconjunto cerrado de l^2.

Demostración: Por el Teorema 3 2 1 existe un $y \in S \cap X_1$ Por el Teorema 3 2 2 existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $S \cap C$ tal que $\|y - z_n\|_2 < \frac{1}{n}$

Así pues, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $S \cap C$ que converge al punto absolutamente sumable y. Esto implica que $S \cap C$ no es un subconjunto cerrado de l^2.

Teorema 3.2.3: Sean $x \in l^2$, $r > 0$, $D = \overline{B}(x,r)$ y $S = S(x,r)$ Sean $p \in B(x,r)$ y $q \in l^2 - D$ Sea $L = \{t\,p + (1-t)q : t \in \mathbb{R}\}$

Entonces

$i)$ Existe un único punto $y \in L \cap B(x,r)$ tal que $\langle y - x, q - p \rangle = 0$; es decir, $y - x \perp q - p$

$ii)$ Para cada $q \in l^2 - D$, la función

$$f_q \cdot B(x,r) \to L \cap B(x,r)$$
$$f_q(p) = y_p$$

es continua, donde y_p es el punto único dado en (i)

$iii)$ Existe un único $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\|y_p + t_0(q - y_p) - x\|_2 = \|x - (t_0 q + (1-t_0)y_p)\|_2 = r$$

El punto $z_p = t_0\,q + (1-t_0)y_p$ lo llamaremos, ***la proyección de*** p ***sobre*** S

$iv)$ La función

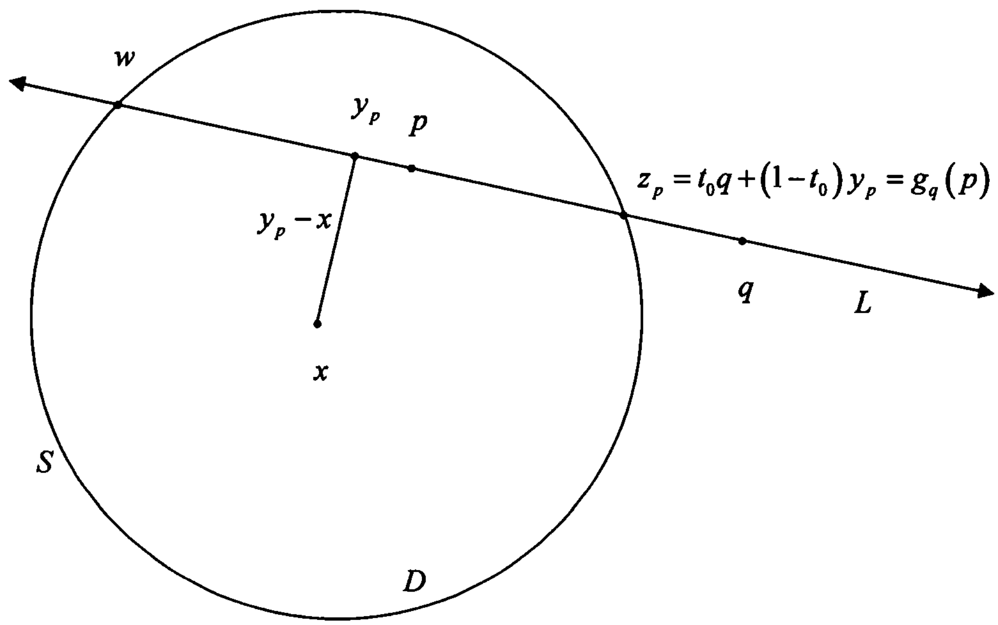
$$\tau_q : B(x,r) \to (0,1)$$
$$\tau_q(p) = t_p$$

es continua, donde t_p es el punto único $t_0 \in (0,1)$ dado en (iii)

$v)$ La función

$$g_q : B(x,r) \to S$$
$$g_q(p) = z_p = f_q(p) + \tau_q(p)\left[q - f_q(p)\right]$$

es continua



Demostración:

$i)$ De acuerdo a la idea en la figura anterior, y_p debe tener la forma

$$y = p + t(q-p) = tq + (1-t)p \text{ para algún } t \in \mathbb{R}$$

Para encontrar el punto y, resolvamos la ecuación $\langle y - x, q - p \rangle = 0$ En efecto,

$$\begin{aligned}0 &= \langle y-x, q-p\rangle \\ &= \langle p+t(q-p)-x, q-p\rangle \\ &= -\langle x-p, q-p\rangle + t\langle q-p, q-p\rangle\end{aligned}$$

de donde

$$t = \frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2} = t_p$$

Como x, p y q son fijos, se tiene que t_p es único. Así pues, $y_p = p + t_p(q-p)$ es el único elemento de L tal que $\langle y_p - x, q-p\rangle = 0$, es decir, $y_p - x \perp q-p$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|y_p - x\|_2^2 &= \langle y_p - x, y_p - x\rangle \\ &= \langle p + t_p(q-p) - x, p + t_p(q-p) - x\rangle \\ &= \langle p-x, p-x\rangle + t_p^2\langle q-p, q-p\rangle + t_p\langle p-x, q-p\rangle + t_p\langle q-p, p-x\rangle \\ &= \|p-x\|_2^2 + t_p^2\|q-p\|_2^2 + 2t_p\langle p-x, q-p\rangle \\ &= \|p-x\|_2^2 + \left(\frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2}\right)^2\|q-p\|_2^2 + 2\left(\frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2}\right)\langle p-x, q-p\rangle \\ &= \|p-x\|_2^2 + \frac{\langle x-p, q-p\rangle^2}{\|q-p\|_2^2} - 2\frac{\langle x-p, q-p\rangle^2}{\|q-p\|_2^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y_p - x\|_2^2 &= \|p-x\|_2^2 - \frac{\langle x-p, q-p\rangle^2}{\|q-p\|_2^2} \\ &\le \|p-x\|_2^2 \\ &< r^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_p \in B(x,r)$ Más aún, note que y_p es la mejor aproximación a x por elementos de L; es decir, $y_p = P_L(x)$.

$ii)$ Por lo probado en la parte (i) se tiene que la función f_q está definida por

$$\begin{aligned} f_q(p) &= y_p \\ &= p + t_p(q-p) \\ &= p + \frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2}(q-p). \end{aligned}$$

Como $\|q-p\|_2 \neq 0$ para todo $p \in B(x,r)$ y el producto interno es continuo, se tiene que f_p es una función continua en $B(x,r)$.

$iii)$ Ahora debemos buscar un punto $z \in S$ de la forma $z = y_p + t(q - y_p)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Para esto debemos resolver la ecuación

$$\left\| y_p + t(q-y_p) - x \right\|_2 = r$$

En efecto, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación y resolviendo obtenemos

$$\begin{aligned} r^2 &= \left\| y_p + t(q-y_p) - x \right\|^2 \\ &= \left\langle y_p + t(q-y_p) - x, y_p + t(q-y_p-x) \right\rangle \\ &= \left\langle y_p - x, y_p - x \right\rangle + t^2 \left\langle q-y_p, q-y_p \right\rangle + \left\langle y_p - x, t(q-y_p) \right\rangle + \left\langle t(q-y_p), y_p - x \right\rangle \\ &= \left\| y_p - x \right\|_2^2 + t^2 \left\| q - y_p \right\|_2^2 + 2t \left\langle y_p - x, q - y_p \right\rangle \end{aligned}$$

pero por (i)

$$\begin{aligned}\langle y_p - x, q - y_p\rangle &= \langle y_p - x, q - p - t_p(q-p)\rangle \\ &= \langle y_p - x, q - p\rangle - t_p\langle y_p - x, q - p\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego,

$$\|y_p - x\|_2^2 + t^2\|q - y_p\|_2^2 = r^2$$

y

$$t = \pm\frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2}$$

donde $r^2 - \|y_p - x\|^2 > 0$, ya que $y_p \in B(x,r)$ Así pues, $L \cap S$ consiste de exactamente dos puntos z y w. Tomaremos el punto $z = z_p$ correspondiente al valor

$$t_0 = \frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} > 0$$

Como $y_p - x \perp q - y_p$, por el Teorema de Pitágoras, se tiene que

$$r^2 < \|q - x\|_2^2 = \|(y_p - x) + (q - y_p)\|_2^2 = \|y_p - x\|_2^2 + \|q - y_p\|_2^2$$

de donde

$$0 < t_0 = \frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} < 1 \qquad \text{y} \qquad -1 < -t_0 = -\frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} < 0$$

Así pues,

$$t_0 = \frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2}$$

es el único elemento del intervalo $(0,1)$ tal que

$$\|y_p + t_0(q - y_p) - x\|_2 = r.$$

iv) De (iii) se tiene que la función $\tau_q : B(x,r) \to (0,1)$ está definida por

$$\tau_q(p) = \frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} = \frac{\sqrt{r^2 - \|f_q(p) - x\|_2^2}}{\|q - f_q(p)\|_2}.$$

Ahora bien, como f_q es una función continua y $\|q - f_q(p)\|_2 \neq 0$ para todo $p \in B(x,r)$, se tiene que la función τ_q es continua en $B(x,r)$

v) Como f_q y τ_q son continuas en $B(x,r)$ se tiene que g_q es continua en $B(x,r)$

Definición 3.2.1: Un subconjunto A de l^2 es un continuum si existe una función no constante, inyectiva y continua $f:[0,1] \to l^2$ tal que $f([0,1]) = A$

Teorema 3.2.4: Sean $S = S(x,r)$ una esfera de l^2 y $c \in \mathbb{R}$ Entonces, $S \cap X_c$ contiene un continuum

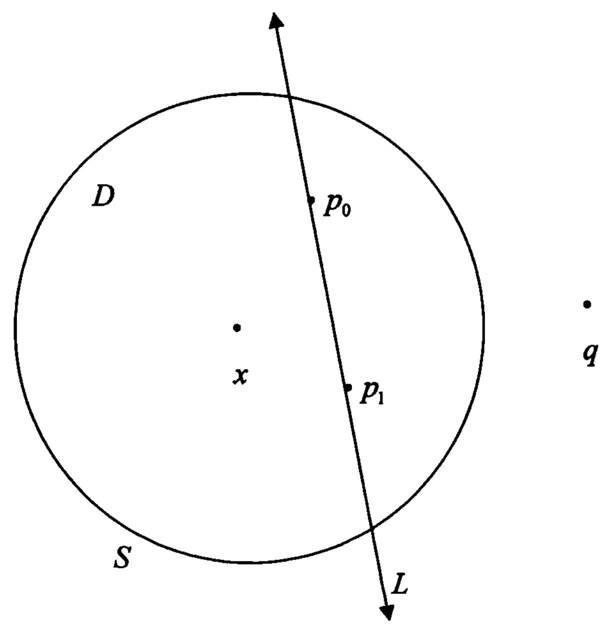
Demostración: Sea $D = \overline{B}(x,r)$. Por la densidad de X_c en l^2, existen puntos $p_0, p_1 \in X_c \cap B(x,r)$ tales que $p_0 \neq p_1$. Denotemos

$$L = \{p_0 + t(p_1 - p_0) / t \in \mathbb{R}\}$$

Como $(l^2 - D) \cap (l^2 - L)$ es un subconjunto abierto de l^2 y X_c es denso en l^2,

$$X_c \cap \left[(l^2 - D) \cap (l^2 - L)\right] = (X_c - D) \cap (l^2 - L) \neq \varnothing$$

Sea $q \in (X_c - D) \cap (l^2 - L)$



Definamos la función

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\to B(x,r) \subset l^2 \\ h(s) &= p_0 + s(p_1 - p_0) \\ &= s\, p_1 + (1-s)\, p_0. \end{aligned}$$

Es claro que h es una función continua en $[0,1]$ Además, como $B(x,r)$ es convexo, $h(s) \in B(x,r)$ para todo $s \in [0,1]$, es decir, $\|x - h(s)\|_2 < r$, para todo

$s \in [0,1]$

Consideremos las funciones f_q, τ_q y g_q definidas en el Teorema 3.2.3 y definamos la función

$$\begin{aligned} \gamma &: [0,1] \to S \\ \gamma(s) &= z_{h(s)} = f_q(h(s)) + \tau_q(h(s))\left[\left(q - f_q(h(s))\right)\right] \\ &= g_q(h(s)). \end{aligned}$$

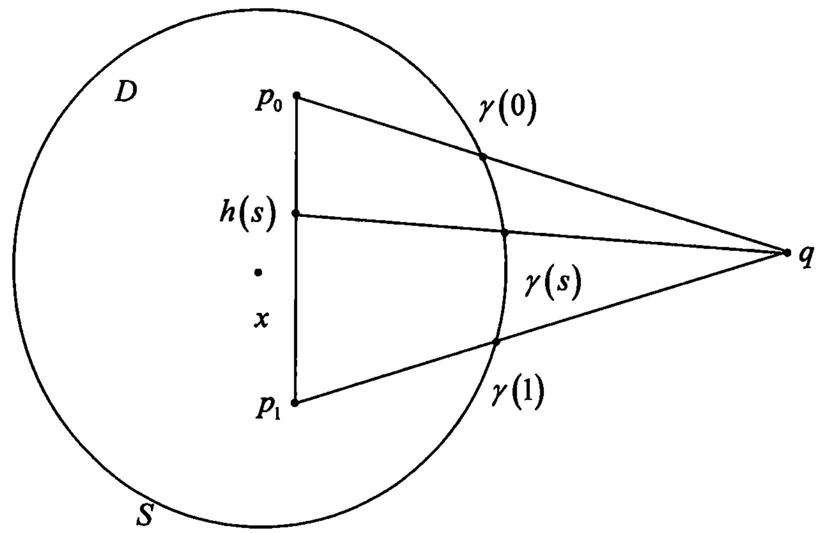
Note que por la parte (iii) del Teorema 3 2 3, se tiene que $\gamma(s) \in S$ para todo $s \in [0,1]$ Además, como $h(s) \in X_c$, por el Teorema 3 1 3 y la construcción del elemento $f_q(h(s))$, se tiene que $f_q(h(s)) \in X_c$ Luego, como X_c es convexo, $\gamma(s) \in X_c$ para todo $s \in [0,1]$.

Por otro lado, como h, τ_q y f_q son funciones continuas, se tiene que γ es una función continua en $[0,1]$.

Finalmente, probemos que γ es una función inyectiva En efecto, supongamos que existen $s_1, s_2 \in [0,1]$, $s_1 \neq s_2$, tales que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$. Entonces $z_{h(s_1)} = z_{h(s_2)}$ y $h(s_1) \neq h(s_2)$ Pero $h(s_1)$, $z_{h(s_1)}$ y q son colineales y $h(s_2)$, $z_{h(s_2)}$ y q son colineales

Luego, $h(s_1), h(s_2)$ y q son colineales

Como $p_0, p_1, h(s_1)$ y $h(s_2)$ son colineales, se tiene p_0, p_1, q son colineales, lo que es una contradicción Así pues, $\gamma : [0,1] \to S \cap X_c$ es inyectiva y $S \cap X_c$ contiene un continuum



3.3 CONEXIDAD POR CAMINOS.

A continuación probaremos que el Teorema 3 2 3 es también cierto si $p \in S(x,r)$

Teorema 3.3.1: Sean $x \in l^2$, $r > 0$, $D = \overline{B}(x,r)$ y $S = S(x,r)$ Sean $p \in S$ y $q \in l \subset l^2 - D$. Sea $L = \{p + t(q-p) / t \in \mathbb{R}\}$. Entonces.

i) Existe un único punto $y \in L \cap D$ tal que $\langle y-x, q-p \rangle = 0$, es decir, $y - x \perp q - p$.

ii) Para cada $q \in l^2 - D$, la función

$$f_q : B(x,r) \to L \cap D$$
$$f_q(p) = y_p$$

es continua, donde y_p es el punto único dado en (i)

$iii)$ Existe un único $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\left\| y_p + t_0 \left(q - y_p \right) - x \right\|_2 = \left\| x - \left(t_0 q + \left(1 - t_0 \right) y_p \right) \right\|_2 = r$$

El punto $z_p = t_0 q + \left(1 - t_0\right) y_p$ lo llamaremos, la proyección de p sobre S

$iv)$ La función

$$\begin{aligned} &\tau_q : S \to (0,1) \\ &\tau_q(p) = t_p \end{aligned}$$

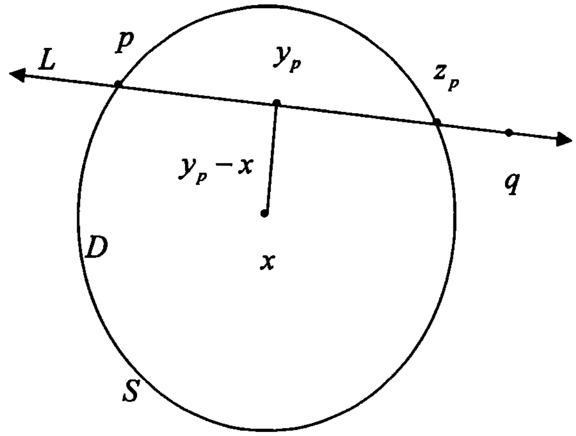
es continua, donde t_p es el punto único dado en (iii)

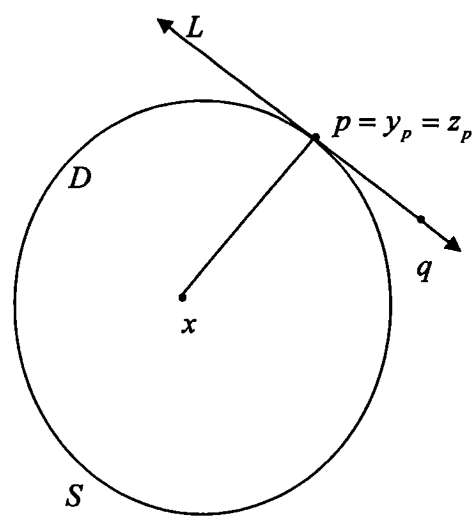
$v)$ La función

$$\begin{aligned} &g_q : S \to S \\ &g_q(p) = z_p = f_q(p) + \tau_q(p)\left[q - f_q(p) \right] \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:





$i)$ Siguiendo los pasos en (i) del Teorema 3 2 3, obtenemos el mismo único

$$t = \frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2} = t_p$$

tal que

$$y_p = p + t_p(q-p) \in L \quad \text{y} \quad \langle y_p - x, q-p\rangle = 0$$

Note que $x - p \perp q - p$ si y sólo si $t = 0$, es decir, $y_p = p$.

Por otro lado,

$$\|y_p - x\|_2^2 = \|p-x\|_2^2 - \frac{\langle x-p, q-p\rangle^2}{\|q-p\|_2^2}$$

De donde,

$$\|y_p - x\|_2 \leq \|p-x\| = r.$$

(Con igualdad si y sólo si, $\langle x-p, q-p\rangle = 0$) Por lo tanto, $y_p \in L \cap D$ En particular, $y_p \in S$ si y sólo si $\langle x-p, q-p\rangle = 0$.

$ii)$ Como la función $f_q : S \to L \cap D$ está definida por

$$\begin{aligned} f_q(p) &= y_p \\ &= p + \left(\frac{\langle x-p, q-p\rangle}{\|q-p\|_2^2}\right)(q-p) \end{aligned}$$

y $\|q-p\|_2 \neq 0$, se tiene que f_p es una función continua en S

$iii)$ Repitiendo el argumento en (iii) del Teorema 3 2 3 se obtiene que

$$0 \leq t_0 = \frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} < 1; \qquad -1 < -t_0 = -\frac{\sqrt{r^2 - \|y_p - x\|_2^2}}{\|q - y_p\|_2} \leq 0$$

y

$$z_p = y_p + t_0\left(q - y_p\right) \in S$$

Note que si $y_p \in S$, entonces $t_0 = 0$ y $z_p = y_p$ (Esto ocurre si y sólo si $x - p \perp q - p$, lo cual es equivalente a $y_p = p$, por la unicidad del punto y_p)

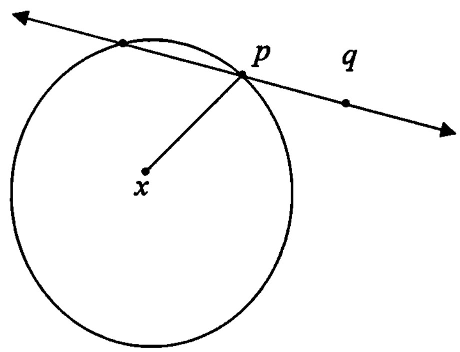
Así se tienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \langle x-p, q-p \rangle = 0 &\Leftrightarrow y_p = q \Leftrightarrow y_p \in S \Leftrightarrow z_p = y_p \\ &\Leftrightarrow L \cap S \quad \text{es un conjunto unitario.} \end{aligned}$$

Similarmente que en (iv) y (v) del Teorema 3 2 3 se tiene que las funciones τ_q y g_q son continuas en S

Observación: Si $\langle x-p, q-p \rangle \neq 0$ Entonces $L \cap S = \{z_p, w_p\}$ donde $z_p = y_p + t_p\left(q - y_p\right), w_p = y_p - t_p\left(q - y_p\right)$, además, $p \in L \cap S$. Si $\langle x-p, q-p \rangle = 0$, entonces $L \cap S = \{z_p\} = \{p\}$.

Teorema 3.3.2: Sean $x \in l^2$, $r > 0$, $D = \overline{B}(x,r)$ y $S = S(x,r)$ Sean $p \in S$ y $q \in l^2$ tal que $\langle x-p, q-p \rangle < 0$ Entonces $q \in l^2 - D$ y, por ende, se satisface el Teorema 3 3 1



Demostración:

Note que

$$\begin{aligned}0 > \langle x-p, q-p\rangle &= \langle x-p,(q-x)+(x-p)\rangle \\ &= \langle x-p, q-x\rangle + \langle x-p, x-p\rangle \\ &= \|x-p\|_2^2 + \langle x-p, q-x\rangle,\end{aligned}$$

de donde

$$\|x-p\|_2^2 < -\langle x-p, q-x\rangle = \langle x-p, x-q\rangle$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwars

$$0 < \|x-p\|_2^2 < \langle x-p, x-q\rangle = |\langle x-p, x-q\rangle| \le \|x-p\|_2 \|x-q\|_2$$

Así pues,

$$r = \|x-p\|_2 < \|x-q\|_2,$$

es decir, $q \in l^2 - D$ Por consiguiente, se satisface el Teorema 3.3.1

Teorema 3.3.3: Sean $x \in l^2$, $r > 0$, $D = \overline{B}(x,r)$ y $S(x,r)$ Sean $p \in S$ y $q \in l^2$ tal que $\langle x-p, q-p\rangle < 0$

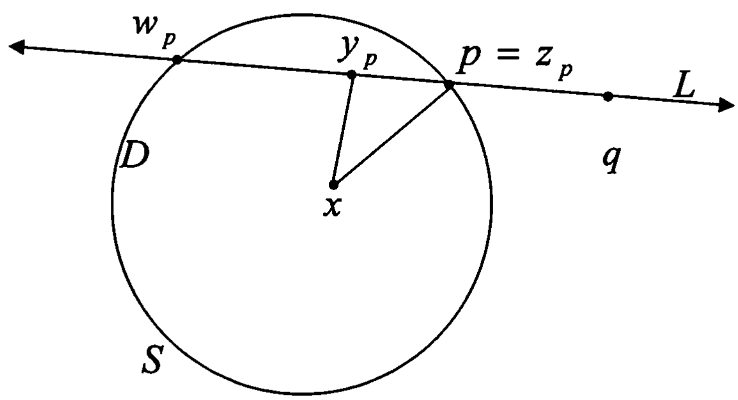
Sean $L=\{p+t(q-p)/t\in\mathbb{R}\}$ y $L\cap S=\{z,w\}$, donde

$$z_p=y_p+t_0(q-y_p),\quad w_p=y_p-t_0(q-y_p)$$

y

$$t_0=\frac{\sqrt{r^2-\|y_p-x\|_2^2}}{\|q-y_p\|_2}$$

son dados en los Teoremas 3 3 1 y 3 3.2. Entonces $z_p=p$



Demostración: De los Teoremas 3 2 3, 3 3 1 y 3 3 2, se tiene que

$$z_p=y_p+t_p(q-y_p) \text{ con } t_0\in(0,1) \text{ y } \langle x-y_q,q-y_q\rangle=0$$

Luego, como

$$p=y_p+\tau(q-y_p)\in\{z_p,w_p\}=L\cap S$$

se tiene que

$$\begin{aligned}0<\langle x-p,q-p\rangle &= \left\langle x-\left(y_p+\left(q-y_p\right)\right),q-\left(y_p+\tau\left(q-y_p\right)\right)\right\rangle \\ &= \left\langle x-y_p,q-y_p\right\rangle-\left\langle x-y_p,\tau\left(q-y_p\right)\right\rangle-\left\langle \tau\left(q-y_p\right),q-y_p\right\rangle+\tau^2\left\langle q-y_p,q-y_p\right\rangle \\ &= -\tau\left\|q-y_p\right\|_2^2+\tau^2\left\|q-y_p\right\|_2^2 \\ &= -\tau(1-\tau)\left\|q-y_p\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $0<\tau<1$ y $\tau=t_p$. Así pues, $z_p=p$

Teorema 3.3.4: Sean $S=S(x,r)$ una esfera en l^2 y $c\in\mathbb{R}$. Sean $p_0,p_1\in S\cap X_c$ tales que $p_0\neq p_1$ y no antipodales (o sea que p_0,p_1,x no son colineales) Entonces, existe un camino en $S\cap X_c$ con puntos terminales p_0 y p_1, es decir, existe una función continua $\gamma:[0,1]\to S\cap X_c$ tal que $\gamma(0)=p_0$ y $\gamma(1)=p_1$

Demostración: Como por el Teorema 3.2 1, $S\cap X_c$ es denso en S, existen dos puntos distintos p_0,p_1 en $S\cap X_c$ que no son antipodales.

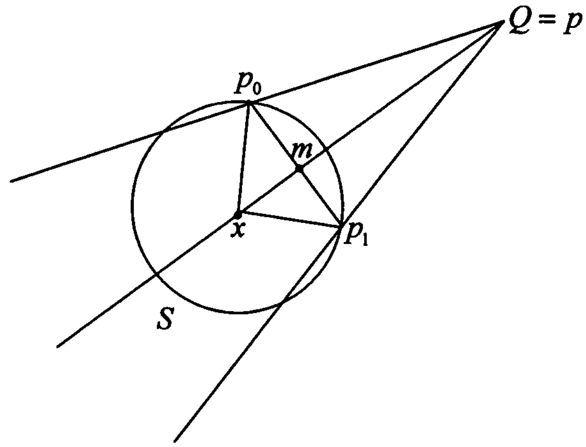
Probemos que existe un punto $q\in X_c$ tal que

$$\langle q-p_0,x-p_0\rangle<0 \text{ y } \langle q-p_1,x-p_1\rangle<0 \qquad (*)$$

En efecto, sea $m=\frac{1}{2}p_0+\frac{1}{2}p_1$ el punto medio del segmento

$$\overline{p_0p_1}=\left\{p_0+\lambda\left(p_1-p_0\right):\lambda\in[0,1]\right\}$$

Como p_0 y p_1 no son antipodales, $m\neq x$ Sea $Q=x+\lambda(m-x)$, para un $\lambda\in\mathbb{R}$ por determinar



Note que

$$\langle p_0 - x, p_0 - x\rangle = r^2 = \langle p_1 - x, p_1 - x\rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle m - x, x - p_0\rangle &= \left\langle \tfrac{1}{2}(p_0 + p_1) - x, x - p_0\right\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{2}(p_0 - x) + \tfrac{1}{2}(p_1 - x), x - p_0\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\langle p_0 - x, x - p_0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle p_1 - x, x - p_0\rangle \\
&= -\tfrac{1}{2}\langle p_0 - x, p_0 - x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle p_0 - x, x - p_1\rangle \\
&= -\tfrac{1}{2}\langle p_1 - x, p_1 - x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle p_0 - x, x - p_1\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{2}(p_1 - x), x - p_1\right\rangle + \tfrac{1}{2}\langle p_0 - x, x - p_1\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{2}(p_1 - x) + \tfrac{1}{2}(p_0 - x), x - p_1\right\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{2}(p_0 + p_1) - x, x - p_1\right\rangle \\
&= \langle m - x, x - p_1\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle Q - p_0, x - p_0\rangle &= \langle (x + \lambda(m - x)) - p_0, x - p_0\rangle \\
&= \langle x - p_0, x - p_0\rangle + \lambda\langle m - x, x - p_0\rangle \\
&= r^2 + \lambda\langle m - x, x - p_0\rangle \\
&= \langle x - p_1, x - p_1\rangle + \lambda\langle m - x, x - p_1\rangle \\
&= \langle x - p_1 + \lambda(m - x), x - p_1\rangle \\
&= \langle Q - p_1, x - p_1\rangle.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\langle m-x, p_0-x\rangle &= \langle (m-p_0)+(p_0-x), p_0-x\rangle \\ &= \langle m-p_0, p_0-x\rangle + \langle p_0-x, p_0-x\rangle \\ &= \langle m-p_0, p_0-x\rangle + r^2,\end{aligned}$$

pero por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\langle m-p_0, p_0-x\rangle| &\le \|m-p_0\|_2 \|p_0-x\|_2 \\ &\le \tfrac{1}{2}\|p_1-p_0\|_2 \|p_0-x\|_2 \\ &< \tfrac{1}{2}(2r)r \\ &= r^2\end{aligned}$$

ya que $\|p_1-p_0\|<2r$, lo cual implica que

$$\langle m-x, p_0-x\rangle > 0 \text{ y } \langle m-x, x-p_0\rangle < 0$$

Luego, como

$$\begin{aligned}\langle Q-p_0, x-p_0\rangle &= \langle Q-p_1, x-p_1\rangle \\ &= r^2+\lambda\langle m-x, x-p_0\rangle,\end{aligned}$$

si

$$\lambda > \frac{-r^2}{\langle m-x, x-p_0\rangle} = \frac{-r^2}{\langle \frac{1}{2}(p_0+p_1)-x, x-p_0\rangle} = \frac{r^2}{\langle \frac{1}{2}(p_0+p_1)-x, p_0-x\rangle}$$

se tiene

$$\langle Q-p_0, x-p_0\rangle = \langle Q-p_1, x-p_1\rangle < 0$$

donde $Q=x+\lambda(m-x)$.

Ahora bien, por la densidad de X_c en l^2 y la continuidad de la adición, el producto por un escalar y el producto escalar, existe un $q\in X_c$ lo suficientemente cercano a Q tal que

$$\langle q-p_0,x-p_0\rangle<0 \text{ y } \langle q-p_1,x-p_1\rangle<0$$

Por el Teorema 3 3.3 se tiene que $z_{p_0}=g_q(p_0)=p_0$ y $z_{p_1}=g_q(p_1)=p_1$

Finalmente, por la demostración del Teorema 3 2.4, la función

$$\begin{aligned}\gamma:[0,1]&\to S\cap X_c\\ \gamma(s)&=z_{h(s)}=g_q(h(s))\end{aligned}$$

es una función continua en $[0,1]$, donde

$$\begin{aligned}h:[0,1]&\to \overline{B}(x,r)\subset l^2\\ h(s)&=p_0+s(p_1-p_0).\end{aligned}$$

Además,

$$\gamma(0)=g_q(h(0))=g_q(p_0)=p_0$$

y

$$\gamma(1)=g_q(h(1))=g_q(p_1)=p_1.$$

Así pues, existe un camino en $S\cap X_c$ con puntos terminales p_0 y p_1

Teorema 3.3.5: Sean $S=S(x,r)$ una esfera en l^2 y $c\in\mathbb{R}$ Sean $p_0,p_1\in S\cap X_c$ puntos antipodales en S Entonces, existe un camino en $S\cap X_c$ con puntos terminales p_0 y p_1

Demostración: Sea $p_2\in S\cap X_c$ un punto que no es antipodal a p_0 y p_1. Luego, por el Teorema 3 3 4 existen funciones continuas

$$\gamma_1:[0,1]\to S\cap X_c \text{ y } \gamma_2:[0,1]\to S\cap X_c$$

tales que

$$\gamma_1(0) = p_0, \quad \gamma_1(1) = p_2 \text{ y } \gamma_2(0) = p_2, \quad \gamma_2(1) = p_1.$$

Sea $\gamma : [0,1] \to S \cap X_c$

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{si } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

entonces γ es una función continua tal que $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma(1) = p_1$

Definición 3.3.1: Un subconjunto $A \subset l^2$ es conexo por camino si para todo $x, y \in A$ existe una función continua $\gamma : [0,1] \to A$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ La función γ y el conjunto $\gamma([0,1])$ son llamados un camino de x en y

Teorema 3.3.6: Sea $S = S(x,r)$ una esfera en l^2 Entonces S contiene una familia no enumerable y disjunta dos a dos de subconjuntos conexos por caminos y densos en S

Demostración: Sea $J = \{S \cap X_c : c \in \mathbb{R}\}$ Entonces, como por el Teorema 3 1 4, $\mathcal{K} = \{X_c : c \in \mathbb{R}\}$ es una familia no enumerable y disjunta dos a dos de subconjuntos densos y convexos de l^2 y por el Teorema 3 2 1 $S \cap X_c$ es un subconjunto infinito y denso de S, se tiene que J es una familia no enumerable y disjunta dos a dos de subconjuntos infinitos y densos en S Finalmente, por los Teoremas 3.3.4 y 3 3 5, para cada par de puntos distintos $p_0, p_1 \in S \cap X_c$

existe una función continua $\gamma:[0,1]\to S\cap X_c$ tal que $\gamma(0)=p_0$, $\gamma(1)=p_1$. Por lo tanto, $S\cap X_c$ es conexo por caminos Así pues, J es una familia no enumerable y disjunta dos a dos de subconjuntos conexos por caminos y densos en S

Finalizamos este capítulo con un ejemplo que permite comprender mejor las propiedades geométricas de $X_c\cap S$

Ejemplo 3.3.1: Sean $S(x,r)$ una esfera en l^2 y $c\in\mathbb{R}$. Sean $p_0,p_1\in X_c\cap S$ y $q\in X_c$ tal que

$$q\notin L=\{p_0+t(p_1-p_0):t\in\mathbb{R}\}$$

El plano que contiene los puntos p_0,p_1 y q lo denotaremos por $\pi(p_0,p_1,q)$; así,

$$\begin{aligned}\pi(p_0,p_1,q)&=\{p_0+t(p_1-p_0)+s(q-p_0):t,s\in\mathbb{R}\}\\&=p_0+Y\end{aligned}$$

donde $Y=[p_1-p_0,q-p_0]$ es el subespacio de l^2 generado por los vectores p_1-q_0 y $q-p_0$

❖ Como $q\notin L$, se tiene que p_1-p_0 y $q-p_0$ son linealmente independientes; por lo tanto, $\dim(Y)=2$

❖ Como $p_0,p_1,q\in X_c$ y X_c es un subespacio afín de l^2, se tiene que $\pi(p_0,p_1,q)\subset X_c$

❖ Construyamos una nueva base ortonormal $\mathscr{B}^*=\{e_1^*,e_2^*,e_3^*,\cdots\}$ de l^2

de la siguiente manera tomemos

$$e_1^* = \frac{1}{\|p_1 - p_0\|}(p_1 - p_0) \in Y$$

Sea $e_2^* \in Y$ un vector unitario tal que $\langle e_1^*, e_2^* \rangle = 0$ Para $n \geq 3$, construyamos e_n^* por el proceso de Gram-Schmidt

Así, $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, \cdots\}$ es una base ortonormal de l^2 y $Y = [e_1^*, e_2^*]$

❖ Para cada $z = (z_1, z_2, \cdots) \in l^2$, denotemos $z' := z - p_0 = (z_1', z_2', \cdots)$ donde z_n son los coeficientes de Fourier de z con respecto a la base ortonormal usual $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ de l^2 y z_n' son los coeficientes de Fourier de z' con respecto a la base ortonormal $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$

❖ De las observaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} y = (y_1, y_2, \cdots) \in \pi(p_0, p_1, q) &\Leftrightarrow y - p_0 = y' = (y_1', y_2', \cdots) \in Y \\ &\Leftrightarrow y_n' = 0 \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Probemos que $\pi(p_0, p_1, q) \cap S$ es una circunferencia en $\pi(p_0, p_1, q)$ que pasa por los puntos p_0 y p_1 En efecto, note que

$$p_0' = (0, 0, \cdots), \quad p_1' = (p_1', p_2', 0, 0, \cdots), \quad x = (x_1', x_2', \cdots)$$

Sea $h' = (x_1', x_2', 0, 0, \cdots) \in Y$, entonces $h = h' + p \in \pi(p_0, p_1, q)$

Para cada $z' = (z_1', z_2', 0, 0, \cdots) \in Y$, se tiene que

$$\langle x' - h', z' \rangle = \langle (0, 0, x_3', x_4', \cdots), (z_1', z_2', 0, 0, \cdots) \rangle = 0$$

Por lo tanto, $x' - h' \in Y^{\perp}$ y h' es la (única) mejor aproximación a x' por elementos de Y (recuerde que la norma es independiente de la base ortonormal que se tome) Así pues, $h = h' + p_0$ es la (única) mejor aproximación a $x = x' + p$ por elementos de $p_0 + Y = \pi(p_0, p_1, q)$, es decir, $h = P_{\pi(p_0,p_1,q)}(x)$

Note que $h \neq p_0$, ya que de lo contrario se tendría que

$$h' = (x_1', x_2', 0, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots) = p_0$$

y

$$\|x - h\|_2 = \|x - p_0\|_2 = r = \|x - p_1\|_2$$

lo que contradice la unicidad de la mejor aproximación. Así pues, $x_1' \neq 0$ ó $x_2' = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|x - h\|_2^2 &= \|x' - h'\|_2^2 \\
&= \|(0, 0, x_3', x_4', \cdots)\|_2^2 \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} (x_n')^2 \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} (x_n')^2 \\
&= \|x'\|_2^2 \\
&= \|x - p_0\|_2^2 \\
&= r^2
\end{aligned}$$

por consiguiente, $h \in B(x, r) \cap \pi(p_0, p_1, q)$

Note que

$$\begin{aligned}
s \in S &\Leftrightarrow \|s - x\|_2^2 = r^2 \\
&\Leftrightarrow \|s' - x'\|_2^2 = r^2
\end{aligned}$$

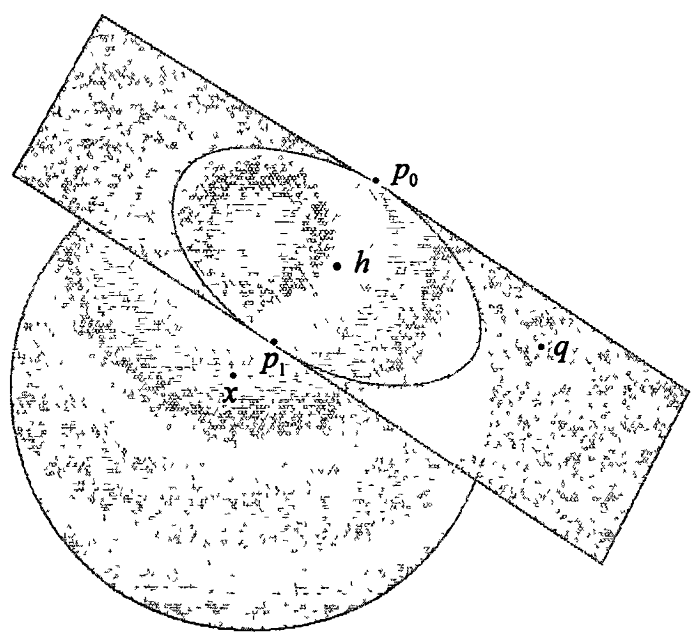
$$s \in S^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (s'_n - x'_n)^2 = r^2$$

y

$$\begin{aligned} s \in \pi(p_0, p_1, q) &\Leftrightarrow s' = (s'_1, s'_2, \cdots) \in Y \\ &\Leftrightarrow s'_n = 0 \quad \text{para todo } n \geq 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s \in \pi(p_0, p_1, q) \cap S &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (s'_n - x'_n)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad s_n = 0 \quad \text{para } n \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{2} (s'_n - x'_n)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (s'_n - x'_n)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad s_n = 0 \quad \text{para } n \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{2} (s'_n - x'_n)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (x'_n)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad s_n = 0 \quad \text{para } n \geq 3 \\ &\Leftrightarrow (s'_1 - x'_1)^2 + (s'_2 - x'_2)^2 = r^2 - \sum_{n=3}^{\infty} (x'_n)^2 \quad \text{y} \quad s_n = 0 \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$



Así pues, $s \in \pi(p_0, p_1, q) \cap S$ si y sólo si $s' = (s_1', s_2', 0, 0, \cdot)$ es elemento de la circunferencia en Y de centro h' y radio $\sqrt{r^2 - \sum_{n=3}^{\infty}(x')^2}$. Por consiguiente, $\pi(p_0, p_1, q) \cap S$ es la circunferencia en el plano $\pi(p_0, p_1, q)$ de centro h y radio $R = \sqrt{r^2 - \sum_{n=3}^{\infty}(x_n')^2}$. Note que, por construcción, p_0 y p_1 pertenecen a esta circunferencia

BIBLIOGRAFÍA

1 AKHIEZER, N I., GLAZMAN, I M. 1993 *Theory of Linear Operators ın Hılbert Space* Fırst Edıtıon. Dover Publıcatıons, Inc New York, 377 págs

2 ALIPRANTIS, C D , BORDER, K C 2006 *Infinıte Dımensıonal Analysıs* Third Edition Sprınger-Verlag, Berlın, 717 págs

3 ALIPRANTIS, C D., BURKINSHAW, O 1998 *Prıncıples of Real Analysıs* Third Edıtıon Academic Press, San Dıego, 424 págs

4 AMANN, H , ESCHER, J 2009 *Analysıs III* Fırst Edıtion Bırkhäuser Verlag AG, Basel, 476 págs.

5. ATHREYA, K B., LAHIRI, S.N. 2006. *Measure Theory and Probabılıty Theory* Fırst Edıtıon Springer-Verlag, New York, 624 págs

6 BALAKRISHNAN, A V 1976 *Applıed Functıonal Analysıs* First Editıon Sprınger-Verlag, New York, 322 págs

7. BANACH, S 1987 *Theory of Lınear Operatıons* Fırst Edıtıon Elsevier Scıence Publıshers B V , Amsterdam, 247 págs

8 BERBERIAN, S K. 1974 Lectures ın Functıonal Analysıs and Operator Theory Fırst Edıtıon Sprınger-Verlag, New York, 358 págs

9. BIRMAN, M S , SOLOMJAK, M Z 1987. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hılbert Space.* Fırst Edıtıon D Reıdel Puplishıng Company, Dordrecht, 313 págs

10 BOGACHEV, V I 2007 *Measure Theory* Volume I Fırst Edition Sprınger-Verlag, Berlin, 514 págs

11 BOGACHEV, V.I. 2007 *Measure Theory* Volume II First Edıtıon. Sprınger-Verlag, Berlın, 586 págs

12. BRIDGES, D S 1998 *Foundatıons of Real and Abstract Analysıs* Fırst Edıtıon Sprınger-Verlag, New York, 325 págs

13 CAPINSKI, M , KOPP, E 2004 *Measure, Integral and Probabılıty* Second Edıtıon Springer-Verlag, Berlın, 324 págs

14 COHEN, D W 1989 An Introductıon to Hilbert Space and Quantum Logıc Fırst Editıon Sprınger-Verlag, New York Inc, 161 págs

15. COHEN, G 2003 A Course ın Modern Analysıs and ıts Applicatıon First Editıon Cambrıdge Universıty Press, New York, 349 págs

16. CONWAY, J B 1985 *A Course ın Functıonal Analysıs* Fırst Edıtion Sprınger-Verlag, New York Inc , 418 págs.

17. CRESWELL, S H *Uncountably many mutually dısjoınt, dense and convex subsets of l^2 wıth applıcatıons to path connected subsets of spheres*, Mıssouri Journal of Mathematıcal Scıences, 21(2009), 163-174

18 CRESWELL, S H *Uncountably many mutually dısjoınt, sımply connected, contractible and Frechet dıfferentıable subsets of the sphere ın l^2,each of whıch ıs dense ın the sphere*, Mıssourı Journal of Mathematıcal Scıences, 22(2010), 3-9

19 CRESWELL, S H *A Continuous Bıjectıon from l^2 onto a subset of l^2 whose ınverse ıs everywhere dıscontınuous*, Amer. Math Monthly 117(2010), 823-827

20. CRESWELL, S.H *A Contınuous Bijectıon from l^2 onto a subset of l^2 whose ınverse ıs everywhere unboundedly dıscontınuous, with an applıcatıon to packing of balls ın l^2*, Mıssourı Journal of Mathematical Scıences, Volume 23, Issue 1 (2011), 12-18.

21 CURTAIN, R F , PRITCHARD, A J.1977 *Functıonal Analysıs ın Modern Applıed Mathematıcs* Fırst Edıtıon Academıc Press London, 348 págs

22. DEBNATH, L , MIKUSINSKI, P 2005 *Introductıon to Hılbert Spaces wıth Applıcations* Thırd Edıtıon Elsevıer Academıc Press, Amsterdam, 600 págs.

23 EIDELMAN, Y., MILMAN, V , TSOLOMITIS, A 2004 *Functıonal Analysıs An Introductıon* Fırst Edıtıon Graduate Studıes ın Mathematıcs Volume 66 Amerıcan Mathematical Socıety Provıdende, Rhode Island 339 págs

24. ENFLO, P *On the nonexıstence of uniform homeomorphısms between L_p-spaces*, Arkıv for Matematık 8(1969) 103-105

25 FABIAN, M , HABALA, P., HÁJEK, P , PELANT, J , MONTESINOS,V , ZIZLER, V 2001 *Functıonal Analysıs and Infınıte-Dımensıonal Geometry.* Sprınger-Verlag, New York Inc , 462 págs.

26. FOLLAND, G B. 1984 *Real Analysıs Modern Technıques and Theır Applicatıons* John Wıley & Sons, New York, 368 págs

27. FRIEDMAN, A 1970 *Foundatıons of Modern Analysıs* Dover Publıcations, Inc , New York, 258 págs

28 GAMELIN, T W , GREENE, R E. 1983. *Introductıon to Topology.* Saunders College Publıshıng, New York 347 págs

29 HALMOS, P R 1951 *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity* First Edition Chelsea Publishing Company, New York, 116 págs

30. HALMOS, P R 1974 *Measure Theory* First Edition Springer-Verlag, New York, 314 págs.

31 HUTSON, V , PYM, J S , CLOUD, M J 2005 *Applications of Functional Analysis and Operator Theory* Second Edition Elsevier, San Diego, 443 págs

32 KLEE Jr., V.L. *Dense Convex Sets*, Duke Math J , 16(1949), 351-354

33. KLEE Jr., V.L. *Convex Sets in linear spaces*, Duke Math. J., 18(1951), 443-466

34. KNAPP, A W 2005 *Basic Real Analysis* First Edition Birkhauser, Boston, 670 págs

35 KRALL, A M 2002 *Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials* First Edition Birkhàuser Verlag, Basel, 365 págs

36 KREYSZIG, E 1978 *Introductory Functional Analysis with Applications* First Edition John Wiley & Sons, New York, 706 págs

37 LANG, S 1996 *Real and Functional Analysis* Third Edition Springer-Verlag, New York, 596 págs

38 MACCLUER, B D 2009 *Elementary Functional Analysis.* First Edition Springer-Verlag, New York, 212 págs.

39. MAZUR, S. *Une Remarque sur L'homèomorphie des Champs Fonctionnels*, Studia Math., 1(1929), 83-85

40 MEISE, R , VOGT, D 1992 *Introduction to Functional Analysis* First Edition Oxford University Press Inc , New York, 447 págs

41 PEDERSEN, G K 1989 *Analysis Now* First Edition. Springer-Verlag, New York Inc., 291 págs.

42 ROYDEN, H L 1988 *Real analysis* Third Edition The Macmillan Company, London, 353 págs

43. RUDIN, W 1973 *Functional Analysis* First Edition McGraw-Hill Book Company, New York, 407 págs

44 RYNNE, B P , YOUNGSON, M.A. 2008. *Linear Functional Analysis.* Second Edition Springer-Verlag, London, 328 págs.

45 SAXE, K. 2002 *Beginning Functional Analysis* First Edition Springer-Verlag, New York Inc , 210 págs

46. SHIRALI, S , VASUDEVA, H L 2006 *Metric Spaces* First Edition Springer-Verlag, London, 229 págs

47 STEIN, E.M., SHAKARCHI, R 2005 *Real Analysis Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces* First Edition Princeton University Press, New Jersey, 423 págs

48 SZEKERES, P 2004 *A Course in Modern Mathematical Physics Groups, Hilbert Space and Differential Geometry*. 1ra Ed Cambridge University Press, New York, 613 págs

49. TUKEY, J W *Some Notes on the Separation of Convex Sets*, Portugal. Math , 3(1942), 95-102

50 TUY, H 1998 *Convex Analysis and Global Optimization* First Edition. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 353 págs

51 WEIR, A J 1973. *Lebesgue Integration and Measure* First Edition Cambridge University Press, London, 292 págs

52 WHEEDEN, R I , ZYGMUND, A 1977 *Measure and Integral An Introduction to Real Analysis* First Edition Marcel Dekker, Inc , 288 págs

53 WILLIAMS, R.K *Acontinuous linear bijection with discontinuous inverse*, Amer Math. Monthly 78(1971), 532-533

54. WOJTASZCZYK, P 1991 *Banach Spaces for Analysts*. First Edition Cambridge University Press, New York, 397 págs

55 YEH, J 2006 Real Analysis *Theory of Measure and Integration* Second Edition World Scientific, New Jersey, 761 págs

56 YOUNG, N 1988 *An Introduction to Hilbert Space* First Edition Cambridge University Press, Cambridge, 240 págs

57 ZALINESCU, C 2002 *Convex Analysis in General Vector Spaces*. First Edition World Scientific, New Jersey, 388 págs

58 ZEBALLOS, T 2009 *Normas que Generan Producto Interno* Santiago, Panamá Monografía Universidad de Panamá, Veraguas 30 págs

59. ZEBALLOS, T 2010 *Espacios de Hilbert Separables* Santiago, Panamá Monografía Universidad de Panamá, Veraguas 32 págs

60 ZEBALLOS, T 2010 *Geometría del Espacio* L^2 Santiago, Panamá Monografía Universidad de Panamá, Veraguas 30 págs

61 ZEIDLER, E 1995 *Applied Functional Analysis* First Edition. Springer-Verlag, New York Inc, 509 págs

62. ZENÍSEK, A *Convex Sets in Linear Spaces*, Portugal Math , 27(1968), 55-62