UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

LA ENSEÑANZA GEOMÉTRICA EN EL NIVEL SECUNDARIO
UNA PROPUESTA CURRICULAR PARA EL PRIMER CICLO

POR:

ISIDRO CHENG CAMAÑO

Tesis presentada como uno de los requisitos
para optar por el grado de Maestro en Ciencias
con Especialización en Matemática Educativa

Panamá, República de Panamá

1991

UNIVERSIDAD DE PANAMA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa Centroamericano de Maestría en Matemática

PANAMA, ______

Aprobado por:

Directora de Tesis Xenia C. de Moscote
Xenia C. de Moscote, M. A.

Miembro del Jurado Omar C. Oliveros
Omar Oliveros, M. Sc.

Miembro del Jurado Eduardo A. Steele
Eduardo Steele, M. Sc.

Fecha 29 de noviembre de 1991

DEDICATORIA

A mis queridas hijas, **Isis Estela, Gloria Cecilia e Iris Ibeth**, quienes constituyen un permanente estímulo en mi vida.

Isidro

AGRADECIMIENTO

Mi profundo agradecimiento a la distinguida Profesora **Xenia de Moscote**, cuyas acertadas indicaciones orientaron la realización de esta investigación.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Una opinión generalizada hoy día entre educadores y matemáticos, es que el estudio de la geometría en el nivel secundario debe ser reestructurado. No existe sin embargo, unidad de criterio en cuando a lo que debe enseñarse, al grado de axiomatización con el que debe exponerse; o a la forma como debe presentarse la geometría en esta etapa educativa.

Un análisis de las opiniones de destacados matemáticos y pedagogos sobre los aspectos relevantes del problema debe brindarnos un marco referencial adecuado. Algunos de estos aspectos medulares lo constituyen la elección de los contenidos geométricos de los programas, y su adecuación a los adelantos recientes, así como a los nuevos enfoques de la matemática contemporánea.

En nuestro país, la enseñanza de la geometría muestra un notable retraso respecto a otros países latinoamericanos. Los contenidos para esta materia fueron establecidos por el Ministerio de Educación en 1961 y aunque han sufrido leves modificaciones, hoy resultan obsoletos y alejados de las corrientes modernas del pensamiento matemático.

Un esfuerzo valioso para introducir reformas a los programas de matemática ocurrió en 1981, cuando la Universidad de Panamá, a través de la Escuela de Matemática, modificó la propuesta programática de 1972 para el Primer Ciclo Secundario. Lamentablemente esta labor no alcanzó los contenidos geométricos, los cuales no sufrieron alteración alguna.

Pero el aspecto de los contenidos es sólo una arista del problema. En el orden didáctico, se carece de textos adecuados, y una gran mayoría de nuestros docentes recurren a métodos y técnicas de enseñanza ampliamente superadas. Además, un número plural de educadores omiten en su programación la enseñanza de la geometría. Este estado de cosas es percibido por los padres de familia, docentes y autoridades educativas, pero poco se ha hecho por enfrentarlo.

Las consideraciones anteriores configuran el problema de esta investigación: La Enseñanza Geométrica en el Nivel Secundario. Una Propuesta Curricular para el Primer Ciclo.

Esta es una investigación de tipo educacional desarrollada en las siguientes fases:

a. Análisis de las opiniones y puntos de vista más relevantes.
b. Análisis de las opiniones de los especialistas y las tendencias cias actuales de su enseñanza.
c. Revisión de la metodología actual de su enseñanza y de las ofertas programáticas vigentes.
d. Organización de los principios didácticos rectores.
e. Determinación de los objetivos globales para cada nivel.
f. Organización y presentación de la propuesta.

El informe se presenta en tres capítulos. En el primero se recogen las más importantes opiniones sobre la problemática de la enseñanza geométrica en las escuelas. En el segundo, se presentan los dos indicadores más notables de la situación actual de su enseñanza: La forma como se expone, y los programas vigentes. En el tercero y último capítulo se presenta el aporte real de la investigación: una propuesta curricular para la enseñanza de la geometría en el Primer Ciclo que incluye un conjunto de principios didácticos orientadores.

Como en toda investigación de este tipo, existieron diversos factores que limitaron el alcance de este trabajo. La ausencia de información estadística confiable y el tiempo disponible para la experimentación, son algunos de ellos. Por lo tanto el aporte presentado no es una respuesta acabada al problema.

Abrigamos la esperanza que la misma, abra un amplio sendero en el desarrollo de investigaciones sobre este importante tema.

CAPÍTULO I

DIVERSIDAD DE CRITERIOS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN EL NIVEL MEDIO

La problemática de la enseñanza de la geometría ha planteado una amplia discusión en todos los niveles. ¿Qué geometría enseñar? ¿Cómo enseñarla? son algunos interrogantes esenciales de esa dialéctica. Con el propósito de escuchar los más importantes puntos de vista y los criterios más autorizados introducimos en esta sección inicial un amplio marco referencial. Las opiniones son diversas y la defensa de algunos planteamientos ha originado acaloradas discusiones entre matemáticos ilustres. Sin embargo, de estas controversias se han de generar conclusiones positivas.

1.1 En pro de la geometría de Euclides.

Aunque hoy día son pocos los defensores de la enseñanza de la geometría clásica, algunos lo hacen porque deben gran parte de su vocación matemática a esta visión de la instrucción geométrica. Otros quizás porque miran en los nuevos enfoques, el supuesto abandono de un pasado glorioso y se apegan al peso de la tradición. Pero de uno u otro modo han sabido utilizar la confusión y los prejuicios respecto a la matemática moderna. Veamos algunas de las autorizadas opiniones:

> "Los Elementos" del gran alejandrino persisten en todos los tiempos como el primero, y uno pudiera aventurarse a aseverar, el único modelo perfecto de exactitud lógica de los principios y de desarrollo riguroso de los teoremas. Quienquiera ver cómo puede construirse y desarrollarse una ciencia hasta en sus detalles más diminutos a partir de un número muy pequeño de axiomas, postulados y sencillas definiciones, percibidos intuitivamente, mediante riguroso, uno pudiera casi decir casto, silogismo, que en ningún momento hace uso de ayudas subrepticias o foráneas, quienquiera ver cómo puede construirse una ciencia de esta manera, debe recurrir a los Elementos de Euclides".

[Hankel, 2 : 1822]

Este argumento, válido hace un siglo, ha sido ampliamente refutado por la existencia de estructuras axiomáticas distintas a la de Euclides que permiten un adecuado estudio de la geometría elemental.

El siguiente argumento pertenece al segundo grupo de los defensores del tratamiento clásico de la geometría:

> "En Inglaterra la geometría estudiada es la de Euclides, y espero que nunca será otra; y la razón es esta: tanto se ha escrito sobre Euclides, y todas las dificultades de la geometría han sido tan uniformemente consideradas tomando como referencia la forma en que ellas aparecen en Euclides, que el estudio de este autor es la mejor llave para una gran cantidad de lecturas útiles."
>
> [De Morgan, 2: 1819]

Finalmente, un criterio eclético es el que nos plantea Botsh:

> "Los propósitos de la instrucción moderna en las escuelas trascienden los límites de Euclides menos de lo que podríamos esperar. Por ello, las ideas básicas de la geometría euclidiana deberan considerarse, cualquiera sea la geometría que se enseñe".
>
> [5: 296]

1.2 Objeciones al Programa Euclidiano.

La amplia revisión de los fundamentos de la geometría de Euclides que concluyeron con los trabajos de Hilbert en las postrimerías del siglo pasado dejaron al descubierto numerosas fallas lógicas. La crítica posterior ha sido despiadada, Rusell por ejemplo señala:

"Los rígidos métodos empleados por los geómetras modernos depusieron a Euclides de su pináculo de validez. Hasta hace muy poco tiempo se creía que Euclides tenía sólo dos fallas: la teoría de las paralelas y la de la proporción. Hoy sabemos que éstos son casi los únicos puntos en que Euclides se halla a cubierto de objecciones. En cambio, sus primeras ocho proposiciones encierran un sinfín de errores. Es decir, no sólo es dudoso que sus axiomas sean verdaderos, cosa relativamente desprovista de importancia, sino que es seguro que sus proposiciones no se deducen de los axiomas que él enuncia. La prueba de sus proposiciones requiere un número de axiomas mucho mayor que Euclides emplea inconscientemente. Aún en la primera de sus proposiciones en la cual construye un triángulo equilátero sobre una base dada emplea dos círculos que se supone se intersecan. Pero ningún axioma explícito nos asegura que se intersecan, y, en algunas clases de espacio no siempre lo hacen. Es harto dudoso que nuestro espacio pertenezca o no a una de esas clases . De esta suerte, Euclides deja por entero de probar su tesis en su misma proposición primera. Y como por cierto es un autor nada fácil y terriblemente pesado, no posee ya sino un interés histórico. Así pues, constituye en verdad un escándalo el que aún se lo siga enseñando a los niños en Inglaterra. Un libro debe ser fácil de comprender o exacto; combinar las dos cosas es imposible, pero un libro que carece de ambas es indigno de ocupar un lugar como el que el texto de Euclides ha ocupado en la educación".

[20 : 97 - 98]

Bourbaki parece precisar mucho más donde están algunas de las fallas:

"La definición (del ángulo) de Euclides es tan vaga e inutilizable como la que él da para la recta y el plano.
No se destaca la noción de orientación, a pesar de que Euclides utiliza (sin axioma ni definición) el hecho de que una recta divide el plano en dos regiones, que él distingue cuidadosamente cuando es necesario.

En este estudio, la idea del grupo de las rotaciones planas no aparece sino de manera muy imperfecta, mediante la adición (introducida, ésta también, sin explicación por Euclides) de ángulos no orientados, de semi-rectas, la cual sólamente está definida, en principio, cuando la suma a lo más iguala dos rectos.

Se encuentran sin embargo, en Euclides por lo menos dos pasajes donde habla de ángulos cuya "suma" puede ser mayor que 2 rectos, a saber desigualdades que satisfacen las caras de un triedro (Elementos, libro XI, pro.20 y 21) (sin hablar del razonamientc concerniente a la "medida" de los ángulos, que duda una una interpolación; en estos dos pasajes, Euclides parece haberse dejado llevar por la intuición más allá de lo que autorizan sus propias definiciones)

Los desplazamientos son conocidos por Euclides; pero por razones que ignoramos, parece experimentar una neta repugnancia a servirse de ellos (por ejemplo, en los "casos de igualdad de triángulos", en donde se tiene la impresión de que él no emplea la noción de desplazamiento sino por no haber sabido formular un axioma apropiado)".

[1 : 159- 160]

Para algunos como Sivester, la persistencia dentro del programa escolar, de la geometría de Euclides, es nefasta. No obstante, reconoce la importancia de la geometría en el estudio de la matemática:

"Me regocijaría ver...a Euclides honorablemente arrinconado o enterrado" más hondo que lo estuvo jamás sonda de plomo alguna", fuera del alcance de los escolares.

...El estudio prematuro de Euclides hizo de mí alguien que odia la geometría... y sin embargo, a pesar de esta repugnancia, que se me volvió una segunda naturaleza, cuandoquiera que profundizo bastante en una cuestión matemática, me doy cuenta de que he tocado, finalmente, un fondo geométrico."

[2: 1825]

Estas observaciones y objeciones originaron las cada vez más numerosas voces que exigen que la reforma en la enseñanza de la matemática, y en especial de la geometría, elimine todo vestigio de Euclides. A este respecto señala Heaviside:

"En cuanto a necesidad de mejoramiento no puede haber cuestionamñiento mientras continúe el reino de Euclides. Mi opinión personal de un curso útil es comenzar con aritmética, y luego, no Euclides, sino álgebra. En seguida no Euclides sino geometría práctica, tanto plana como sólida: nada de demostraciones sino familiarización. Después, no Euclides, sino vectores, elementales, mezclados con álgebra y aplicados a la geometría. La adición primero, luego el producto escalar. Simultáneamente se puede ver un poco de cálculo elemental y finalmente llegar hasta geometría algebraica vectorial. Euclides puede ser un curso extra para hombres sabidos, como Homero. Pero Euclides para niños es bárbaro (But Euclid for children is barbarous)."

[2: 1828]

A pesar de todo, la geometría de Euclides sigue ocupando una porción considerable del currículo secundario en nuestro país. Una frecuente justificación a ello, es el necesario reentrenamiento a que deberán someterse muchos docentes, así como la necesidad de elaborar nuevos textos. Pero esto no es imposible y debe hacerse cuanto antes.

1.3 Foso entre la enseñanza secundaria y universitaria.

Los acontecimientos y descubrimientos que en el último siglo ocurrieron en áreas de la matemática, como el álgebra, (matrices, conjuntos, grupos, campos y espacios vectoriales), tenían que penetrar los programas de matemática de la escuela secundaria. Para los años cincuenta, el desfase entre secundaria y universidad, debido a la evolución de la investigación y de la enseñanza superior, se consideraba que era infranqueable. Como no se había producido una evolución similar en los programas de enseñanza, existía una acumulación de temas en la universidad que colmaban el tiempo disponible y para los cuales los estudiantes no estaban preparados, formados como estaban, de acuerdo a programas atrasados respecto al ritmo de la enseñanza superior.

Para superar estas dificultades se sugerían medidas como las siguientes:

> "Tenemos que iniciar, cada vez más rápidamente, a los jóvenes, en el estudio de conocimientos cada vez más profundos, y ya no parece posible recrearse en enseñarles sucesivamente las técnicas de los geómetras griegos, de la geometría analítica cartesiana, y de la geometría del siglo XIX, antes de revelarles la ciencia contemporánea."
>
> [Leray, 7 : 177]

> "Dado que no hay rechazo posible de la nueva situación en los estudios universitarios de matemática, ni esperanza de alargar los años de estudios dedicados a las matemáticas, hay una apretura, (squeeze) en el recorrido de tal estudio. La única solución es que la escuela secundaria tome una parte de la carga actual de la universidad, quizá tanta como sea compatible con la habilidad intelectual de los alumnos de la secundaria."
>
> [Resumen, 5 : 356]

De estas recomendaciones se infiere la necesidad de introducir cambios en los programas de secundaria de modo que sus alumnos pudieran adaptarse más fácilmente a los cursos de enseñanza superior y seguirlos sin tropiezos. Pero esto no es posible, como lo advierte Leray, sin suprimir temas que, para la segunda mitad del siglo XX, ya no tenían la importancia que se les había dado antes.

1.4 Objetivos de la enseñanza de la geometría.

El por qué se enseña geometría es una pregunta fundamental, tal vez la más importante entre las interrogantes que se plantean al considerar su enseñanza: ¿Qué geometría enseñar? ¿por qué y cómo? ¿ a quiénes? ¿en qué orden? La respuesta ha variado de acuerdo a la época y a los fines de la sociedad. Así por ejemplo, para Platón su enseñanza era importante para la formación militar:

> " Es evidente que esa parte de la geometría que concierne a la estrategia nos importa. Porque al sentar un campo o al ocupar posiciones, al concentrar o al extender las líneas de un ejército o al efectuar todas las maniobras acostumbradas en una batalla o en la marcha, habrá una gran diferencia entre un general que conoce la geometría y otro que no".
>
> [2 : 1844]

Para Goetting, sin embargo, el objetivo debe ser esencialmente teòrico:

> "La instrucciòn matemàtica debe tener como primer objetivo una profunda penetraciòn de la teorìa matemàtica abstracta y una habilidad en ella junto con una clara visiòn de la estructura del sistema, y no dudo de que la instrucciòn que logra ésto es valiosa e interesante, aunque descuide las aplicaciones pràcticas".
>
> [2: 507]

Carson, por su parte, lo ubica en el desarrollo del razonamiento lògico y en el empleo de un lenguaje preciso:

> "La afirmaciòn de que alguien ha recibido un sano entrenamiento geométrico implica que él ha segregado de la totalidad de las impresiones de sus sentidos un cierto conjunto de ellas, que ha desarrollado sobre esa base un sistema ordenado y contínuo de deducción lógica, y, finalmente, que es capaz

de expresar la naturaleza de dichas expresiones y sus deducciones al respecto, en términos sencillos y carentes de ambiguedad."

[2: 1841]

Según la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de Matemática, en un artículo de American Report, publicado en 1912, para la enseñanza de la matemática ,se deben tener presente dos finalidades: Primera, el estímulo de la facultad inventiva, la ejercitación del juicio, el desarrollo del razonamiento lógico y el hábito de la exposición concisa. Segunda, la asociación de las ramas de las matemáticas puras entre sí, y con la ciencia aplicada, de modo que el alumno pueda ver claramente las relaciones verdaderas de los principios y las cosas. " Pero allí mismo advierte, que la misma no debe constituir en forma alguna un tipo particular de instrucción:

> "En la escuela secundaria, la matemática debe ser parte de la cultura general y no una contribución a cualquier clase de entrenamiento técnico; debe cultivar la intuición espacial, el pensamiento lógico, la capacidad de expresar en lenguaje claro, pensamientos reconocidos como verdaderos, así como efectos éticos y estéticos."

[American Report, 1912, 2: 501]

Si bien algunos de los anteriores son objetivos generales de la enseñanza de la matemática, la tendencia actual a integrar la geometría con las estructuras de la matemática elemental, hace que éstos sean también objetivos de la enseñanza de la geometría. No obstante, según la UNESCO es conveniente distinguir tres objetivos especiales de la enseñanza actual de la geometría elemental:

> "Hay ciertas particularidades y factores psicológicos en el tratamiento geométrico de las estructuras algebraicas, que conducen a distinguir objetivos especiales de la enseñanza de la geometría. Entre ellos podemos señalar los siguientes:
> a. La simple matematización del espacio físico y aplicaciones directas de ello.
> b. La iniciación en el estudio de las estructuras fundamentales de la matemática contemporánea y el refinamiento de la intuición geométrica.
> c. La iniciación a los aspectos formales del razonamiento matemático."
>
> [9: 303 - 305]

1.5 El lugar de la geometrìa dentro de la educaciòn matemàtica. Modelos matemàticos.

Hoy dìa la palabra geometría casi no se menciona en los planes de estudio de muchas universidades, y es sumamente raro encontrar un artículo de investigación bajo este nombre, salvo los de algunos estudiosos de sus fundamentos. Sin embargo, desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática conviene analizar el lugar y el papel que la geometría elemental debe tener. Respecto a esto el matemático francés André Revuz nos dice:

> "¿Tiene sentido creer, hoy día, en la existencia de una parte relativamente independiente de las matemáticas denominada geometría?. En tanto que matemático, mi respuesta es, indublemente negativa. Pero si se me pregunta acerca de si debe enseñarse geometría contestaré sin la menor duda que sí."
>
> [9 : 292]

Para Revuz, esta aparente contradicción se origina en las distintas connotaciones que tiene la palabra geometría, a la que considera como el estudio de un espacio euclídeo de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales y provisto de un producto escalar.

Al referirse a la conveniencia de enseñar geometría, concebida de esa manera, el matemático galo señala que el contexto en el que nacen y se desenvuelven las matemáticas puede resumirse en tres conceptos: situación, modelo y teoría. "Una situación es una porción de la realidad que hemos separado de su entorno y que queremos considerar en sí misma". Al considerar una situación, damos el primer paso hacia la abstracción, que se hace evidente con la construcción de modelos. "Un modelo, es todo esquema de la situación, de sus características esenciales, descritas en términos matemáticos". Por ello, dada una situación, resultará posible encontrar diversos modelos de ella, e inversamente, un mismo modelo puede representar distintas situaciones. La búsqueda del mejor modelo es tarea difícil, pero éste debe ser de fácil empleo, multivalente, y adecuarse a la situación. Revuz define la multivalencia del modelo, como su capacidad de adecuarse a situaciones diferentes. Finalmente, la teoría surge, cuando siguiendo este proceso de abstracción, olvidamos cualquier referencia a la situación considerada, para dedicarnos exclusivamente a la estructura misma del modelo.

Para Revuz, toda educación matemática debe dar suficiente importancia al paso de situaciones a modelos y teorías, y viceversa, ya que dos peligros amenazan constantemente la enseñanza:

1. Confundir situación y modelo, estudiando el modelo como si fuese la situación misma.
2. Aislar excesivamente una situación y su modelo dejando de lado uno de ellos.

El paso de la situación al modelo correspondiente, que denomina matematización, es una actividad que debemos tener siempre presente en la enseñanza.

Después de mencionar algunos errores en que incurren los docentes de secundaria, Revuz concluye indicando los siguientes principios que de acuerdo a sus planteamientos, pueden orientar la enseñanza geométrica:

(1) La geometría no debe ser enseñada aisladamente, por el contrario debe relacionarse estrechamente con todas las matemáticas.

(2) El espacio real debe ser estudiado de tantas maneras como sea posible.

(3) La enseñanza de la geometría debe iniciarse en el jardín de infancia.

(4) En las condiciones en que se encuentra la enseñanza en casi todos los países, es imposible desarrollar una enseñanza totalmente deductiva de la geometría antes de los 15-16 años.

1.6. La pedagogía de la geometría.

Para analizar el proceso de enseñanza de la geometría, desde el punto de vista de la pedagogía, vamos a considerar aquellos aspectos que por su importancia los profesionales de la enseñanza consideran que deben ser tomados en cuenta.

a. Experiencia.

Llamamos conocimientos experimentales a los de la práctica, a los así llamados del sentido común, a los de laboratorios. Decimos que una relación matemática es experimentalmente verdadera cuando sabemos que ella es un caso particular de una teoría, que no conocemos en su desarrollo interno, sino sólamente como información de diccionario. Otra verdad matemática de tipo experimental es la que se obtiene por comparación con un modelo. Por ejemplo, la escuadra es un triángulo rectángulo universalmente aceptado, y figura entre las herramientas de quienes practican la geometría por oficio, casi siempre sin conocerla. Que el triángulo de lados 3,4 y 5 es también rectángulo, o que el volumen de un cono circular recto es la tercera parte del cilindro circular recto, son otros conocimientos a los que se llegó experimentalmente por la medición.

Sobre este aspecto, la mayoría de los especialistas concuerdan en la aptitud de los materiales de experiencia para llevar al alumno a una comprensión más profunda y más abstracta. Así, para Gattegno:

> "La enseñanza de la geometría consiste en hacer que un tipo de experiencia particular se organice de una manera especial, de modo que se convierta en una rama de la actividad intelectual del alumno. Por ejemplo, utilizar un compás para trazar circunferencias no es todavía una actividad intelectual, pero saber lo que se puede hacer con un compás en el plano, si lo es. Por ésto proponemos para la pedagogía de la matemática un desarrollo del programa basado sobre la experiencia geométrica más bien que sobre el ideal formal que ha regido la enseñanza tradicional durante generaciones".
>
> [8 : 153-154]

Según Choquet, en el nivel adecuado, el alumno por sí mismo debe construir sus propios conocimientos matemáticos:

> "Al terminar su etapa escolar, el alumno debe haber aprendido que la matemática es una creación humana y que la nueva matemática puede ser manufacturada de la misma manera que se hace un nuevo par de zapatos; y él mismo, en su nivel, debe haber experimentado la exaltación que acompaña los empeños creativos, al crear aunque en una escala muy modesta, sus propios teoremas y su propia solución a los problemas."
>
> [10 : 81]

Para Stone por su parte, la bùsqueda de situaciones experimentales que permitan una mejor comprensiòn de nociones abstractas de la matemàtica, constituye un reto permanente a la capacidad del docente:

> "Desde luego, es un gran desafìo para nosotros como maestros el encontrar nuevos tipos de experiencia, aún en el nivel físico, a partir de los cuales nuestros jòvenes alumnos puedan iniciar su acercamiento a ideas tan abstractas como la de función o transformación."
>
> [10 : 102 - 103]

No parece haber divergencias en cuanto a la necesidad de construir las primeras etapas del conocimiento geomètrico sobre la experiencia del alumno. Las diferencias, si las hubiera, radicarían en la forma de emplear la experiencia para obtener el mejor provecho de las vivencias tempranas. No obstante, hay bastante consenso en que no deben introducirse teorías formales sin la previa consideración de situaciones bien precisas y manipulables. Para Markusievitch, la física es una materia adecuada a este propósito:

> "Estamos convencidos que determinadas nociones matemáticas deben ser consideradas previamente en clases de física, por ejemplo, los vectores o la derivada, considerada ésta como la

> velocidad de un movimiento rectilíneo, y que ciertos problemas físicos deben ser tratados en los cursos de matemática, por ejemplo, las oscilaciones armónicas."
>
> [13 : 205]

b. Intuición.

Etimológicamente "intuir" significa "ver dentro." De aquí que se emplee este vocablo, en ocasiones, como contemplación directa o representación visual, al tender a confundirla con la imaginación. Una relación matemática intuitivamente verdadera, es una verdad experimental generalizable, o para la cual parece posible una demostración, en el sentido de que se tiene una idea de cómo insertarla en un contexto demostrativo. Por ejemplo, para cada semicircunferencia existe un único triángulo rectángulo isóceles inscriptible. Esto es fácil verificarlo experimentalmente e intuir la generalidad del hecho. Esta es una verdad intuitiva.

El impulso a la generalización que en matemática siente el alumno, debe ser seriamente considerada en su enseñanza. Según Fehr, después de la formación empírica recibida en la mayor parte del nivel primario, debe darse al alumno un desarrollo intelectual caracterizado por la construcción mental de algunos conceptos básicos abstractos y la capacidad para el desarrollo de procesos deductivos cortos y sencillos:

> "Antes de ingresar a la escuela secundaria, a la edad de los 11 años o más, el niño ha adquirido una gran cantidad de ideas geométricas, todas ellas de naturaleza física. Entre los 12 y 15 años, con la ayuda de tales conocimientos, poco a poco deben ser abstraídos como construcciones puramente mentales, los elementos conceptuales esenciales, tales como punto, figura, línea, plano, espacio, y deben ser generalizadas las relaciones entre estos elementos hasta el punto de poder establecer cortas cadenas deductivas de teoremas sobre algo menos que una base axiomáticas."
>
> [10 : 46]

Este tipo de construcción mental según Dieudonné, tiene algunos atributos:

> "Se caracteriza por una imaginación muy viva, a la que va unida una comprensión profunda del material considerado."
>
> [11 : 69]

Respecto a la intuición tampoco hay mayor discusión, sin embargo, muchos autores no establecen una distinción clara entre experiencia e intuición, por lo que a menudo se exagera el papel de esta última. Por creerlo necesario y conveniente, en el capítulo final trato de hacer una separación cuidadosa de estos dos conceptos.

c. Axiomatización.

Durante siglos, la única parte axiomatizada de la matemática fue la geometría, de manera que el desarrollo de la axiomática está extrañablemente ligado al de la geometría. Por ello era natural entonces, que hasta hace poco la geometría se aprendiese axiomáticamente o no se aprendiese. Hoy se considera inadecuada una presentación axiomática rigurosa de la geometría antes de los quince años, siendo más importante en este período el conocimiento experimental o intuitivo, sin que ello signifique en modo alguno, el abandono de la inferencia lógica en el nivel correspondiente. En este sentido se expresa Dieudonné:

"Mi opinión es que no debe introducirse ningún sistema axiomático antes de los quince años. Esto no quiere decir que se deba evitar los intentos de deducción lógica, sino todo lo contrario, no hay que perder ninguna oportunidad de convencer a los alumnos del enorme poder de este proceso mental."

[8 : 76]

También para Choquet, en esta etapa, el ejercicio del proceso deductivo sin abordar un sistema axiomático formal, es fundamental:

"Entre los 13 y los 16 años el adolescente empieza a comprender lo que es una demostración; en algunos despiertan una verdadera sed de lógica, que indica que ha llegado el momento de abordar seriamente el razonamiento deductivo."

[14 : 10]

M. Stone y E. W. Beth, entre otros, son partidarios de la continuación de la enseñanza axiomática de la geometría en la escuela. Ellos basan sus argumentos en el papel de la matemática como disciplina formativa. El primero la justifica en la relación existente entre el mundo real y la geometría elemental:

"Una razón muy convincente para la insistencia en un tratamiento axiomático de la geometría en la escuela secundaria es que la geometría es el único tema de matemáticas elementales que guarda una conexión con el mundo real y nos suministra un buen ejemplo de construcción de un modelo. No puede decirse otro tanto de la aritmética o del álgebra, como podemos ver, si reflexionamos un poco."

[10 : 102]

Por su parte Beth atribuye la tendencia a eliminar la forma tradicional de enseñar la geometría a una exagerada competencia de la psicología en el problema de la pedagogía de la matemática:

"El papel de la formación matemática en la enseñanza secundaria consiste casi exclusivamente, me parece, en familiarizar a los alumnos con el método deductivo. De manera que una importancia exagerada atribuída a las lecciones de la psicología no puede ejercer sino una influencia nefasta. Bajo pretexto de que los alumnos de los primeros años no estarían todavía maduros para aprender el método deductivo, se hacen esfuerzos para enseñarles teoremas geométricos empíricamente."

[3 : 44]

Pese a todo lo que pudiera argumentarse, en Royaumont como en otros foros importantes de discusión de la enseñanza de la matemática, los cambios más radicales han sido propuestos para la geometría deductiva. Muchas de las ponencias sugieren presentaciones algebraicas en lugar de la tradicional, que descansen en una axiomática subyacente completa para los últimos años del nivel medio. Según la UNESCO*, desde el punto de vista metodológico y pedagógico, existen al menos tres corrientes básicas relativas al tratamiento axiomático de la geometría a nivel secundario que proponen:

1. La eliminación a priori de toda construcción axiomática en cualquier nivel de la enseñanza secundaria.
2. Una construcción axiomática desde el inicio (alumnos de 12 años).
3. Una construcción en dos etapas: a) Organización de experiencias y educación de la intuición geométrica en el primer ciclo de la escuela secundaria, (alumnos de 12 a 15), con breves sistemas axiomáticos y deducciones locales.

---

* Cap. 3 de Nuevas tendencias de la enseñanza de la matemática. Vol.II, p. 308. UNESCO, París, 1973.

b) Construcción axiomática de los conceptos adquiridos en el primer ciclo, complementando y profundizando estos conceptos, (de los 15 en adelante).

Las tres posiciones se están ensayando en escuelas de distintos países, teniendo lugar investigaciones pedagógicas y evaluaciones que han de reflejar las dificultades, los éxitos o fracasos y las reacciones de los alumnos.

d. Rigor.

Otro aspecto importante es el relativo al nivel adecuado de rigor con el que debe ser presentado el conocimiento geométrico.A muchos matemáticos parece preocuparles que la introducción de nuevas técnicas metodológicas y los nuevos enfoques psicológicos impliquen la eliminación del rigor necesario con el que deben exponerse y demostrarse las proposiciones matemáticas. Así, para Whewell:

> "Buscar pruebas de proposiciones geométricas mediante llamados a la observación en realidad no prueban nada, excepto que la persona que recurre a tales argumentos, no ha comprendido debidamente la naturaleza de la demostración geométrica."
>
> [2: 1830]

Por otro lado, para Hilbert, el rigor y la sencillez en una demostraciòn, son complementarios:

> "Es un error creer que el rigor en la demostración es un enemigo de la sencillez. Por el contrario, hemos podido comprobar con numerosos ejemplos que el método del rigor es al mismo tiempo el más sencillo y el más fácilmente comprendido.

El verdadero esfuerzo en pos del rigor nos obliga a encontrar los métodos más sencillos de prueba."

[2: 537]

Pero debemos evitar el abuso de la demostración, advierte Leray:

"Es necesario un rigor constante, lo que no quiere decir que haya que demostrarlo todo; sino que hay que precisar, usando para ello una terminología contemporánea, qué es lo que se prueba y qué es lo que se postula."

[7 : 177]

Freundenthal por su parte, sostiene que se puede abusar del rigor cuando éste es inadecuado al nivel correspondiente:

"...la exactitud absoluta no existe. A cada nivel le corresponde su propia forma de exactitud, (o de rigor), y exigirle al alumno el rigor de un nivel superior al suyo, es ser deshonesto en nombre de la honestidad."

[12 : 13]

Los detractores de Euclides, entre otras críticas, señalan que este desarrollo de la geometría carece del rigor necesario. Ya hemos citado observaciones en tal sentido como las del grupo Bourbaki. A este respecto, René Thom, (medalla Fields en 1958), sostuvo una interesante discusión pública con Jean Dieudonné, a través de una serie de artículos en los que señala a los partidarios de la reforma, de ser los "abanderados del rigor a toda prueba" y luego se dedica a rebatirlos, indicando que la acepción del rigor escogida por ellos, no es practicada ni siquiera por los matemáticos puros, y que mucho menos podría serlo a nivel secundario.

e. Psicopedagogía.

Tal vez el más importante aspecto relativo a la pedagogía de la geometría es el concerniente a la forma y al orden en que se construyen las nociones y operaciones geométricas. En este sentido vamos a referirnos fundamentalmente a los planteamientos de Piaget y su escuela porque nos parece que es la que aborda más ampliamente y más a fondo el problema:

> "Tiene un cierto interés constatar en primer lugar, a este propósito, que el orden de construcción de las nociones y de las operaciones geométricas, en el desarrollo espontáneo del niño no es ninguna manera conforme con el orden histórico de las etapas de la geometría y se acerca más bien al orden de filiación de los grupos fundamentales sobre los cuales descansan los diversos tipos de espacio. Históricamente la geometría euclidiana o métrica ha precedido en numerosos siglos, a la geometría proyectiva, y la topología no ha dado lugar a una reflexión autónoma sino en una época todavía mucho más reciente. Desde el punto de vista de los grupos fundamentales, por el contrario, la topología está primero, y se puede sacar de allí simultáneamente la geometría métrica euclidiana y la geometría proyectiva. Ahora bien, sin que el niño parta naturalmente de esquemas topológicos generales, (porque sus intuiciones topológicas están subordinadas a ciertas condiciones perceptivas estructuradas sobre un modelo euclídeo), no es menos sorprendente que, en los inicios del dibujo, el niño no distinga cuadrados, círculos, triángulos y otras figuras geométricas, que diferencie empero muy bien las figuras abiertas de las cerradas, las situaciones de exterioridad o de interioridad respecto a una frontera, (incluída la posición sobre la frontera), las separaciones y las vecindades, (sin conservación de las distancias), etc. Ahora bien, partiendo así de intuiciones topológicas fundamentales, se orienta en seguida simultáneamente en la dirección de las estructuras proyectivas y en las estructuras métricas."
>
> [8 : 25 - 26]

Después de plantear algunos otros aspectos de sus teorías, Piaget plantea la disyuntiva a la que el educador se ha de ver abocado para encausar adecuadamente la matemática de hoy: logicismo o psicologismo:

> "....el problema esencial es saber si el educador, para ser fiel al espíritu de las matemáticas contemporáneas, debe inspirarse en un logicismo riguroso de tendencia platónica o si puede considerar el pensamiento matemático como una prolongación de las construcciones espontáneas de la inteligencia y recurrir así a las enseñanzas de la psicología tanto como las de la lógica."
>
> [8 : 30]

Para Piaget el psicologismo es una tentativa para fundar la lógica sobre las leyes psicológicas, ya que constituye una manera de aplicar la psicología en un dominio que no es de su competencia, puesto que las leyes psicológicas se basan sobre constataciones de hechos, mientras que las leyes lógicas tienen más bien que ver con la necesidad normativa o deductiva. Recíprocamente, considera el logicismo como una intrusión de la reflexión del lógico en el dominio de los hechos, al afirmar que la inteligencia de un ser humano, sea la de un sabio o la de un alumno de primer ciclo, no llega al rigor lógico, sino sólo a través de ciertas vías como podría ser la sumisión del individuo a las reglas de un lenguaje adquirido del exterior. Pero luego concluye indicando que ambas ciencias están relacionadas más de lo que se supone: "Tales contactos son útiles al educador, más que las oposiones doctrinales extrañas a la marcha misma de tales ciencias." Para terminar sintetizando sus principales ideas:

"En resumen, el futuro de las relaciones entre la psicología y la lógica está ampliamente abierto y no debería ser prejuzgado en función de los errores pasados. Desde el punto de vista práctico no debería ser un problema para el educador, el escoger entre los métodos formalistas basados en la lógica y los métodos activos basados en la psicología."

[8 : 32]

Hans Freudenthal, fervoroso partidario del empleo de métodos activos en la enseñanza de la matemática considera que este nuevo tipo de pedagogía ha de modificar totalmente el papel del educador, pero cree que el mismo debe ser relacionado con la necesidad de implementar el aprendizaje heurístico de esta ciencia, en base en la reinvención del conocimiento:

"Las implicaciones sociales de la enseñanza han sufrido modificaciones importantes durante los últimos veinte o treinta años. La tarea del educador ha ido consistiendo cada vez más en la iniciación de las actividades culturales en lugar de una trasmisión de adquisiciones culturales; durante siglos recibió el nombre de ciencia esta trasmisión de las creaciones de los maestros, pero hoy día está indisolublemente ligada a la invención creadora. Se está haciendo un esfuerzo para adaptar la enseñanza científica a esta nueva idea de la ciencia, lo que supone que todo aprendizaje debe comprender períodos de invención dirigida, es decir, de invención desde la perspectiva del que aprende, (y no en el sentido objetivo). Los psicopedagogos son perfectamente capaces de dar razones en virtud de las cuales esta asimilación reinvertida de nuevos temas de estudio es más profunda y duradera, pero ya numerosos matemáticos, por simple instropección, habían llegado a la conclusión de que la mejor manera de leer los trabajos de los demás consiste en volver a inventarlos. En la enseñanza de las matemáticas, puede decirse que, desde Euclides, solamente los métodos de las construcciones geométricas han gozado de este privilegio."

[12 : 162]

Según Piaget, los distintos estadios en el desarrollo de la inteligencia deben ser respetados ya que tales procesos no pueden ser acelerados a voluntad:

> "Frente al problema de cómo acelerar este desarrollo el excelente psicólogo J. Brunner ha llegado hasta escribir que se puede enseñar no importa qué, a no importa quién, de no importa qué edad, si uno se las arregla de manera conveniente. A esto respondemos mediante dos preguntas: Primera, ¿ Será posible hacer comprender la teoría de la relatividad o simplemente de manejo de las operaciones proposicionales o hipotético-deductivas a un sujeto de 4 años? Segunda, ¿Por qué el descubrimiento de la permanencia de un objeto escondido bajo una pantalla, (que el niño ve), no comienza sino hacia los nueve meses entre los bebés humanos, mientras que entre los gaticos (estudiados por H. Gruber quien ha encontrado en ellos los mismos estadios previos) se obtiene ya hacia los 3 meses, pero sin progresos ulteriores en cuanto a la coordinación de las posiciones sucesivas?

[16 : 40]

En una crítica a los conductistas, Piaget, opina que su defecto básico es el de carecer de principios psicológicos insuficientes:

> "El papel atribuído al condicionamiento, en particular bajo la influencia de Skinner, ha conducido al ideal de la enseñanza programada, por asociaciones progresivas ordenadas mecánicamente, ("las máquinas para aprender"), y se conoce la boga que tiene todavía en ciertos medios esta manera de proceder, moderada es cierto por el aspecto financiero un tanto inquietante de los aparatos requeridos. Su defecto esencial empero, es el de descansar sobre una psicología muy insuficiente, cuya inaptitud para dar cuenta racionalmente del aprendizaje de las lenguas ha sido mostrado de manera decisiva por el gran linguista N. Chomsky. Desde el punto de vista pedagógico, la enseñanza programada si conduce a aprender, pero de ninguna manera a inventar, salvo si, como lo ha ensayado S. Papert, se hace construir por el niño mismo."

[17 : 11-12

En otra crítica a lo que denomina "enseñanza tradicional de la matemática moderna ", Piaget, advierte:

> "En lo que concierne a la enseñanza de las matemáticas modernas que constituye un progreso tan considerable respecto a los métodos tradicionales, la experiencia es con frecuencia falseada por el hecho de que, si el contenido enseñado es "moderno", la manera de presentarlo es a veces arcaica desde el punto de vista psicológico en tanto se funde sobre la simple trasmisión de conocimientos, aún si esta se esfuerza, (y demasiado precozmente desde el punto de vista de la manera de razonar de los alumnos), por adoptar una forma axiomática: de ahí los advertimientos severos de grandes matemáticos como Jean Leray en la revista L'enseignement mathematique".

[17 : 21]

Hasta aquí hemos insertado algunas citas de Piaget, que es un autor difícil de leer. Los estractos indicados creo que pueden darnos una idea de sus teorías. Pero por supuesto que no se trata de alguien infalible.
La gran mayoría de los estudiosos de la enseñanza de la matemática de muchos países otorgan una fundamental importancia a sus ideas, opinión que - compartimos. Sin embargo, notables pedagogos y matemáticos difieren de sus criterios. Por ejemplo. C. Gattegno, después de haber difundido y desarrollado los trabajados de Piaget, en una de sus más comentadas obras (*), manifiesta haber llegado a la conclusión de que:

1. La concepción del número, en Piaget, es de antaño y demasiado esquemática.

(*) "For de teaching of mathematics". Educational Explorers Limited Reading. Inglaterra. 1963. 108 pp.

2. Las etapas concebidas por Piaget son más cómodas que reales; agregando que algunas de sus concepciones sobre los conocimientos de los niños son desmentidas a diario por experiencias nuevas realizadas con técnicas apropiadas.

Tampoco Thom, cuya manera de pensar a este respecto hemos recogido antes, cree conveniente la presencia de la psicopedagogía en estos terrenos:

> "En el artículo que escribió para el congreso el profesor Piaget dió una excelente descripción del proceso mediante el cual se llegan a extraer estructuras conscientes a partir de esquemas de la actividad inconsciente: es lo que él llama" el proceso de abstracción reflexiva." Sin embargo, expresa su convicción de que la enseñanza explícita de las grandes estructuras abstractas puestas de manifiesto por la matemática contemporánea es un factor muy efectivo en la facilitación de este proceso. ¿Tengo que decir por esto que me parece que el psicólogo tiene demasiado confianza en las virtudes del formalismo matemático? Y que le acredita al razonamiento deductivo abstracto un poder que ciertamente no puede tener en la mente de un jovencito."
>
> [18 : 200]

1.7 Algebra Vs Geometría

Una de las consecuencias más notables del vertiginoso desarrollo de los métodos algebráicos ocurrido en los últimos cincuenta años, es la tendencia cada vez más creciente de emplear el álgebra en la enseñanza geométrica. Las reacciones han sido diversas. Por ejemplo, para René Thom:

"La tendencia actual de sustituir la geometría por el álgebra es totalmente nefasta desde el punto de vista pedagógico, y debería ser invertida. Podemos dar una razón muy simple para esto: así como hay problemas de geometría, resulta que no los hay de álgebra. Los problemas de álgebra no son otra cosa que simples ejercicios en los que se aplican mecánicamente las reglas de cálculo conocidas....Por el contrario dentro de los problemas clásicos de geometría podemos encontrar una amplia gama de dificultades. Es innegable que, en cualquier caso, los problemas de geometría son algo que exige mucho tiempo, muchos esfuerzos, una larga reflexión y una capacidad combinatoria de la que carece la mayor parte de los alumnos."

[15: 119]

Dieudonné, entusiasta partidario del empleo del álgebra lineal en la enseñanza de la geometría elemental, riposta a Thom de la siguiente forma:

"Resulta trivial para el matemático profesional hoy día, deducir los teoremas fundamentales de la geometría euclídea (en cualquier dimensión) a partir de la noción de espacio vectorial dotado de una forma cuadrática definida positiva y no veo por qué razón este método no habría de estar al alcance (en dos o tres dimensiones) de un alumno de bachillerato, en lugar de utilizar esas increíbles y aparentemente arbitrarias dimensiones de triángulos en las que cada paso parece un juego de manos. Me pregunto si Thom realmente puede creer que el álgebra lineal en un espacio de dos dimensiones es algo "abstracto" lejos del alcance de un estudiante de quince años cuando resulta que todas las nociones básicas pueden hacerse visibles en el encerado y que todos los axiomas tienen un significado geométrico inmediato. La diatriva de Thom contra el álgebra estaría justificada si el álgebra fuera "la aplicación ciega de reglas aritméticas" que nosotros padecimos durante nuestros años de escuela, o la teoría puramente abstracta de grupos, anillos o cuerpos. Pero el principio básico de las matemáticas modernas es, hoy día, llegar a un fusión completa de las ideas geométricas y algebráicas, y contraponer la geometría al álgebra como lo hace Thom, es algo que carece simplemente de sentido, siempre que, naturalmente el álgebra geométrica, (para utilizar la afortunada expresión de E.Artin), sea enseñada como un todo, y cada teorema algebráico vaya acompañado de su "traducción" geométrica."

[11 : 76-77]

Como vemos, las discusiones que en el siglo pasado mantenían sintéticos contra analíticos parecer haber sido heredadas por quienes se ocupan de las relaciones entre geometría y álgebra. Tales discusiones no son tan triviales como parecen. Involucran cuestiones de fondo, por ejemplo, la importancia del álgebra en la formación básica del alumno.

1.8 Programas modernos de enseñanza geométrica.

La discusión sobre la modernización de los contenidos de los programas han conducido a dos tendencias primordiales, con frecuencia opuestas: la que se fundamenta en el álgebra moderna y la otra, que se apoya en el análisis y la topología. Jean Dieudonné y George Pappy son dos de los más destacados exponentes de la primera de estas tendencias. En 1961, durante el congreso nacional de los profesores belgas ambos matemáticos sustentaron los siguientes principios:

1) El álgebra en general y en particular el álgebra lineal, se han hecho casi omnipresentes en las matemáticas y en sus aplicaciones, gracias al alcance y a la eficacia de los métodos lineales;

2) En comparación con las nociones y las operaciones de la topología y del cálculo diferencial, las nociones y las operaciones del álgebra son muy sencillas, más elementales, más accesibles al alumno;

3) El álgebra lineal es un excelente medio para iniciar a los alumnos bastante pronto en el método axiomático, dado que la axiomática del espacio vectorial es sencilla y pone en evidencia de manera muy

clara, dos estructuras, la estructura afin y la estructura métrica:

5. Siendo cada vez más grande la cantidad de los problemas, es imposible comenzar el estudio de las matemáticas superiores a partir de un nivel demasiado bajo.

En base a estos principios la enseñanza de la geometría deberá realizarse en dos ciclos metodológicamente distintos: el primero, antes de los 14-15 años, que comprende los conocimientos geométricos que han de servir después de modelo concreto del espacio vectorial. El segundo, comprende el estudio axiomático del espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales a partir de los 14-15 años. Una variante de esta concepción viene siendo aplicada en Bélgica desde hace varios años, según el plan elaborado por G. Papy.

Los partidarios de la segunda tendencia, entre los que contamos a G. Choquet, proponen también un primer curso de geometría antes de los 14 años, que tendría como meta, entre otras, la elaboración de la noción de cuerpo de los reales por la vía geométrica, llegando hasta la formulación completa de cuerpo ordenado y el contínuo de los reales. Esta concepción como la anterior eliminan el curso tradicional de geometría deductiva. Pero si en el primer caso es el álgebra la que absorbe a la geometría tradicional, ahora es el análisis el encargado de la misma tarea.

Pero cualquiera que sea la vía para la modernización de los programas, es conveniente una guía orientadora que arroje luz sobre la forma de encaminar las modificaciones que se hayan de introducir en el currículo. Tal puede ser el importante manifiesto que en marzo de 1962, subieron 75 matemáticos de Estados Unidos y Canadá, denominado "Sobre el plan de matemática de enseñanza secundaria." La siguiente es una síntesis de este importante documento:

1. **Para quien.** El plan de matemáticas del bachillerato debería satisfacer las necesidades de todos los alumnos: contribuir a la formación cultural del estudiante en general y ofrecer preparación profesional a quienes usarán más tarde las matemáticas, es decir, a los ingenieros y científicos, respondiendo también a las necesidades de los otros estudiantes; el plan puede incluir los temas más esenciales para los futuros matemáticos. Sin embargo, explicar a todos los estudiantes temas que sólo pueden interesar a la minoría de los futuros matemáticos es un despilfarro y significa ignorar las necesidades de la comunidad científica y de toda la sociedad.

2. **Saber es hacer.** Saber matemáticas significa poder hacer matemáticas: usar el lenguaje matemático con alguna fluidez, hacer problemas, criticar argumentos, buscar demostraciones y, lo que puede ser más importante, reconocer un concepto matemático en una situación concreta o extraerlo de ella. Por tanto, la introducción prematura de nuevos conceptos encontrará resistencia, especialmente en las mentes críticas, que, antes de aceptar una abstracción, quieren saber por qué es importante y como podría usarse.

3. **Las matemáticas y la ciencia.** Existe una interconexión entre las matemáticas y las otras ciencias. Las matemáticas constituyen su lenguaje y su instrumento esencial. Las matemáticas separadas de las otras ciencias pierden una de sus mas importantes fuentes de interés y motivación.

4. **La interpretación inductiva y las demostraciones formales.** El pensamiento matemático no se reduce sólo al razonamiento deductivo y a la demostración formal, incluye también el proceso mental que sugiere lo que debe demostrar y como hacerlo. La extracción del concepto apropiado de una situación concreta, la generalización a partir de los casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista, son modos matemáticos de pensamiento. Sin ninguna experiencia en tales procesos "informales" de pensamiento, el estudiante no puede comprender el verdadero papel de la demostración formal y rigurosa. Pero hay varios niveles de rigor. El estudiante debería aprender a comprender, buscar y criticar las demostraciones al nivel correspondiente a su experiencia y formación. Empujarle prematuramente a un nivel demasiado formal, puede desanimarle y hastiarle.

5. **El método genético.** El mejor camino para guiar el desarrollo mental de un individuo es reconstruir el desarrollo mental de la raza. Este principio genético puede protegernos de una confusión común: Si A es lógicamente anterior a B en cierto sistema, B, puede sin

embargo, preceder a A en la enseñanza, especialmente si B ha precedido a A en la historia.

6. **Las matemáticas "tradicionales"** La enseñanza de las matemáticas tanto en la primaria como la secundaria está retrasada con respecto a los requerimientos de la actualidad y necesita mejoras esenciales. En ésto no hay duda alguna. Pero no todos los temas que se enseñan en la escuela secundaria han quedado sobrepasados; por ejemplo el cálculo infinitesimal, el álgebra elemental, la geometría plana y de sólidos, y la geometría analítica. Quitar algunos de ellos sería desastroso. El problema lógico no son los temas sino el aislamiento de los otros dominios del conocimiento y de la investigación, especialmente de las ciencias físicas.

7. **Las matemáticas "modernas."** La falta de conexión entre las partes del plan actual hace necesaria la búsqueda de conceptos generales unificadores, el uso juicioso de los conjuntos, y el lenguaje y conceptos del álgebra abstracta; a fin de dar cohesión y unidad. Pero ésto no puede lograrse con la simple repetición de la terminología. Es conveniente que los nuevos términos y conceptos estén precedidos por una suficiente preparación concreta y de aplicaciones reales y estimulantes.

De este modo finalizo este sucinto listado de opiniones sobre los aspectos medulares de la problemática que enfrentamos. Su análisis nos debe permitir adoptar puntos de vista frente a la situación panameña, en cuyo estudio hemos de incursionar en el siguiente capítulo.

CAPITULO II

SITUACION ACTUAL DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA PANAMEÑA

En nuestro país, la enseñanza de la geometría en la mayoría de las escuelas públicas, adolece de profundas deficiencias en relación a los contenidos que se desarrollan, así como respecto a la forma de exponerlos.

Los temas que recomiendan los programas vigentes datan de 1961 y están bastante apartados de las corrientes modernas del pensamiento matemático. Además, es notoria su poca relación con los otros contenidos matemáticos del programa, así como con los de la enseñanza superior. En este último caso el desfase ha venido aumentando ya que paulatinamente se han introducido cambios en los contenidos geométricos de diversas carreras profesionales, no obstante, nada se ha hecho al respecto en el nivel secundario.

La situación general de la enseñanza de la matemática es preocupante, y en el caso específico de la geometría la situación se torna más grave, ya que además del desconocimiento, de muchos docentes, sobre los profundos cambios ocurridos en el desarrollo de esta ciencia desde hace más de un siglo, la tradicional costumbre de enseñar la geometría como una rama separada ha inducido la perjudicial práctica de dejar para el final del año los temas correspondientes, lo que lógicamente, ha dado lugar a que en muchas escuelas casi no se enseñe geometría.

2.1 Prácticas rutinarias que prevalecen en la enseñanza de la geometría en nuestras escuelas.

Las siguientes son algunas de las características de la enseñanza tradicional de la geometría en las escuelas secundarias del país.

(1) El método expositivo sigue siendo el método más utilizado en su enseñanza.

(2) La mayoría de los educadores no utilizan un texto para esta materia.

(3) Los libros de texto de autores nacionales, en su gran mayoría, exponen la geometría en la forma tradicional ya que tienden a ajustarse a los programas vigentes.

(4) El material didáctico utilizado por el docente, es básicamente la tiza y el tablero. Poco se emplea el apropiado juego de geometría. Pero fuera de este material didáctico, el docente no recurre a ninguno otro. (*)

(5) En su enseñanza los docentes tienden a otorgar mayor importancia al dominio de las definiciones y a la destreza en las construcciones geométricas, en detrimento del razonamiento lógico.

(6) La imposición de resultados, sin que el alumno haya comprobado al menos experimentalmente su validez, es una actitud típica de muchos docentes.

(*) En un reciente seminario sobre Metodología y Didáctica de la Matemática para docentes en ejercicio, celebrado en el CRU-Veraguas, la mayoría de los participantes manifestaron desconocer el uso del geoplano u otros recursos no tradicionales de enseñanza de la geometría.

(7) Algunos temas como el cálculo de áreas y volúmenes, adecuados para relacionarlos con el álgebra elemental, (simplificación de expresiones algebráicas, productos notables, factorización), sólo se desarrollan algorítmicamente.

(8) La resolución logarítmica de triángulos rectángulos y de otros problemas clásicos ocupan gran parte del tiempo de los alumnos, en perjuicio de aspectos cualitativamente más importantes como por ejemplo la resolución de triángulos oblicuángulos por medio de las leyes de seno y del coseno.

(9) De igual forma la exagerada importancia otorgada a las construcciones clásicas hacen desperdiciar parte del tiempo que podría emplearse para construcciones geométricas de mayor interés y utilidad en el desarrollo posterior de la geometría.

(10) Las deficiencias en el planeamiento y la evaluación de los contenidos geométricos dan origen a las clases y pruebas improvisadas que desorientan la actitud del estudiante hacia el aprendizaje de esta ciencia.

Estos rasgos salientes de la enseñanza actual de la geometría en el nivel secundario deberán tenerse presente al momento de considerar los aspectos básicos para una adecuada didáctica de los nuevos contenidos.

2.2 Programas Vigentes.

En 1981 la Dirección General de Currículum y Tecnología Educativa entregó a los docentes de matemática del nivel medio lo que denominó una "propuesta actualizada de los programas de matemática para el primer ciclo". En la misma habían laborado técnicos del Ministerio de

Educación con la participación de un grupo de profesores de la comisión de Unidad Didáctica del Departamento de Matemática de la Universidad de Panamá.

Mediante esta ardua labor se adecuaron considerablemente los contenidos programáticos de 1961 para el ciclo inferior de la educación secundaria. Fueron diseñados los objetivos generales de cada año así como los objetivos específicos y las actividades correspondientes a cada uno de los temas considerados. A excepción de los contenidos geométricos la modificación fue profunda. Importantes aspectos de la enseñanza moderna de la matemática fueron introducidos: Conjuntos, lógica proposicional, relaciones binarias, relaciones de orden y de equivalencia, funciones, una presentación más actual del estudio de los números naturales, enteros y racionales, como también algunos elementos de probabilidad y estadística.

Para los ciclos de Bachillerato en Ciencias, letras y la sección comercial, no se pudo realizar una labor similar, y hoy día están vigentes los listados de contenidos establecidos en 1961.

Los cambios incorporados aunque sustanciales y cualitativos, no han propiciado el empleo de una metodología más dinámica que favorezca la elaboración por parte del alumno de sus propios conceptos, en lugar de la frecuente memorización y recitado de definiciones y teoremas previamente etablecidos tan perjudiciales a un auténtico aprendizaje de matemática. No hay duda en que la falta de seguimiento de una debida orientación pedagógica, así como la carencia de textos adecuados, han dificultado la implementación exitosa de este currículo en las escuelas públicas. En las escuelas particulares la situación ha resultado diferente, gracias al empleo de mejores textos, (generalmente extranjeros), y a una más eficiente labor de supervisión.

Pero como ya señalamos, la propuesta de 1981 no alteró los contenidos geométricos del programa anterior. Salvo modificaciones en el orden de presentación; o una más temprana introducción de algunos contenidos, esta área del currículo permaneció invariante.

El siguiente cuadro permite apreciar las modificaciones introducidas a los contenidos programáticos del programa anterior, para el primer ciclo secundario. Se puede observar allí, que la modificación de los contenidos geométricos es escasa, salvo en el orden en que han sido ubicados los temas y la eliminación de algunos de ellos. Además, es notoria ausencia de un orden lógico y psicológico en su tratamiento. Pero veamos el cuadro comparativo:

CONTENIDOS GENERALES DE LOS PROGRAMAS DE MATEMATICA PARA EL PRIMER CICLO. AÑOS 1961 y 1981.

AÑO 1961

I AÑO

1.1 Conjuntos. Números cardinales y ordinales.

1.2 Operaciones entre cardinales. Adición y sustracción.

1.3 Multiplicación y división.

1.4 Potenciación y radicación.

1.5 Propiedades de los números. Divisibilidad. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo.

1.6 Los números racionales. Operaciones con fracciones y decimales.

1.7 Sistemas de medidas. Sistema métrico decimal.

1.8 Reseña Histórica: Desarrollo de la matemática en las antiguas civilizaciones sumerio-asirio-babilónica, y en el antiguo Egipto.

1.9 La superficie, la línea y el punto.

1.10 El ángulo. Comparación y medición. Suma y resta de ángulos.

1.11 Rectas. Paralelismo y perpendicularidad.

1.12 Construcciones geométricas.

1.13 Cotas y acotaciones. Acotaciones de figuras geométricas.

AÑO 1981

I AÑO

1.1 Conjuntos. Subconjuntos. Operaciones.

1.2 Proposiciones compuestas.

1.3 Relaciones binarias.

1.4 Relaciones de orden y de equivalencia.

1.5 Operaciones en el conjunto N.

1.6 El conjunto de los enteros.

1.7 El conjunto de los racionales.

1.8 Divisibilidad.

1.9 Aproximación y redondeo.

1.10 Razones, proporciones y tanto por ciento.

1.11 Cuadros estadísticos y medidas de tendencia central.

1.12 La circunferencia.

1.13 Rectas y puntos notables del triángulo.

1.14 Medidas de ángulos.

1.15 Triángulos semejantes.

1.16 Proporcionalidad de los lados de dos triángulos semejantes.

II AÑO

2.1 El tanto por ciento

2.2 Regla de tres simple y compuesta.

2.3 El cálculo literal. Diferencias entre aritmética y álgebra.

2.4 Los números relativos.

2.5 Adición y sustracción de numeross reales y monomios.

2.6 Multiplicación. Potenciación y división de números reales y monomios.

2.7 Radicación.

2.8 Reseña Histórica: La civilización griega. La matemática como ciencia deductiva. El método axiomático.

2.9 Perpendicularidad y paralelismo.

2.10 El triángulo. Construcciones de triángulos.

2.11 Los polígonos.

II AÑO

2.1 Tablas y valores de verdad de proposiciones compuestas.

2.2 Relaciones de orden.

2.3 Tipos de funciones. Composición.

2.4 Operaciones con racionales.

2.5 Expresiones algebráicas. Operaciones.

2.6 Radicación de números racionales.

2.7 Desigualdades e inecuaciones.

2.8 Ecuaciones de primer grado.

2.9 El plano cartesiano. Coordenadas de un punto.

2.10 Funciones, gráficas.

2.11 Perpendicularidad.

2.12 Paralelismo.

2.13 Paralelas cortadas por transversales.

2.14 Clasificación de los triángulos. Elementos notables

2.15 El teorema de Pitágoras. Aplicaciones.

2.16 Clasificación de los polígonos. Area.

2.17 Distribuciones de frecuencia. Representación gráfica

III AÑO

3.1 Polinomios .

3.2 Adición y sustracción de polinomios .

3.3 Multiplicación. Potenciación. Factorización y división de polinomios.

3.4 Productos Notables y factorización. Cocientes notables.

3.5 Identidades y ecuaciones .

3.6 Sistemas de Ecuaciones lineales.

3.7 Concepto de función lineal.

3.8 Reseña Histórica: Contribuciones de los árabes, hindúes y chinos en el desarrollo de la matemática.

3.9 Teoremas sobre triángulos y relaciones métricasa relativas a la circunferencia y al círculo.

3.10 Polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia. Teoremas relativos.

3.11 El teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.

3.12 Razones y proporciones entre segmentos.

3.13 Semejanza de triángulos y polígonos.

III AÑO

3.1 Productos Notables.

3.2 Factorización.

3.3 Fracciones algebráicas.

3.4 Progresiones.

3.5 Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Problemas.

3.6 Sistemas de ecuaciones lineales. 2 X 2 y 3 X 3.

3.7 Métodos algebráicos de solución.

3.8 Matrices.

3.9 Poligonos convexos. Construcción y clasificación.

3.10 Circunsferencia y círculo. Angulo central, ángulo inscrito y semi-inscrito. Longitud y área del circulo

3.11 Teoremas sobre la circunferencia y el círculo. Arcos y cuerdas subtendidas.

3.12 Polígonos congruentes. Congruencia de triángulos y de cuadriláteros.

3.13 Cuadriláteros. Paralelogramos.

3.14 Propiedades generales y particulares de los paralelogramos.

Para el segundo ciclo, no existe propiamente un programa, sólo listados de contenidos que fueron establecidos en 1961, y que casi no han tenido modificaciones.

En el documento oficial (*), publicado por el Ministerio de Educación, se presentan los temas que desde ese año se vienen recomendando para los diferentes niveles de los bachilleratos en ciencias y letras.

Veamos a continuación un resumen de los temas de geometría recomendados para la primera de estas modalidades:

IV AÑO LICEO.

A. Medición de magnitudes. Proporcionalidad.

- Definición de magnitudes geométricas. Razones. Proporciones entre magnitudes geométricas.

B. Aplicaciones al estudio de las semejanzas de figuras geométricas.

- El teorema de Tales. Aplicaciones. Teorema de la bisectriz un ángulo externo de un triángulo. Recta paralela a un lado de un triángulo. Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto, (baricentro), situado sobre cada una de ellas y a dos tercios del vértice.

(*) Programas de Matemática, (reimpresión). Dirección General de Educación Secundaria. Ministerio de Educación. 1978. 80 pp.

C. Semejanza de triángulos.

- Criterios de semejanza.

D. Resultados fundamentales.

- Primero y segundo teorema de Euclides. Teorema de las cuerdas que se cortan en un círculo. Teorema de las secantes en un círculo. Teorema de las dos bisectrices en un vértice de un triángulo. División armónica de un segmento. Construcciones. Circunferencia de Apolonio.

E. Otros resultados.

- Teorema de la secante y la tangente en un círculo. El teormea de Ptolomeo. Dividir un segmento en media y extrema razón. Sección áurea de un segmento. Teoremas relativos a la sección áurea del radio de un círculo. Aplicaciones del concepto de semejanza a la construcción de algunos polígonos regulares.

F. Problemas de construcción.

- Problemas de construcción. Carácter de las soluciones. Discusión del problema. Desde un punto exterior de una recta, bajar la perpendicular a la misma. Levantar una perpendicular por el punto extremo de un segmento. Dividir un segmento o un ángulo en dos partes iguales. Dividir un segmento en un número dado de partes iguales. Construir el triángulo dados algunos de sus elementos. Problemas de inscripción y circunscripción. Obtención con regla y compás de números construíbles: a/b, ab, abc/mc, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{n}$, $N \in \mathbb{Z}$, $m{:}n$.

G. Mètodos para la resolución de problemas de construcción.

- Definición del concepto. Problemas determinados, indeterminados o imposibles. Método analítico. Aplicaciones. Métodos de las intersecciones de lugares geométricos. Aplicaciones. Método de traslación. Aplicaciones.

V. AÑO LICEO.

Geometría elemental desde un punto de vista superior.

A. Funciones trigonométricas.

- Segmentos rectilíneos dirigidos. Vectores. Vectores de posición. Angulos positivos y negativos. Relación entre abcisa, ordenada y radio vector. Definición de las funciones trigométricas de un ángulo. Signos algebráicos de las funciones trigonométricas. Valores naturales de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30º,45º y 60º. Funciones trigonométricas de los ángulos de cuadrantes (0º, 90º, 180º, 270º). Tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas. Reducción de funciones trigonométricas al primer cuadrante. Funciones trigonométricas inversas. Variación del seno, coseno y tangente. Gráficas de las funciones trigonométricas.

B. Conceptos trigonométricos y logarítmicos.

- Medición angular. Logaritmos. Resolución de triángulos rectangulares. Identidades trigonométricas. Reducción de las funciones trigonométricas al primer cuadrante. Funciones de un ángulo compuesto. Resolución de triángulos oblicuángulos. Ecuaciones trigonométricas. Funciones trigonométricas inversas.

C. Funciones lineales en el plano cartesiano.

- Magnitudes escalares y vectoriales. Concepto de vector y su representación geométrica. Proyección de un punto sobre los ejes. Distancia entre dos puntos. Coordenadas del punto medio. Pendiente de una recta. Rectas paralelas y perpendiculares. Ecuación de la recta. Forma punto-pendiente. Trazado de la recta a partir de su ecuación. Haces de rectas. Forma normal de la ecuación de la recta. Distancia de un punto a una recta.

D. Estudio de las funciones de segundo grado en el plano cartesiano.

- Lugar geométrico degenerado. Trazado de la gráfica de una función de segundo grado factorizable. Procedimiento general para el trazado de curvas.

E. La circunferencia.

- Definición. Ecuación canónica. Determinación de la ecuación general. Determinación de la ecuación cuando el centro pertenece a uno de los ejes coordenados. Ecuación general: $X + Y + Cx + Dy + E = 0$. Intersección de una recta con una circunferencia e intersección de dos circunferencias.

F. Secciones Cónicas.

- La elipse como lugar geométrico. Definición. Focos, distancia focal, radiovector, centro. Determinación de la ecuación canónica. Excentricidad. Determinación de la ecuación cuando el centro no coincide con el origen de coordenadas. Construcción de la elipse. Intersecciones con una recta, con una circunferencia o con otra elipse.
- La parábola como lugar geométrico. Definición. Foco. Directriz. Determinación de la ecuación canónica. Parábolas en varias posiciones. Intersecciones con una recta, con una circunferencia, etc.
- La hipérbola como lugar geométrico. Definición. Ejes, vértice, focos, radio vector, centro. Determinación de la ecuación canónica. Hipérbola equilátera. Asíntotas. Intersecciones con una recta, con una circunferencia, etc.

VI AÑO LICEO.

A. Geometría del Espacio.

- El espacio. Postulados del espacio. (según Enrique). Posiciones relativas de rectas y planos. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio. Rectas coplanares, (incidentes y paralelas), rectas alabeadas. Perpendicularidad entre rectas y planos. Planos parelelos. Angulos diedros. Diedros rectos y planos perpendiculares. Angulo de una recta con un plano. Distancia entre dos rectas alabeadas. Triedros.

Criterios de igualdad de triedos.

B. Simetría.

- Simetría axial. Simetría central. Simetría respecto a un plano. Teorema relativo a la simetría. Traslación en el espacio.

C. Poliedros.

- Prismas, paralelepípedos, pirámides, Poliedros regulares. Igualdad de poliedros.

D. Cuerpos redondos.

- Cilindros indefinidos y finitos. Conos indefinidos y finitos. La esfera. Posiciones mutuas de rectas, planos y esferas.

E. Poliedros equivalentes.

- Concepto y propiedades. Equivalencia de prismas. Equivalencia de pirámides.

F. Volumen de los poliedros.

- Principio de Cavalieri. Volumen de los poliedros. Area de la superficie. Volumen del cilindro y el cono. Area de la superficie. Volumen de la esfera. Area de la superficie esférica.

Respecto a estos contenidos geométricos para el bachillerato, es evidente que fueron tomados de algunos textos muy populares para la época, como los de P. Rees y F.W. Sparks; de E. Moise y F. Downs y los de A. Baldor, entre otros. En el documento oficial se aprecia una transcripción textual de algunos teoremas, construcciones geométricas, e incluso de problemas contenidos en estas obras. Este hecho, nos revela la ligereza con que elaboraron los contenidos y la poca articulación existente entre el programa de primer ciclo y el correspondiente al Bachillerato en Ciencias. Está demás señalar lo obsoleto de algunos temas considerados en ese programa, que no poseen utilidad práctica ni interés teórico.

2.3 Necesidad de la reestructuración integral de la enseñanza de la geometría en el nivel medio.

El análisis de los programas vigentes, así como los modos como se exponen los conocimientos geométricos en nuestros centros de enseñanza exigen a todos los sectores involucrados en la problemática, urgentes reformas. Pero esta reestructuración debe ser integral. Porque la introducción de nuevos contenidos y las modificaciones y las modificaciones a los programas vigentes, no representarán mayor progreso si no se adecuan los métodos y técnicas de su enseñanza.

El éxito de un nuevo currículo dependerá en gran medida del factor docente. Es predecible la actitud negativa de muchos docentes frente a nuevos enfoques. Por ello, además de la formación de educadores con conocimientos pedagógicos y psicológicos suficientes, es imprescindible la actualización del cuerpo de profesores en ejercicio. Esta es sin embargo, una labor de política educativa que las autoridades educativas deberán contemplar.

Como podemos apreciar, es compleja la tarea de adecuar nuestra situación a las necesidades de reformas a la enseñanza geométrica en todos sus aspectos. Nuestra contribución en esta ardua labor la presentamos en la siguiente sección.

CAPÍTULO III

SUGERENCIAS PARA LA REESTRUCTURACION DE LA ENSEÑANZA GEOMÉTRICA: UNA PROPUESTA CURRICULAR PARA EL PRIMER CICLO

En este último capítulo queremos aportar nuestra contribución en la reestructuración de la enseñanza de la geometría escolar. Para ello vamos a sugerir algunos principios sobre los cuales consideramos que deben fundamentarse los cambios. Luego presentaremos una propuesta curricular para el primer ciclo secundario.

3.1 Principios fundamentales para la reestructuración de la enseñanza de la geometría en el nivel medio.

Una reestructuración adecuada de la enseñanza de la geometría escolar, en la que se involucre la adopción de programas nuevos, debe ser fundamentada en algunos principios básicos como los siguientes:

(1) Los objetivos que actualmente se plantean en el aprendizaje de la geometría deben determinar su enseñanza y su ubicación dentro de la matemática.

Durante mucho tiempo la finalidad fundamental del aprendizaje de la matemática radicaba en su importancia para proporcionar esquemas mentales útiles para resolver problemas así como para incrementar la capacidad de razonar. Estudios más recientes que describen con más veracidad el proceso de aprendizaje de la matemática, han originado críticas a esta concepción tradicional.

No obstante, sin descuidar su importancia utilitaria, consideramos prioritario su aspecto formativo. En tal sentido en los objetivos del estudio de la Matemática y en particular de la Geometría en la escuela debe enfocarse hacia el desarrollo del raciocinio del alumno y de su penetración en el espíritu de la ciencia contemporánea. Es oportuno observar que en Panamá poco se viene logrando en ese sentido. Por ello es importante que esta tarea de coadyuvar y desarrollar la inteligencia del individuo contribuya a orientar la elección de los contenidos programáticos y la metodología en la enseñanza de la Geometría.

(2) Los programas de geometría deben estructurarse en base a las investigaciones de Piaget y de su escuela.

La teoría del aprendizaje de Jean Piaget, es sin duda la más adecuada al pensamiento matemático actual. Sus conclusiones son perfectamente compatibles con el enfoque bourbakista de la matemática.

Según Piaget, el desarrollo de la inteligencia se hace mediante superaciones sucesivas. Pedagógicamente, los métodos más indicados para su realización son los métodos activos. Esto implica que el docente debe estimular la búsqueda de soluciones, en lugar de transmitir las ya encontradas. Debe tenerse presente que una experiencia que no se ha adquirido con libertad de iniciativa, es sólo un adiestramiento, sin valor formativo. Por lo tanto, sólo mediante una enseñanza dinámica en la que se promuevan, pero no se impongan las ideas, es como podremos formar individuos capaces de producir y crear, y no sólo de repetir.

Es importante respetar las distintas etapas en la formación de la inteligencia. Estos períodos o estadios, al decir de Piaget, no son tan precisos como lo indicamos en el siguiente cuadro:

ESTADIOS EN EL DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA

0 años a 2 años	:	Etapa sensorio-motora
2 años a 7 años	:	Período pre-operacional
7 años a 12 años	:	Período de las operaciones concretas
12 años a 15 años	:	Etapa de las operaciones formales

(3) En la enseñanza de la geometría debe tenerse en cuenta la correspondencia siguiente:

Educación Pre-Escolar (6 años)	Sensación
Escuela Primaria (7 años - 11 años)	Experiencia
Primer Ciclo (12 años - 15 años)	Intuición
Bachillerato (16 años - 18 años)	Axiomatización Incipiente.
Universidad	Axiomatización

Según esta correspondencia que tampoco es estrictamente precisa, la enseñanza en el nivel primario se basará en la experiencia. En esta etapa no debe emplearse la intuición y mucho menos acudir a algún tipo de de axiomatización. Pero en el primer ciclo sí podemos recurrir a la experiencia o a la sensación si fuese conveniente, aunque no a la axiomatización.

Según Piaget, las primeras implicaciones son bien manejadas a partir de los 12 años; pero ello no nos indica que debemos enseñar la geometría deductivamente, cuando el alumno ejecuta correctamente sólo algunas implicaciones. Todavía le es imposible dominar un lenguaje lógico como el de los sistemas deductivos. Esto es difícil de aceptar por el docente, habituado como está a dar definiciones y enunciar teoremas. Mientras no se llegue a la etapa deductiva es irrelevante que el alumno maneje definiciones formales. Lo importante es que conozca las situaciones en las que hay relaciones de interés matemático. Enseñar apoyándose en la experiencia significa prescindir de las definiciones, nombrando las cosas por su nombre, como el niño aprendió a darlo a los objetos de su casa. En esta etapa no hay líneas rectas ni segmentos. Hay reglas. Las circunferencias son aros , el borde de un plato o de una lata, etc. No hay planos, hay hojas de papel, rectángulos y cuadrados.

Para la etapa intuitiva, el desarrollo normal de la etapa superior es importante. Al llegar a ella, se puede continuar mencionando las cosas por el nombre que tendrán al ser axiomatizados, pero sin insistir en la memorización.

Veamos el sentido que he de darle al vocablo "intuición". Ya señalamos que mediante la experiencia el alumno no conocerá una recta ni un plano, tampoco él puede ver con una sola mirada una esfera o una superficie completa. Es decir, no se conocen leyes, sólamente hechos. Pero al entrar en la etapa intuitiva nos esforzamos por completar estos datos no totalizados, gracias a un cultivo cada vez más esmerado de nuestra imaginación y gracias a la experiencia, (que controla la imaginación), adquirida en la etapa anterior. Por ejemplo, podemos imaginarnos un segmento, luego una recta euclídeana como un segmento ilimitado, en el que los extremos se alejan más y más a partir de nuestro punto de observación, o simplemente que se alarga indefinidamente. No conocemos rectas paralelas experimentalmente, pero nuestra imaginación puede darnos una idea de ellas,a partir de dos segmentos paralelos. Podemos intuir toda la superficie de la esfera, o tierra como un esferoide. Podemos además, hacer ciertas suposiciones que involucran datos conocidos. Según se cuenta, Pitágoras a partir del triángulo egipcio de lados 3, 4, 5 ; del triángulo indio de lados 5, 12, 13 y tal vez de otros; tanteó intuïtivamente el enunciado general que se llamó Teorema de Pitágoras, desde cuando él logró darle una demostración.

Debido quizás, a los estudios de los psicólogos, la mayoría de los matemáticos parecen aceptar que la axiomatización debe reservarse en principio, para después de los quince años. No obstante, de inmediato los mismos matemáticos, se entregan a una cerrada defensa de la deducción. Cuesta trabajo entender esta actitud sobre todo cuando la asociamos con los sistemas donde se axiomatiza. Pero estamos plenamente de acuerdo con ellos, si la palabra "deducción" la emplean en el sentido que tiene en el lenguaje corriente, como el diccionario señala: deducir: sacar consecuencias. Deducir en este sentido nos conduce a los sistemas deductivos locales.

La organización local de los conocimientos geométricos sin necesidad de un sistema axiomático previo, favorecen el rápido desarrollo de muchas actividades y situaciones geométricas. Ella permite introducir diversos y variados conceptos que ayudarán a la comprensión del plano y del espacio. De esta forma se crean situaciones adecuadas para la matematización y el desarrollo del razonamiento deductivo, en cuestiones más propias de la actividad cotidiana, que las que puedan aparecer al operar con sistemas formales. Pero a su vez la creación de regiones deductivas dentro del curso, resulta el camino más natural para la axiomatización. Habrá un momento en que resultará conveniente y necesario contar con un marco global. Es la ocasión propicia para iniciar al alumno en el estudio de una estructura axiomática formal.

(4) La geometría debe ser considerada en todas las instancias de su enseñanza, como el estudio de espacios relacionados eventualmente con las estructuras algebraicas, y en especial con los espacios vectoriales y el álgebra lineal.

La noción contemporánea del concepto de geometría coloca su estudio dentro del marco de las estructuras de la matemática moderna. Bajo esta nueva concepción, la geometría adquiere una connotación diferente de la clásica sintética. Esto permite al docente introducir al alumno en un campo de nuevas ideas, en el cual la intuición y la imaginación se liberan y adquieren nuevas perspectivas. Por ello su enseñanza no puede ser aislada e independiente, por el contrario, su estudio debe estar estrechamente vinculado con el resto de los contenidos matemáticos del programa.

(5) El enfoque actual de la geometría elemental hace necesaria la eliminación de temas de la geometría clásica que hoy carecen de importancia práctica y teórica.

Cada día hay mayor consenso en que el tratamiento que hemos venido dando a la geometría de Euclides debe desaparecer. El enfoque tradicional además de que casi no tiene importancia para estudios posteriores, se halla al margen de las modernas corrientes del pensamiento matemático. No obstante, el espacio euclidiano es importante, y su estudio no puede excluirse de la instrucción geométrica.

Un tratamiento moderno de este espacio puede ser obtenido, desde el punto de vista de Klein. Desde esta perspectiva la geometría euclídea plana, es el estudio de todas las propiedades de las figuras que se mantienen invariantes bajo los efectos de las isometrías (distancias, ángulos, paralelismo, razones dobles).

Esta nueva óptica bajo la cual estudiamos la geometría elemental ha de permitirnos considerar la omisión de temas que aún ocupan un lugar apreciable en la enseñanza. Por ejemplo algunas construcciones con regla y compás (como las relativas a la sección aúrea o al círculo de los nueve puntos, etc.), la resolución logarítmica de triángulos, ó el exagerado estudio de las cónicas, deben eliminarse para dar paso a nuevos contenidos de mayor utilidad e importancia.

(6) En la enseñanza de la geometría, desde sus primeras etapas debe adoptarse un lenguaje preciso, acorde con el simbolismo lógico-conjuntista con el que se expone la matemática hoy.

Este lenguaje debe estar conformado por un vocabulario conjuntista elemental, que como se recomendó en el Congreso de Royaumont debe adoptarse tan pronto como sea posible y aplicarse de modo coherente y continuo.

Pero el docente debe ser cauto y no abusar de la introducción de nuevos nombres y notaciones.

(7) La enseñanza de los nuevos contenidos exigirá del docente una pedagogía dinámica de la matemática, basada en nuevas técnicas didácticas, en un mejor conocimiento de la psicología del adolescente y sobre todo en el empleo de métodos activos de enseñanza.

La presentación de la geometría de modo sumario, o como una construcción axiomática producida por una mente superdesarrollada, tal vez inducirá al estudiante a expresarse más correctamente, no obstante tal condicionamiento puede constituir un fuerte obstáculo para su comprensión de esa noción en el futuro.

El docente deberá guiar al alumno a aprender por experiencia propia, aislando, reconociendo y construyendo por sí mismo, los conceptos y estructuras de la matemática moderna.

(8) Un nuevo plan de estudios hace necesario un nuevo sistema de evaluación.

El nuevo currículo, en el cual se ha de sustituir gran parte del contenido tradicional, no puede ser evaluado con los métodos que se aplicaron al anterior. Es obvio que sus objetivos y aplicaciones resultan ahora distintos, por lo que al menos exigirán pruebas y exámenes que se ajusten al nuevo programa. En tal sentido estos instrumentos deberán evaluar lo enseñado a los alumnos, así como las conductas que se esperó que fuesen aprendidas.

3.2 Propuesta de currículo para la enseñanza de la geometría en el primer ciclo secundario.

En el modelo que presentaremos muchos de los contenidos seleccionados para los diferentes niveles del primer ciclo han sido elegidos en base a los contenidos matemáticos de la propuesta de 1981. Pero el enfoque bajo el cual se organizaron estos temas está fundamentado en la noción de geometría esbozada por Félix Klein en su Programa de Erlangen. Desde esta perspectiva, el aspecto central que unifica la temática considerada es el estudio de las transformaciones del plano en niveles de complejidad cada vez más profundos, que deben culminar al final con un manejo más consciente de los grupos de transformaciones y han de permitir al estudiante, continuar (mediante un programa nuevo) un estudio más completo del espacio euclidiano como espacio vectorial real. Sin embargo, la organización e implementación de estos contenidos sólo exigen del docente, una adecuada orientación metodológica y algunos conocimientos elementales sobre conjuntos y estructuras algebráicas.

Reconocemos que otros enfoques basados en el álgebra lineal o en el análisis, han permitido superar el problema en otras latitudes, no obstante, creemos que el modelo de las transformaciones geométricas, que hemos aplicado, puede conducirnos al logro del objetivo primordial de adecuar la enseñanza de la geometría escolar, a las nuevas corrientes del pensamiento matemático del modo menos traumático posible.

Pero este trabajo es sólo un esfuerzo en este sentido. Lo deseable es que se generen otros puntos de vista, distintos o análogos, que nos conduzcan a una adecuada reestructuración de la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria.

CONTENIDOS GENERALES DE LA PROPUESTA

PRIMER AÑO

1. NOTACION Y LENGUAJE CONJUNTISTA.
2. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LAS FIGURAS PLANAS.
3. LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y SUS INVARIANTES.
4. MEDIDA Y NOTACION DE ANGULOS.
5. PERPENDICULARIDAD.
6. INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LOS POLIGONOS.
7. PARES DE ANGULOS
8. INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD.
9. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CIRCULO.
10. INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LOS TRIANGULOS.

SEGUNDO AÑO

1. TRANSFORMACIONES DEL PLANO.
2. RELACION DE PARALELISMO.
3. POLIGONOS CONGRUENTES. NOCION DE SUPERFICIE Y AREA.
4. EL TEOREMA DE PITAGORAS.
5. POLIGONOS REGULARES Y LA CIRCUNFERENCIA.
6. SIMETRIA DE UN POLIGONO.
7. PERIMETRO Y AREA DEL CIRCULO Y REGIONES CIRCULARES.
8. VECTORES EN EL PLANO.

TERCER AÑO

1. TRANSFORMACIONES DEL PLANO.. CONCEPTUALIZACION.
2. ISOMETRIAS. SIMETRIAS, ROTACIONES Y REFLEXIONES.
3. SEMEJANZAS. LA HOMOTECIA.
4. INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS ESTRUCTURAS DE GRUPO Y SEMIGRUPO.
5. LA PROYECCION PARALELA.
6. SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS RECTANGULARES.
7. LA RECTA. ECUACION, INCLINACION Y PENDIENTE.
8. POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

OBJETIVOS GENERALES PARA EL PRIMER AÑO

1. Organizar sobre una base intuitiva las experiencias que sobre el plano y sus subconjuntos trae el estudiante de la escuela primaria.
   a. Clasificando y sistematizando sus nociones topológicas.
   b. Identificando los principales movimientos del plano y las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo estas transformaciones.
   c. Introduciendo de modo natural, una notación conjuntista que dé al alumno la posibilidad de matematizar situaciones, y de expresar mediante fórmulas, enunciados claros y sencillos.
   d. Formulando la noción de ángulo en base a la rotación de una semirecta, y desarrollando un estudio más detallado de su medida.

2. Iniciar un primer estudio de los polígonos, su nomenclatura, construcción y clasificación, de acuerdo a propiedades de sus lados, ángulos y diagonales.

3. Ampliar el estudio de la proporcionalidad, como una propiedad de los lados de los polígonos, que se preserva mediante una homotecia.

4. Reformular íntegramente los conocimientos adquiridos sobre la circunferencia y el círculo.

5. Reorganizar el conocimiento sobre los triángulos y sus elementos: altura, medianas y bisectrices; así como sus clasificaciones según sus lados y según sus ángulos.

DESCRIPCION GENERAL DEL CURSO PARA I AÑO

Este curso deberá iniciarse con la identificación de las figuras del plano como subconjunto de puntos. Por ello, éstas se denotarán con letras mayúsculas y los puntos con minúsculas. De este modo, el segmento de extremos a y b, se denotará por $\overline{ab}$; la recta R por R, y la que pasa por los puntos a y b, por $\overleftrightarrow{ab}$. Análogamente Sab denota la semirecta de origen a que pasa por b. Un polígono de vértices a,b,c,d, se podrá denotar P(a,b,c,d). Se recomienda mantener en el aula, a la vista del alumno, una tabla con los símbolos más usuales del lenguaje. Por lo demás la notación puede irse introduciendo en la medida que vaya requiriéndose.

Las propiedades topológicas son del dominio inconsciente del alumno por lo que la organización de estos conocimientos le permitirán considerar importantes clasificaciones de las figuras. Es el momento oportuno para formular definiciones descriptivas en base a propiedades visibles. Estas deberán ser claras y breves.

Con los movimientos del plano se inicia su estudio dinámico. Aquí es importante distinguir la figura que se transforma de la figura transformada. Además de la pizarra, el docente debe recurrir a otros recursos didácticos como el geoplano, el telgopor, etc. que inducen una enseñanza activa. Los estudiantes deberán determinar las características más importantes de estas transformaciones, e identificar sus invariantes geométricos: distancia, colinealidad, paralelismo, amplitud de los ángulos, etc.

Se pasará entonces a la consideración del ángulo como una región convexa del plano, generada al rotar una semirecta sobre su origen. Este enfoque facilita la comprensión del sentido del ángulo y su medida sexagesimal siendo aconsejable recurrir a la circunferencia. Después de ésto, se replanteará la clasificación de los ángulos en base a su amplitud así como también la relación de perpendicularidad entre segmentos y rectas del plano. Se recomienda abundantes ejercicios de construcción utilizando regla, compás y transportador.

Se tratará luego la clasificación, nomenclatura y construcción de los polígonos, lo que se facilitará considerablemente, si se ha logrado una adecuada organización de los conocimientos anteriores. Los problemas de construcción deberán orientarse a la adquisición de destrezas en el manejo de los instrumentos, y la verificación de los datos en la figura construída.

El estudio de las relaciones entre pares de ángulos, ya sea sobre el plano, o sobre un cuadrilátero convexo, (ángulos consecutivos, adyacentes, complementarios, suplementarios, etc.), brindará al alumno nuevos elementos para un estudio más amplio de los polígonos. El tema es adecuado para formular y comprobar algunos resultados que permitan introducir la necesidad de pruebas sencillas para verificar las proposiciones que se enuncian.

La introducción al estudio de la proporcionalidad deberá iniciarse mediante la introducción informal de la homotecia, aplicándose seguidamente a los triángulos, y luego a los polígonos y figuras en general, de modo que se concluya con el estudio de las propiedades de la semejanza como una relación de equivalencia así como con la identificación de algunos de sus invariantes geométricos. Naturalmente, deberán contemplarse las construcciones geométricas correspondientes.

El estudio de la circunferencia debe iniciarse también mediante la reorganización del conocimiento previo que posee el alumno. El estudio de conjuntos de circunferencias, (concéntricas, congruentes, tangentes o secantes, etc.), como la consideración de los ángulos en la circunferencia y el círculo, (ángulos centrales, inscritos, y semi-inscritos), permiten nuevas perspectivas en el estudio de los polígonos regulares y del triángulo. Esta sección puede concluirse con el número irraccional constante π y el cálculo del área del círculo y la longitud de la circunferencia.

Finalmente, se deberá iniciar un estudio más preciso del triángulo con el recurso de la circunferencia. Mediante la consideración de dos circunferencias secantes de radios congruentes se puede determinar un triángulo isóceles, que será equilátero, si la distancia entre los centros es igual al radio. Si ambas circunferencias no son congruentes, se determinará un triángulo escaleno. Desde esta ágil y conveniente perspectiva, se puede pasar al estudio de los segmentos notables como las medianas, alturas y bisectrices del triángulo, con una adecuada fundamentación. Las construcciones geométricas que se pidan deberán implicar el trazado de los triángulos dados los datos, de las bisectrices y otros segmentos y rectas notables del triángulo. No deberán descuidarse los casos límites. Concluído el estudio del tema, deberá efectuarse una síntesis de las nociones consideradas, a fin de obtener su debida unidad.

Sobre las construcciones geométricas conviene enfatizar que las mismas se fundamentarán en la medida de distancias, de ángulos y en la proporción, siendo la regla, el compás, y el transportador instrumentos necesarios. Aunque no debe exigirse un trabajo riguroso, los dibujos geométricos deberán verificar los datos dados.

Los distintos contenidos que serán desarrollados para este nivel deberán ser relacionados en la medida de lo posible, con el resto de los contenidos del programa.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS

1. Utilizar la notación y el lenguaje fundamental para los puntos y subconjuntos	Notación y lenguaje fundamental.
	- Lenguaje y simbolismo conjuntista.
	- Notación para los elementos y subconjuntos del plano.
	  - Para puntos.
	  - Para segmentos.
	  - Para semirectas.
	  - Para rectas.
	  - Para polígonos.
	  - Para figuras en general.
	- Notación para el plano y los semiplanos.
		1.1 Presente el plano π como un conjunto son infinitos puntos, y las figuras como sub-conjuntos de π .
		1.2 Guíe a los alumnos a representar en la pizarra, diversas figuras conocidas: segmentos, rectas, polígonos, etc.
		1.3 Oriéntelos para que representen los puntos con letras minúsculas y las figuras por mayúsculas.
		1.4 Establezca la notación para los principales subjuntos del plano en base a las orientaciones anteriores.
		1.5 Ejercite el uso correcto de la notación y del lenguaje fundamental.

2. Identificar propiedades topológicas de las figuras planas.	Propiedades topológicas de las figuras planas. - Interior, exterior y frontera de una figura plana. - Figuras abiertas y cerradas. - Partes convexas del plano.	2.1 Trace diversos polígonos sobre la pizarra y pida que determinen con claridad, los puntos del plano que están dentro, fuera, o en el contorno de cada figura. 2.2 Pida que clasifiquen como <u>abierto</u> al conjunto de los puntos interiores al polígono excluyendo los del contorno, y como <u>cerrado</u> la unión de los puntos interiores y los del

			contorno. El conjunto de estos últimos formará la <u>frontera.</u>
			2.3 Defina la convexidad de una figura plana F, en base a la implicación: $\left.\begin{array}{l} a \in F \\ b \in F \end{array}\right] \Longrightarrow \overline{ab} \subset F$ y dé ejemplos gráficos de figuras convexas y no convexas, distinguiendo sus características esenciales.
			2.4 Pida a los alumnos que determinen si una figura dada (recta, círculo, circunferencia, etc.) es o no convexa.
3.	Reconocer los principales movimientos en el plano y sus propiedades invariantes.	Los movimientos en el plano y sus invariantes. - Rotación de una figura. - Traslación de una figura. - Reflexión de una figura respecto a un punto. Propiedades invariantes de estos movimientos.	3.1 Dé ejemplos de movimientos en el plano, usando materiales conocidos, y establezca correspondencia entre puntos y figuras por traslación y rotación: la trasladada de la figura F es la figura G. Al punto p le corresponde el punto p′ por la rotación 3.2 Oriente las observaciones respecto a cada uno de estos movimientos enfatizando en que: - la forma y la longitud de las

			figuras no varían al rotarse o trasladarse. - Si la figura empieza a girar, esta mira hacia un lugar, cuando ha recorrido medio giro, mira hacia el lugar opuesto, y al llegar al punto inicial, vuelve a mirar al mismo lugar. 3.3 Guíe al alumno al estudio particular de cada movimiento, analizando las diversas situaciones y sus cualidades esenciales.

4.	Determinar la amplitud y sentido de un ángulo.	Medida y notación de ángulos.
		- Noción de ángulo. Notación.
		  - Letras del alfabeto griego
		  - Sentido del ángulo. Angulos positivos y negativos.
		    - Angulo llano.
		- Sistema sexagesimal. Amplitud de un ángulo. Clasificación.
		- Ángulos congruentes.
		- Construcciones geométricas. Uso del transportador.
			4.1 Haciendo girar una semirecta sobre su origen, en ambos sentidos, construya diversos ángulos. Denótelos mediante letras griegas, e invite a los alumnos a observar distintas situaciones.
			- Cuando el giro es completo.
			- Cuando sólo se efectúa medio giro o un cuarto de giro.
			- Cuando se efectúa medio giro en sentido contrario.

			4.2	Oriéntelos en el uso del compás y el transportador para indicar el sentido y medir la amplitud de los ángulos, observando que la misma no depende de la longitud de los lados.
			4.3	Ejercite la construcción de ángulos con amplitud y sentidos dados, e induzca una partición del conjunto de los ángulos en rectos, agudos y obtusos.
5.	Definir la relación de pendicularidad entre las rectas del plano.	Perpendicularidad. - Segmentos y rectas perpendiculares. - Propiedades. - Construcciones geométricas (regla y compás; escuadra).	5.1	Defina la relación de perpendicularidad y promueva una discusión respecto a sus propiedades.
			5.2	Ejercite la construcción de la perpendicular a una recta dada, con regla y compás; y con la escuadra solamente.
6.	Clasificar los polígonos según sus lados y sus ángulos.	Los polígonos. - Clasificación. Nomenclatura. Polígonos convexos. - Cuadriláteros. Paralelogramos.	6.1	Efectúe una revisión y ampliación de los conocimientos previos sobre los polígonos en el orden siguiente: a) lados, notación, perímetro y área. b). relación entre el número de

	- Perímetro y área. - Polígonos regulares. - Diagonales. Relación entre lados y diagonales. - Construcciones geométricas.	lados y el de ángulos internos. c) Nomenclatura, casos particulares más conocidos, relación entre el número de lados y el de diagonales. 6.2 Discuta y oriente la construcción con regla y compás de algunos polígonos regulares.

7. Establecer la relación existente entre dos ángulos de un polígono o de un cuadrilátero convexo.	Relaciones entre ángulos.
	- Angulos adyacentes, contiguos, complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice.
	  - En el plano.
	  - En un polígono convexo.
	  - Propiedades.
	- Suma de los ángulos internos de un polígono convexo.
	- Construcciones geométricas.
		7.1 Presente diversos ángulos sobre la pizarra y muestre los ángulos contiguos y los adyacentes; los complementarios y los suplementarios; los opuestos por el vértice,etc.
		7.2 Oriente al grupo a determinar sus características y a formular sus definiciones.
		7.3 Pídales identificar entre los ángulos internos de diversos polígonos convexos, pares de ángulos complementarios, suplementarios, etc; midiéndolos y adicionándolos si fuese necesario.
		7.4 Guíe a los alumnos al cálculo de la sumas de los ángulos internos de

			cada polígono, descomponiéndolos en s triángulos donde: s= (n - 2) n= lados del polígono.
8.	Identificar polígonos proporcionales.	Proporcionalidad. - Noción informal de homotecia - Proporcionalidad entre los lados de dos triángulos. - Triángulos y polígonos proporcionales.	8.1 Partiendo de un mismo origen o, trace 3 semirectas y determine sobre cada una de ellas, puntos a, b, c distintos de o. Pida al grupo: a) Obtener los puntos a', b', c' sobre las respectivas semirectas, tales que: $\frac{\overline{oa'}}{\overline{oa}} \quad \frac{\overline{ob'}}{\overline{ob}} \quad \frac{\overline{oc'}}{\overline{oc}} = 3$ b) Comparar los lados y los ángulos correspondientes de los triángulos : $\triangle$ abc y $\triangle$ a' b' c'. Se concluirá que tales ángulos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos correspondientes congruentes. 8.2 Oriente a los alumnos a interpretar el $\triangle$ a'b'c' como la proyección sobre una pantalla del $\triangle$ abc e invíteles a determinar las propiedades de $\triangle$ abc que se preservan en $\triangle$ a' b' c'.

			8.3 Dibuje y denote convenientemente algunos polígonos sobre la pizarra y pídales que los comparen para verificar si son o no proporcionales. 8.4 Ejercite el dominio de los conceptos y propiedades descubiertos.
9.	Determinar la semejanza ente dos polígonos aplicando sus propiedades.	Polígonos semejantes. - Relación de semejanza. - Propiedades. - Construcciones geométricas.	9.1 Defina la semejanza entre polígonos, como una relación de equivalencia y guíe al grupo al descubrimiento de sus propiedades. 9.2 Pídales la construcción de polígonos semejantes a uno dado.
10.	Determinar ángulos y segmentos notables de la circunferencia y círculo.	Círculo y circunferencia. - Notación. - Segmentos sobre el círculo. Arcos de circunferencia. - Ángulos en la circunferencia. Ángulo central. Sector circular. - Ángulos inscritos y semi-inscritos.	10.1 Revise los conocimientos aislados, que sobre la circunferencia, el círculo, y sus elementos trae el alumno, y establezca una notación adecuada. 10.2 Sobre el geoplano circular presente los diversos segmentos notables: cuerdas, radios, diámetros; y un ángulo de vértice el centro y cuyos lados contienen los extremos de una de las cuerdas. De la experiencia pase al lenguaje y a las definiciones, ángulo central, sector circular,

			arcos y cuerdas subtendidas, etc. 10.3 Plantee al grupo sumas de ángulos centrales consecutivos, y consecuentemente de arcos y sectores circulares. Ejm. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 28^{\circ} + 37^{\circ} = \widehat{(a,b)} + \widehat{(b,c)} = \widehat{aoc} = \widehat{(a,c)}$. 10.4 Invítelos a construir otros ángulos en la circunferencia: a) Con vértices en la circunferencia (inscritos). b) Con uso de los lados tangentes a ella (semi-inscritos); y a presentar algunas de sus propiedades.
11.	Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.	Longitud de la circunferencia y área del círculo. - El valor constante $\pi = 3.1416..$	11.1 Pida al grupo que trace diversas circunferencias y determinen su longitud aproximada C, y la de su diámetro D; y luego calculen la relación C/D. Se compararán los resultados obtenidos. 11. Oriéntelos a utilizar los resultados obtenidos para definir el valor constante. $\pi = C/D = 3.1416..$

			11.3 Invite al grupo a calcular el área de los círculos y la longitud de las circunferencias utilizando fórmulas dadas.

12.	Analizar las caracterís-ticas de importantes con-juntos de circunferencias.	Conjuntos de circunferencias.
		- Circunferencias concéntricas.
		- Circunferencias congruentes.
		- Distancia entre los centros
		  - Circunferencias secantes.
		  - Circunferencias tangentes.
		- Construcciones geométricas.
			12.1 Tomando la pizarra como un modelo del plano interrogamos al grupo: ¿Cuántas circunferencias podemos trazar sobre el plano?. Si fijamos arbitrariamente un punto σ ¿Cuántas circunferencias con centro σ se pueden construir?
			Si tomamos luego una recta $L \subset \pi$ cuántas circunferencias centradas en puntos de L podemos construir? ¿Cómo puede ser la intersección de dos de estas circunferencias? ¿Si ambas tienen radios congruentes, cómo son estas circunferencias?
			12.2 Después de la discusión concluiremos en que:
			- Puesto que para determinar una circunferencia basta un punto y una distancia; podemos trazar

			infinitas circunferencias. - Si mantenemos invariante el centro y variamos el radio, podemos trazar infinitas circunferencias (concéntricas). - Con centro en puntos de L podemos trazar infinitas circunferencias que si no tienen igual centro pueden ser disjuntos, secantes o tangentes. Si además sus radios son congruentes, ellas se dirán congruentes.
			12.3 Mediante este tipo de cuestionamiento introduzca los diversos conjuntos de circunferencias y la forma de construirlas.
13.	Establecer la relación triangular a partir de la intersección de dos circunferencias secantes.	Introducción al estudio de los triángulos. - Desigualdad triangular.	13.1 Sobre una recta horizontal L, determine dos circunferencias secantes C_1 (O_1, r_1) y C_2 (O_2, r_2). Trazaremos entonces el $\triangle (O_1, O_2, a)$ donde a es una de las intersecciones de C_1 y C_2. Se pedirá al grupo comparar la longitud de cualquiera de los lados con la suma de los otros dos.

			13.2 Los estudiantes construirán diversos triángulos en forma similar y medirán sus lados en centímetros para verificar numéricamente la propiedad anterior. Se preguntará luego si con cualquier trío de segmentos se puede construir un triángulo; concluyéndose que ello sólo será posible si se verifica la condición establecida: "cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos" (desigualdad triangular).
			13.3 Analizando los casos de dos circunferencias tangentes o disjuntas se presentaran casos en que resulta imposible construir el triángulo por no verificarse la relación triangular.
14.	Clasificar triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos.	Clasificación de los triángulos - Según la congruencia de sus lados. - Según la amplitud de sus lados.	14.1 Empleando la notación básica establecida dé ejemplos claros de triángulos escalenos, isóceles y equiláteros.

			14.2 Sobre la pizarra presente diversos ejemplos de triángulos obtusángulos, acutángulos y rectángulos. 14.3 Asigne al grupo la construcción de triángulos de los diversos tipos descritos.
15.	Identificar rectas y segmentos notables del triángulo.	Análisis de la mediatriz de los lados y de las alturas y medianas de un triángulo. - Ortocentro e incentro.	15.1 Traer dos circunferencias secantes $C_1(o_1,r_1)$ y $C_2(o_2,r_2)$, y considere la recta L determinada por los dos puntos de intersección. Se observará que bajo cualquier situación posible L es perpendicular al segmento $\overline{o_1o_2}$ y lo corta en un punto m. 15.2 Si $r_1=r_2$, la recta L es perpendicular a $\overline{o_1o_2}$ y m es su punto medio. En este caso se dice que L es mediatriz de $\overline{o_1o_2}$. 15.3 Si $r_1\neq r_2$ los segmentos $\overline{am}$ y $\overline{bm}$, perperdiculares al lado $\overline{o_1o_2}$ constituyen alturas de los triángulos $\triangle o_1o_2a$ y $\triangle o_1bo_2$. Se enfatizará que todos los segmentos perpendiculares que se bajen desde los vértices a los lados opuestos serán alturas del triángulo.

			15.4 Inicie el estudio inverso de la situación en 15.1 y 15.2 para ilustrar el trazado geométrico en el triángulo, de las tres alturas y las medianas, además de los puntos de intersección de estos segmentos (ortocentro y baricentro).
16.	Determinar la bisectriz de un ángulo y de los ángulos internos de un triángulo.	Bisectrices de los ángulos de un triángulo. - El incentro.	16.1 Se colocará en el geoplano una semirecta de origen un punto O. Luego, utilizando dos ligas de un color distinto al de la semirecta inicial, se colocarán dos semirectas también con origen en O. Utilizando estas semirectas para borrer partes del plano. Los ángulos así obtenidos podrán ser o no ser congruentes. 16.2 Cuando ambos ángulos son congruentes, la semirecta inicial, se llama <u>bisectriz</u> del angulo cuyo vértice es O y sus lados las semirectas representadas por las ligas de igual color.

			16.3 Establecida esta idea intuitiva, se discutirá el trazado de la bisectriz de un ángulo utilizando regla y compás. 16.4 Finalmente se pedirá al grupo la construcción de las tres bisectrices de los ángulos internos de un triángulo dado y el punto de intersección o incentro.
17.	Revisar las principales nociones relativas a los triángulos y sus propiedades generales.	Síntesis de las principales ideas sobre el triángulo. - Propiedades y relaciones entre sus elementos.	17.1 Inicie una síntesis de las principales ideas obtenidas sobre los triángulos: a. Como un polígono de tres lados. b. Las relaciones entre sus vértices, lados y ángulos. c. Sus segmentos y puntos notables d. Su notación y su identificación en figuras decorativas, e. Sus clasificaciones. f. La medida de su parímetro y área 17.2 Discuta las propiedades generales elementales relativas a los lados y ángulos de un triángulo como: a. La suma de sus ángulos internos es 180°.

			17.3 Pida la verificación intuitiva de estas propiedades y analice algunas importantes consecuencias.
18.	Resolver problemas de medición y construcción relativos a los triángulos.	Problemas y construcciones geométricas sobre triángulos.	18.1 Ejercite el empleo del transportador para medir y construir triángulos. 18.2 Discuta y ejercite la construcción con regla y compás de un triángulo: a. Dadas sus tres lados b. Dados dos lados y el ángulo comprendido. c. Dados dos ángulos y el lado comprendido. 18.3 Ejercite la construcción con regla y compás de los segmentos y puntos notables de un triángulo. 18.4 Organice diversos problemas de construcciones geométricas que requieran la aplicación de los conceptos adquiridos y un adecuado razonamiento lógico o el empleo de recursos algebráicos al alcance del alumno. 18.5 Oriéntelos mediante métodos heurísticos a la resolución de estos problemas.

OBJETIVOS GENERALES PARA EL SEGUNDO AÑO

1. Reorganizar el conocimiento y clasificación de los principales movimientos del plano, en el marco más amplio de las transformaciones geométricas.
   a. Identificando sus principales características.
   b. Extendiendo la notación funcional y conjuntista.
   c. Clasificando las principales transformaciones de acuerdo a las principales invariantes que se preservan.
   d. Aplicándolas en las construcciones geométricas.

2. Ampliar el aprendizaje de el paralelismo y la congruencia, como relaciones de equivalencia entre las rectas y los polígonos del plano, respectivamente.

3. Iniciar el estudio intuitivo del teorema de Pitágoras.
   a. Revisando y ampliando los conocimientos sobre el triángulo rectángulo.
   b. Verificando la validez general del teorema.
   c. Aplicando este resultado al cálculo del perímetro y el área de regiones poligonales.

4. Continuar el estudio de los polígonos regulares y la circunferencia.
   a. Profundizando e integrando conceptos ya adquiridos.
   b. Analizando las relaciones métricas existentes entre la circunferencia y el radio del círculo.
   c. Aplicando el lenguaje y la notación adquirida, en el planteamiento y análisis de problemas prácticos y construcciones geométricas.
   d. Calculando el perímetro y el área de regiones circulares.

5. Introducir al alumno en el conocimiento intuitivo de los vectores del plano.

DESCRIPCION GENERAL DEL CURSO PARA EL SEGUNDO AÑO

El segundo año se inicia con el estudio semi-informal de las transformaciones del plano. El lenguaje adquirido permitirá ampliar la noción de movimiento, mediante la idea más general, de transformación geométrica. Para ello, el alumno debe poseer un cierto manejo de los conceptos de relación y función. Podemos empezar por la simetría axial, solicitando al grupo la determinación del simétrico de un punto p del plano, respecto a una recta dada R. El empleo de papel cuadriculado, el geoplano, y la pizarra facilitan la labor constructiva del alumno y le entusiasman. Ejercicios y observaciones convenientemente planificadas le permitirán identificar las propiedades invariantes y los puntos fijos de esta transformación. Se deberán empezar a establecer, en el lenguaje adecuado, algunas definiciones. De modo similar, pero siempre dentro de un marco intututivo, se continuará con el estudio de la rotación y la traslación. De esta manera se le continúa preparando para el ejercicio de la deducción elemental y la completación de demostraciones sencillas. Conviene enfatizar constantemente en la actividad constructiva, en la identificación de las propiedades, así como el manejo correcto del lenguaje y la notación. Al identificar la distancia como una propiedad de las figuras que se mantienen invariantes bajo los efectos de estas transformaciones, generalizamos el tratamiento de las isometrías, sus propiedades y la composición de este tipo de transformaciones geométricas. Luego el estudio se extenderá a las homotecias. En este sentido es importante revisar los conocimientos sobre proporcionalidad y semejanza de las figuras, adquiridos en el curso anterior. Las ilustraciones gráficas y los ejercicios prácticos exigirán al docente el empleo de material didáctico adecuado.

El conocimiento de las relaciones entre conjuntos permitirá replantear la idea de rectas paralelas. Así, éstas podrán definirse en términos de la intersección disjunta o de las coincidencia de ambas rectas. Desde este enfoque, las condiciones que hacen del paralelismo una relación de equivalencia pueden ser presentadas como propiedades. Porque no es adecuado al nivel, evitaremos la exigencia de un manejo riguroso de conceptos como el de clase de equivalencia y definiciones abstractas como la de dirección de una recta. Bastará sólo que estas ideas sean correctas. El trazado de rectas paralelas con regla y escuadra, y la construcción de la paralela a una recta dada, con regla y compás; son ejercicios indispensables. Después de esto, es conveniente presentar el paralelismo como un invariante geométrico de las isometrías. Los conocimientos adquiridos permitirán finalmente, la extensión del estudio de los cuadriláteros al de los paralelogramas y el trapecio. En esta tarea el geoplano es inprescindible.

Después de establecer la propiedad de dos figuras dadas de estar formadas por polígonos ordenadamente congruentes, que denominamos equivalentes, podemos clarificar las diferencias entre los conceptos de área y de superficie. El tema se concluye con ejercicios en el cálculo del área y la construcción de figuras, dadas sus dimensiones.

El trabajo práctico sobre la construcción de figuras y el cálculo de sus áreas, pueden constituir la base para la introducción intuitiva del teorema de Pitágoras. Para tal propósito el estudiante deberá percatarse que siempre es posible descomponer un polígono en triángulos. Luego deberá revisar y afianzar sus conocimientos sobre el triángulo rectángulo. Además, mediante la verificación directa en el geoplano, comprobará otros detalles importantes como el hecho de que tal triángulo nunca es equilátero y que carece de ángulo obtuso. Ejercitando suficientemente en esta actividad, se colocará en el geoplano un triángulo rectángulo, y se pedirá que se construyan los cuadrados sobre sus lados. Este método tradicional sigue siendo muy útil, pero debe ser verificado muchas veces por los alumnos hasta convencerles "de su validez". Finalmente se desarrollarán las aplicaciones del teorema al cálculo del perímetro y el área de regiones poligonales; así como en la demostración, (verificación), de algunos resultados sencillos.

El siguiente tema consiste en una ampliación del estudio de los polígonos regulares y la circunferencia. Este contenido es importante ya que permite la integración de diversos temas ya estudiados, y su profundización. De igual forma brinda la oportunidad para combinar en el trabajo práctico, la construcción geométrica, el cálculo de áreas y perímetros, y el análisis de problemas. En su desarrollo es importante el manejo correcto de los elementos del círculo y la relación existente entre cuerdas y arcos subtendidos.

En el estudio del perímetro y el área de regiones circulares, además del desarrollo de destreza en el cálculo, es importante la determinación de importantes relaciones métricas entre algunos elementos del círculo, como la razón constante π = C/D (cociente irracional entre la longitud de la circunferencia y su diámetro). Por otra parte, este tema, como el anterior, es adecuado para aplicar el lenguaje algebráico que el alumno también ha adquirido, en el planteamiento y análisis de los problemas geométricos.

La construcción geométrica y la resolución gráfica de problemas constituye un objetivo básico de la enseñanza geométrica durante toda la escolaridad; por su valor didáctico y formativo. En este nivel, se deberá enfatizar en el análisis, la discusión y la verificación del dibujo. Los instrumentos geométricos seguirán siendo los mismos, pero deberán introducirse nuevos métodos de construcción, basados en el empleo de las transformaciones geométricas.

El curso concluye con un estudio elemental de los vectores del plano. Tema de fundamental importancia en la matemática actual. A pesar de parecer desligado de los temas anteriores; en el tratamiento de los vectores, hemos de revisar y aplicar nociones matemáticas ya adquiridas, como la idea de segmento dirigido, a partir de la cual se establecerán intuitivamente las nociones de dirección, sentido y módulo o longitud de un vector del plano.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
1. Identificar los principales movimientos del plano como transformaciones puntuales.	Transformaciones del plano. - Concepto de transformación geométrica. Notación.	1.1 Ejemplifique la idea de transformación puntual, ilustrando en la pizarra: a. El punto simétrico p´de un punto p respecto a una recta da L. b. El traslado p´de un punto p que se desplaza en línea recta una distancia p´p. c. El punto extremo p´resultante de girar el segmento $\overline{op}$ sobre su origen o. 1.2 Guíe al grupo a determinar la regla de correspondencia aplicada en cada caso. 1.3 Sintetice las observaciones realizadas, identificando los ejemplos presentados, como funciones puntuales de π en π , y establezca la notación correspondiente. 1.4 Motive al grupo a presentar otros ejemplos de transformaciones geométricas.

2.	Determinar las propiedades relevantes de las isometrías.	Transformaciones que preservan la distancia. Isometrías. - Simetrías axiales. Propiedades. - Giros o rotaciones. Propiedades. - Traslaciones. Propiedades.	2.1 Después discutir cada uno de los ejemplos presentados, formule mediante el lenguaje y notación adecuada, la definición correspondiente. 2.2 Para cada una de estas transformaciones considere una figura F y determine la figura transformada F'. 2.3 Oriente al grupo a resolver ejercicios y a efectuar observaciones que permitan identificar propiedades de estas transformaciones como funciones puntuales. 2.4 Concluya la discusión listando los principales invariantes geométricos de las figuras planas bajo estas transformaciones.
3.	Introducir el estudio de la homotecia y sus principales propiedades.	Homotecias. Propiedades.	3.1 Presente al grupo el siguiente ejemplo de correspondencia h de π en π ; llamado homotecia de <u>centro</u> y <u>razón</u> r : a. Elija un punto o, (centro de la homotecia) b. Elija un número entero o fracción r, (razón de la homotecia).

c. Trace el punto o y otros puntos no colineales a, b, c,.., y las semirectas Soa, Sob, Soc,....

d. Fije la razón r= 3, r = ¼,....

e. Se buscará con la ayuda del grupo, los puntos x, y, z,.... talas que ox/oa = 3, oy/oa = 3...., ox/oa = ¼,....

3.2 Se discutirán luego, interrogantes como:

¿ A cada punto a, qué le corresponde por la correspondencia h ? Un punto x.

¿ Al ángulo (a,b,c), que le corresponde por la transformación h?. El ángulo (x, y, z).

¿ Cómo es la longitud de $\overline{oa}$ respecto a $\overline{ox}$? Distinta.

¿ Cómo es $\triangle$ oab respecto a $\triangle$ oxy? Semejantes.

3.3 Invíteles a que presenten en el geoplano o la pizarra, otros ejemplos de homotecias, y que observen la transformada de una recta, de un ángulo, de un triángulo, o de

			cualquier figura del plano. 3.4 Después de analizar las figuras transformadas y sus propiedades, solicíteles una lista de las propiedades de las figuras que se mantuvieron invariantes.
4.	Aplicar las homotecias y propiedades, al estudio de semejanza entre los polígonos del plano.	Transformaciones que preservan la forma. Semejanzas. - Propiedades Invariantes.	4.1 Después de resumir las principales propiedades de las homotecias como transformaciones geométricas, y de sus invariantes, se les ubicará como casos particulares de transformaciones del plano que preservan la forma de las figuras, llamadas <u>semejanzas</u>. 4.2 Se pedirá a los estudiantes que presenten otros ejemplos de semejanzas, o identifiquen las propiedades invariantes de las figuras. 4.3 Después de presentar algunos polígonos, se invitará al grupo a aplicar homotecias para obtener polígonos semejantes a los dados.
5.	Definir la relación de paralelismo como una relación de equivalencia.	Relación de paralelismo. - El paralelismo como una relación de equivalencia entre las rectas del plano.	5.1 Repase el conocimiento sobre las rectas paralelas e inicie una discusión sobre sus principales propiedes.

		- Dirección de una recta. - Trazado de rectas paralelas. - Proposiciones sobre dos rectas paralelas.	5.2 Destaque las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad del paralelismo entre las rectas del plano. 5.3 Defina la relación "es paralela a" en el conjunto D = { L : L es una recta }, en base a las propiedades anteriores. 5.4 Explique y ejercite el trazado de la paralela a una recta dada, con regla y compás. 5.5 Presente y discuta proposiciones relativos a dos paralelas cortadas por una transversal.
6.	Reconocer las principales propiedades de los trapecios y paralelogramos.	Paralelogramos y trapecios. - Construcciones geométricas - Propiedades.	6.1 Guíe al grupo a construir cuadriláteros de lados opuestos paralelos. 6.2 Haga observar en las figuras construídas, que en los paralelogramos, los lados opuestos son congruentes, y que las diagonales se bisecan. 6.3 Oriente la construcción con regla y compás, de paralelogramos y trapecios de dimensiones dadas.

7.	Identificar propiedades de la congruencia entre los polígonos del plano.	Polígonos congruentes. - Relación de congruencia entre polígonos.	7.1 Organice una amplia revisión de los conocimientos adquiridos sobre los polígonos. 7.2 Inicie una discusión sobre las propiedades comunes de un polígono y su transformado por una isometría, (polígonos congruentes). 7.3 Concluya, definiendo la relación de congruencia entre polígonos, como una relación reflexiva, simétrica y transitiva.
8.	Aplicar los postulados de congruencia para determinar la congruencia entre dos triángulos dados.	Triángulos congruentes. Postulados de congruencia.	8.1 Presente diversos ejemplos no triviales de pares de triángulos congruentes. 8.2 Formule los criterios básicos (postulados) de congruencia de triángulos. 8.3 Ejercite la determinación de la congruencia de dos triángulos, aplicando los postulados de congruencia.
9.	Aplicar la idea de polígonos ordenadamente congruentes para determinar los conceptos de área y	Polígonos ordenadamente congruentes. Noción de superficie y área de una figura. - Polígonos equivalentes.	9.1 A partir de tres figuras recortadas en cartulina: un triángulo rectángulo, un rectángulo de altura y base congruentes a un cateto y a la

superficie de un polígono.

- Polígonos ordenadamente congruentes.
- Concepto de superficie y de área de una figura.
- Construcciones geométricas.

hipotenusa del triángulo, respectivamente; y un cuadrado de lado congruente a la altura del rectángulo:

a. Proponga al grupo la construcción de polígonos, colocando lado a lado las figuras recortadas.
b. Hágales observar que se pueden formar muchos polígonos distintos. Tales polígonos se dirán equivalentes.
c. Adoptando una figura U, (que puede ser por ejemplo un triángulo rectángulo conveniente), como unidad de medida, ésta se colocará reiteradamente hasta cubrir totalmente el polígono. Se obtendrá así la medida de la superficie de cada polígono.

   El número de veces que se neceta U para cubrir cada polígono, se llama área del polígono.
d. Los estudiantes se percatarán de que a pesar de tener formas distintas, todos los polígonos tienen la misma superficie.

			9.2 La discusión precedente permitirá establecer ciertas diferencias entre las nociones de área y superficie. 9.3 Ejercite la verificación de la equivalencia de dos polígonos dados, mediante la comparación de sus superficies.
10.	Reconocer las principales propiedades de los triángulos rectángulos.	Triángulos rectángulos. Nomenclatura, notación y propiedades. - Construcción.	10.1 Invite a construir triángulos rectángulos recurriendo al geoplano. Recuérdeles la notación y el nombre de los lados y obsérveles: a. Que el triángulo rectángulo, nunca es equilátero. b. Pero que puede ser isósceles o escaleno. c. Que no tiene ángulo obtuso, siendo los otros dos, ángulos agudos. 10.2 Ejercite suficientemente la identificación y construcción con regla y compás de un triángulo rectángulo, dados dos de sus elementos, (dos lados, un lado y un ángulo).

			triángulo rectángulo, dados dos elementos.
11.	Verificar la validez del teorema mediante algunas demostraciones sencillas.	El Teorema de Pitágoras. - Formulación y análisis. - Demostraciones sencillas del teorema.	11.1 Pida a cada alumno la construcción de un triángulo rectángulo arbitrario y que luego, construyan los cuadrados sobre sus lados. Después pídales que: a. Calculen el área del cuadrado construído sobre la hipotenusa. b. Calculen las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos. c. Comparen ambas áreas. 11.2 Utilizando la notación: a,b, para los catetos, y c para la hipotenusa, se analizarán las situaciones obtenidas. 11.3 La relación encontrada al comparar las áreas : $c^2 = a^2 + b^2$ se denominará <u>Teoremas de Pitágoras.</u> 11.4 Se procederá a presentar algunas pruebas sencillas del Teorema.

12.	Aplicar el Teorema de Pitágoras al cálculo del perímetro y el área de regiones poligonales.	Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo del perímetro y el área de polígonos.	12.1 Ejercíteles en la resolución de triángulos rectángulos y el cálculo del área de regiones poligonales. 12.2 Oriéntelos en la aplicación del teorema a la resolución de problemas prácticos.
13.	Establecer una biyección entre los arcos y sectores circulares, y los ángulos centrales que los generan.	Angulo central. Arcos y sectores circulares. - Definición y notación. - Adición de arcos y sectores circulares.	13.1 Desarrolle un repaso sobre la circunferencia, el círculo , y sus elementos. 13.2 En el geoplano circular marque un ángulo β de vértice al centro, que intersecte a la circunferencia en los puntos a y b. A continuación describa en notación conjuntista: a. El arco de extremos a y b: $\widehat{ab}$ b. El sector circular (a, o, b)= $C_{o,\ r} \cap \beta$ c. La cuerda ab de extremos a y b 13.3 Hágales observar que a cada ángulo central β le corresponde un arco de circunferencia y un sector en el círculo. Que recíprocamente, para cada arco de circunferencia existe un único ángulo central.

			13.4 Indúzcales a deducir que también cada arco, subtiende una cuerda única, y viceversa. 13.5 Basándose en las ideas precedentes, introduzca una adición de arcos, y la correspondiente suma de ángulos centrales y regiones circulares.
14.	Construir polìgonos regulares inscritos en la circunferencia, y determinar sus àreas y perìmetros.	Los polìgonos regulares y la circunferencia. - Construcciòn de los polìgonos. regulares. - Inscripciòn en la circunferencia. - Elementos de los polìgonos regulares. - Perìmetro y àrea de un polìgono regular.	14.1 Se explicará al grupo la forma de inscribir polígonos de n lados; trazando los n vértices a partir de los n ángulos centrales de amplitud (360/n) grados. 14.2 Ejemplos adecuados les permitirán verificar que todo polígono regular de no lados se descompone en n triángulos congruentes. Pídales que apliquen este hecho, al cálculo del área de cada polígono. 14.3 Con la ayuda del geoplano circular explique la fórmula fundamental para la superficie del polígono regular de n lados: $SP_n = \frac{n(\text{longitud del lado})\ \text{apotema}}{2}$

			14.4 Ejercíteles en la construcción con regla y compás de polígonos regulares. Pídales luego, que calculen en sus perímetros, áreas y apotemas.
15.	Obtener las simetrías de un polígono.	Simetrías de un polígono - Ejes de simetría.	15.1 Utilizando el geoplano, la pizarra, o papel, presente los ejes de simetría de un polígono regular con un número par de lados. 15.2 Explique y ejercíteles en la determinación.
16.	Obtener el valor irracional $\pi = C/D$ y verificar su validez general.	Longitud de la circunferencia. - El número irracional π	16.1 Con un cordel de hilo, compruebe experimentalmente en el geoplano circular, que la longitud de la circunferencia, (del cordel), entre la del diámetro, es aproximadamente 3.1416. Repita este resultado con circunferencias de distintos radios. 16.2 Presenta este cociente $\pi = C/D$, como un número irracional poco conocido por los geómetras griegos, pero necesario para calcular el perímetro y área del círculo.

17.	Resolver problemas relativos a la longitud de arcos, y al área de regiones circulares.	Longitud de un arco de circunferencia. - Area del círculo, del sector circular y del segmento circular.	17.1 Mediante ejemplos adecuados, se explicará al grupo que la longitud de un arco de circunferencia depende del ángulo central correspondiente y de su radio. 17.2 Aplicando esta correspondencia entre los arcos de circunferencia y los ángulos centrales, y mediante una regla de tres simple, se deducirá la relación: Long. de arco de amplitud $X^{\circ} = \frac{\pi r x}{180}$ 17.3 Empleando una ejemplificación adecuada, se presentaron distintos tipos de regiones circulares como la corona circular, el trapecio circular y el segmento circular. 17.4 A partir de la relación que da el área del círculo, se deducirán las relaciones para el área de cada una las regiones circulares estudiadas. 17.5 Utilizando convenientemente las fórmulas para el área de figuras circulares y el álgebra elemental, se

			deducirán las relaciones para el área y el perímetro de figuras combinadas.
18.	Construir con regla y compás regiones circures, determinando sus perímetros y áreas.	Construcción de regiones circulares. - Comparación de áreas.	18.1 Ejercite la construcción con regla y compás de regiones circulares, dados los datos. 18.2 Sugiérales la simplificación algebraica para determinar si dos regiones de formas distintas, tienen igual área.
19.	Identificar la dirección sentido y módulo de un vector del plano.	Vectores en el plano. - Noción intuitiva de vector libre. Origen y extremo de un vector. Notación. - Dirección, sentido y módulo de un vector.	19.1 Represente gráficamente los vectores del plano, mediante segmentos dirigidos, y pida que se identifiquen el origen y el extremo. 19.2 Intuitivamente y en el nivel adecuado, defina la dirección, sentido y módulo de un vector. 19.3 Dé ejemplos adecuados y defina, dentro de un marco intuitivo, las naciones de vectores paralelos y de el vector nulo.

20.	Establecer la relación de equipolencia entre los vectores del plano, como una relación de equivalencia.	Relación de equipolencia. - Vectores equipolentes Vectores opuestos. El vector nulo.	20.1 Recurriendo a los conocimientos procedentes, establezca la relación de equipolencia entre los vectores del plano: ab $\uparrow$ cd $\equiv$ {ab y cd tienen la misma dirección, sentido y módulo. 20.2 Después de analizar las propiedades de la equipolencia, oriéntelos a concluir que ella es una relación de equivalencia en el conjunto de vectores del plano. 20.3 Concluya con la definición y dé ejemplos adecuados de vectores opuestos y el vector nulo.
21.	Definir la adición de vectores y el producto de un vector por un escalar.	Estructura aditiva del conjunto de vectores del plano. - Adición de vectores. Multiplicación por escalares enteros y racionales. Notación Problemas y construcciones.	21.1 Motive al grupo a utilizar la noción de vector libre para representar fuerzas, desplazamiento, etc. 21.2 Ilustre gráficamente la adición de vectores y la multiplicación por un escalar (número entero o racional). 21.3 Ejercite al grupo en el manejo correcto de estas operaciones entre los vectores, y en la identificación de sus propiedades.

OBJETIVOS GENERALES PARA EL TERCER AÑO

1. Profundizar el conocimiento de las distintas transformaciones puntuales como funciones binarias del plano sobre sí mismo.

   a. Empleando con mayor propiedad, el lenguaje y la notación fundamental.
   b. Clasificando los dos tipos más importantes de transformaciones del plano: las isometrías y las semejanzas.
   c. Estableciendo la definición formal de cada una de estas transformaciones y analizando sus propiedades esenciales.
   d. Aplicándolas al estudio de las relaciones de congruencia y semejanza de figuras planas.

2. Utilizar las propiedades algebraicas de la composición de aplicaciones para identificar los principales grupos y subgrupos de transformaciones del plano.

3. Establecer nuevos métodos de construcción y de resolución de problemas geométricos; basados en el empleo de las transformaciones del plano.

4. Aplicar la noción de proyección paralela del plano π sobre una recta L, para dotar al plano de un sistema de coordenadas rectangulares.

5. Iniciar el estudio analítico de la ecuación de la recta y los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

6. Reorganizar los conocimientos sobre los principales poliedros y cuerpos redondos, mediante un estudio descriptivo y métrico.

DESCRIPCION GENERAL DEL CURSO PARA EL TERCER AÑO

El curso para tercer año de la formación geométrica básica tiene como propósito primordial, la formalización de conceptos ya adquiridos y la introducción de nuevos temas, en base a ideas conocidas y a una mayor madurez intelectual del alumno. Por tal razón se le exigirá un dominio más claro del lenguaje y la notación.

Para conceptualizar en el nivel adecuado, la noción de transformación geométrica, conviene iniciar en el grupo, una discusión en torno a la idea de función binaria. Mediante ejemplos conocidos de transformaciones geométricas, presentados como funciones sobre el plano, se establecerá sin mayor dificultad la definición de transformación del plano, como una función binaria del plano sobre sí mismo. Posteriormente, mediante la noción de invariante geométrico, se establecerá la clasificación y el estudio de las isometrías y las semejanzas. Podemos empezar de lo general (semejanzas), hacia lo particular, (isometrías). De aplicarse este orden, recomendamos iniciar con la homotecia, transformación, que le es familiar al estudiante, y que le permitirá profundizar el conocimiento de la relación de semejanza entre las figuras del plano. En este sentido, los diversos criterios de semejanza de polígonos, y en particular los teoremas relativos a los triángulos semejantes, resultan consecuencias lógicas de la aplicación de homotecias y de sus propiedades. Siempre que ello sea posible, estos resultados deben aplicarse en la solución de problemas prácticos y para establecer nuevos métodos de construcción geométrica.

En el tratamiento de las isometrías, podemos empezar como en el curso anterior, con la simetría axial. Partiendo de las experiencias anteriores, se avanzará en profundidad hasta llegar al estudio de las simetrías respecto a un punto. Análogamente se pueden estudiar las rotaciones y las traslaciones. Enfatizando siempre en el estudio de sus propiedades e invariantes geométricos.

El cuarto tema del contenido incluye una introducción al estudio de la estructura de grupo, siendo su objetivo fundamental, el de analizar algunos grupos y subgrupos de transformaciones planas, con miras a destacar el papel del álgebra en el estudio de la geometría. Para ello, debemos establecer una idea clara de las leyes de composición interna, en particular la composición de transformaciones y sus propiedades. Se podrá verificar entonces, que el conjunto de transformaciones biyectivas del plano, constituye un grupo respecto a la composición de transformaciones. Luego se debe analizar en el nivel conveniente, el grupo de las isometrías y sus subgrupos de traslaciones y de giros alrededor de un mismo centro, sin emitir sus propiedades más importantes. Este estudio concluye con el grupo de las homotecias de centro o y razón $k \neq 0$, y el más general, de las semejanzas.

Los conocimientos establecidos en las etapas anteriores, permiten sin mayor dificultad, abordar el estudio de la proyección paralela del plano sobre una recta L, según una dirección δ dada. Después de dejar claramente establecida esta transformación y sus propiedades, se tratará la proyección paralela que nos facilitará el estudio del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares. Es conveniente lograr un manejo adecuado de estas transformaciones, lo que se logrará con prácticas y ejercicios, y en especial aplicándolas a las construcciones geométricas.

Un buen dominio del tema anterior facilitará la comprensión del plano cartesiano y la geometría analítica en dos dimensiones. No hay duda que la inclusión temprana de este tema permitirá al alumno apreciar una bella teoría en la cual los aspectos algorítmicos del álgebra y la aritmética convergen armónicamente con los de la geometría. Después de discutir la localización de puntos, la determinación de distancias y otras nociones preliminares, se podrá iniciar el estudio de la ecuación de la recta, su representación gráfica, y la solución geométrica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Más que la profundización del contenido, lo importante, debe ser: la toma de conciencia de la unidad de la matemática y la motivación de inquietudes sobre esta temática. Recomendamos muchos ejercicios y construcciones que permitan apreciar la aplicabilidad de la teoría.

La construcción geométrica en este nivel exigirá un dominio más amplio de los instrumentos, y un manejo más eficiente de algunos métodos de trabajo. En tal sentido serán prioritarios los problemas resolubles mediante el método de las tranformaciones geométricas, el método de los lugares geométricos y el método de sustitución.

Por último, se iniciará el estudio del espacio. Se trata de un estudio descriptivo orientado a la clasificación de los principales poliedros y cuerpos redondos, así como la medida de sus superficies y sus volúmenes. La percepción intuitiva del alumno , le ha puesto ya en contacto con diversos cuerpos de caras o superficies planas, otros de superficies planas y curvas, y otros de superficies curvas solamente. En el primero de estos casos, podemos identificar recurriendo a un material pedagógico adecuado, los cinco poliedros regulares, constatando algunas propiedades importantes, como la validez de la fórmula de Euler. Los otros tipos de poliedros, (prismas,pirámides, etc.) así como otros cuerpos conocidos(cilindros, conos, etc.), se estudiarán individualmente, enfatizando en las características individuales y en la determinación de su superficie y su volumen. Con el estudio descriptivo y métrico de la esfera, se concluye el curso para este nivel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	CONTENIDOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
1. Aplicar el concepto de función binaria en la formalización de la noción de transformación del plano.	Transformaciones del Plano. Conceptualización. - Definición y notación. - Transformaciones puntuales elementales.	1.1 Sobre el conjunto π de los puntos del plano presente diversos ejemplos de funciones binarias de π en π. 1.2 Haga notar que en cada una de las correspondencias T presentadas, a cada punto $p \in \pi$, le corresponde un único punto imagen T (p). Cada correspondencia T se denomina transformación del plano. 1.3 Oriente la discusión hacia la definición de la regla de correspondencia de cada transformación empleando siempre la notación conjuntista-funcional. 1.4 Identifique en el plano las transformaciones puntuales elementales y analice sus puntos fijos y propiedades.
2. Identificar las características más importantes de las isometrías y las semejanzas.	-Semejanzas e isometrías	2.1 Pida al grupo identificar las transformaciones que preservan la distancia.

		2.2 Pida al grupo que se identifiquen las transformaciones que preservan la forma de las figuras.
		2.3 Oriéntelos a reconocer los tipos más importantes de isometrías y semejanzas.
3. Aplicar las transformaciones del plano en la resolución de problemas de construcción.	Construcciones geométricas. - Método de las transformaciones.	3.1 Presente ejemplos adecuados de problemas de construcción resolubles aplicando transformaciones planas a) Por traslación, b) por rotación, c) mediante una simetría d) mediante una homotecia.
		3.2 Enfatice en el uso correcto de los instrumentos geométricos y en la verificación de los datos y las condiciones dadas para el problema.
4. Iniciar el estudio formal de la homotecia como el caso más importante de una transformación equiforme.	La Homotecia. - Definición y notación. - Ejemplos.	4.1 Plantee la siguiente definición formal: "Dado un punto O del plano, y un número real K, a la transformación denotada h (o,k), que lleva cualquier punto $p \in \pi$ en h (o,k)(p)= p' tal que o,p,p' son

		colineables y ap'= kop, se denomina homotecia de <u>centro σ y razón K</u>.
		4.2 Eligiendo diversos centros σ y distintas razones $K \in \mathbb{Q} - \{0\}$; presente otros ejemplos de homotecias. Aplicándolas luego a varias figuras planas, los estudiantes compararan las figuras dadas y las figuras transformadas
		4.3 Someta al análisis del grupo las homotecias $h(\sigma,0)$, $h(\sigma,1)$ y $h(\sigma,-1)$ y verifique que ellas representan transformaciones planas conocidas
5. Establecer propiedades importantes de las homotecias.	-Principales Propiedades.	5.1 Después de listar las propiedades de las homotecias identificadas por el grupo se establecerá formalmente estos resultados: a. Las homotecias de razón $k \neq 0$ son transformaciones biyectivas. b. Las homotecias llevan puntos colineales en puntos colineales.

		c. Las homotecias transforman rectas en rectas paralelas. d. Las homotecias preservan la amplitud y el sentido de los ángulos. 5.2 Presente de modo informal la verificación o "demostración" de algunqs de estas propiedades y pídales completar las restantes. 5.3 Presentando ejercicios adecuados invítelos a aplicar estas propiedades para establecer nuevos resultados.
6. Reconocer polígonos y figuras semejantes.	Polígonos semejantes. - Lados proporcionales y ángulos ordenadamente congruentes. - Razón de semejanza.	6.1 De las observaciones de figuras presentadas infiera las conclusiones siguientes: a. Los polígonos semejantes tienen lados proporcionales y ángulos congruentes. b. Los polígonos semejantes tienen igual número de lados y ángulos c. Los polígonos semejantes son figuras equiformes. d. La relación entre las medidas de los lados correspondientes

		de un polígono y otro semejante es una constante: la razón de semejanza.
		6.3 Presente en la pizarra diversos polígonos y figuras planas. Luego pida que se seleccionen las que son semejantes.
7. Identificar la semejanza entre las figuras planas como una relación de equivalencia.	-La semejanza como una relación de equivalencia.	7.1 En base a las observaciones anotadas sobre la semejanza, se resumirán las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, que hacen de ella una importante relación de equivalencia.
8. Aplicar los conocimientos sobre la proporcionalidad de las figuras en la resolución de problemas prácticos.	Escalas. Problemas de Aplicación.	8.1 Mediante la presentación de mapas geográficos, planos de edificios, fotografías aéreas, etc. motive al grupo a ponderar la importancia de la semejanza de las figuras.
		8.2 Presente problemas de escalas en las que se puedan determinar las magnitudes reales. Explique luego el recurso de una construcción adecuada y la regla de tres para resolverlos.

		8.3 Ejercite el dominio de los conceptos con diversos ejercicios prácticos.
9. Determinar triángulos rectangulares.	Construcción de polígonos semejantes. - Triángulos semejantes. Lados homólogos y ángulos congruentes. - Teoremas relativos a los triángulos semejantes. - Semejanza de triángulos rectángulos. - Aplicaciones en la resolución de problemas y construcciones.	9.1 Construya sobre la pizarra el triángulo (a,b,c) y obtenga el triángulo homtético (a',b',c') por la homotecia h (σ, 3), siendo σ un punto en el exterior del $\triangle$(a,b,c). Condúzcalos a observar que $\triangle$(a,b,c) $\sim$ $\triangle$(a'b'c') verificando que sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos correspondientes, congruentes. 9.2 Aplicando las proposiciones establecidas en 6.2 explique las siguientes criterios de semejanza de triángulos: a) Teorema AAA y corolario AA. b) Teorema LAL (c) Teorema LLL. 9.3 Ejercite mediante problemas adecuados, la aplicación correcta de los criterios de semejanza anteriores.

		9.4 Establezca otros criterios de semejanza sólo aplicables a triángulos rectángulos en la resolución de problemas de determinación y construcción.
10. Establecer formalmente el concepto de simetrìa axial o reflexiòn sobre una recta y sus principales propiedades.	Simetrìa axial. -Definiciòn y propiedades. -Simètrica de una figura dada. -Propiedades e invariantes geomètricas.	10.1 Eligiendo una recta R y una figura F del mismo plano, oriente al grupo a construir la figura simétrica respecto a la recta R. 10.2 Formalice la experiencia anterior definiendo la aplicación $S: \pi \to \pi$, que asocia a cada punto p el punto $S(p) = p'$ tal que $\overline{pp'} \cap R$, $pp \cap R = \{m\}$ y $\overline{pm} = \overline{mp}$. 10.3 Ejercite el dominio del concepto y el manejo correcto de la notaciòn con nuevos ejemplos y ejercicios adecuados. 10.4 Ilustre convenientemente las principales propiedades de la simetría axial, sus puntos fijos y demàs invariantes geomètricas.
11. Reconocer la sim res-pecto a un punto como una importante restricciòn de la simetrìa axial.	Simetrìa respecto a un punto. - Definiciòn	11.1 Eligiendo un punto arbitrario $\sigma \in \pi$, los alumnos determinaran los transformados de algunos puntos

		dados p,q,r...mediante la transformación S que lleva todo punto $p \in \pi$ en $p' \in \pi$ tal que $\overline{op} = \overline{op'}$ llamada <u>simetrìa respecto al punto σ.</u>
		11.2 Ejercite al grupo en el manejo de esta transformación y en el conocimiento de sus propiedades e invariantes geomètricos.
12. Establecer las principales propiedades de las rotaciones.	Rotaciones - Definición y propiedades. - Rotación de àngulos, segmentos y rectas.	12.1 Eligiendo arbitrariamente un punto σ y un àngulo $\hat{\alpha}$ se definirà la <u>rotación</u> o <u>giro</u> de centro σ y amplitud $\hat{\alpha}$ como la transformación R que a cada $x \in \pi$ le asocia el punto $x' = R(\sigma, \hat{\alpha})$ tal que $\overline{\sigma x'} = \overline{\sigma x}$ y $\widehat{x \sigma x'} = \hat{\alpha}$.
		12.2 Presente diversos ejemplos de rotación ilustràndolos adecuadamente en la pizarra.
		12.3 Formule las siguientes propiedades de los giros e inicie su discusión y demostración (verificación). a) Los giros son transformaciones biyectivas.

		b. Los giros son isometrìas c. Los giros llevan puntos alineados en puntos alineados. 12.4 Aplique diversas rotaciones R a distintas figuras planas como àngulos, segmentos o rectas.
13. Establecer las principales propiedades de las traslaciones.	Traslaciones. - Definiciòn y propiedades. - Traslaciones de àngulos, segmentos y rectas.	13.1 Eligiendo un vector libre $\vec{a}$ arbitrario, dè la definiciòn formal de <u>traslaciòn</u> segùn el vector $\vec{a}$, como la transformaciòn $t_{\vec{a}}$ que asocia a cada $x \in \pi$, el punto x' de π tal que $\overrightarrow{xx'} \uparrow \vec{a}$. 13.2 Presente diversos ejemplos de traslaciones segùn un vector $\vec{a} \neq \vec{o}$ 13.3 Inicie una discusiòn sobre las siguientes propiedades: (a) Las traslaciones son transformaciones biyectivas. (b) Las traslaciones preservan la distancia. (c) Las traslaciones transforman puntos alineados en puntos alineados. 13.4 Oriente la demostraciòn, (verificaciòn), de las propiedades anteriores.

		13.5 Dadas algunas traslaciones de vectores no nulos, se analizaràn las imàgenes de segmentos, àngulos y rectas.
14. Aplicar las transformaciones estudiadas a la resoluciòn de problemas de construcciòn.	-Construcciones geomètricas aplicando transformaciones planas.	14.1 Plantee al grupo diversos problemas de determinaciòn de puntos aplicando transformaciones. 14.2 Propòngales variados ejercicios de construcciòn de figuras aplicando una transformaciòn, (la bibliografìa dada presenta numerosos ejemplos). 14.3 Oriente el anàlisis correcto y el manejo adecuado de los instrumentos geomètricos.
15. Clasificar las isometrìas estudiadas en base a la propiedad preservar el sentido de los àngulos.	Isometrìas directas e isometrìas opuestas. -Composiciòn de isometrìas.	15.1 Despuès de presentar diversos ejemplos de transformaciones planas, los estudiantes identificaràn aquellos que dejan invariantes la distancia. 15.2 Luego, se pedirà al grupo que identifiquen otras propiedades de las figuras que se preservan bajo isometrìas.

		15.3 Dado un àngulo $\widehat{abc}$ arbitrario se obtendrà su transformado mediante una simetrìa axial, una rotaciòn y una traslaciòn. Comparados los resultados se harà observar que algunas isometrìas como las simetrìas axiales invierten el sentido de los àngulos mientras otras, (rotaciones, traslaciones), la preservan. 15.4 En base a las observaciones anteriores, las isomerìas se clasificarán en directas u opuestas, y se presentaràn nuevos ejemplos.
16. Verificar el conjunto de isometrìas es cerrado respecto a la composiciòn de transformaciones.	Grupos y subgrupos de transformaciones. - Composiciòn de isometrìas Propiedadès.	16.1 Inicie el tema recordando algunos principios anteriormente establecidos. a) El concepto de transformaciòn es sinònimo del concepto de aplicaciòn. b) Las isometrìas son aplicaciones del plano en sì mismo. 16.2 Estos hechos permiten considerar el producto de dos o màs isometrìas. Se revisarà la notaciòn

y el procedimiento para obtener la compuesta de dos transformaciones planas.

16.3 Se puede empezar componiendo una traslación t y un giro g, resultando la traslación gt.
Se obtendrá luego el producto de simetría axial s y una traslación t, obteniéndose otra traslación st. Continuando con nuevos ejemplos, el grupo podrá verificar que en todos los casos planteados la compuesta de dos isometrías es una isometría.

17. Identificar los casos particulares en los cuales una simetría axial, una traslación o un giro concéntrico, representa la transformación idéntica.

- La transformación identidad.
- Isometrías identidades.

17.1 Inicie el tema recordando las características básicas de la transformación idéntica i: $\pi \rightarrow \pi$ tal que i (p)=p, para cualquier $p \in \pi$

17.2 Presente luego las siguientes isometrías:

a) La simetría axial s, de eje la recta $\overleftrightarrow{xp}$.

b) Una traslación según un vector nulo $\vec{o}$.

c) Un giro de centro p y amplitud. $\hat{\alpha}$.

17.3 Los estudiantes deberán percatarse que todas estas isometrías llevan el punto p en el mismo punto p, por lo que todas representaran la transformación idéntica.

18. Verificar que el conjunto de las transformaciones biyectivas del plano con la ley de composición de transformaciones tiene estructura de grupo.

El grupo de las transformaciones biyectivas del plano.

18.1 Dadas algunas transformaciones f,g,h conocidas, los estudiantes verificarán que (fg)h= f (gh). Luego comprobarán su validez general para transformaciones planas arbitrarias.

18.2 Utilizando un contraejemplo adecuado se establecerá que en general, la composición de transformaciones no es conmutativa. Por ejemplo: si componemos una traslación y una simetría.

18.3 Oriente la discusión hacia las transformaciones biyectivas del plano replanteando dos resultados importantes: a) La transformación idéntica $i:\pi\to\pi$ es una biyección tal que if= fi'=f, para cualquier

		biyección plana f. (b) Para toda biyección f existe la biyección inversa f^{-1}; tal que $ff^{-1}=f^{-1}f=i$.
		18.4 Los resultados establecidos en 18.1, 18.3 (a) y 18.3 (b), permiten concluir que el conjunto de las biyecciones del plano es un grupo no conmutativo.
19. Reconocer otros importantes grupos y subgrupos de transformaciones planas.	-Subgrupos de transformaciones del plano. -El grupo de las isometrías. -El grupo de las homotecias de un mismo centro.	19.1 El grupo analizará el conjunto de las biyecciones planas en búsqueda de subconjuntos que preserven las propiedades de grupo: las isometrías, las homotecias del mismo centro, etc. En cada caso se deberá reconocer la transformación idéntica, y la forma de cada transformación. 19.2 Diriga la discusión iniciada hacia el análisis de los grupos de las isometrías y las homotecias de igual centro 19.3 Cuestione la existencia de otros ejemplos y contraejemplos de subgrupos de biyecciones planas.

20. Aplicar la proyección paralela del planc sobre una recta L dada, según una dirección δ, reconociendo sus características y propiedades básicas.

La proyección paralela

- Proyección del plano π sobre una recta L, según una dirección δ . Definición.
- Propiedades.
- Proyección paralela de rectas y otras figuras planas.
- Proyección paralela de una recta L sobre otra recta L' según una dirección δ.

20.1 Sobre el plano π , se elegirá arbitrariamente una recta l y una dirección δ, distinta a la de L. Se establecerá entonces la función $p_r: \pi \rightarrow L$, que a cada $p \in L$, le asigna el punto p r (p)=p' $\in$ L. siempre que $\overleftrightarrow{pp'} // \delta$.

20.2 Los estudiantes identificaran algunas propiedades importantes de la proyección paralela sobre L:

(a) pr no es inyectiva, pero si si es sobreyectiva. (b) Todos los puntos de L son puntos fijos de pr. (c) Si R es una recta de dirección δ y $R \cap L = \{r\}$, entonces pr (R)= $\{r\}$

20.3 El grupo determinará el conjunto imagen por pr, de una recta, un segmento, u otra figura plana dada.

20.4 Eligiendo una recta $L' \neq \delta \neq L$ y no perpendicular a L, se pedirá restringir el dominio de pr a L y analizar las cualidadaes de esta nueva función.

21. Dotar al plano de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, aplicándolo en la localización de puntos.

Sistema cartesiano ortogonal.

- Sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.
- Coordenadas de un punto.

21.1 La idea de plano cartesiano debe basarse en los conocimientos adquiridos sobre la representación gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos. Para ello, se considerarán dos rectas coordenadas perpendiculares del plano. Una horizontal o eje de las abcisas, y la otra vertical o eje de las ordenadas; de modo que el valor cero corresponda al punto de intersección u origen de coordenadas. El geoplano y el el papel cuadriculado es el material más adeucado para iniciar esta idea.

21.2 En el plano así considerado, a cada punto $p \in \pi$, le podemos asignar un par ordenado de números reales que denotan la distancia de p a $pr_1(p)$ y de p a $pr_2(p)$ siendo : Pr 1 y Pr 2 las proyecciones paralelas del plano sobre los ejes, paralelamente a cada eje coordenado.

		21.3 Dados algunos puntos sobre el plano cartesiano, los estudiantes determinarán el par ordenado (x,y) correspondiente. Inversamente, dados los pares ordenados que determinan distintos puntos del plano, los estudiantes localizarán los puntos correspondientes.
22. Determinar la distancia (no dirigida) entre dos puntos del plano.	Distancia entre dos puntos. - Mòdulo o longitud de un vector libre. - Aplicaciones de la fòrmula de la distancia.	22.1 Sobre papel cuadriculado los estudiantes trazarán un plano cartesiano. Luego considerarán dos puntos distintos a: (x_1, y_1) y b: (x_2 , y_2), arbitrarios tales que el segmento $\overline{ab}$ no sea paralelo a niguna de los ejes coordenados. 22.2 Se construirá entonces el $\triangle$ rectángulo abc de hipotenusa ab y catetos ac y bc, paralelos a los ejes coordenados. 22.3 Aplicando el teorema de Pitágoras y con la ayuda de la discusión, se establecerá la validez de la expresión $ab = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ para hallar la distancia no

		no dirigida entre a y b. 22.4 Ejercite el manejo práctico de la expresión obtenida para calcular la distancia entre dos puntos a y b dados, ó la longitud o módulo de un vector libre $\vec{ab}$ del plano. 22.5 Finalmente, oriente la discusión hacia el análisis de los casos en que a y b pertenecen a una recta paralela a alguno de los ejes.
23. Representar en el plano coordenado la gràfica de una funciòn lineal analizando la forma usual de la ecuaciòn de la recta.	La ecuaciòn de la recta. - La funciòn lineal $y=ax+b$ - Intersecciones con los ejes coordenados. - Rectas paralelas a los ejes	23.1 Sobre una pizarra presente una ecuación de la forma $y= z\,x + b$, con $a,b, \in \mathbb{Q}$ y a y b no simultáneamente nulos. Por ejemplo $y= 2x+1$. Los alumnos sustituirán la variable x por valores específicos para obtener el valor de y. Por ejemplo si $x= 3$, $y= 2.3+1=7$. 23.2 Se tomarán otros valores para la abcisa x y se calcularán las correspondientes ordenadas y, mediante la función $y= 2x+1$

23.3 Obtenidas de este modo las coordenadas de varios puntos, los estudiantes representarán tales puntos en el plano cartesiano, comprobando que todos pertenecen a una línea recta.

23.4 El grupo repetirá el mismo proceso con otras funciones de la forma y=ax+b verificándose en cada caso que su representación gráfica es una recta por lo que se denominará ecuación de la recta.

24. Obtener las intersecciones con los ejes coordenados analizando los casos de rectas paralelas a los ejes coordenadas.

- Intersecciones con los ejes coordenados.
- Rectas paralelas a los ejes.

24.1 Tomando funciones lineales de la forma y=ax+b, se tomará el punto obtenido al hacer x=0. De este modo se obtiene el punto (o,b) que pertenece a la recta y también al eje x.

24.2 De modo similar, haciendo y=0 en la ecuación y= ax+b se obtiene el punto ($^{b}/_{a}$, o) que pertenece a la recta y se encuentra sobre el eje y.

24.3 Ejercite con problemas adecuados, el dominio de las ideas desarrolladas.

		24.4 Finalmente el grupo analizará ecuaciones lineales de la forma $y=ax+b$ en las casos en que $a=0$ ó $b=0$, procediendo a graficar estas funciones. Ellos concluirán en que se trata de rectas paralelas a alguno de los ejes.
25. Aplicar el proceso de graficar la función lineal a la resolución de un sistema 2X2 de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	- Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	25.1 Los estudiantes aplicarán los conocimientos adquiridos, a la resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se debe orientar al grupo a la comprensión de los casos de sistemas inconsistentes (rectas **paralelas**), ó de infinitas soluciones, (rectas coincidentes).
26. Establecer la inclinación y pendiente de una recta.	Inclinación y pendiente de una recta.	26.1 Recurriendo a un material didáctico adecuado, (geoplano, papel cuadriculado), se considerará una recta L, no paralela a ninguno de los ejes. Se analizará entonces el ángulo θ que L forma con el eje X. Al $\hat{\theta}$ se denominará inclinación de la recta L.

26.2 Los estudiantes compararán θ con los ángulos que L forma con otras rectas paralelas al eje X. Se comprobará que los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc, así formados, son todos congruentes con θ.

26.3 Eligiendo arbitrariamente dos puntos distintos a: (x_1, y_1) y b: (x_2, y_2), los estudiantes comprobarán que en todos los casos el cociente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

es constante, y de denominará pendiente de L.

26.4 Asignando problemas adecuados, se ejercitará al grupo en el dominio de las ideas y conceptos adquiridos.

27. Identificar algunos cuerpos geométricos, clasificándolos y verificando la validez de la constante de Euler para los poliedros regulares.

Geometría del Espacio.

- Poliedros y cuerpos redondos.
- Poliedros regulares. Fórmula de Euler.

27.1 A partir de un plano π, considere el espacio S, como el conjunto de todos los puntos de π y los que no pertenecen a π:

27.2 El grupo discutirá diversos ejemplos de cuerpos en el espacio; clasificándolos; los de superficie plana y los de superficie curva:

		Poliedros y cuerpos redondos. 27.3 Luego se afianzarán las nociones de caras, aristas y vértices de poliedros, mediante construcciones que permitan comparar y arribar a la idea de ángulos poliedros congruentes. 27.4 Recurriendo a un material didáctico adecuado, analice con el grupo cada uno de los poliedros regulares enfatizando en las características de sus elementos. En especial la verificación de que se satisfacen las fórmulas de Euler
28. Introducir el estudio descriptivo y métrico del prisma recto.	- El prisma recto. El paralelepípedo. - Superficie lateral y total - Volumen.	28.1 Mediante el empleo de ejemplos concretos, se analizarán y clasificarán los diversos tipos de prismas rectos y en especial el prisma de base cuadrada (paralelepípedo). 28.2 Se iniciará luego la deducción de las relaciones métricas que permiten obtener la superficie lateral. La superficie total y el volumen del prisma recto.

28.3 Mediante problemas adecuados se ejercitará en el cálculo de la superficie y el volumen de distintos tipos de prismas rectos.

29. Analizar descriptivamente y métricamente el cilindro, la pirámide y el cono así como también el tronco de pirámide o de cono.

El cilindro, la pirámide y cono.

-Superficie total y volumen

-Tronco de una pirámide y de un cono.

-Relaciones métricas para la superficie y el volumen de estas secciones.

29.1 Mediante el empleo de recursos didácticos convenientes se iniciará el estudio descriptivo y métrico de el cilindro, la pirámide y el cono.

29.2 El grupo discutirá, analizará y convenientemente orientado, deducirá las relaciones que definen la superficie y el volumen de cada uno de ellos.

29.3 La discusión se orientará entonces al estudio y análisis de las secciones inferiores (troncos), de una pirámide o de un cono, obtenidas al cortar estos cuerpos mediante un plano paralelo a sus bases. Se concluirá con la deducción de las expresiones, que definen la superficie y el volumen del tronco de pirámide y del cono.

30. Desarrollar un amplio estudio descriptivo y métrico de la esfera.	Estudio de la esfera. - Superficie total y volumen - Contrucciones geométricas	30.1 Inicie una revisión breve de la circunferencia y sus elmentos. Entonces defina, describa, la esfera de radio r y centro 0; al conjunto de los puntos p del espacio tales que $d\ (o,p) \leqq r$ Las nociones topológicas de interior y exterior de la esfera son de fácil manejo y permiten el estudio intuitivo de este cuerpo redondo a un nivel adecuado. 30.2 EL grupo continuará el análisis y la discusión sobre los diferentes círculos que se generan al intersecar la esfera con un plano, así como de otros importantes elementos de la esfera. 30.3 Finalmente se concluirá con el estudio de las relaciones métricas que determinan la superficie y el volumen de la esfera. 30.4 Los clases prácticas deberán orientarse a la resolución de problemas de construcción y de determinación convenientemente planificadas que los estudiantes deberán resolver razonablemente.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA A LOS DOCENTES

1. ALCINA, Claudi; Trillas, Enric. Lecciones de Algebra y Geometría. Gustavo Gili, S.A. Barcelona. 1984.
2. AIZPÚN, Alberto. Teoría y Didáctica de la Matemática Actual. Vincent-Vives. 3ra. Edición. Barcelona.1981 185. pp.
3. CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. Trillas. México. 1978. 210 pp.
4. CECI, Angélica; Paglilla, Ofelia de. Matemática Moderna Visualizada. Tomos I-V. Ruy Díaz. Buenos Aires.1981.
5. GONZALEZ, Mario. Complementos de Geometría. Minerva Books. New York. 1978. Tomo tercero de la obra Complementos de Matemática. 360 pp.
6. MOISE, Edwin; Downs, Floyd Jr. Matemáticas IV. Geometría. Serie Matemática Moderna. Fondo Educativo Interamericano y Editorial Norma. Traducción de Mariano García. Bogotá. 1972. 590 pp.
7. POLYA, George. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Trillas. México. 9na. reimpresión. 1981. 215 pp.
8. PAPY, George. Matemática Moderna. Tomos I, II y III. Buenos Aires. 1968.
9. ROANES, Eugenio. Didáctica de las Matemáticas. Anaya S.A. Madrid. 1979. 631 pp.
10. TREJOS, César. Matemática Elemental Moderna. Estructura y Método. EUDEBA. Buenos Aires. 1968.
11. TREJOS, César., Bosch, Juan. Enseñanza de la Matemática Moderna. (Primer Curso). EUDEBA. Buenos Aires. 1980.
12. VARSAVSKY, Oscar. Matemática Intuitiva. EUDEBA. Buenos Aires. 1978.
13. Universidad de Panamá. Aprendo Matemática. I, II y III. Serie de Matemática Moderna. Edición Experimental para Primero, Segundo y Tercer Año de Educación Secundaria. Panamá. 1981.
14. Universidad de Panamá. Guía Metodológica de I,II y III. Serie Matemática Moderna. Panamá. 1981.

RECOMENDACIONES

Después de concluir esta investigación, creemos conveniente presentar las siguientes recomendaciones:

1. Es imperativo que el Ministerio de Educación inicie lo más pronto posible la actualización de los programas de matemática para el nivel medio.

2. Para ello, será necesaria una amplia divulgación entre los docentes de los nuevos contenidos geométricos y de las técnicas metodológicas adecuadas para su enseñanza.

3. La implementación de toda programación actualizada, deberá desarrollarse en forma progresiva a partir de centros educativos experimentales, mediante un adecuado control y seguimiento de la labor que se realiza.

4. En esta tarea la Universidad le corresponde el papel de formar y de coadyuvar en la actualización, del docente del nivel medio.

5. La Universidad deberá brindar además, la asesoría necesaria al Ministerio de Educación, para que esta reforma tenga tenga el éxito deseado.

6. El Programa de Maestría en Matemática, conjuntamente con otros cursos de Post grado que se imparten en nuestra Universidad deben promover este tipo de investigaciones que permiten elevar la calidad de la enseñanza en los diferentes niveles del sistema educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Las fuentes bibliográficas utilizadas provienen de cuatro tipos de fuentes:

1. Actas de congresos internacionales sobre la enseñanza de la matemática.
2. La recopilación de Moritz.
3. El boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública en Francia (B.A.P.M.E.P.)
4. Libros.

[1] BOURBAKI, Nicolàs. Elementos de Historia de la Matemàtica. 4ta. Ediciòn en español. Madrid: Alianza Editorial, (original en francès) 325 pp.

[2] MORITZ, Robert. E. (Comp.) On Mathematics. New York. Dover Publications. 1958. Existe versiòn española. Las citas se hacen en el orden dado por el autor que no es cronològico. 410 pp.

[3] FEHR, Howard, CAMP. John y KELLOG Howard (1971). La Revoluciòn en las Matemàticas Escolares (Segunda Fase) Washington: OEA (original en inglès) 132 pp.

[4] EVES, Howard (1969). Estudio de las Geometrìas. Primera Ediciòn en Español. Mèxico: Centro Regional de Ayuda Tècnica. Tomo I. (original en inglès). 469 pp.

[5] NEW THINKING IN SCHOOL MATHEMATICS. (196). Actas del Seminario de Royaumont editads por H.F. Fehr. Las citas se hacen según el número de orden. 246 pp.

[6] STONE, Marshall. La Revoluciòn en las Matemàticas. Artìculo de 30 pp. 73-97. Boletìn de la Asociaciòn de Colegios Americanos. Vol. XLVII. (1961).

[7] LERAY, Jean. La Iniciaciòn Matemàtica. Traducciòn (1966). Original en francès. Parìs: Hermann.

[8] PIAGET, J.E. BETH, W. DIEUDONNE J. LICHNEROWICZ, A. CHOQUET. G. GATTEGNO, C. La Enseñanza de las Matemàticas. Traducciòn (1955). Original en francès. Madrid. Alianza Editorial. 176 pp.

[9] REVUZ, Andrè. El lugar de la Geometrìa en la Educaciòn Matemaßica. (1971). Traducciòn, original en inglès. Educationals Studies in Mathematics. 350 pp.

[10] EDUCACION MATEMATICA EN LAS AMERICAS (1982). Actas del Primer Congreso Interamericano de Educaciòn Matemàtica. Editadas por H. F. Fehr. Bogotà, diciembre de 1961. 188 pp.

[11] DIEUDONNE, Jean Mathematiques Modernes. (1974). Artìculo B.A.P.N.E.P.# 292. Febrero de 1974. pp. 69-79. En Mathematical Revieus Vol. 53. Artículo 19, aparece una ràpida reseña.

[12] FREUDENTHAL, Hans. ¿Enseñanza de las Matemàticas Modernas o Enseñanza Moderna de las Matemàticas. Versiòn española, Madrid: Alianza Editorial (1963). Original en francès.

[13] MARKUSIEVITCH. A. Algunos problemas de la Enseñanza de la Matemàtica en la Escuela. Traducciòn. Artìculo de 30 pp. 196-207. aparecido en la revista Educationals Studies in Mathematics. (1969)

[14] CHOQUET, Gustave. L'ensegnement de la geometrie. (1964) : Hermann 177 pp.

[15] THOM Renè. ¿ Son las Matemáticas "Modernas" un Error Pedagógico y Filosófico? (1970). Artículo de 30 pp. aparecido en la revista L' Age de la Science.#3 (1970) pp. 115-129.

[16] PIAGET Jean. Biologie et Connaissance. (1967) Parìs: Editions Gallimard 110 pp.

[17] PIAGET Jean, Ou va L'education. (1972). Parìs. Denoel-Gonthier. Parìs. 139 pp.

[18] DEVELOPMENT IN MATHEMATICAL EDUCATIONS. (1973). Cambrigde at the University Press. 318 pp.

[19] KRYGOWSKA, Sofìa. Sur la necesitè d' une conception dans la reforme de l'enseignement des mathematiques. (1963). B.A.P.M.E.P. Artículo # 232. octubre pp. 35-43.

[20] RUSSELL, Bertrand. El Mètodo Cientìfico en Filosofìa (1951). Buenos Aires: Paìdos, 227. pp.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

ALCINA, Claudio y TRILLAS, Enric.	Lecciones de Algebra y Geometría Edit. Gustavo Gili. Barcelona, 1984 pp. 40-150,157-163.
CASTELNUOVO, Emma	Didáctica de la Matemática Moderna. Edit. Trillas, México 1978. pp. (168-178)
COXETER, H.S.M.	Fundamentos de la Geometría. Edit. Limusa Wiley S.A. México 1971. Original en inglés p.p. 54-58, 65-72, 125-129.
CHENG, C. Isidro	Isometrías. Monografía. Departamento de Matemática. Universidad de Panamá. 1987.
CHOQUET, Gustave	Geometría, Estudio y Enseñanza. Edit. Hermann. Paris 1964.
D' HAINANT C.	Objetivos Didácticos y Programación. Edit. Orkostan, Barcelona 1985.
DELORME, CH.	De la Animación Pedagógica a la Investigación. Accion. Edit. Narcea, Madrid 1925.
DIEUDONNE, Jean	Algebre Lineare e Geometrie Elementaire. Edit. Hermann, Paris 1969.
EIGENMAN J.	El Desarrollo Secuencial del Curriculum. Edit. Anaya. Madrid 1981.
EVES, Howard	Estudio de ls Geometrias. Tomo1 UTHEA, México, 1969. Original en inglés, pp.115 -139
MOISE, Edwin.	Elementos de Geometría Superior. Edit.CECSA México 1968 pp. 269-272. Original en inglés
PAPY, George	Geometría afín y números reales. Edit. EUDEBA. Buenos Aires 1968. Matemática Moderna. Tomo I,II,III, Edit. EUDEBA,Buenos Aires 1968.
POLYA, George	Cómo plantear y resolver problemas. Edit. Trillas, México.1981.
STHENHOUSE L.	Investigación y Desarrollo del Currículum Edit. Morota, Madrid 1984.