



UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA CENTROAMERICANA EN MATEMATICA

LA SIMETRIA EN LA CERAMICA PINTADA
DE LA REGION CENTRAL DE PANAMA

Por:

José Alberto Valencia Oviedo

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar
por el grado de Maestro en Ciencias con Especialización
en Matemática

UNIVERSIDAD DE PANAMA



ACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
Programa de Maestría Centroamericana en Matemática

PANAMA, _____

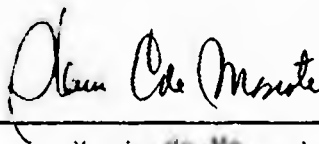
Aprobado por:

Director de Tesis

 V.

Victor Samuel Albis G., Ph. D.

Miembro del Jurado



Xenia de Mosote, M. A.

Miembro del Jurado



Richard G. Cooke, Ph. D.

Fecha

17 de julio de 1989

1989, Año del 25 Aniversario de la gesta
Patriótica del 9 de Enero de 1964"

Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira

ESTAFETA UNIVERSITARIA
PANAMA R. DE P.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dejar constancia de mi sincero y enorme agradecimiento al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA) y al Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) quienes a través del "Programa Regional de Becas" hicieron posible que realizara los estudios de Maestría en Matemática en la Universidad de Panamá. A Ana Luz Alfaro Mejía, quien desde la Oficina de Becas del CSUCA y con una gran calidad humana hizo posible que en todo momento contara con las mejores condiciones para el estudio.

Al Programa de Maestría Centroamericana en Matemática, a su actual Coordinador, Prof. Egberto Agard, por brindarme el apoyo necesario para desarrollar el presente trabajo; y al Instituto de Estudios Nacionales (IDEN), a su actual Directora, Dra. Carmen A. Miró, por permitirme utilizar las facilidades tecnológicas de ese Instituto para acceder al computador, imprimir y reproducir el presente trabajo.

Al Dr. Víctor Albis por dirigir este trabajo, al Dr. Richard Cooke y la Prof. Xenia de Moscote por evaluarlo. A cada uno de ellos por todas las muy sabias recomendaciones que tuvieron la gentileza de brindarme, las cuales contribuyeron a mejorarlo y enriquecerlo hasta lograr que tenga el contenido y forma actual.

Al Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz", a su actual Directora, Lic. Ana Maisón, por haberme concedido la autorización para tener acceso a la colección de cerámica que esa institución tiene bajo su custodia; a Jacinto Almendra, Restaurador, y a la Prof. Marcela Camargo, Museógrafa, a quienes tuve la suerte de conocer en esa Institución y que con sus conocimientos en el campo de la cerámica y la prehistoria de Panamá, su incuestionable amor por los bienes culturales del país, me hicieron tomar conciencia del valor y trascendencia del trabajo que estaba realizando. En iguales términos debo referirme al Dr. Cooke, Arqueólogo del Instituto Smithsoniano de Investigaciones Tropicales, que me orientó y apoyó en todo momento, además de permitirme utilizar parte de su material bibliográfico.

A Denis Jaén y Petra Valdés, que gastaron incontables horas ayudándome con el trabajo secretarial y a reducir mi deficiencia en todo cuanto se relaciona a la Ortografía. A Ricardo Chan y Alvaro Uribe que muy amablemente acomodaron sus actividades para que pudiera terminar a tiempo este trabajo; y a otra cantidad enorme de personas que de muy diferentes maneras también tuvieron la gentileza de ayudarme para conseguir concluirlo.

José A. Valencia Oviedo

Panamá, julio de 1989.

INDICE GENERAL

INTRODUCCION	ix
Capítulo 1. La Isometría: Un Tipo de Movimiento en el Plano	1
1.1 Generalidades y Definiciones	1
Capítulo 2. De las Isometrías se Obtienen Todas las Isometrías del Plano	12
2.1 La Reflexión	12
2.2 Traslación (Paralela)	28
2.3 Rotación	31
2.4 Rotación Deslizante	34
2.5 La Estructura de Grupo	38
Capítulo 3. Las Simetrías de una Figura Plana y su Grupo	44
3.1 La Simetría de una Figura Plana	44
3.2 El Grupo de Simetrías Correspondiente a una Figura Plana	57
Capítulo 4. Grupos Puntuales o de Leonardo	73
4.1 Generalidades	73
4.2 Polígonos Regulares	73
4.3 Los Grupos de Leonardo	87
4.3.1 El Teorema de Leonardo	87
4.3.2 Algunos Datos Biográficos sobre Leonardo	93
4.4 Aplicaciones de los Grupos de Leonardo	97

Capítulo 5. Los Grupos de Simetría Unilineales	108
5.1 Las Isometrías Permitidas en un Diseño Unilineal (Diseño de Banda)	108
5.2 Combinación de las Isometrías Permitidas	121
5.2.1 Combinación a	121
5.2.2 Combinación b	123
5.2.3 Combinación c	125
5.2.4 Combinación c1	131
5.2.5 Combinación d	133
5.2.6 Combinación d1	135
5.2.7 Combinación e	139
5.2.8 Combinación e1	143
5.2.9 Combinación f	147
5.2.10 Combinación f1	149
5.3 Los Grupos de Simetría en una Banda (Diseños Unilineales)	156
5.3.1 Grupo de Friso F_1	157
5.3.2 Grupo de Friso F_2	158
5.3.3 Grupo de Friso F_1^4	161
5.3.4 Grupo de Friso F_2^4	163
5.3.5 Grupo de Friso F_1^2	164
5.3.6 Grupo de Friso F_2^2	166
5.3.7 Grupo de Friso F_1^3	171
5.4 Aplicaciones de los Grupos Unilineales en la Cerámica de Región Central	174
Capítulo 6. Los Grupos de Simetría Bidimensionales	185
6.1 Sistema Regular de Puntos en el Plano	185
6.2 Grupos de Simetría Bidimensionales	188
6.3 Grupos que Tienen Solo Traslaciones y Rotaciones	192
6.3.1 Grupo p1	192
6.3.2 Grupo p2	192

6.3.3 Grupo p3	195
6.3.4 Grupo p4	196
6.3.5 Grupo p6	200
6 4 Grupos Bidimensionales que Poseen Reflexiones y/o Reflexiones Deslizantes	202
6.4.1 Grupos Derivados de p1	202
6.4.1.1 Grupo p1m1	203
6.4.1.2 Grupo p1g1	203
6.4.1.3 Grupo c1m1	203
6.4.2 Grupos Derivados de p2	207
6.4.2.1 Grupo p2mm	207
6.4.2.2 Grupo p2mg	207
6.4.2.3 Grupo p2gg	212
6.4.2.4 Grupo c2mm	212
6.4.3 Grupos Derivados de p3	213
6.4.3.1 Grupo p31m	213 ^b
6.4.3.2 Grupo p3m1	213
6.4.4 Grupos Derivados de p4	216
6.4.4.1 Grupo p4mm	216
6.4.4.2 Grupo p4gm	216
6.4.5 Grupos Derivados de p6	219
6.4.5.1 Grupo p6mm	219
6.5 La Aplicación de los Grupos Bidimensionales a la Cerámica	221
Capítulo 7. Una Aplicación: La Cerámica de la Región Central	230
7.1 Generalidades	230
7.2 Sustentación Teórica	230
7.2.1 La Clasificación en Arqueología	230
7.2.2 La Casificación Analítica	232
7.2.3 El Sistema Cultural	233
7.3 La Cerámica de la Región Central	237
7.3.1 Límites	237

7.3.2 La Cultura	244
7.3.2.1 La Presencia del Hombre en el Istmo (9500 - 8000 a.C.)	244
7.3.2.2 Los Asentamientos Precerámicos Tempranos Adaptación al Trópico (8000 - 5000 a.C.)	245
7.3.2.3 Los Asentamientos del Precerámico Tardío Evidencias de la Agricultura (5000-3000 a.C.)	246
7.3.2.4 La Aparición de la Alfarrería (3000 - 1000 a.C.)	247
7.3.2.5 El Desarrollo de la Agricultura (1000 - 300 a.C.)	247
7.3.2.6 La Aparición de la División Política (300 a.C. - 500 d.C.)	248
7.3.2.7 El Desarrollo de la Diferenciación Social (500 - 1520 d.C.)	249 ¹
7.3.3 La Continuidad Cultural	249
7.3.4 La Cerámica	255
7.3.4.1 El Período Cerámico Formativo Temprano (IIIA)	257
7.3.4.2 El Período Cerámico Formativo Tardío (IIIB)	258
7.3.4.3 La Cerámica Bicroma (IV)	258
7.3.4.4 La Transición (IV - V)	259
7.3.4.5 El Estilo Conte (V)	259
7.3.4.6 La Cerámica Barroca (VI)	259
7.3.4.7 La Cerámica Anterior al Contacto (VII)	260
7.3.5 La Cerámica Excavada	261
7.4 La Aplicación	263
7.4.1 Procedimiento	263
7.4.2 La Muestra	267
7.4.3 Los Resultados	269
7.4.4 Discusión de los Resultados	272
7.4.4.1 Consideraciones Generales	272

7.4.4.2	Análisis de los Datos para los Grupos de Leonardo o Puntuales	276
7.4.4.3	Análisis de los Datos para los Grupos Unilineales	280
7.4.4.4	Análisis de los Datos para los Grupos Bidimensionales	282
7.4.4.5	Otros Comentarios	284
	Conclusiones	294
	Bibliografía	296

INTRODUCCION

En este trabajo puede considerarse dividido en dos partes: la primera comprende los capítulos del primero al sexto, e intenta una exposición sistemática de la teoría de los grupos de simetrías en el plano. La segunda parte (capítulo séptimo) es una aplicación de estos grupos como instrumentos de análisis y clasificación en la arqueología; en nuestro caso particular, la cerámica de la Región Central de Panamá.

Con la primera parte se pretende contribuir a poner al alcance de investigadores de las ciencias sociales y las artes plásticas el tema de la simetría, en Matemática, partiendo de una base mínima de conocimientos elementales. Además creemos que llenamos un vacío en la literatura latinoamericana sobre este tema, allanando de contera el camino para futuras investigaciones sobre el tema de la segunda parte: su aplicabilidad en la arqueología (además de las ya conocidas en Física y Fisicoquímica). Este último aspecto ha adquirido en los años recientes una gran importancia y este trabajo, hasta donde sabemos, es el primero de su naturaleza que se realiza en Latinoamérica. Queremos anotar, sin embargo, que la afinación de los resultados contenidos en el capítulo séptimo hubiera sido mayor si las muestras

examinadas hubieran sido más completas.

Las muestras examinadas son las contenidas en los libros de Lothrop (1942 y 1976); también se solicitó y obtuvo acceso a la colección de cerámica que tiene bajo su custodia el Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz" de la ciudad de Panamá, se visitó la colección que se exhibe en el Museo Regional de Penonomé para estudiar una parte de las piezas encontradas en Sitio Conte (PN-5); igualmente se estudiaron registros fotográficos de piezas que se encuentran en museos norteamericanos, que corresponden al área de interés. El estudio de las piezas en el Museo Antropológico se llevó a cabo desde junio de 1988 a febrero de 1989.

Los datos obtenidos se sometieron a un exhaustivo análisis estadístico para determinar la validez de las hipótesis planteadas para mostrar la aplicabilidad de los conceptos de simetría. Como esta parte del trabajo difiere de la anterior se hizo necesario presentar una cantidad de información previa al análisis estadístico, esta parte consiste en una fundamentación teórica de la aplicación, validando el uso de la simetría como herramienta capaz de detectar cambios en el subsistema cultural que corresponde a la alfarería, también se caracterizó el área geográfica de aplicación, la Región Central.

Al estar trabajando con la cerámica de la colección del Museo Antropológico y después de las consultas pertinentes se determinó que era apropiado plantear una hipótesis adicio

nal, como es pretender detectar la existencia de diferencias en la cerámica perteneciente a varios subperiodos de un determinado período, se hizo este estudio para el V Período de la secuencia cronológica correspondiente a la región y se encontraron diferencias coincidentes cuando se utilizó una de las tres categorías de análisis.

Capítulo 1

LA ISOMETRIA ; UN TIPO DE MOVIMIENTO EN EL PLANO

1.1 Generalidades y Definiciones.

Para los propósitos de este trabajo utilizaremos el término FIGURA para designar cualquier subconjunto del plano. Todo el trabajo es en el plano. Utilizaremos las letras cursivas mayúsculas *A*, *B*, *F*, *Y*, . . . para designar a estas figuras; ejemplos de ellas se presentan en la figura 1.1.



Fig.1.1. Ejemplos de figuras en el plano.

Existiendo dos figuras en el plano, encontrar la forma de compararlas es un problema considerado desde hace mucho tiempo. Para conseguir la comparación cuantitativa tiene que haber un criterio de igualdad que permita decidir cuándo dos figuras son iguales, para esto resulta conveniente trabajar con una geometría métrica. El criterio de igualdad (tal como

lo requerimos en este trabajo) ya se encuentra exigido en los trabajos de los antiguos griegos. En la presentación de sus axiomas, Euclides en sus *Elementos* hace la presentación del criterio exigido, de la manera siguiente:

Las cosas congruentes [que encajan, que coinciden, que se ajustan] entre sí, son iguales entre sí.¹

Lo que aquí se está tratando de establecer es que en el plano se considerarán como figuras congruentes aquéllas que se ajustan o coinciden unas con otras sin deformarse, por lo tanto, son iguales.

Este axioma tal como se ha expresado anteriormente resulta válido cuando las figuras a comparar ya se encuentran ocupando la misma posición en el plano; es decir, el caso trivial de aplicación del criterio. Cuando las figuras no están en la situación antes descrita, al aplicarlo se encuentra subyacente otro hecho, que también es muy importante, como lo es el de que estando las figuras en el mismo plano, pero sin ocupar la misma posición, exista la posibilidad de moverlas sin distorsionarlas y después decidir si son o no congruentes en el sentido de Euclides.

Al decir "la posibilidad de moverlas" debe entenderse, moverlas en cualquier dirección, hasta cualquier parte del plano. Sólo hasta el siglo XIX se sintió la necesidad de ele

1) Versión presentada por Francisco Vera para la *Noción Común* 7 [1972 vol. 1: 705].

var esta posibilidad de movimientos en cualquier dirección, hasta cualquier punto del plano a la categoría de axioma y desde entonces se le conoce como el Axioma de Libre Movilidad.

Tal como ya se ha mencionado antes, entre los matemáticos griegos del período clásico ya se hacía uso de este axioma pero permanecía tácito. Un ejemplo de ello es el uso que de él se hace en la demostración de la Proposición 4 del libro I, I.4, de los Elementos de Euclides, conocido como Primer Criterio de Congruencia de Triángulos. La elección como ejemplo de la Proposición 4 no obedece a ninguna cuestión particular; es decir, no debe pensarse que únicamente ahí se encuentra empleado el Axioma de Libre Movilidad. No, está presente en muchas otras; pero al usar a I.4 como ejemplo es porque en su demostración aparecen los movimientos que se constituirán en herramientas del desarrollo posterior de este trabajo.

Proposición 4. Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases [los terceros lados] y los dos triángulos son congruentes y, por lo tanto, iguales.²

2) *Ibid.* pág. 707.

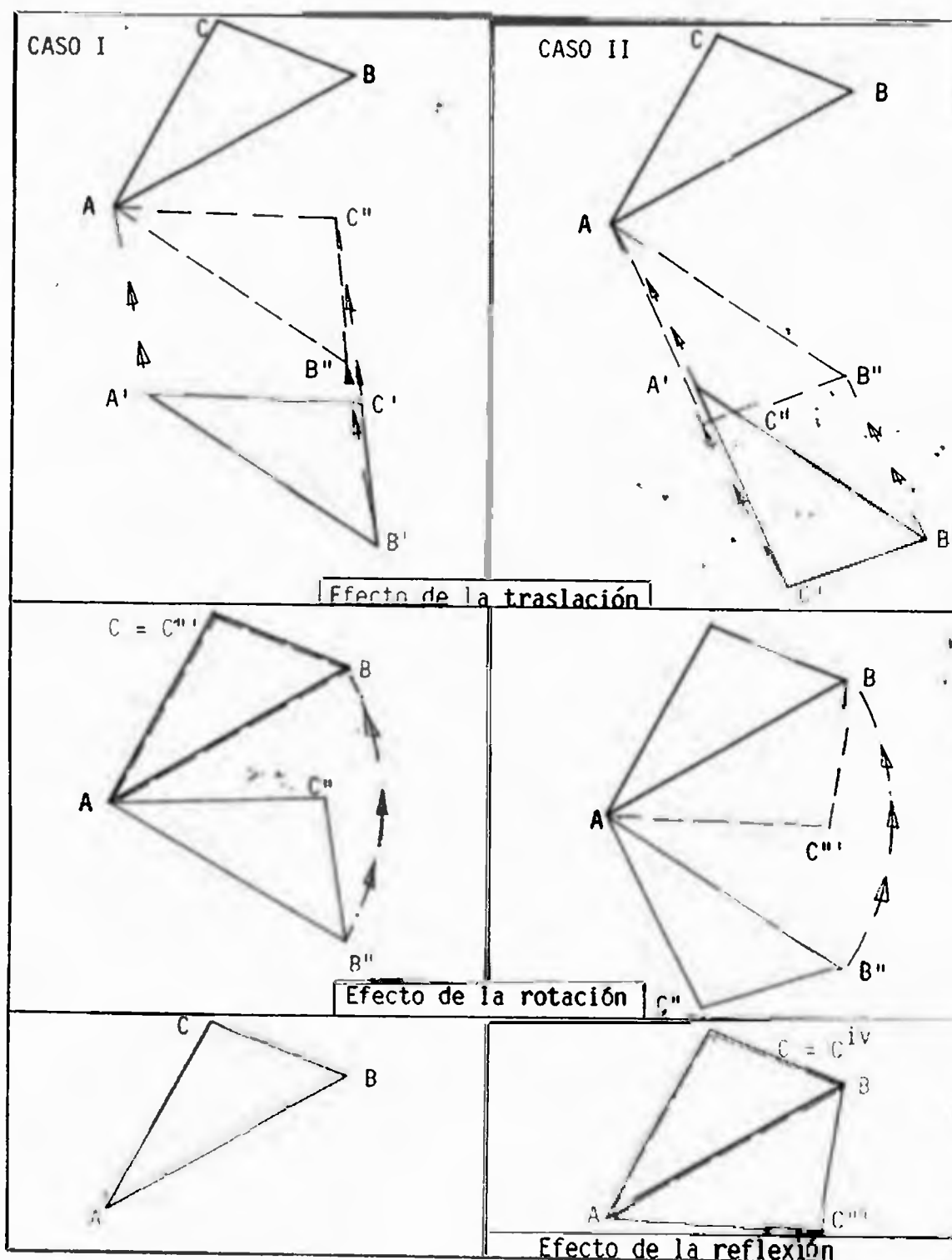


Fig. 1.2. Ilustración de los movimientos usados en la demostración de 1.4. Caso a) cuando después del movimiento 2 el punto C'' coincide con C ; Caso b) cuando después del movimiento 2 el punto C'' no coincide con C .

La demostración no se presenta con toda la formalidad con el fin de hacer resaltar las partes de mayor interés a nuestros propósitos. Las etapas a seguir se mencionan a continuación y se ilustran en la figura 1.2:

1. Llevar A' en A haciendo deslizar "paralelamente a sí mismo" el triángulo $A'B'C'$ en el plano ("traslación paralela"). Se obtienen así el triángulo $AB''C''$.
2. "Rotar $AB''C''$ " alrededor de "A de tal manera que B'' vaya en B. Al final de este "movimiento" en que hemos obtenido el triángulo ABC'' , el punto C'' " o bien coincidirá con C, o será el "reflejado" de C con respecto de la recta AB.
3. En este último caso, se hace la "reflexión" de ABC'' con respecto a la recta AB, para coincidir entonces con ABC.

En esta demostración se utilizan, pues, tres tipos de "movimientos": (1) la traslación paralela, (2) la rotación alrededor de un punto dado y (3) la reflexión con respecto a una recta dada. Los movimientos (1) y (2) son realizados con bastante comprensión visual sobre el plano, pero el tercero puede suscitar alguna dificultad de visualización; para facilitarla se presenta la figura 1.3, en ella, aunque el movimiento se hace en el espacio tridimensional, resulta que las posiciones inicial y final están en el plano. Es decir, que una reflexión con respecto a una recta en el plano es equivalente a una rotación de 180° en el espacio tridimensional alrededor de una recta dada, en este caso la recta AB.

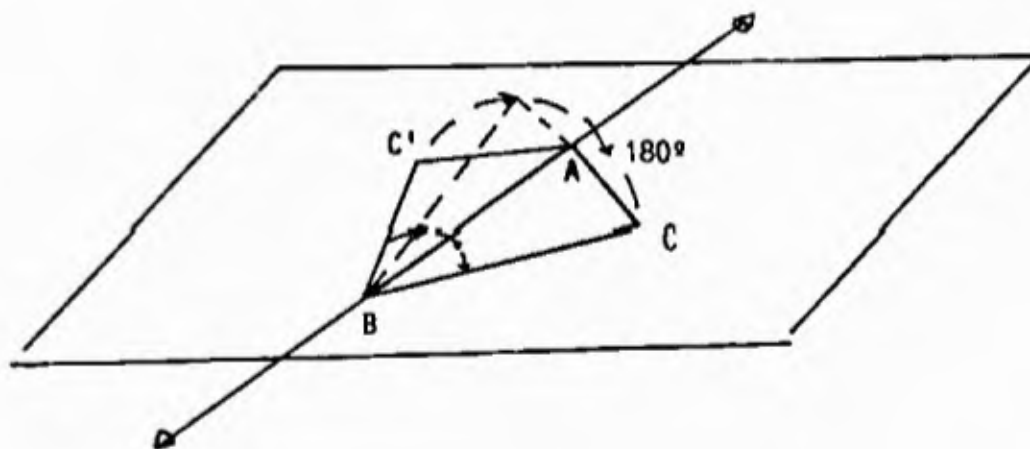


Fig. 1.3. Ilustración de una reflexión en el plano.

Para lograr un desarrollo adecuado del trabajo se necesita precisar la noción de "movimientos en el plano" que permiten llevar una determinada figura de una parte a otra sin sufrir deformaciones. Este tipo de movimiento es llamado MOVIMIENTO RIGIDO O ISOMETRIA.

Para nosotros un "movimiento" en el plano tiene el efecto de hacer corresponder a cada punto T del mismo otro punto bien determinado T' situado en el mismo plano; es decir, un "movimiento" T será lo que en Matemática se llama una función del plano en sí mismo. Pero, naturalmente, no podrá ser cualquier función; en efecto, no es deseable, por ejemplo, que dados dos puntos distintos P y Q del plano, los puntos que les corresponden por la función T , denotados con $T(P) = P'$ y $T(Q) = Q'$, respectivamente, sean iguales; pues intuitivamente esto implicaría que el segmento PQ se podría "deformar" en un punto por la acción del "movimiento" T , o

si se quiere, que el triángulo APQ podría "aplastarse" hasta convertirse en el segmento $A'P' = T(A)T(B)$, donde $A' = T(A)$ (Véase figura 1.4). Luego para evitar que cosas como ésta ocurran, exigimos que T cumpla la siguiente condición:

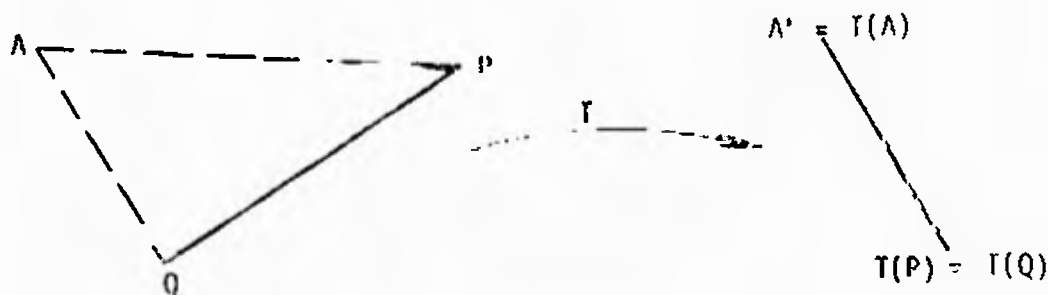


Fig.1.4. Una función T del plano en sí mismo que no es un "movimiento".

(I₁) Si $P \neq Q$, entonces $T(P) \neq T(Q)$.

Es deseable, además, que a todo punto del plano se pueda "llegar" desde otro punto utilizando un "movimiento" T ; por esto requerimos de T el cumplimiento de esta otra condición:

(I₂) Si P' es un punto dado del plano, existe otro punto P del plano tal que $P' = T(P)$.

Una función T del plano en sí mismo que cumpla las condiciones (I₁) y (I₂) se llama un movimiento en el plano.

Para que un tal movimiento sea rígido basta, intuitivamente, que conserve las distancias entre los puntos de una figura al moverla en el plano. Con más precisión, si con $|PQ|$ designamos la distancia entre los puntos P y Q , diremos que T es un movimiento rígido o isometría si, además de las

condiciones (I_1) y (I_2) que lo caracterizan como movimiento, cumple la siguiente condición:

(I_3) Si P y Q son dos puntos del plano, entonces

$$|PQ| = |T(P)T(Q)|,$$

donde $|T(P)T(Q)|$ designa la distancia entre los puntos $T(P)$ y $T(Q)$.

Por lo tanto, resumiendo, presentamos la siguiente definición:

Definición 1.1 Se llama **isometría** al movimiento que cumple con las siguientes condiciones:

(I_1) Si $P \neq Q$, entonces $T(P) \neq T(Q)$.

(I_2) Si P' es un punto dado del plano, existe otro punto P del plano tal que $P' = T(P)$.

(I_3) Si P y Q son dos puntos del plano, entonces

$$|PQ| = |T(P)T(Q)|,$$

donde $|T(P)T(Q)|$ designa la distancia entre los puntos $T(P)$ y $T(Q)$.

Estamos en capacidad ahora de reescribir el criterio de Euclides con la ayuda de los nuevos conceptos que hemos precisado, así:

Dos figuras \mathcal{F} y \mathcal{G} del plano son congruentes y, por tanto, iguales, si existe una isometría T del plano en sí mismo tal que:

$$T(\mathcal{F}) = \{T(P) : P \in \mathcal{F}\} = \mathcal{G}.$$

En particular, la demostración que hemos esbozado antes del Primer Caso de Congruencia de Triángulos, muestra que los triángulos considerados son congruentes, explicitando un movimiento T como el resultado de la aplicación sucesiva de varios movimientos, relativamente simples de comprender y ejecutar: traslación paralela, rotación alrededor de un punto y, si es necesario una reflexión con respecto a una recta. Es decir, se usa el hecho intuitivamente evidente de que la aplicación sucesiva de varias isometrías da como resultado final una (nueva) isometría. Otro ejemplo de este hecho aparece en la figura 1.5, en donde la figura geométrica \mathcal{F} , se rota primero alrededor del punto A un ángulo α (isometría que designamos con R_1) a una nueva posición $\mathcal{F}' = R_1(\mathcal{F})$, y luego se traslada paralelamente por T a su posición final $\mathcal{F}'' = T(\mathcal{F}')$. El resultado es el mismo que si se hubiese rotado \mathcal{F} alrededor del punto B un ángulo β , rotación que en la figura 1.5 hemos llamado R_2 .

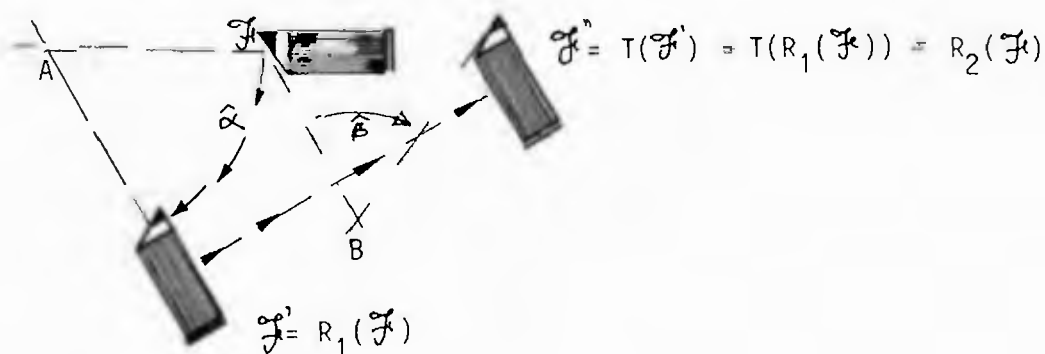


Fig. 1.5. Efecto logrado, (\mathcal{F}''), por dos maneras diferentes de composición de isometrías.

La composición de isometrías hechas anteriormente ha sido: Rotación alrededor de A por un ángulo $\hat{\alpha}(R_1)$, seguida de una traslación T, es equivalente a una rotación alrededor de B por un ángulo $\hat{\beta}(R_2)$.

Todo lo anterior nos sugiere definir la compuesta de dos isometrías en la forma siguiente:

Definición 1.2. Sean T_1 y T_2 dos isometrías, definamos $T_2 T_1$ mediante la relación:

$$(T_2 T_1)(P) = T_2(T_1(P))$$

para todo punto P del plano. A esa relación se le llama compuesta de las isometrías $T_1 T_2$ y así tenemos una función del plano en sí mismo.

Veamos que $T_2 T_1$ así definida satisface las condiciones

$$(I_1), (I_2) \text{ e } (I_3):$$

(I_1) En efecto, si $P \neq Q$, entonces:

$$T_1(P) \neq T_1(Q),$$

en virtud de (I_1), pues T_1 es una isometría; puesto que también T_2 es una isometría, tenemos:

$$T_2(T_1(P)) \neq T_2(T_1(Q));$$

luego $T_2 T_1$ también cumple (I_1).

(I_2) Sea ahora P' un punto dado del plano; como T_2 es una isometría, existe entonces P'' tal que $P' = T_2(P'')$, en virtud de (I_2); pero entonces también existe P tal que $P'' = T_1(P)$, nuevamente en virtud de (I_2), puesto que T_1 es una isometría. Luego para P' existe P tal que:

$$(T_2 T_1)(P) = T_2(T_1(P)) = P',$$

es decir, $T_2 T_1$ satisface (I_2) .

(I_3) Veamos que $T_2 T_1$ satisface también a (I_3) , en efecto:

$$|T_2(T_1(P))T_2(T_1(Q))| = |T_1(P)T_1(Q)|,$$

pues T_2 satisface (I_3) ; por la misma razón,

$$|T_1(P)T_1(P)| = |PQ|;$$

luego

$$|(T_2 T_1)(P)(T_2 T_1)(P)| = |PQ|.$$

Por ejemplo, en el caso que hemos examinado con ayuda de la figura 1.5, podemos escribir $R_2 = TR_1$. Recurrentemente, podemos definir la compuesta de varias isometrías T_1, T_2, \dots, T_n mediante la fórmula

$$(T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1)(P) = T_n(T_{n-1}(\dots(T_2(T_1(P))))\dots)$$

Resumiendo, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1. La composición de un número finito de isometrías es nuevamente una isometría.

Para concluir este capítulo, señalemos que existen movimientos en el plano que no son rígidos pero que interesan en otros aspectos de la geometría. Por ejemplo, movimientos como el T que "encoge" las longitudes de los segmentos del plano a la mitad: $|T(P)T(Q)| = \frac{1}{2}|PQ|$, tienen singular importancia en la teoría de la proporción geométrica.

Capítulo 2.

DE LAS REFLEXIONES SE OBTIENEN TODAS LAS ISOMETRIAS DEL PLANO.

2.1 La Reflexión.

En el capítulo anterior se determinó que de entre todos los posibles movimientos del plano, aquéllos que nos interesan para el presente trabajo son las ISOMETRIAS; en este capítulo mostraremos que todas las isometrías en el plano son producidas o generadas por sólo un tipo de ellas: las reflexiones. Por esta razón daremos una definición precisa e inequívoca de reflexión.

Para alcanzar esos propósitos usaremos la construcción con la regla y compás de la mediatriz de un segmento de una línea recta.

Construcción de la Mediatriz de un Segmento de Recta.

Sea un segmento de línea recta, \overline{AB}

- 1.-Por los extremos A y B del segmento trácense arcos de circunferencia de una abertura adecuada.
- 2.-Los arcos así trazados se insertan en los puntos C y D, a un lado y otro del segmento AB

3-Se unen los puntos C y D que determinan la recta \overleftrightarrow{CD} , la cual inserta a \overline{AB} en el punto E.

La recta \overleftrightarrow{CD} es la mediatriz buscada.

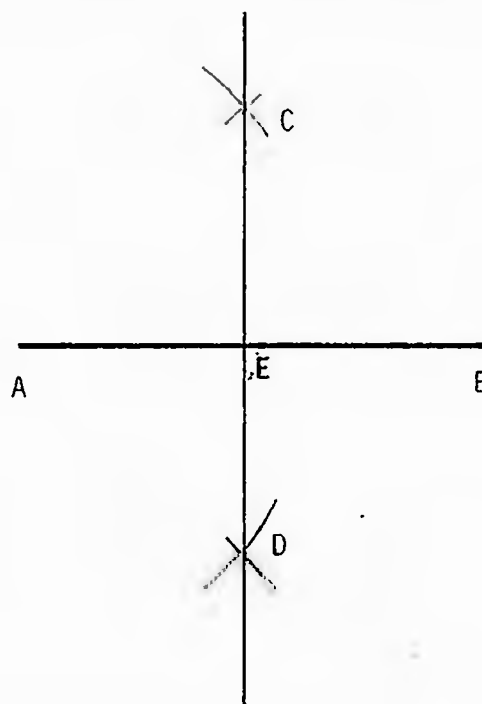


Fig.2.1. Construcción de la mediatriz a un segmento dado

La recta \overleftrightarrow{CD} obtenida en la construcción anterior, la mediatriz del segmento \overline{AB} , tiene la característica de que cada uno de sus puntos equidista de los extremos A y B

Definición 2.1. Un movimiento R se dice que es una

REFLEXION si existe una recta L tal que se cumpla una de las siguientes condiciones:

(1) Si $P \in L$ entonces $R(P) = P$, o bien

(2) L es la mediatriz del segmento PP' , donde

$$P' = R(P)$$

A la recta L se le llama eje de reflexión de R

Con base en la anterior definición y por su trascendencia en este trabajo expliquemos un poco su significado.

Considérese una figura \mathcal{F} y una reflexión R , respecto a una recta L ; entonces se dice que $R(\mathcal{F})$ es la reflexión de \mathcal{F} con respecto a la recta L . Además, usando la definición anterior se demuestra que:

$$R(R(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$$

Caso 1. $\mathcal{F} \subseteq L$.

Por (1) de la definición 2.1 se tiene que:

$$(i) \quad R(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

sustituyendo a \mathcal{F} dentro del paréntesis del miembro izquierdo de (i) se tiene:

$$R(R(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$$

Caso 2. $\mathcal{F} \cap L$.

Por (2) de la definición 2.1 se tiene que para $\mathcal{F} \setminus L$ si hacemos:

$$(ii) \quad R(\mathcal{F} \setminus L) = \mathcal{F}'$$

se tiene

$$(iii) \quad R(\mathcal{F}') = \mathcal{F} \setminus L$$

Luego

$$R(R(\mathcal{F} \setminus L)) = \mathcal{F} \setminus L$$

Para $\mathcal{F} \cap L$ es claro que

$$R(R(\mathcal{F} \cap L)) = \mathcal{F} \cap L$$

Y como \mathcal{F} es la unión disjunta de $\mathcal{F} \setminus L$ y $\mathcal{F} \cap L$, resulta finalmente

$$R(R(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$$

Tal como se quería mostrar.

□

De inmediato presentan dos definiciones que permiten una mejor comprensión del material que se expondrá en este capítulo

Definición 2.2 Un punto P del plano se dice PUNTO FIJO de un movimiento T si se cumple $T(P) = P$

Definición 2.3. Una figura \mathcal{F} se dice que posee simetría bilateral si existe una reflexión R tal que $R(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$
El eje de R se dice un eje de simetría de \mathcal{F} .

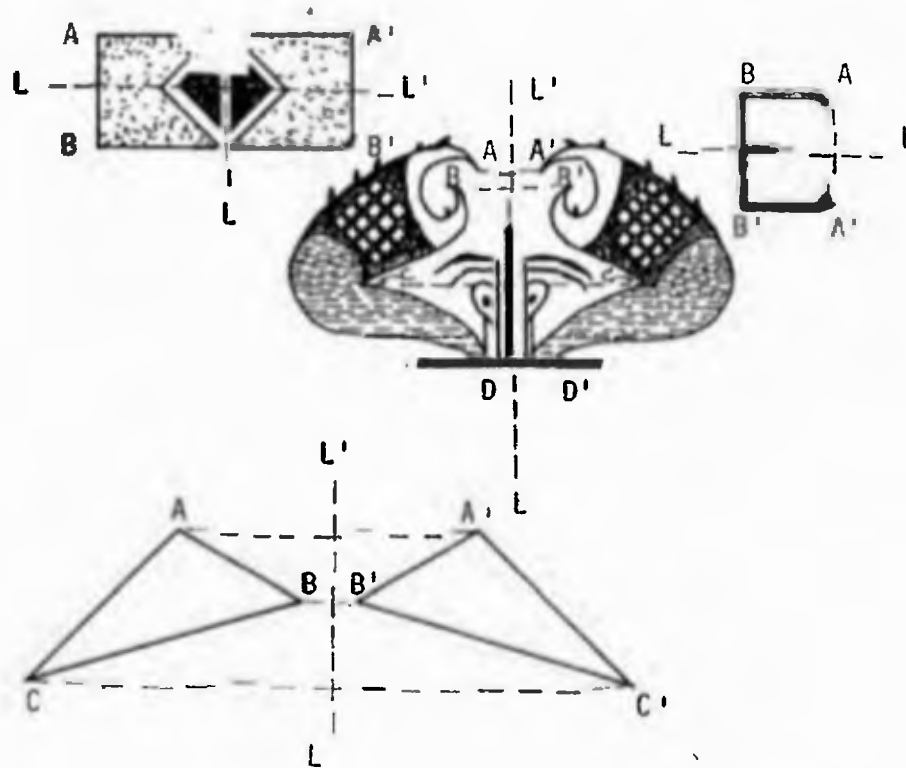


Fig. 2.2. Ejemplos de figuras con simetría bilateral.

Todos los puntos pertenecientes al eje de simetría de una reflexión R son puntos fijos de esa reflexión, por (1) de la definición 2.1. En la figura 2.2 se dan ejemplos de diseños que poseen simetría bilateral; el eje de simetría se evidencia con una línea señalada con LL' . A continuación se presenta un teorema que es importante en la cimentación de esta parte del trabajo.

Teorema 2.1. Una reflexión en el plano es una isometría.

Demostración: Sean dos puntos $P, Q \in \pi$, una reflexión R y L su eje. Como R es por definición un movimiento, satisface I_1 e I_2 ; luego basta demostrar que satisface I_3 .

Caso 1. $P \notin L, Q \notin L$ y ambos puntos pertenecen al mismo semiplano de los dos determinados por L .

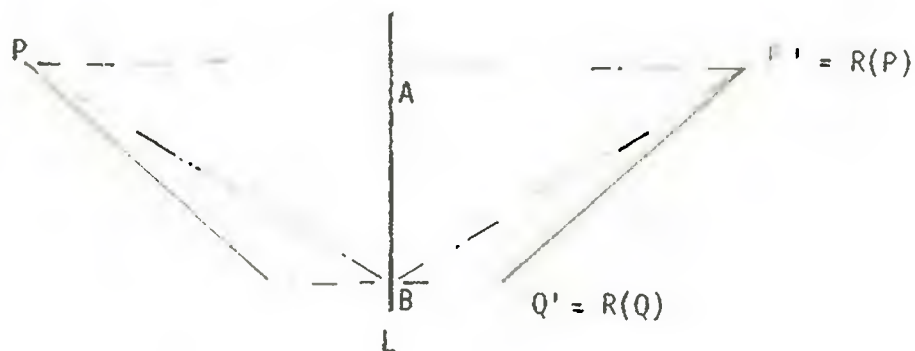


Fig. 2.3. Ilustración para Teorema 2.1, Caso 1.

En la figura 2.3, por ser R una reflexión, se tiene

$$|PA| = |P'A|;$$

también

$$\hat{PAB} = \hat{P'AB} = 90^\circ,$$

y como $|AB| = |AB|$, resulta, por el criterio "lado -ángulo-lado", que los triángulos ΔPAB y $\Delta P'AB$ son congruentes.

En símbolos:

$$(1) \quad \Delta PAB \cong \Delta P'AB.$$

Por tanto, $|PB| = |P'B|$. Considerando ahora los triángulos ΔPBQ y $\Delta P'BQ'$, y usando que R es una reflexión, vemos que

$$|QB| = |Q'B| \text{ y } \hat{ABQ} = \hat{ABQ'} = 90^\circ.$$

De (1) obtenemos que $\hat{ABP} = \hat{ABP'}$, y, por consiguiente

$$\hat{PBQ} = \hat{ABQ} - \hat{ABP} = \hat{ABQ'} - \hat{ABP'} = \hat{P'BQ'}.$$

luego,

$$|PB| = |P'B|, |QB| = |Q'B| \text{ y } \hat{PBQ} = \hat{P'BQ'}$$

implican que

$$(2) \quad \Delta PBQ \cong \Delta P'BQ',$$

Por lo anterior se llega a que

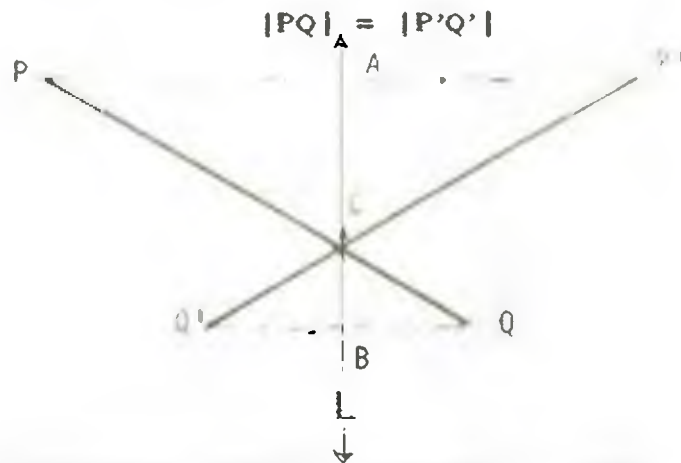


Fig. 2.4 Ilustración para el Teorema 2.1 caso 2.

Caso 2. $P \notin L$, $Q \notin L$; P y Q no pertenecen ambos al mismo semiplano.

Considérense los triángulos ΔPCA y $\Delta P'CA$, entonces, por ser R una reflexión:

$$\begin{aligned} |PA| &= |P'A| \\ \text{y} \quad \widehat{PAC} &= \widehat{P'AC} = 90^\circ \end{aligned}$$

como $|AC| = |AC|$, resulta que

$$\Delta PAC \cong \Delta P'AC$$

y de ahí

$$(3) \quad PCA = P'CA$$

$$(3.a) \quad |\overline{PC}| = |\overline{P'C}|$$

Considérense los triángulos ΔBCQ y $\Delta ABCQ'$; por ser R una reflexión, se tiene:

$$\begin{aligned} |QB| &= |Q'B| \\ \widehat{QBC} &= \widehat{Q'BC} = 90^\circ \end{aligned}$$

Como $|BC| = |BC|$, vemos que

$$\Delta QBC \cong \Delta Q'BC,$$

de donde

$$(4) \quad \widehat{QCB} = \widehat{Q'CB}$$

$$(4.a) \quad |QC| = |Q'C|$$

Pero los segmentos \overline{AC} y \overline{BC} pertenecen a L , o sea que A, C, B son colineales en L . Los segmentos \overline{CP} y \overline{CQ} pertenecen a \overleftrightarrow{PQ} y en esa recta P, Q, C son colineales; también lo son P', Q', C en la recta $\overleftrightarrow{P'Q'}$; ahora bien:

$$\widehat{BCQ} = \widehat{ACP} \quad (\text{por ser opuestos por el vértice}).$$

Como P, C, Q son colineales ocurre que:

$$(5) \quad |PQ| = |PC| + |CQ| \quad (\text{utilizando (3.a) y (3.b)})$$

$$(6) \quad |PQ| = |P'C| + |Q'C|,$$

También se tiene P', C, Q' son colineales y de eso.

$$(7) \quad |P'Q'| = |P'C| + |CQ'|;$$

de (6) y (7) se tiene

$$|PQ| = |P'Q'|$$

Caso 3. $P \notin L, Q \in L$

Considerando los triángulos $\triangle PAQ$ y $\triangle P'AQ$ y por ser R una reflexión se tiene:

$$|PA| = |P'A|, \quad \hat{PAQ} = \hat{P'AQ} = 90^\circ$$

utilizando I.4 se tiene

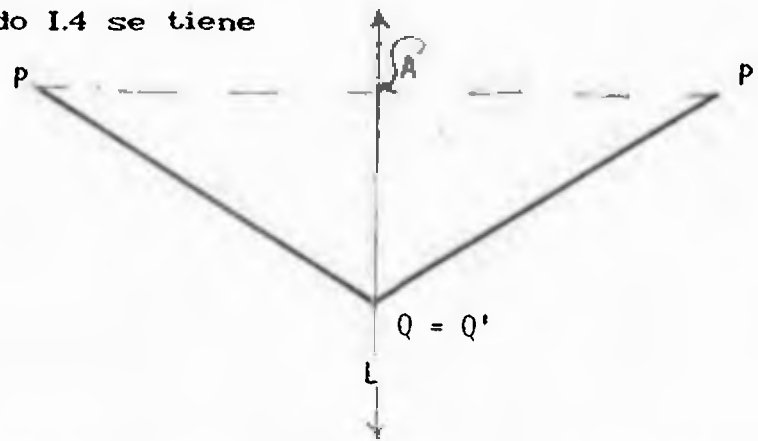


Fig. 2.5 Ilustración para el Teorema 2.1, caso 3.



Fig. 2.6 Ilustración para el Teorema 2.1, caso 4.

$$\Delta PAQ \quad \Delta P'AQ$$

y de ahí:

$$|PQ| = |P'Q'|, \quad \text{ya que } Q = Q'$$

Caso 4. $P, Q \in L$

Como $P = P'$ y $Q = Q'$ se tiene:

$$|PQ| = |P'Q'|$$



Del teorema que se ha demostrado se obtienen algunas consecuencias útiles y se presentan a continuación.

Colorario 1: Si $R_1 R_2$ son reflexiones, entonces tanto $R_1 R_2$, como $R_2 R_1$ también, son isometrías.

Demostración: Ya hemos visto que la composición de dos isometrías es una isometría, y acabamos de demostrar que las reflexiones son isometrías. Luego si R_1 y R_2 con reflexiones, $R_1 R_2$ y $R_2 R_1$ son isometrías.

Colorario 2: Si R_1, R_2, \dots, R_n son reflexiones entonces

$R_1 R_2 \dots R_n R_{n-1}$ y $R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1$ son isometrías.

En la composición de dos reflexiones se puede decir que, por lo general, no es conmutativa o sea que:

$$R_1 R_2 \neq R_2 R_1.$$

como se ilustra en la figura 2.7.

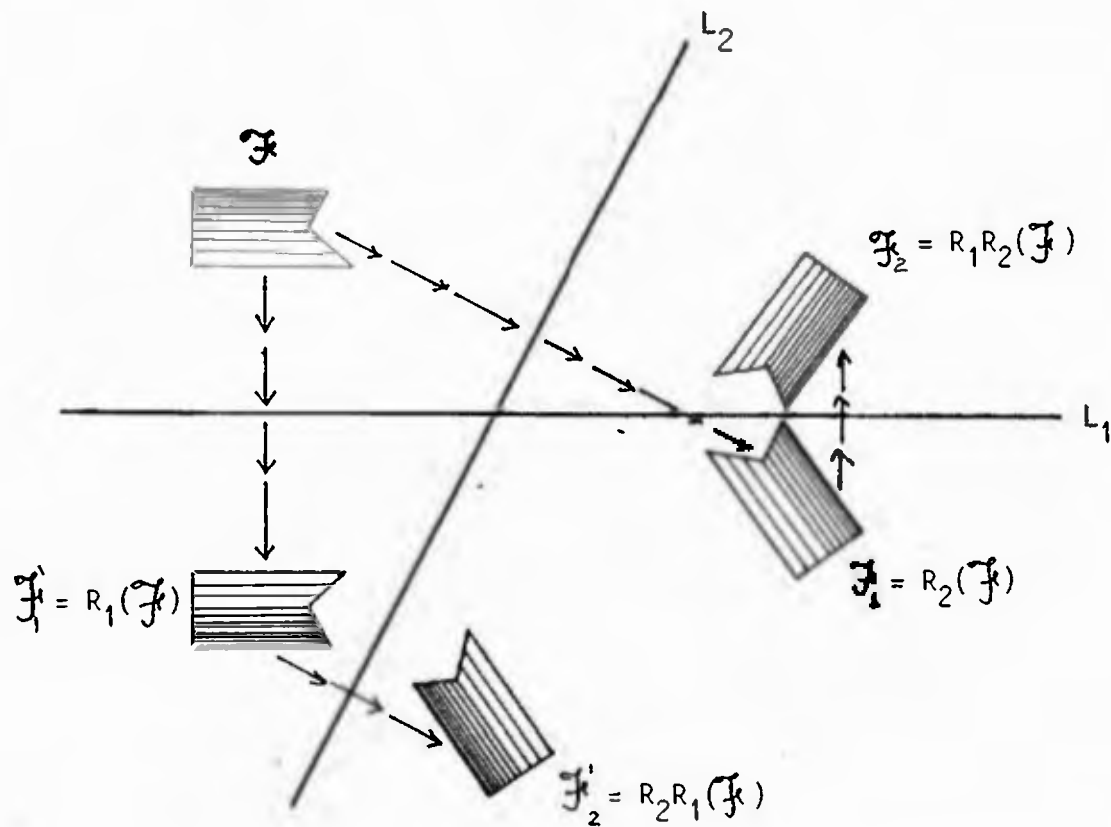


Fig. 27. Muestra de las composiciones $R_1 R_2$ y $R_2 R_1$.

También se ilustra, en la figura 2.8, el resultado de una composición de cinco reflexiones, cada una de ellas con eje L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , que transforma a la figura \mathcal{F} en \mathcal{F}_5 . La figura \mathcal{F} se ha reflejado inicialmente con respecto a la recta L_1 para así obtener una figura \mathcal{F}_1 , y ésta a su vez se ha reflejado respecto a L_2 y así sucesivamente. Si al cabo de n reflexiones obtenemos una figura \mathcal{F}' , partiendo de \mathcal{F} , decimos que \mathcal{F} ha sido transformada en \mathcal{F}' mediante una cadena de n reflexiones.

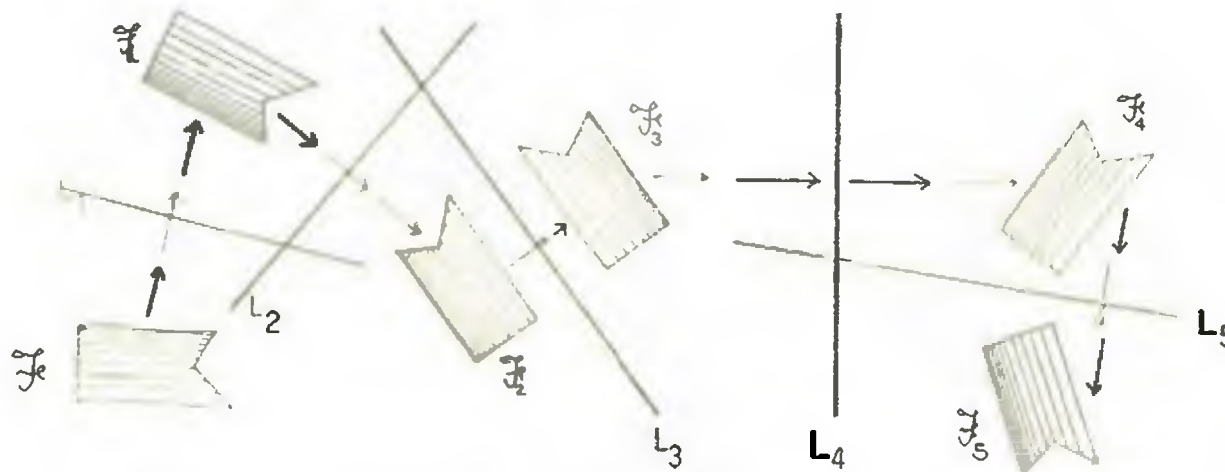


Fig. 2.8. Ilustración de una cadena de reflexiones sucesivas en el plano.

Nos permitimos introducir una notación que nos ayudará a escribir con mayor concisión geométrica los resultados:

Dada una reflexión R para designar la imagen P' de un punto P usaremos la notación (simétrica):

$$P \longleftrightarrow P'$$

para indicar que P' es el reflejado de P (por R) y viceversa.

Teorema 2.2. Sean A, B, C, A', B', C' seis puntos en el plano tales que

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'|, |BC| = |B'C'|.$$

Entonces hay una cadena de a lo sumo tres reflexiones que transforma A, B, C en A', B', C' respectivamente.

Demostración. La haremos en varios pasos.

Paso 1. Sea L_2 la mediatriz de AA' y sean B_2 y C_2 los reflejados de B y C respecto de L_2 . Entonces

$$A \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ A', B_2 \\ \downarrow \end{array} \right] B' \text{ y } C_2 \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ C' \\ \downarrow \end{array} \right]$$

Véase la figura 29 b

Paso 2 Sea L_1 la mediatriz de BB_2 . Como $|AB| = |A'B'|$, y, por el teorema 2.1:

$$|A'B'| = |AB_2|,$$

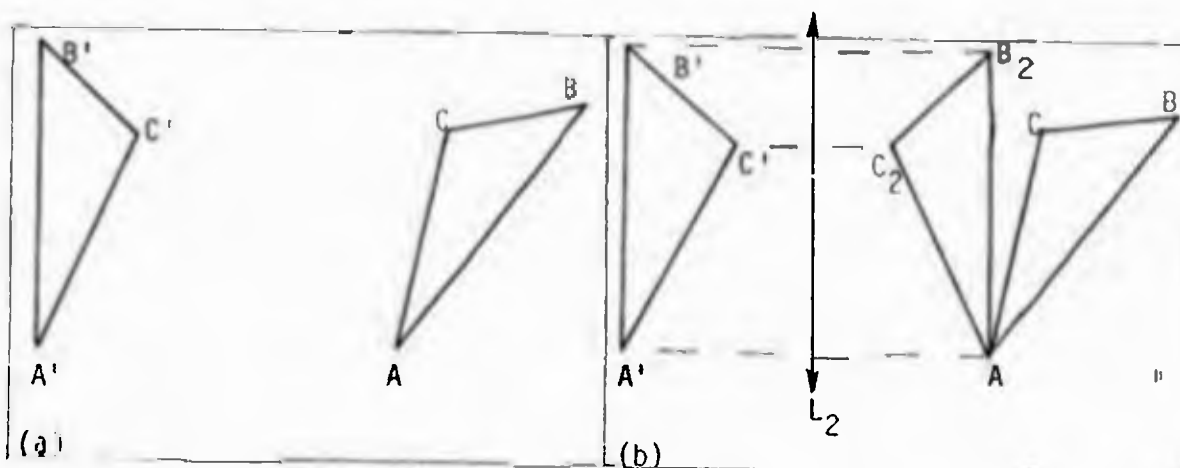


Fig. 2.9. Ilustración para la demostración del Teorema 2.2. a) Posición original de los puntos, b) Paso 1

obtenemos que

$$|AB| = |AB_2|.$$

Por tanto, A está en L_1 y es su propio reflejado con respecto de L_1 . Es decir, los reflejados de los puntos A, B_2 , C_2 respecto de L_1 , son A, B, C_1 , respectivamente

(Véase la figura 2.10 a).

Paso 3. Con argumentos análogos a los anteriores podemos ver (figura 2.10 b) que:

$$|AC| = |AC_1| \text{ y } |BC| = |BC_1|.$$

Por consiguiente, AB es la mediatriz de CC_1 , y los reflejados de los puntos A, B, C_1 en la reflexión respecto de AB son A, B, C, respectivamente.

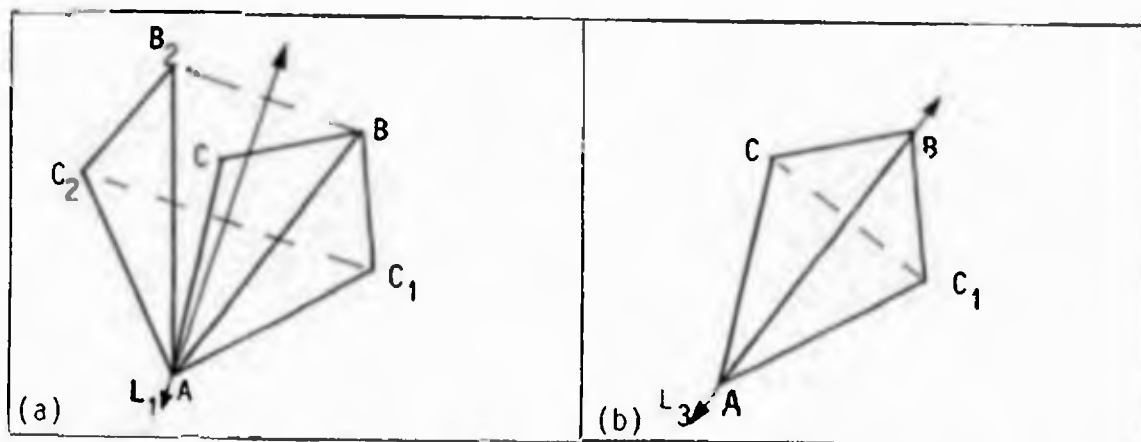


Fig. 210. Ilustración para la demostración del Teorema 22. a) Paso 2, b) Paso 3.

De modo que

$$A, B, C \xrightarrow{L_1} A, B, C_1 \xrightarrow{L_2} A, B_2, C_2 \xrightarrow{L_3} A', B', C',$$

como queríamos demostrar. Uno o más pasos cualesquiera de los tres antes mencionados pueden resultar innecesarios si el par de puntos con el cual trabajamos (A, A' en el paso 1, B, B' en el paso 2; C, C' en el paso 3) coinciden. \square

Antes de continuar, recordemos que si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ cumplen

$$|AB| = |A'B'|, |AC| = |A'C'| \text{ y } |BC| = |B'C'|$$

entonces los dos triángulos son congruentes. Este es el llamado Tercer Caso de Congruencia de Triángulos (18 de los Elementos de Euclides).

Veamos ahora que una isometría transforma triángulos en triángulos congruentes. Con más precisión:

Teorema 23. Sean T una isometría y ABC un triángulo. Entonces $A'B'C'$, donde:

$$A' = T(A), B' = T(B) \text{ y } C' = T(C),$$

es un triángulo. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son además congruentes.

Demostración. Si A' , B' , y C' fuesen colineales, tendríamos.

$$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|,$$

por ejemplo. Pero entonces también

$$|AC| = |AB| + |BC|,$$

lo cual contradiría que ABC fuese un triángulo.



Ahora sí pasamos a nuestro resultado central.

Teorema 2.4. Cualquier isometría es el resultado de una cadena de a lo sumo tres reflexiones.

Demostración Sea T una isometría. Debemos mostrar que existe una cadena de a lo sumo tres reflexiones, llamémosla M , tal que:

$$M = T;$$

es decir:

$$T(P) = M(P),$$

para todo punto P del plano. Para ello consideremos tres puntos distintos A , B y C que no sean colineales; estos tres puntos determinan, pues, un triángulo ABC ; por el teorema 2.3 ocurre que los puntos.

$$A' = T(A), B' = T(B) \text{ y } C' = T(C)$$

también determinan un triángulo, $A'B'C'$, congruente con el

anterior. En particular, A', B' y C' no pueden ser colineales y se tiene además que:

$$|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'| \text{ y } |AC| = |A'C'|$$

En virtud del teorema 2.2, existe una cadena M de a lo sumo tres reflexiones tal que:

$$A' = T(A) = M(A), B' = T(B) = M(B) \text{ y } C' = T(C) = M(C).$$

Queremos mostrar ahora que:

$$T(P) = M(P)$$

para todo punto P del plano.

En efecto, considérense los siguientes puntos:

$$P' = T(P) \text{ y } P'' = M(P).$$

Caso a. $P \in \overleftrightarrow{AC}$

Si P no pertenece a la recta AC , tenemos un triángulo ACP . Por el teorema 2.3, A', C' y P' determinan un triángulo $A'C'P'$ y por su parte A'', B'' y C'' determinan el triángulo $A''C''P''$. (Véase la figura 2.11). Es claro que como:

$$A' = A'' \text{ y } C' = C''$$

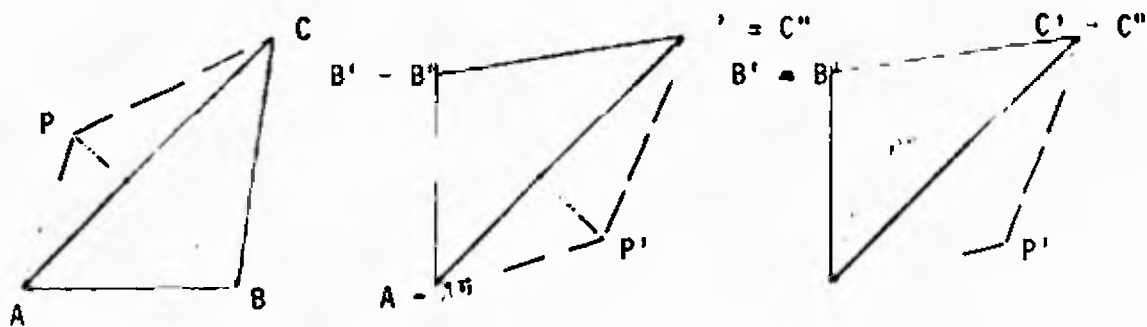


Fig. 2.11. Ilustración para el teorema 2.4. Caso a.

estos triángulos tienen un lado común $A'C' = A''C''$. Por otra parte, como tanto T como M son isometrías, tenemos:

$$|A'P'| = |A'P''| = |AP| \text{ y } |C'P'| = |C''P''| = |CP|$$

Por tanto, los triángulos $\triangle A'C'P'$ y $\triangle A''C''P'' = \triangle A'C'P''$ son congruentes, lo que implica que

$$\widehat{C'A'P'} = \widehat{C'A'P''}.$$

Si P y P'' están del mismo lado de la recta $A'C'$, resulta que:

$$P' = T(P) = M(P) = P''.$$

Si P' y P'' están a distintos lados de $A'C'$, entonces $A'C'$ es la mediatriz de $P'P''$, puesto que:

$$|P'A'| = |P''A'| \text{ y } |P'C'| = |P''C'|.$$

Pero entonces, dado que:

$$|P'B'| = |PB| = |P''B''| = |P''B'|,$$

resulta que B' está en la mediatriz de $P'P''$, que no es otra que la recta $A'C'$; pero esto contradice el hecho de que A' , B' y C' no son colineales. Por tanto, es imposible que P' y P'' estén del mismo lado de $A'C'$

Caso b. $P \in \overleftrightarrow{AC}$

Finalmente, cuando P está en la recta AC (figura 2.12) se tiene que:

$$|PA| = |P'A'| = |P''A'| \text{ y } |PC| = |P'C'| = |P''C'|$$

Si P está entre A y C , entonces:

$$\begin{aligned} |AC| &= |PA| + |PC| \\ &= |P'A'| + |P'C'| \\ &= |P''A'| + |P''C'| \\ &= |A'C'| \end{aligned}$$

Esto implica que A' , C' , P' y P'' son colineales y que

$$P' = P''.$$

El caso en que P es colineal con A y C pero no está entre estos dos puntos, se trata de manera semejante.

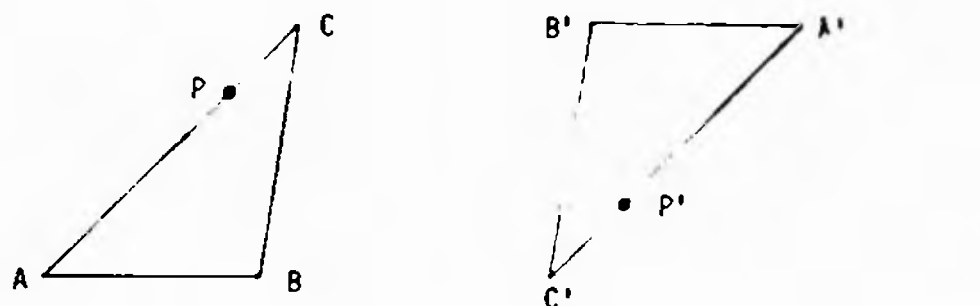


Fig. 2.12. Ilustración para el teorema 2.4. Caso b.

Después de haber demostrado este importante teorema para nuestro trabajo, a continuación revisaremos los movimientos considerados desde el principio pero relacionándolos con las reflexiones o sea que mostraremos que ellos son combinación de a lo sumo tres reflexiones.

2.2 Traslación (Paralela):

Es la isometría lograda mediante la aplicación de dos reflexiones sucesivas que poseen ejes paralelos; este movimiento es lo que en otros momentos se ha dado por llamar "desplazamiento paralelo".

Representétese esta isometría por T , entonces cuando a un

punto dado P se le aplica la traslación, $P'' = T(P)$, resulta que.

$$|PP''| = 2d$$

donde d es la distancia existente entre los ejes de las reflexiones que participan en la definición de la traslación

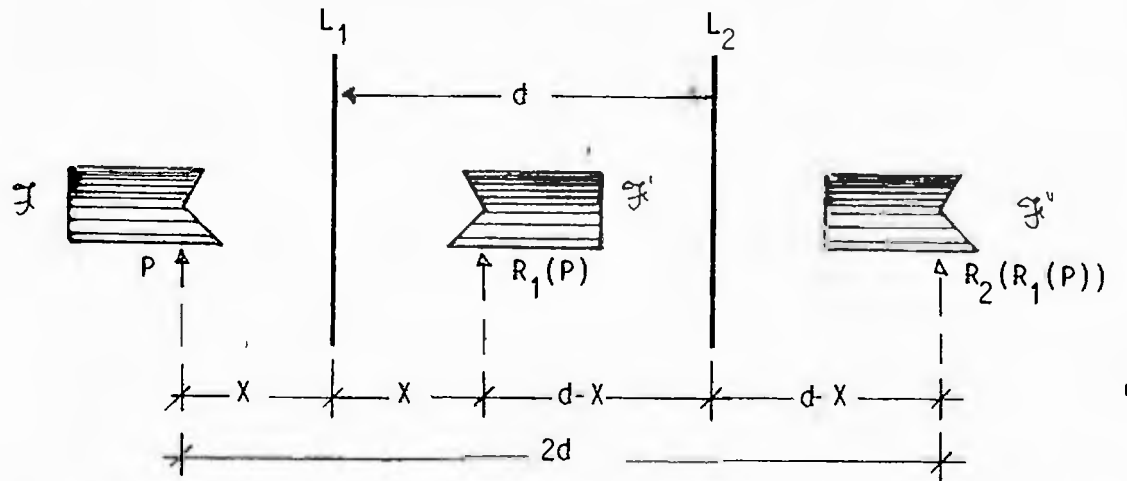


Fig. 2.13 Muestra de las relaciones de distancias en una traslación.

Sean R_1 y R_2 estas reflexiones paralelas, entonces si

$T = R_2 R_1$ se tiene, tal como se ilustra en fig. 2.13, que

$$|P R_1(P)| = 2x$$

y

$$|R_1(P) R_2(R_1(P))| = 2(d-x)$$

luego

$$\begin{aligned} |P T(P)| &= |P R_1(P)| + |R_1(P) T(P)| \\ &= 2x + 2(d-x) \\ &= 2d \end{aligned}$$

El efecto de trasladar una figura no es, pues, más que mover la figura dada, en forma paralela, desde la posición original, una distancia fija $2d$, donde d es la distancia

entre los dos ejes de reflexión dados.

Al tratar este movimiento surge la pregunta de cuál es el efecto logrado cuando en vez de usar $T = R_2 R_1$ se ejecuta la isometría $R_1 R_2$. Téngase en cuenta la aclaración hecha anteriormente de que la composición de dos isometrías no necesariamente es conmutativa; entonces ocurre que si $T' = R_1 R_2$ no

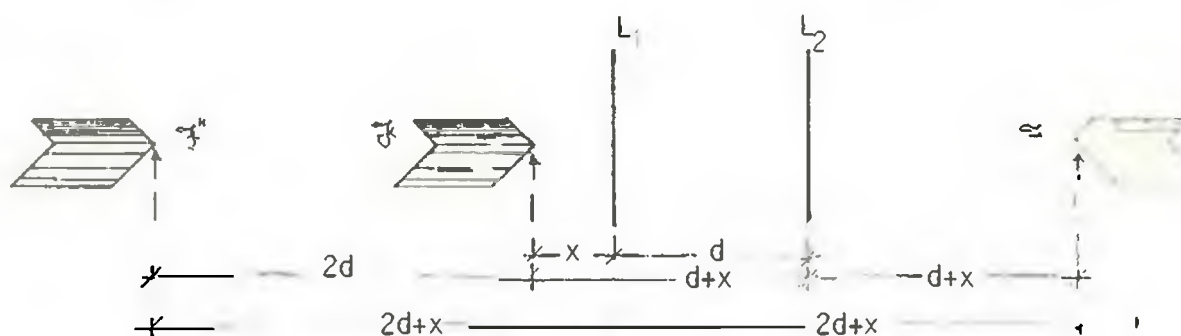


Fig. 2.14 Traslación usando reflexión en L_2 y después en L_1 .

será la misma traslación pero sí conservará la característica de que la imagen final tendrá la misma dirección y que entre ellas la distancia es el doble que la distancia existente entre los ejes respecto a las cuales se efectúa.

Considérese la reflexión R_2 , con eje L_2 , y a R_1 , con eje L_1 , en la figura 2.14, entonces $\mathcal{F}' = R_2(\mathcal{F})$, y la distancia mínima desde \mathcal{F} hasta L_2 es una distancia x más la distancia entre los ejes L_1 y L_2 , d , o sea esa distancia es $d + x$.

$$|P P'| = 2(d+x)$$

usando el eje de reflexión L_1 y aplicando R_1 a \mathcal{F}' se tiene:

$$\mathcal{F}'' = R_1(R_2(\mathcal{F}))$$

La distancia desde \mathcal{F}' a L_1 es $2d + x$ entonces:

$$|P'P''| = 2(2d + x)$$

pero también:

$$|P'P''| = |P''P| + |PP|$$

sustituyendo estos valores obtenidos

$$2(2d+x) = |P''P| + 2(d+x)$$

y de ahí:

$$|P''P| = 2d$$

Tal como se esperaba, la composición T' también traslada una figura dada una distancia igual al doble de la existente entre los ejes paralelos con respecto a las cuales se ejecutan las dos reflexiones que componen la traslación pero en sentido contrario al que se obtuvo el caso de la traslación T . En este proceso se ha usado el concepto de colinealidad para un punto dado y sus sucesivos reflejados; lo cual ocurre porque un determinado punto y su reflejado son perpendiculares al eje de reflexión y como los ejes presentes son paralelos se mantiene la colinealidad entre ellos. Con lo discutido en este movimiento, traslación, debe quedar establecido que independientemente de la posición que un determinado punto con respecto a los ejes, que cuando se ejecuta la traslación el efecto es el movimiento de ese punto (o figura), una distancia del doble de la existente entre los ejes paralelos.

2.3 Rotación.

Es la isometría lograda mediante la aplicación sucesiva de dos reflexiones sobre ejes que se intersectan en un punto, O . Se denomina, para mayor especificidad rotación alrededor del punto O .

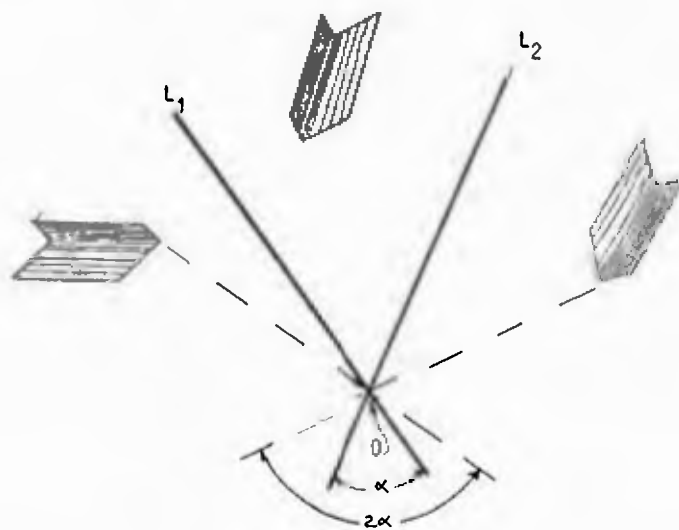


Fig. 2.15 Rotación alrededor de O , mostrando las reflexiones usadas.

Utilícese G_O para designar la rotación alrededor de un punto O , sea α el ángulo que forman los dos ejes de reflexión, L_1 , L_2 ; entonces la posición de una figura, un punto, después de haber sido reflejado se encuentra que ha tenido un giro de dos veces el valor del ángulo α

En la figura 2.16 considérese un punto P , sea R_1 la reflexión aplicada usando a L_1 como su eje de reflexión, entonces $P' = R_1(P)$ es el punto obtenido. Sea A el punto de la recta L_1 que bisecta el segmento $\overline{PP'}$, por definición de reflexión $|AP| = |AP'|$. Sea R_2 la reflexión cuyo eje es L_2 ; aplicandola a P' se tiene que $P'' = R_2(P')$ es el punto obtenido. B es

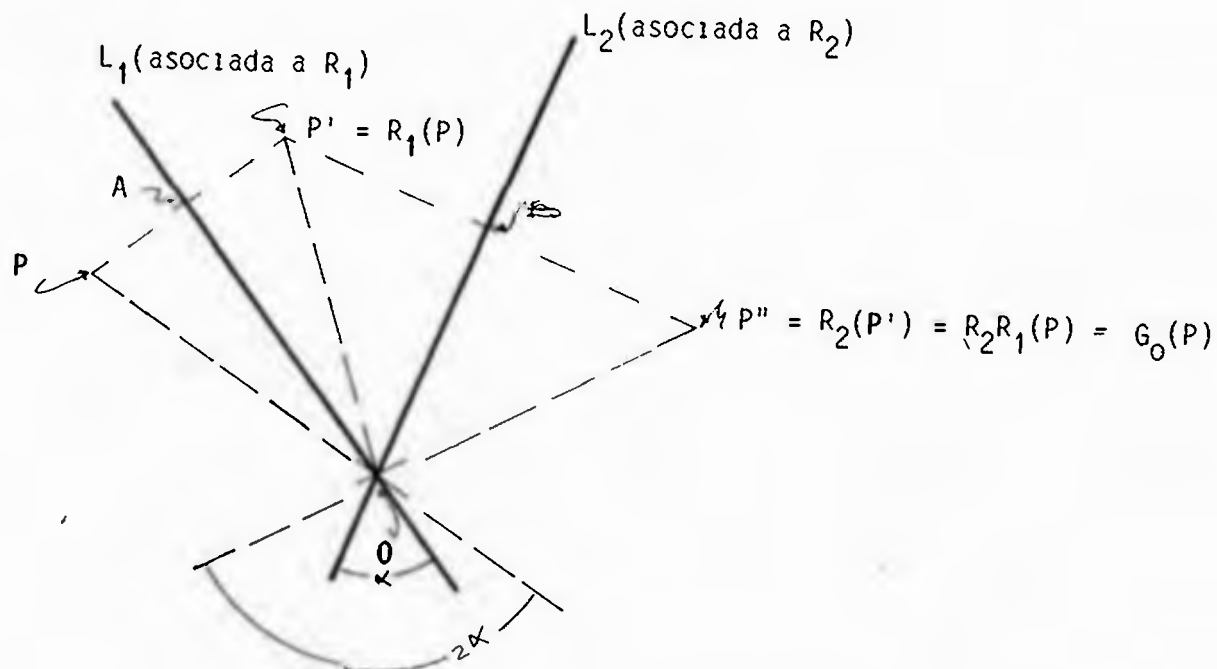


Fig. 2.16 Rotación alrededor de \$O\$ para un punto \$P\$.

el punto de la recta \$L_2\$ en el cual ésta es intersectada por el segmento \$\overline{P'P''}\$. Por la definición de reflexión se tiene

$$|BP'| = |BP''|.$$

Como \$R_1\$ es isometría, los triángulos \$\triangle PAO\$ y \$\triangle P'AO\$ son congruentes y \$\widehat{POA} = \widehat{P'OA}\$

Como \$R_2\$ es isometría, los triángulos \$\triangle P'OB\$ y \$\triangle P''OB\$ son congruentes y \$\widehat{P'OB} = \widehat{P''OB}\$.

El ángulo comprendido entre los dos ejes de reflexión, \$\alpha\$, puede ser descompuesto como:

$$\alpha = \widehat{P'OA} + \widehat{P'OB}$$

Entonces el ángulo entre \$P\$ y \$P''\$ será:

$$\widehat{POP''} = \widehat{POA} + \widehat{P'OA} + \widehat{P'OB} + \widehat{P''OB}$$

sustituyendo $\hat{P}OA$ y $\hat{P}''OB$ por sus equivalentes ocurre que:

$$\begin{aligned}\hat{POP}'' &= \hat{P}'OA + \hat{P}'OA + \hat{P}'OB + \hat{P}'OB \\ &= 2(\hat{P}'OA + \hat{P}'OB) \\ &= 2\alpha\end{aligned}$$

Hasta el momento los movimientos descritos han sido: reflexión, traslación, rotación; puede darse una combinación de ellos como es una traslación con una reflexión, o viceversa; también una rotación con una reflexión, o viceversa. Tanto la rotación como la traslación son cadenas de dos reflexiones; entonces las isometrías logradas con la combinación traslación-reflexión, rotación-reflexión están compuestas por una cadena de tres reflexiones. Una reflexión es un solo movimiento.

Por lo anteriormente expuesto, cualquier isometría es:

- Una reflexión, o
- una traslación, o
- una rotación, o
- una traslación seguida de una reflexión (o viceversa),
- o
- una rotación seguida de una reflexión (o viceversa).

2.4 Reflexión Deslizante:

Cuando en la cadena de isometrías formada por una traslación y una reflexión, esta última es ejecutada con respecto a un eje que es paralelo a la dirección de la traslación y perpendicular a aquellos ejes que permiten la

traslación, entonces la isometría lograda por esta cadena la llamaremos Reflexión Deslizante, L

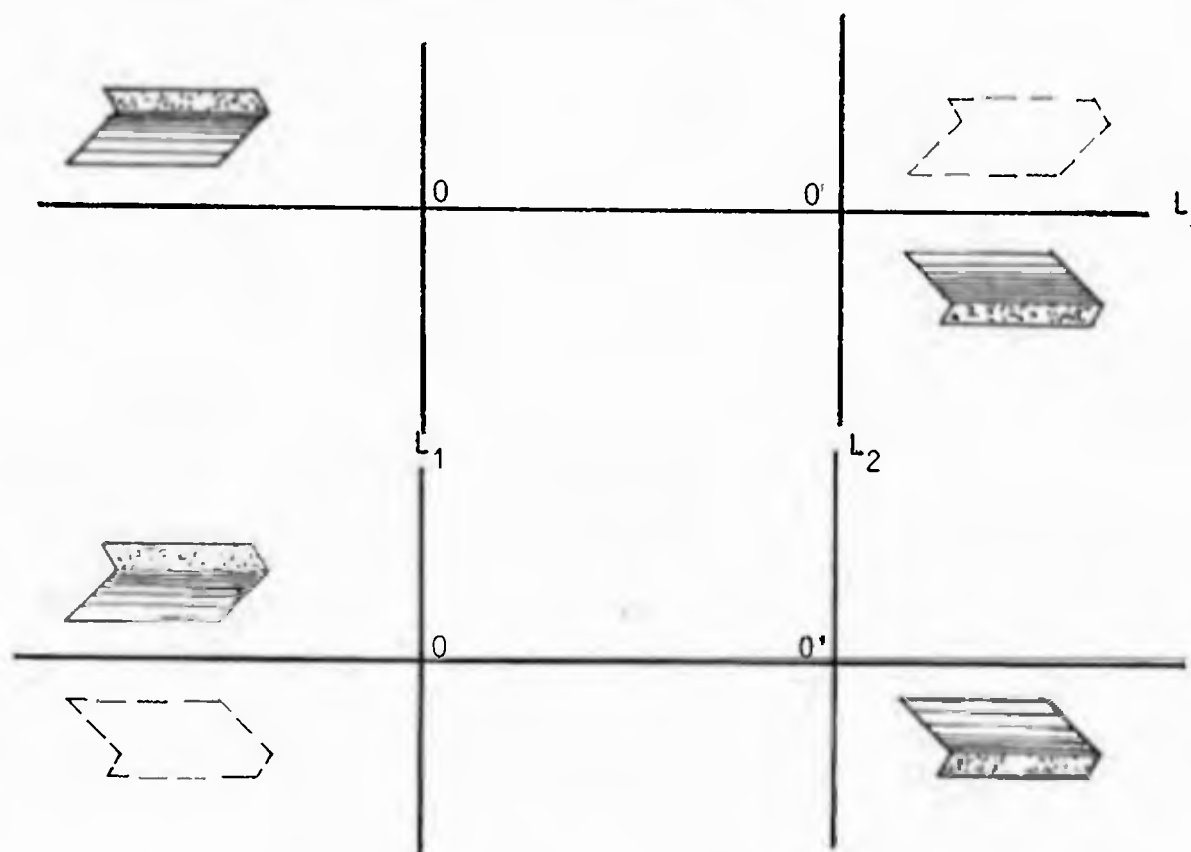


Fig. 217. Composición de la Reflexión Deslizante, parte superior: traslación-reflexión, parte inferior: reflexión-traslación.

Es este un caso particular de una composición lograda por una reflexión y una traslación cuya composición es conmutativa como se ilustra en la figura 2.17, de la que haremos extenso uso en lo venidero.

En este caso como $L_1 \parallel L_2$, $L_1 \perp L_3$, $L_2 \perp L_3$, se tiene

$$L = R_3 T = T R_3$$

Pero T está constituido como $R_2 R_1$, ocurre que D se representa como.

$$L = R_3 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_3$$

Si en este momento consideramos el hecho de que $R_3 R_2$ es una cadena de dos reflexiones, cuyos ejes son perpendiculares y se intersectan en O' , entonces como es la composición de dos reflexiones sucesivas con respecto a ejes no paralelos, esta isometría es una rotación y su ángulo de giro es el doble del ángulo determinado por sus ejes de reflexión, que en este caso es de 90° ; o sea que el ángulo de giro es 180° , que se conoce comunmente como "media vuelta". Resulta ser que también con la composición $R_1 R_3$ se obtiene una media vuelta ya que la posición de sus ejes de reflexión es de 90° ; es una media vuelta alrededor de O . Estas dos composiciones resultan ser conmutativas; es la misma media vuelta alrededor de O' si se hace $R_2 R_3$ y es la misma media vuelta alrededor de O si se hace $R_1 R_3$ o $R_3 R_1$.

Por lo dicho hasta el momento resulta ser que la reflexión deslizante representada como:

$$L = (R_3 R_2) R_1,$$

tiene la siguiente descripción:

Reflexión respecto a R_1 y media vuelta alrededor de O' .

Pero en vista de la conmutatividad de las reflexiones que definen a la media vuelta, igual significado tiene:

$$L = (R_2 R_3) R_1,$$

La diferencia en ellas es, tal como se puede observar, en la figura 2.18, el orden en que se ejecutan las reflexiones de la media vuelta.

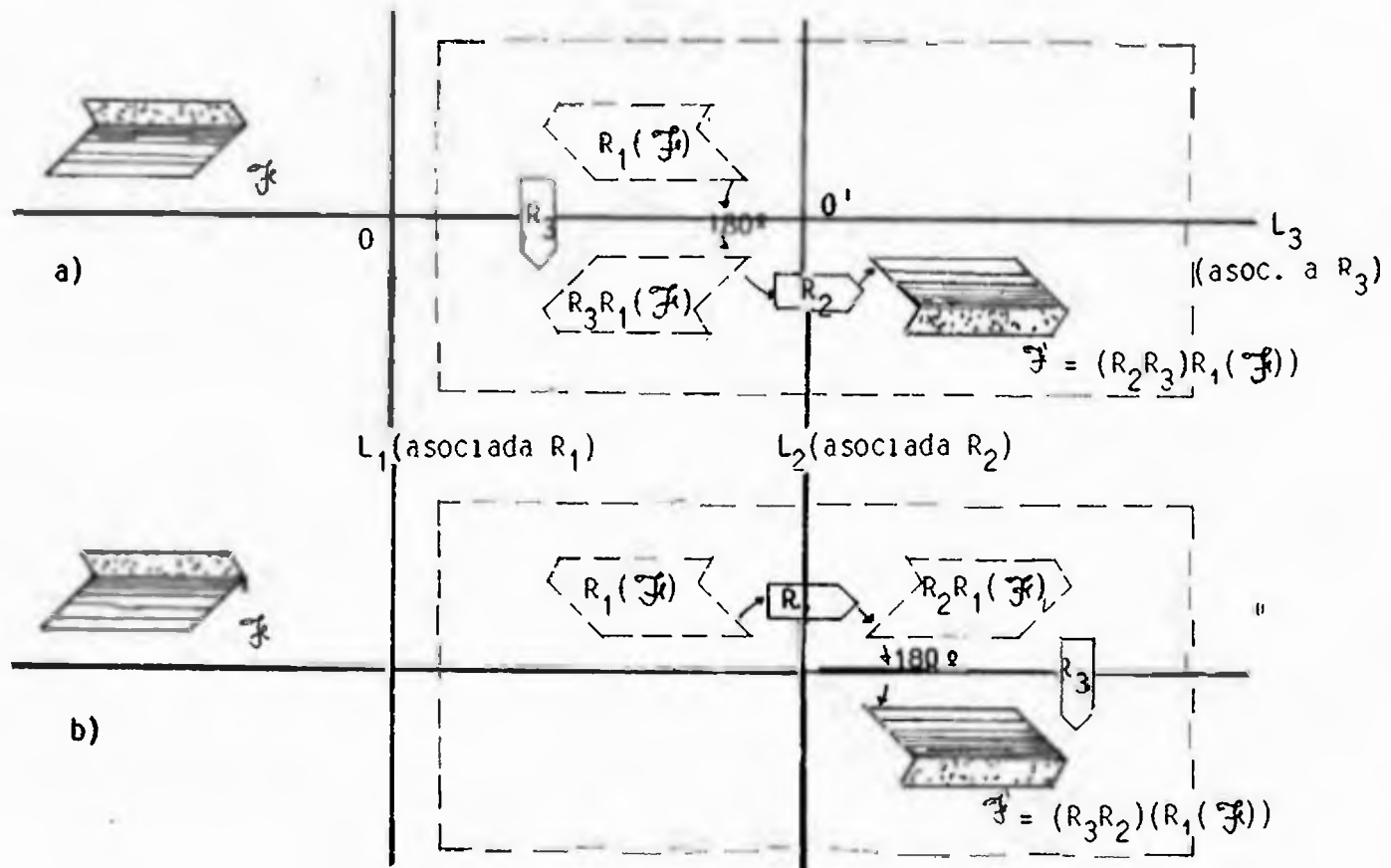


Fig 2.18 Ilustración de una Reflexión deslizante mostrando la conmutatividad en la media vuelta

Algo semejante ocurre cuando se considera, en este sistema de ejes de reflexión, la composición descrita por:

$$L = R_2(R_1R_3) \quad \text{y} \quad L = R_2(R_3R_1)$$

Por lo antes expuesto resulta ser que la reflexión deslizante es una isometría muy versátil en su ejecución, no tiene una forma única de lograrse sino que, después de tener establecidos los ejes respecto a los cuales se ejecutará, es posible lograrla mediante las siguientes composiciones:

Una traslación seguida de una reflexión, o
 una reflexión seguida de una traslación, o
 una reflexión seguida de una media vuelta, o
 una media vuelta seguida de una reflexión.

Se tiene que respetar el orden que tiene la composición de reflexiones por cual se logra la traslación pues no es conmutativa en tal composición, o sea que la composición

$$R_1 R_2 R_3 \text{ ó } R_1 R_3 R_2 \text{ ó } R_3 R_1 R_2$$

no es la misma que se ha venido considerando porque $R_1 R_2$ (con ejes de reflexión paralelas) no es la misma que $R_2 R_1$.

2.5. La Estructura de Grupo.

Estudiemos ahora algunas consecuencias de todo la anterior:

- 1) Como cada movimiento rígido es la composición de un número finito de reflexiones, resulta que la composición de dos movimientos rígidos, como composición de un número finito de reflexiones, es también un movimiento rígido.
- 2) Hay un movimiento rígido muy especial, que denotamos con I , y que está caracterizado por $I(P) = P$ para todo punto P (es decir, I es el movimiento que deja quietos a todos los del plano). Este movimiento lo llamamos el movimiento idéntico o sencillamente identidad. Como $RR = I$, para toda reflexión R , vemos que el movimiento idéntico también puede expresarse como una cadena de reflexiones.
- 3) Si $T = R_1 R_2$, donde R_1 y R_2 son reflexiones, el movi-

mimiento $T^{-1} = R_2 R_1$ tiene la propiedad siguiente:

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T,$$

pues:

$$\begin{aligned} (TT^{-1})(P) &= (R_1 R_2)(R_2 R_1)(P) \\ &= R_1(R_2(R_2(R_1(P)))) \\ &= R_1(R_1(P)) \\ &= P \end{aligned}$$

pues $R_1 R_1 = I$ y $R_2 R_2 = I$; y, por otra parte:

$$\begin{aligned} (T^{-1}T)(P) &= R_2(R_1(R_2(P))) \\ &= R_2(R_2(P)) \\ &= P \end{aligned}$$

para todo punto P del plano.

En general, si

$$T = R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1, \text{ donde}$$

$$R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n \text{ son reflexiones.}$$

El movimiento rígido

$$T^{-1} = R_1 R_2 \dots R_{n-1} R_n$$

cumple la propiedad

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T.$$

Como todo movimiento rígido T es la composición de a lo sumo tres reflexiones, resulta que para cada T existe T^{-1} , movimiento rígido que cumple

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T.$$

4) Finalmente, es claro que $IT = T = TI$ para todo movimiento rígido T

Luego hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.5. Si con \mathcal{M} designamos al conjunto de todos los movimientos rígidos o isometrías del plano, entonces \mathcal{M} tiene las siguientes propiedades:

(Gó) Si T y M son movimientos rígidos, TM es un movimiento rígido.

(G1) Existe un movimiento rígido especial I tal que $IT = T = TI$ para todo movimiento rígido T .

(G2) Dado un movimiento rígido T existe otro movimiento rígido, designado con T^{-1} , tal que $TT^{-1} = I = T^{-1}T$.

(G3) Si T , M y N son movimientos rígidos, entonces $T(MN) = (TM)N$.

El movimiento rígido T^{-1} se llama el inverso de T .

Estamos, pues, en presencia de lo que en Matemática se le llama una estructura de grupo. Más precisamente, dado un conjunto de objetos G y una ley o manera de asignar a dos elementos cualesquiera g y g' de G otro elemento (único) de G , denotado en general con gg' , decimos que G , con esta ley, posee una estructura de grupo, o que G es un grupo, si se cumplen además las propiedades siguientes:

(G1) Existe e en G tal que $eg = g = ge$, para todo elemento g de G .

(G2) Dado g en G existe g^{-1} en G tal que $gg^{-1} = e = g^{-1}g$.

(G3) Si g , g' y g'' están en G , entonces

$$g(g'g'') = (g'g'')g.$$

El elemento g^{-1} se llama el inverso de g , y decimos "el

inverso" pues es único. En efecto, sea g^* otro elemento de G que cumpla:

$$gg^* = e = g^*g;$$

entonces:

$$\begin{aligned} g^{-1} &= g^{-1}e \\ &= g^{-1}(gg^*) \\ &= (g^{-1}g)g^* \\ &= eg^* \\ &= g^* \end{aligned}$$

donde hemos usado sucesivamente las propiedades (G_1) , (G_2) , (G_3) , (G_2) y (G_1) .

Como conclusión, podemos decir ahora que el inverso de un movimiento rígido es único.

Viendo el trabajo hecho hasta el momento desde que partimos de algo tan concreto como son los desplazamientos en el plano, hemos avanzado hasta concluir que el conjunto de las isometrías (movimientos rígidos) tiene una estructura de grupo, este avance es muy trascendente pues el concepto de grupo es muy importante y paso a paso hemos avanzado hacia él.

El conjunto de las isometrías en el plano es infinito y además tiene como característica que, en general, no es conmutativa su composición, o sea que si una determinada isometría se obtiene arreglando en un determinado orden las reflexiones que la componen; entonces al alterar ese orden inicial el resultado difiere. No se elimina la alternativa de que entre todas las isometrías haya algunas que si conmu-

ten; pero en términos generales no ocurre tal. Así que este grupo es no conmutativo e infinito.

Consideremos el conjunto compuesto por $\langle I, R \rangle$ donde R es una reflexión este conjunto también cumple con las condiciones para ser considerado un grupo.

$$(1) IR = R \in \langle I, R \rangle$$

$$(2) RR = I \in \langle I, R \rangle$$

$$(3) \text{ si } RR = I, \text{ entonces } R = R^{-1} \text{ puesto que } RR^{-1} = I$$

$$(4) RI = IR, \text{ también } RR = RR$$

El anterior es un ejemplo de un grupo que es conmutativo y finito.

También estamos ante un grupo cuando consideramos el conjunto $\langle I, S \rangle$ donde S es una media vuelta alrededor de un punto O . Es, además de ser finito y conmutativo, un subconjunto de \mathbb{R} . Otro ejemplo de grupo es el conjunto compuesto por los números enteros, \mathbb{Z} . Ahí el elemento neutro es 0 y la operación binaria es la suma, y se tiene

- La suma de dos enteros es un entero
- La suma de un entero con el elemento identidad es él mismo.

Este es un grupo infinito y conmutativo.

De este conjunto se puede obtener un subconjunto con estructura de grupo, infinito y conmutativo; el formado por los números enteros pares. La suma de dos números pares es un número par; todo número par tiene un inverso que también es par.

Por lo dicho y de los ejemplos presentados se tiene que un conjunto, con estructura de grupo, puede ser -considerado el número de elementos que lo constituyen - finito o infinito Además en cuanto al hecho de la intercambiabilidad de los elementos que constituyen una determinada cadena pueden ser tanto conmutativo o no.

Capítulo 3.

LAS SIMETRÍAS DE UNA FIGURA PLANA Y SU GRUPO

3.1 La Simetría en una Figura Plana.

En el capítulo anterior se dió la definición de simetría bilateral o axial cuyo alcance es limitado para los propósitos del trabajo, debido a que no es la única forma bajo la cual una figura puede ser considerada simétrica. En lo que sigue presentaremos formas más amplias del concepto de simetría para una determinada figura plana con la cual lograremos la presentación de los grupos de simetría en el plano. Para que ello tenga un significado más concreto presentamos la siguiente definición:

Definición 3.1. Una figura plana, \mathcal{F} , se dice que es simétrica si existen isometrías, distintas de la identidad, que la dejan inmodificada aun cuando permuten sus partes; es decir, isometrías T tales que $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Teniendo en cuenta que cualquier isometría del plano es el resultado de una cadena de a lo sumo tres reflexiones, y

además que la simetría se relaciona con la presencia de isometrías que dejen inmodificada la figura, entonces representan una aplicación y una ampliación del uso de las reflexiones. También de la definición se deduce que una determinada figura plana se dirá que es asimétrica si no posee isometrías, fuera de la identidad, I , que la dejen inmodificada.

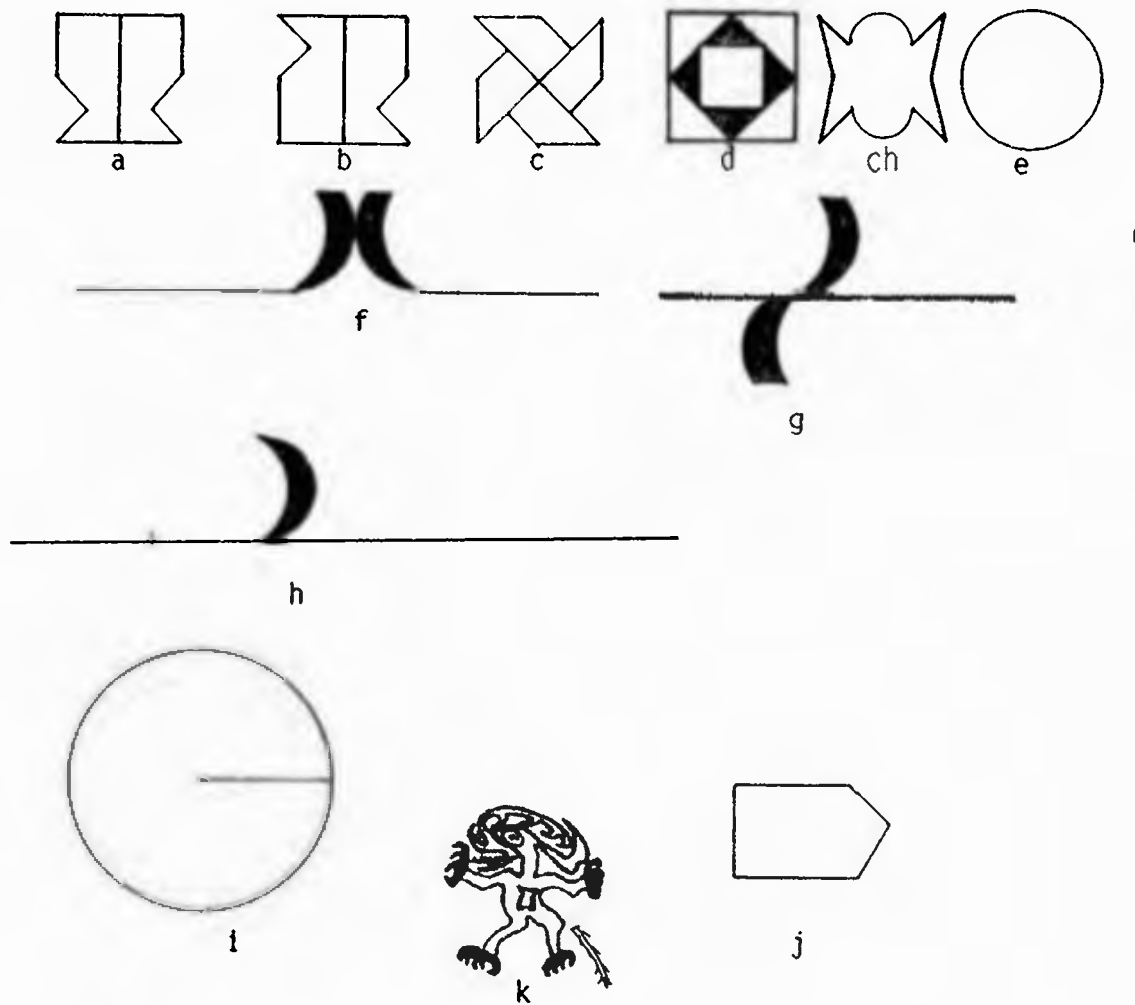
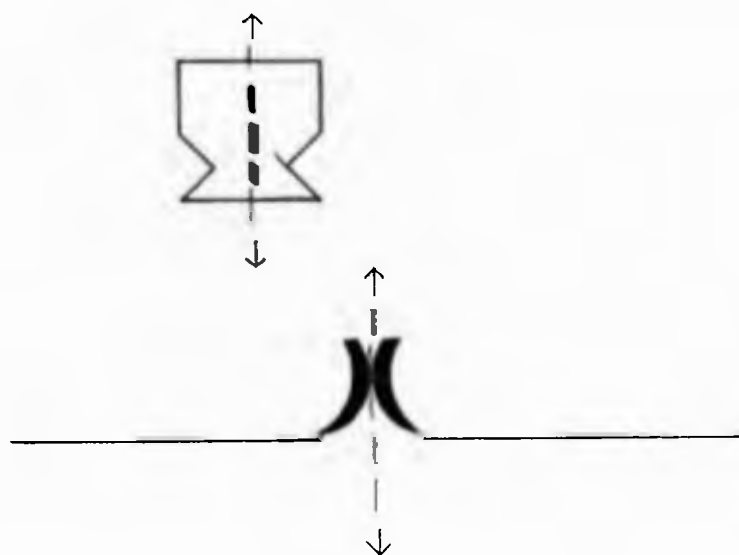


Fig 3.1. Ejemplos de figuras simétricas y asimétricas; a-g: figuras asimétricas, h-k: figuras simétricas.

Ejemplos de figuras simétricas y asimétricas se presentan a continuación. En algunas de esas figuras anteriores, es posible determinar por inspección cuales son las isometrías que las dejan inmodificadas; pero trabajemos más detenidamente sobre ellas para evidenciar cuales son :

Ejemplo 1.

Las figuras 3.1 a y 3.1 f, aquí reproducidas.



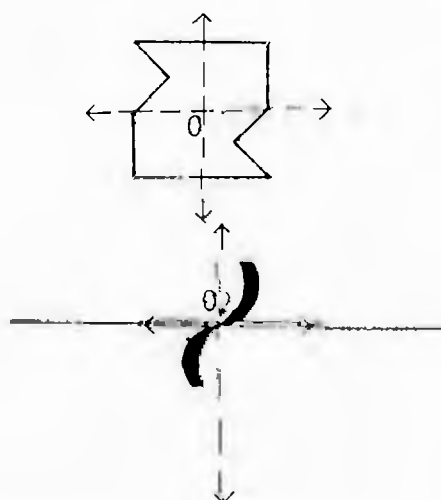
Las únicas isometrías que dejan inmodificadas a éstas figuras son las reflexiones cuyos ejes están indicados por una línea punteada. La diferencia entre estas dos figuras es que la primera de ellas es finita en el sentido de limitada y la segunda, al considerar que los extremos de las líneas se extienden indefinidamente, es infinita, en el sentido de ilimitada.

Los elementos de simetría que poseen son entonces, además

de la identidad, la reflexión R , la cual, como ya se mostró en el capítulo anterior, junto con I , conforman un grupo. Se presenta simetría axial también en la figura representada por las letras A , E , K , M , y otras más.

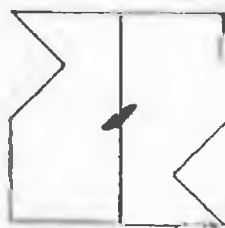
Ejemplo 2.

Las figuras 3.1.b y 3.1.g, aquí reproducidas:



Para estas figuras la isometría, además de I , que las deja inmodificada es una media vuelta alrededor del punto O . Tal como ya se mencionó antes, una media vuelta, alrededor de un punto determinado, puede lograrse como una cadena de dos reflexiones sobre ejes perpendiculares que se intersectan en el mencionado punto. También aquí, para las figuras representadas, una de ellas es de extensión finita (fig 3.1.b) y la otra (fig 3.1.g) de extensión infinita pero ambas tienen los mismos elementos de simetría: una media vuelta (giro de 180°) y la identidad, $(I, G_{180^\circ, p})$; no debe entenderse en la representación de las figuras anteriores,

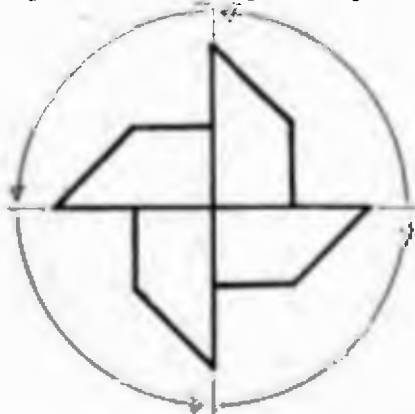
donde se han señalado dos ejes de reflexión, que la figura posee dos simetrías por reflexión; lo que ahí se intenta mostrar, de acuerdo a lo tratado en el capítulo anterior, es que dos reflexiones sucesivas, cuyos ejes son perpendiculares entre sí producen un giro de 180° con relación al punto definido por la intersección de tales ejes. Se acostumbra a representar esta media vuelta por el signo σ el cual se coloca en el punto de giro; así en el caso de la figura 3.1.b la representación es:



Es de notar que el conjunto de isometrías $(I, \sigma_{180^\circ, p})$ como se mencionó en la parte última del capítulo, posee una estructura de grupo. La figura de las siguientes letras N, S, Z también posee el mismo conjunto de isometrías ya indicado.

Ejemplo 3.

La figura 3.1.c, aquí representada



Las isometrías que dejan inmodificadas la figura son los giros de 90° , 180° , 270° y 360° (que reproduce la identidad) por lo que el conjunto de elementos de simetría es

$$\{ I, G_{90^\circ,0}, G_{180^\circ,0}, G_{270^\circ,0} \}.$$

Si para fines de facilitar la operación representamos a $G_{90^\circ,0}$ por S , ocurre que:

$$\begin{aligned} S &= G_{90^\circ,0} \\ SS &= S^2 = G_{180^\circ,0} \\ SSS &= S^3 = G_{270^\circ,0} \\ SSSS &= S^4 = G_{360^\circ,0} = I \end{aligned}$$

Observemos la forma como se comportan estas isometrías mediante la composición, para ello auxiliémonos de una tabla construida con una doble entrada y colocando en la casilla correspondiente el resultado de la composición

	I	S	$G_{180^\circ,0}$	$G_{270^\circ,0}$
I	I	S	$G_{180^\circ,0}$	$G_{270^\circ,0}$
S	S	$G_{180^\circ,0}$	$G_{270^\circ,0}$	I
$G_{180^\circ,0}$	$G_{180^\circ,0}$	$G_{270^\circ,0}$	I	S
$G_{270^\circ,0}$	$G_{270^\circ,0}$	I	S	$G_{180^\circ,0}$

Es posible observar cómo la composición de los elementos de simetría da como resultado elementos del mismo conjunto, con lo cual se cumple G_1 de la definición de grupo presentada en el capítulo anterior. Por estar incluida I y por ser

cada uno de esos elementos isometrías se cumplen también G_2 y G_3 . Observemos además que:

$$I = S^4 = S^3S = SS^3$$

De ahí que, por la unicidad del elemento inverso, se tiene:

$$S^{-1}S = I = SS^{-1}$$

Y también:

$$G_{270^\circ, 0} = S^3 = S^{-1}$$

con lo que se cumple G_4 y afirmamos que el conjunto

$$\langle I, S, G_{180^\circ, 0}, S^{-1} \rangle$$

posee estructura de grupo.

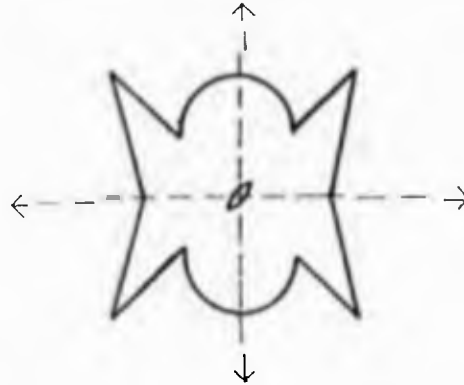
Se acostumbra a representar el giro sucesivo de 4 rotaciones de 90° cada uno, por el símbolo G_4 por lo que la figura 3.1.c se presenta como:



Tiene también el mismo grupo de simetrías la figura conocida como Cruz Gamada o Esvástica, G_4 , cuya popularidad contemporánea se debe al Tercer Reich alemán, aun cuando no le corresponde su invención como símbolo, la cual es muy antigua [Weyl, 1952; en *El Mundo de las Matemáticas* 4, 1983: 312]

Ejemplo 4:

La figura 3.1.ch representada aquí



Las isometrías que la dejan invariante son la reflexión R_1 , respecto al eje L_1 , la reflexión R_2 respecto al eje L_2 , perpendicular a L_1 , y un giro de 180° alrededor del punto O , de intersección de L_1 con L_2 , $G_{180^\circ, O} = R_1 R_2 = R_2 R_1$ (tal como ya se mostró anteriormente), y el conjunto de elementos de simetría es:

$$\langle I, R_1, R_2, G_{180^\circ, O} \rangle$$

y la tabla de composición para este caso es:

	I	R_1	R_2	$G_{180^\circ, O}$
I	I	R_1	R_2	$G_{180^\circ, O}$
R_1	R_1	I	$G_{180^\circ, O}$	R_2
R_2	R_2	$G_{180^\circ, O}$	I	R_1
$G_{180^\circ, O}$	$G_{180^\circ, O}$	R_2	R_1	I

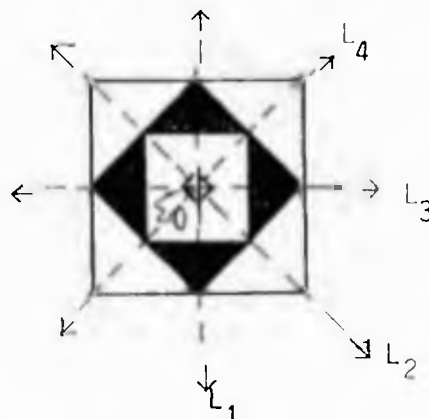
La composición de los elementos produce elementos del mismo conjunto; además en éste está incluida I; y cada uno de sus elementos es una isometría -las cuales cumplen la asociatividad- satisfaciendo así G_1 , G_2 y G_3 de la definición de grupo. Observese que:

$$(R_1)^2 = I, (R_2)^2 = I, (G_{180^\circ, O})^2 = (R_1 R_2)(R_2 R_1) = I$$

Esto significa que cada uno de ellos es la vez el inverso de sí mismo en la composición, y así se cumple G_4 y el conjunto $(I, R_1, R_2, G_{180^\circ, O})$ posee una estructura de grupo. Poseen el mismo conjunto de elementos de simetría las letras H, X.

Ejemplo 5:

La figura 3.1.d.



Esta figura posee los siguientes elementos de simetría: giros de 90° , como la figura 3.1.c, y reflexiones sobre los ejes L_1, L_2, L_3, L_4 ; siendo perpendiculares entre sí L_1 y L_3, L_2 y L_4 , habiendo entre dos ejes sucesivos un ángulo de 45° . El conjunto de los elementos de simetría es $(I, R_1, R_2, R_3, R_4, G_{90^\circ, O}, G_{180^\circ, O}, G_{270^\circ, O})$. Con estos elementos se

construye la tabla que posee 64 casillas que son completadas con los resultados de la composición y ocurre que también es te conjunto posee estructura de grupo.

Ejemplo 6:

La figura 3.1.e



Esta figura posee como elementos de simetría a todas la reflexiones que en su eje contengan al centro O ; también es elemento de simetría cualquier rotación que tenga por punto fijo el centro de la circunferencia; por lo tanto el conjunto de los elementos de simetría es infinito aun cuando la figura es finita.

Estos ejemplos nos han permitido visualizar que la simetría de una figura no es solamente la simetría bilateral sino que también se presenta de otras maneras, las cuales esencialmente son isometrías. Las figuras 3.1.e y 3.1.i contienen ambas una circunferencia pero por la introducción de un radio en la segunda, ésta se convierte en asimétrica y perdiendo toda la riqueza de simetrías infinitas que posee la primera de ellas.

A continuación mencionamos algunas observaciones hechas después del análisis de los ejemplos hasta aquí presentados:

(1) Todas las figuras poseen en común el elemento identidad dentro de su conjunto de simetrías; aún aquellos que son asimétricos.

(2) Figuras diferentes poseen el mismo tipo de elementos de simetría; así las figuras 3.1.a y 3.1.f poseen los mismos tipos de simetrías aun cuando la primera es finita y la otra infinita; igual ocurre con el par de figuras 3.1.b y 3.1.g, una muestra más de lo anterior es el caso de las figuras asimétricas, donde figuras muy diferentes entre si, todas poseen igual conjunto de simetrías, compuesto por la identidad únicamente.

(3) Tal como es posible observar con las figuras 3.1.e y 3.1.h. una de ellas es finita con infinitas simetrías mientras que la otra (fig. 3.1.h) es infinita y totalmente asimétrica.

(4) Para los elementos de simetría ocurre que en diferentes oportunidades al efectuar su comparación un determinado número de veces se obtiene la identidad, dicho de otra manera, al elevarlo a un determinado exponente se tiene la identidad; al menor de estos exponentes se le da el nombre de orden o período. Esta observación nos permite presentar la siguiente definición:

Definición 3.2.: Dada una isometría S se puede formar la isometría

$$S^n = \underbrace{S \dots S}_{\leftarrow n \text{ veces} \rightarrow} ;$$

al menor exponente n , si existe tal, con el que se logra que

$$S^n = I$$

se le llama ORDEN o PERIODO de S y se designa por $O(S)$.

Para el ejemplo 3, que ilustra la figura 3.1.c y su conjunto de elementos de simetría es:

$$\{ I, G_{90^\circ, 0}, G_{180^\circ, 0}, G_{270^\circ, 0} \}$$

Se observa que:

$$\begin{array}{ll} (G_{90^\circ, 0})^4 = I & \text{entonces } O(G_{90^\circ, 0}) = 4 \\ (G_{180^\circ, 0})^2 = I & O(G_{180^\circ, 0}) = 2 \\ (G_{270^\circ, 0})^4 = I & O(G_{270^\circ, 0}) = 4 \end{array}$$

Para el ejemplo 4, que ilustra la figura 3.1.ch y su conjunto de elementos de simetría $\{ I, R_1, R_2, G_{180^\circ, 0} \}$

$$\begin{array}{ll} (R_1)^2 = I & \text{entonces } O(R_1) = 2 \\ (R_2)^2 = I & O(R_2) = 2 \\ (G_{180^\circ, 0})^2 = I & O(G_{180^\circ, 0}) = 2 \end{array}$$

Existen simetrías a las que no es posible determinarles su período con la misma facilidad que se ha hecho con los ejemplos anteriores; este es el caso de las traslaciones, que no conservan ningún punto fijo, por lo tanto $T^n \neq I$ para todo número entero exceptuando el cero ($T^n \neq I, \forall n \in \mathbb{Z}^*$); se entiende que $T^{-n} = (T^{-1})^n$. Cuando esa situación se presenta"

se dice que tal isometría posee un período infinito.

(5) Para las figuras 3.1.a y 3.1.b, sus respectivos conjuntos de elementos de simetría tienen el mismo número de elementos (dos) y el período de éstos es el mismo, dos. Por otro lado los conjuntos correspondientes a las figuras 3.1.c y 3.1.ch también tienen igual número de elementos; pero en el primero de ellos existen elementos de período dos y elementos de período cuatro mientras que en el segundo solo existen de período dos. Sobre el significado de esta semejanza para el primer par y la diferencia encontrada en el segundo volveremos más adelante.

(6) El conjunto de elementos de simetría y las respectivas composiciones correspondientes a la figura 3.1.c se obtienen conociendo la rotación de 90° , alrededor de O ; mientras que para el conjunto de la figura 3.1.ch se necesita conocer R_1 y R_2 (de ellas se obtiene $G_{180^\circ, O}$). Es necesario tener en cuenta cuales son los *elementos generadores* del grupo. La utilidad de este conocimiento se aprecia mejor cuando los elementos de simetría correspondiente a una determinada figura son muy numerosos, o infinitos, y construir una tabla para su composición resulta muy difícil o imposible. También sobre esto volveremos.

Una denominación que adoptaremos en lo que sigue, por lo útil que resulta es en llamar simplemente "Simetría de la figura" a lo que hasta el momento hemos venido llamando "Conjunto de los elementos de simetría de la figura" con lo

que connotabamos a todas las isometrías que dejan invariante a la figura en cuestión.

En algunos de los ejemplos hemos encontrado que las simetrías tienen estructura de grupo, en otros casos hemos encontrado que estas ya las habíamos clasificado como grupos anteriormente. ¿Pero es posible que todas las simetrías para una figura cualquiera tengan esta estructura de grupo?. A esta pregunta damos respuesta en lo que sigue.

3.2 El Grupo de Simetrías Correspondiente a una Figura

Plana.

Para dar una respuesta a la pregunta anterior y con el fin de formalizar nuestro trabajo, logrando una mejor visión de las simetrías, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 3.1: Dada una figura plana \mathcal{F} , el conjunto de sus simetrías es un grupo para la composición de isometrías.

Demostración: Sea \mathcal{F} una figura plana y sean T , S , y M isometrías tales que $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $S(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $M(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Entonces:

(1) Efectuando la composición de T con S se tiene:

$$\begin{aligned} (ST)(\mathcal{F}) &= S(T(\mathcal{F})) \\ &= S(\mathcal{F}) \\ &= \mathcal{F} \end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned} (TS)(\mathcal{F}) &= T(S(\mathcal{F})) \\ &= T(\mathcal{F}) \\ &= \mathcal{F} \end{aligned}$$

con lo cual se cumple G_1 de la definición de grupo.

$$\begin{aligned} (2) \quad T(SM)(\mathcal{F}) &= T(S(M(\mathcal{F}))) \\ &= T(S(\mathcal{F})) \\ &= T(\mathcal{F}) \\ &= TS(\mathcal{F}) \\ &= TS(M(\mathcal{F})) \\ &= TS(M)(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

La asociatividad se deriva del hecho de que toda simetría ya es una isometría y éstas son asociativas, con esto se cumple G_2 de la definición de grupo.

(3) Como ya se ha dicho I pertenece a toda figura plana y como:

$$I(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

y se cumple G_3 .

(4) Sea T una simetría tal que $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ entonces

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mathcal{F}) &= T^{-1}(T(\mathcal{F})) \\ &= T^{-1}T(\mathcal{F}) \\ &= I(\mathcal{F}) \\ &= \mathcal{F} \end{aligned}$$

Y con esto se cumple G_4 . Utilizaremos el símbolo $G(\mathcal{F})$ para representar al grupo de simetrías de la figura \mathcal{F} .



A continuación presentamos una serie de figuras correspondientes a la cerámica policroma de la región central de Panamá; en su mayoría son piezas que fueron encontradas en el lugar arqueológico conocido como Sitio Conte (PN-5), se hace para ejemplificar algunos grupos de simetría y para presentar una pequeña muestra de los bellos diseños contenidos en esta cerámica policroma, entre cuyos méritos está no sólo sus ricos diseños sino también su fino acabado [Cooke, 1976: 127]. Estos ejemplos se presentan siguiendo un orden ascendente en cuanto al número de elementos de su grupo de simetría; ya que cabe decir que la figura es más regular cuanto más elementos contenga su grupo de simetrías asociado [Alsina y Trillas, 1984; 145].

Ejemplo 7:

Los diseños contenidos en figura 3.2, así como los de las figuras 3.1.h.k; el trazo de las letras R, G, F, J, Q y otras. Todas son asimétricas, o sea que su grupo de simetrías está formado por la identidad, $G(\mathcal{F}) = \langle I \rangle$, a este grupo se le da el nombre de grupo cíclico de orden uno [Coxeter, 1971: 57]. Sobre el asunto de la nomenclatura, ésta se hará más comprensible cuando más adelante se trate con detalle lo concerniente a los grupos cíclicos o de Leonardo; como un prelude a tal tratamiento utilizamos desde esta parte tales nombres.



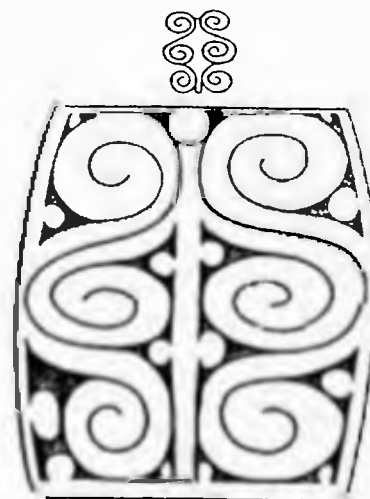
V período, Estilo Conte
Lothrop 1942 fig.81 (p.49)

V período, Estilo Conte
Lothrop 1942, fig. 85 (p.50)

Fig. 3.2 Diseños con grupo de simetría C_1

Ejemplo 8:

Los diseños presentados en la figura 3.3, además de los contenidos en la figura 3.1 a 3.1.f; la figura de las letras E, A, T, y otras; todas ellas poseen el mismo



VI período, Estilo Macaracas
Lothrop 1942, fig.172,
detalle(p.95)

V período, Estilo Conte
Lothrop 1942, fig.117 (p.68)

Fig.3.3 Diseños con grupo de simetría D_1

mo grupo de simetría. Este grupo está formado por la identidad y una reflexión, posee como puntos fijos todos aquellos puntos contenidos en el eje de reflexión. Se conoce como grupo diédrico de orden dos (D_1); el uso que en esta oportunidad hacemos del vocablo "diédrico" formado por raíces griegas, resulta equivalente a "bilateral", formado por raíces latinas.

Ejemplo 9:

Los diseños de la figura 3.4, además de los de las figuras 3.1.b.g; la figura de las letras N, Z, S; todos ellos poseen como grupo de simetrías el compuesto por la identidad, I, y una media vuelta. Esta isometría, el giro de 180° , es de período dos; pero conserva un solo punto fijo;



VII período Estilo Parita
Lothrop 1942, fig. 480.a,
detalle(p.245)

V período, Estilo Conte
Lothrop 1942. fig.86.b (p.51)

Fig. 3.4 Diseños con grupo de simetría C_2 .

aquel donde los dos ejes de reflexión que componen la media vuelta -perpendiculares entre sí- se intersectan. De la idea de giro, con un punto fijo, se puede pasar por asociaciones sucesivas [Eco, 1985: 222] a la idea de circunferencia, círculo, ciclo; y de ahí que estos grupos que además de la identidad, solo poseen isometrías que conservan un solo punto fijo, el centro de giro, se conocen como grupos cíclicos; en este caso es el grupo cíclico de orden dos (C_2).

Ejemplo 10:

Los diseños de la figura 3.5, también en el contenido en la figura 3.1.c, la figura de la cruz gamada, poseen como grupo de simetría $\langle I, S, S^2, S^{-1} \rangle$, donde



V período, Estilo Conte
Lothrop 1942, fig.143 (p.80)

V período, Estilo Conte
Lothrop 1942, fig. 44.b
(p.29)

Fig. 3.5 Diseños con grupo de simetría C_4 .

$S = G_{90^\circ, 0}$ y recibe el nombre de grupo cíclico de orden cuatro, C_4 . Tal como ya se mencionó el mayor período de sus elementos es cuatro, giros sucesivos de 90° cada uno para lograr regresar a su posición inicial.

Ejemplo 11:

Los diseños de las figuras 3.6 y 3.1.ch; la figura de las letras H, X. Su grupo de simetrías es el grupo diédrico de orden cuatro (D_2), también se conoce como grupo del rectángulo; pues todo rectángulo, donde los lados perpendiculares no tengan igual longitud, lo posee.



IV período, Estilo Aristide
var. Escotá, Lothrop 1942,
fig. 228(p.127)

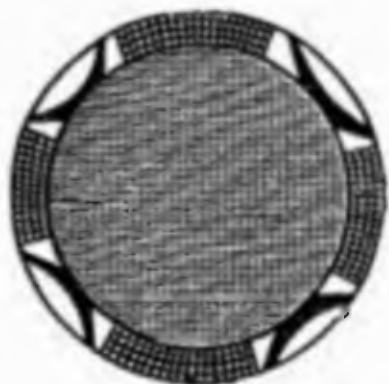


V período, Estilo Conte
Lothrop 1942, fig. 55(p.35)

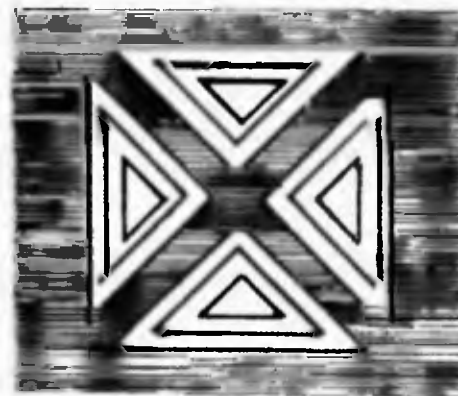
Fig. 3.6. Diseños con grupo de simetría D_2

Ejemplo 12:

Los diseños de las figuras 3.7, y 3.1.d así como la del cuadrado, su grupo de simetrías es el D_4 , grupo diédrico de orden ocho.



IV período Estilo Arístide
var. Girón, Lothrop 1942,
fig. 234.a (p.126)



IV período Estilo Arístide
Lothrop 1942, fig. 295.b,
detalle (p.150).

Fig. 3.7. Diseños con grupo de simetría D_4 .

Con los ejemplos anteriores y, especialmente con las figuras, se quiere evidenciar que la aplicación de tales conceptos no es, ni ha sido, un hecho alejado de la actividad cotidiana sino que desde tiempos pretéritos se venía ejecutando por los pobladores de estas regiones.

Tratemos ahora, a la luz del concepto de *grupo de simetrías* de una figura plana \mathcal{F} , lo apuntado en la observación (6) relativo a los generadores. En aquella oportunidad, como aún no habíamos demostrado que cada figura posee un grupo de simetrías, no era posible presentar con propiedad este asunto; no se disponía de una idea exacta de cómo están relacionados los elementos de simetría. Así que, ahora, bajo esta nueva perspectiva, sí podemos y para ello presentamos la siguiente definición.

Definición 3.3. Sea G un grupo de isometrías, entonces un conjunto de elementos H resulta ser el *conjunto de genera*¹

donos de G si y solo si todo elemento de G se obtiene como una cadena finita y arbitraria de elementos de H .

Esta definición esta basada fundamentalmente en la presentada por Lindstrum [1967: 49]. A este conjunto de generadores o sistema de generadores del grupo G se conoce también, llanamente, como los *generadores* de tal grupo; para familiarizarnos con el significado de la definición anterior consideremos algunos de los grupos obtenidos en los ejemplos anteriores. Para evitar confusiones por el aparecimiento repentino de vocablos cargados de significado específico daremos una definición para ORDEN de un grupo; también para "definición abstracta" de un grupo, esta última será una definición no rigurosa pero sí útil.

Definición 3.4. Dado un grupo de isometrías, G ; al número de elementos que lo componen, el cardinal de los elementos de G , se llama ORDEN del grupo G y se denota por $|G|$.

En cuanto a la otra definición, vale decir que en la forma como la utilizaremos puede expresarse como:

Definición 3.5. Dado un conjunto H de generadores de un grupo G , llamamos *definición abstracta* de G a aquellas operaciones de composición mínimas entre los elementos de H , que expresan la forma en que se puede lograr la genera-

ción de los restantes elementos de G .

Volvemos ahora a los ejemplos.

En el grupo diédrico de orden 2, D_1 , compuesto por una reflexión y la identidad, $D_1 = \langle I, R \rangle$ resulta que está generado por R ; donde $R^2 = I$ o $R = R^{-1}$ completa la definición abstracta. El grupo cíclico de orden 2, C_2 , compuesto por un giro de 180° alrededor de un punto determinado, representado genéricamente por O , y la identidad, $C_2 = \langle I, G_{180^\circ, O} \rangle$ está generado por $G_{180^\circ, O}$ y la relación:

$$\langle G_{180^\circ, O} \rangle^2 = I \text{ o } G_{180^\circ, O} = G_{180^\circ, O}^{-1}$$

completa su definición abstracta. El grupo cíclico de orden 3, C_3 lo componen giros de 120° , 240° y 360° ,

$$C_3 = \langle G_{120^\circ, O}, G_{2(120^\circ), O}, G_{3(120^\circ), O} = I \rangle$$

donde si representamos transitoriamente

$$G_{120^\circ, O} = S,$$

con el propósito de facilitar la comprensión de cómo opera la composición, entonces la relación:

$$S^3 = I \text{ o } S^2 = S^{-1}$$

es la definición abstracta de C_3 , el grupo de simetrías del triángulo equilátero.

El grupo diédrico de orden 4, D_2 , está generado por 2 reflexiones,

$$D_2 = \langle I, R_1, R_2, G_{180^\circ, O} \rangle$$

y se define en forma abstracta por:

$$R_1^2 = I = R_2^2, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1;$$

los generadores del grupo son R_1 y R_2 .

Otra alternativa de definición abstracta es:

$$R_1^2 = I = R_2^2, \quad (R_1 R_2)^2 = I,$$

de donde fácilmente se deduce:

$$R_1 R_2 = R_2 R_1.$$

El grupo cíclico de orden 4, C_4 , está generado por un giro de 90° , alrededor de O ; si representamos

$$G_{90^\circ, O} = S,$$

ocurre que se define en forma abstracta por:

$$S^4 = I \quad \text{o} \quad S^3 = S^{-1}$$

El grupo diédrico de orden 8, el grupo de simetrías del cuadrado, está generado por dos reflexiones, cuyos ejes son contiguos, sean R_1 y R_2 ; y la definición abstracta se completa por las relaciones

$$R_1^2 = I = R_2^2, \quad (R_1 R_2)^4 = I$$

Aquí el ángulo comprendido entre los dos ejes de reflexión contiguos es de 45° y de ahí que

$$R_1 R_2 = G_{90^\circ, O} = S$$

y consecuentemente $(R_1 R_2)^4 = I$ lleva a obtener

$$S^4 = I, \quad S^3 = S^{-1}$$

El grupo de simetrías perteneciente a la circunferencia se conoce como D_∞ , es un grupo infinito y está generado por todas las reflexiones que contengan a su centro en el eje de reflexión; el grupo formado por todas las isometrías, al que hemos llamado \mathbb{M} , tiene como generadores a todas las reflexiones y también es infinito. Estos dos últimos grupos, a,

pesar de no ser posible expresar lo que constituye su definición abstracta, se observa esta diferencia fundamental: el primero es un grupo infinito con un punto fijo y el otro infinito, no posee tal punto fijo ya que en él están incluidas las reflexiones que ocurren en ejes paralelos y cuya composición produce las traslaciones.

Con las definiciones y ejemplos anteriores es comprensible que D_2 sea un grupo de orden 4 pues ocurre que:

$$D_2 = \langle I, R_1, R_2, R_1 R_2 \rangle,$$

y de ahí que $|D_2| = 4$; también se comprende que D_∞ y \mathbb{M} sea infinito. En oportunidades ocurre que la presentación de las condiciones de composición que hemos llamado **definición abstracta**, no es única, admite variaciones que en el fondo son equivalentes.

Para C_4 se dijo que está generado por

$$S = G_{90^\circ, 0}$$

entonces su definición abstracta es:

$$S^4 = I$$

pero también es equivalente a presentar como tal a

$$S^3 = S^{-1}$$

pues con ello decimos que

$$S^3 S = S^{-1} S = I$$

$$\text{o } S S^3 = S S^{-1} = I$$

Por la definición 3.2, de período, sabemos que están contenidos S, S^2, S^3 y $S^4 = I$, los cuales, en efecto, son sus elementos; por la definición 3.4 se tiene que $|C_4| = 4$ y por

lo tanto resulta válido y comprensible que se afirme que C_4 es el grupo cíclico de orden 4.

En la parte final volvamos a un aspecto que ha sido observado en todo el capítulo y que está contenido en la observación 5; en ella se dice -con la notación que hoy dominamos- que el grupo cíclico C_2 y el diedral D_1 tienen cada uno, dos elementos; la identidad y un giro de 180° , la identidad y una reflexión, el otro; que el período de estos elementos, diferentes de la identidad, es 2. También que D_2 y C_4 tienen ambos cuatro elementos. Todos los de D_2 son de período 2; los de C_4 tienen período 2 y 4. Para comprender mejor la semejanza de estructura en el primer caso y diferencia en el otro presentamos el siguiente resultado como una definición.

Definición 3.6. Sean G y G' dos grupos y una función de G en G' que cumple las condiciones siguientes: Sean g, g_1, g_2 elementos de G ; además sea e el elemento identidad del grupo G y e' el respectivo de G' , entonces:

$$I1.- \quad h(g_1 g_2) = h(g_1) h(g_2)$$

$$I2.- \quad h(e) = e'$$

$$I3.- \quad h(g_1) = h(g_2) \text{ solamente si } g_1 = g_2$$

$$I4.- \quad \text{Para } g' \text{ perteneciente a } G' \text{ siempre existe } g, \text{ en } G, \text{ tal que se cumple } h(g) = g'$$

Se dice entonces que h es un isomorfismo entre G y G' .

También se dice que G y G' son isomorfos por h , y se representa por

$$G \sim G'$$

Considérese la siguiente propiedad:

Sea $g, g^{-1} \in G$ entonces:

$$\lambda(g^{-1}) = \lambda(g)^{-1}$$

En efecto, como $\lambda(e) = e'$ (I2)

de ahí:

$$\lambda(gg^{-1}) = e',$$

$$\lambda(gg^{-1}) = \lambda(g) \lambda(g^{-1}) ; (I1).$$

pero

$$e' = \lambda(g) [\lambda(g)]^{-1} \quad (\text{definición de inverso en } G');$$

se tiene entonces:

$$\lambda(g) \lambda(g^{-1}) = \lambda(g) \lambda(g)^{-1}$$

y por la unicidad del inverso de un elemento en G' se concluye:

$$\lambda(g^{-1}) = \lambda(g)^{-1}.$$



Todo lo anterior nos dice que un isomorfismo existente entre dos grupos garantiza que estos poseen la misma estructura; de otra manera, son estructuralmente idénticos; es decir, tienen el mismo número de elementos, existe una correspondencia única y directa entre el elemento identidad de uno de los grupos con el del otro, y el período de un elemento es igual al período de su correspondiente en el otro grupo; al elemento inverso en un grupo están asociado en forma única y directa el elemento inverso de aquel con el que están asociados los elementos directos.

Volviendo al caso de los grupos C_n y D_n ; podemos afirmar,

ahora que son isomorfos, que en forma abstracta son idénticos. Pero C_2 está constituido por un giro de 180° y D_1 por una reflexión, además de la identidad en ambos casos; poseen período 2, pero como un giro de 180° no es igual a una reflexión alrededor de un eje específico, para el asunto de identidad abstracta diremos que C_2 y D_1 son diferentes representaciones geométricas de un mismo grupo abstracto de orden 2 [Coxeter 1971: 57] que está definido por $T^2 = I$, donde para C_2 , T representa el giro de 180° y para D_1 es la reflexión.

En el caso de los grupos D_2 y C_4 , estos no son isomorfos, no tienen la misma estructura, los elementos de D_2 , a excepción de la identidad, son de período 2; C_4 tiene dos de período 4 y uno de período 2. Otra forma de decirlo es que tienen diferentes "tablas de composición", o que la definición abstracta de uno difiere de la del otro.

Para un determinado grupo abstracto, G , cualquier grupo G' que le es isomorfo, se dice que es una realización de ese grupo abstracto. Así, si para la figura 3.5.a representamos su grupo de simetrías como:

$$G' = \langle I, R'_1, R'_2, S' \rangle,$$

y tenemos el grupo:

$$D_2 = \langle I, R_1, R_2, R_1R_2 \rangle,$$

al definir la función f de D_2 en G' que tenga:

$$f(I) = I, f(R_1) = R'_1, f(R_2) = R'_2, f(R_1R_2) = S',$$

vemos que se cumplen todas las condiciones de la definición.

3.6 y podemos afirmar que D_2 y G' son isomorfos; además decimos que G' es una realización de D_2 .

Estamos preparados para tratar en los capítulos siguientes con diferentes categorías de los grupos de simetría de las figuras planas, como parte importante de nuestro trabajo; para llegar a ellos hagámoslo recogiendo algunos de los resultados logrados en todo lo tratado en este capítulo.

- 1.- A toda figura plana le corresponde un grupo de simetrías.
- 2.- Las dimensiones de una figura no determina la cantidad de elementos de simetría que posee su correspondiente grupo. Anotado en Observación 2.
- 3.- Los grupos de simetría de una figura plana son finitos, los del cuadrado, el rectángulo, o infinitos como es el de las traslaciones o el del círculo.
- 4.- Es posible para los grupos finitos determinar un conjunto H generadores, con los cuales lograr la definición abstracta del mismo.
- 5.- Algunos grupos son isomorfos entre sí.
- 6.- Figuras planas muy diferentes entre sí vienen a ser realizaciones de un mismo grupo abstracto.
- 7.- Para un determinado grupo abstracto es posible encontrar otro grupo que corresponda a una realización concreta del mismo.

Capítulo 4

GRUPOS PUNTUALES O DE LEONARDO

4.1 Generalidades.

Los grupos de simetría que pueden ser clasificados como de Leonardo constituyen una de las tres categorías de grupos de simetría que utilizaremos para clasificar los diseños contenidos en la cerámica pintada de la región central de Panamá. En el desarrollo de este capítulo presentamos primero una clasificación de los grupos de simetría de los polígonos regulares, a continuación tratamos lo relativo a los grupos de Leonardo, relacionándolos con los grupos de simetría de los polígonos y luego daremos otros ejemplos -realizaciones- de estos grupos abstractos en la cerámica de la región central.

4.2 Polígonos Regulares.

En muchas ocasiones se escucha, se trabaja, con lo que llamamos polígonos regulares; ésta es una más de esas oportunidades y para uniformizar la idea de tales figuras geométricas planas presentamos una definición que nos será útil

en el trabajo que a continuación haremos, determinando los grupos de simetría puntuales de una figura plana.

Definición 4.1 Un polígono regular de n lados, $n \geq 3$, es la figura convexa determinada por la sucesión de puntos P_1, P_2, \dots, P_n , diferentes entre sí, junto con los segmentos:

$$\overline{P_i P_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{y} \quad \overline{P_n P_1}, \quad \text{que constituye}$$

los lados, tal que

$$|\overline{P_1 P_2}| = |\overline{P_2 P_3}| = \dots = |\overline{P_{n-1} P_n}| = |\overline{P_n P_1}|.$$

||

Un Polígono regular cumple con la siguiente característica: si P y Q son dos puntos distintos cualesquiera pertenecientes a un mismo lado entonces el polígono queda completamente contenido en uno solo de los dos semiplanos definidos por la línea recta \overleftrightarrow{PQ} . Para determinar la forma de construcción de estos polígonos hagamos eco de lo expresado por Perdoel(1979: 250): "Nuestros polígonos regulares tienen lados y ángulos iguales y sus vértices están sobre un círculo y existe otro que toca los lados. Queda por tanto en evidencia que la construcción de un polígono regular equivale a dividir la circunferencia total de un círculo en n partes iguales".

Se llama ángulo central al ángulo descrito por el centro y dos vértices consecutivos, por lo que en un polígono regular existen n ángulos centrales. En la figura 4.1 se presen-

||

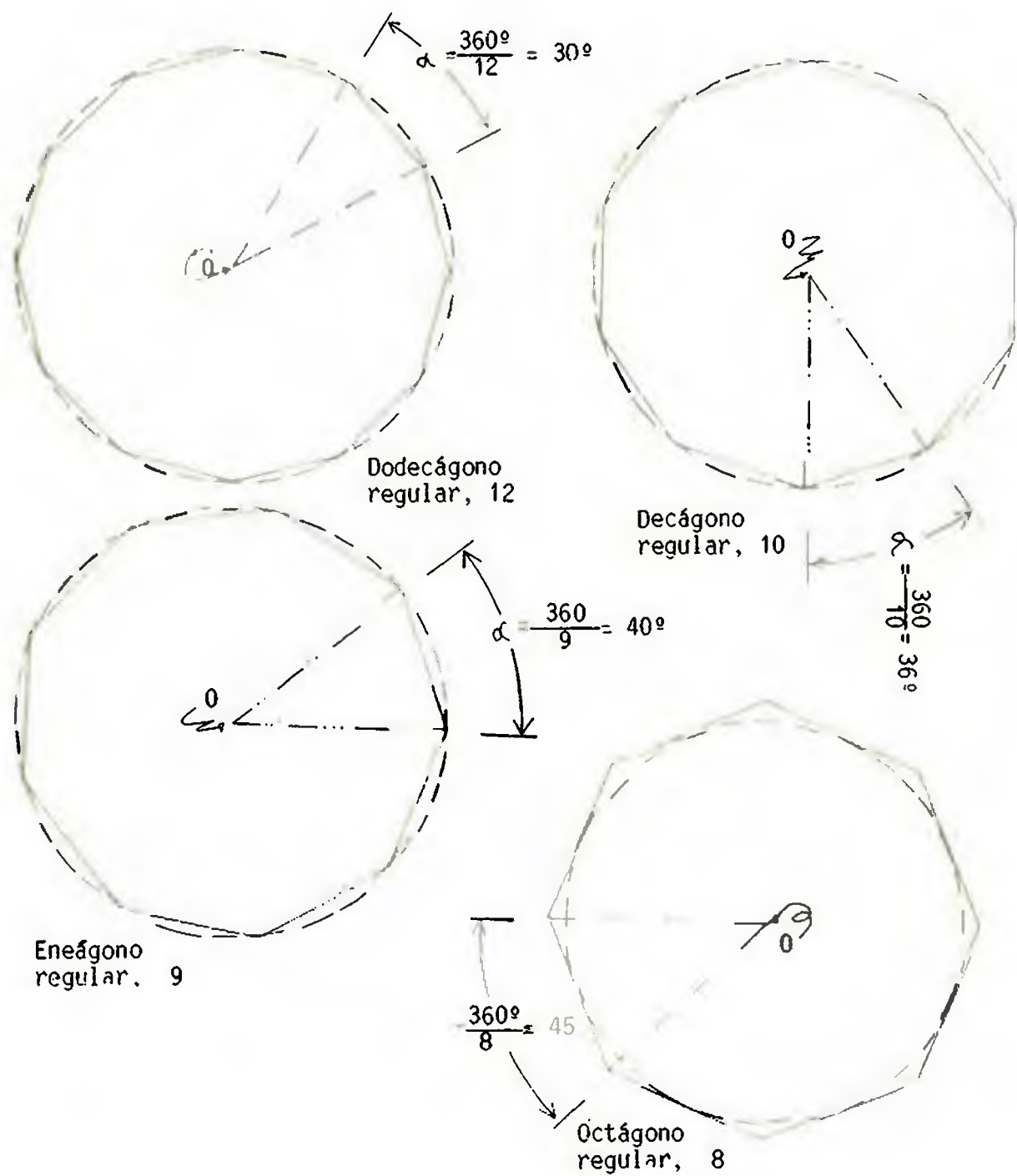


Fig. 4.1. Ejemplos de polígonos regulares, mostrando la circunferencia que contiene a los vértices o la que toca los lados, mostrando además el ángulo central.

tan varios polígonos regulares mostrando la circunferencia que contiene sus vértices, la que toca sus lados, además de indicar su ángulo central. Utilizaremos la simbología empleada por Coxeter [1971: 51] para representar un polígono regular de n lados, n -ágono regular por $\langle n \rangle$, indicando el cardinal encerrado entre paréntesis; se emplea también, usualmente, una letra P mayúscula con el cardinal del número de lados como subíndice, pero tal símbolo ya lo usamos para indicar los vértices; así que para evitar confusiones de cuando P_n significa vértice n -ésimo o un n -ágono regular preferimos usar los signos mencionados, con representación y significado diferente. En la tabla 4.1 presentamos una cantidad de nombres de polígonos regulares, indicando el número de lados y el valor de su ángulo central, comienza con el polígono regular de menor número de lados, el triángulo equilátero; aun cuando algunos autores [*idem*: 63] opinan que en ocasiones es recomendable comenzar la consideración de los polígonos regulares con el dígono, $\langle 2 \rangle$, aunque sus dos lados coinciden, su representación es un segmento de línea recta indicando el punto medio como centro de la circunferencia que contiene sus vértices, los extremos del segmento, que en ese caso es un diámetro.

Cada par de vértices consecutivos determinan los puntos extremos de uno de los lados del polígono regular; ocurre que estos vértices pertenecen a una circunferencia de centro O ; así que se definen n triángulos isósceles, cuya base la

Símbolo	Nombre del polígono	Número de lados	Valor del áng. central
(3)	Triángulo Equilátero	3	120°
(4)	Cuadrado	4	90°
(5)	Pentágono Regular	5	72°
(6)	Hexágono Regular	6	60°
(7)	Heptágono Regular	7	51°25'42 $\frac{6''}{7}$
(8)	Octógono Regular	8	45°
(9)	Eneágono Regular	9	40°
(10)	Decágono Regular	10	36°
(11)	Endecágono Regular	11	32°43'38 $\frac{2''}{11}$
(12)	Dodecágono Regular	12	30°
(15)	Pentadecágono Regular	15	24°

Tabla 4.1. Símbolos, nombre y valor del ángulo central de algunos polígonos regulares.

forma el respectivo lado del polígono y los dos restantes son los radios trazados desde el centro o hasta cada uno de los extremos del mencionado lado que sirve de base. Tales triángulos son congruentes entre sí y el ángulo central mide $\frac{360^\circ}{n}$ por lo que el polígono regular en consideración se mantiene inalterado por una rotación con centro en O y giro $\frac{360^\circ}{n}$. Sea tal rotación $S = G_{(360^\circ/n), O}$ la cual por dejar inalterado a ese polígono regular es una isometría para el mismo; tal como ya se vió en otros ejemplos anteriores, también son isometrías

$$S^k = G_{k(360^\circ/n), O}$$

y por ser una partición regular y finita de la circunferencia se tiene

$$S^n = G_{n(360^\circ/n), 0} = G_{360^\circ, 0} = I.$$

Lo anterior evidencia el hecho de que el período de S es igual al número de lados del polígono regular. Esto es lo que conocemos como grupo cíclico de orden n , C_n . En el caso de los polígonos regulares $\{n\}$ para $n \geq 3$.

$$C_n = (S, S^2, S^3, \dots, S^n), \quad |C_n| = n$$

Tal como fue descrito en el capítulo 2, una rotación se logra como resultado de la composición de dos reflexiones cuyos ejes se intersectan; en el caso de los polígonos regulares este punto es el centro de la circunferencia, O . Este ángulo de rotación es de valor el doble que el contenido entre los dos ejes de reflexión que la generan; entonces si el ángulo de la rotación S es $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ocurre que el valor del ángulo descrito por los dos ejes de reflexión que la generan es $\frac{1}{2} \alpha$, donde:

$$\frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) = \frac{180^\circ}{n}$$

Estas reflexiones cuando se trata de un polígono regular con un número impar de lados ocurre que para cada una de ellas, el correspondiente eje de reflexión (que para el caso es un eje de simetría, pues tal reflexión deja invariante al polígono en cuestión) pasa por uno de los vértices, el centro de la circunferencia que los contiene y corta al lado opuesto en su punto medio; por lo que se concluye que si tal polígono regular $\{n\}$ tiene n vértices, solo tendrá n refle-

xiones, que son simetrías y que a su vez generan n rotaciones. Cuando tal polígono tiene un número par de lados, la mitad de los ejes de reflexión (de simetría) unen los pares de vértices opuestos, como el polígono tiene n vértices y se unen pares de ellos; tales ejes de reflexión son $\frac{1}{2}n$. Los restantes bisectan los pares de lados opuestos (que son paralelos) y si este polígono regular tiene n lados y son bisectados en pares, tales ejes de reflexión también son $\frac{1}{2}n$; por lo que también aquí el número total de reflexiones es n , como los vértices, los lados, ángulos centrales, las rotaciones. Este resultado está en consonancia con el material presentado, especialmente en el capítulo 2, en el que se decía que todas las isometrías (y las simetrías son isometrías) están generadas por reflexiones. Lo dicho en este párrafo está mostrado gráficamente en los polígonos regulares de la figura 4.2.

El total de las simetrías, que forman un grupo, para un polígono regular (n) está constituido por n rotaciones, de ángulo de giro $\frac{360^\circ}{n}$, alrededor de O , y n reflexiones que contienen a O en su eje. Este grupo se conoce como grupo diédrico, D_n , de orden $2n$.

$$|D_n| = 2n = n \text{ reflexiones} + n \text{ rotaciones}$$

El grupo D_n incluye todas las simetrías correspondientes a C_n ; dicho de forma más técnica, C_n es un subgrupo de D_n .

La figura 4.3 ilustra el proceso como opera el grupo C_n generado por $S = \theta_{(360^\circ/n), O}$, con definición abstracta: "

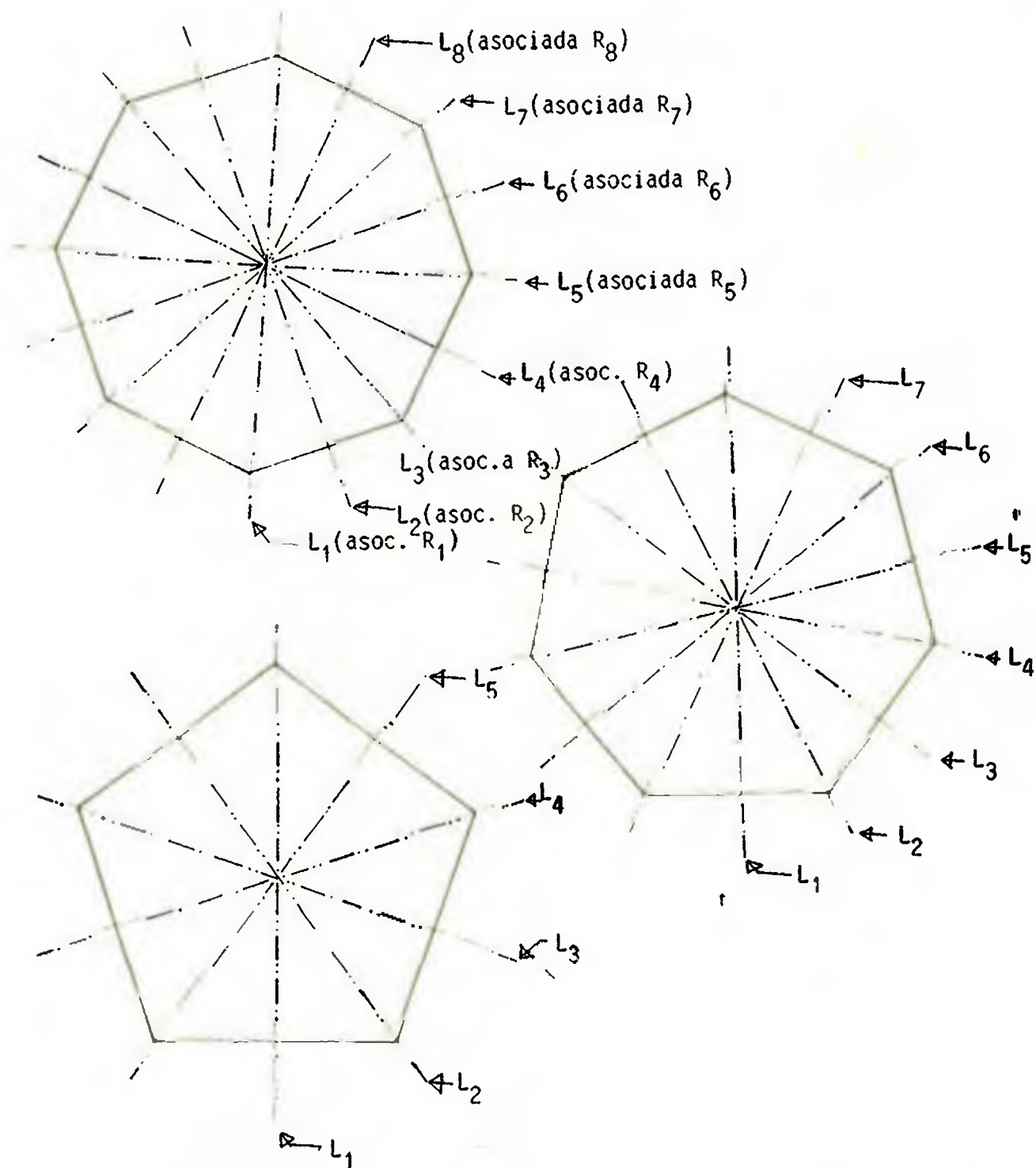


Fig. 4.2. Ejemplos de polígonos regulares mostrando sus ejes de reflexión.

$$S^n = I,$$

resultado de la composición de dos reflexiones con ejes adyacentes R_i, R_{i+1} , de donde $S = R_{i+1} R_i$.

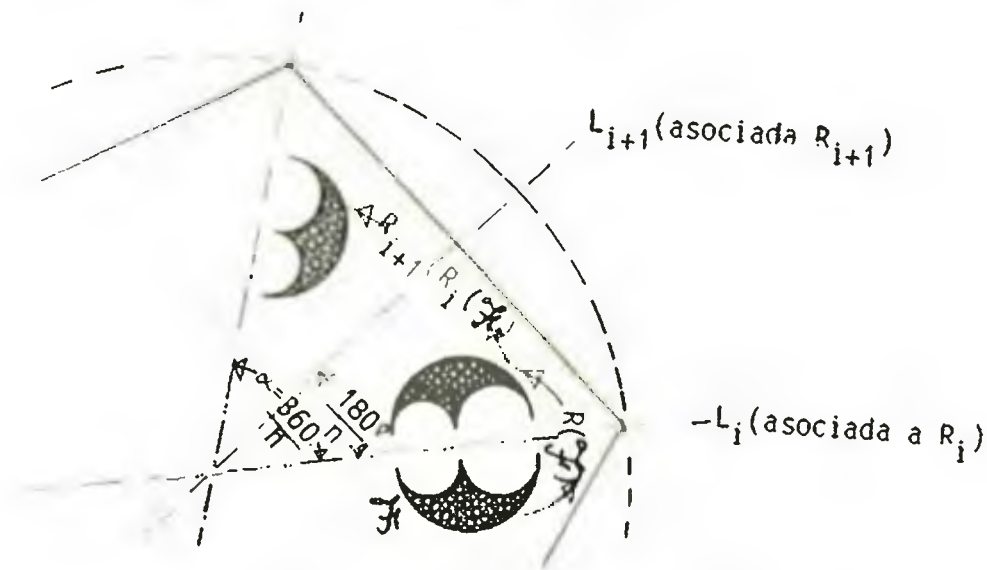


Fig. 4.3 Efecto logrado en un polígono regular por $S(F) = R_{i+1}(R_i(F))$.

Sean R_1, R_2, \dots, R_n , las n reflexiones de (n) , en su orden natural, entonces $R_i R_{i+k+1}$ es el producto de dos reflexiones que contiene k veces al ángulo $\frac{180^\circ}{n}$ que produce una rotación de k veces $\frac{360^\circ}{n}$, o sea:

$$R_i R_{i+k+1} = S^k$$

de ahí que:

$$\begin{aligned} R_i R_i R_{i+k+1} &= R_i S^k \\ (R_i R_i) R_{i+k+1} &= R_i S^k \\ (R_i)^2 R_{i+k+1} &= R_i S^k \\ I R_{i+k+1} &= R_i S^k \\ R_{i+k+1} &= R_i S^k \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= R_1 S^1 \\
 R_3 &= R_1 S^2 \\
 R_4 &= R_1 S^3 \\
 &\vdots \\
 R_n &= R_1 S^{n-1}
 \end{aligned}$$

Todas las reflexiones están generadas por R_1 y S , y las respectivas rotaciones lo están sólo por S ; de ahí que D_n está generado por R_1 y S . Si se sustituye a S , por $S = R_1 R_2$, como ya se había indicado, ocurre que D_n está generado por R_1, R_2 y su definición abstracta es:

$$R_1^2 = I = R_2^2, (R_1 R_2)^n = I$$

Si se adopta como conjunto de generadores de D_n a R_1 y S , se tiene que su definición abstracta es:

$$R_i^2 = I, S^n = I, R_i S = S^{-1} R_i; \quad i = 1, \dots, n$$

La igualdad de esta última condición es la que se muestra en forma gráfica en la figura 4.4. a y b.

A continuación presentamos, para una mejor comprensión el siguiente teorema, sin demostración.

Teorema 4.1: Para $n \geq 3$, el grupo diédrico D_n corresponde al grupo de simetrías de un polígono regular de n lados (n).

También se ha mencionado que los grupos cíclicos se pueden presentar como el grupo resultado de considerar solamente los giros de un polígono regular, como un subgrupo del t_0

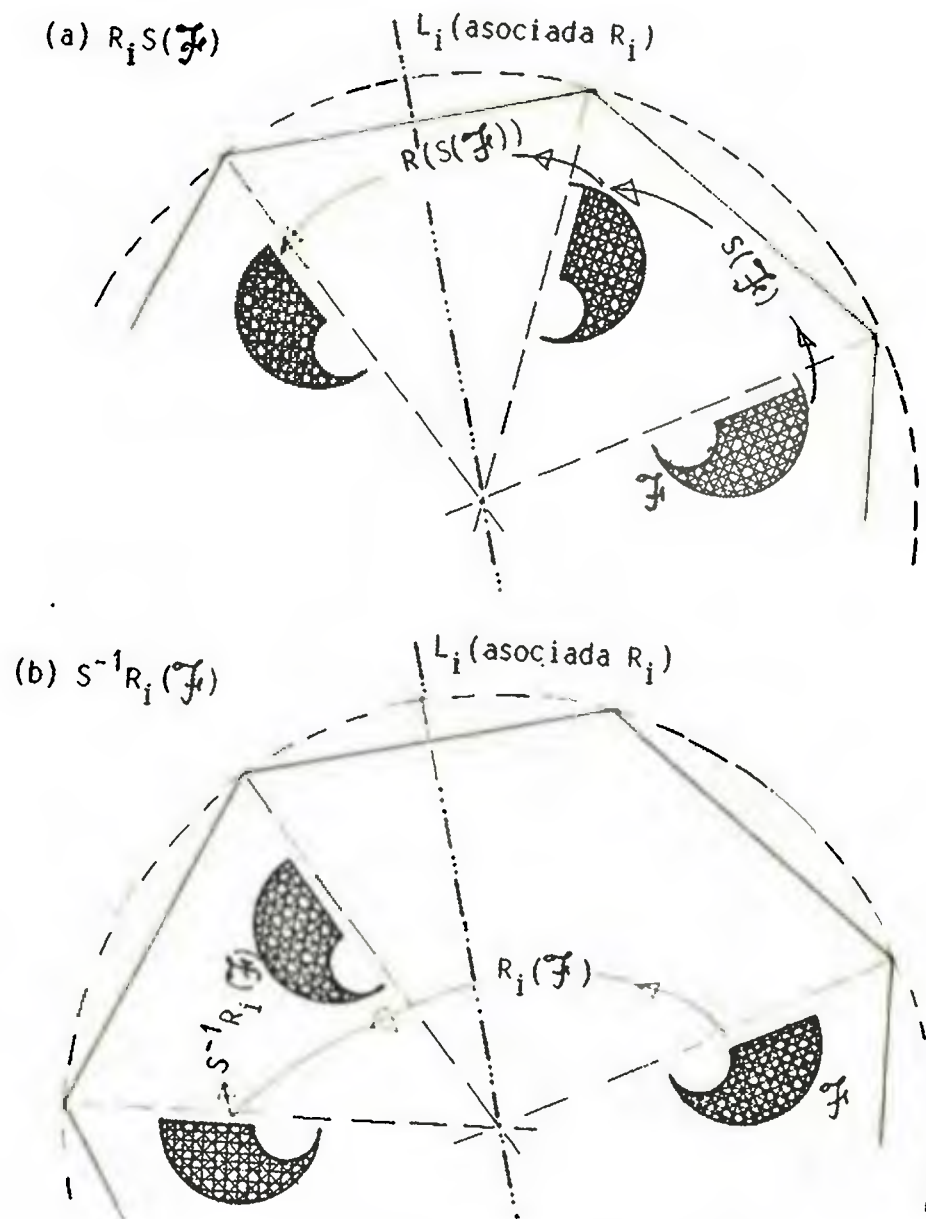


Fig. 4.4. a) La composición $R_i S(F)$; b) La composición $S^{-1} R_i(F)$ utilizando una parte de heptágono regular, (\mathcal{F}) .

tal de simetrías que éste posee. Pero no es la única forma de considerarlos, corresponden también al grupo de simetrías de un polígono que no contenga a las reflexiones como elementos de simetría, como es el caso de la figura 3.1.c, a la

cual le corresponde C_4 . Aun cuando la sección está dirigida a los polígonos regulares, presentaremos la construcción de un polígono orientado para que con tal tipo de polígono no sea posible hacer corresponder los grupos de simetría cíclicos; la forma de construcción aquí dada, de ninguna manera pretende considerarse como la única -nada más alejado de la realidad- si no que sencillamente para los fines propuestos, resulta adecuada.

Construcción de un Polígono Orientado

1. Trácese dos circunferencias concéntricas C , C' de centro O y el radio de la circunferencia mayor, C , de longitud $|r|$, y el de la menor, C' , $\frac{1}{2}|r|$.
2. Divídase C en n partes iguales.
3. Márquese en C los puntos resultantes como W_1, W_2, \dots, W_n .
4. Márquese en C' los puntos resultantes al cortar a r cuando se señala cada uno de los puntos de C . Sean estos puntos V_1, V_2, \dots, V_n .
5. Unase el camino $V_1 W_1, V_2 W_2, \dots, W_{n-1} V_n, W_n V_1$.

El polígono así obtenido es el polígono orientado solicitado.

Este proceso de construcción está representado todo en la fig. 4.5.

Al decirse Polígono Orientado no debe tratar de entenderse que si la orientación de la figura sea positiva o negati-

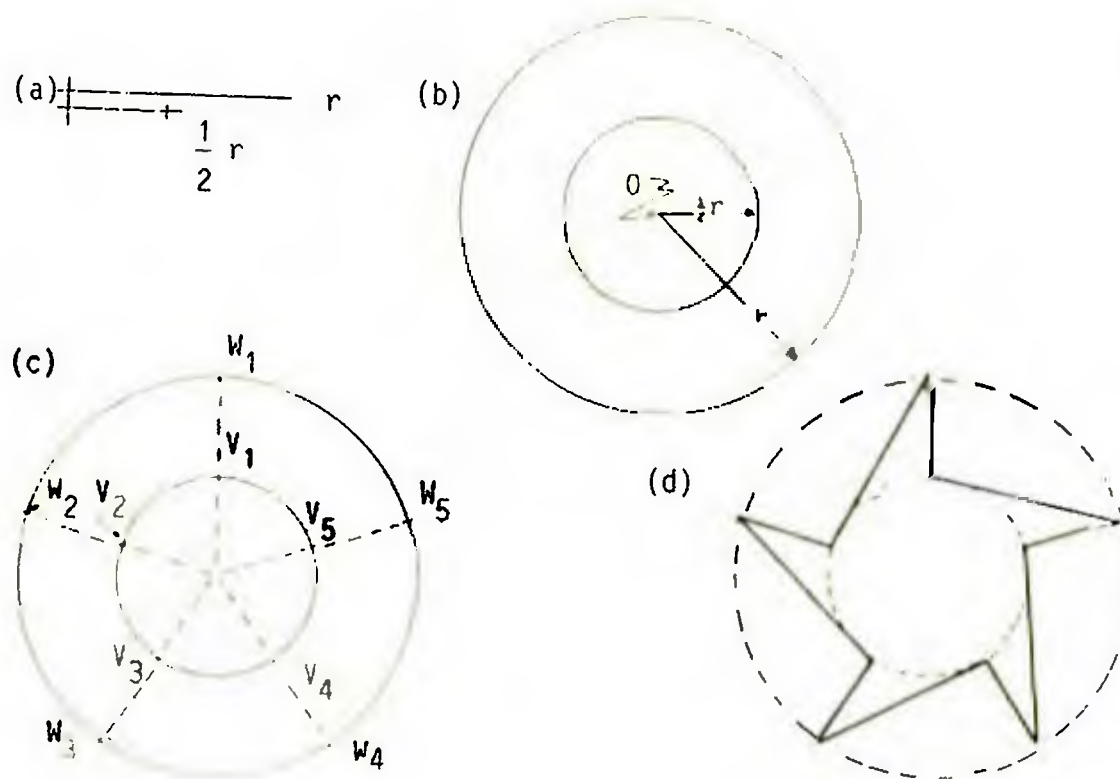


Fig. 4.5 Construcción de un polígono orientado (a) longitud de los radios (b) las dos circunferencias concéntricas; (c) los puntos marcados; (d) el polígono orientado.

va pues estos términos son relativos, arbitrarios, hasta cierto punto. Dependederá de lo que se considera positivo, así resultará aquello que se considerará negativo. Si será considerado conforme con el movimiento de las manecillas de un reloj, que utilice manecillas para indicar la hora, o en sentido contrario a tal movimiento. Para los fines de este trabajo, y en esta parte, más aún, al decirse Polígono Orientado, lo que se trata de establecer -se advierte en los pasos utilizados para su construcción y es perceptible a nivel visual en la figura 4.5- que es un polígono construido de manera tal que admita solamente rotaciones, y no reflexiones, en el grupo de simetrías que le corresponde. Lo anterior no

niega que una rotación puede describirse como el resultado de la composición de dos reflexiones cuyos ejes se intersectan en el punto de giro de esa rotación. No, lo que se afirma es que las reflexiones, como tal, no pertenecen al grupo de simetrías de un polígono orientado.

Habiendo aclarado lo concerniente al polígono orientado demostramos el teorema relativo a su correspondencia con los grupos cíclicos.

Teorema 4.2 Para $n \geq 3$, el grupo cíclico C_n corresponde exactamente al grupo de simetría de un polígono orientado de n cúspides, Q_n .

Demostración: Sea C_n el grupo cíclico de orden n y sea $G(Q_n)$ el grupo de simetría de un polígono orientado de n cúspides. Ocurre que C_n , con sus n giros, de valor angular $\frac{360^\circ}{n}$, está contenido en $G(Q_n)$, $C_n \subset G(Q_n)$

Sea $T \in G(Q_n)$, entonces T será o bien una rotación o una reflexión, cuyo eje contiene a O . Por ser una isometría enviará a un vértice arbitrario, sea éste W_1 , a otro vértice W_k . Si T es una reflexión enviará a W_2 a W_{k+1} o W_{k-1} , entonces haciendo la composición GT , donde G es un giro, elegido de manera tal que en el resultado de la composición, su eje respectivo contenga a el centro O y a W_2 . Esa composición, que es una reflexión enviará al segmento $\overline{W_2V_3}$ en el segmento $\overline{W_2V_1}$; ocurre que este último segmento no pertenece

al polígono orientado Q_n ; por lo que se puede afirmar que T no es una reflexión. T es un elemento de $G(Q_n)$ y T es un giro por lo tanto se tiene que

$$T \in G(Q_n), \quad T \in C_n$$

esto indica que

$$G(Q_n) \subset C_n.$$

y de ahí que

$$C_n = G(Q_n).$$



Estos teoremas nos dan la validez de un hecho que habíamos manejado pero no se había precisado como lo es esa correspondencia entre el grupo de simetrías de un polígono regular con un grupo diédrico y el de aquellos otros polígonos que no poseen reflexiones como elementos de simetría, solamente rotaciones con los grupos cíclicos.

Para completar esta presentación diremos que los grupos D_2 , D_1 y C_2 , C_1 corresponden a casos especiales dentro de la correspondencia mostrada. La no inclusión se debe, básicamente, a que la representación de un polígono con las características por ellos requeridas no es posible, adecuadamente, en el plano.

4.3 Los Grupos de Leonardo.

4.3.1 El Teorema de Leonardo.

Esta sección trata de una categoría bien definida de grupos, aquella compuesta por los grupos de simetría finitos de

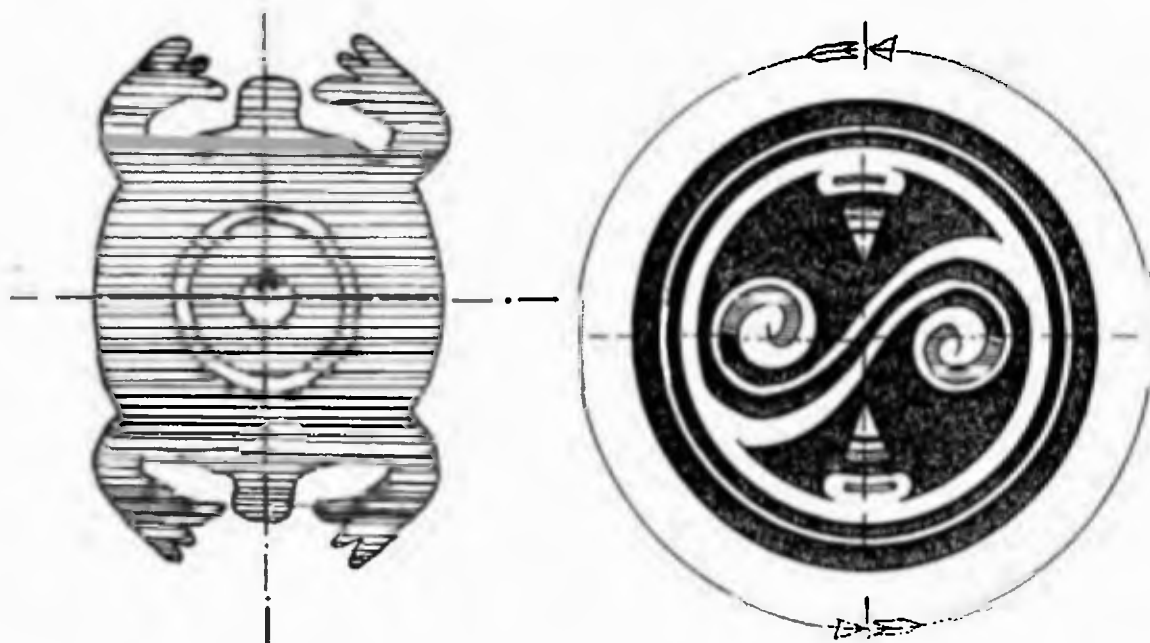
una figura plana, a los que también se les llama grupos puntuales o de Leonardo. Tales grupos por ser finitos no poseen simetrías cuyo período sea infinito por la cual no incluirán isometrías tales como las traslaciones ni tampoco las reflexiones deslizantes ya que estas permiten ser interpretadas como el resultado de la composición de una traslación y una reflexión, cuyo eje es perpendicular a aquellos dos -paralelos entre sí- que permiten la traslación, por lo que se puede aseverar que un grupo de Leonardo solamente posee, entre sus elementos constitutivos, reflexiones y rotaciones.

Definición 4.2. El grupo de simetrías que le corresponde a una determinada figura plana \mathcal{F} , $G(\mathcal{F})$, se le llama puntual o de Leonardo si cumple con las siguientes condiciones:

- (1) Es un grupo finito.
- (2) Existe un punto O , que permanece fijo para todas las simetrías de \mathcal{F} .

El punto fijo mencionado en la definición se le conoce como centro de simetrías de la figura \mathcal{F} . Por lo expresado por esa definición puede ocurrir que en una determinada figura plana el centro de simetría pertenezca a la figura \mathcal{F} , y en otra no ocurra así; esta circunstancia es la que se trata de ilustrar en la figura 4.5.

Con lo tratado hasta el momento se puede aseverar que los



IV período
Lothrop 1942, fig. 252.a
(p.132).

VII período
Estilo Parita, Variedad Ortiga
Ladd, 1964, fig.29(p.87).

Fig. 4.5 Ejemplos de figuras donde el punto fijo de sus simetrías pertenecen o no a tal figura.

grupos de Leonardo -tal como lo establece la definición anterior- no contienen traslaciones ni reflexiones deslizantes, por lo que solo permite aquellos grupos que están conformados por reflexiones y o rotaciones; y este planteamiento es lo que se conoce como el Teorema de Leonardo, que a continuación se demuestra.

Teorema 4.4 (TEOREMA DE LEONARDO) Los únicos grupos de simetría finitos en el plano, los grupos de Leonardo, son los grupos cíclicos C_n y los grupos diédricos D_n , para $n = 1,2,3,\dots$

Demostración: Sea \mathcal{F} una figura plana y $G(\mathcal{F})$ su grupo de simetrías, finito, considérense dos casos:

Caso 1. $G(\mathcal{F})$ contiene una rotación de valor angular α y centro de giro en el punto O , $G_{\alpha, O}$, pero ninguna reflexión; por lo cual $G(\mathcal{F})$ contiene a sus múltiplos

$$G_{2\alpha, O}, G_{3\alpha, O}, \dots, G_{k\alpha, O}, \dots$$

Pero $G(\mathcal{F})$ es un grupo finito por lo cual para contener al listado completo de múltiplos de $G_{\alpha, O}$ necesariamente ocurre que sólo contiene a un número finito de elementos diferentes. Lo anterior es equivalente a afirmar que para un determinado n se cumple

$$G_{n\alpha, O} = G_{360^\circ, O} = I$$

o sea el giro que ocurre tiene un valor angular de $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, $G(\mathcal{F})$ contiene un giro, con centro en O y de valor $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ y también contiene a un número finito de múltiplos.

$$G_{360^\circ/n, O}, G_{2(360^\circ/n), O}, G_{3(360^\circ/n), O}, \dots \\ \dots G_{(n-1)(360^\circ/n), O}, I$$

La expresión anterior corresponde al grupo cíclico de orden n , C_n , generado por $G_{360^\circ/n, O}$, es decir:

$$C_n = \langle G_{k(360^\circ/n), O} \mid k = 1, 2, \dots, n \rangle$$

Caso 2. $G(\mathcal{F})$ contiene una simetría por reflexión R_1 , para la cual, la línea que sirve de eje de la reflexión L_1 contiene al punto fijo O . La primera posibilidad es que tal grupo sea

$$\langle R_1, R_1^2 = I \rangle$$

Si $G(\mathcal{F})$ contiene otra simetría por reflexión, R_2 , con

eje reflexión L_2 , donde $L_1 \neq L_2$ se intersectan en O , deberá contener el resultado de la composición de R_1 y R_2 . Pero el resultado de una composición entre dos reflexiones es un giro alrededor del punto de intersección de esas dos reflexiones; el ángulo así descrito α , es de un valor el doble que el formado por L_1 y L_2 . Por el caso (1), necesariamente $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, para $n > 1$; por lo que $G(\mathcal{F})$ deberá contener a todos los elementos del grupo cíclico C_n además de las n reflexiones obtenidas al efectuar la composición $R_1 S^k$, $k = 1, 2, \dots, n$ donde $S = G_{360^\circ/n, O}$, esto equivale a girar n veces L_1 un ángulo

$$k \left(\frac{360^\circ}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Pero el grupo C_n junto con esta n reflexiones constituye el grupo diedral D_n , con n giros de valor $\frac{360^\circ}{n}$, alrededor de O y n reflexiones con ángulo, entre dos ejes de reflexión consecutivos, de $\frac{180^\circ}{n}$, cuando $n > 1$. Es decir:

$$D_n = \langle G_{k(360^\circ/n), O}, R_k \mid k = 1, 2, 3, \dots, n \rangle$$



Con esto se concluye la demostración del teorema de Leonardo; el grupo de simetrías que caracteriza al círculo que, contiene cualquier giro que ocurra teniendo a su centro como de giro, y a cualquier reflexión que lo incluya en su eje de reflexión, a pesar de contener sólo rotaciones y reflexiones, no se considera como uno de los grupos de Leonardo pues contradice la condición primera de la definición 4.2. es el grupo conocido como D_∞ . Hay que advertir en este momento también que los grupos de Leonardo, a pesar de solo incluir

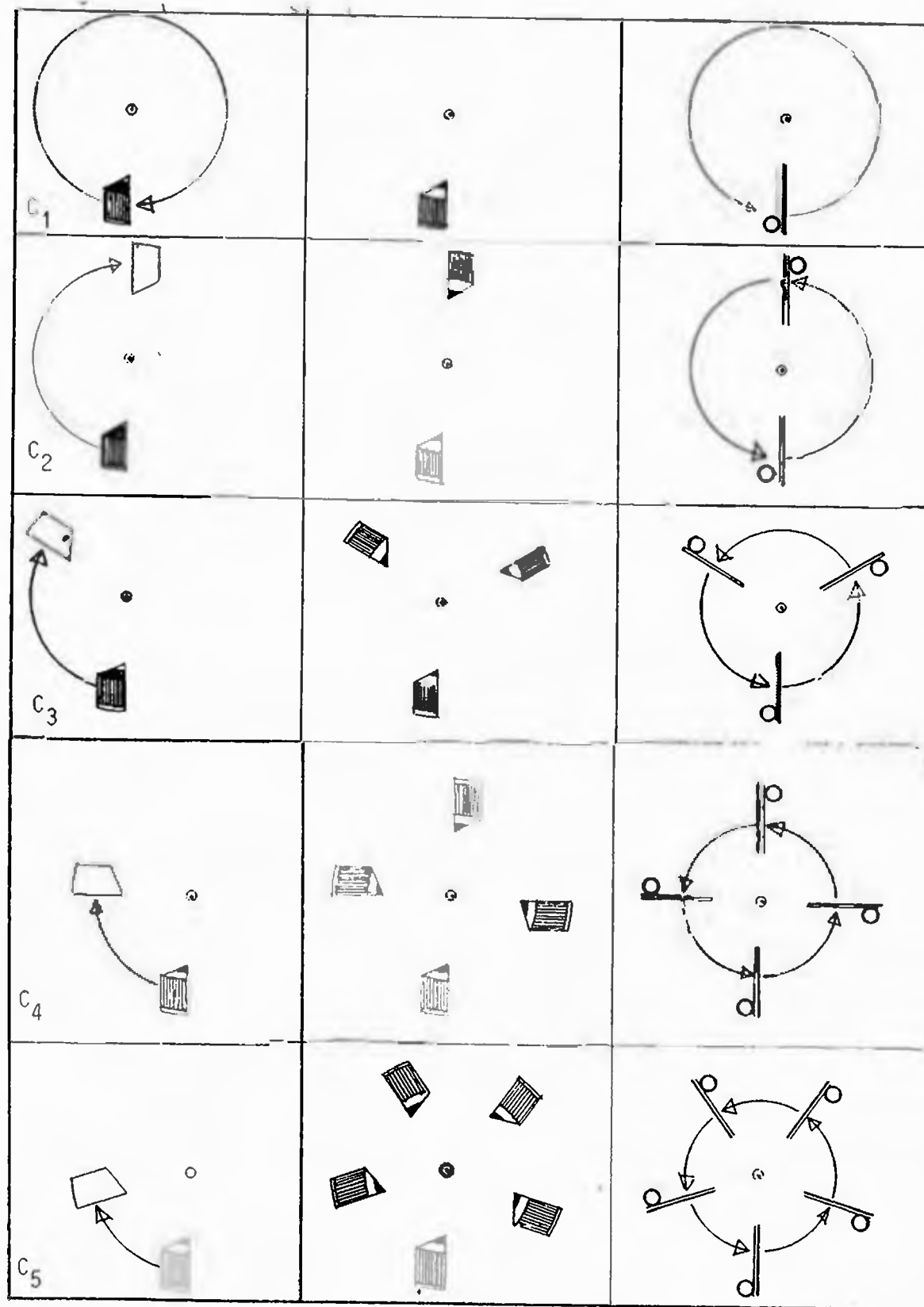


Fig. 4.6 Ejemplo de grupos cíclicos, usando un módulo, por iteración.

grupos con número finito de elementos de simetría, ellos como reunión de todos los grupos de Leonardo constituyen un conjunto infinito.

A continuación se presentan en la figura 4.6 un conjunto de figuras que representan por iteración, a partir de un determinado módulo, ejemplos de realizaciones de algunos grupos cíclicos. En la figura 4.7 se hace otro tanto para los grupos diédricos.

Como una consecuencia directa del teorema 4.3, relacionándolo con el contenido de los teoremas 4.1 y 4.2 se tiene:

Corolario 4.3.1 Para $n \geq 3$, los grupos de Leonardo corresponden exactamente a los grupos de simetría de los polígonos regulares o de los polígonos orientados, según incluyan o no las reflexiones como parte de los elementos de simetría de tales grupos.

Este corolario evidencia por completo la interconexión existente entre dos términos que se dan como equivalentes, y de hecho lo son; los grupos de simetría correspondientes a los polígonos regulares, usualmente, pero no sólo esos y los llamados grupos de Leonardo, para $n \geq 3$.

4.3.2 Algunos datos sobre Leonardo.

Los grupos de Leonardo llevan ese nombre en reconocimiento de uno de los más sobresalientes hombres de ciencia, artista, constructor del Renacimiento europeo, el florentino

Leonardo da Vinci, quien ejecutó su obra entre los últimos veinte años del siglo XV y los primeros veinte años del siglo XVI. Vasari, su biógrafo más cercano, temporalmente, dice, en el siglo XVI, "sus investigaciones le llevaron hacia la filosofía natural, el estudio de las propiedades de las plantas, los movimientos celestes, las órbitas de la luna y la evolución del sol"* [Chastel 1952: 24]. Parte de sus notas, recogidas en el "Codex Atlanticus", evidencian que sus áreas de interés fueron esas y muchas más y que a lo largo de su vida, en determinadas épocas, prestó mayor atención a unas que a otras. La contribución hecha por Leonardo a la matemática queda ilustrada en la siguiente cita del libro de Pedoe [1979: 84, 86]:

"Pero vamos a citar ahora a Hermann Weyl. En su bien conocido libro titulado *Symmetry* (Princeton University Press, 1952) en la página 66, Weyl dice:

Leonardo da Vinci se dedicó a determinar sistemáticamente las posibles simetrías de un edificio central y cómo añadir capillas y nichos sin destruir la simetría del núcleo. En terminología abstracta moderna, los resultados vienen a ser esencialmente, nuestra tabla anterior de los posibles grupos finitos de rotaciones (propios e impropios) en dos dimensiones.

(...) Será suficiente señalar aquí, aunque Leonardo parece haberse limitado a un octágono (8 lados) regular inscrito en un círculo, y Weyl se refiere a un n-gono regular inscrito en un círculo, los trabajos de Leonardo demuestran que poseía una comprensión total de todas las posibilidades y

* Traducción del autor

que, por sí solo, este hecho sería suficiente para que él ocupase un lugar destacado en la historia de la geometría."

La tabla a la que se hace referencia es:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, D_1, D_2, D_3, \dots$$

También Coxeter [1961: 35] cita a Weyl con relación al mismo tema:

"De acuerdo a Weyl [1, pp 66, 99] ha sido Leonardo el que descubrió que los únicos grupos finitos de isometrías en el plano son:

$$C_1, C_2, C_3, \dots$$

$$D_1, D_2, D_3, \dots$$

y su interés en ellos fue desde el punto de vista de los planos arquitectónicos".

No sólo en base a las notas que todavía se conservan sino que de manera indirecta también se tiene constancia del interés que Leonardo tenía por la matemática. Ese testimonio se obtiene del intercambio epistolar entre Isabelle d'Este, de Mantua, cuñada del que había sido protector suyo en Milán, Ludovico Sforza Visconti, el Moro, y Fra Pietro de la Novellera. En una carta de ésta al fraile, fechado 22 de marzo de 1501, se refería a que hiciera contacto con Leonardo con el fin de obtener el compromiso de hacer un dibujo para su estudio. "Reverendísimo Padre: si Leonardo, pintor florentino, se encuentra en Florencia en este momento, os ruego...". Cita tomada de la biografía de Leonardo escrita por

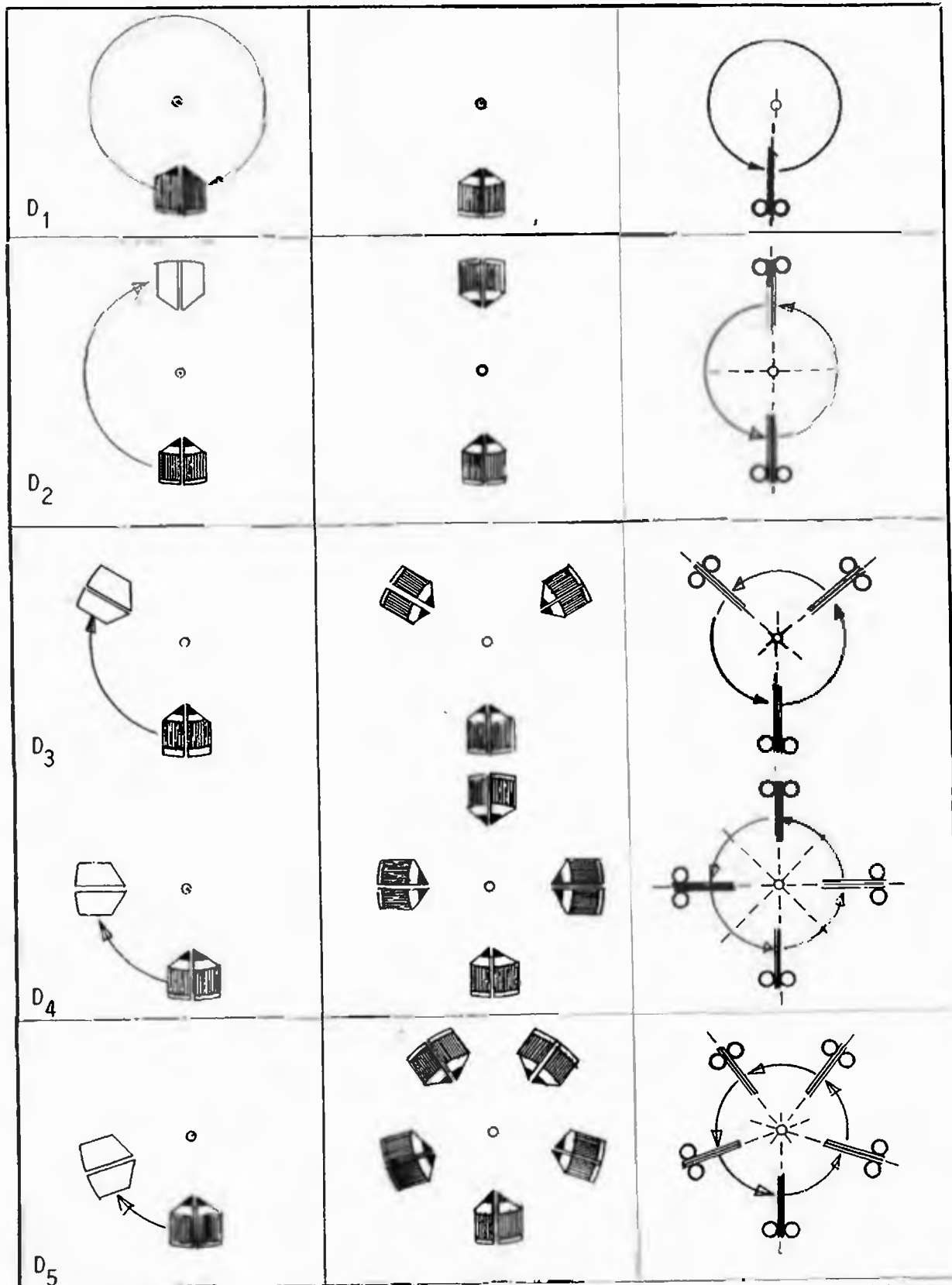


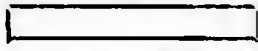



Fig. 4.7 Ejemplo de grupos diédricos, usando un módulo, por iteración.

Eugenio Muntz [1956: 293]. Por parte del religioso se obtuvo contestación, referente a este asunto, en una carta fechada el 4 de abril de 1501 en la que "le informó que Leonardo estaba más dedicado que nunca a las matemáticas" [Pedoe 1979: 81]. Cuáles fueron los aportes de aquella época, no se sabe; sólo queda la constancia de su dedicación. Este interés también se evidencia en otras épocas y de ellos se tiene como resultado, entre otros las ilustraciones que hizo para el libro "De divina Proportione", de Fra Luca Pacioli; terminada en 1497; la dedicatoria aparece fechada en febrero de 1498, aun cuando sólo salió de las prensas en 1509 [Muntz, 1956: 196, nota 24].

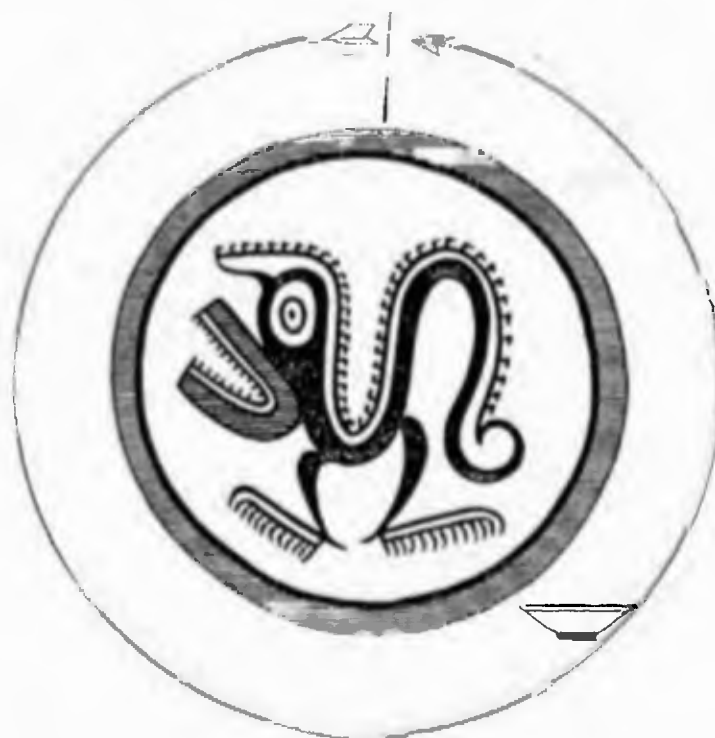
4.4 Aplicaciones de los Grupos de Leonardo en la Cerámica.

Para finalizar presentamos unas láminas que contienen diseños encontrados en la cerámica pintada de la región Central de Panamá y que constituyen realizaciones de los grupos de Leonardo.

El código de los colores que en ella se emplea al reproducirlas es el que usa Lothrop [1942: viii].

Color	Representación
Blanco	
Negro	
Rojo	
Morado	

Cuadro 4.1 Código de los colores usados en la representación de la cerámica, tomado de Lothrop [1942: viii].

CULTURA : REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.****Nº de Identificación : 33-42-20/797****Fuente: Lothrop. S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº : 82.a(p.49)****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: de Leonardo C₁.**

CULTURA - REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Herrera)

Museo o Colección:

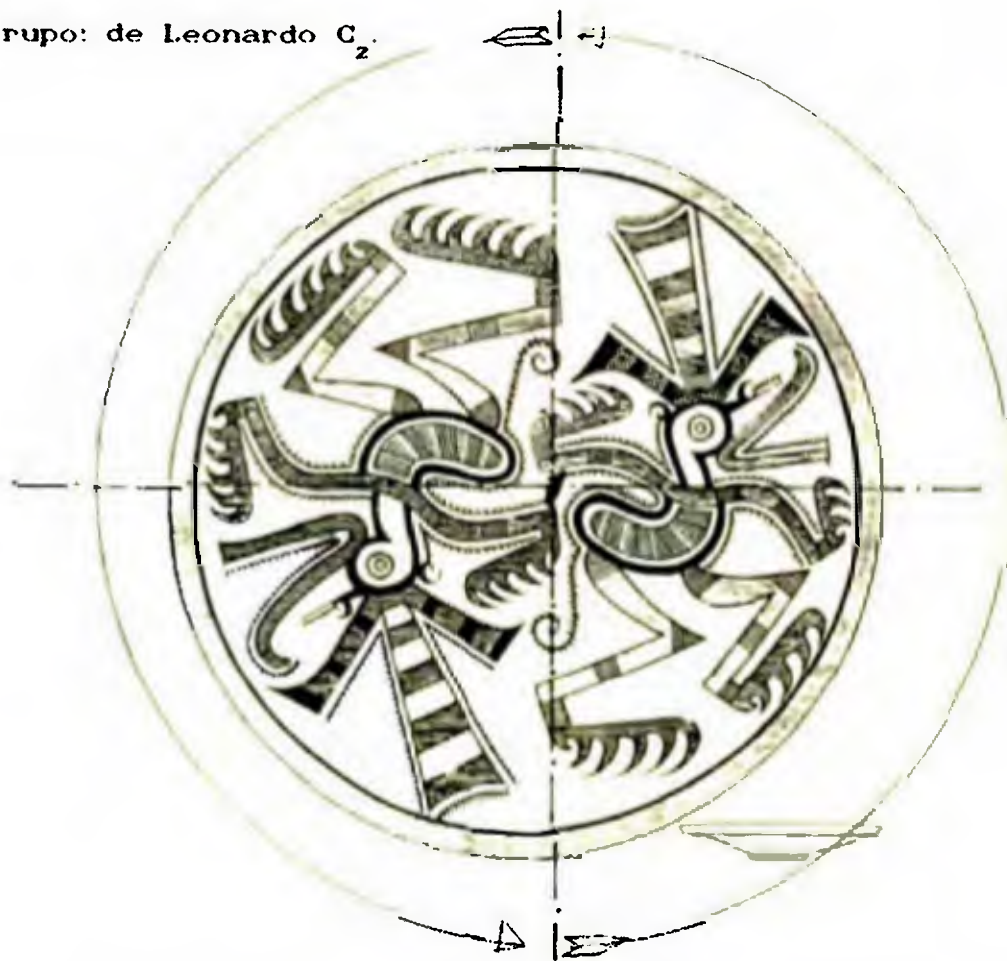
N° de Identificación:

Fuente: Ladd, John, Archaeological Investigations in
the Parita and Santa María Zones of Panamá

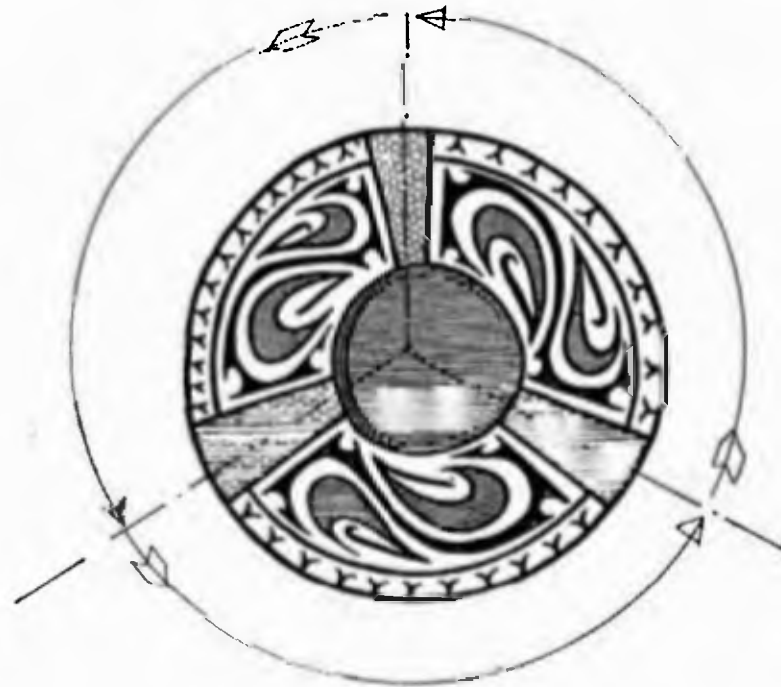
Fig. N° : Fig. 8(p.55).

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo : de Leonardo D₁.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.****Nº de Identificación: 33-42-20/905****Fuente: Lothrop, S.K, Coclé: An Archaeological study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the Sitio
Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº: 378 (p.187)****Técnica: Cerámica Pintada.****Grupo: de Leonardo C₂.**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Peabody Museum, Cambridge, Mass.****N° de Identificación: 33-42-20/801****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panama. Part II. The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. N° : 67 (p.43).****Técnica: Cerámica Pintada.****Grupo: de Leonardo D₂.**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.****Nº de Identificación: 33-42-20/1461****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº : 164. a (p.90).****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: de Leonardo C₉.**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección:****Nº de Identificación:****Fuente: Cooke, R.G., Ancient Painted Pottery from
Central Panamá, Archaeology Jul-Aug 1985.****Fig. Nº : pág. 34.****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: de Leonardo D₃.**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Veraguas)

Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz".

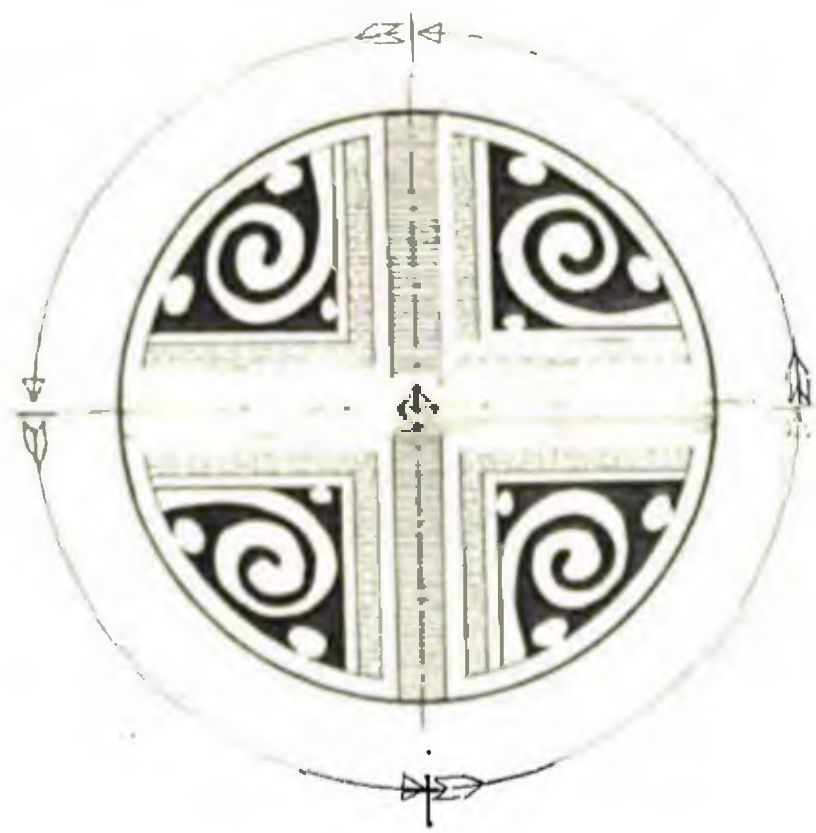
Nº de Identificación: 65-1-52 (V-21).

Fuente:

Fig. Nº :

Técnica: Cerámica Pintada.

Grupo: de Leonardo C₄.



CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Coclé)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

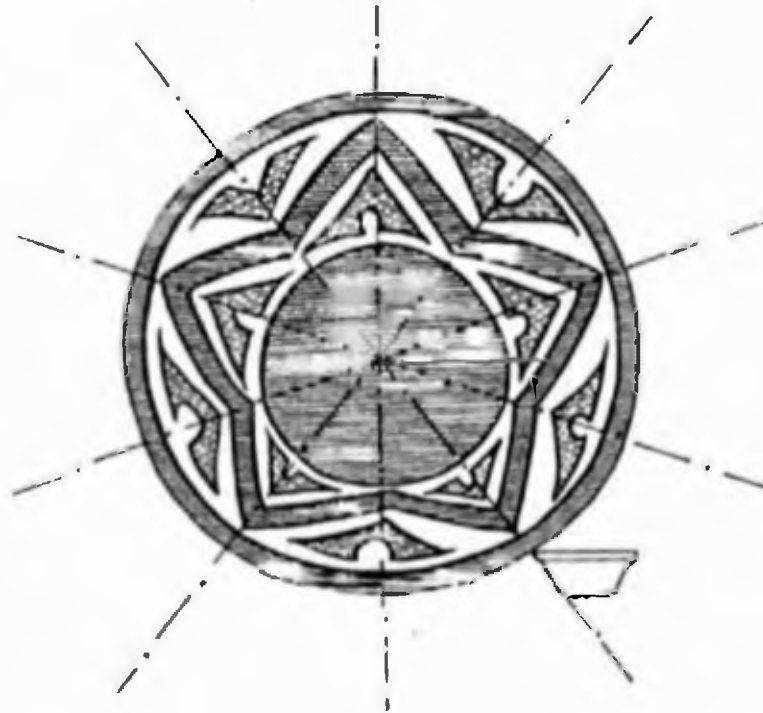
N° de Identificación: 33-42-20/1382

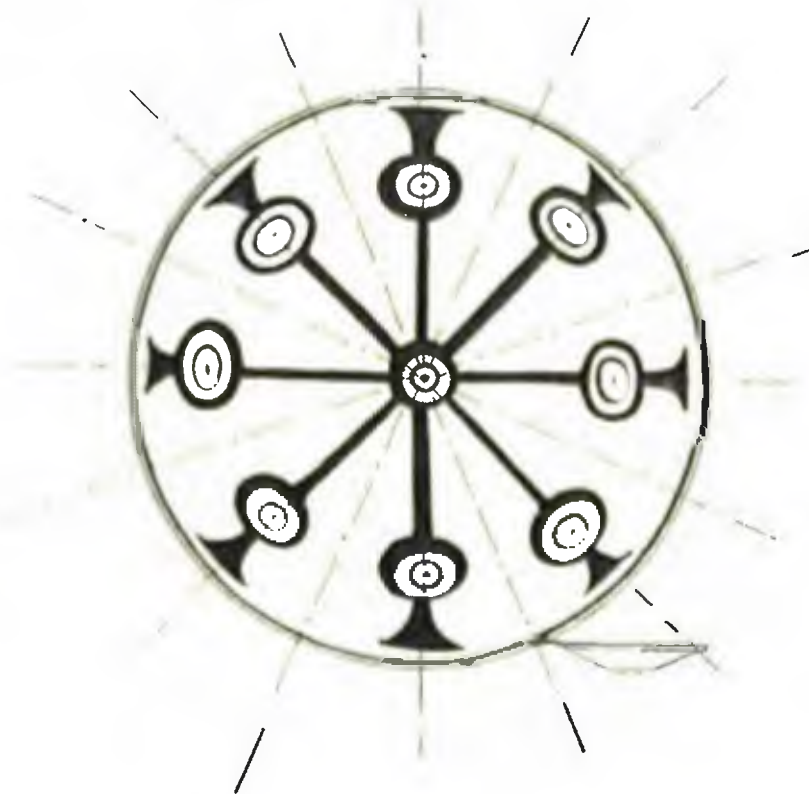
Fuente: Lothrop, S.K, Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig. N°: 97.d (p.56)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de Leonardo D₄.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.****Nº de Identificación: 33-42-20/1119.****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº : 100.b (p.58)****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: de Leonardo D₅**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Americano de Historia Natural,
N. Y.****Nº de Identificación: 30.1/1094.****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº : 431.c (p.216).****Técnica: Cerámica Pintada.****Grupo: de Leonardo D_a.**

Capítulo 5

LOS GRUPOS DE SIMETRÍA UNILINEALES

5.1. Las Isometrías Permitidas en un Diseño Unilineal (diseño de banda)

La segunda categoría de los grupos de simetría en el plano, que usaremos para clasificar los diseños de la cerámica pintada de la Región Central de Panamá, es aquella que incluye entre otras isometrías una traslación en una sola dirección. Por esa razón se conocen como Grupos Unilineales; también son conocidos como diseños de banda, de franja o, con una connotación más arquitectónica, como frisos. Tal como dicen Alsina y Trillas: "Los frisos tienen como denominador común la repetición de un determinado módulo (. . .) a lo largo de una banda rectangular, dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del módulo, . . . " [1984: 151].

Si tenemos en cuenta que una traslación es el resultado de la composición de dos reflexiones respecto a ejes paralelos, y las traslaciones aquí tratadas ocurren en una sola dirección, entonces puede considerarse que éstas se dan como consecuencia de un arreglo infinito de ejes de reflexión paralelos; pero exigiendo la repetición periódica. Por

lo tanto, tales ejes están colocados a cierta distancia fija entre sí, ya que de no ocurrir así la periodicidad no se lograría; el arreglo mencionado se representa en la figura 5.1.a.

Cuando esta traslación opera no se dan desviaciones en la dirección de la banda que contiene el diseño; esta dirección puede ser representada por una línea recta que es perpendicular a los infinitos ejes de reflexión paralelos entre sí. Cuando se ha elegido cierto motivo, éste irá desarrollándose a lo largo de tal banda, reproduciéndose sin salirse de ella; los diseños de la figura 5.1.b y c ilustran lo dicho;

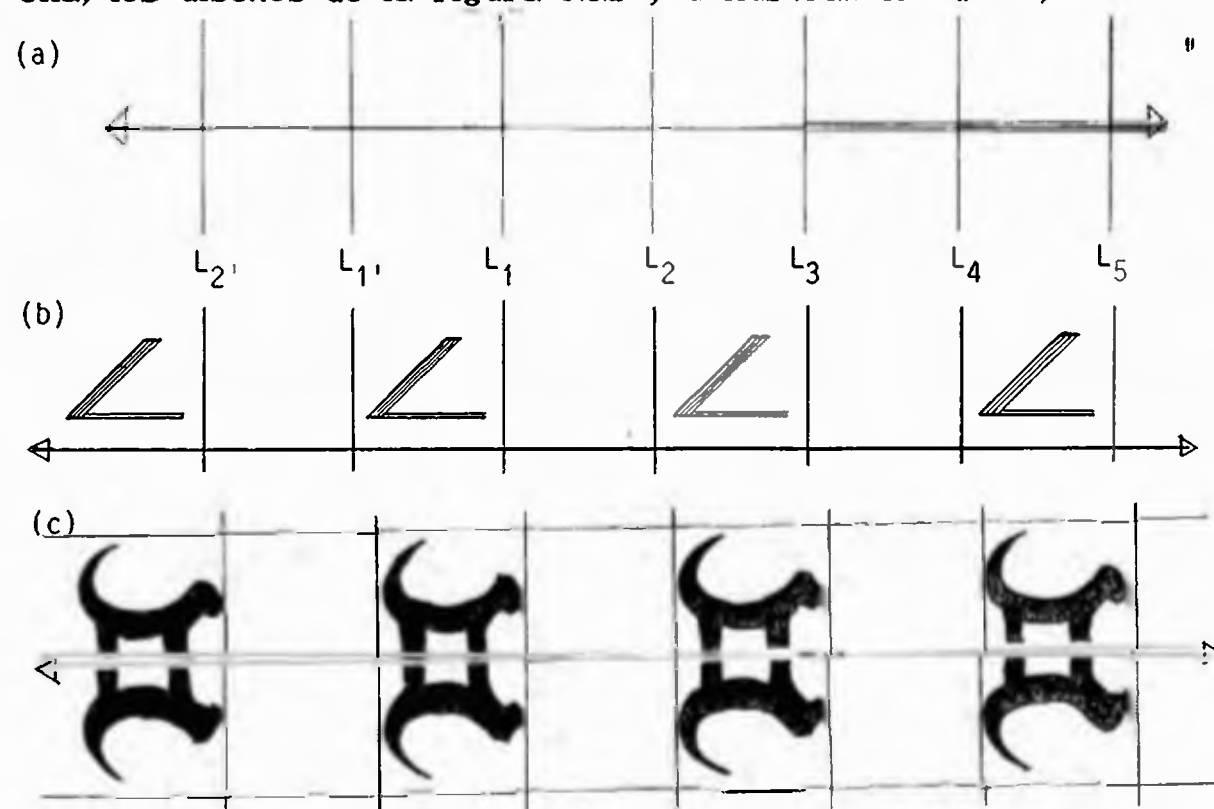


Fig. 5.1. a) Muestra del arreglo de los ejes de reflexión en un diseño infinito de banda, b) ejemplo de diseño, c) ejemplo usando un motivo que aparece en la vasija contenida en Plato XXX b [Ichnon, 1978: 550].

en la figura 5.1.b se muestra un diseño sin indicar la banda que lo enmarca y en la figura 5.1.c aparece una banda con un ancho tal que deja un cierto espacio libre entre el diseño y el límite de la banda; ésta puede estrecharse hasta tener un ancho mínimo en el que puede ser contenido el diseño. En obras arquitectónicas de civilizaciones antiguas se tienen registros del uso de estos diseños. Se observan en los recintos funerarios del Antiguo Egipto; en América también existen evidencias, uno de estos casos se muestra en la cerámica considerada en este trabajo y su presencia se puede explicar sin necesidad de recurrir a hipótesis sobre posibles transferencias de tales diseños.

Una forma de aproximarse a este concepto es el que abordan Coxeter[1967: 47, 48] y Budden[1978: 193-195, 204-206], y consiste en tomar sucesivamente diferentes grupos cíclicos, cada vez de mayor orden, o bien grupos diédricos si el diseño considerado posee simetría especular perpendicular a la dirección que sigue la banda; a continuación se describe este proceso. Tómese inicialmente un grupo cíclico arbitrario, en este caso C_{18} , con ángulo central $\alpha = 20^\circ$, representado en la figura 5.2.a, se está usando el mismo motivo de la figura 5.1.b. Después se pasa a considerar otro grupo cíclico, de mayor orden, en este caso C_{360} , $\alpha = 1^\circ$, en el cual los ejes de reflexión tienden a hacerse más paralelos; la figura 5.2.b lo ilustra representando una sección de tal círculo, donde se ha mantenido el tamaño del motivo. Si es-

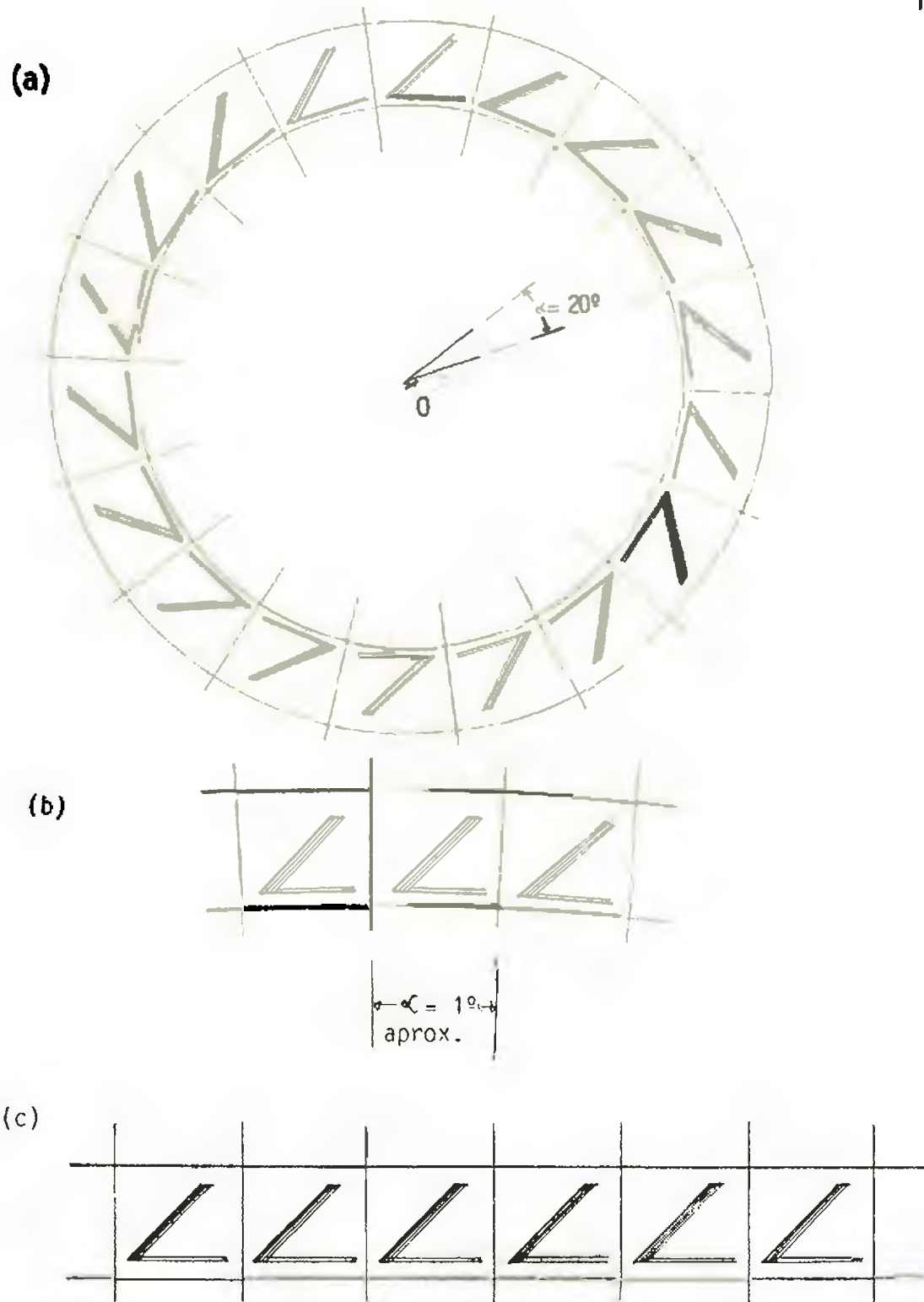


Fig. 5.2. a) Ejemplo de C_{18} , b) parte de C_{360} , c) representación de C_{∞} .

tos ejes se hacen más y más paralelos y el radio del círcu-

lo, en el cual se está aplicando el módulo, se hace más y más largo, llegamos al caso límite, C_{∞} , cuando el centro del círculo se coloca en el infinito y se obtiene un patrón de banda, como el mostrado en la figura 5.2.c. Conviene advertir que en la figura 5.2 no son los ejes de reflexión los que se muestran si no la distancia entre un módulo del diseño y el siguiente. La idea anteriormente desarrollada es aquella que está presente al considerar el hecho físico de los rayos solares, los cuales a pesar que se generan en el sol y desde allí se esparcen en todas las direcciones, al tomar una pequeña zona del tercer planeta, se considera que ahí los rayos llegan paralelamente.

Retomando la discusión, observaremos que los diseños unilineales se reproducen en forma periódica y dentro de una banda, donde los ejes de reflexión son líneas paralelas entre sí y las traslaciones, ocurriendo que éstas solo en la dirección de la banda. Se ha mencionado la elección de un determinado patrón y el hecho de que ocurren traslaciones; pero ¿cuáles son las isometrías permitidas que generan a los diseños de banda? Como respuesta a la pregunta anterior se mencionan a continuación estas isometrías y la figura 5.3 las ilustra.

A .- Reflexiones cuyo eje es perpendicular a la dirección de la traslación, figura 5.3.a.

B .- Traslaciones de una distancia fija (según sea el diseño que se considere), en la dirección que ésta deter-

mina, figura 5.3.b.

C .- Reflexiones con eje paralelo a la dirección de la traslación, figura 5.3.c.

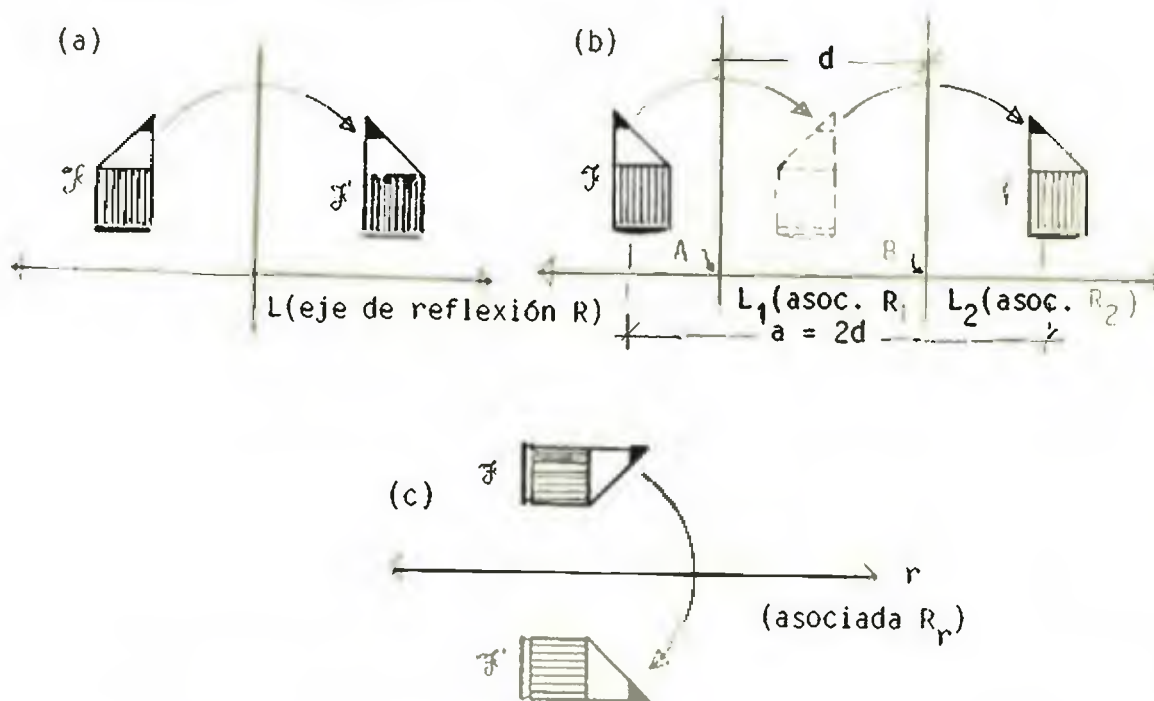


Fig. 5.3. Isometrías que participan en los grupos lineales: a) Reflexión con eje perpendicular a la dirección de la traslación, b) reflexión con eje perpendicular a la dirección de la traslación, c) reflexión con eje paralelo a la dirección de la traslación.

La figura 5.3.b resulta ilustrativa en el sentido de que como las traslaciones tienen un valor determinado, en una dirección determinada; en ella se intenta poner en evidencia asociarsele la letra a para indicar la distancia en que se ha trasladado el módulo esto equivale a afirmar que $\mathcal{F}' = T_a(\mathcal{F})$; la figura \mathcal{F}' se obtiene como resultado de aplicar una traslación, una distancia a , a la figura \mathcal{F} , en una dirección determinada. Con estas isometrías y sus combina

ciones se generan 7 grupos de diseños unilineales, "los cuales en vez de limitar las posibilidades muestran la esencia geométrica de tales diseños" [Alsina y Trillas, 1984: 151]. Con todo lo dicho consideramos oportuno presentar una definición que ayuda a estructurar mejor este material.

Definición 5.1. La repetición de una figura \mathcal{F} se dice que constituye un diseño unidimensional, de banda, un friso, si tal diseño puede ser contenido en la banda determinada por dos rectas paralelas, donde se repite con periodicidad sistemática. A la línea recta que equidista de las dos paralelas antes mencionadas se le llama eje de traslación de \mathcal{F} .

El motivo, módulo \mathcal{F} , se repite dentro de la banda y crea el diseño de franja, dependiendo de cuáles son las combinaciones que ocurren entre aquellas isometrías que le están permitidas. Se representa por r al eje de la traslación; en los diseños anteriormente mostrados no se ha hecho énfasis en esta característica; pero se puede observar adecuadamente en la figura 5.1.c y 5.3.c. En lo que resta de este capítulo se pondrá atención en señalar tal eje. Utilizaremos F_j^l para representar al grupo de isometrías para un determinado tipo de diseño, los índices que aparecen indicarán las diferentes combinaciones de las isometrías que participan. Un mismo grupo puede tener diferentes formas de ser nominado, aunque co-

mo señala Washburn [1979: 191] existe una equivalencia exacta para las diferentes formas de nombrar un determinado grupo; la forma de nominación que se usará está de acuerdo con la empleada por Alsina y Trillas en la sección 6.7; más adelante se presenta una tabla donde se compara ésta con la forma empleada por Zaslów [1977: 10, 11]. La característica de estos grupos de simetría unilineales de mantener fijo el eje de traslación la presentamos como:

Definición 5.2: Sea M una isometría del plano, p es un punto de la recta r , que es el eje de simetría en un diseño unidimensional, y F_j^i su grupo de simetrías, entonces:

$M \in F_j^i$ si $M(r) = r$, esto es

$$M(r) = \langle M(p) \mid p \in r \rangle$$

La isometría que pertenece al grupo de un diseño unilineal deja fija la línea recta que sirve de eje de la traslación, o sea que los puntos de tal eje, al ser aplicado cualquier elemento de simetría permitido se cambiará en un punto cualquiera, perteneciente a la misma recta. Cuando tal isometría se aplica a un punto que no pertenece al eje; pero está dentro de la franja, puede ocurrir que él y su transformado pertenezcan a una misma línea recta que sea paralela al eje de traslación, como ocurre cuando el módulo usado se reproduce por traslaciones o traslaciones y reflexiones, con

eje perpendicular al eje de traslación; pero en forma general no puede garantizarse que ocurra de esa manera, ya que no son sólo éstas las únicas isometrías permitidas. A continuación se consideran más detenidamente las isometrías permitidas en este tipo de diseño, sus combinaciones, para finalmente analizar los grupos de simetrías que con ellas se forman.

En el diseño de banda, la traslación T está generada por dos reflexiones, cuyos ejes son perpendiculares a r , sean estas reflexiones:

$$R_1 \text{ con eje } L_1 \\ \text{y } R_2 \text{ con eje } L_2 .$$

Representétese por d a la distancia entre los ejes L_1 y L_2 ; para el caso, como r intersecta a L_1 en A y a L_2 en B , se tiene que:

$$d = |AB|$$

como se ilustra en la figura 5.3.b. Se define la traslación como:

$$T = R_2 R_1$$

ésta ocurre en la dirección de r , una distancia a tal que $a = 2d$, por lo que se acostumbra a representar este hecho como:

$$T_a = R_2 R_1, \quad a = 2d$$

Si se asocia a esta composición el sentido positivo, se tiene que a la composición inversa, $R_1 R_2$, que también es una traslación, se le asocia el sentido negativo, esto se ve

reforzado por el hecho de que a $R_1 R_2$ es la inversa de T ; así que

$$T_a^{-1} = R_1 R_2,$$

para facilitar la notación se utiliza

$$T_a^{-1} = T_{-a}.$$

El símbolo de la derecha en la igualdad anterior pone de manifiesto el hecho de que tanto T_a como T_{-a} son traslaciones que envían a una determinada figura \mathcal{F} , en otra, situada a una distancia a , siguiendo la dirección de r ; pero en un caso la figura resultante estará en una posición que resulta ser la opuesta de la otra, tomando como referencia la figura original \mathcal{F} . Estas figuras, las que se han logrado aplicando la traslación, aun cuando se dice que se han movido en un sentido y la otra en un sentido opuesto, debe tenerse en cuenta que todas las figuras así logradas conservan la orientación de la figura original. Todo lo discutido anteriormente se puede observar en la figura 5.4, donde ha utilizado un módulo asimétrico para poner de manifiesto lo relacionado a la orientación de las figuras.

Además, téngase en cuenta que, tal como se establece en la definición 5.1, en un diseño de banda, el motivo generador se repite periódicamente a lo largo de la banda. Sea esa distancia, con la que se obtiene la reproducción periódica, de valor unitario a , con fines ilustrativos, para facilitar la comprensión de cómo opera. No necesariamente tiene que reproducirse el módulo a una distancia unitaria a , es

posible que para un determinado propósito resulte oportuno elegir esa distancia de manera tal que el motivo se reproduzca cada cierto número de veces (na , $n = 2,3, \dots$) y sus múltiplos. En la clasificación de los grupos de simetrías ocurre que, en un determinado diseño, el módulo se reproduce, tomando una figura ubicada a una lado de r , hacia el mismo lado con un valor de un determinado número de veces la distancia a y cuando ocurre hacia el otro lado lo hace con un valor distinto. En estos casos como el anterior, la elección del valor unitario a debe de hacerse de manera tal que resulte adecuado para tal fin; esta explicación resultará más evidente a medida que se desarrolle el capítulo.

En un diseño de banda el módulo se reproduce con regularidad; desde la posición de origen se reproduce a intervalos $\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \dots$. Esto se logra porque la isometría T_a se aplicó una, dos, \dots , n veces, \dots 0 sea que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &= T_a(\mathcal{F}) \\ \mathcal{F}'' &= T_a(\mathcal{F}') \\ &= T_a T_a(\mathcal{F}) \\ &= T_a^2(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Con el fin de facilitar el manejo de la nomenclatura utilizamos:

$$\begin{aligned} T_a^2 &= T_{2a} \\ (T_a^{-1})^2 &= T_{-2a} \\ T_a^3 &= T_{3a} \\ (T_a^{-1})^3 &= T_{-3a} \end{aligned}$$

$$T_a^n = T_{na}$$

En otras oportunidades, pero menos frecuentemente en este trabajo, se utiliza la forma siguiente:

$$T_a^n = nT_a = \underbrace{T_a T_a \dots T_a}_{n \text{ veces}} \rightarrow T_a$$

Llama la atención el hecho de que los generadores de las traslaciones, R_1 y R_2 , sean de período finito, mientras que su composición sea de período infinito, C_∞ o D_∞ , si el motivo tiene simetría especular perpendicular a r . Dicho en forma esquemática:

$$\langle R_1 \rangle^2 = I = \langle R_2 \rangle^2$$

mientras que $\langle R_2 R_1 \rangle^n \neq I, \quad n \in \mathbb{Z}^*$

La figura 5.4 es un diseño de banda generado únicamente por traslaciones, poniendo de manifiesto que todas ellas se han originado a partir de dos reflexiones cuyos ejes son perpendiculares a r ; cuando además de estas traslaciones se consideran como parte de las simetrías permitidas a las reflexiones con respecto a estos ejes perpendiculares se genera un diseño como el presentado en la figura 5.5, el cual por tener reflexiones verticales y traslaciones se hace corresponder a D_∞ , siguiendo una secuencia de aproximación semejante a la seguida con C_∞ .

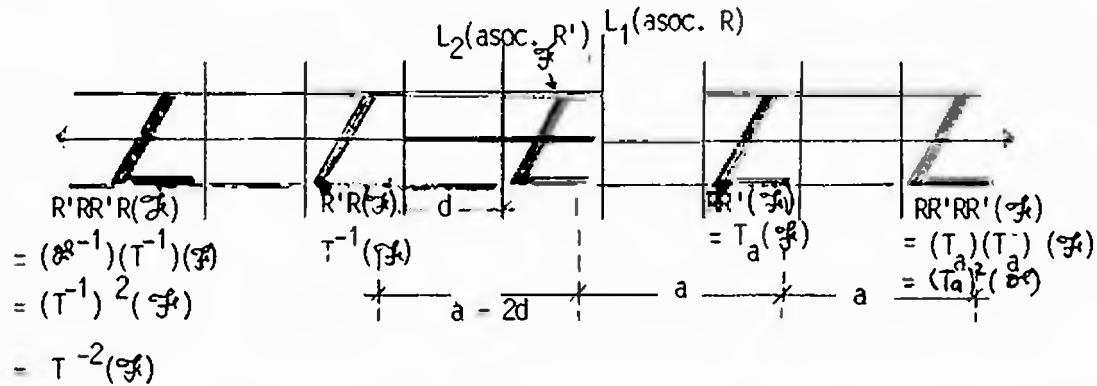


Fig.5.4. Generación de un diseño de banda por traslación de un módulo; las traslaciones están generadas por dos reflexiones perpendiculares a r . Se muestra la franja más estrecha capaz de contener el diseño.

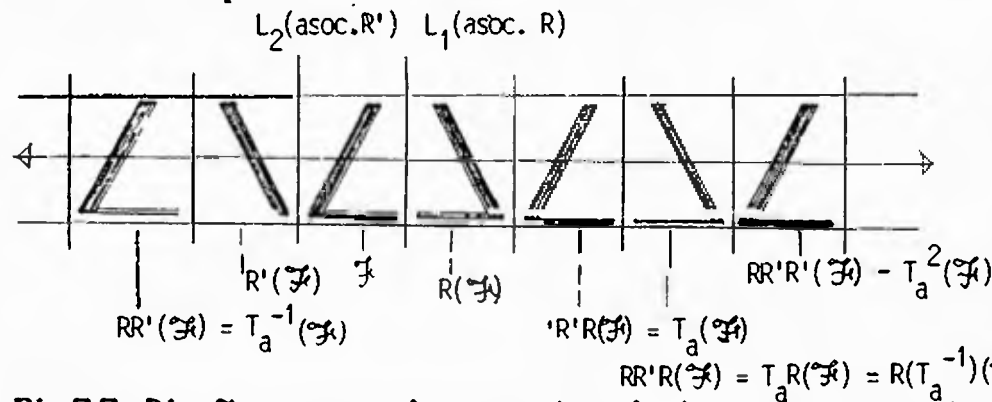


Fig.5.5 Diseño generado por traslaciones a y reflexiones verticales, generado por dos reflexiones verticales a r .

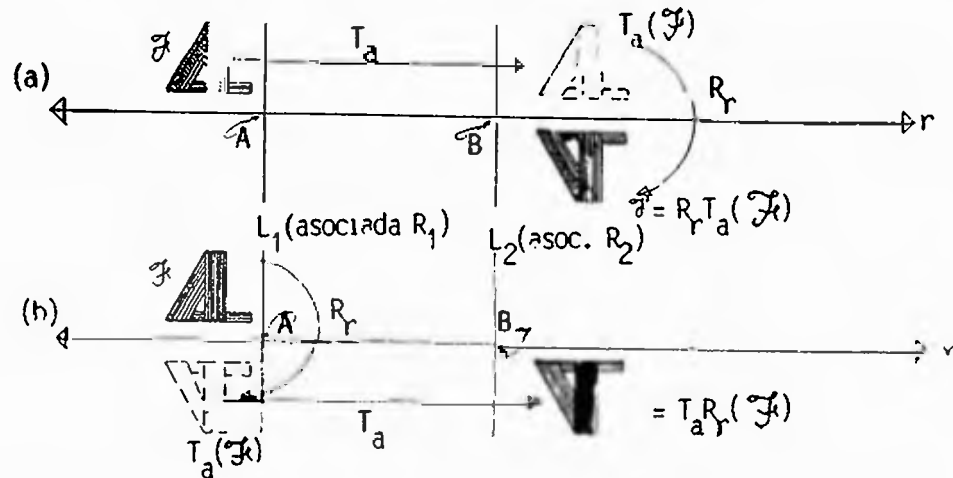


Fig. 5.6. a) Resultado de la composición $R_r T_a$; b) resultado de la composición $T_a R_r$.

5.2. Combinación de las Isometrías Permitidas.

Consideremos ahora las combinaciones de estas isometrías:

5.2.1 Composición a.

Una traslación a lo largo del eje de traslación, una distancia a , y una reflexión R_r cuyo eje coincide con el eje de traslación; el resultado logrado es una reflexión deslizante, tal como se mostró en el capítulo 2; para esta isometría ocurre que $R_r T_a(\mathcal{F}) = T_a R_r(\mathcal{F})$, lo cual se presenta en Fig.5.6.a y b.

Si en esta isometría se considera a:

$$G_A = G_{180^\circ, A} = R_1 R_r = R_r R_1$$

y

$$G_B = G_{180^\circ, B} = R_2 R_r = R_r R_2$$

Siendo

R_1 : Reflexión con eje L_1 , perpendicular a r ($L_1 \perp r$)

R_2 : Reflexión con eje L_2 , perpendicular a r ($L_2 \perp r$)

R_r : Reflexión con eje r , eje de la traslación.

A: Punto de intersección de r y L_1 ($A = L_1 \cap r$)

B: Punto de intersección de r y L_2 ($B = L_2 \cap r$)

Entonces:

$$\begin{aligned} T_a R_r(\mathcal{F}) &= R_1 R_2 R_r(\mathcal{F}) \\ &= R_1 (R_2 R_r)(\mathcal{F}) \\ &= R_1 (G_B)(\mathcal{F}) \\ &= R_1 G_B(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Esto es:

$$T_a R_r = R_1 G_B$$

También:

$$\begin{aligned}
 T_{a_r} R(\mathcal{F}) &= R_1(R_2 R_r)(\mathcal{F}) \\
 &= R_1(R_r R_2)(\mathcal{F}) \\
 &= (R_1 R_r) R_2(\mathcal{F}) \\
 &= (G_A) R_2(\mathcal{F}) \\
 &= G_A R_2(\mathcal{F})
 \end{aligned}$$

$$\text{Esto es: } T_{a_r} R = G_A R_2$$

Esta situación está presentada en la figura 5.7.a y b. Se ha obtenido que:

$$T_{a_r} R = R_r T_a = G_A R_2 = R_1 G_B$$

Este resultado muestra que existen diferentes alternativas (combinación de isometrías) que permiten obtener una reflexión deslizante; por lo que al describir un diseño de banda donde tal isometría participe, también existirán diferen

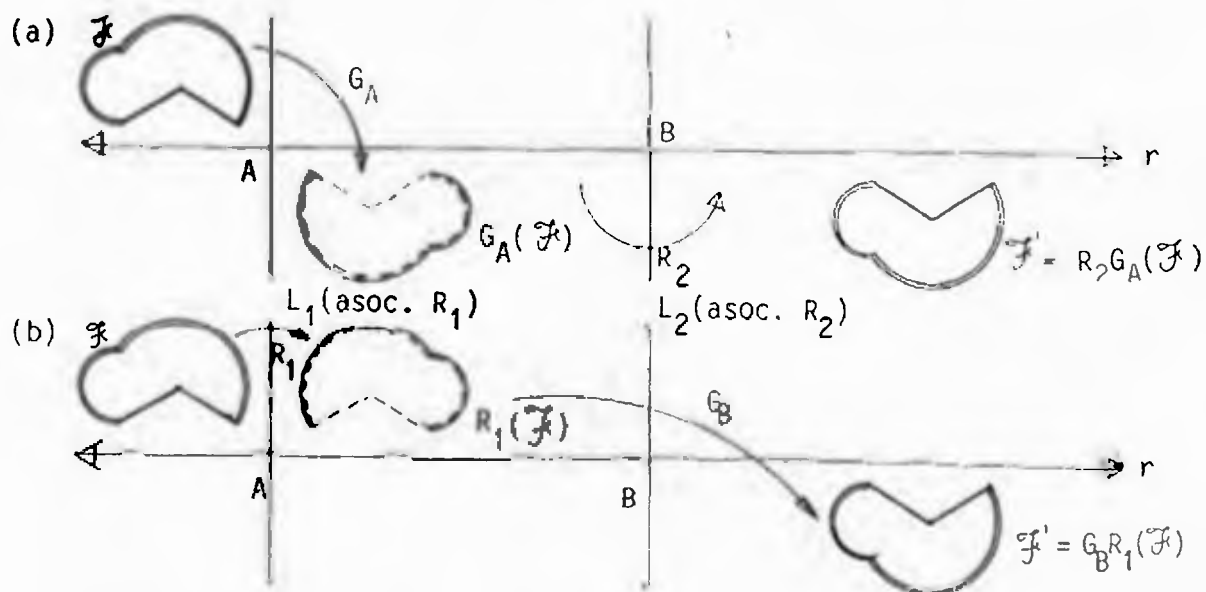


Fig.5.7 Ilustración de la reflexión deslizante obtenida usando: a) media vuelta seguida de una reflexión; y b) reflexión seguida de media vuelta.

tes maneras de describirla, utilizando traslaciones y reflexiones, o media vuelta con centro de giro en r y reflexión, con eje perpendicular a r .

En adelante, para facilitar la presentación de las condiciones bajo las cuales ocurren las isometrías que utilizaremos, se usarán algunos símbolos como el que indica perpendicularidad y el de intersección, entre otros.

5.2.2 Composición b.

La composición de dos semivoltas, con centro de giro diferentes, su resultado es equivalente al de una traslación cuyo desplazamiento es igual al doble de la distancia mínima entre los centros de giro de las semivoltas consideradas.

Sean:

$$G_A = G_{A, 180^\circ} = R_1 R_r = R_r R_1$$

$$G_B = G_{B, 180^\circ} = R_2 R_r = R_r R_2$$

$$T_a = R_2 R_1, \quad T_a = R_1 R_2$$

$$R_1 = \text{Reflexión, con eje } L_1, L_1 \perp r$$

$$R_2 = \text{Reflexión, con eje } L_2, L_2 \perp r$$

$$R_r = \text{Reflexión, con eje } r, \text{ el eje de la traslación}$$

$$A = L_1 \cap r, B = L_2 \cap r, d = |AB|, a = 2d$$

Entonces:

$$\begin{aligned} G_B G_A (\mathcal{F}) &= (R_2 R_r)(R_r R_1)(\mathcal{F}) \\ &= R_2 (R_r R_r) R_1 (\mathcal{F}) \\ &= R_2 (I) R_1 (\mathcal{F}) \\ &= R_2 R_1 (\mathcal{F}) \\ &= T_a (\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Esto es:

$$G_B G_A = R_a$$

También:

$$\begin{aligned} G_A G_B(\mathcal{F}) &= (R_1 R_r)(R_r R_2)(\mathcal{F}) \\ &= R_1 (R_r R_r) R_2(\mathcal{F}) \\ &= R_1 (I) R_2(\mathcal{F}) \\ &= R_1 R_2(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

$$G_A G_B(\mathcal{F}) = T_{-a}(\mathcal{F})$$

Esto es:

$$G_A G_B = T_{-a}$$

En ambos casos se obtiene una traslación, en la dirección de r , a partir de la posición inicial, una distancia a , y se dan en sentido opuesto la una de la otra, T_a y T_{-a} . Este resultado está presentado en Fig. 5.8.a y b.

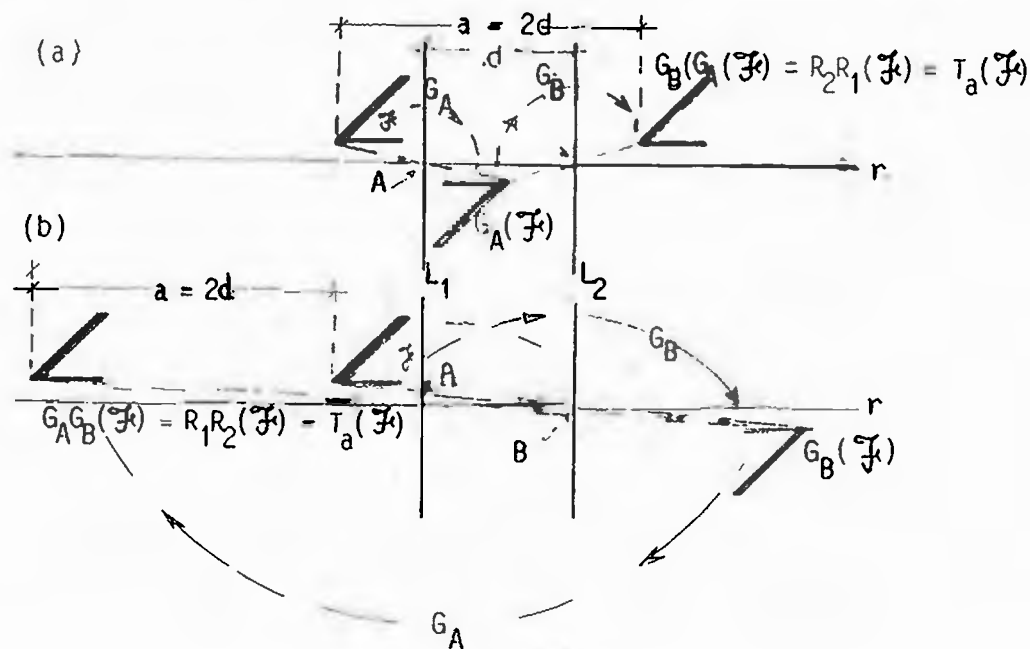


Fig. 5.8. Efecto logrado por un par de giros. a) alrededor de A y después alrededor de B; b) B y después A.

5.2.3 Composición c_2

La composición de una traslación y una reflexión, la isometría resultante posee una importancia particular pues de ella es posible derivar, mediante una combinación adecuada, otras isometrías útiles para generar diseños de banda.

Al aplicar T_a a una determinada figura la orientación con respecto a la posición inicial no cambia; pero sí al aplicarle una reflexión, así que en la composición de una traslación y una reflexión se altera esa orientación y la de la figura resultante es opuesta a la de la inicial. Este hecho permite que esta composición también pueda lograrse como resultado de una sola reflexión, con su eje convenientemente, ubicado; esta situación la presentamos en forma más generalizada, aún cuando no se da una demostración completa, en el siguiente resultado:

Lema 6.1: En un patrón de diseño unilineal, la isometría resultante de efectuar la composición de una reflexión (con eje L_0 , $L_0 \perp r$) y una traslación (en a la dirección de r , una distancia a), o la inversa de tal traslación, es equivalente a aquella otra lograda aplicando una sola reflexión cuyo eje está ubicado una distancia $\frac{1}{2}a$ con respecto a L_0 en la dirección de r .

En la prueba aquí presentada consideraremos, en la banda, un determinado arreglo de los distintos ejes de reflexión, de entre las diferentes alternativas posibles; y dos compo-

siciones diferentes; así definida la situación, considérense los siguientes elementos:

Los puntos $p, p', p'', p'_1, p''_2 \in r$.

r : Eje de traslación, eje de la reflexión R_r

L_0 : Eje de la reflexión R_0 , $L_0 \perp r$

L_1 : Eje de la reflexión R_1 , $L_1 \perp r$

L_2 : Eje de la reflexión R_2 , $L_2 \perp r$

$L_{M(\Lambda)}$: Eje de la reflexión $R_{M(\Lambda)}$, $L_{M(\Lambda)} \perp r$

$A = L_0 \cap r$, $B = L_1 \cap r$, $C = L_2 \cap r$, $M(\Lambda) = L_{M(\Lambda)} \cap r$

$d = |BC|$, $a = 2d$, $k = |AB|$, $h = |pA|$

$L_0 \neq L_1$, $L_0 \neq L_2$, $L_1 \neq L_2$

Para este caso considérese el siguiente arreglo de los puntos en r , p - A - B - C y además $h < d$, esto es, la distancia entre p y A es menor que la existente entre B y C ; también $h < k$.

Alternativa 1: $T_a R_0(p) = R_{M(\Lambda)}(p)$

Sea $p \in r$, considérese el arreglo de puntos: p - A - B - C , donde $p' = R_0(p)$,

por ser R_0 una reflexión se tiene:

$$|pA| = |p'A| = h, \text{ o sea } |p'p| = 2h$$

Aplicando T_a a p' se tiene:

$$p'' = T_a(p') = T_a(R_0(p)) = T_a R_0(p), \quad |p'p''| = a = 2d$$

Todas las isometrías han ocurrido de manera tal que p y sus sucesivas imágenes pertenecen a r , T_a está definida de manera tal que permite obtener el siguiente arreglo en los puntos sobre r : p - p' - p'' . Esta situación es observable en la figura 5.9.a, entonces:

$$\begin{aligned}
 | p p'' | &= | pp' | + | pp' | \\
 &= 2h + 2d \\
 &= 2(h + d)
 \end{aligned}$$

Sea $L_{M(A)}$ tal que $M(A) \in L_{M(A)}$, entonces:

$$| pM(A) | = h + d = | M(A)p' |,$$

donde $L_{M(A)}$ es el eje de la reflexión $R_{M(A)}$ y se tiene el siguiente arreglo: $p - A - M(A)$, por lo que:

$$| pM(A) | = | pM(A) | + | AM(A) |$$

de ahí

$$\begin{aligned}
 | AM(A) | &= | pM(A) | - | pA | \\
 &= d + h - h \\
 &= d
 \end{aligned}$$

Este último resultado indica que la distancia de L_0 a $L_{M(A)}$ es $d = \frac{1}{2}a$; si $M'(A) = T_a(A)$ entonces $M(A)$ es el punto medio entre A y $T_a(A)$.

Alternativa 2: $R_{T_a}(p) = R_{M_1(A)}(p)$

Sea $p \in r$ y téngase la misma distribución de ejes, con sus respectivos puntos de intersección que el caso anterior, entonces:

$$p'_1 = T_a(p) \text{ y } |p'_1 p| = a = 2d$$

Aplicando T_a a p se ha logrado el siguiente arreglo, en la disposición de los puntos que intervienen: $p - A - p'_1$, ya que $d > h$, entonces

$$|pp'_1| = |pA| + |Ap'_1|$$

De donde

$$\begin{aligned}
 |Ap'_1| &= |pp'_1| - |pA| \\
 &= 2d - h
 \end{aligned}$$

Ahora, aplicando R_o a p'_1 se tiene:

$$p''_1 = R_o(p'_1) = R_o(T_a p) = R_o T_a(p)$$

Por ser R_o una reflexión y el punto de intersección de su eje con r es el punto A , entonces:

$$|p''_1 A| = |Ap'_1| = 2d - h$$

pero por ser $d > h$ se tiene que $p''_1 - p - A$, de donde:

$$|p''_1 A| = |p''_1 p| + |pA|$$

$$|p''_1 p| = |p''_1 A| - |pA|$$

$$= 2d - h - h$$

$$= 2(d - h)$$

Sea $L_{M_1(A)}$ tal que $M_1(A) \in L_{M_1(A)}$ y

$$|p''_1 M_1(A)| = |M_1(A)p| = d - h$$

Como $L_{M_1(A)}$ es el eje de la reflexión $R_{M_1(A)}$ y se tiene el siguiente arreglo de puntos $p''_1 - M_1(A) - p - A$, por lo que:

$$|M_1(A)A| = |M_1(A)p| + |pA|$$

$$= (d - h) + h$$

$$= d$$

El último resultado indica que la distancia desde L_o a $L_{M_1(A)}$ es $d = \frac{1}{2}a$. si $M'_1(A) = T_{-a}(A)$ entonces $M_1(A)$ es el punto medio entre A y $T_{-a}(A)$; este resultado es observable en la figura 5.9.b.

En esta oportunidad se han tomado varias restricciones, que vuelven muy particular el esbozo de demostración; pero ello se ha hecho con la finalidad de facilitar la comprensión, tanto teórica como visual de la composición de

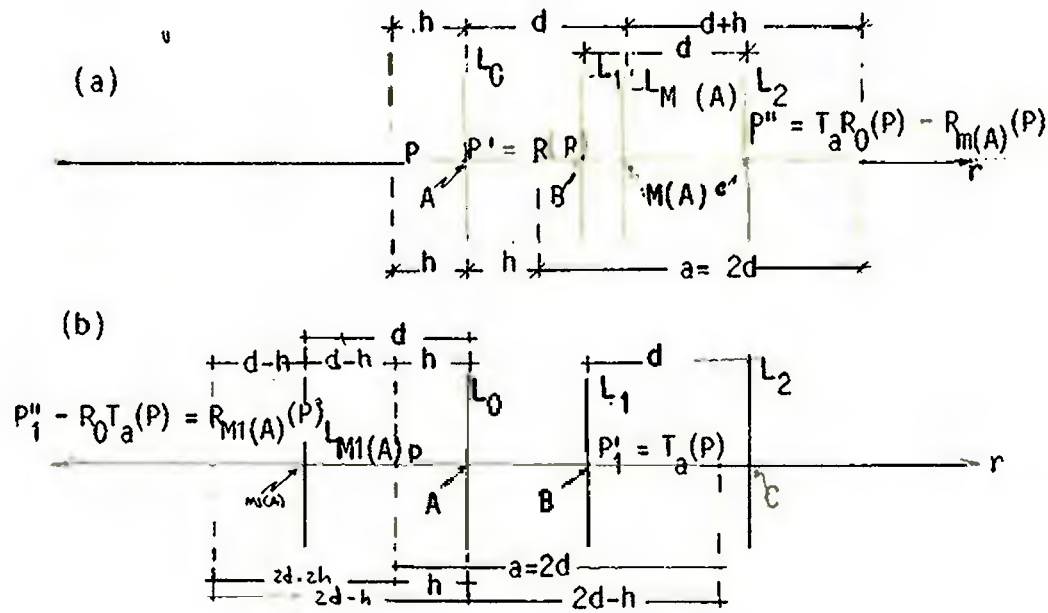


Fig. 5.9. Resultado de la composición de una traslación y una reflexión, (a) $T_a R_0(p) = R_{M(A)}(p)$, (b) $R_0 T_a(p) = R_{M_1(A)}(p)$, donde $|M(A)A| = d = |AM_1(A)|$.

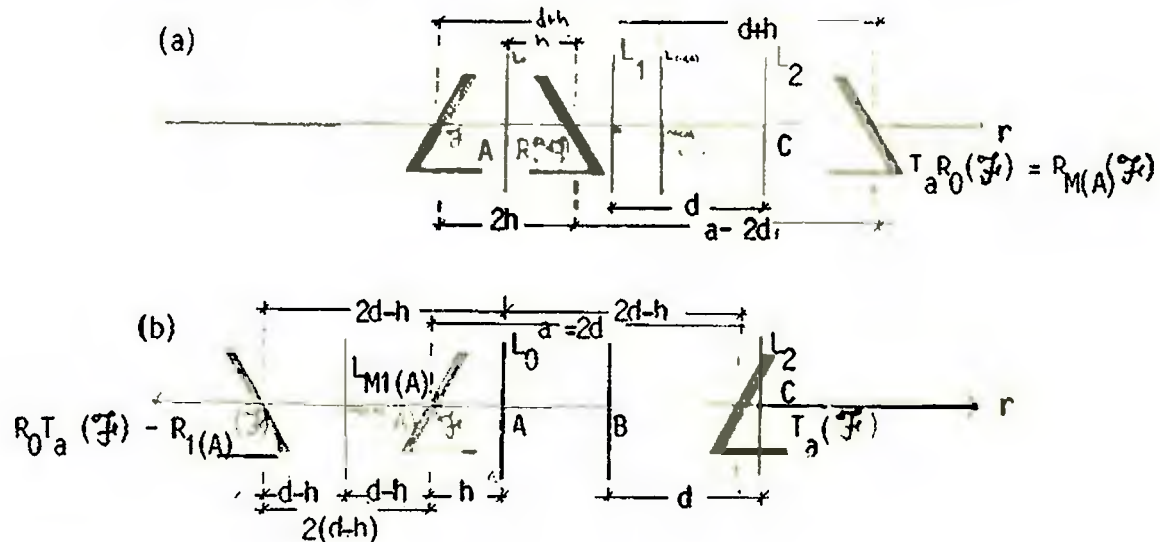


Fig.5.10 Resultado de la composición de una traslación y una reflexión, (a) $T_a R_0(\mathcal{F})$, (b) $R_0 T_a(\mathcal{F}) = R_{M_1(A)}$, donde $|AM_1(A)| = \frac{1}{2}a = |AM(A)|$.

isometrías aquí tratadas. Con estas composiciones se ha obtenido un nuevo eje de reflexión, en una posición tal que su distancia a L_0 , en uno y otro sentido es $\frac{1}{2}a$. Las únicas dos alternativas, debido a las limitaciones de movimiento en la banda, son las ya obtenidas; pero las alternativas de combinación de T_a y R_0 son:

$$T_a R_0, R_0 T_a, T_{-a} R_0, R_0 T_{-a}$$

Entonces resulta que las dos combinaciones todavía no consideradas cumplen con tomar uno u otro de los dos resultados obtenidos anteriormente, como se puede verificar, y ocurre que:

$$T_a R_0 = R_0 T_{-a}$$

O sea

$$T_a R_0 = R_0 T_a^{-1} = R_{M(\Lambda)}$$

y

$$R_0 T_a = T_{-a} R_0$$

Por lo que se tiene:

$$T_a^{-1} R_0 = R_0 (T_a^{-1})^{-1} = R_{M_1(\Lambda)}$$

Se pueden considerar todas las restantes alternativas en la ubicación de los elementos de simetría que intervienen y así obtener su demostración; en cada caso se obtendrá el mismo resultado de los que ya se tienen, En la figura 5.10 se muestra esta composición aplicado a una figura cualquiera \mathcal{F} . Una vez obtenido este importante resultado pasamos a considerar otras isometrías; pero antes una última observación.

Como $T_a = R_2 R_1$, se tiene que ésta isometría se puede escribir como :

$$(i) R_2 R_1 R_0 = R_0 R_1 R_2 = R_{M(A)}$$

$$(ii) R_1 R_2 R_0 = R_0 R_2 R_1 = R_{M_1(A)}$$

5.2.4 Composición c1.

Considérese el resultado de la composición de una traslación y una reflexión, donde ésta reflexión también participa en la traslación. Para esta situación consideremos dos alternativas de composición.

Sea:

R_1 la reflexión participante en la composición, y

$T_a = R_2 R_1$ la traslación,

entonces, tomando las ecuaciones (i) y (ii) de la parte anterior, composición c, se tiene:

Alternativa 1.

Partiendo de

$$(i) R_2 R_1 R_0 = R_0 R_1 R_2 = R_{M(A)}$$

pero en este caso $R_0 = R_1$, entonces:

$$R_2 (R_1 R_1) = (R_1 R_1) R_2 = R_{M(A)}$$

$$R_2 (I) = (I) R_2 = R_{M(A)}$$

$$R_2 = R_{M(A)}$$

En efecto, tal como se establece en la composición c, $R_{M(A)}$ que aquí es R_2 , se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}a$ del eje de la reflexión que participa en la composición, que en este caso es R_1 .

Alternativa 2.

Partiendo de

$$(ii) R_1 R_2 R_0 = R_0 R_2 R_1 = R_{M_1(A)}$$

pero en este caso $R_0 = R_1$, entonces:

$$R_1 R_2 R_1 = R_1 R_2 R_1 = R_{M_1(A)} \quad (iii)$$

Pero tal como ya se estudió en la composición anterior, el eje de la reflexión $R_{M_1(A)}$ se encuentra a una distancia d del eje de la reflexión R_1 , al igual que R_2 , en sentido opuesto, en la dirección de r , por lo que cabe la oportunidad de entender que el eje de $R_{M_1(A)}$, $L_{M_1(A)}$ es el reflejado por R_1 , del eje de R_2 , L_2 ; ambos están a una distancia d de L_1 , eje de la reflexión R_1 , a un lado y otro del mismo. Se puede representar, en este caso, como:

$$L_{M_1(A)} = R_1(L_2),$$

y escribirse como

$$R_{M_1(A)} = R_{R_1(L_2)}$$

Por lo que la ecuación (iii) se escribe como:

$$R_1 R_2 R_1 = R_{R_1(L_2)} \quad (iv)$$

Este resultado dice que la composición equivale a aplicar la isometría de los extremos al eje de la isometría que ocupa la posición intermedia. Sobre esto volveremos. Observese que:

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_1 &= R_1(R_2 R_1) = R_1 T_a \\ &= (R_1 R_2) R_1 = T_a^{-1} R_1 \end{aligned}$$

de ahí que se tenga la siguiente igualdad:

$$T_a^{-1} R_1 = R_1 T_a$$

Tal como ya se había estudiado anteriormente. Lo discutido en este apartado se ilustra en la figura 5.11.a y b.

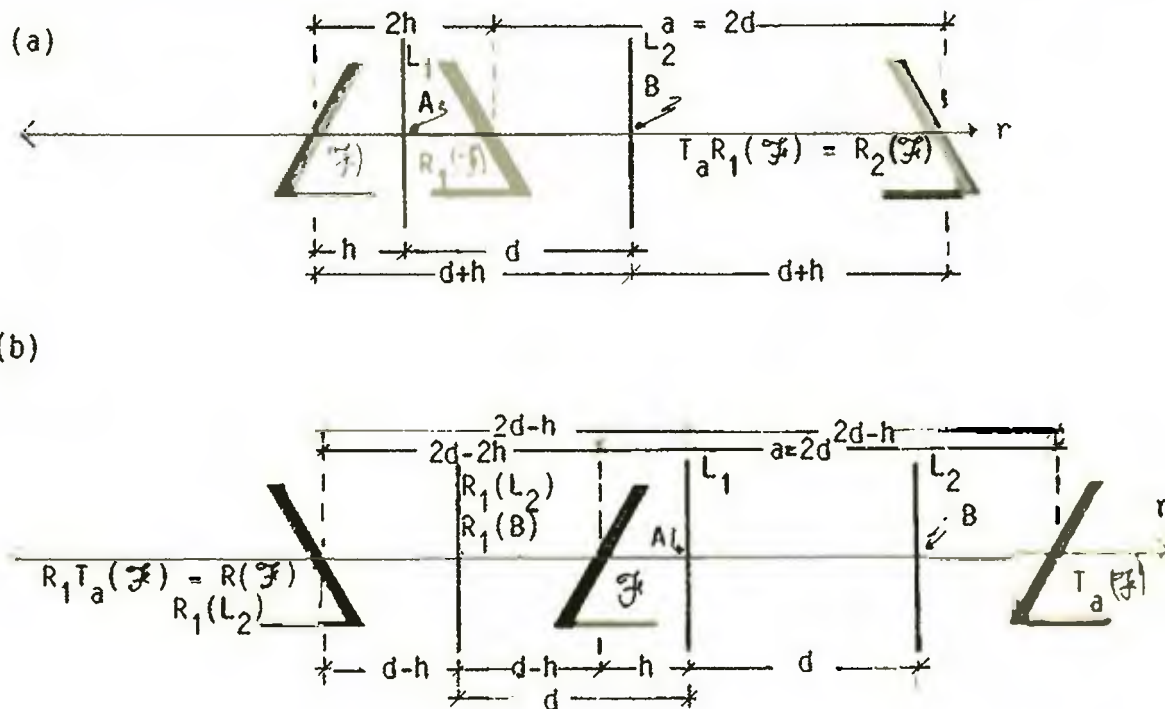


Fig. 5.11. Composición de una traslación y una reflexión cuando la reflexión participa en la traslación: $T_a = R_2 R_1$,
 (a) $T_a R_1 = R_2$, (b) $R_1 T_a = R_1(L_2)$.

Si en la composición anterior se hubiera considerado a R_2 como la participante, en vez de R_1 , el resultado no sería el mismo; pero sí semejante, esto es que el eje de la reflexión resultante estaría a una distancia d del eje L_2 , a un lado y a otro, en la dirección de r , entonces uno de ellos sería L_1 , asociado R_1 , y el otro su reflejado por R_2 , $R_2(L_1)$.

5.2.5 Composición d.

La composición de una media vuelta alrededor de un punto A , $A \in r$, y una traslación en la dirección de r , una distan-

cia a , tiene igual resultado que la aplicación de una media vuelta en un punto de r ubicado a una distancia $\frac{1}{2}a$ del primer punto de giro.

Esta composición de isometrías es una variante del resultado obtenido en la composición c , para lograrlo efectúese la composición de la reflexión R_r , con eje r y R_o , con eje L_o ; por tener ejes perpendiculares su composición logra un giro de 180° , con centro de giro en el punto de intersección de sus respectivos ejes, A ; lo dicho es:

Alternativa 1.

Se tiene, de la composición c , que:

$$R_{M(A)} = T_{a O}$$

Aplicando a ambos lados R_r se tiene:

$$\begin{aligned} R_{M(A)} R_r &= T_{a O} R_r \\ (R_{M(A)} R_r) &= T_{a O} (R_r) \\ G_{M(A)} &= T_{a A} \end{aligned}$$

También se tiene, cuando se aplica R_r al otro lado de los términos de la igualdad de la que se partió:

$$\begin{aligned} R_r R_{M(A)} &= R_r T_{a O} \\ &= R_r R_2 R_1 R_o \\ &= (R_r R_2) R_1 R_o \\ &= (R_r R_2) R_1 R_o \\ &= R_2 (R_r R_1) R_o \\ &= R_2 (R_r R_1) R_o \\ (R_r R_{M(A)}) &= (R_r R_2) (R_r R_o) \\ T_{a A} &= G_{M(A)} \end{aligned}$$

Alternativa 2.

Se tiene de la composición c que:

$$R_{M_1(A)} = R_O T_a$$

Aplicando a ambos lados R_r se tiene:

$$R_{M_1(A)} R_r = R_O T_a R_r$$

Reubicando a R_r ,

$$(R_r R_O) T_a = (R_{M_1(A)} R_r)$$

Y de ahí que:

$$G_A T_a = G_{M_1(A)}$$

También se tiene, cuando se aplica R_r al otro lado de los términos de la igualdad de la que se partió:

$$R_r R_{M_1(A)} = R_r R_O T_a$$

$$(R_r R_{M_1(A)}) = (R_r R_O) T_a$$

$$G_A T_a = G_{M_1(A)}$$

En la figura 5.12 a y b se muestra gráficamente este resultado.

5.2.6 Composición d1.

La composición de una media vuelta alrededor de un punto A y una traslación, T_a , en la dirección de r; en la cual la primera de las dos reflexiones que las definen, perpendiculares a r, contiene a A. El resultado así obtenido es igual al logrado con una media vuelta alrededor de B, o alrededor de su reflejado por el eje de la otra reflexión que participa. Esta isometría es una variación del resultado obtenido en la

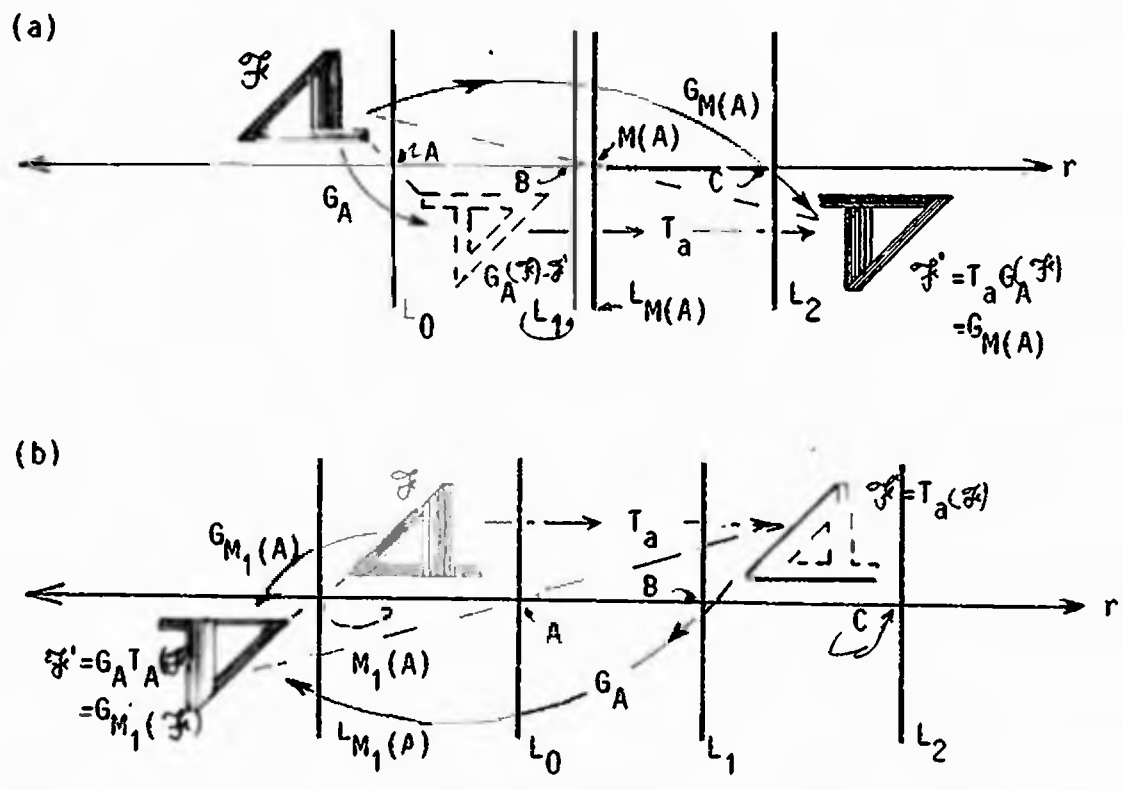


Fig. 5.12. Composición de una traslación y una semivuelta, (a) $T_a G_A = G_{M(A)}$, (b) $G_{M_1(A)} T_a = G_A$, donde se tiene $|AM(A)| = |AM_1(A)| = d = \frac{1}{2}a$.

composición d y en la composición ci .

Sea:

R_1 : reflexión, con eje L_1 , $L_1 \perp r$,

R_2 : reflexión, con eje L_2 , $L_2 \perp r$,

R_r : reflexión, con eje r ,

$A = L_1 \cap r$, $B = L_2 \cap r$,

$T_a = R_2 R_1$, $G_A = R_1 R_r$, $G_B = R_2 R_r$.

Entonces:

Alternativa 1.

En la composición ci se obtuvo:

$$T_{a_1} R_1 = R_2$$

Aplicando a ambos lados R_r se tiene:

$$T_{a_1} R_1 R_r = R_2 R_r$$

$$T_a (R_1 R_r) = (R_2 R_r)$$

$$T_a G_A = G_B$$

Alternativa 2.

En la composición c1 se obtuvo:

$$R_1 T_a = R_{R_1(L_2)}$$

Aplicando a ambos lados R_r se tiene:

$$R_r R_1 T_a = R_r R_{R_1(L_2)}$$

$$(R_r R_1) T_a = (R_r R_{R_1(L_2)})$$

$$G_A T_a = G_{R_1(B)}$$

El resultado obtenido en la alternativa 1 expresa que cuando se efectúa la composición de una media vuelta y a continuación opera una traslación su efecto equivale a aplicar una media vuelta con centro de giro en B. En la alternativa 2 se tiene que la composición del arreglo de las reflexiones con ejes perpendiculares a r , como se estudió en la alternativa c1, equivale a aplicar una sola reflexión, cuyo eje es aquel que se ha obtenido por la reflexión de l_2 , usando R_1 . De ahí que, si la intersección de r con l_2 es B, el resultado de aplicarle R_1 sea $R_1(B)$, y que también sea la intersección de r con $R_1(l_2)$; donde tanto B como $R_1(B)$ pertenecen a r , tal como se exige en un diseño de banda y está expresado en la definición 5.2. Cuando el centro de giro de la media

vuelta participante es B, el resultado es otra media vuelta con centro de giro, perteneciente a r , ubicado a una distancia $d (= \frac{1}{2}a)$ de B; uno de ellos es A y el otro, necesariamente, $R_2(A)$. La figura 5.13.a-d muestran estos resultados.

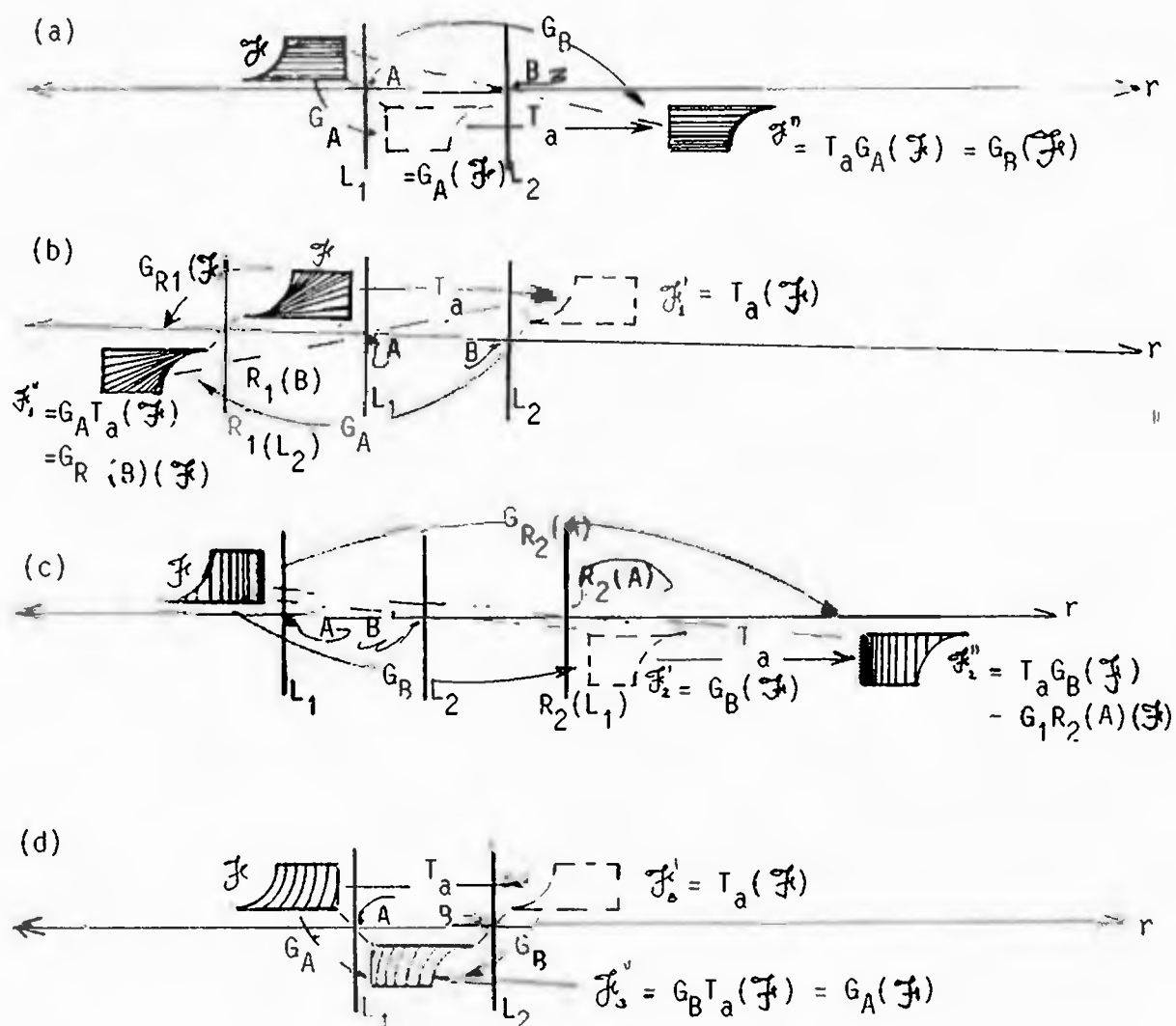


Fig. 5.13. Composición de una traslación y una media vuelta en un diseño de banda, cuando el centro de giro de la media vuelta es el punto de intersección de una de las reflexiones de la traslación con r . a) $T_a G_A = G_B$, b) $G_A T_a = G_{R_1(B)}$, c) $T_a G_B = G_{R_2(A)}$, d) $G_B T_a = G_A$.

5.2.7 Composición e.

El siguiente par de composiciones logran el mismo resultado:

$$T_a R_o \text{ y } R_o T_{-a};$$

así también:

$$T_{-a} R_o \text{ y } R_o T_a.$$

En esta oportunidad abordamos la misma afirmación hecha en la composición c. En un diseño de banda se tiene que una traslación cualquiera, en la dirección de r , y una reflexión, con eje perpendicular a r cumple (bajo estas condiciones) con:

$$TR = RT^{-1}$$

Cuando $T = T_a$ y $R = R_o$ se tiene:

$$T_a R_o = R_o T_a^{-1}$$

O sea:

$$T_a R_o = R_o T_{-a}$$

Cuando $T = T_b$ y $R = R_o$ se tiene:

$$T_b R_o = R_o T_b^{-1}$$

O sea:

$$T_b R_o = R_o T_{-b}$$

Cuando $T = T_{-a}$ y $R = R_o$ se tiene:

$$T_{-a} R_o = R_o [T_{-a}]^{-1}$$

O sea:

$$T_{-a} R_o = R_o [T_a^{-1}]^{-1}$$

$$T_{-a} R_o = R_o T_a$$

Se mencionó en el capítulo 2, en los comentarios al corolario 2 del teorema 2.1 que siendo S_1 y S_2 dos isometrías arbitrarias ocurre en general que:

$$S_2 S_1 \neq S_1 S_2$$

Pero también se advertía que existen excepciones; una de ellas es cuando se tiene un par de reflexiones, R_1 y R_2 , cuyos ejes son perpendiculares entre sí, resultando que:

$$R_2 R_1 = R_1 R_2.$$

Se trata de una media vuelta alrededor del punto de intersección de tales ejes. En esta oportunidad la isometría considerada, resultado de la composición de una traslación y una reflexión, donde los ejes de las reflexiones que intervienen son paralelos entre sí. En un diseño de banda todos los ejes de reflexión que participan son paralelos, exceptuando el eje de la traslación, que es perpendicular a todos ellos. Una forma de explicar la validez de esta igualdad, en las condiciones antes descritas es la siguiente:

En la composición c se obtuvo $R_{M(A)}$ y $R_{M_1(A)}$, entonces:

Alternativa 1.

Sea

$$R_{M(A)} = T_a R_o, \quad (i)$$

se conoce que:

$$R^2 = I, \text{ además } R = R^{-1}$$

por lo que:

$$(R_{M(A)})^2 = I,$$

$$\text{y } (R_{M(A)}) = (R_{M(A)})^{-1} \quad (ii)$$

sustituyendo (i) en (u) se tiene

$$T_{a_0} R_0 = (T_{a_0} R_0)^{-1}$$

pero como $T_a = R_2 R_1$

$$\begin{aligned} T_{a_0} R_0 &= (R_2 R_1 R_0)^{-1} \\ &= R_0 R_1 R_2 \\ &= R_0 (R_1 R_2) \\ &= R_0 T_a^{-1} \end{aligned}$$

Esto es:

$$T_{a_0} R_0 = R_0 T_{-a} \quad (iii)$$

O también

$$R_2 R_1 R_0 = R_0 R_1 R_2$$

como ya se había representado en la ecuación (i) de la parte final de la composición c.

Alternativa 2.

Sea:

$$R_{M_1(A)} = R_0 T_a \quad (iv)$$

de manera semejante a la alternativa 1 se tiene que:

$$R_{M_1(A)} = (R_{M_1(A)})^{-1} \quad (v)$$

Sustituyendo (iv) en (v) se tiene:

$$\begin{aligned} R_0 T_a &= (R_0 T_a)^{-1} \\ &= T_a^{-1} R_0 \end{aligned}$$

Esto es:

$$R_0 T_a = T_{-a} R_0 \quad (vi)$$

O también

$$R_0 R_2 R_1 = R_1 R_2 R_0$$

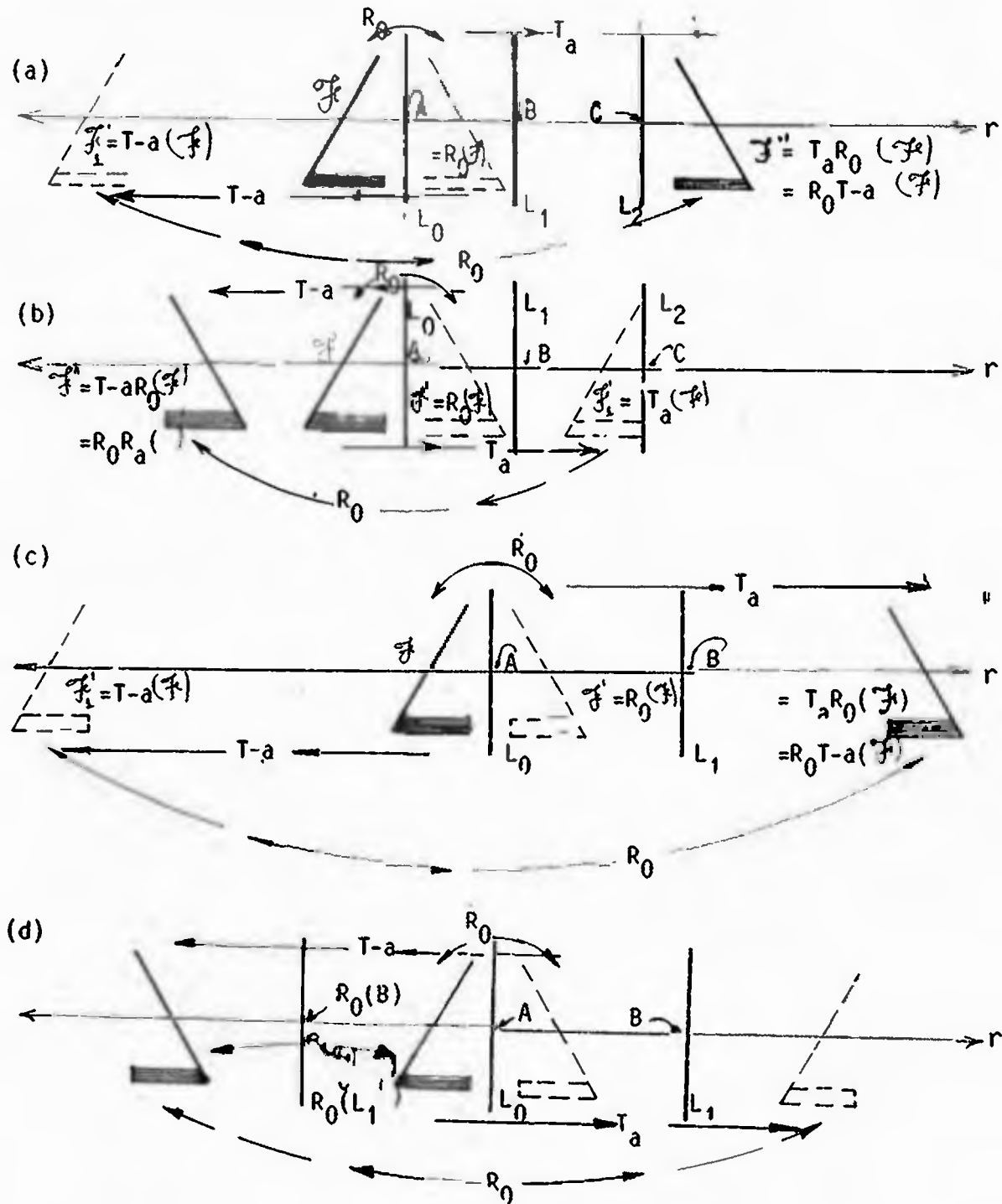


Fig.5.14. Ejemplos de la igualdad $TR = RT^{-1}$; en a y b se usa $T_a = R_2 R_1$, en c y d se usa $T_a = R_1 R_0$. a) $T_a R_0 = R_0 T-a$
 b) $T-a R_0 = R_0 T_a$, c) $T_a R_0 = R_0 T-a$, d) $R_0 R_1 R_0 = T-a R_0 = R_0 T_a = R_0(L_1)$

Este resultado es el mismo que aquel que ya se había representado en la ecuación (ii) de la parte final de la composición c. Una presentación gráfica de éstos es la que se muestra en la figura 5.14 a,b; siendo la primera de ellas para la alternativa 1 y la otra para la alternativa 2.

Cuando el eje de la reflexión es uno de los ejes que definen la traslación se obtienen los resultados ya mencionados en la composición c1, y que también cumplen con la igualdad de composiciones aquí tratada, esta es posible observarla, para el caso cuando el primer eje de la traslación es el eje de la reflexión, en la figura 5.14.c y d.

5.28 Composición e1.

Las isometrías de la forma $T_a G_A$ y $G_A T_{-a}$ producen el mismo resultado.

En la composición e se ha visto que en un diseño de banda se cumple que:

$$TR = RT^{-1}$$

Aplicando R a derecha a ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$\begin{aligned} TRR_r &= RT^{-1}R_r \\ T(RR_r) &= (RR_r)T^{-1} \\ TG_A &= G_A T^{-1} \end{aligned}$$

donde G_A es una media vuelta alrededor del punto de intersección de r y el eje de R, de ahí que se presentan las siguientes alternativas:

$$T(RR_r) = (RR_r)T^{-1}$$

$$TG_A = G_A T^{-1}$$

donde G_A es una media vuelta alrededor del punto de intersección de r y el eje de R , de ahí que se presentan las siguientes alternativas:

Alternativa 1.

Cuando $T = T_a$ y $R = R_o$, se tiene:

$$T_a R_o R_r = R_o R_r T_a^{-1}$$

de ahí

$$T_a G_A = G_A T_{-a}$$

Alternativa 2.

Cuando $T = T_{-a}$ y $R = R_o$, se tiene:

$$T_{-a} R_o R_r = R_o R_r T_{-a}$$

de ahí

$$T_{-a} G_A = G_A T_a$$

En las dos alternativas anteriores se ha trabajado con el hecho de que T_a está compuesta por dos reflexiones distintas a la reflexión que participa en la composición; en las dos restantes alternativas se tiene que la traslación contiene a la reflexión que participa en la composición, esto es:

$$T_a = R_1 R_o$$

y la reflexión participante es R_o .

Alternativa 3.

Cuando $T = T_a$ y $R = R_o$, se tiene:

$$T_a R_o R_r = R_o R_r T_{-a}$$

de ahí

$$\begin{aligned}
R_1 R_0 R_0 R_1 &= R_0 R_1 R_0 R_1 \\
R_1 (R_0 R_0) R_1 &= R_0 (R_1 R_0) R_1 \\
&= R_0 (R_0 R_1) R_1 \\
&= (R_0 R_0) R_1 R_1 \\
R_1 R_1 &= R_1 R_0 \\
G_B &= G_B
\end{aligned}$$

Alternativa 4.

Cuando $T = T_{-a}$ y $R = R_0$, se tiene:

$$T_{-a} R_0 R_1 = R_0 T_a R_1$$

sustituyendo T_a por su equivalente $R_1 R_0$

$$\begin{aligned}
T_{-a} (R_0 R_1) &= R_0 (R_1 R_0) R_1 \\
T_{-a} G_A &= R_0 R_1 (R_0 R_1) \\
&= R_0 R_1 (R_1 R_0) \\
&= R_0 (R_1 R_1) R_0 \\
&= R_0 G_B R_0
\end{aligned}$$

Por las composiciones hechas para obtener este resultado es posible establecer otras combinaciones de las distintas isometrías involucradas y así lograr:

$$T_{-a} G_A = G_A T_a = G_{R_0(B)} = R_0 G_B R_0$$

Debido a la gran semejanza que existe entre este tipo de composición con la tratada en la parte anterior no se dan ejemplos gráficos de ésta parte, su única diferencia es la participación de la reflexión R_1 ; pero por lo interesante de la composición tratada en la alternativa 4 damos algunos detalles de su obtención y un ejemplo gráfico del mismo.

En la composición c_1 se obtuvo el siguiente resultado:

$$R_1 R_2 R_1 = R_{R_1(L_2)}$$

Si en éste cambiamos los índices que identifican a los ejes de reflexión, el significado de tal composición no se altera en lo absoluto, y de ahí que se pueda escribir como:

$$R_{O_1} R_1 R_{O_1} = R_{R_{O_1}(L_1)} \quad (vi)$$

agrupando

$$R_{O_1} (R_1 R_{O_1}) = R_{R_{O_1}(L_1)}$$

sustituyendo $R_1 R_{O_1}$ por su equivalente T_{-a} se tiene

$$R_{O_1} T_{-a} = R_{R_{O_1}(L_1)} \quad (vii)$$

agrupando de una manera diferente,

$$(R_{O_1} R_1) R_{O_1} = R_{R_{O_1}(L_1)}$$

esto es

$$T_{-a} R_1 = R_{R_{O_1}(L_1)} \quad (ix)$$

Por lo que

$$R_{O_1} R_1 R_{O_1} = T_{-a} R_{O_1} = R_{O_1} T_a = R_{R_{O_1}(L_1)} \quad (x)$$

Aplicando R_r y agrupando se tiene

$$R_{O_1} (R_r R_1) R_{O_1} = T_{-a} (R_r R_{O_1}) = (R_r R_{O_1}) T_a = (R_r R_{O_1}(L_1))$$

y de ahí que

$$R_{O_1} R_r R_{O_1} = T_{-a} R_r = R_r T_a = R_{R_{O_1}(B)}$$

Todos los centros de giro usados pertenecen a r ; el correspondiente para la media vuelta lograda en $R_r R_{O_1}(L_1)$ es el reflejado de $B(= L_1 \cap r)$, de ahí que ese punto sea $R_{O_1}(B)$.
 Este resultado aparece en la figura 5.15. " "

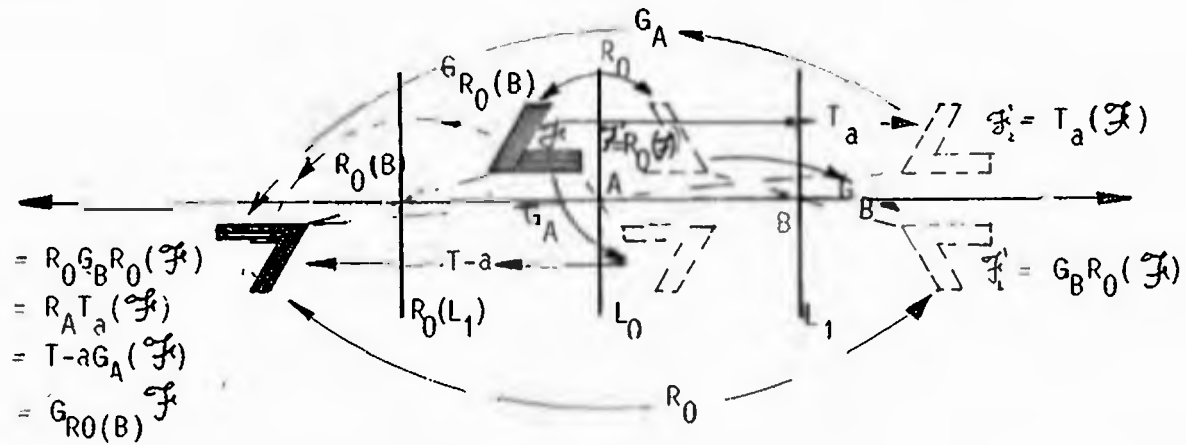


Fig. 5.15. Resultado de aplicar $T_a G_A = G_A T_a$, donde $G_A = R_r R_0$ y $T_a = R_l R_0$.

5.2.9 Composición f.

En un diseño unilineal se cumple la igualdad:

$$MRM^{-1} = R_{M(L)}$$

donde M es cualquiera de las isometrías permitidas en este tipo de diseños, R una reflexión con eje L perpendicular a r. Esta igualdad resume un hecho que ya se ha tratado en las composiciones anteriores.

Se tiene que:

$$R_0 R_1 R_0 = R_{R_0(L_1)} \quad (vi)$$

pero se sabe también que

$$R_0 = R_0^{-1}$$

por lo que (vi) se puede escribir como

$$R_0 R_1 R_0^{-1} = R_{R_0(L_1)}$$

y se tiene así la forma aquí requerida.

De nuevo

$$R_{O_1} R_{O_1} R_{O_1} = R_{R_{O_1}(L_1)} \quad (vii)$$

usando $I = R_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1}$ se tiene

$$I R_{O_1} R_{O_1} R_{O_1} = R_{R_{O_1}(L_1)}$$

$$R_{\Gamma_1} R_{\Gamma_1} R_{O_1} R_{O_1} R_{O_1} = R_{R_{O_1}(L_1)}$$

como r es perpendicular a L_1 se tiene que $R_{\Gamma_1}(L_1) = L_1$, además en la igualdad anterior ordenando los términos que participan, se tiene que:

$$(R_{\Gamma_1} R_{O_1}) R_{O_1} (R_{\Gamma_1} R_{O_1}) = R_{R_{O_1} R_{\Gamma_1}(L_1)}$$

o sea

$$G_{A_1} R_{A_1} G_{A_1} = R_{G_{A_1}(L_1)}$$

recuérdese que

$$G_A = G_A^{-1}$$

y con eso se tiene

$$G_{A_1} R_{A_1} G_{A_1}^{-1} = R_{G_{A_1}(L_1)}$$

que es la forma aquí requerida.

Consideremos ahora otra isometría:

En la composición e se obtuvo:

$$R_{O_1} T_{-a} = T_a R_{O_1}$$

aplicando T_a a izquierda a ambos lados de la igualdad anterior:

$$T_a R_{O_1} T_{-a} = T_a T_a R_{O_1}$$

esto es

$$T_a R_o T_a^{-1} = T_{2a} R_o$$

En la igualdad anterior la expresión de la izquierda corresponde a la forma aquí tratada; la de la derecha corresponde a la forma estudiada en la composición c, y ahí se mostró que corresponde a

$$T_a R_o = R_{M(A)}$$

donde $M(A)$ es la distancia entre L_o y $L_{M(A)}$, y

$$|AM(A)| = d = \frac{1}{2}a;$$

pero cuando se tiene, como es el caso aquí tratado, que:

$$|AM(A)| = 2d = a;$$

y el eje de reflexión al que pertenece A se ha desplazado una distancia a, que es la distancia lograda también por T_a , y se establece la siguiente igualdad, que nos permite lograr la forma de expresión tratada en esta parte,

$$M(A) = T_a(A)$$

por lo que se puede decir que:

$$T_a R_o T_a^{-1} = R_{T_a(L_o)}$$

Este último resultado se muestra en la figura 5.16.a; cuando la traslación contiene entre las reflexiones que la definen a R_o entonces el resultado es el mostrado en la figura 5.16.b.

5.2.10 Composición f1.

En un diseño de banda se cumple la siguiente igualdad:

$$MG_A M^{-2} = G_{M(A)}$$

Esta igualdad es una variante de los resultados obtenidos en la parte anterior; para los resultados ahí obtenidos se efectúa la composición a ambos lados con R_r con cuyo eje r forman ángulo recto todos los ejes considerados en esos resultados, en esa situación los centros de giro definidos para la media vuelta considerada se encuentran en la intersección de esos ejes y r , es así como se representan.

Alternativa 1.

Ya se conoce:

$$R_0 R_1 R_0 = R_{R_0(L_1)}$$

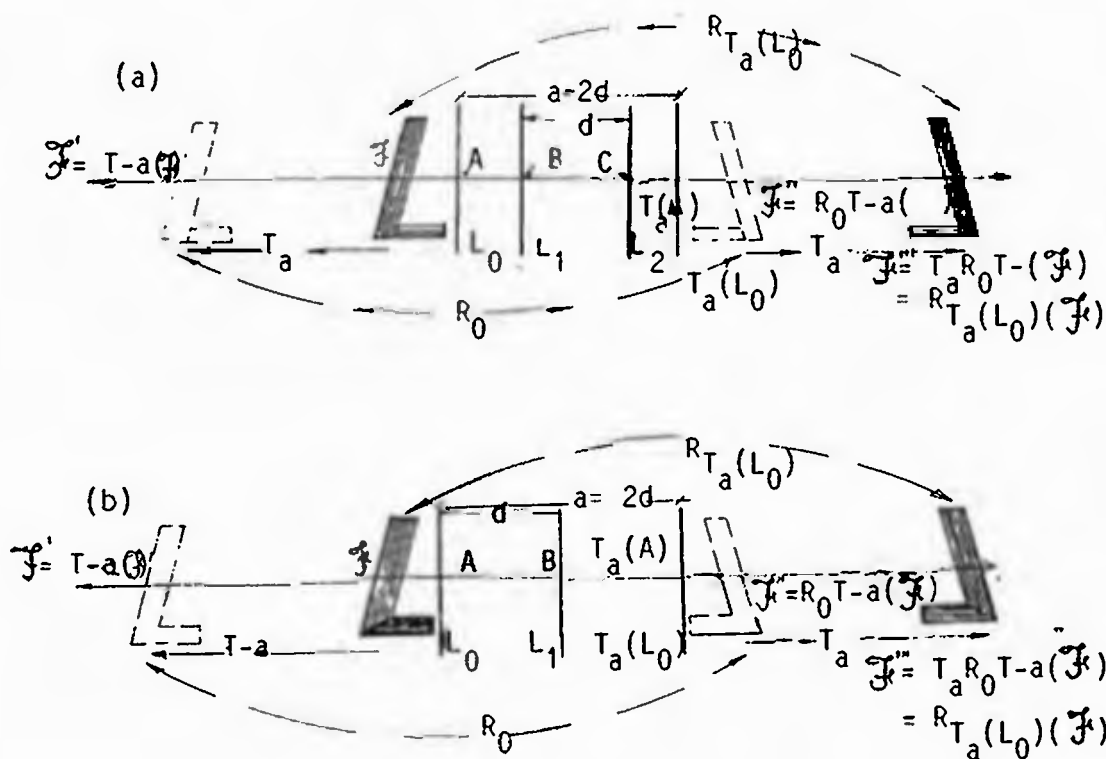


Figura 5.16. Resultado de la composición $T_a R_0 T_a = R_{T_a(L_0)}$,
 (a) cuando R_0 no participa de T_a , (b) R_0 participa de T_a ;

Aplicando R_r a izquierda a ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$\begin{aligned} R_{r_0} R_{r_1} R_{r_0} &= R_{r_0} R_{r_0} (L_1) \\ R_{r_0} (R_{r_1} R_{r_0}) &= (R_{r_1} R_{r_0} (L_1)) \end{aligned}$$

De ahí que:

$$R_{r_0} G_{r_0} R_{r_0} = G_{r_0} (B)$$

Alternativa 2.

Ya se conoce:

$$G_{r_1} R_{r_1} G_{r_1} = R_{r_1} G_{r_1} (L_1)$$

Aplicando R_r a izquierda a ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$R_{r_1} G_{r_1} R_{r_1} G_{r_1} = R_{r_1} R_{r_1} G_{r_1} (L_1)$$

Reordenando las isometrías participantes

$$G_{r_1} (R_{r_1} R_{r_1}) G_{r_1} = (R_{r_1} R_{r_1} G_{r_1} (L_1))$$

De ahí que:

$$G_{r_1} G_{r_1} G_{r_1} = G_{r_1} (B)$$

Alternativa 3.

Ya se conoce:

$$T_{r_1} R_{r_1} T_{r_1} = R_{r_1} T_{r_1} (L_1)$$

Aplicando R_r a izquierda a ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$R_{r_1} T_{r_1} R_{r_1} T_{r_1} = R_{r_1} R_{r_1} T_{r_1} (L_1)$$

Reordenando las isometrías participantes

$$T_a (R_{T_1}) T_{-a} = (R_{T_a(L_1)})$$

Y de ahí que:

$$T_a G_B T_{-a} = G_{T_a(B)}$$

Resulta fácil extender este resultado, ya obtenido en f y ampliado en esta parte; en efecto, si se utiliza T_{-a} se tiene:

$$T_{-a} G_B T_a = G_{T_{-a}(B)}$$

como puede demostrarse. Por la enorme semejanza con los resultados de f no presentamos figuras ilustrativas de este tipo de composición, la cual se ha obtenido ampliando los resultados en las secciones anteriores.

5.2.11 Composición g.

En un diseño de banda la composición de traslaciones que ocurren en el mismo sentido resulta conmutativa.

La demostración de la conmutatividad de las isometrías que intervienen se logra considerando el arreglo de las sucesivas imágenes que se van obteniendo.

Sea T_a una traslación en uno de los sentidos permitidos en un diseño de banda. T_a envía a todo punto considerado hasta una distancia a , en el sentido correspondiente; sea T_b otra traslación en la banda, que actúa en el mismo sentido de T_a y envía a un; determinado punto hasta una distancia b en el sentido correspondiente, entonces considérese un punto p que pertenece a r .

Sea $p \in r$

aplicando T_a se tiene

$$p' = T_a(p)$$

tal que

$$|p'p| = a$$

aplicando T_b se tiene

$$p'' = T_b(p')$$

donde

$$|p''p'| = b$$

de ahí

$$p'' = T_b(p') = T_b(T_a(p)) = T_b T_a(p)$$

y se ha obtenido el siguiente arreglo de puntos: $p-p'-p''$ debido a que tanto T_a como T_b actúan en el mismo sentido, de ahí que

$$|pp''| = |pp'| + |p'p''|$$

$$|pp''| = a + b \quad (*)$$

Aplicando T_b a p se tiene

$$p'_1 = T_b(p), \text{ y } |pp'_1| = b$$

Aplicando T_a a p'_1 se tiene

$$p''_1 = T_a(p'_1), \text{ y } |p'_1 p''_1| = a$$

entonces

$$p''_1 = T_a(p'_1) = T_a(T_b(p)) = T_a T_b(p)$$

Con esta composición se ha obtenido el siguiente arreglo de punto $p-p'_1-p''_1$, debido a que T_a y T_b actúan en el mismo sentido, de aquí que

$$|pp''_1| = |pp'_1| + |p'_1 p''_1|$$

$$|pp''| = b + a$$

Como los arreglos de puntos $p-p'-p''$ y $p-p'_1-p''_1$ están hacia el mismo lado y además

$$|pp''| = a + b = b + a = |pp''_1|$$

entonces

$$|pp''| = |pp''_1|$$

por lo que

$$p'' = p''_1$$

y

$$T_b T_a = T_a T_b$$

Este resultado se muestra en la figura 5.17. La composición aquí tratada resulta fácil de visualizarse en el caso siguiente:

$$T_{sa} = T_a T_a T_a$$

de ahí

$$T_{sa} = (T_a T_a) T_a = T_a (T_a T_a)$$

esto es

$$T_{sa} = T_{2a} T_a = T_a T_{2a}$$

Una variante del resultado es cuando se realiza la composición con R_r a ambos lados de la igualdad, obteniendo así una reflexión deslizante y una traslación.

Se tiene

$$T_a T_b = T_b T_a$$

componiendo con R_r

$$R_r T_a T_b = R_r T_b T_a$$

$$R_r T_a T_b = T_b R_r T_a$$

$$(R_r T_a T_b) = T_b (R_r T_a)$$

Haciendo

$$D_a = T_a R_r = R_r T_a$$

resulta

$$D_a T_b = T_b D_a$$

De esta manera terminamos de considerar las diferentes combinaciones de las isometrías permitidas en un diseño de banda, algunas han resultado de fácil percepción y otras no tanto; pero cada una contribuye a formar los diferentes tipos de diseño en una franja. Existen métodos alternativos de encontrar algunos resultados; como es el caso de considerar algunas igualdades resultado de una permutación; pero para mantenernos dentro de los objetivos del trabajo, de no recurrir a ninguna otra herramienta teórica más que las isometrías, y a que éstas se generan por la composición de reflexiones, no se ha intentado explicarlas de esa forma alternativa. Con estos resultados pasamos a considerar los grupos de diseño de banda, con una debida amplitud.

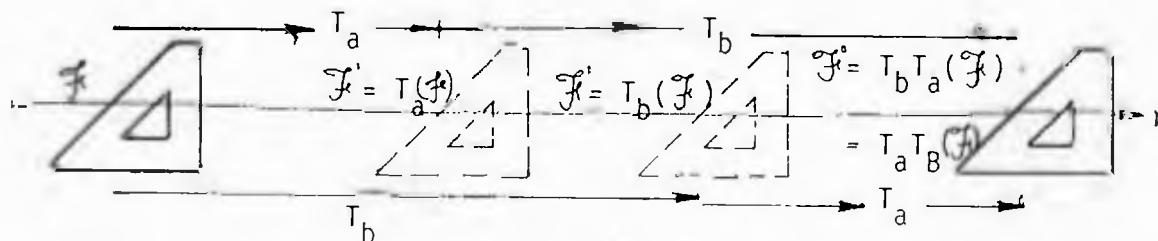


Fig. 5.17. Gráfica para $T_a T_b = T_b T_a$ en un diseño de banda. "

5.3. Los Grupos de Simetría en una Banda (Diseños Unilineales).

La clasificación de los distintos grupos de diseño de banda se presentan como un teorema y de él se presenta un amplio esbozo de lo que constituye su demostración.

Teorema 5.1. Fijada una recta r en el plano, donde ocurren traslaciones de distancia a , en la dirección de r ; entonces sean ahí las siguientes isometrías:

- a) T_a : Una traslación en la dirección de r , una distancia a ;
- b) R_r : Una reflexión, cuyo eje es la recta r ;
- c) G_A : Una media vuelta alrededor de $A = r \cap L_0$, $L_0 \perp r$,
 $G_A = G_{A, 180^\circ}$;
- d) R_1 : Reflexión con eje L_1 , $L_1 \cap r$;
- e) L : Reflexión deslizante, cuya traslación ocurre en la dirección de r ;

entonces solo existen siete tipos de grupos de frisos cuyos generadores son:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \langle T_a \rangle \\
 F_1^1 &= \langle T_a, R_r \rangle \\
 F_1^2 &= \langle T_a, R_1 \rangle \\
 F_1^3 &= \langle T_a, L \rangle \\
 F_2 &= \langle T_a, G_A \rangle \\
 F_2^1 &= \langle T_a, G_A, R_r \rangle \\
 F_2^2 &= \langle L, G_A \rangle
 \end{aligned}$$

Pasamos ahora a considerar cada uno de los grupos listados en el teorema anterior.

5.3.1 Grupo de friso F_1 .

Este grupo está constituido únicamente por traslaciones, de valor a ; está generado por T_a ,

$$F_1 = \left\{ T_{na} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

también se puede expresar como:

$$F_1 = \left\{ T_a^n : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Un ejemplo de este diseño se presenta en la figura 5.18.

Ocurre que cuando la traslación aquí considerada se expresa como el resultado de dos semivuelatas con centros de giro sobre r , de manera que:

$$T_a = G_B G_A$$

entonces el grupo en cuestión se puede expresar como:

$$F_1 = \left\{ (G_B G_A)^n : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

La figura 5.19 muestra ejemplos de diseños de banda del tipo F_1 presentes en la cerámica de la región central de Panamá (RC de Panamá).

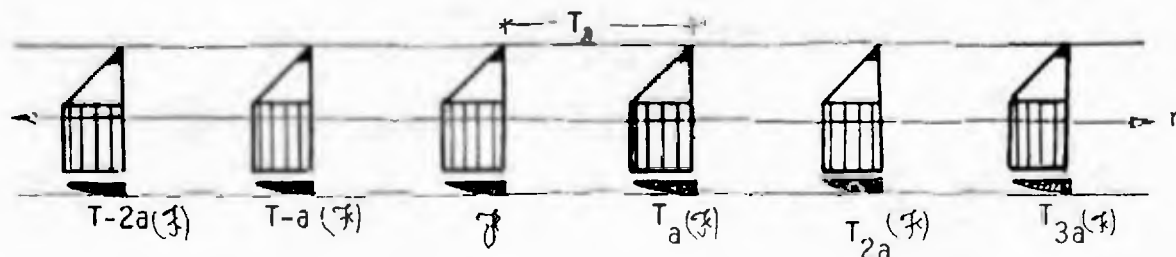


Fig.5.18. Ejemplo de diseño de banda infinito generado, por la traslación T_a , grupo de friso F_1 .

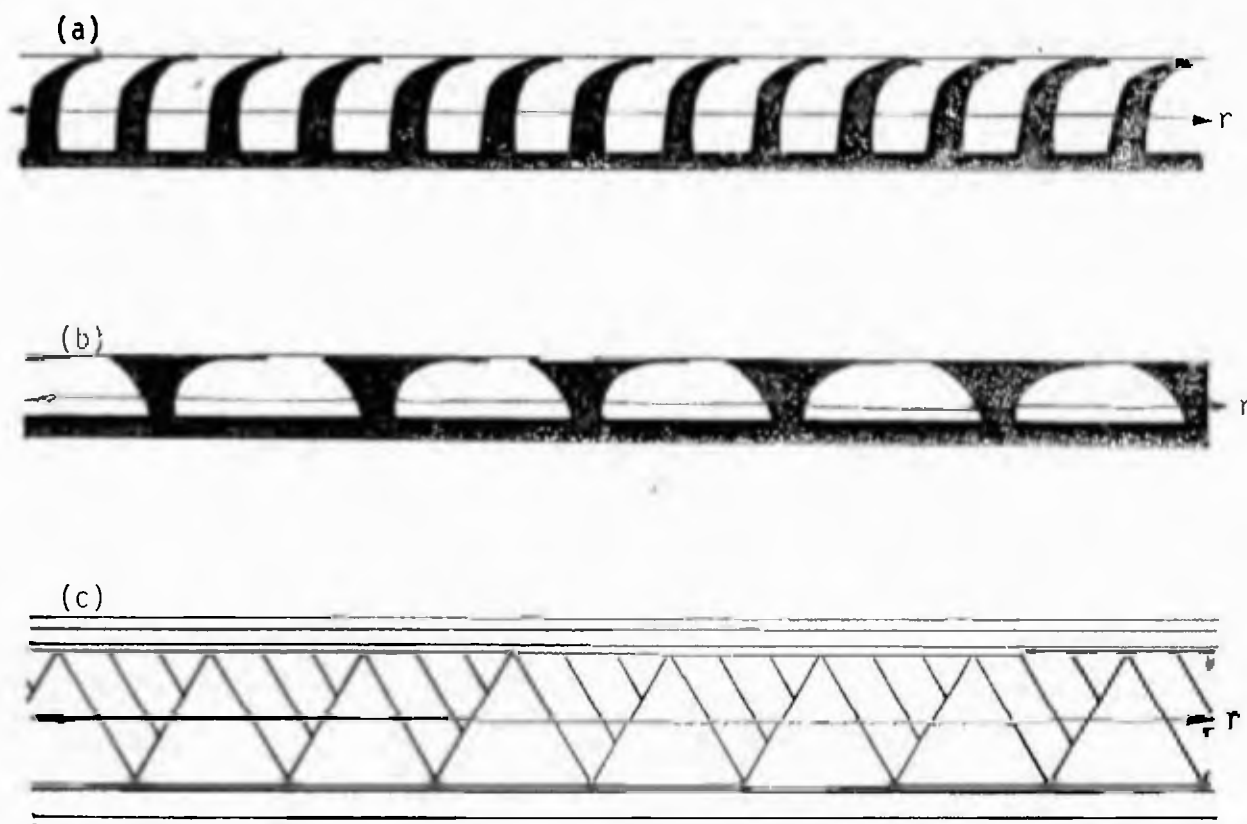


Fig. 5.19. Ejemplos de diseños del grupo F_1 pertenecientes a RC de Panamá. a) motivo en pieza del V Período, Estilo Conte; b) motivo en pieza del VI Período, Estilo Macaracas, c) en pieza transicional IV-V Período, Estilo Montevideo. a y b tomados de Lothrop [1942], c) en M. Antrp. "Reina Torres de Araúz", Panamá.

5.3.2 Grupo de friso F_2 .

Este grupo contiene traslaciones y una media vuelta con centro de giro en $A \in r$. Sus elementos son T_a y G_A , y sus combinaciones; ambas isometrías conservan la orientación de la figura sobre la que actúan. El grupo F_1 está contenido en F_2 ($F_1 \subset F_2$), $G_A \in F_2$; este grupo no contiene ninguna reflexión con eje perpendicular a r .

$$F_2 = \left\{ T_a^n G_A^l : n \in \mathbb{Z}, l \in \{1,2\} \right\}$$

un ejemplo de este diseño se presenta en la figura 5.20.

En este grupo se tiene, haciendo el mismo tipo de trabajo tal como fue tratado en la composición d, que:

$$T_{2ma} G_A = G_{T_m(A)}$$

$$T_{(2m+1)a} G_A = G_{M(A)}$$

$$T_{2(m+1)a} G_A = G_{T_{m+1}(A)}$$

entonces son centros de giro los puntos:

$$T_m(A) = A_m$$

$$T_{m+1}(A) = A_{m+1}$$

y

$$M(A) = M_m(A) = \frac{1}{2}(A_m + A_{m+1})$$

donde $m \in \mathbb{Z}$. En forma generalizada los centros de giro que existen en un diseño de banda del tipo F_2 son:

$$A_m \text{ y } M_m(A) = \frac{1}{2}(A_m + A_{m+1}), m \in \mathbb{Z}.$$

De esa manera, un giro arbitrario $G_B \in F_2$ deberá cumplir que:

$$G_B G_A = T_{na}, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

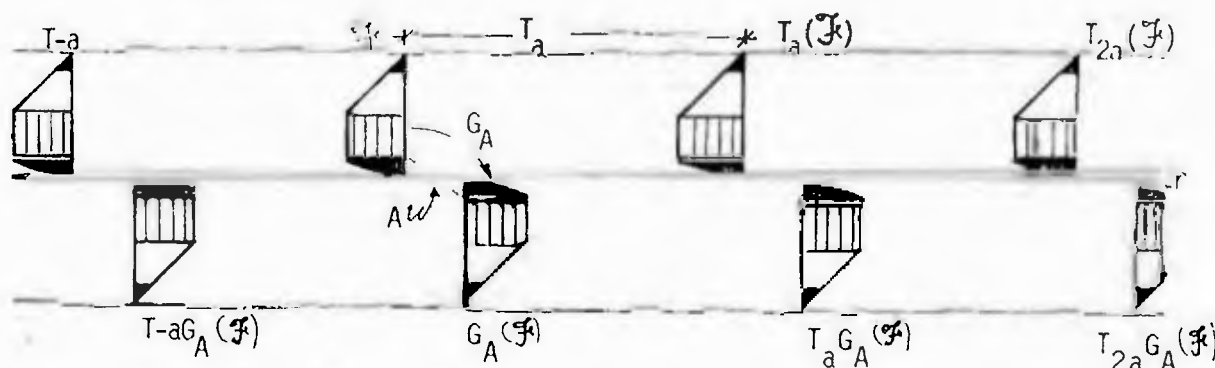


Fig. 5.20. Ejemplo de diseño de banda infinito del grupo F_2 generado por una traslación y una media vuelta.

Pero también se tiene que $G_A(A)$, por la definición 5.2, entonces:

$$\begin{aligned} G_B(A) &= G_B(G_A(A)) \\ &= G_B G_A(A) \\ &= T_{na}(A) \\ &= A_n \end{aligned}$$

Por pertenecer A y A_n al eje de la traslación, r , también el centro de giro $B \in r$, y es el punto medio entre A y A_n ; B es uno de los puntos M_m . En el caso más sencillo, cuando se tiene $G_B G_A = T_a$, se puede expresar este grupo como:

$$F_2 = \left\{ (G_B G_A)^n G_A^l : n \in \mathbb{Z}, l \in \langle 1, 2 \rangle \right\}$$

y los generadores son G_B y G_A ; una forma alternativa de definirlo, también con el mismo significado, es:

$$F_2 = \left\{ G_B^l (G_B G_A)^n : n \in \mathbb{Z}, l \in \langle 1, 2 \rangle \right\}$$

La figura 5.21 muestra el mismo diseño de banda de 5.20, mostrando como generadores G_B y G_A , donde B es el punto medio entre A y T_a . La figura 5.22 muestra ejemplos de F_2 en la cerámica de la región central de Panamá.

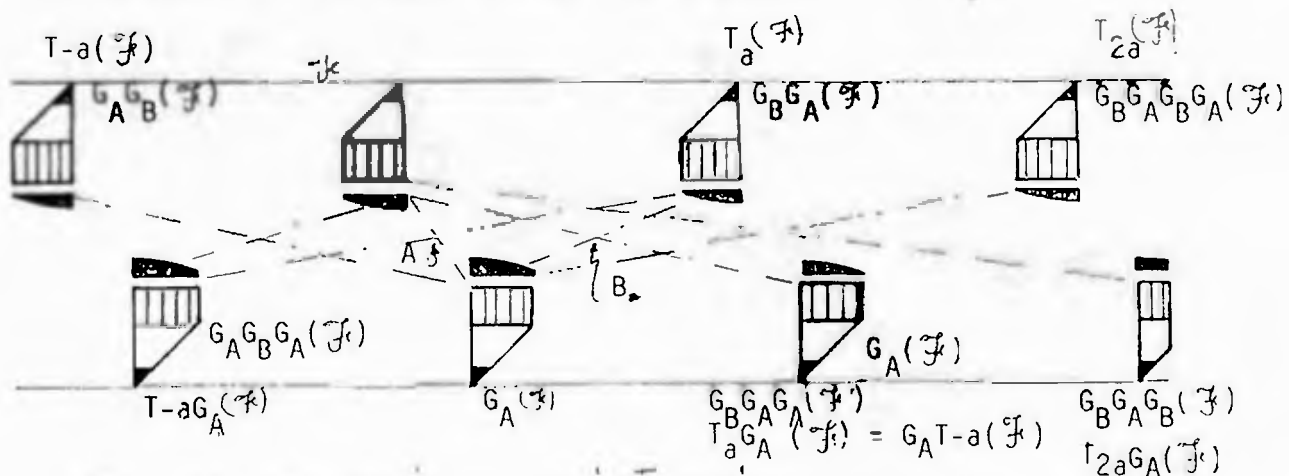


Fig. 5.21. El diseño de banda infinito para el grupo F_2 mostrando como generadores a G_B y G_A .

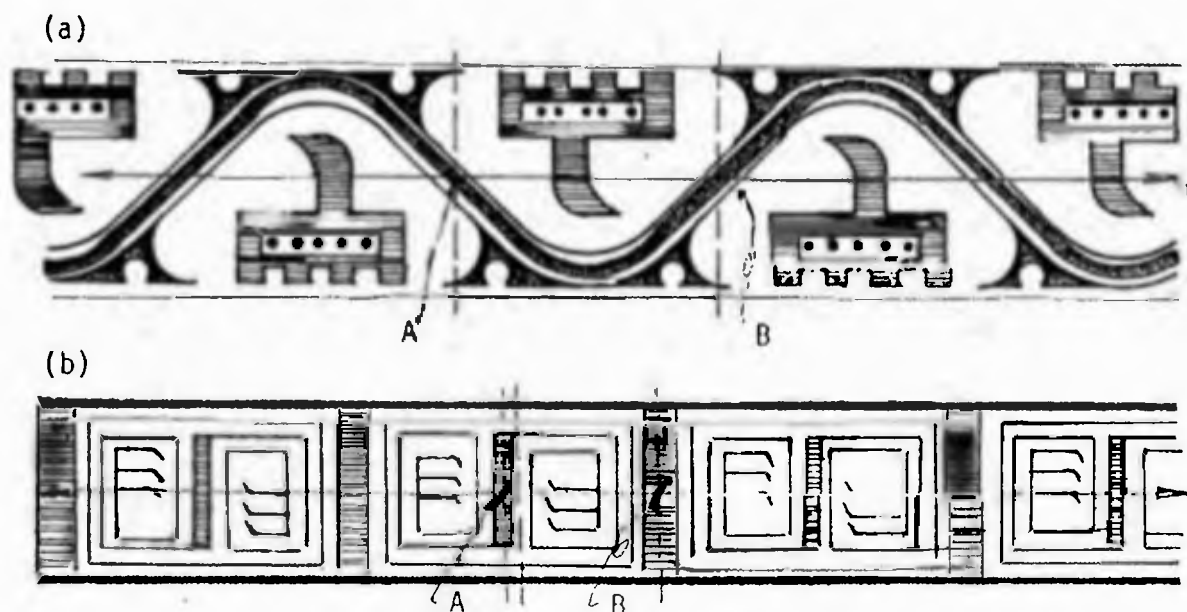


Fig. 5.22. Ejemplos de diseños de banda del grupo F_2 de RC de Panamá, a) motivo en pieza del V período, Estilo de Conte; b) en pieza de VI período, Estilo Macaracas.

5.3.3 Grupo de friso F_1^1 .

Este grupo de diseño unilineal se obtiene ampliando a F_1 con la reflexión R_r , cuyo eje es el eje de la traslación, r . Las isometrías permitidas con T_{na} y R_r y se puede expresar como:

$$F_1^1 = \left\{ T_a^n R_r^i : n \in \mathbb{Z}, i \in \langle 1, 2 \rangle \right\}$$

Tal como ya se trató en la composición a, aquí se tiene:

$$T_{ar}^n R_r = R_r T_a^n$$

Las isometrías que participan son, atendiendo a las diferentes composiciones posibles:

cuando $i = 2; n \neq 0$:	$T_{ar}^{2n} = T_a^n(I) = T_a^n$	Traslación
cuando $i = 1; n \neq 0$:	$T_{ar}^n R_r = T_a^n R_r$	Reflexión deslizante
cuando $i = 1; n = 0$:	$T_{ar}^0 R_r = (I)R_r$	Reflexión en r

Este grupo no contiene medias vueltas entre sus elementos de simetría ni tampoco simetrías por reflexión en algún eje perpendicular a r . un ejemplo de este tipo de diseño aparece en la figura 5.23. La figura 5.24 muestra ejemplos de diseños de este grupo encontrados en la cerámica pintada de la región central de Panamá.

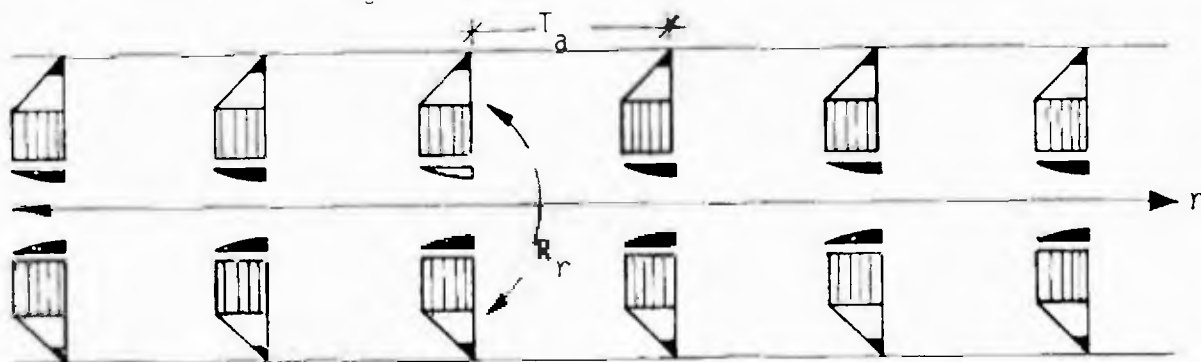


Fig. 5.23. Ejemplo de diseño de banda infinito del grupo F_1^1 generado por T_a y R_r .

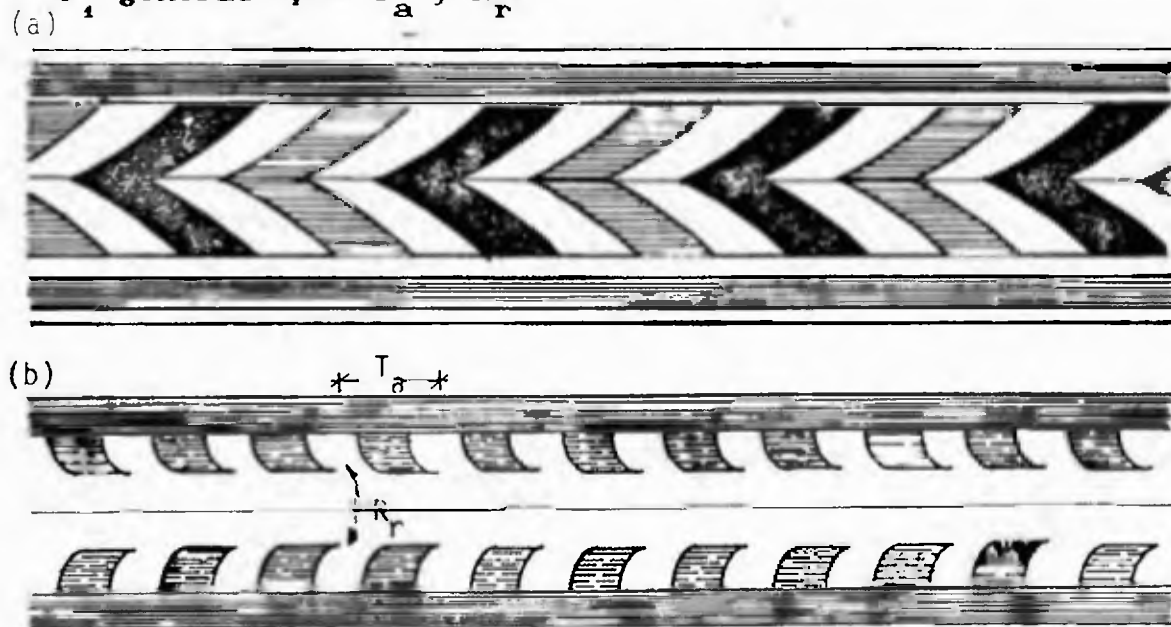


Fig. 5.24. Ejemplos de diseño de banda del tipo F_1^1 en la cerámica de RC de Panamá. a y b motivos en piezas del V período, Estilo Conte.

5.3.4 Grupo de friso F_2^1 .

Consiste en ampliar el grupo F_2 con la reflexión R_r , por lo que tal grupo puede ser escrito como:

$$F_2^1 = \left\{ T_a^n (G_A)^i (R_r)^j : n \in \mathbb{Z}, i, j \in \{1, 2\} \right\}$$

Las isometrías que se generan con esta composición son:

- (1) $n \neq 0, i = 2, j = 2: T_a^n (G_A)^2 (R_r)^2 = T_a^n$ Traslación
- (2) $n \neq 0, i = 2, j = 1: T_a^n (G_A)^2 R_r = T_a^n R_r$ Reflexión
deslizante
(Composic.a)
- (3) $n \neq 0, i = 1, j = 2: T_a^n G_A (R_r)^2 = T_a^n G_A$ Media vuelta
(Composic.d)
- (4) $n \neq 0, i = 1, j = 1: T_a^n G_A R_r = T_a^n (R_{L_0} R_r) R_r$
 $= T_a^n R_{L_0}$ Reflexión
 $= R_{\frac{1}{2} T_{na} (L_0)}$ (Composic.c)

De las isometrías logradas y mencionadas anteriormente, se tiene que los puntos nominados $\frac{1}{2} T_{na} (A)$ y las rectas, perpendiculares a r , representadas como $\frac{1}{2} T_{na} (L_0)$ indican, para un mismo valor de n , que el eje generado por la traslación de L_0 , hasta una distancia que es igual a la mitad de la distancia lograda con la traslación T_a^n , contiene al punto $\frac{1}{2} T_a^n (A)$ pues ese punto es la intersección del eje L_0 con r , de acuerdo a la definición 5.2. Un ejemplo de este diseño de banda aparece en la figura 5.25.

Este diseño de banda posee además de las traslaciones la reflexión R_r y la reflexión R_{L_0} cuya composición genera G_A , o sea que permite reflexiones en r y en un eje perpendicular a éste. Ejemplos de cerámica que posee diseños con este grupo aparecen en la figura 5.26.

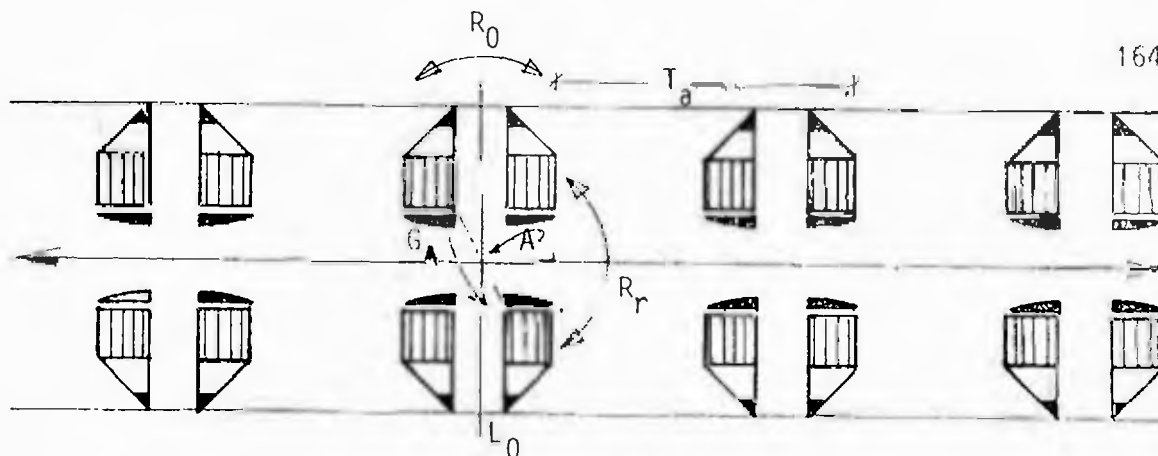
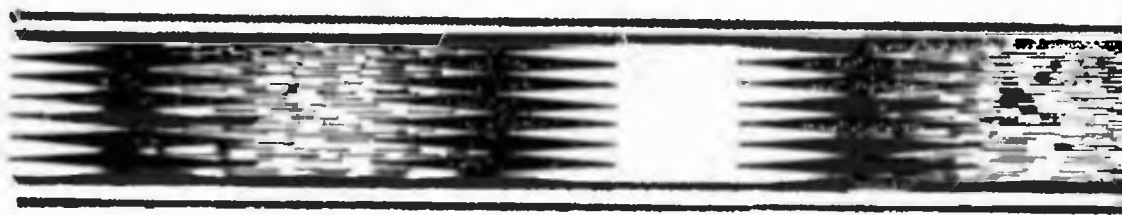


Fig. 5.25 Modelo de diseño de banda infinito del grupo F_2^1 , generado por T_a , G_A , y R_r .

(a)



(b)



Fig. 5.26 Ejemplos de diseños de banda, grupo F_2^1 , (a) diseño en pieza del VII período, Estilo Parita; (b) pieza del V período, Estilo Conte, Región Central de Panamá.

5.3.5 Grupo de friso F_1^2

F_1^2 se logra anexando a las traslaciones permitidas por F_1 con una reflexión R_1 , cuyo eje L_1 , es perpendicular a r .

$$F_1^2 = \left\{ T_a^n R_1^l, \mid n \in \mathbb{Z}, l \in \{1, 2\} \right\}$$

Este grupo contiene a todos los ejes de intersección que tienen en sus ejes los puntos A_n y M_n que fueron mencionados en la descripción del grupo F_2 . Un diseño característico del grupo se presenta en la figura 5.27 y ejemplos de este grupo en la cerámica de la Región Central en la figura 5.28.

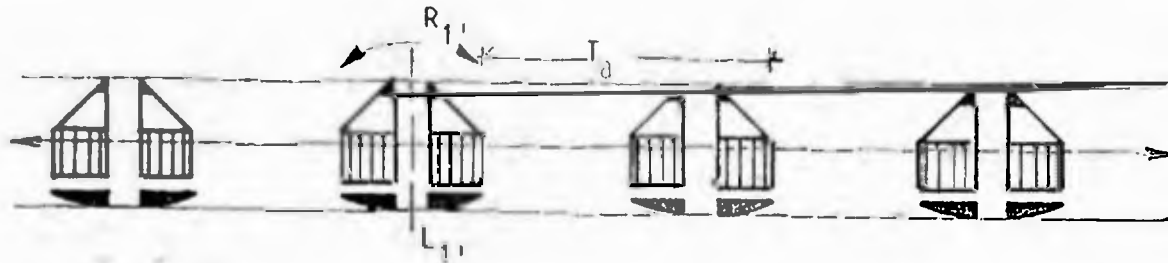
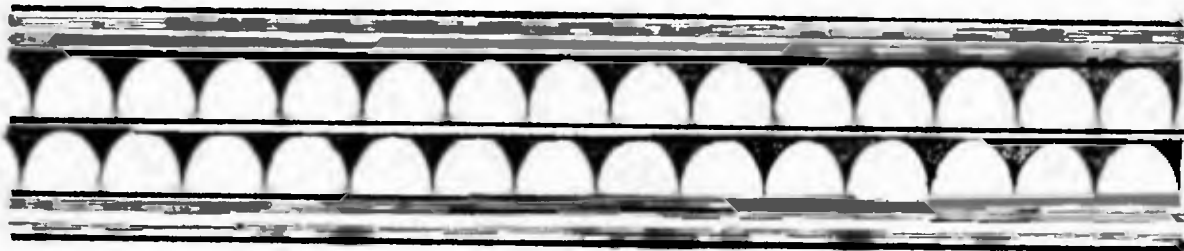


Fig. 5.27 Diseño de banda infinito del grupo F_1^2 , generado por T_a y $R_{1'}$, con eje $L_{1'}$, $L_{1''} \perp r$.

(a)



(b)

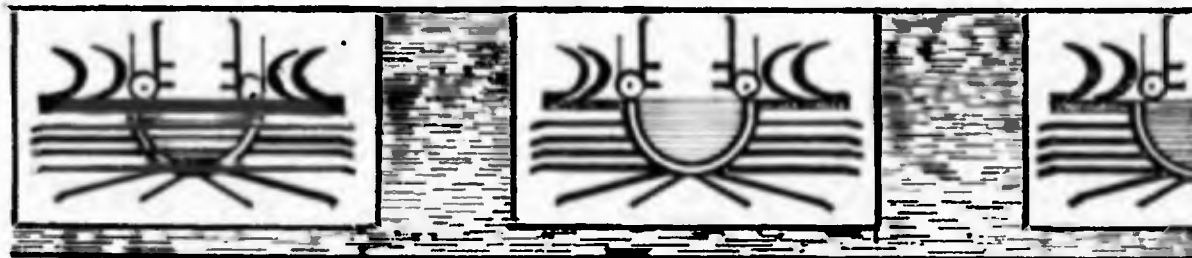


Fig. 5.28 Ejemplos de diseños de banda pertenecientes al grupo F_1^2 , (a) pieza del IV-V período, Estilo Montevideo, (b) pieza del VI período, Estilo Macaracas.

5.3.6 Grupo de friso F_2^2 .

Este grupo de diseño de banda se logra ampliando al grupo F_2 con una reflexión $R_{1'}$, con eje $L_{1'}$, perpendicular a r , y que tiene al punto $E = r \cap L_{1'}$, donde $E \neq A$ y $E \neq M$, M es el punto medio entre A y $T_a(A)$.

$$F_2^2 = \left\{ T_a^n G_A^i R_{1'}^j \mid n \in \mathbb{Z}, i, j \in \{1, 2\} \right\}$$

Tal como se define este grupo, en vista de que $E \neq A$ y de $E \neq M$, donde $|MA| = d = \frac{1}{2}a$, entonces se establece la restricción que la nueva reflexión no tenga por eje a L_1 , $L_1 \cap r = A$ ni tampoco a L_2 , $L_2 \cap r = M$.

Sea $p \in r$, entonces:

$$R_M R_A(p) = p'' \quad \text{y} \quad |pp''| = 2d$$

Por lo que

$$p' = T_a(p)$$

Esto es

$$R_M R_A = T_a$$

F_2^2 puede expresarse como:

$$F_2^2 = \left\{ (G_M G_A)^n G_A^i R_{1'}^j \mid n \in \mathbb{Z}, i, j \in \{1, 2\} \right\}$$

Considérese que el eje de la reflexión permitida fuera R_1 , entonces se tiene que el término:

$$(G_M G_A)^n G_A^i R_{1'}^j$$

adquiere determinados valores, dependiendo de las variaciones en los índices, como se muestra a continuación:

$$(1) \quad n \neq 0, \quad i = j = 2: \quad (G_M G_A)^n (G_A)^2 (R_1)^2 = T_a^n \quad \text{Traslación}$$

$$(2) \quad n \neq 0, \quad i = 2, \quad j = 1: \quad (G_M G_A)^n (G_A)^2 (R_1) = T_a^n R_1 \\ = R_1 \frac{1}{2} T_{na}(L_1) \quad \text{Reflexión como composición c}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad n \neq 0, \quad i = j = 1: \quad (G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 1} R_1 &= (G \ G)_{M \ A}^n (R \ R)_{r \ 1} R_1 \\
 &= (G \ G)_{M \ A}^n R_{r \ 1} (R \ R)_{1 \ 1} \\
 &= T_{a \ r}^n R
 \end{aligned}$$

Reflexión deslizante, composición a

$$\begin{aligned}
 (4) \quad n \neq 0, \quad i = 1, \quad j = 2: \quad (G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 1} (R_1)^2 &= (G \ G)_{M \ A}^n G_A \\
 &= T_{a \ A}^n G_A \\
 &= G_{\frac{1}{2} T_{n \ a} (A)}
 \end{aligned}$$

Media vuelta, composición d

Estos resultados son los mismos obtenidos en las simetrías de F_2^1 y en ese caso no se está generando ningún nuevo diseño de banda. Este mismo caso se tiene al considerar a R_2

$$\begin{aligned}
 &(G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 2} R_2 \\
 (1) \quad n \neq 0, \quad i = j = 2: \quad (G \ G)_{A \ A}^n G_{A \ 2} R_2 &= T_a^{-n} \\
 (2) \quad n \neq 0, \quad i = j = 1 \quad (G \ G)_{M \ A}^n (G \ G)_{A \ 2} R_2 &= T_a^n R_2 \\
 (3) \quad n \neq 0, \quad i = j = 1 \quad (G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 2} R_2 &= (G \ G)_{M \ A}^{n-1} (G \ G)_{M \ A \ A \ 2} G_{A \ 2} R_2 \\
 &= (G \ G)_{M \ A}^{n-1} G_{M \ A \ A \ 2} (G \ G)_{A \ 2} R_2 \\
 &= (G \ G)_{M \ A}^{n-1} (R \ R)_{r \ 2} R_2 \\
 &= (G \ G)_{M \ A}^{n-1} R_r (R \ R)_{2 \ 2} \\
 &(G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 2} R_2 = (G \ G)_{M \ A}^{n-1} R_r \\
 (4) \quad n \neq 0, \quad i = 1, \quad j = 2 \quad (G \ G)_{M \ A}^n G_{A \ 2} (R_2)^2 &= (G \ G)_{M \ A}^n G_A \\
 &= T_{a \ A}^n G_A
 \end{aligned}$$

Las isometrías generadas por este grupo se muestran a continuación y difieren de las que hemos mencionado antes y que se vió que pertenecían a F_2^1

Considérese a:

$$T_{a \ A \ 1}^n G_{A \ 1}^L R_1^J$$

- (1) $n \neq 0, i = j = 2$ $T_a^n G_A^2 R_1^2 = T_a^n$
Una traslación
- (2) $n \neq 0, i = 2, j = 2$ $T_a^n G_A^2 R_1^2 = T_a^n R_r = R_{1-T} (L_1)$
Una reflexión según la composición (c) pero usando un eje que es resultado de trasladar L_1 .
- (3) $n \neq 0, i = 1, j = 2$ $T_a^n G_A R_1^2 = T_a^n G_A = G_{1-T} (A)_{na}$
media vuelta, según composición (d)
- (4) $n \neq 0, i = 1, j = 1$ $T_a^n G_A R_1 = T_a^n (R_1 R_{1'} R_r)$
= $T_a^n (R_1 R_{1'}) R_r$
una reflexión deslizante cuyo valor de traslación no es un múltiplo de T_a . También:
 $(T_a^n G_A) R_1 = (G_{1-T} (A)) R_{1'}$
obtenible como $\frac{n}{2}$ aplicarle una media vuelta a la imagen obtenida en $R_{1'}$.

Tal como se observa en las isometrías anteriores que pertenecen a F_2^2 , en ninguna se tiene una traslación (como elemento de F_2^2) que tenga un valor distinto de T_a o un múltiplo entero. La isometría $R_1 R_{1'}$, que define una traslación ya que $L_{1'}$ es paralelo a L_1 , no participan como uno de los elementos de simetría de F_2^2 , si no que aparece unida a R_r y define una reflexión deslizante.

De otra manera:

Supóngase que $R_1 R_{1'} \in F_2^2$.

Se sabe que $E \neq A$ y $E \neq M$, esto es $L_1 \neq L_{1'}$ y $L_2 \neq L_{1'}$.

Sea $|AE| = d'$ y $|AM| = d$ y $2d = a$.

Sea $p \in r$ y $p' = R_1 R_{1'}(p)$

De ahí que $|pp'| = 2d'$

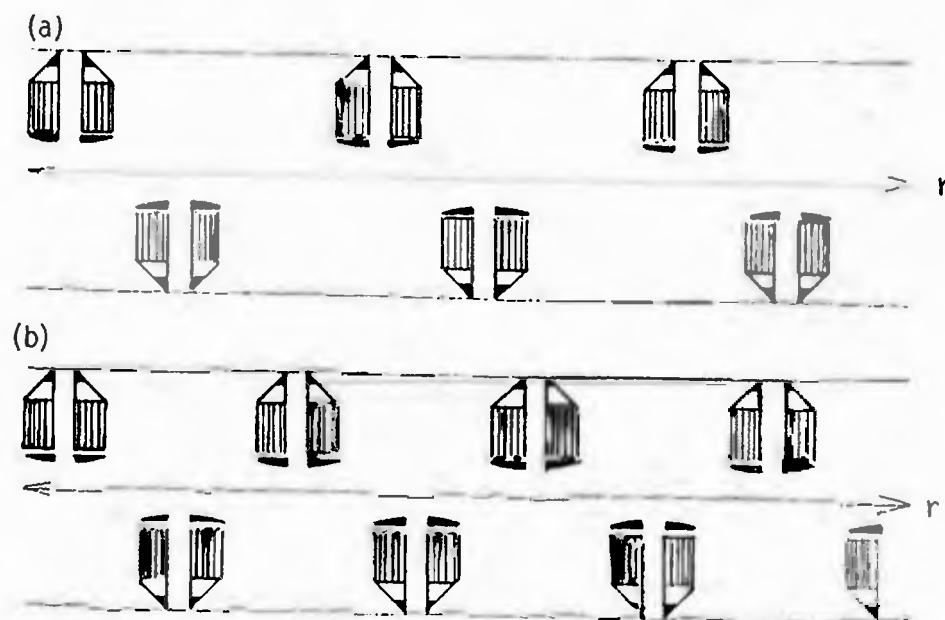


Fig.5.29 Diseño de banda infinito de el grupo F_2^2 generado por una reflexión vertical, R_v ; una media vuelta, G_A ; una traslación, T_a .

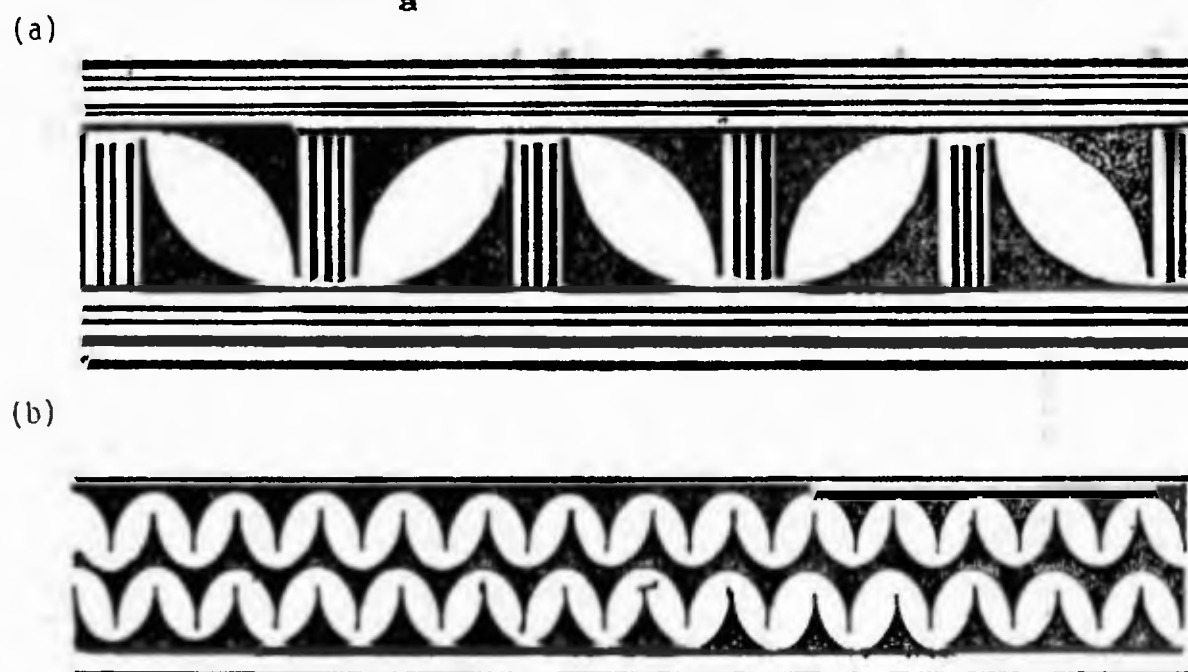


Fig.5.30 Ejemplos de diseños de banda, grupo F_2^2 , (a) y (b) en piezas de IV-V período, Estilo Montevideo, Reg. Central de Panamá.

Si $2d' = a$ entonces $R_1 R_{1'} = T_a$ y el grupo es grupo F_2^1

Si $2d' \neq a (= 2d)$ entonces existe una contradicción en la definición de F_2^2 ya que posee dos traslaciones distintas definidas en el mismo grupo y no sería ya un diseño de banda unidimensional. Por lo tanto la isometría $R_1 R_{1'}$ no pertenece a F_2^2 ; también equivale a afirmar que R_1 no es elemento de simetría de F_2^2 . Nuevamente, tanto R_1 como $R_{1'}$ sólo son elementos participantes de aquéllas composiciones que sí son elementos de simetría de F_2^2 (por ejemplo $T_a^n G R_{1'} = T_a^n R_1 R_{1'}$) pero en ninguna de las combinaciones posibles de sus índices se logra que aparezcan solamente R_1 junto a $R_{1'}$. Un diseño de banda correspondiente a este grupo aparece en la figura 29.a y b.

Un caso particular ocurre cuando inicialmente se tiene:

$$T_a R_{1'} = R_1 \frac{1}{2} T_a (L_{1'})$$

Y el nuevo eje así generado está exactamente en el punto medio de A y M, provocando que por las sucesivas aplicaciones sus múltiplos estarán en los puntos medios entre A_n y M_n , de manera que si con ellas se obtiene el punto M', entonces $|AM'| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}d$, resultando de ahí una manera adicional de describir este grupo en esta forma muy particular, aprovechando que:

$$G_{A 1'}$$

es una reflexión deslizante como se observa a continuación:

Sea

$$G_{A 1'} = R_1 R_{1'} R_1 = L$$

de ahí:

$$\begin{aligned} LL(p) &= (R_r R_1 R_{1'})^2(p) \\ LL(p) &= (R_r)^2 (R_1 R_{1'})^2(p) \\ &= (R_1 R_{1'})^2(p) \\ &= p' \end{aligned}$$

tal que:

$$|pp'| = 4|AM'| = 2d$$

entonces $LL = T_a = L^2$ y con ello se permite que F_2^2

se exprese como:

$$F_2^2 = \left\{ L^n G_A^l : n \in \mathbb{Z}, l \in \{1,2\} \right\}$$

El modelo generado se observa figura 5.29.b; la figura 5.30 muestra ejemplos de diseños pertenecientes a la cerámica aquí tratada que poseen a este grupo F_2^2 .

5.3.7 Grupo de friso F_1^3

Este es el último grupo de simetría de un diseño de banda, aquí la composición permitida es de traslaciones, que forman F_1 , y una reflexión deslizante convenientemente definida, de manera que la traslación que participa es diferente en cuanto valor del movimiento que permite, a aquella que está incluida en la reflexión deslizante.

$$F_1^3 = \left\{ T_a^n, T_a^m L \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } |pL(p)| \neq |pT_{na}^m(p)|, p \in r, \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \right\}$$

Este grupo así definido caracteriza a un diseño de banda que no ha sido descrito antes.

Sea

$$L = R_B * R_A * R_r$$

donde $R_B * R_A *$ es una traslación con ejes perpendiculares a r ; entonces como:

$$p \in r, p = R(p)$$

Supóngase que $|pL(p)| = |pT_{ma}(p)|$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$R_B * R_A * = T_{ma}$$

y de ahí:

$$T_a^m L = T_a^m T_a^m R_r = T_a^{2m} R_r$$

pero se sabe que si $T_a^m \in F_1^3$, también $T_a^{2m} \in F_1^3$

entonces ocurre que:

$$T_a^{2m} \text{ y } T_a^{2m} R_r \text{ pertenecen a } F_1^3$$

pero tales isometrías son características de F_1^4 y no se estaría generando ningún diseño diferente a los ya estudiados anteriormente; su diseño típico correspondería al de la figura 5.23; por lo que para tener un nuevo diseño se requiere el hecho de que:

$$p \in r, |pL(p)| \neq |pT_{ma}(p)| \text{ para algún } m \in \mathbb{N}$$

Otra forma alternativa de definir este grupo es la que se consigue modificando un tanto el concepto de la distancia que recorre la traslación permitida de una manera de considerarla como de un valor tal que la traslación que ocurre entre dos módulos consecutivos a un mismo lado de r , en la banda, sea producto de un múltiplo entero de T_a (que para ese caso está definida de esa manera); así también como la dis-

tancia de la traslación contenida en L . Esta T_a es de un valor tal que es la máxima distancia común a estas dos isometrías de F_1^3 . Tal resultado se expresa como:

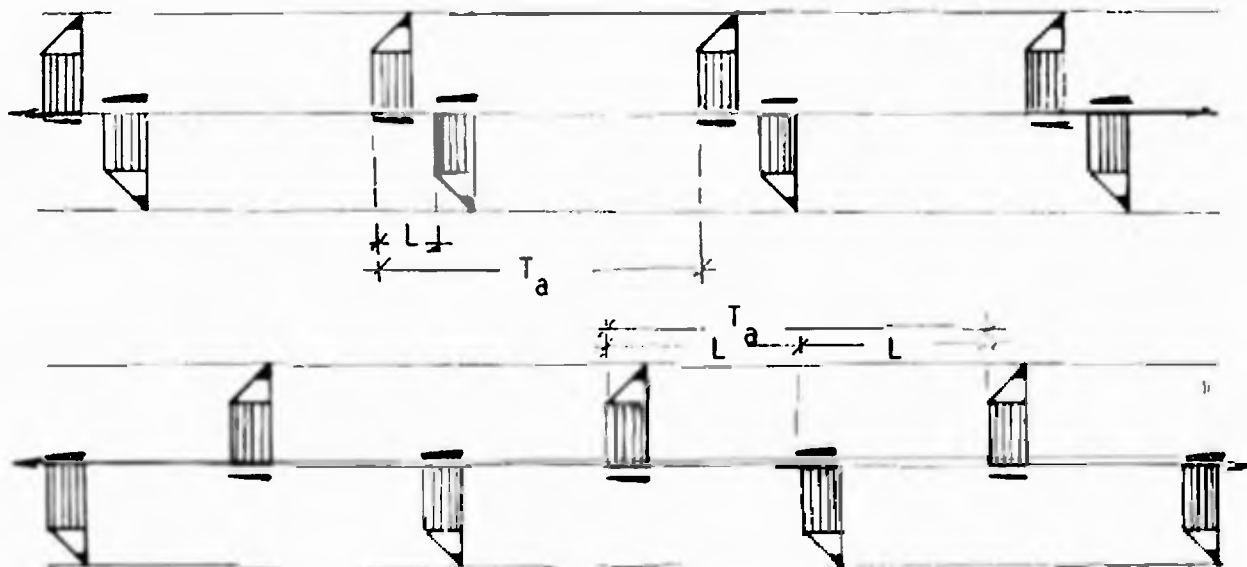


Fig. 5.31 Diseño infinito de banda, F_1^3 generado por T_a y una reflexión deslizante independiente L .

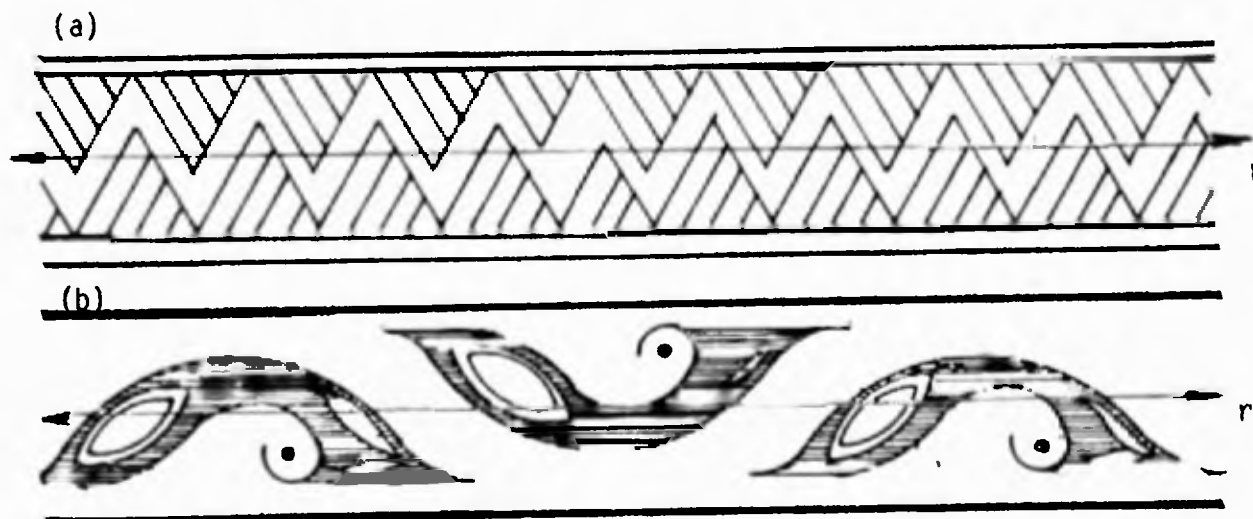


Fig. 5.32 Motivo de diseño de banda F_1^3 , (a) en pieza de VI período. Estilo Macaracas, (b) Estilo Macaracas.

$$F_1^3 = \left\{ T_a^{cn}, T_a^{cn+k} R_r : n \in \mathbb{Z}, c, k \text{ constantes}, c, k \in \mathbb{N} \text{ y } c \neq k \right\}$$

Si en la expresión anterior se hacen cambios en la forma de representación de las isometrías participantes:

$$T_a^c = T_a^* \quad \text{y} \quad T_a^k R_r = L_*$$

se tiene la forma ya tratada anteriormente. La figura 5.31.a y b contiene ejemplos de este tipo de diseño, la figura 5.31.b se obtiene cuando

$$L^2 = T_a$$

Y es una de forma más sencillas y fáciles visualizar este grupo. La figura 5.32 presenta motivos en la cerámica Región Central que contienen este diseño.

De esta manera se concluye la presentación de los siete grupos que permiten clasificar los diseños de banda.

5.4 Aplicaciones de los Grupos Unilineales en la Región Central de Panamá.

En este punto es válida la observación de Coxeter quien dice:

"En sentido estricto, estos siete grupos no son unidimensionales sino que corresponden a una dimensión de $1\frac{1}{2}$, es decir, se trata de grupos de simetría bidimensionales en los que interviene una traslación en una dirección." [Coxeter 1971: 76].

En el diagrama 5.1 aparece el algoritmo de Rose y Stafford, que permite guiarse paso a paso para determinar cuando un diseño de banda corresponde a un cierto grupo.

Bert Zaslow en su trabajo "Pattern Mathematics and Archaeology" utiliza los diseños de banda, y para nominarlos utiliza un arreglo de letras y números para indicar la presencia o no de determinados elementos de simetría que participan en estos grupos de simetría unilineales. La tabla 5.1 presenta la nomenclatura usada por ese autor y aquella que se ha utilizado en este trabajo, además de los generadores.

El significado de los símbolos usados por Zaslow son: b : un diseño de banda está siendo descrito; directamente después de b los números 1 ó 2 indican la presencia (2) de una media vuelta o su ausencia (1); en tercera posición, de izquierda a derecha, se indica si existe reflexión usando como r (m), o una reflexión deslizante (g) o la ausencia de ambas (1); en la cuarta posición se indica la presencia de una reflexión con eje perpendicular a r , independiente, m , o su ausencia 1.

En la parte final se presentan algunas láminas que muestran diseños unilineales contenidos en piezas de cerámica provenientes de la Región Central de Panamá y son un ejemplo de la variedad de diseños en ella presentes.

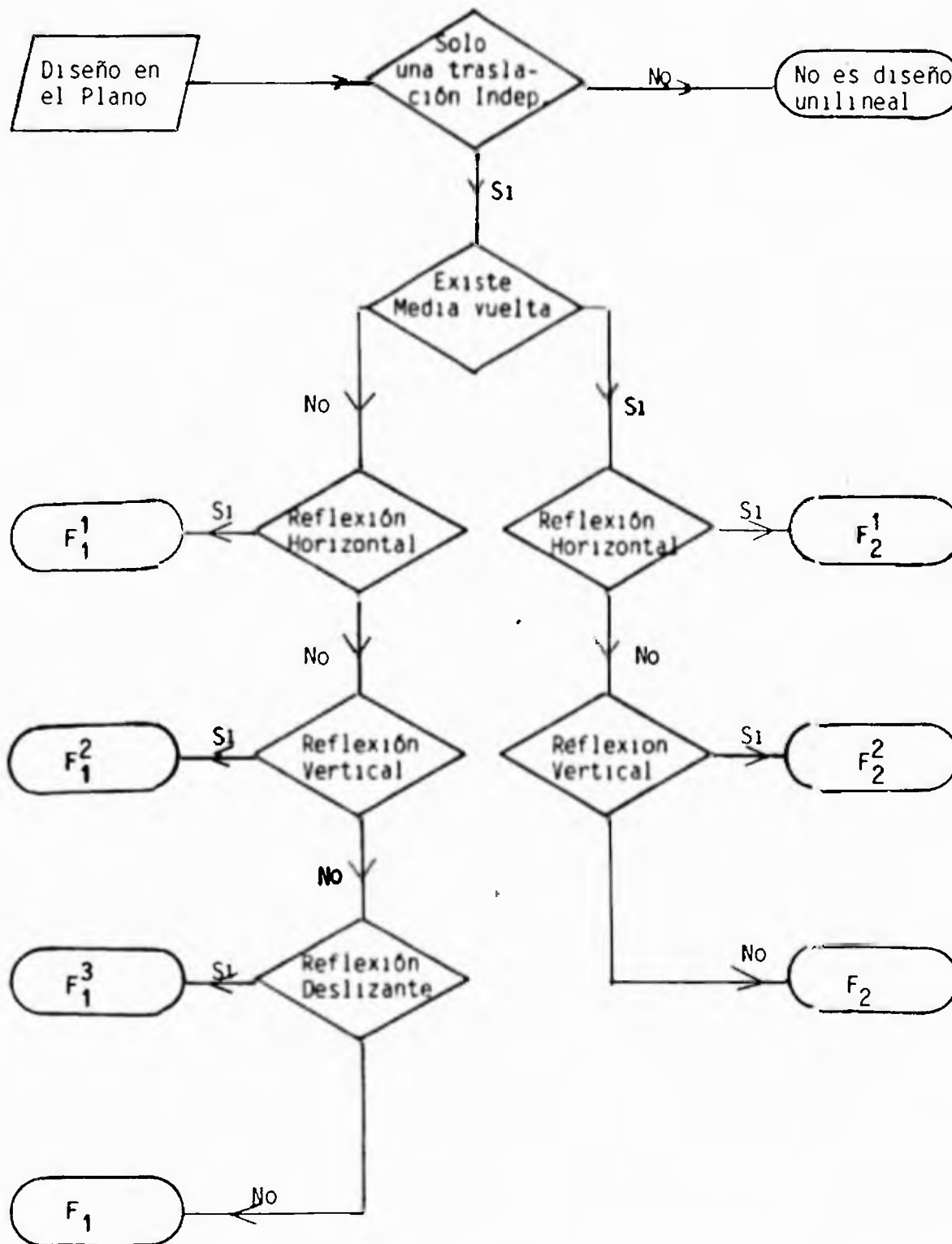


Diagrama 5.1 Algoritmo de Rose y Stafford para clasificar diseños de banda (unilineales, frisos). Según Alsinas y Trillas, pag. 154.

Grupos de Simetría Unidimensionales			
Nomenclatura		Generadores	Diseño Característico
Alsina y Trillas	Zaslow		
F_1	b111	T_a	
F_1^1	b1m1	T_a, R_r	
F_1^2	b11m	T_a, R_1	
F_1^3	b1g1	T_a, L	
F_2	b211	T_a, G_A	
F_2^1	b2mm	T_a, G_A, R_r	
F_2^2	b2gm	T_a, G_A, R_1	

Tabla 5.1 Comparación de nomenclatura, generadores y diseño característico para un grupo de simetría unidimensional.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Coclé)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

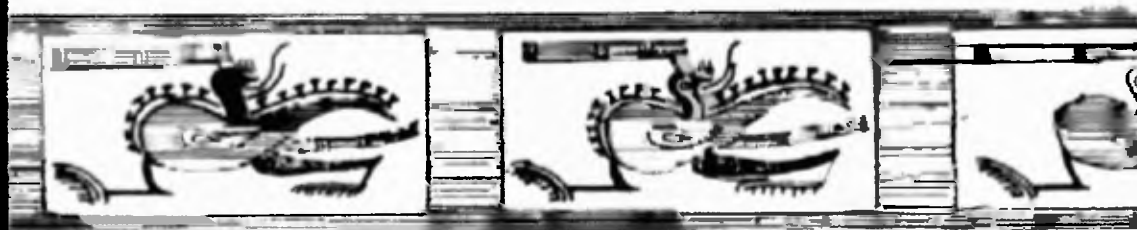
Nº de Identificación: 33-42-20/1353

Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig. Nº: 44 b (p.29)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de friso F₁.



Observaciones: Pieza V período. Estilo Conte (Temprano).

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Coclé)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

Nº de Identificación: C/10862

Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

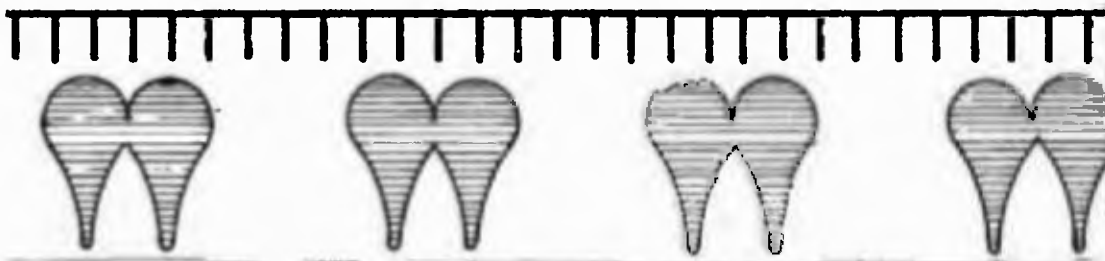
Fig. Nº: 368 (p.181)

Técnica: Cerámica con motivo plástico (sello, rodillo)

Grupo: de friso F₁.



Observaciones: Sello del V período. Estilo Conte.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.****Nº de Identificación:****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº: 251 (p.132)****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: de friso F₁²****Observaciones: Pieza del IV período: Estilo Aristide.**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres
de Araúz"

Nº de Identificación: S/I

Fuente:

Fig. Nº:

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de friso F₁³



Observaciones: Este diseño está contenido en un fragmento (pieza casi completa) sin identificación, proveniente de la Península de Azuero (provs. de Herrera-Los Santos). VI período. Estilo Macaracas.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

**Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres
de Araúz".**

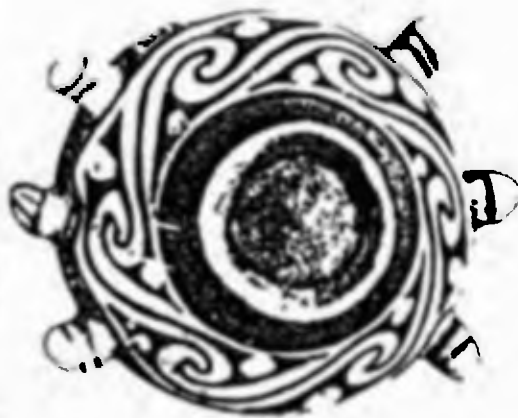
Nº de Identificación:

**Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.**

Fig. Nº: 413(b)(pág.209)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de friso F₂



Observaciones: Pieza de V-VI período. Conte-Macaracas.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Coclé)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

Nº de Identificación: 33-42-20/1588

Fuente: Lothrop, S.K. Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig. Nº: 188a (p.191)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de friso F₂¹



Observaciones: Pieza del VI período. Estilo Macaracas.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Chiriquí)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

Nº de Identificación:

Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig. Nº: 485 (p.243)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: de friso F₂²



Observaciones: La pieza aquí tomada fue reportada por Holmes (citado por Lothrop) en 1888, proveniente de la Prov. de Chiriquí, aun cuando esta provincia no está en la Región Central se toma como ejemplo de la cerámica que le corresponde. Estilo Parita.

Capítulo 6.

LOS GRUPOS DE SIMETRÍA BIDIMENSIONALES

6.1 Sistema Regular de Puntos en el Plano.

Esta es la tercera y la última categoría de los grupos de simetría en el plano y se caracteriza por tener dentro de las simetrías permitidas dos traslaciones independientes. Con la inclusión de ellas, y recordando que las traslaciones son de período infinito, se tiene que su composición produce imágenes que se distribuyen en todo el plano, la distribución de estos puntos se conoce como sistema regular de puntos en el plano y se puede obtener de la siguiente manera:

Considérese un punto p del plano al cual se le aplica la traslación T_a ; este punto y sus imágenes sucesivas por las potencias de T_a forman un conjunto discreto (dos de ellos, consecutivos, guardan la misma distancia) e infinito. En forma simbólica :

$$\text{Dado } p \in \pi; |T_a^n(p) T_a^{n+1}(p)| = |pT_a(p)| = a, \forall n \in \mathbb{Z}$$

a es el valor de la distancia mínima de la traslación T_a .

Considérese otra traslación, T_b , que actúa sobre p , de modo que los $T_b^n(p)$ ($n \in \mathbb{Z}$) forman también, un conjunto dis-

creto e infinito.

Si T_a y T_b son mutuamente independientes, y hacemos actuar una de estas traslaciones sobre todo el conjunto generado por la otra, se obtiene un reticulado, Fig. 6.1, o conjunto regular de punto, que posee las siguientes características:

1. Existen infinitos puntos que se extienden a todo el plano en forma discreta.
2. Cualquier región finita contiene una cantidad finita de puntos.
3. Es posible mover cualquier punto hasta hacerlo coincidir con cualquier otro mediante una operación de simetría.

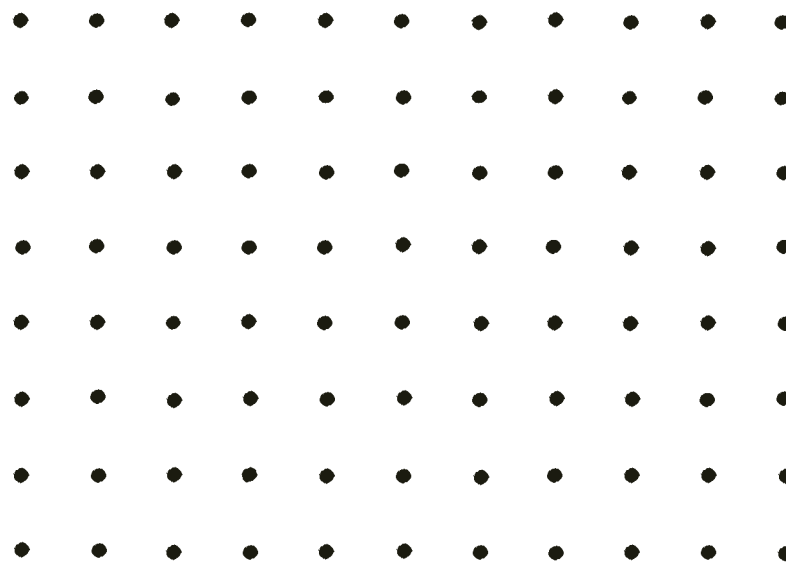


Fig. 6.1 Ejemplo de un sistema regular de puntos en el plano.

El conjunto $\langle T_a^n T_b^k; n, k \in \mathbb{Z} \rangle = G$ es un grupo. Recíprocamente, dado un reticulado existe un grupo generado por dos instalaciones independientes que lo genera en la forma indicada antes.

Ahora bien es posible determinar una región que esté asociada a un sistema regular de puntos y que cuando sobre ella actúan los elementos de G se logra recubrir completamente el plano, donde todas las regiones son congruentes. Esta región se le conoce como CELDA UNITARIA.

Con el fin de facilitar las explicaciones de los diferentes grupos de simetrías bidimensionales, elegiremos una celda unitaria de trazo sencillo. Para iniciar se tomará un paralelogramo que está definido en sus vértices a partir de

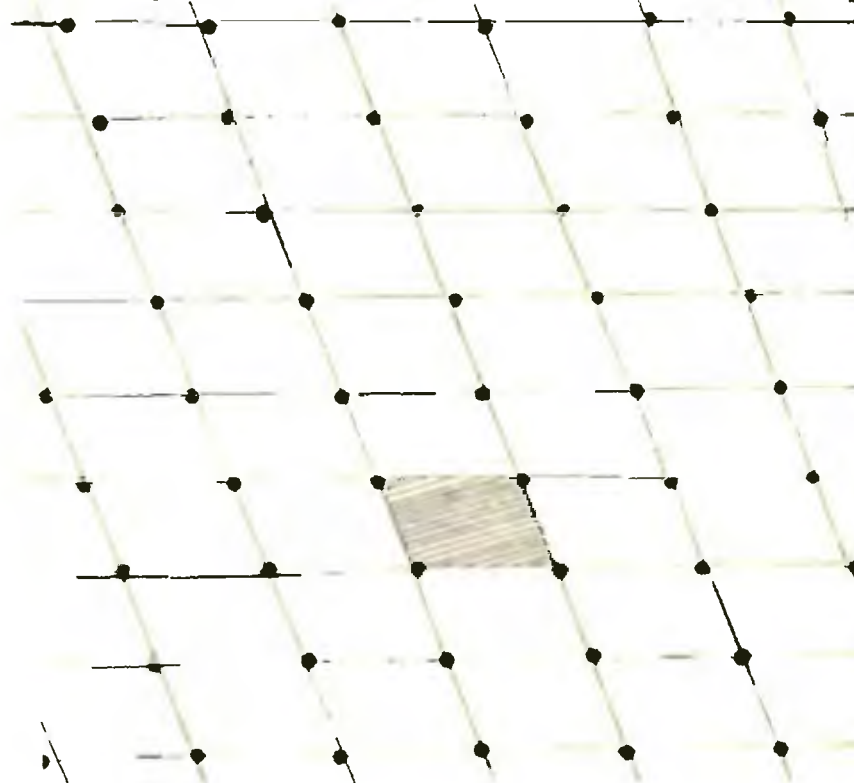


Fig. 6.2. Ejemplo de una celda unitaria en un sistema regular de puntos.

un punto cualquiera p y sus imágenes $T_a(p), T_b(p)$ y $T_a T_b(p)$, en un sistema regular de puntos. Así, al aplicar las dos traslaciones mencionadas se recubre el plano (véase Fig. 6.2). En lo que sigue de este capítulo se irá modificando el tipo de celda unitaria que se utilice, dependiendo de las simetrías que participen.

6.2 Grupos de Simetría Bidimensionales.

Definición 6.1. Un grupo G de isometrías en el plano se dice que es un grupo de simetría bidimensional si existe una figura \mathcal{F} , limitada por una curva cerrada, tal que :

- 1.- La unión de la figura \mathcal{F} y todas sus imágenes lograd[†]as por la simetría contenidas en G cubren completamente el plano.
- 2.- En la cobertura del plano no ocurren sobreposiciones entre las figuras.
- 3.- Existen dos traslaciones independientes tal que cualquier combinación de ellas es una simetría que pertenece a G .

Con la definición anterior se está diciendo que con un grupo de simetría bidimensional, dada una figura \mathcal{F} se logra cubrir el plano sin huecos (1), sin sobreposiciones (2) y que en cada uno de estos grupos aparecen como simetrías permitidas dos traslaciones independientes entre sí (3).

Estos grupos de simetría pueden incluir además de las dos

traslaciones, rotacionales de valor angular específico, reflexiones y consecuentemente reflexiones deslizantes. La determinación de los grupos bidimensionales la haremos en dos partes; en la primera, determinaremos aquellos grupos que contienen solamente simetrías que conservan la orientación, esto es, aquellos grupos que contienen solamente traslaciones y rotaciones. A continuación se determinarán aquellos que resultan de agregar las reflexiones y las reflexiones deslizantes. En la primera parte se obtienen cinco (5) grupos diferentes y en la siguiente se logran otros doce (12), completando así las posibilidades de generación que son 17.

Se mencionó antes que rotaciones de determinado valorⁱ angular forman parte del conjunto de simetrías con las que se definen los diecisiete grupos bidimensionales; existe un teorema que presentamos a continuación, sin demostración, conocido como Teorema de Barlow o también de Restricción Cristalográfica, para establecer estas rotaciones.

Teorema 6.1: (Restricción Cristalográfica). Las únicas rotaciones mínimas que pueden formar parte de un grupo de simetría bidimensional G son de orden 2, 3, 4 ó 6; esto es, rotaciones de valor angular 180° , 120° , 90° y 60° .

Coxeter [1971: 88-89] presenta la demostración de este teorema y anota que fue lograda por Barlow en 1901 dando la

referencia:

W. Barlow, *Philosophical Magazine* (6), 1(1901), pág.17.

También está presentada en:

Hilbert, Cohn-Vossen, 1952: 71-73

Alsina y Trillas, 1984: 160

Budden, 1972, cita en una nota al pie de la página 519 de su libro ya citado, que también se presentan demostraciones en:

H. Weyl, *Symmetry*, Princenton Univ. Press, Princenton, 1952, p.101.

J. H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge Univ. Press, New York, 1966, p.122.

Conociendo el valor de las rotaciones admitidas para formar los grupos de simetría bidimensionales estamos en condiciones de dar una descripción de cada uno de ellos. Para poder diferenciar adecuadamente estos grupos utilizaremos una nomenclatura compuesta por las letras y números tal como se especifica a continuación. Tal notación está de acuerdo con las disposiciones contenidas en las Tablas Internacionales de Cristalografía de Rayos X.

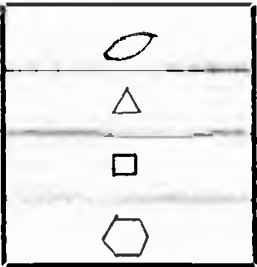




Con esta notación leída de izquierda a derecha, se identifica adecuadamente la celda elegida y que posee las rotaciones de mayor orden y las demás simetrías fundamentales. La manera más usual de elegir esta celda es logrando que los centros de rotación de mayor orden coincidan con los vértices del paralelogramo que la caracteriza; en este caso se di

ce que es una "celda primitiva". Cuando los centros de rotación de mayor orden no coinciden con tales vértices se dice que es una "celda centrada". Se considera como borde de referencia de la celda a aquel que une el vértice inferior izquierdo con el vértice superior izquierdo; entonces la sim-
 bolización se interpreta como:

- (1) La letra "p" o "c" indica si la celda es primitiva o centrada
- (2) El entero n denota el mayor orden de las rotaciones, pudiendo ser 1, 2, 3, 4, 6.
- (3) Este símbolo denota la existencia o no de ejes de simetría perpendiculares al borde de referencia; m indica un eje de reflexión, g indica un eje con respecto al que ocurre una reflexión deslizante, 1 indica la no existencia de ningún eje de simetría.
- (4) Este símbolo indica la presencia de un eje de simetría formando un ángulo α con el borde de referencia; donde α depende de n : $\alpha = 180^\circ$ para $n = 1$ ó 2 , $\alpha = 45^\circ$ para $n = 4$, $\alpha = 60^\circ$ para $n = 3$ ó 6 ; los símbolos m , g o 1 tienen el mismo significado que en (3).

La falta de símbolos en la tercera y cuarta posición indica la ausencia de reflexiones o reflexiones deslizantes.

Los símbolos que se usarán para representar los elementos de simetría que caracterizan un determinado grupo están representados en el cuadro 6.1.

Símbolo	Significado
Centros de Rotación	Valor angular del giro
	180°
	120°
	90°
	60°
	Eje de reflexión
	Eje de reflexión deslizante
	Límite de la celda
	Límite de la celda "centrada"

Cuadro 6.1 Símbolos usados para representar los grupos bilineales.

6.3 Grupos que Tienen Solo Traslaciones y Rotaciones.

6.3.1 Grupo p_1 :

Este grupo no contiene ninguna rotación, solo las dos traslaciones independientes; en este caso la retícula está formada por un punto y todos los demás generados por las traslaciones. Un diseño que ilustra a este grupo se muestra en Fig.6.3.a; en (b) aparece un paralelogramo característico.

6.3.2 Grupo p_2 :

Además de las traslaciones existe al menos un punto que es un centro de rotación para un giro de 180°, entonces todos los puntos equivalentes logrados por las traslaciones de este punto son también centros de rotación para el giro de 180°. Además ocurre que dado dos centros de giro de 180° con

(a)



(b)



Fig. 6.3. (a) Diseño ilustrativo del grupo $p1$, (b) Su paralelogramo característico.

secutivos, su punto medio también es un centro de giro de 180° por lo que en el sistema regular de puntos logrados por las traslaciones, todos los puntos medios también son centros de giro de 180° , además de punto medio entre los vértices opuestos en el paralelogramo. En la fig. 6.4.a aparecen¹¹

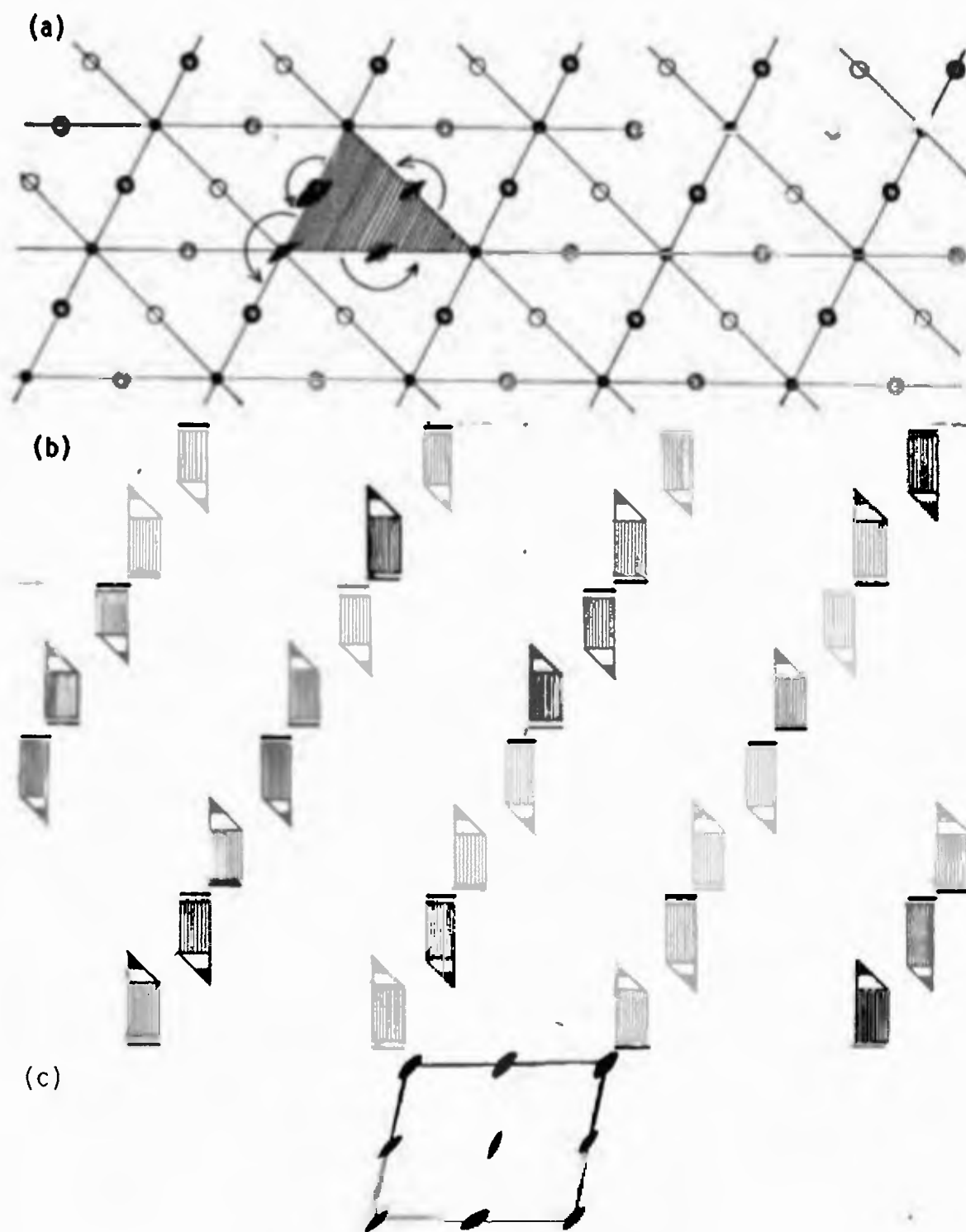


Fig.6.4 (a) Reticula para p2 mostrando la celda unitaria: \bullet , \odot , \circ , \ominus muestran las diferentes clases de giro de 180°, (b) diseño ilustrativo; (c) paralelogramo característico.

estos centros de giro, ahí el triángulo ABC puede ser considerado como celda unitaria. Téngase en cuenta que aparecen cuatro clases distintas de centros de rotación de 180° , A, P, T, Q, que no son equivalentes entre sí. Las rotaciones alrededor de estos puntos y las traslaciones y las posibles combinaciones de todas ellas forman el grupo de las simetrías admitidas. La fig. 6.4.b contiene un diseño ilustrativo y (c) su paralelogramo característico.

6.3.3 Grupo $p3$

En este grupo 120° es el ángulo de rotación más pequeño admitido. No existen ángulos de rotación a diferencia de $\pm 120^\circ$. Si se admite otro ángulo de rotación el único posible sería 180° ; pero si se admite 180° se admite su composición con -120° resultando que 60° , menor que 120° , también es válido, lo cual es inadmisibile para este grupo.

Sea A un centro de rotación de valor angular 120° y sea T_a la traslación que transforma a A en B, Fig. 6.5, como el giro de 120° es admitido ocurre que teniendo a A como centro, el punto B se transforma en C. Utilizando $T_b T_a$ para A se obtiene así D. Con lo cual se genera un paralelogramo que no contendrá otros puntos de la retícula en su interior. La diagonal AD divide a ABCD en dos triángulos equiláteros.

Si se considera la rotación de 120° y la traslación T_a actuando sobre el segmento AB, lo transforma en BD por lo que debe existir un centro de rotación en el centro del triángulo ABD sea este punto M; otro tanto ocurre con el punto N

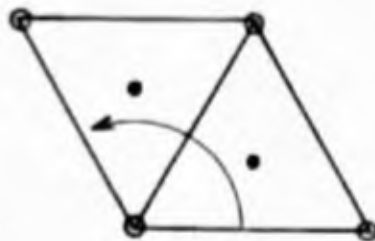


Fig. 6.5. Ilustración para la generación de los centros de rotación del grupo bidimensional $p3$.

del triángulo ACD. Los puntos A, M, N son todos los posibles centros de rotación y no son equivalentes entre sí; estos centros están mostrados en la retícula de la figura 6.6.a, donde también se muestra la celda unitaria que permite recubrir el plano usando las simetrías permitidas.

La parte (b) de esa figura muestra un diseño ilustrativo del grupo y (c) el paralelogramo característico que muestra todos los elementos de simetría que generan el correspondiente grupo con las traslaciones T_a y T_b .

6.3.4 Grupo $p4$.

La rotación menor en este grupo es de 90° por lo que además se permiten los de $180^\circ (= 2 \times 90^\circ)$ y $270^\circ (= 3 \times 90^\circ)$. No existen otras rotaciones admitidas, si eso fuera posible se podría efectuar la composición de los giros de 180° y -120° para obtener uno de 60° que es una contradicción con la disposición de que el ángulo menor admitido es 90° .

De manera semejante al caso anterior tratamos el establecimiento de las simetrías que corresponden al grupo. En la figura 6.7.a sea A un centro de giros de 90° admitido y sea T_a una de las traslaciones del grupo que actuando sobre A

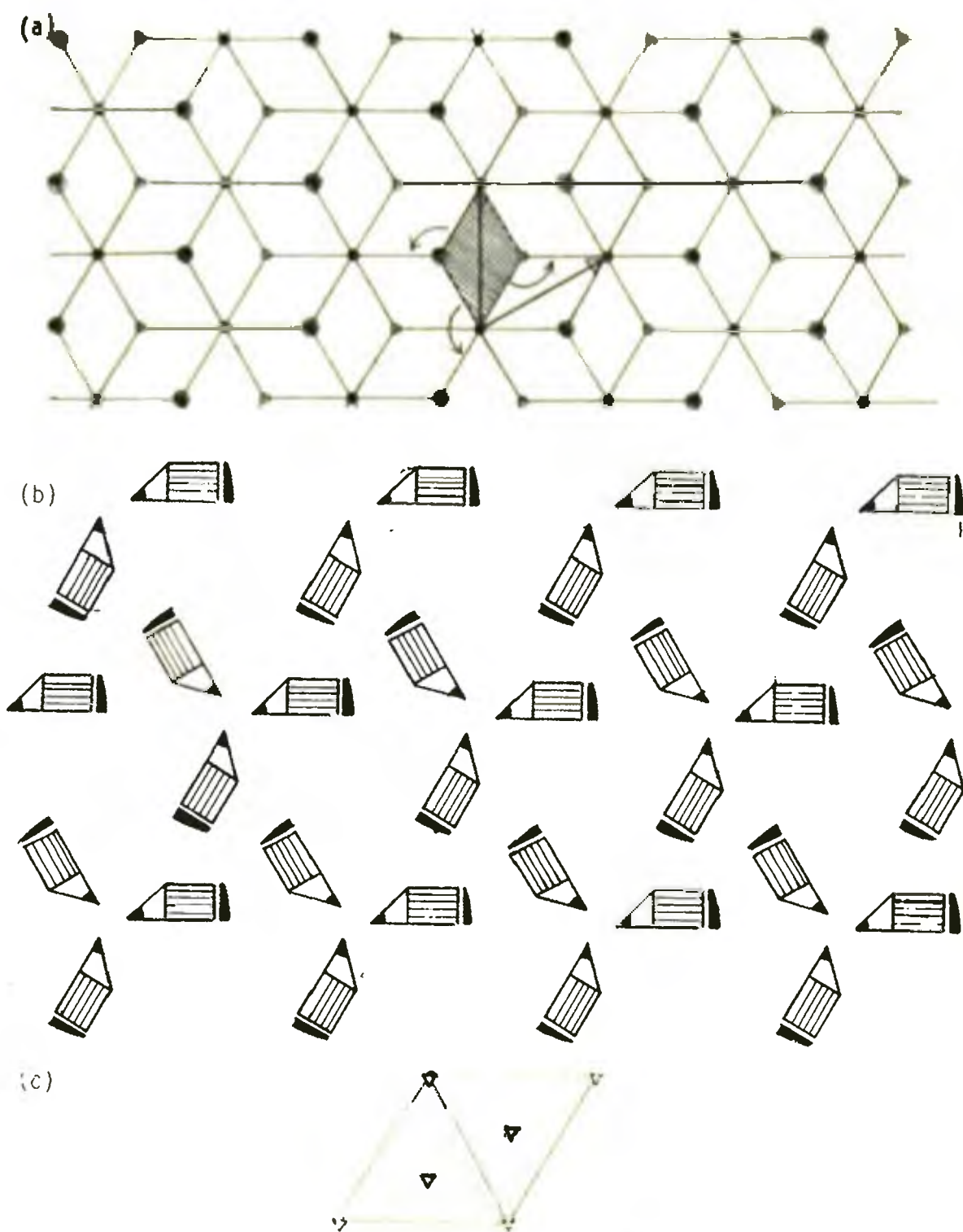


Fig. 6.6. (a) Celda unitaria en la red que genera $p3$, \bullet , \odot , \circ representan las diferentes clases de giros de 120° que ahí existen; (b) diseño ilustrativo de $p3$; (c) Paralelogramo característico.

lo transforma en B. Como una rotación de 90° con centro en A transforma al punto B en C, esta rotación también pertenece al grupo de transformaciones. La retícula lograda con estas traslaciones es un sistema cuadrículado donde el cuadrado ABCD tiene sus vértices formado por puntos del reticulado. Si en cada uno de estos puntos se consideran las rotaciones de valor $180^\circ (= 2 \times 90^\circ)$ ocurre que se generan en los puntos medios entre dos puntos consecutivos otros centros de giro de 180° , tal como ocurre en el grupo $p2$. Los centros de los cuadrados, como el punto M, los puntos medios, como N, y los vértices de los cuadrados son todos los centros de giro del grupo.

Si se forma la composición del giro de 90° que tiene por centro A y la traslación T_a y se aplica al segmento AB ocurre que este se transforma en BD, que es además un giro de 90° con centro en M, por lo que los centros de los cuadrados no son centro de giro de 180° si no que lo son de 90° .

En este grupo todos los centros de giro de 180° son equivalentes; pero no lo son los centros de giro de 90° A y M. Existe una clase de centros de giro de 180° y dos clases de centros de giro de 90° . El triángulo AMB puede ser elegido como una celda unitaria representativa del grupo.

En la fig.6.7.b se presenta un diseño ilustrativo de este grupo, mientras que en la parte (c) se presenta el paralelogramo característico que exhibe los elementos de simetría que con las traslaciones T_a y T_b generan al grupo.

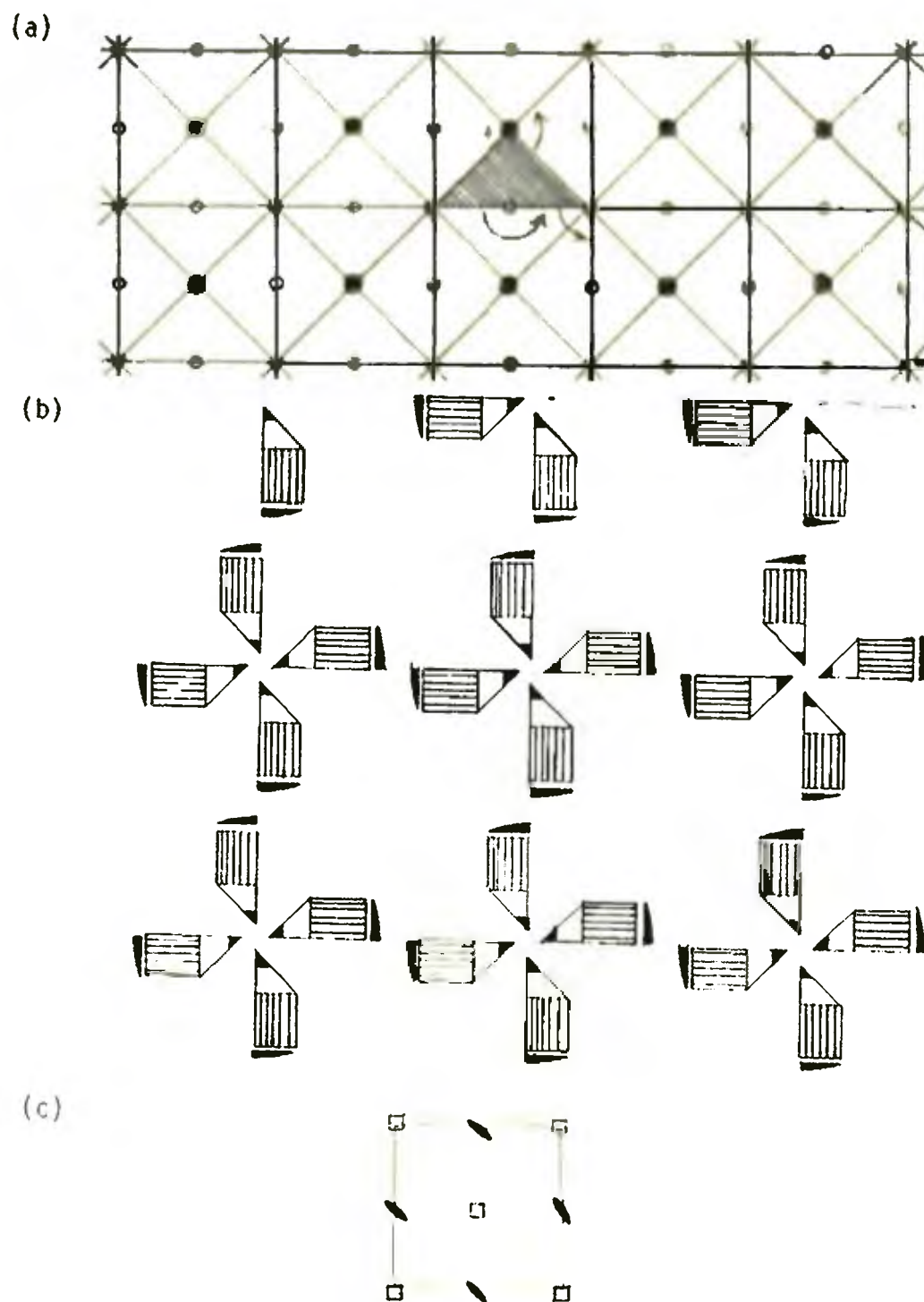


Fig.6.7. (a) Reticula para p_1 , mostrando su celda unitaria; representa los centros de orden 2, y , los centros de rotación de orden 4; (b) Diseño representativo de p_4 ; (c) Paralelogramo característico.

6.3.5 Grupo p_6

En este grupo se permite la mayor cantidad de centros de rotación. La rotación de menor valor angular admitida es 60° entonces también se admiten aquellas de $120^\circ (= 2 \times 60^\circ)$, $180^\circ (= 3 \times 60^\circ)$, $240^\circ (= 4 \times 60^\circ)$ y $300^\circ (= 5 \times 60^\circ)$ pero no se permiten los de 90° pues entonces se tendría que admitir el de 30° logrado al efectuar la composición de 90° y (-60°) .

Para poder determinar todos los centros de giro y el valor del ángulo admitido vamos a analizar por parte estos, comenzando con las traslaciones y los giros de 180° , al hacerlo de esta manera se generan todos los elementos de simetría que han sido mencionados como propios para el grupo p_3 , aparecen en la figura 6.8.a donde los centros de rotación de 120° son los puntos A, B, C así como también M, de igual manera que fue descrito en la figura 6.5. El punto inicial del análisis es, A, es un centro de giro de mayor orden entonces no solo es centro de giros de valor 120° sino que lo es de 60° entonces todos los puntos que resultan equivalentes a A utilizando las traslaciones, como lo son C, D también son centros de giro de orden 6 (rotaciones de 60°); pero ocurre que los centros de los triángulos equiláteros son solamente centros de rotación de orden 3 y son los únicos de ese orden entre los elementos de simetría del grupo. De manera diferente al grupo p_3 , estos centros de rotación son equivalentes entre sí.

Los centros de rotación de orden 2 (giros de 180°) se ob-

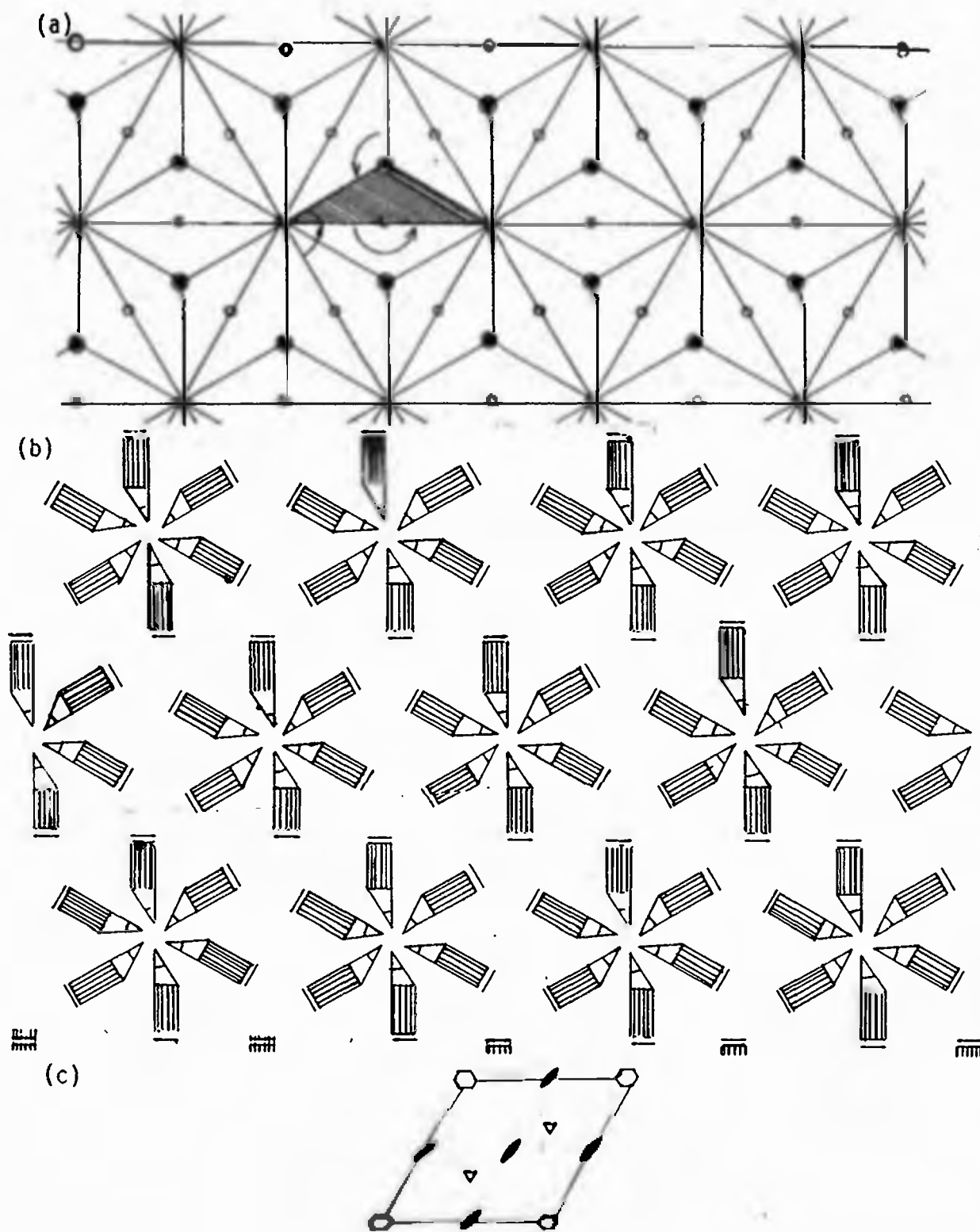


Fig.6 8 (a) Reticula para el grupo $p4$, con su celda unitaria; \circ representa el centro de giro de orden 2, \bullet al de orden 3, \odot al de orden 6; (b) Diseño representativo del grupo $p6$; (c) Paralelogramo característico.

tiene por un análisis semejante al aplicado a p_2 . En este caso los centros de rotación de valor 180° resultan ser los vértices de los paralelogramos por lo que también lo son sus centros y los puntos medios de sus lados o sea todos los puntos medios de los triángulos equiláteros pues los vértices de éstos ya han sido tomados en cuenta como centros de rotación de orden 6.

Por lo que resulta que existe una sola clase de centros de rotación de orden 2, otra solamente de rotaciones de orden 3 y última de orden 6; todos los puntos de la retícula que son centros de rotación de orden 2 son equivalentes, igual los de orden 3 y orden 6. La figura 6.8.b presenta un diseño que cumple con todas las consideraciones anteriores y la figura (c) presenta el paralelogramo característico.

Estos son los únicos grupos (5) que siendo bidimensionales contienen solamente rotaciones y traslaciones, las llamadas simetrías directas; los restantes se logran agregando las reflexiones y las reflexiones deslizantes; de la ampliación de las simetrías admitidas ocurre que aparecen doce (12) nuevos grupos, y la descripción de tales se da a continuación.

6.4 Grupos Bidimensionales que poseen Reflexiones y/o Reflexiones Deslizantes.

6.4.1 Grupos Derivados de p_1 .

La primera extensión de los grupos con simetrías directas

la hacemos con el grupo $p1$.

6.4.1.1 Grupo $p1m1$.

Notación abreviada pm , se obtiene de $p1$ agregándole una reflexión cuyo eje es el de una de las traslaciones admitidas. La fig. 6.9.a es un diseño ilustrativo y 6.9.b presenta el rectángulo característico.

6.4.1.2 Grupo $p1g1$.

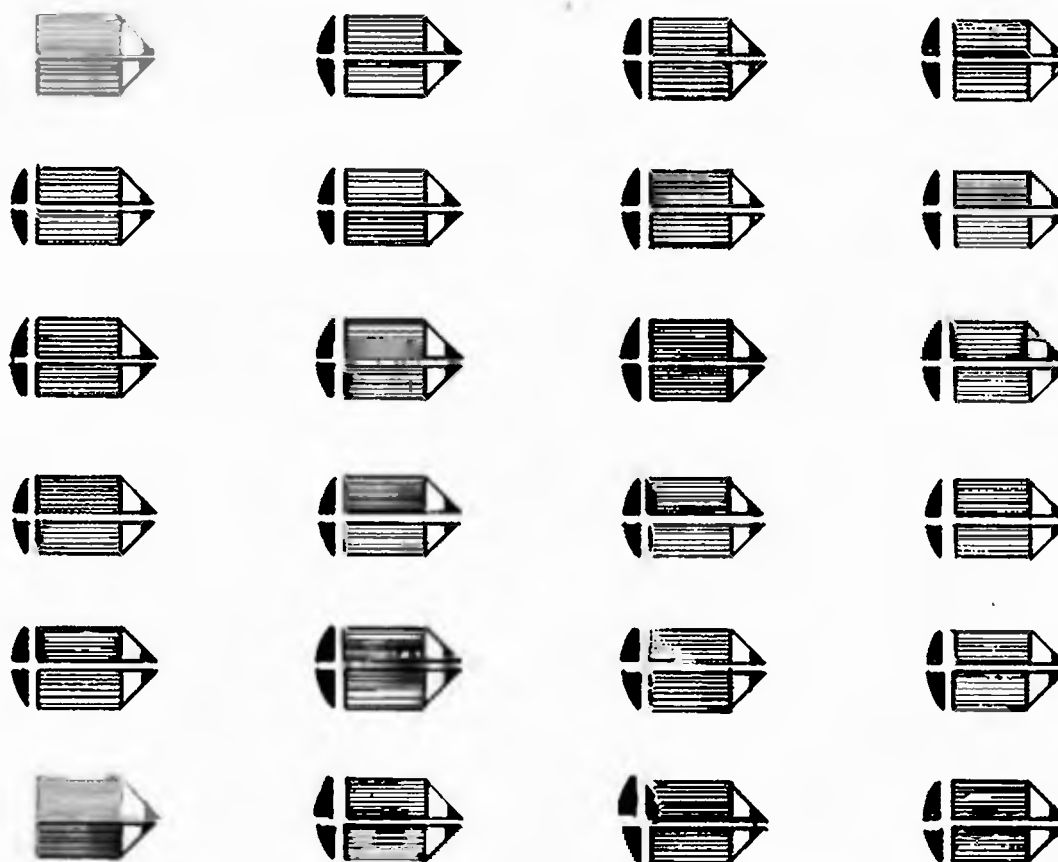
Cuya notación abreviada es pg , es logrado, a partir de $p1$ agregando una reflexión deslizante cuyo eje de reflexión es el de una de las dos traslaciones permitidas; la figura 6.10.a, lo ilustra y la 6.10.b, muestra su paralelogramo característico.

6.4.1.3 Grupo $c1m1$.

Notación abreviada cm , derivado de $p1$ considerando una reflexión deslizante con eje de reflexión en uno de los ejes de traslación, de las dos traslaciones permitidas, y además una reflexión en un eje paralelo a éste. La figura 6.11.a, contiene un diseño que ilustra el grupo y 6.11.b, muestra su paralelogramo característico.

Estos tres grupos agotan las posibilidades de lograr un grupo bidimensional que no posea ninguna rotación; el diagrama 6.1 muestra una forma esquemática de identificar estos grupos.

(a)



(b)

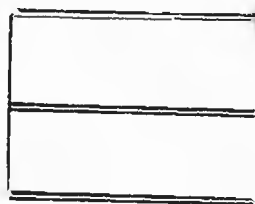
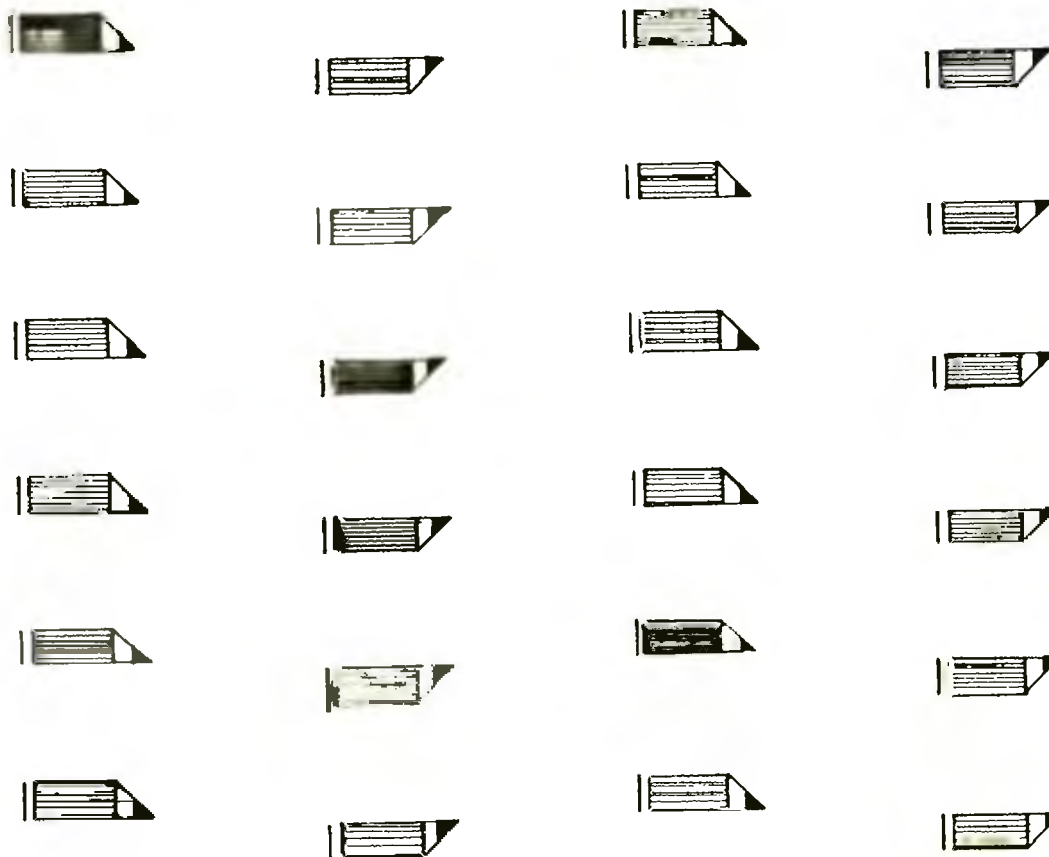


Fig. 6.9. a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p1m1(pm)$; (b) Paralelogramo característico que permite su identificación.

(a)



(b)

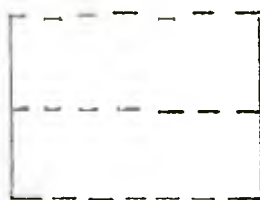
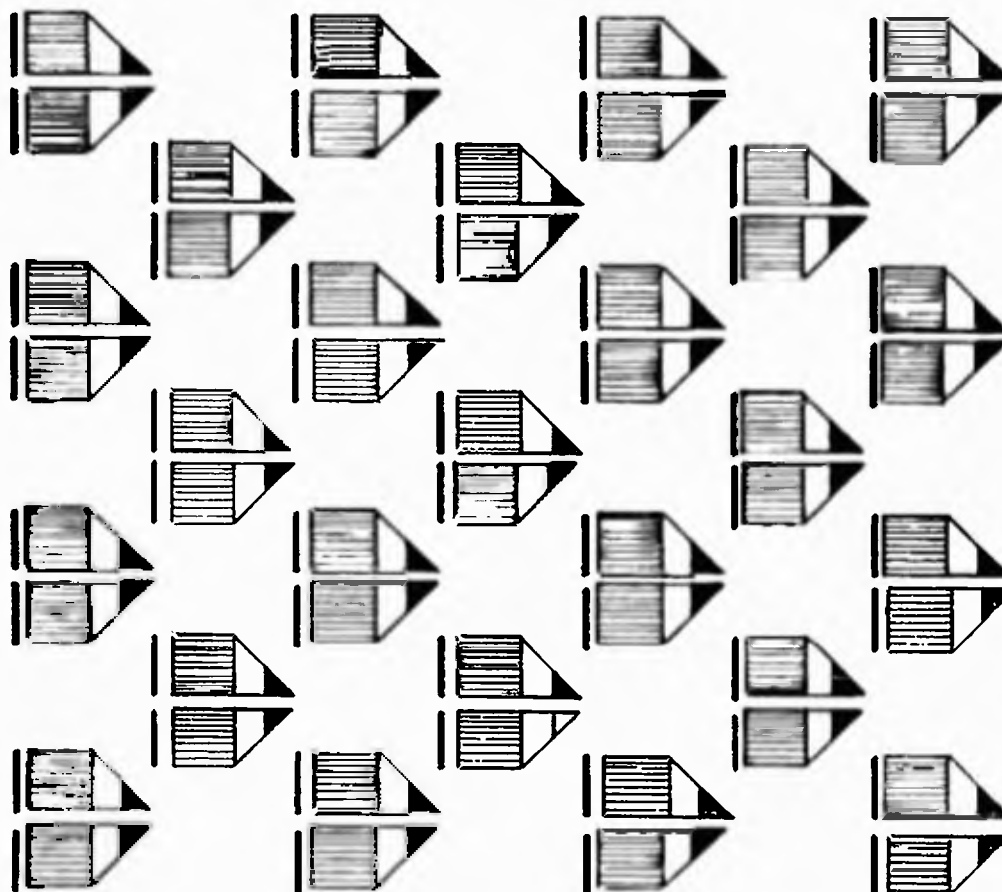


Fig. 6.10. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $\pi_1(pg)$; (b) Paralelogramo característico que contiene las simetrías del grupo y permite su identificación.

(a)



(b)

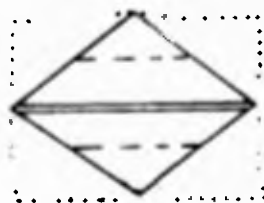


Fig. 6.11. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $cm1(cm)$ (b) Paralelogramo característico mostrando las simetrías que tal grupo posee y permite su identificación inequívoca.

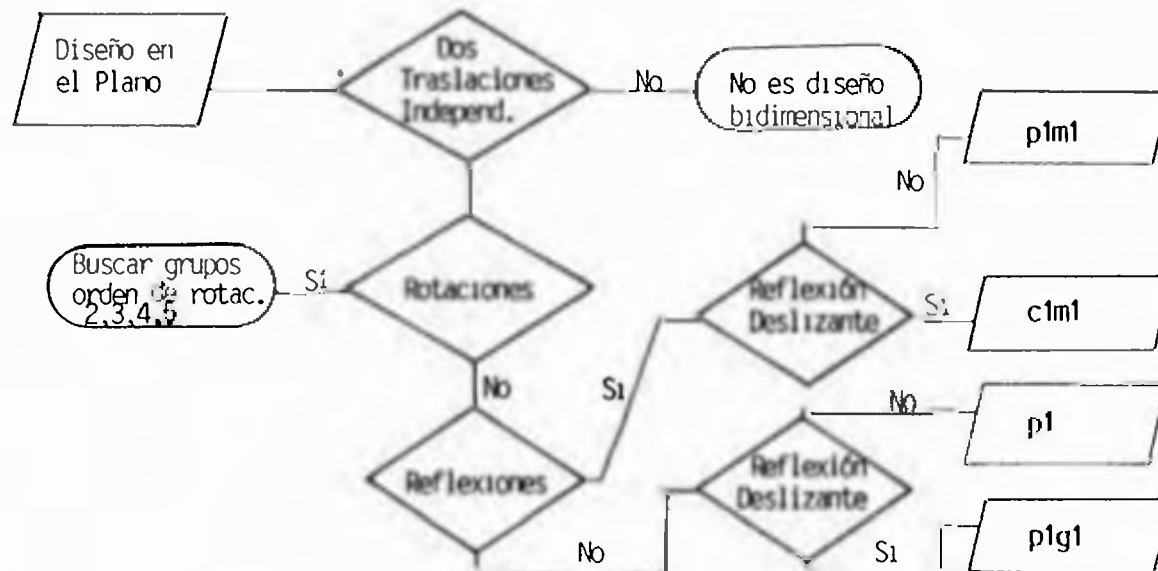


Diagrama 6.1. Esquema para la identificación de los grupos bidimensionales que no poseen rotaciones entre sus simetrías permitidas.

6.4.2 Grupos Derivados de $p2$.

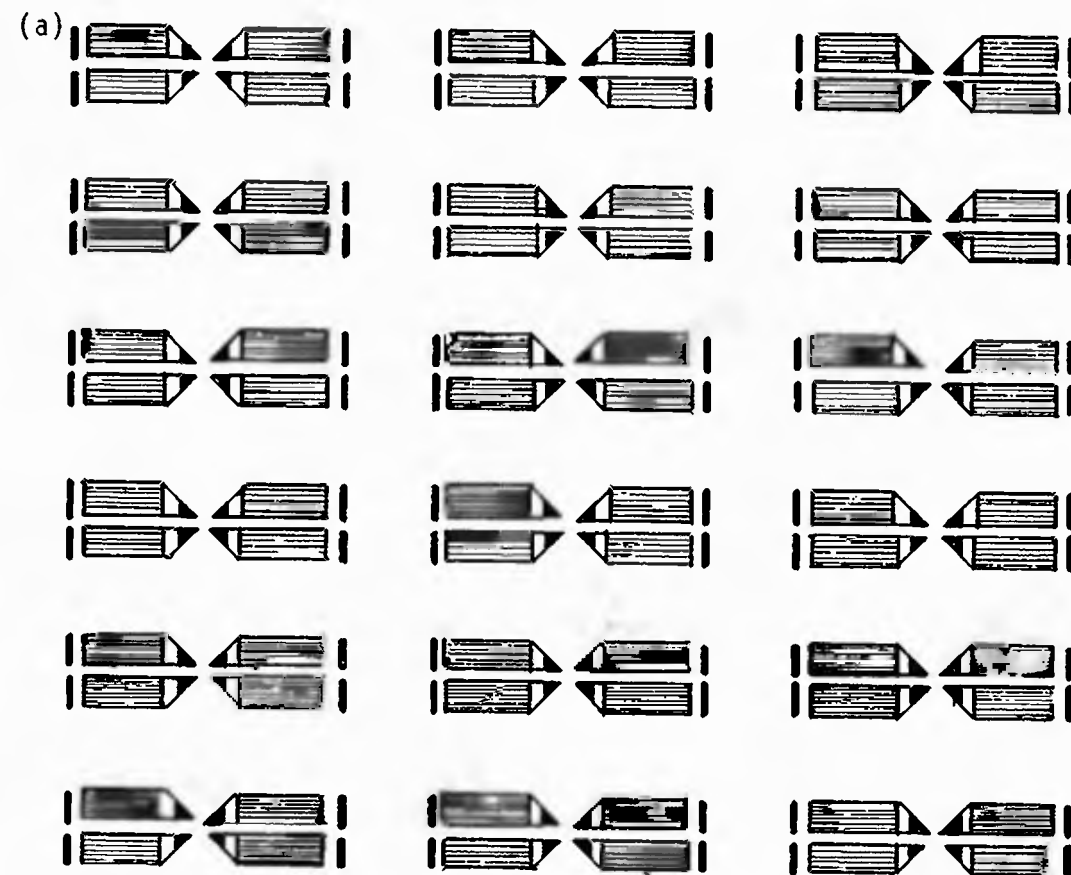
A continuación se presentan los que se derivan de $p2$.

6.4.2.1 Grupo $p2mm$.

Notación abreviada pmm , logrado ampliando $p2$ al considerar reflexiones en la dirección de cada una de las dos traslaciones permitidas. La figura 6.12.a, ilustra el grupo y 6.12.b, presenta su paralelogramo característico.

6.4.2.2 Grupo $p2mg$.

Notación abreviada pmg , considerando dos ejes de traslación perpendiculares entre sí, uno de los cuales es también eje de una reflexión y el otro lo es de una reflexión deslizante. La figura 6.13.a, ilustra este grupo y 6.13.b, es su paralelogramo característico.



(b)

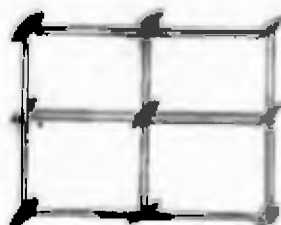
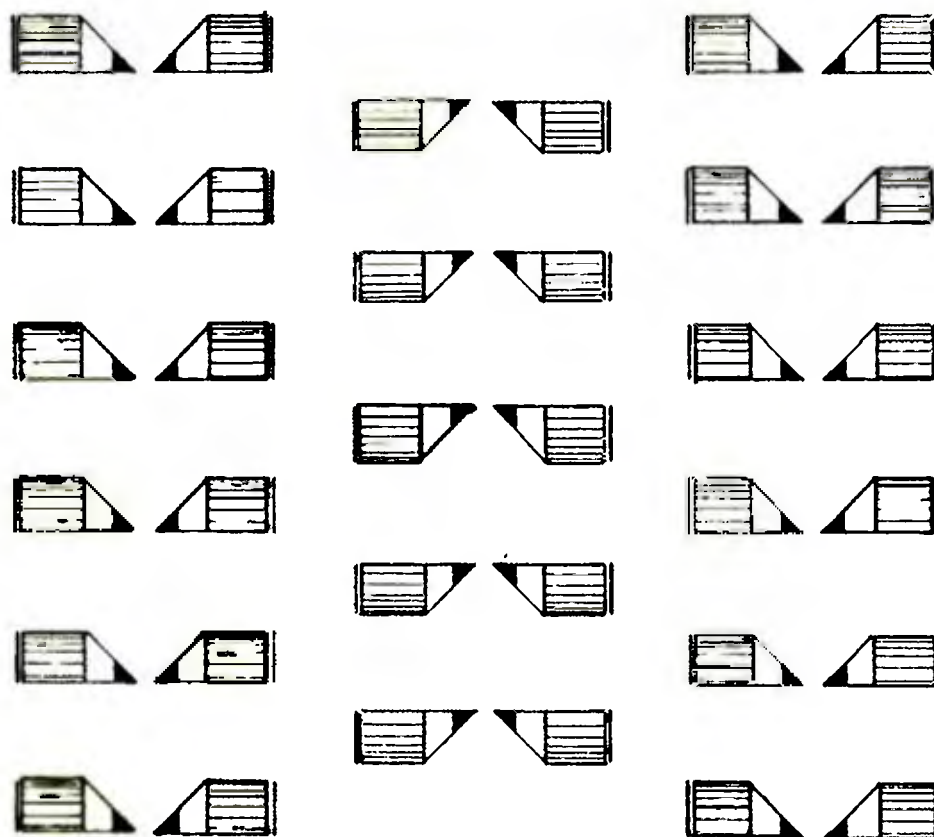


Fig. 6.12 (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p2mm(pmm)$; (b) Paralelogramo característico, permite su identificación.

(a)

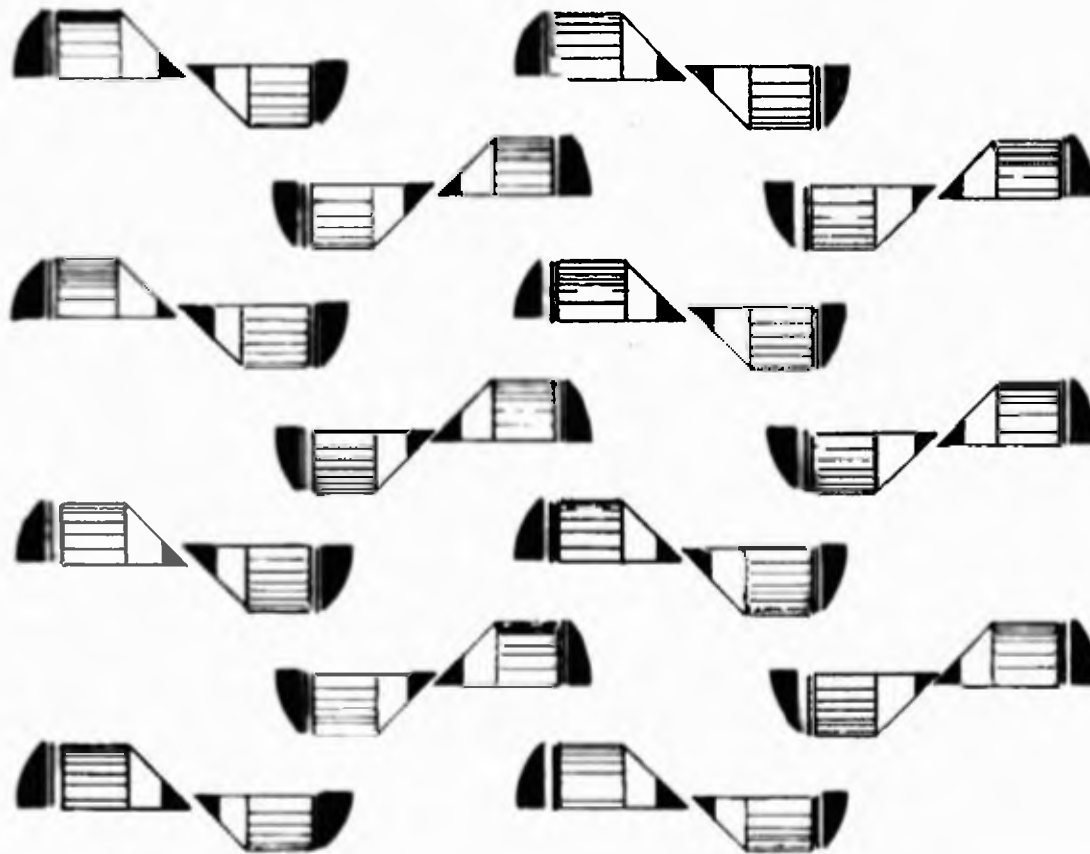


(b)



Fig. 6.13 (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p2mg(pmg)$; (b) Paralelogramo característico.

(a)



(b)

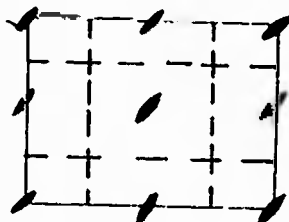
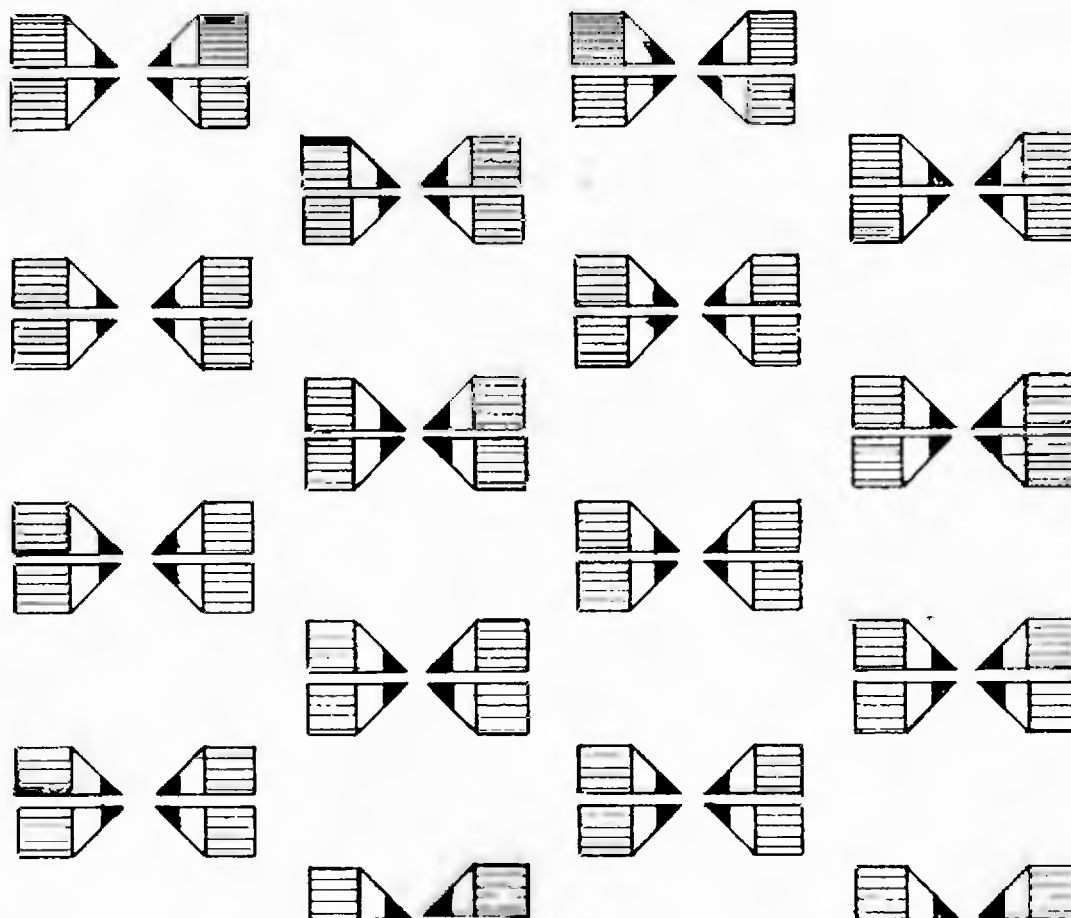


Fig. 6.14 (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p2gg(pgg)$; (b) Paralelogramo característico.

(a)



(b)

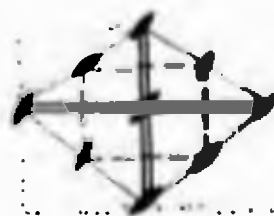


Fig. 6.15 (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $c2mm(cmm)$; (b) Paralelogramo característico.

6.4.2.3 Grupo $p2gg$.

Notación abreviada pgg , lograda con dos reflexiones deslizantes con ejes perpendiculares entre sí. La figura 6.14.a es un ejemplo del grupo y 6.14.b es su paralelogramo característico.

6.4.2.4 Grupo $c2mm$,

Notación abreviada cmm , tiene ejes de reflexión perpendiculares entre sí y una media vuelta en el punto medio del

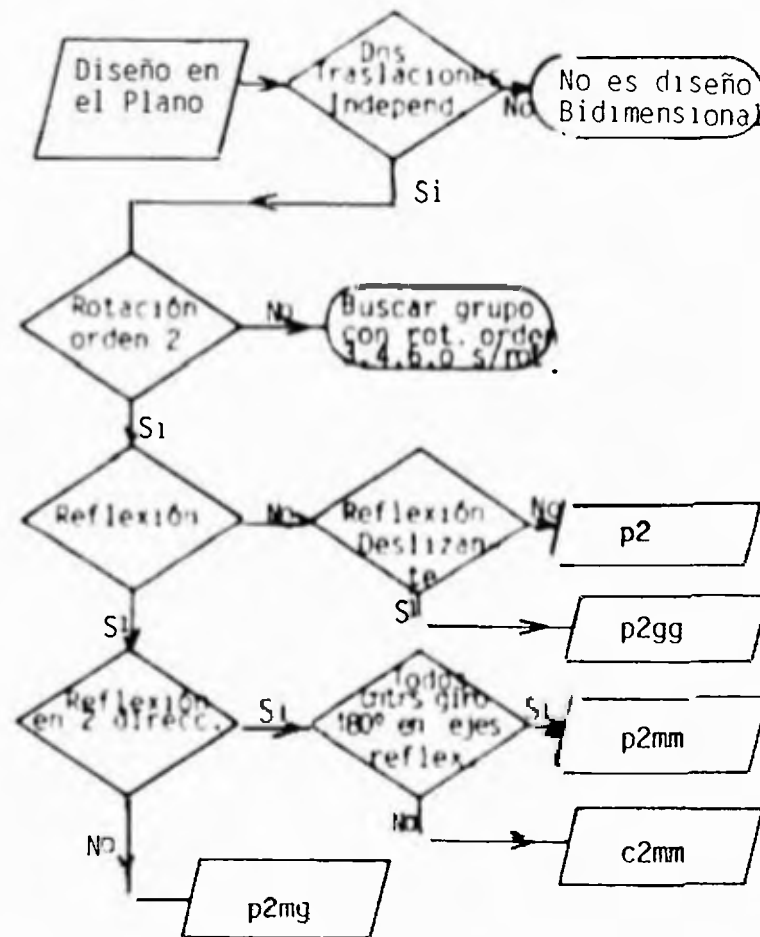


Diagrama 6.2. Esquema para identificación de los grupos bidimensionales con media vuelta como giro de mayor orden, giro de orden 2.

rectángulo definido por cuatro medias vueltas cuyas distancias son la mitad de las dos traslaciones admitidas. La figura 6.15.a ilustra el grupo y 6.15.b es su paralelogramo característico.

Estos cuatro grupos anteriores, junto con p_2 , agotan las posibilidades de generar grupos bidimensionales que admitan como centros de rotación de mayor orden las medias vueltas (giros de 180°). El diagrama 6.2 muestra un esquema que permite la identificación de estos grupos.

6.4.3 Grupos Derivados de p_3 .

Considérese ahora los grupos obtenidos ampliando p_3 .

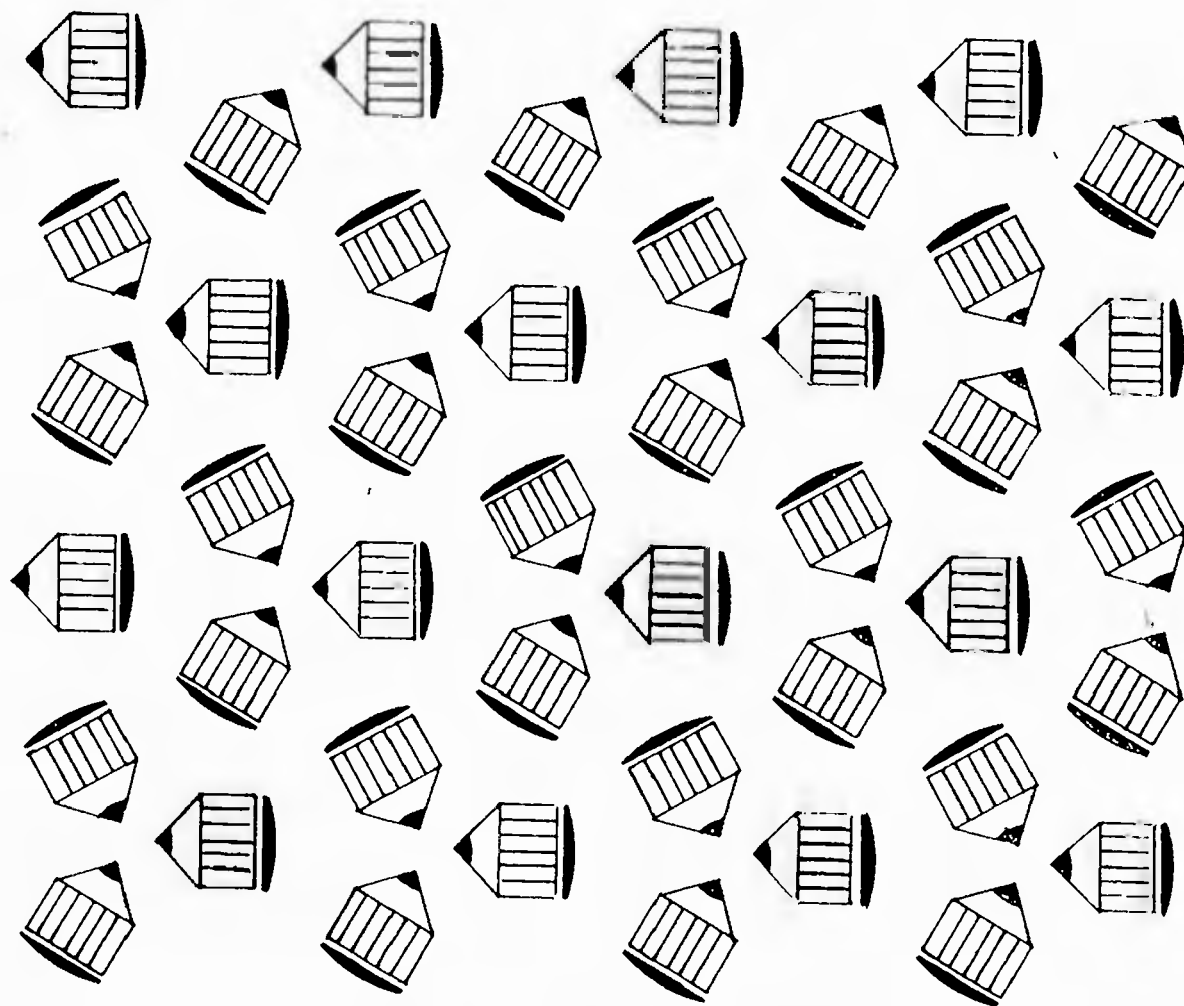
6.4.3.1 Grupo p_31m .

Se logra considerando a los ejes de las traslaciones como ejes de reflexión; la figura 6.16.a ilustra este grupo y 6.16.b contiene su paralelogramo característico.

6.4.3.2 Grupo p_3m1 .

Se obtiene considerando a partir de p_3 la existencia de reflexiones cuyos ejes son perpendiculares a las dos traslaciones admitidas y que contienen al centro de giro ubicado dentro del triángulo equilátero que ya ha sido mostrado en la presentación del grupo p_3 . La figura 6.17.a, lo ilustra y la figura 6.17.b, representa su paralelogramo característico. El diagrama 6.3 muestra un esquema que permite su identificación.

(a)



(b)

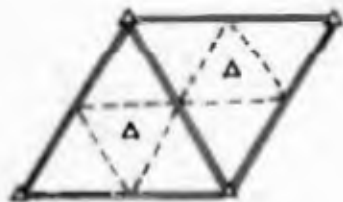


Fig.6.16. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p31m$; (b) Paralelogramo característico, contiene todas las simetrías del grupo y facilita su identificación.

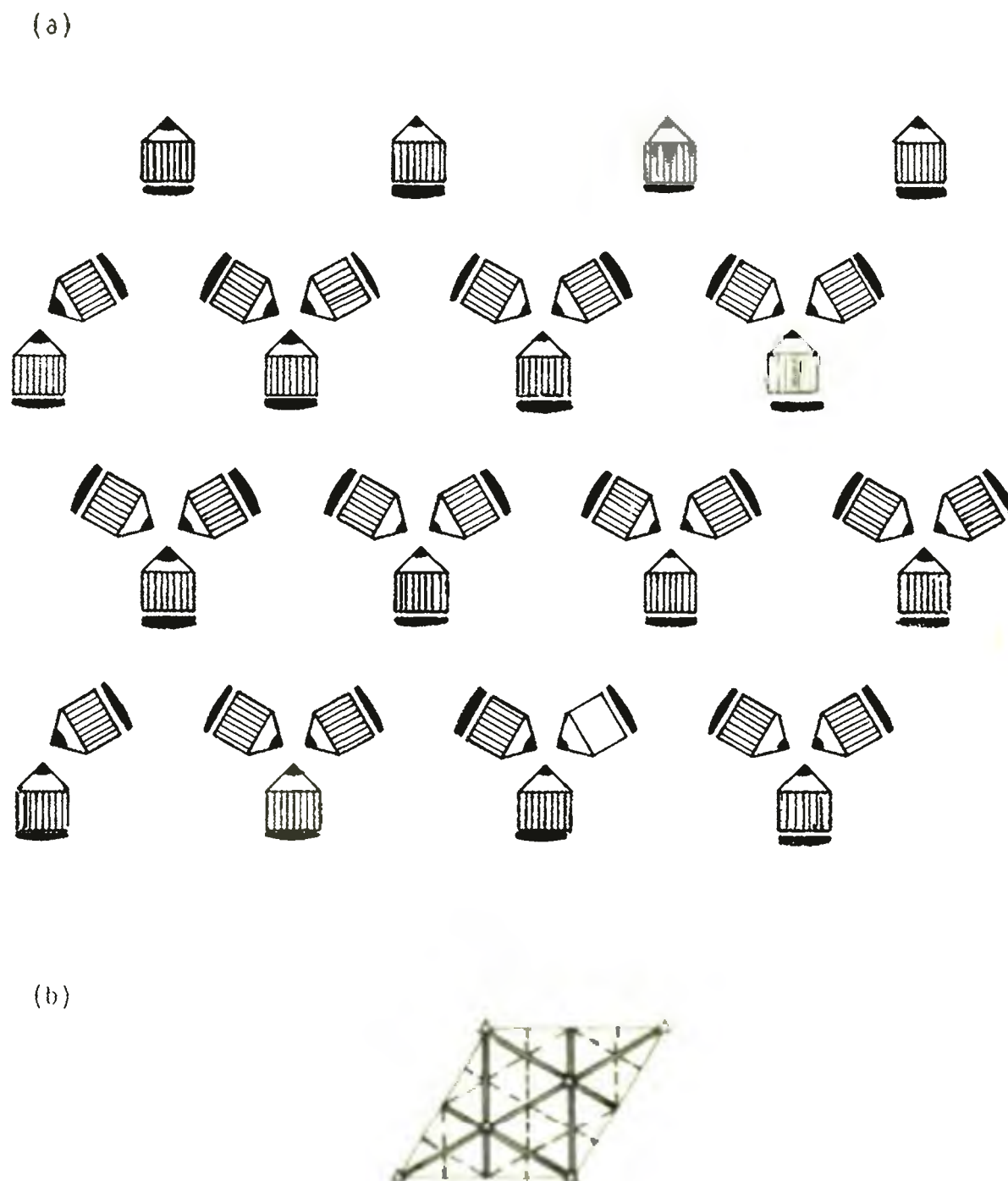


Fig.6.17 (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p3m1$; (b) Paralelogramo característico, conteniendo todas las simetrías del grupo, facilitando su identificación.

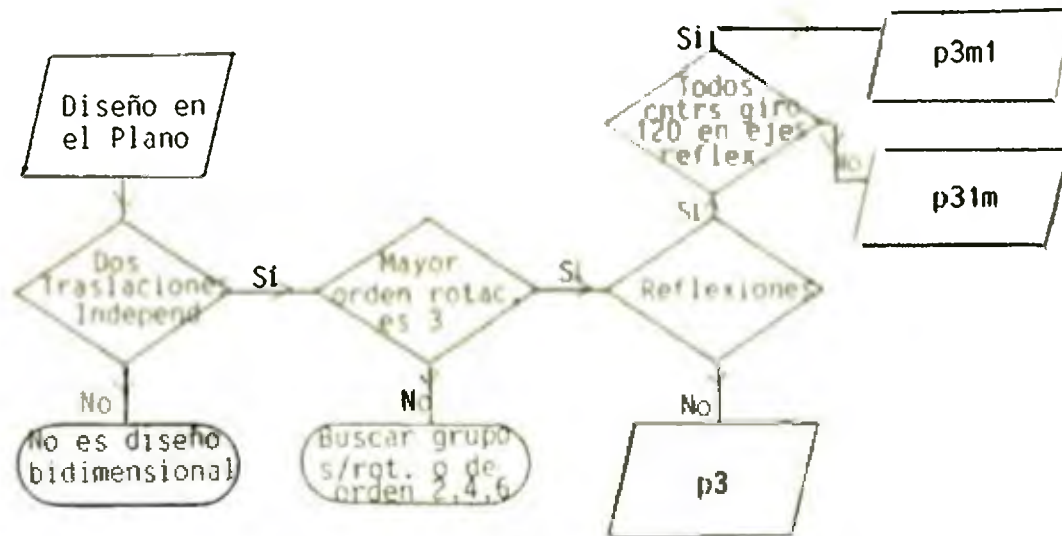


Diagrama 6.3. Esquema para la identificación de los grupos bidimensionales cuya rotación de mayor orden es 3 (rotación de 120°).

6.4.4 Grupos Derivados de $p4$.

Las ampliaciones logradas al grupo $p4$ se presentan a continuación.

6.4.4.1 Grupo $p4mm$.

Contiene reflexiones cuyos ejes son los ejes de las dos traslaciones admitidas. La figura 6.18.a es una ilustración de este grupo y 6.18.b es su paralelogramo característico.

6.4.4.2 Grupo $p4gm$.

Contiene reflexiones deslizantes que son perpendiculares a las traslaciones y reflexiones que forman ángulo de 45° con éstas. La figura 6.19.a es su ilustración y 6.19.b es su paralelogramo característico. El diagrama 6.4 es un esquema práctico para identificación de estos grupos.

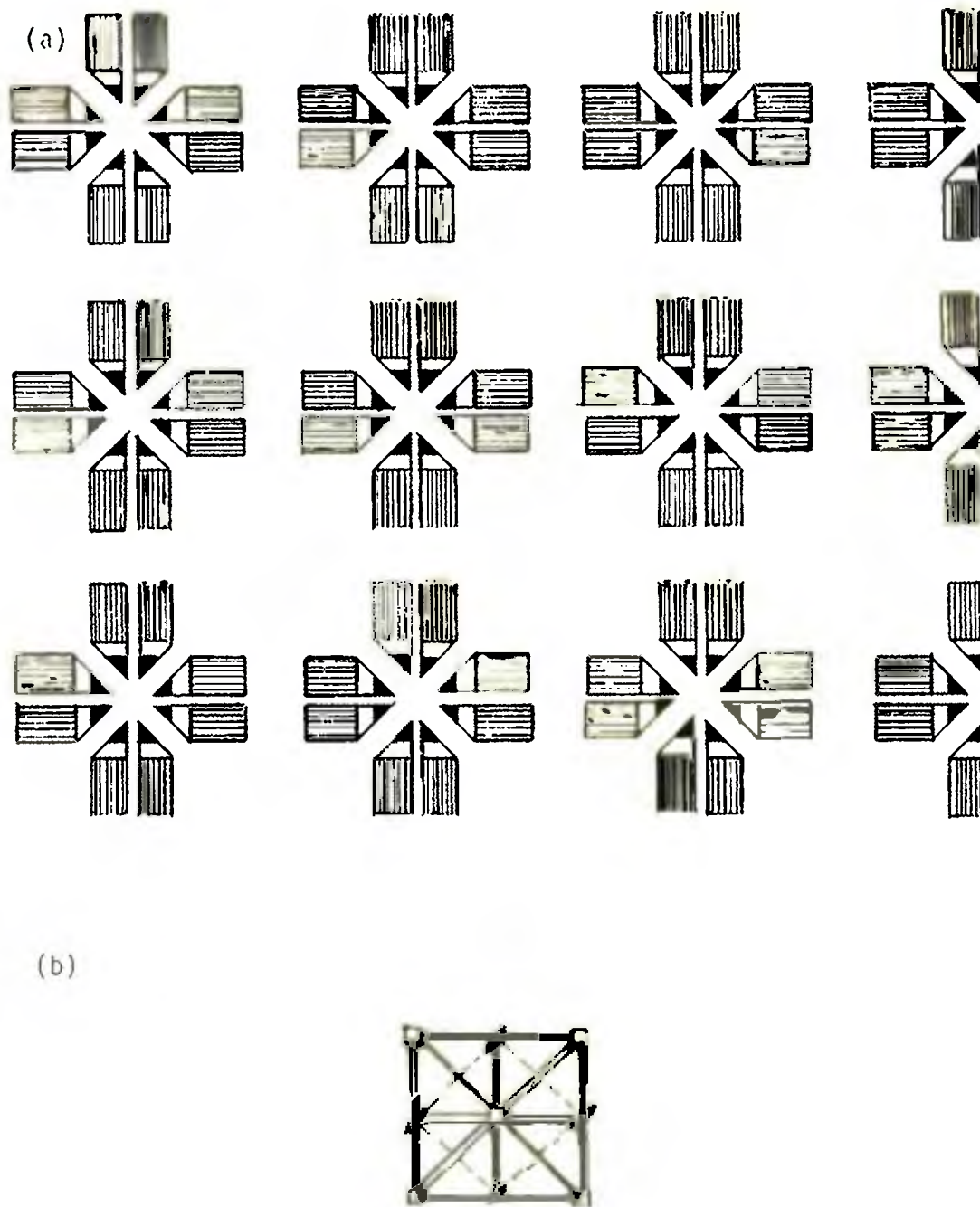


Fig.6.18. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p4mm(p4m)$; (b) Paralelogramo característico, mostrando las simetrías del grupo y permite su identificación.

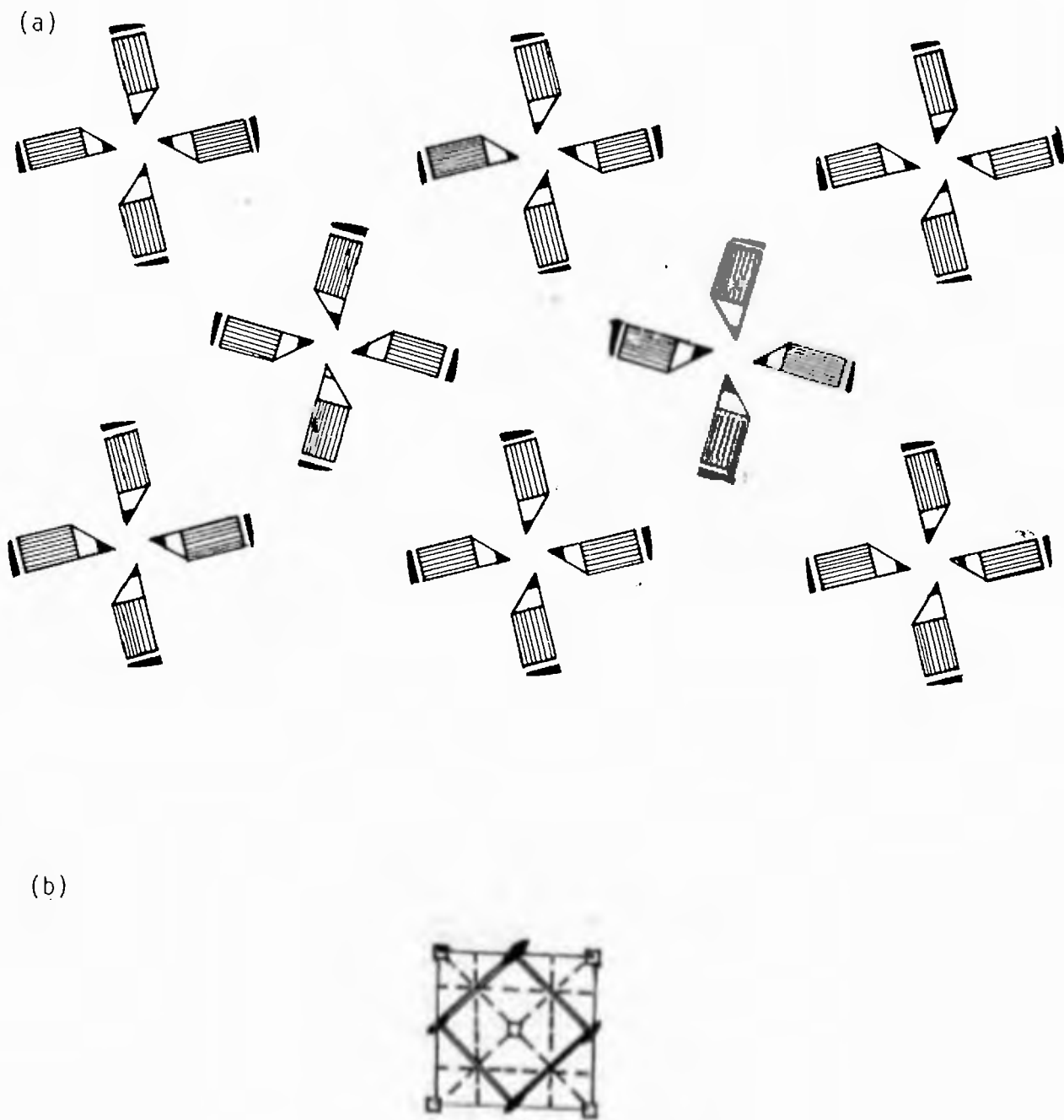


Fig.6.19. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p4gm(p4g)$; (b) Paralelogramo característico que permite la adecuada identificación.

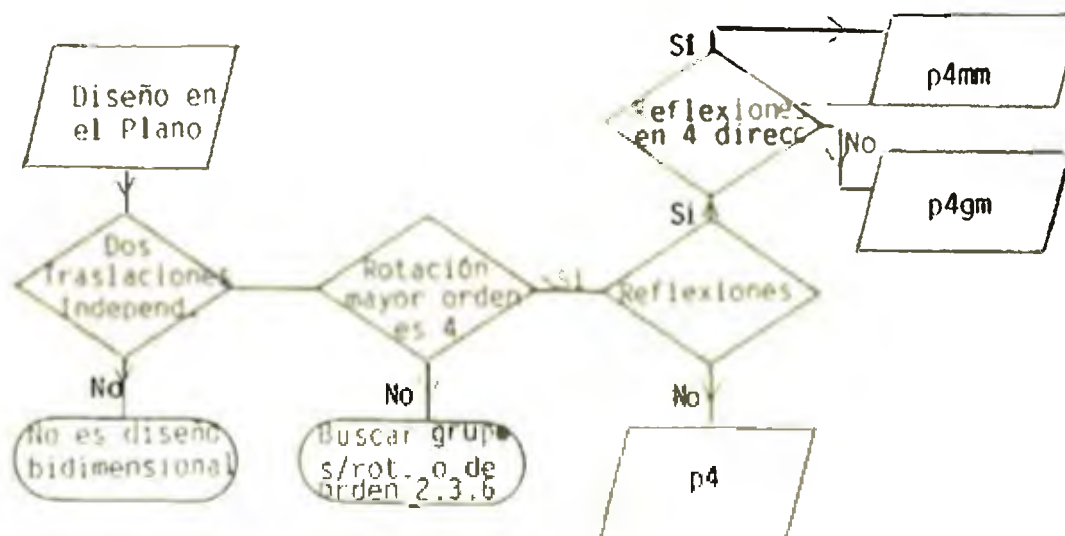


Diagrama 6.4. Esquema de identificación de los grupos bidimensionales con mayor orden de rotación 4 (rotaciones de 90°).

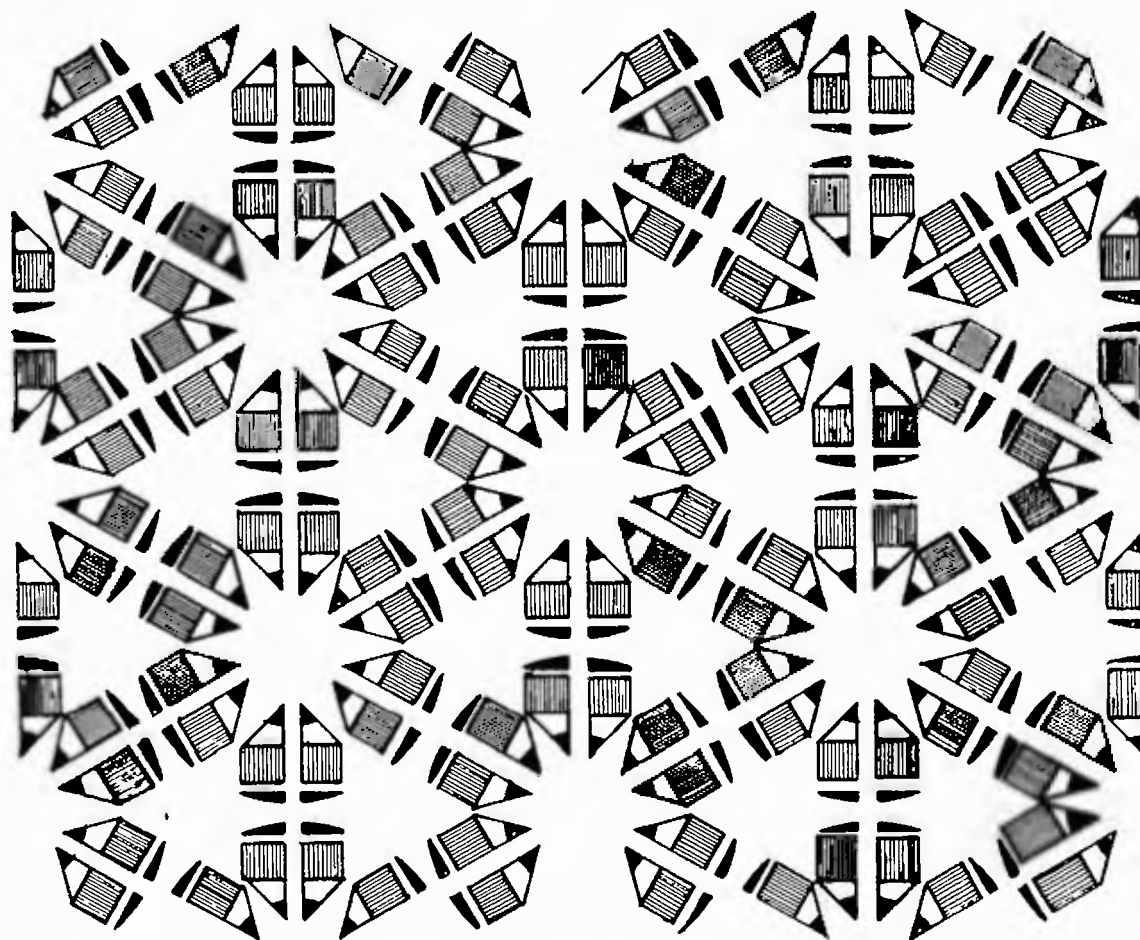
6.4.5 Grupos Derivados de $p6$.

La última ampliación de estos grupos bidimensionales corresponde a $p6$, se muestra a continuación:

6.4.5.1 Grupo $p6mm$.

Notación abreviada $p6m$, se logra considerando reflexiones cuyos ejes son los ejes de las traslaciones, además de reflexiones perpendiculares a éstas, que pasan por el centro del triángulo equilátero ahí definido. La figura 6.20.a es un diseño que ilustra este grupo y 6.20.b es el paralelogramo que contiene todas las simetrías de éste y facilita su adecuada identificación.

(a)



(b)

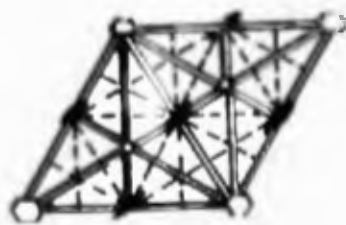


Fig.6.20. (a) Diseño ilustrativo del grupo bidimensional $p6mm(p6m)$; (b) Paralelogramo característico, conteniendo todas las simetrías del grupo y permiten su adecuada identificación.

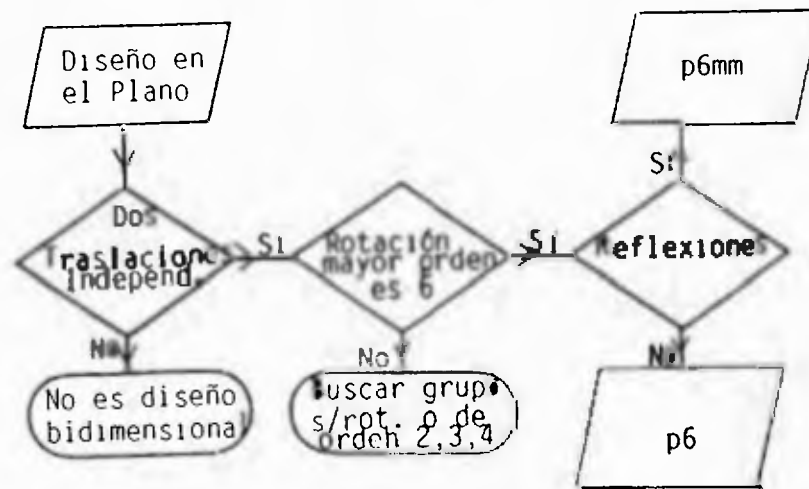


Diagrama 6.5. Esquema de identificación de los grupos bidimensionales con mayor orden de rotación 6 (rotaciones de 60°).

El diagrama 6.5 muestra un esquema para identificar este tipo de grupos. La lámina 6.1 muestra como estos 17 grupos generan, esta carta no pretende ser la única sino simplemente mostrar una de las formas alternativas de obtenerlos, en ella se utilizan las dos traslaciones independientes de las que ya se ha discutido al principio del capítulo.

6.5 Aplicación de los Grupos Bidimensionales en la Cerámica.

Después de esta presentación de los 17 grupos bidimensionales de simetría en el plano presentamos unos ejemplos de éstos encontrados en la cerámica de la región central de Panamá. Ocurre en esta cerámica, que no se encuentran (entre las piezas a las que se ha tenido acceso) ejemplos inequívocos del empleo de algunos de ellos.

Resulta adecuado mencionar cuando se muestran los diseños correspondientes a los grupos bidimensionales los trabajos del artista holandés M.C. Escher que desarrolló complicados diseños bidimensionales tomando como fuente de inspiración los diseños contenidos en La Alhambra de Granada [Alsina y Trillas 1984: 164]; también los diseños recopilados por Daniel Sheets Dye y presentados en el libro "Chinese Lattice Designs" en el que contiene más de 1200 diseños, recopilados a través de 21 años de trabajo en China (Dover Pub., 1974, reimpresión inalterada de la edición de 1949 titulada "A Grammar of Chinese Lattice"). Muy meritorio resulta el trabajo de aplicación a la arqueología hecho por Dorothy Koster Washburn en la clasificación del material recopilado en la expedición al Upper Gila (1949-1951) auspiciada por el Museo Peabody y presentado en "A Symmetry Analysis of Upper Gila Area Ceramic Design" (Papers of the Peabody Museum of Archaeology and Ethnology, vol. 68, 1977).

La lámina 6.1. contiene los esquemas que representan a los 17 grupos bidimensionales con una alternativa (cada uno) de la forma de generarlos usando dos traslaciones independientes y otros generadores, así como la región fundamental generadora requerida en cada caso. Adaptado del artículo *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*, Doris Schattschneider, Am. Math. Mon., Vol. 85. N°6, pp. 477.

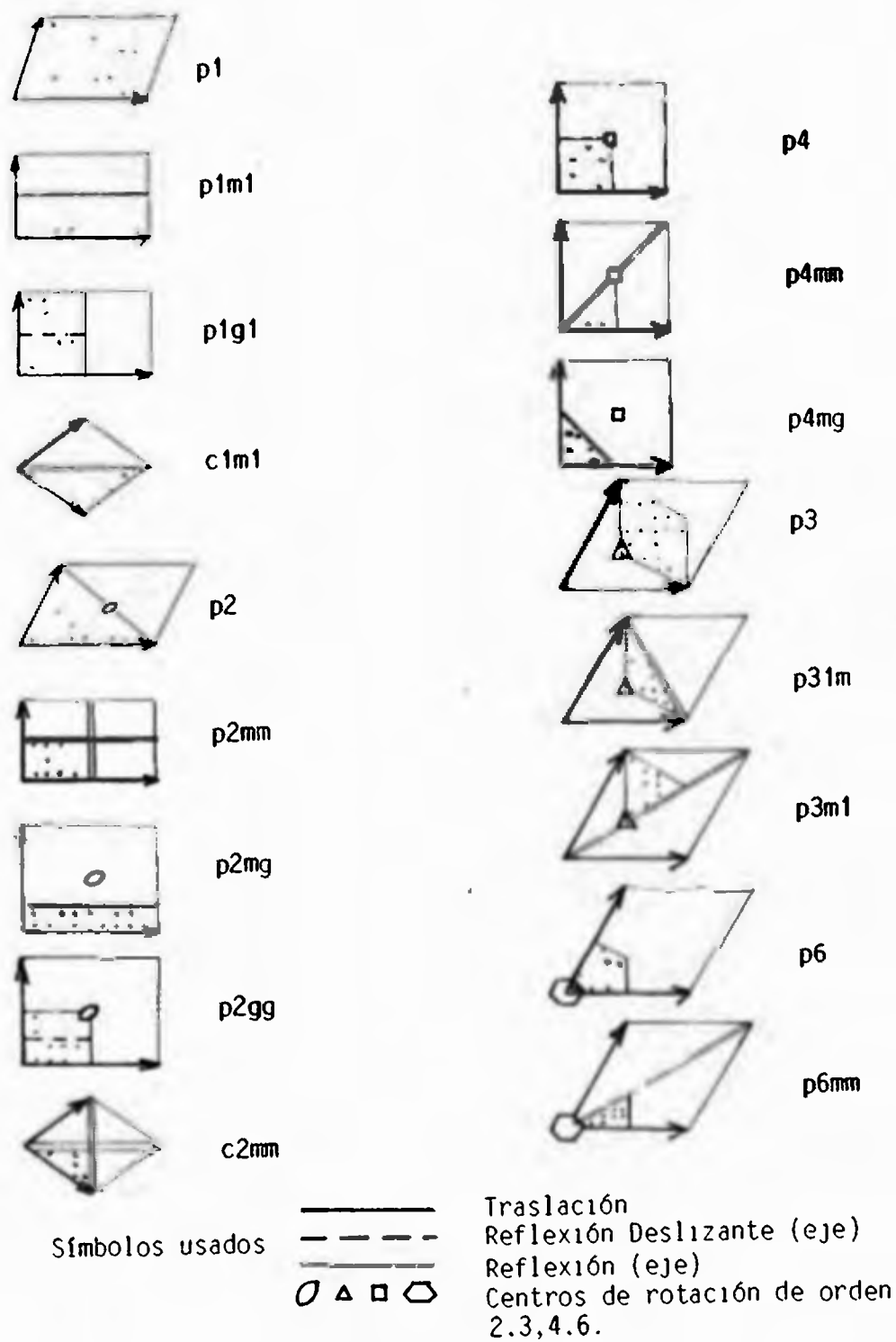


Lámina 6.1. Representación de los 17 grupos bidimensionales, representados por su región fundamental y usando dos traslaciones independientes entre sus generadores.

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

Nº de identificación: 33-42-20/481

Fuente: Lothrop, S.K., Cocolé: An Archaeological Study of
Central Panamá, Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig. Nº: 206.b (pág. 111)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: Bidimensional p1



CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres
de Araúz"

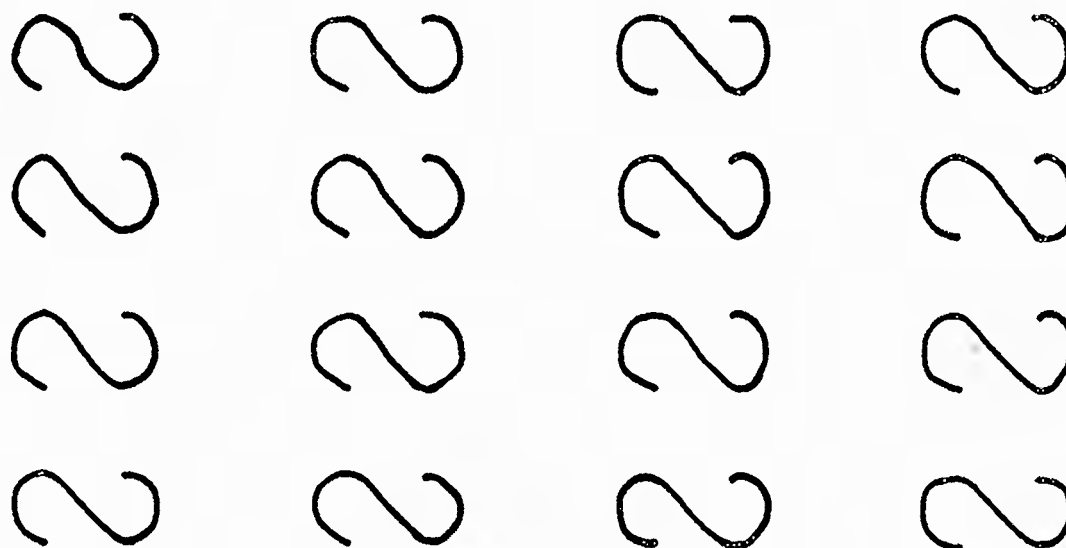
Nº de identificación:

Fuente:

Fig.Nº

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: Bidimensional p2



CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

(Provincia de Coclé)

Museo o Colección: Museo Peabody, Cambridge, Mass.

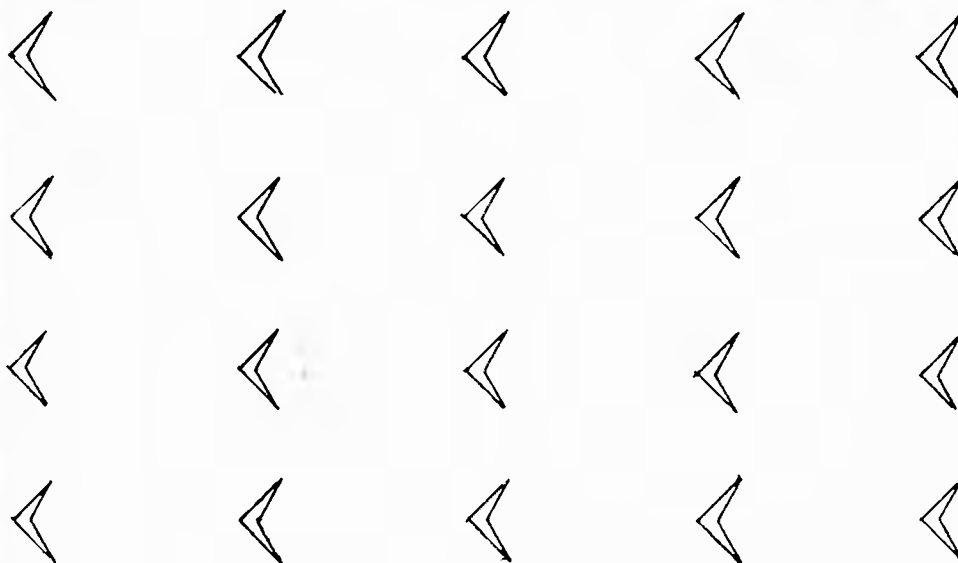
Nº de identificación: C/13482

Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.

Fig.Nº: 204.b (pág. 110)

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: Bidimensional p1m1



CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA

Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz"

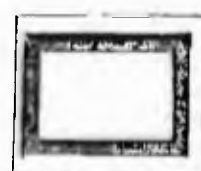
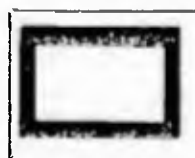
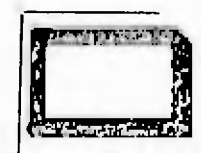
Nº de identificación:

Fuente:

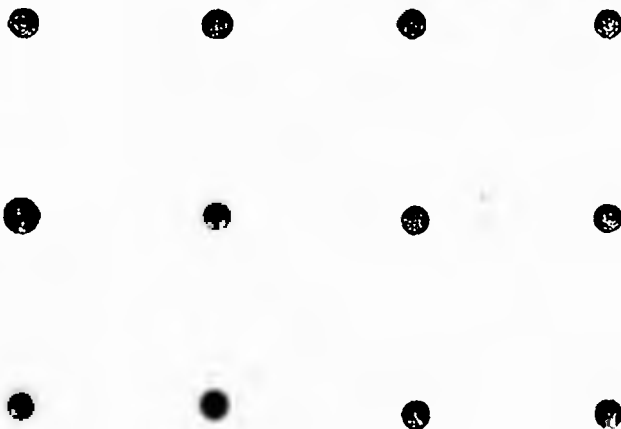
Fig. Nº

Técnica: Cerámica Pintada

Grupo: Bidimensional p2mm



CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Coclé)****Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres
de Araúz"****Nº de identificación:****Fuente: Lothrop, S.K., Coclé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig.Nº: 409.b (pág.207)****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: Bidimensional p2mg**

CULTURA: REGION CENTRAL DE PANAMA**(Provincia de Los Santos)****Museo o Colección: Museo Antropológico "Reina Torres
de Araúz"****Nº de identificación:****Fuente: Lothrop, S.K., Cocolé: An Archaeological Study of
Central Panamá. Part II: The Pottery of the
Sitio Conte and Other Archaeological Sites.****Fig. Nº : 457 (pág. 232)****Técnica: Cerámica Pintada****Grupo: Bidimensional p4mm**

Capítulo 7

UNA APLICACION: LA CERAMICA DE LA REGION CENTRAL

7.1 Generalidades

En esta última parte se presenta una aplicación de toda la parte concerniente a los grupos de simetría puntuales, uni- y bi-lineales. Esta aplicación es en la identificación de los distintos grupos de simetría existentes en una muestra de piezas de cerámica provenientes de la región central de la República de Panamá. Para una mejor presentación del tema se divide este capítulo en tres partes; en la primera de ellas se exponen algunos conceptos de índole teórica que sirven de basamento para la utilización de la simetría en la clasificación de la cerámica; en la segunda se ubica la cerámica de la región central y en la última se dan los resultados de la aplicación de tales conceptos a la muestra elegida.

7.2 Sustentación Teórica

7.2.1 La clasificación en Arqueología.

La clasificación de artefactos en Arqueología es una necesidad que, al igual que en otras áreas del conocimiento,

logra innegables beneficios. Raven, Berlin y Breedlove han expresado acertadamente que: "El hombre es por naturaleza un animal clasificador. La continuidad de su existencia depende de su habilidad para reconocer similitudes y diferencias entre los objetos, y los eventos de su universo físico"^{*} [1971: 1210]. Además, "La clasificación, como la Estadística, no es un fin en sí mismo sino una técnica con la cual se pueden alcanzar objetivos específicos y por lo tanto variará de acuerdo con ellos. La gran oportunidad para la variación se presenta al seleccionar los criterios que serán considerados como diagnósticos de una determinada clase"^{**} [Rouse, 1960: 513]. Básicamente las dos formas de clasificación en arqueología son : (1) Analítica, cuando se tiene por objetivo los modos y (2) Taxonómica, cuando el propósito es formar tipos. "Por modo se entiende cualquier patrón, concepto, costumbre que gobierne la conducta de los artesanos de una determinada comunidad, los cuales son transmitidas de generación y que pueden distribuirse de una comunidad a otra. Este modo se reflejará en los artefactos como atributos que conforman los patrones de la comunidad, y que en ellas refleja o manifiesta sus conceptos, revela sus formas de manufacturarlos y usarlos. La clasificación analítica centra su atención en tales atributos y a través de ellos llega a los patrones, conceptos y costumbres mismos. Intenta leer tales modos entre los artefactos."^{***} [Rouse 1960: 513].

^{*,**,***} Traducción del autor.

7.2.2 La Clasificación Analítica

Pueden distinguirse dos tipos de modos : (1) Modo Conceptual consistente en atender a los conceptos del material, forma y decoración utilizados por el artesano en confeccionar el artefacto; y (2) Modo Procesal, cuando se tienen en cuenta las prácticas y costumbres usadas en el proceso de fabricación o en el uso dado al artefacto.

Cuando se utiliza la forma conceptual el investigador únicamente necesita designar una o varios atributos de los artefactos en estudio para que sean representativos de la clase. Al emplear la forma procesal debe, además, inferirse la conducta del artesano a partir de los atributos representativos.

El sistema de clasificación que se utiliza en esta sección es una variante del análisis modal conceptual ya que se basa en la selección de un atributo específico -la estructura grupo-teórica del diseño- el cual se considera como un indicador de los procesos de transmisión de la información.

La variante de este esquema es que el análisis modal, generalmente, basa el suyo en atributos particulares, pertenecientes a un área y grupo específicos bajo investigación. En nuestra situación el atributo elegido es universal y se encuentra subyacente en todos los subsistemas artísticos, comprendidos en los sistemas culturales estudiados [Washburn, 1977: 5].

7.2.3 El Sistema Cultural.

Para comprender mejor la utilización de los principios de la simetría para la clasificación de los diseños mencionamos algunas características de un sistema cultural.

- 1) Los sistemas culturales poseen estructuras definidas, por tanto subyacente a ellos deberá existir una serie de reglas organizacionales básicas desarrolladas por los miembros de la cultura como un medio para mantener y perpetuar su sociedad. De manera semejante a la forma como las relaciones sociales, políticas, económicas y religiosas están compuestas por ciertas reglas de conducta, así también las formas artísticas están estructuradas por reglas específicas de constitución y composición. La perpetuación de la variedad de los motivos diseñados se logra por una serie de arreglos estructurales que moldean la conducta de los hombres dentro de los patrones observables y medibles.
- 2) El mantenimiento de los sistemas culturales humanos requiere de un sistema de información. Reconstruir la estructura y extensión de las redes de información entre los participantes dentro de un sistema o entre diferentes sistemas presenta dificultades. En realidad, en nuestro caso, poco se conoce de los detalles políticos y sociales que permitían el comercio entre distintas sociedades. En las llamadas "sociedades simples" existe mayor dificultad en descubrir los patrones del intercambio informal.

3) En un sistema cultural humano la información interna es sistemáticamente clasificada y una de las características más universales de la cultura es la propensión del hombre a clasificar el mundo a su alrededor.

Para desarrollar un método sistemático de estudio de los procesos de desarrollo y cambio en cualquier sistema conductual es necesario utilizar unidades de medición uniformizadas para que el análisis de tales cambios del sistema cultural sean hechos en un continuum espacio-temporal. Deben seleccionarse por su reiteración algunos atributos, componentes de valor cultural, con capacidad de significación e interpretación, que pertenecen a los restos culturales investigados; y que están totalmente presentes en el subsistema investigado.

En el subsistema del arte todas las formas artísticas tienen múltiples atributos; cada uno de los cuales contiene diferentes tipos de información cultural. Dado que esta sección esta dedicada a investigar los cambios experimentados en la decoración de la cerámica, sólo algunos de los atributos de ésta serán de importancia y para poder establecerlos es conveniente hacerlo teniendo en cuenta los siguientes criterios:

1. El atributo debe ser determinado exclusivamente por decisión humana. Atributos como la arcilla, los colores pueden depender de factores ambientales más no así el diseño el cual solamente depende de la preferencia

personal del alfarero o de la tradición cultural del grupo.

2. El atributo debe ser específico del grupo, de manera tal que refleje sus preferencias y reglas, que pueden ser similares pero además distinguibles desde la misma perspectiva en otras culturas.
3. El atributo debe ser uniformizable de manera que pueda ser usada como unidad común para estudios comparativos entre distintos grupos culturales.
4. El atributo debe ser culturalmente universal para que pueda ser utilizado para analizar cualquier diseño repetitivo proveniente de cualquier medio o cualquier grupo cultural.

La propiedad del diseño seleccionada por su universalidad y características sistemáticas para este estudio es la **simetría** (Washburn 1977: 7; 1983: 61).

Estudiando la simetría de los diseños en las piezas de cerámica se puede avanzar en establecer el sistema cultural al cual pertenecen, la semejanza entre diferentes sistemas culturales. Varios trabajos han sido hechos en esta dirección, de los cuales mencionamos el de Zaslów y Dittert tendiente a establecer el desarrollo evolutivo en los patrones de diseño de la cerámica Hohokam presentado en el ensayo "The Pattern Technology of the Hohokam" contenido en "Pattern Mathematics and Archaeology" (1977); el de Washburn analizando el intercambio y la dispersión de los patrones de

diseño, presentado en el muy meritorio trabajo titulado "A Symmetry Analysis of Upper Gila Area Ceramic Design" (1977); el de Zaslow comparando los patrones de diseño de diferentes sistemas culturales, los Hohokam, el Alto Gila y el Valle de Oaxaca, en "Pattern Dissemination in the Prehistoric Southwest and Mesoamérica" (1981). Crowe y Thompson (1987) mencionan otros trabajos en esta misma dirección como son los de Crowe sobre el arte de Benin (Nigeria), en 1975, el de Washburn y Matson (1985) sobre los cambios espacio-temporales en los patrones de diseño utilizando herramientas estadísticas para determinar, a partir de una cantidad de datos de campo, la posibilidad de ubicación de otros, en las vecindades.

En esta oportunidad se aplican los conceptos de simetría a la cerámica prehistórica de una determinada área, la Región Central de la República de Panamá, para poder sostener la hipótesis de que existen cambios en el uso de los grupos de simetría y que tales cambios coinciden con los distintos períodos estilísticos en que ha sido dividida la evolución de la cerámica ahí existente. Con esta aplicación estamos corroborando una afirmación doble; por una parte la afirmación de Bourbaki (1972), haciendo referencia a un trabajo de A Speiser de que todas estas ejecuciones concretas son evidencias de las matemáticas desarrolladas por tales culturas y, la otra, en que los conceptos de simetría resulten adecuadas para la clasificación de los artefactos pertenecien-

tes a determinada cultura [Washburn,1977: 7], permitiendo así un mejor conocimiento de ésta.

7.3 La Cerámica de la Región Central.

7.3.1 Límites.

Establecer los límites de una región para el estudio de su prehistoria plantea una diversidad de problemas. Howe [1977: 33] sostiene que las divisiones que en la actualidad se les atribuye a determinadas tribus*, grupos étnicos, se ajustan más a los criterios de los investigadores o cronistas de esos pueblos que a las realidades de aquéllos. Además, cuando estas divisiones se hacen, obedecen a determinados criterios, que las justifican o son satisfechos con ellas, sean estos lingüísticos, económicos, de parentesco, arqueológicos, Tal circunstancia hace que la división lograda de acuerdo a éste no se ajuste a aquella lograda siguiendo otro, y que lejos de verse reforzada la una con la división de la otra, estas se sobreponen. Por otro lado, la prehistoria de una determinada región resulta ser lo suficientemente vasta como para no ajustarse adecuadamente a una

*) En esta parte del trabajo y por considerarlo adecuado hacemos la siguiente aclaración en cuanto al vocablo tribu; a ésta la consideramos como una comunidad definida, agrupada de acuerdo a un criterio (lingüístico, cultural o político); teniendo en cuenta la aclaración hecha por Howe [1977] en el sentido de que tal palabra frecuentemente no es más que una denominación conveniente pero no exacta para identificar algunas agrupaciones humanas estudiadas, las cuales tienen muchas veces diferencias tales que poco se asemejan al esquema mental común de lo que es una tribu.

sola división para su estudio. Así como nuestras fronteras se modifican, también en el pasado lo han sido. Para el caso específico de la República de Panamá y de la presente investigación resulta oportuno considerar la división que en esta sección se presenta. Tal división no se debe considerar como final, inamovible ni mucho menos dogmática si no que, simplemente, para el estudio en ejecución es adecuada y está de acuerdo con lo sostenido por diferentes investigadores que han llevado a cabo excavaciones, estudios antropológicos y etnográficos en la región conocida como Baja Centro América [Lange y Stone 1980: 25].

En esos estudios se sostiene que, para la parte del occidente de Panamá, desde hace 7000 años existe una continuidad de los patrones de asentamiento. Tales asentamientos fueron establecidos por los primeros cazadores llegados desde el norte y que su presencia, y migración en este continente, y en esta región, se debe a la persecución de la megafauna [Mosimann y Martin 1975: 304 - 313] y que ocurrió hace unos 11000 años. Estos pobladores estaban adaptándose a las condiciones climáticas del trópico y a las modalidades alimenticias que la región les permitía [Linares *et al.* 1975: 137 - 145].

Resulta comprensible que las evidencias más antiguas recuperadas sean en lugares templados y no en asentamientos costeros como ha sido sostenido por muy largo tiempo por investigadores que consideran que la abundancia de biomasa

en la costa había proveído las condiciones idóneas para que los primeros habitantes de esta región se establecieran en sus cercanías, aprovechando la existencia de ecosistemas de la forma manglar-estuario-laguna (Phillips citado por Cooke [1988: 127]).

Se ha podido establecer que a partir de los asentamientos primarios en abrigos rocosos y campos abiertos a lo largo del río Chiriquí, estos primeros habitantes pasaron al cultivo de las semillas, especialmente con la introducción de la agricultura del maíz, lo que dió origen a importantes cambios socio-políticos que condujeron a agrupaciones humanas, mayores en cantidad y más internamente estratificadas [Linares *et al.* 1975: 187]. Estas nuevas poblaciones, diferentes en la tecnología de cultivo y en su organización interna, se ubicaron en zonas cercanas a las costas caribeña y pacífica [Linares y Ranere 1980: 245].

También se tiene documentado el hecho que la parte este de Panamá estaba habitada por una población que se agrupaba en pequeños cacicazgos, esclavistas e internamente estratificados [Howe 1977: 32]. Además que existía en la región una división entre los pueblos que habitaban en la zona este del istmo y aquéllos que estaban ubicados en la actual zona central.

Esa división es sustentada en las crónicas de los primeros europeos que llegaron a esta parte de la Tierra Firme; se menciona que en la zona que estaba comprendida al oeste

de las tribus que habitaban en las proximidades del Acla y Santa María y hacia el este de los dominios del cacique Perequeté y que en la costa caribe se extiende hasta el río Indio, ahí se encontraba la *Provincia de Cueva*. Se agrega que entre estos habitantes y sus vecinos existían diferencias lingüísticas, entre otras observadas, como para dar la impresión en aquellos narradores de la época de ser diferenciables en el momento del contacto [Op. Cit.: 32].

Estas divisiones observadas, además del hecho que en esas crónicas se establece que en los llanos centrales del istmo se encontraban los dominios de los muy mencionados jefes Natá, cuyo asentamiento al momento del contacto era impresionante como ha quedado debidamente registrado en tales escritos y lo apoyan las evidencias arqueológicas, conducidas responsablemente en la década anterior [Cooke 1976: 317]. También estaban los dominios de Chirú, Escoria, Parita (o París) y otros, y en la parte de la cadena montañosa central donde estaban los dominios de Esqueva y se hablaba una lengua diferente a las de sus vecinos [Espinosa 1972: 127], y los de Urracá, el cual ofreció resistencia efectiva a los invasores siendo así que murió en tales montañas aún inconquistadas tal como se lee en el trabajo de Linares [1977: 74]; el cual, en la parte correspondiente, está basado en los escritos de Andagoya, Oviedo, y de Las Casas.

Los trabajos desarrollados hasta la fecha y que han evolucionado en cuanto a calidad de conducción, e interpretación

del cuerpo de datos obtenidos, han hecho posible mejorar el entendimiento de la prehistoria de Panamá; pasando desde los enfoques responsables, pero limitados en cuanto la comprensión de las relaciones internas, tendientes a fortalecer la concepción de las "áreas culturales", como se desprende de los escritos de Lothrop [1937, 1942, 1950], Ladd [1964], *inter alios*.

Este último presenta en su revisión de la arqueología panameña un resumen acorde con la actual división geopolítica del país, manifestando que se están perdiendo los distintivos culturales entre las diferentes áreas que menciona, pero añadiendo una nueva, que coincide con esa división; el área de la Zona del Canal [Opus Cit.: 12]. Tal división ha sido abandonada reconociendo la continuidad interna de la secuencia cultural en la región central y occidental, permitiendo aseverar, de manera general, que esta evolución es gradual y previsible desde hace unos 8000 años hasta la conquista [Cooke 1985a: 82].

Es en base a tales hechos y otros más, como son las investigaciones lingüísticas y etnográficas, por lo que se ha convenido que el istmo sea dividido para el estudio adecuado de su prehistoria en tres regiones, llamadas Región Occidental, Central y Este de Panamá. La región de interés de este trabajo es la Región Central y se delimita como sigue:

Límite Occidental: El cauce del río Tabasará, y continuando desde su nacimiento hasta la costa del Caribe.

Límite Oriental: Partiendo desde Punta Chame, en el Pacífico, en línea recta hasta la costa del Caribe.

Es por tal razón que esta región comprende, en la actual división geopolítica del país, las provincias de Veraguas, Los Santos, Herrera, Coclé; parte de la provincia de Bocas del Toro (límite occidental) y parte de las provincias de Colón y Panamá (límite oriental).

Oviedo menciona que la lengua de Cueva se acaba en la Provincia de Chame; mientras que de ahí en adelante en dirección hacia Natá "hay mucha diversidad de lenguas, y en poco espacio de tierra son tan diferentes, que no se entienden los unos indios a los otros" [Oviedo 1959 vol V: 7]. De esta afirmación no debe hacerse una extrapolación simple queriendo concluir que la cultura de cada uno de esos pueblos era diferente, más bien la diferencia lingüística sólo reafirma la estabilidad cultural de aquella zona.

Linares [1977: 78] menciona que el límite este de la región central es conveniente fijarlo hasta el lugar de los dominios de Chirú. Cooke sugiere que sea en los alrededores de Chame [1976: 311] además menciona que la evidencia arqueológica existente apoya el testimonio de los cronistas del siglo XVI, en cuanto al hecho de tal división cultural en esa parte; aunque también expresa que esa división no se considere como un límite insalvable pues se han encontrado piezas de cerámica con características idénticas a aquellas

que se consideran como representativas de la región central, en lugares más al este de la ubicación de tales dominios.

Uno de los rasgos que menciona Ladd para la cerámica encontrada en el "área cultural" de la Zona del Canal es la mezcla de elementos que le son característicos del "área del Darién" y del "área de Coclé-Parita-Azuero" [1964: 18]. Esto es un apoyo indirecto a la división aquí sostenida; ocurre que el hecho de que en esta zona existan restos arqueológicos que contienen elementos de diferentes "áreas culturales" resulta adecuado para expresar que efectivamente dicha zona estaba sirviendo, en un determinado momento, como un área transicional entre distintos puntos de influencia y que esa interacción se ve reflejada en los distintos materiales rescatados, entre ellos la cerámica.

Esto no hace más que justificar la advertencia hecha antes sobre la dificultad en cuanto a establecer fronteras y que la existencia de una división conveniente a un determinado criterio resulte no apropiado para aplicarse para otro aspecto de los diferentes subsistemas culturales sobre los cuales centramos nuestra atención durante el curso de una determinada investigación.

El límite oeste de la región central es más fácil de ubicar, por la existencia del mato montañoso, alrededor del cauce del río Tabasará; el cual permite diferenciar esta región de aquella perteneciente al área cultural de Chiriquí [Cooke 1976c: 311].

7.3.2 La Cultura.

Los pueblos que habitaron la región central, de manera semejante a aquellos que contemporáneamente habitaban en otras partes del istmo pasaron por diferentes etapas evolutivas que fueron dejando evidencias y que sólo se han conocido de manera adecuada después de extensas investigaciones. A continuación se hace mención de algunas de las diferentes etapas que ocurrieron. No es una presentación exhaustiva, más bien es una enumeración de algunos rasgos generales. Los datos se han tomado de los trabajos de R. G. Cooke [1984a, 1984b, 1985a, 1985d], y de buena parte de las referencias en los mismos contenidas.

7.3.2.1 La Presencia del Hombre en el Istmo.

(9500 - 8000 a.C.)

Los artefactos más antiguos encontrados en el país, hasta la fecha, son unas puntas de proyectil para las cuales se calcula una fecha de 9500 - 8000 a.C. Se tiene conocimiento de haber encontrado cinco ejemplares completos, más otros fragmentos de este tipo de resto cultural; la forma de ellas es semejante a otras encontradas en los Estados Unidos conocidas como "Clovis". Algunas de éstas fueron encontradas en el lago Alajuela (Madden). Tal como lo indican los restos encontrados, aquellos primeros pobladores eran básicamente cazadores; los primeros de ellos lo eran de especies hoy extintas, megafauna, como las encontradas en los yacimientos

fósiles de La Coca y El Hatillo (Herrera).

7.3.2.2 Los Asentamientos Precerámicos Tempranos,

Adaptación al Trópico (8000 - 5000 a.C.).

Aproximadamente por el 8000 a.C. el clima del mundo cambió y las temperaturas aumentaron. Para ese momento la megafauna había sido extinguida y los grupos que habitaban en el istmo tuvieron que adaptarse a estas nuevas condiciones. Continuaron cazando otras especies más pequeñas y se dedicaron a la pesca, recolección de crustáceos y moluscos, y al consumo selectivo de algunas especies vegetales, como corozos y nances. Un sitio que contiene evidencia de actividad humana de este período es la Cueva de los Vampiros (AG-145); una fecha, 6610 a.C. ± 160. Otros son el Abrigo de Carabalí (Sf-9), con una fecha de 6090 a.C. ± 390, y el Abrigo de los Santana (SE-189), 5125 a.C. ± 290, localizado en el valle superior del río Gatú, Veraguas. En estos lugares y en otros que han sido definitivamente identificados como pertenecientes a esta época se tiene evidencia que consumían pescado, venado, armadillos, roedores e iguanas. También que preparaban frutos silvestres usando piedras de moler, como los corozos entre otros.

7.3.2.3 Los Asentamientos del Precerámico Tardío

Evidencias de la Agricultura.

(5000 - 3000 a.C.).

Siguiendo con la adaptación a las condiciones del trópico los lugares que contienen evidencias de este período dan muestra que para entonces el maíz era parte de la dieta, lo que indica que se había pasado de la recolección al cultivo de determinadas especies vegetales; esto parece estar indicado por las evidencias de perturbación de la vegetación circundante a los sitios. Los relacionados son SE- 189, de donde se ha obtenido la evidencia del uso del maíz, la Cueva de los Ladrones, LP-1, 4910 a.C. ± 90, Cerro Mangote, (AG-1), 4853 a.C. + 100, el cual es un conchero y está relacionado a las adaptaciones al ambiente costero. Existen otros lugares ubicados en diferentes ambientes, las estribaciones de la montaña, los llanos y en la costa.

Los patrones de asentamiento no estaban del todo definidos; se han encontrado asentamientos en forma de pequeños poblados, la Cueva de los Ladrones tenía un piso seco de unos 300 metros cuadrados y debió albergar a unas 30 personas que cultivaban maíz en las laderas del Cerro Guacamayo y cazaban venados, saínos, ardillas, además de pescar ocasionalmente en las quebradas cercanas. En el Abrigo de Aguadulce, AG-13, no se cultivaba el maíz; pero servía de campamento para la pesca en los esteros cercanos, caza, de tortugas, venados, iguanas, recolección de nances y corozos.

7.3.2.4 La Aparición de la Alfarería (3000-1000 a.C.).

Se está de acuerdo en reconocer que para la región central la cerámica más antigua es la asociada al complejo Monagrillo, llamada así porque fue identificada inicialmente en los materiales encontrados en el sitio del mismo nombre, HE-5; la cual ha sido también encontrada en otros sitios que contienen elementos precerámicos en sus capas inferiores, este es el caso de la Cueva de los Ladrones, LP-1, el Abrigo de Carabalí, y en el sitio La Mula-Sarigua, Pr-14. Se trata de una cerámica mal cocida, mal confeccionada, de diseños sencillos. Una cerámica autóctona.

Los patrones de asentamiento siguieron siendo básicamente los mismos que para la etapa anterior; la horticultura se estaba practicando, principalmente con el cultivo del maíz, así también la cacería y la pesca.

7.3.2.5 El Desarrollo de la Agricultura (1000-300a.C.).

El desarrollo de la agricultura en la región central tiene como rasgo importante el haber permitido la aparición de aldeas nucleadas. El complejo La Mula-Sarigua ilustra adecuadamente esa época, la población había crecido y la tradición de la cerámica había experimentado cambios desde los diseños del tipo Monagrillo; era de mejor manufactura y con indicios de estar siendo destinada a funciones más específicas, decorativas, de significación. Se han encontrado meta-

tes simples, manos de lava volcánica. La agricultura del maíz estaba afianzada como para hacer traer de otras regiones aquellos artefactos que en ella no se encontraban, como son para este lugar los mencionados metates y manos.

Otros lugares de asentamiento: en los llanos de Santiago, el lugar SA-27 tenía una extensión aproximada de seis hectáreas; también son aldeas nucleadas Búcaro, La India-1, en la Península de Azuero. Además del cultivo del maíz, la pesca y la cacería continuaban aportando fuentes de alimentación.

7.3.2.6 La Aparición de la División Política

(300 a.C. - 500 d.C.).

Las evidencias de sedentarismo en la Región Central se encuentran fechadas en los tiempos de Cristo, y de ella se encuentra evidencias en el lugar conocido como Sitio Sierra (AG-3), su período de mayor ocupación es este tiempo. Tenía casas con techos de pencas y paredes de cañazas, eran de forma redonda u ovalada. Se han encontrado evidencias de la variedad genérica del tipo de maíz que se estaba cultivando; las evidencias indican que también se cultivaban zapallos. Los metates eran más elaborados, con patas. La cerámica del lugar es en blanco y negro pero mejorando su calidad. Los entierros encontrados dan indicios de la división de las labores; las mujeres se enterraban con vasijas y cuchillos de piedras, los hombres con instrumentos para la confección de hachas o para practicar la agricultura.

Aparecen los objetos de orfebrería, evidencia del desarrollo de estructuras sociales más complejas que permitían la diferenciación entre los componentes de ella. La presencia de esta tecnología que es foránea; pero igual se está de acuerdo en que después de establecida se desarrolló de manera regional, adquiriendo visos autóctonos.

7.3.2.7 Desarrollo de la Diferenciación Social

(500 - 1520 d.C.)

La aparición de la orfebrería, las evidencias de los entierros que se han encontrado, la fina cerámica, los diseños empleados para decorarla, los testimonios de los europeos al momento del contacto evidencian que los pueblos de la Región Central habían desarrollado una sociedad estratificada que encontraba en estos artefactos oportunidad de evidenciar las diferencias que en el seno de esas sociedades existía, que seguía basándose en una agricultura extensiva y que estaba determinada su influencia por el dominio de determinadas zonas que eran más propicias para el cultivo o que poseían otros bienes como la sal

7.3.3 La Continuidad Cultural.

El problema de cuáles son los antecesores de los grupos indígenas que se encuentran habitando el actual territorio es un problema que sólo investigaciones más profundas y específicas pueden darle una respuesta adecuada y habrá otra

parte que quedará no aclarada por la falta de datos confiables respecto a las materias tratadas. Se está de acuerdo con el hecho de que las lenguas habladas por los actuales indígenas pertenecen al *phylum* macro-chibcha [Cooke 1985c: 139, nota 1]; aun cuando son tratadas las diferencias encontradas entre ellos, se tiene la impresión de que éstas no se han formado siguiendo una secuencia lineal si no que bien podría haber ocurrido que estas lenguas provinieran de un *substratum* Chibcha que estuvo difundido en toda la región muy anteriormente [Cooke 1985a: 82].

En distintas oportunidades se ha planteado la hipótesis de que los habitantes del istmo constituían un solo grupo, ésta es una simplificación que dificulta la comprensión de los diferentes pueblos que lo habitaban y específicamente las tierras de la región central. Pero no sólo se ha tratado de decir que eran un solo pueblo si no que en otras oportunidades se han asociado pueblos y zonas geográficas que definitivamente no poseen ni han tenido en el pasado, del que se tenga algún tipo de información, relación alguna; tal es el intento de asociar a los Cunas con los habitantes de la Región Central, algunos de los autores que han hecho esa asociación han sido Steward y Faron, quienes, citados por Linares [1977: 78] afirman que los Cunas eran los habitantes de la región central, aun cuando los objetos recobrados en Sitio Conte no correspondan a lugares cunas.

Existen datos que ilustran mejor la continuidad cultural de la región central, como es lo expresado por Cooke cuando comenta los hallazgos hechos en un lugar arqueológico, CHO-3, Miraflores, en la región este:

"Las evidencias que se poseen (...) indican sin lugar a dudas que esta región difiere culturalmente de la de las provincias centrales, al menos desde los tiempos de Cristo hasta el presente". [Cooke 1976f.: 38-].

Por lo que se puede estar de acuerdo con la conclusión de Linares en el sentido de no apoyar la asociación entre los actuales cunas y los habitantes de la región central. La presencia de los mismos cunas en el istmo es motivo de discusión [Howe 1977: 30 - 47].

Los grupos guaymíes del occidente del país guardan relación con los grupos que se asentaron en las tierras templadas de las montañas de la región occidental. Es ahí donde sí parece encontrarse mayor relación con los grupos descendientes de los habitantes de la región central. Se tiene documentada la alianza de Urracá y los caciques Chiriquí, Veraclas y Burica, que no habitaban en las montañas con el fin de combatir a los invasores europeos; también que aquellos indígenas que habitaban en los llanos (vertiente pacífica) de la región central y no se sometieron a los conquistadores se refugiaron en las montañas de la cordillera central:

"Los guaymies actuales están donde sus antepasados estaban, tanto al este como al oeste del río Tabasará. Su territorio ha sido reducido porque los grupos que habitaban en la sabanas (...) fueron destruidos o asimilados, formando la población predominantemente mestiza que vive en el área del Pacífico hoy en día(86). Los que lograron defender sus montañas (...) mantuvieron su independencia cultural, adaptando su patrón de vida a la gran gama de influencias que recibieron a través de cuatro siglos" [Cooke 1982: 33].

Se tiene conocimiento que los grupos que habitaron en tiempos prehistóricos y etnohistóricos la vertiente del Caribe de Veraguas y Coclé (al este del Valle Guaymí) estuvieron relacionados culturalmente con aquellos grupos que habitaban en la vertiente del Pacífico y de los cuales se han recuperado diferentes restos culturales [Ibid.: 37].

La extensión de las lenguas guaymies en el territorio de la región central ha dado lugar a que se tenga en cuenta que los alcances de ese grupo hayan estado hasta la región de Natá, o sea distribuido a profundidad en la región Central. En las crónicas al referirse a las divisiones del actual territorio indican que el lenguaje que hablaban aquellos grupos de la cordillera central era muy diferente al hablado por los habitantes de los llanos; los conquistadores estaban dividiendo esa parte del territorio de acuerdo a la división

continental.

Roberts en su testimonio del siglo XIX manifiesta la existencia de actitudes diferentes entre los indígenas que habitaban la región de Bocas del Toro, a un lado de la cordillera de Talamanca y aquellos que vivían en la vertiente pacífica y que trataban más con los españoles [1887: 155]. Es comprensible que estos dos grupos de indígenas se sintieran diferentes, sobre todo cuando los intereses expansionistas ingleses fomentaran ese distanciamiento con los allegados a la corona española. Tales factores si bien no son suficientes, deben haber sido contribuyentes a la mayor diferenciación de tales lenguas, ngawbére y buglére, favoreciendo a que los grupos actuales tengan la configuración que se les conoce. Entonces la localización de los descendientes de aquellos se concentra en los actuales guaymies, con todo y las diferencias existentes en sus actitudes y lenguajes las cuales sólo arraigan su identidad pero no niegan su origen común, o al menos asociado.

La estructura de las sociedades tratadas, en la región de interés, es uno más de los problemas existentes de la prehistoria de la región. Reconstruir el sistema cultural de una sociedad prehistórica de la que no se tienen registros adecuados es difícil aun cuando la estructura de la mencionada sociedad sea bastante compleja. Conocer de sus subsistemas culturales, el económico, las rutas comerciales, las variedades de intercambio, las artes, y otros más; tal difi-

cultad se hace mayor cuando las sociedades son más sencillas y las variantes del intercambio y las manifestaciones de los otros subsistemas culturales son más informales [Washburn 1977: 61.

Las sociedades de los pueblos que habitaban el istmo estaban divididas; de alguna manera esa división era perceptible al momento del contacto con la cultura europea, en el siglo XVI, y se encuentra registrada en las crónicas de aquella época.

Resulta interesante notar que Oviedo en su HISTORIA GENERAL Y NATURAL DE LAS INDIAS al hacer mención de algún dato, hecho o personajes que por alguna razón no tenía al momento de escribir tales pasajes los ha dejado en blanco como se puede observar en Libro XXIII, Capítulo XIV [1959, vol II: 377] donde el nombre de un personaje ha sido dejado en blanco; existen otros casos de esta naturaleza en toda su obra. Si se admite que este proceder es indicio de su voluntad por tratar de ser lo más objetivo posible y que cuando se refiere a esta región tiene la ventaja de haber estado presente como "Veedor de las fundiciones de oro" en la Provincia de Castilla del Oro [1959 vol III: 221], entre otros cargos que desempeñó; aún siendo severo al juzgar los escritos dejados, y que los rangos mencionados no hayan sido ejercidos tal como se entiende en la actualidad ese término, se puede entender que en esta parte de la Tierra Firme, las sociedades que la habitaban tenían su estructura interna, de

alguna manera jerarquizada. La mención de la división no es exclusiva de este cronista; si no que los otros que trataron los asuntos de esta región también lo hacen.

Cuál es el significado de los restos culturales recuperados, el contenido semiótico de las figuras que aparecen en las piezas de cerámica, dentro de aquel sistema cultural, en base a tales divisiones; ya que los subsistemas culturales se suscriben a los sistemas es indudable que las figuras mencionadas tengan un mensaje codificado, un valor simbólico, que era consistente con la estructura social que regulaba a aquellos pueblos. Un estudio tendiente a explicar ese significado en la cerámica de la región central es el presentado por Linares en su ensayo titulado "Ecology and the Arts in Ancient Panama", 1977. También está el trabajo de Cooke titulado "El Motivo del Ave con las Alas Desplegadas en la Orfebrería de Panamá y Costa Rica", 1985c, relacionado a la metalurgia y su presencia en la región, y algunas de las implicaciones a la estratificación de aquella sociedad.

7.3.4 La Cerámica.

De entre las manifestaciones culturales recobradas y conservadas más abundantes pertenecientes a los pueblos que habitaron esta área, está la Cerámica. Lothrop dedicó todo su segundo volumen [1942] de su reseña sobre la expedición a describir abundantemente la muestra encontrada en Sitio

Conte; antes de él, otros autores como Hyatt Verril habían hecho lo mismo [Cooke, 1976a]. Se han publicado trabajos sobre la cerámica de sitios arqueológicos de la región central, pero de ellos no se hace un listado completo por no ser ese el objetivo presente; al momento de mencionar los distintos períodos que corresponden a la secuencia cultural se mencionan algunos de ellos.

La cerámica de la Región Central posee diferentes tradiciones que se mantuvieron durante el largo período que se inicia con la aparición de cada una de ellas y termina el año 1520 con la irrupción de la cultura europea; éstas se mencionan a continuación:

- 1.- Plástica (modelado y pastillaje).
- 2.- Bícroma.
- 3.- Polícroma de tres colores.
- 4.- Polícroma de cuatro colores.

El orden de aparecimientos de estas tradiciones en la Región Central es básicamente el mismo con el que se han listado, con la advertencia de que la policromía de cuatro colores, por alguna razón hasta hoy no conocida, había dejado de utilizarse (con el desuso del color morado) o sea que la que se practicaba era la tricromía en el momento del contacto con la cultura europea, eso es lo que indican las piezas con que se cuentan y que corresponden al último período.

De estos distintos períodos y sus estilos se presenta un

sumario en el Cuadro 7.1 y a continuación se explican brevemente cada uno de ellos.

FECHA	PERIODO	ESTILO
a.c. 3000	III A	Monagrillo
800	III A y IV	Aristide
100	IV	Tonosí
d.c. 400	Final IV	Montevideo
500	V	Conte
700-800	VI	Macaracas
900	VII A	Parita
1300	VII B	El Hatillo
1520	Conquista Española	

Cuadro 7.1 Sumario cronológico del desarrollo de la cerámica de la Región Central panameña. Tomado de Cooke [1985b: 36].

7.3.4.1 El Período Cerámico Formativo Temprano (IIIA).

La cerámica más antigua que se conoce es la del estilo Monagrillo y se ha encontrado en diferentes contextos, no solamente en lugares próximos a la costa si no que también en otros alejados de ésta. El lugar del que le viene el nombre corresponde a HE-5, que en 1952 llevaron a cabo excavaciones en ese lugar, a cargo de Willey y McGimsey, los que dieron a conocer sus resultados en 1954, habiéndose establecido que definitivamente es la cerámica más antigua de la Región Central, es de un estilo sencillo y mal cocida.

Las re-excavaciones realizadas en la década anterior por Ranere y las fechaciones que en esa oportunidad se realizaron [Ranere y Hansell 1978] han confirmado la aseveración anterior, habiéndose establecido que corresponden al tercer milenio antes de Cristo. Cooke [1984: 7] considera que en base a las fechaciones disponibles sea fijada la transición entre la etapa precerámica y la cerámica en la mitad del tercer milenio, 2500 a.C. aproximadamente. Esta misma cerámica se encuentra directamente sobre los contextos precerámicos en la Cueva de los Ladrones; se considera que su período de manufactura está entre 2500 - 1000 a.C.

7.3.4.2 El Período Cerámico Formativo Tardío (IIIB).

Los restos de la cerámica post-Monagrillo está asociada con la que se encuentra en el complejo La Mula-Sarigua, también con la contenida en Cerro Guacamayo, El Limón en Coclé, Búcaro (Los Santos) (Ichon 1980) y otros más.

7.3.4.3 La Cerámica Bicroma (IV)

El tiempo asociado a este período, que no sólo corresponde a la cerámica si no que esta es sólo una manifestación de los sistemas sociales que en ese tiempo existían. Algunas piezas decoradas con ante sobre rojo son de las que se recuperan inicialmente, así como aquellas delineadas en negro que corresponden al estilo Aristide [Ladd 1964: 163-181]. Los restos de esta tradición recuperados en Sitio Sierra la

ubican en el 240 a.C. Se considera que su duración se extiende desde 300 a.C. - 500 d.C.

Es en esta parte que casi por el tiempo de Cristo aparece la tricromía, tal como aparece en los contextos estudiados en el sur de la Península de Azuero.

7.3.4.4 La Transición (IV - V).

Durante un breve período, casi 100 años, ocurrieron cambios importantes en la decoración de la cerámica de la región; esta transición está asociada al tipo Corotú Polícromo y al Montevideo Polícromo en los que se observan cambios en los diseño; están dejando de dibujar motivos no figurativos y comienzan a dibujar motivos figurativos delineados en negro y a rellenarlos de color [Cooke 1976c: 327].

7.3.4.5 El Estilo Conte (V).

Por razones de divulgación se ha pensado muchas veces, desde que Lothrop publicó los resultados de la expedición de Harvard, que la cerámica de la Región Central corresponde a aquella encontrada en Sitio Conte (PN-5), pero no es así. Este estilo está ampliamente difundido en toda la región, contrario a lo sostenido en la década del 40, cuando recién se había excavado, que era exclusiva del lugar. Su período de manufactura está calculado para el 500 - 800 d.C.

7.3.4.6 La Cerámica Barroca (VI).

El estilo Macaracas que se caracteriza por ser de una policromía de cuatro colores y los diseños de animales que aparecen no corresponden, en ocasiones, a una reproducción naturalista si no que son estilizaciones, anatomías fragmentadas, en espacios fragmentados [Cooke 1976c: 326], [Ladd 1964: 95 - 120]. Este estilo el que en los escritos de Lothrop [1942] se llama Coclé Tardío. El tiempo de manufactura de esta tradición se estima que sea del 800 - 1200 d.C.

7.3.4.7 La Cerámica anterior al Contacto (VII).

La tradición cerámica que estaba en práctica en los siglos inmediatos antes de la llegada de los conquistadores se conoce como de los tipo Mendoza y El Hatillo [Cooke 1976c: 317-321], [Ladd 1964: 51 - 95]. Se caracteriza por no poseer el barroquismo del período anterior y por haber dejado de utilizar la pintura morada, que fue la última en agregarse a la gama de colores que se empleó en la Región Central, y la primera en dejar de usarse. La representación es mucho más estilizada, representación fragmentada y con reproducción de trazos no figurativa de un alto nivel de coordinación; una buena y bella cerámica, con cambios en la representación. Este es el estilo que se fabricaba en el siglo XVI, y no el estilo Conte, que en su oportunidad permitió aseverar a Lothrop que debería de haber sido el que

usó Natá y los otros poderosos jefes de esta región.

Lo mencionado anteriormente no es un resumen de las inve
st
g
aciones llevadas a cabo en los últimos años, es la enume
ración de algunos datos tomados de ellas. Una mejor ilustra
ción se obtiene consultando los trabajos mencionados y otros
relacionados, que al momento de hacer la lectura se deben de
ir agregando para completar el panorama, amplio y complejo
de la cultura que los pueblos de la Región Central desarro
llaron, en forma secuencial desde los días de la adaptación
al trópico hasta chocar sus sistemas con los presentados por
los europeos.

7.3.5 La Cerámica Excavada.

Es indudable que la cantidad de piezas excavadas en la re
gión Central es enorme, contando solamente las piezas comple
tas o fragmentos casi completos; pero determinar exactamente
el lugar donde se encuentran hay es poco menos que imposible.

Una parte, aquellas que han sido extraídas por expedicio
nes extranjeras autorizadas por los organismos del país, ca
si en su totalidad han sido llevadas a los museos o institu
ciones que aportaron el apoyo financiero para tales empre
sas. La expedición de Lothrop entregó parte del material a
la familia Conte, pues en una propiedad de tal familia está
ubicado este lugar arqueológico; Ichon, 1968, entregó
algunas piezas al Museo Nacional de Panamá, del total

recuperado en el sur de la península de Azuero; entre otras.

En el Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz", antes Museo del Hombre Panameño, derivado del anterior Museo Nacional de Panamá, se encuentra una colección de tamaño apreciable, la mayoría sin catalogación hasta la fecha. Se ha formado por diferentes vías: extracción en rescates arqueológicos, el último en abril de 1988 en el Cerro Juan Díaz, provincia de Los Santos; incautación por parte de autoridades aduaneras de colecciones que han tratado de ser extraídas subrepticamente del país; repatriación de colecciones ubicadas en el exterior, por parte de las delegaciones consulares, las cuales se lograron sin mediar convenio con las autoridades competentes del país; "donación" de parte de personas particulares instaladas en el país; "compra" a "huaqueros" (denominación en lenguaje vernáculo del personaje que con conocimiento empírico se dedica a la depredación de sitios arqueológicos); traspaso de colecciones que otras instituciones tenían bajo su custodia; y sólo una pequeña parte ha sido lograda mediante excavaciones conducidas a iniciativa del museo, o por hallazgos.

Por la calidad, belleza del diseño y valor arqueológico la cerámica de la región Central ha tenido enorme demanda entre coleccionistas privados, nacionales y extranjeros, ubicados dentro y fuera del país; resultando así que la otra parte de las piezas, las más llamativas por su calidad, y diseño según personas que han podido apreciar alguna de ellas,

se encuentran en manos privadas de difícil ubicación y mucho menor control. La mayoría de estas piezas, por no decir la totalidad, han sido conseguidas por el tráfico con los huaqueros, quienes se dedican a extraer piezas de oro o piezas de cerámica completas o casi completas; no prestando interés a fragmentos de piezas u otros materiales que para los investigadores resultan importantes para así reconstruir el sistema cultural de los pueblos prehistóricos que poblaron el área.

7.4 La Aplicación.

7.4.1 Procedimiento.

A continuación se mencionan, de manera general, los procedimientos para aplicar en una pieza de cerámica los conceptos de simetría para así reconocer los grupos subyacentes en el diseño.

Grupos de Leonardo o puntuales. La determinación de si el campo del diseño es clasificable como un grupo puntual depende en gran parte de la forma que tenga la pieza. Cuando se trata de un plato con forma circular con un diseño repetitivo centrado, la identificación se facilita; un ejemplo de la situación mencionada aparece en la fig. 7.1.a. Cuando el campo del diseño se encuentra en una vasija globular o subglobular con cuello, cuando éste está lo suficientemente cerca del cuello o con mucha proximidad al fondo de la misma, tampoco se presenta dificultad, ejemplos en fig. 7.1.b y c.

Grupos Unilineales. Como la característica de tales grupos es poseer un patrón repetitivo a lo largo de una banda entonces en una determinada pieza es necesario encontrar un campo que cumpla con ser una banda, pudiendo ser el borde de un plato, una banda alrededor de una vasija globular, una banda al centro de un plato, u otra situación equivalente. Ejemplos en Fig. 7.1.d, e y f.

Grupos Bidimensionales. Es necesario que existan dos traslaciones independientes para poder considerar un diseño como bidimensional, así que al analizar una pieza de cerámica tendrá que observarse con mucha atención para determinar si algún módulo del diseño se repite una cantidad de veces, en dos direcciones independientes, como para ser considerado como un diseño de esta clase. Ejemplo de este tipo de diseño aparece en la fig. 7.1.g.

Los lineamientos presentados son lo suficientemente amplios como para que su aplicación sea posible sin entrar en contraposición con los criterios del investigador. Cuando se aplican a una pieza en particular ocurrirá que en un cierto número de casos las características mencionadas no se ajustarán; una de esas causas es que la forma de las piezas es mucho más variada que aquellas aquí mencionadas. Los campos decorativos, aun cuando en una determinada muestra tiendan a poseer una distribución semejante, no necesariamente se ubican en la posición mencionada aquí; pueden tener esa y muchas otras variaciones posicionales. Otro factor importan-



(a) Plato circular con diseño en parte central.



(b) Vasija globular con diseño en el hombro.



(c) Vasija globular, subglobular con diseño en parte inferior.



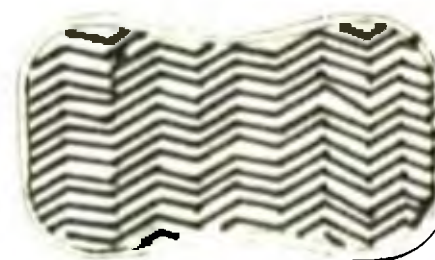
(d) Diseño en borde de plato circular.



(e) Diseño en franja centrada de una vasija globular (subglobular).



(f) Diseño en franja centrada en plato.



(g) Plato con diseño bidimensional.

Fig. 7.1 Ejemplos de piezas de cerámica (formas comunes..) señalando la zona donde se distribuyen usualmente los diseños. La zona sombreada, en a-f, indica la posición del diseño.

te, ocurre que en los diseños prehistóricos la formación del diseño total se conseguía sin los mecanismos que hoy en día se conocen, entonces se tiene que entre un módulo determinado y su repetición puede haber variación en los detalles, una parte del módulo diferirá de su correspondiente en el diseño repetido; entonces cuando se analiza el investigador tendrá que decidir en qué casos, a pesar de la variación entre un módulo del diseño y otro, pueden considerarse equivalentes para fines de aplicación de los conceptos de simetría, y cuando no. Los diseños, en muchas ocasiones, además del motivo principal poseen una cantidad de pequeños motivos que completan el espacio disponible, "motivos de relleno"; entonces para fines de aplicar los conceptos de simetría, dependerá del investigador decidir si se tendrán en cuenta o no, pues ocurre que en algunos estudios no son considerados.

En los trabajos ya citados de Washburn, 1977; Zaslow y Dittert, 1977; Zaslow, 1977 y 1981, se encuentran más detalles en cuanto a los criterios a considerar en la aplicación de los conceptos de simetría a patrones de diseño en la cerámica prehistórica, aun cuando los trabajos de Zaslow están orientados principalmente a diseños bidimensionales.

Resulta sumamente instructiva la lectura de esos trabajos; ir avanzando en ella y llegar a la parte donde se analizan las piezas; seguir con atención ese proceso es beneficioso y ayuda a comprender de una mejor manera los lineamientos aquí expuestos.

7.4.2 La Muestra.

Las piezas de cerámica utilizadas en esta sección para identificar los respectivos grupos de simetría que poseen tienen las siguientes fuentes:

1. Pre-Columbian Designs from Panamá de Samuel K. Lothrop, editado por Dover Publications, Inc. Este libro es un recuento gráfico de una parte de los diseños de la cerámica encontrada en Sitio Conte (PN-5) por la expedición de Harvard dirigida por Lothrop y que está presentada en su segundo volumen (1942). Este volumen contiene gran parte de la cerámica encontrada; pues si se compara su listado de catalogación con el listado de las piezas de cerámica encontradas y que están registradas en el volumen primero (1938) se concluye que en este segundo volumen no están representadas todas esas. Además, el autor en la parte final incluye varios capítulos dedicados a explicar (desde su punto de vista) la difusión del estilo encontrado allí y en ese afán utiliza, para ilustrar, otras piezas que ya no son de las encontradas en ese lugar. Algunas de estas aparecen en el registro de Dover; también se hace caso omiso de otras. Así que esta edición de Dover incluye una considerable cantidad de piezas encontradas en Sitio Conte y además de otras que están ilustradas ahí pero que no pertenecen a esa colección.
2. Archéologie du Sud de la Peninsule D'Azuero de Alain Ichon. Misión Arqueológica y Antropológica Francesa en

México. Este es un estudio realizado en la parte sur de la provincia de Los Santos; en la publicación de sus hallazgos incluye, al final, una serie de ilustraciones de las piezas ahí encontradas. Sólo son una muestra ilustrativa, está lejos de ser una recopilación de diseños en el estilo de Lothrop, 1942.

3. Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz", donde en sus salas de exhibición y en el depósito se encuentran piezas completas y fragmentos grandes provenientes de la región central a las que se tomó en cuenta para determinar sus grupos de simetría.
4. Museo Regional de Penonomé, que en sus salas exhibe desde hace unos pocos años las piezas que Lothrop entregó a la Familia Conte y por lo tanto la colección ahí exhibida constituye un complemento de los diseños presentados en las recopilaciones mencionadas en (1).
5. Diapositivas de piezas de cerámica. Propiedad del Dr. Richard G. Cooke, conteniendo piezas exhibidas en el Museo Regional de Herrera, Museo de la Fundación Heye y otras.

Las piezas consideradas en su gran mayoría son piezas completas o fragmentos grandes; no se tomaron en cuenta los pequeños fragmentos que en algún momento se tuvieron a mano.

7.4.3 Los Resultados.

Para la presentación de los resultados se hace necesaria la siguiente aclaración: Del total de piezas aquí consideradas, una parte considerable de ellas corresponden al V período, Estilo Conte; entonces para fines del presente trabajo se consideró conveniente dividir tal período en tres subperíodos, después de consultar con R. G. Cooke, de la siguiente manera:

Período	Subperíodo	Estilo
V	Temprano	Conte Temprano
	Medio	Conte Medio
	Tardío	Conte Tardío

Con el fin de entender la propuesta de diferenciación de los subperíodos que se encuentran en la cerámica del V período se presentan algunas de las características que se consideraron como indicadores de tal diferenciación.

No es un listado detallado de tales características, ya que emprender ese esfuerzo equivale a enfrentarse a contradicciones; los criterios tomados no se mantienen totalmente separados al momento de pasar a la etapa práctica, algunas piezas contienen mezcla de elementos que se han considerado^r son distintivos de subperíodos diferentes. Se enumeran algunos después de haber hecho esta aclaración y se mencionan algunos ejemplos tomados del libro de Lothrop [1942],

indicando el número de la figura correspondiente a esa referencia, además del número de catalogación correspondiente a la colección del Museo Peabody.

Las vasijas a las que se hacen referencias son platos planos o poco profundos, base anular.

V Período. Temprano.

Ausencia de elementos decorativos adicionales a aquellos que se relacionan con el motivo dominante del diseño, el cual en un buen número de oportunidades tiene representación en el plano de las vistas laterales de una figura animal. El motivo animal puede cambiar, se encuentran saurios o mamíferos terrestres con frecuencia.

Los elementos adicionales que se encuentran son bandas con elementos sobresalientes de forma trapezoidal.

Ejemplos: figs. 54 (33-42-20/1374), 292a (33-42-20/1385).

V Período. Medio.

El motivo dominante está centrado y se extiende por todo el campo disponible; los motivos utilizados son figuras humanas vistas de frente, mamíferos terrestres desde una vista lateral. Se continúan utilizando los elementos adicionales de forma trapezoidal, y otros filiformes con el extremo libre ligeramente curvo. Aparece el uso de la voluta en forma de YC.

Ejemplos: 60b (c/13130), 91 (33-42-20).

V Período. Tardío.

La representación se hace con la presencia de algunos elementos decorativos; las volutas en forma de YC se elaboran de manera tal que sus extremos son finos, bien terminadas. Algunos de los motivos dominantes son de origen marítimo, peces. Los elementos decorativos adicionales son en forma de garras, dispuestos en bandas, algunas veces.

Ejemplos: 79b (33-42-20/1106), 374a (33-42-20/772).

Hecha esta aclaración los resultados se presentan en los cuadros desde 7.2 hasta 7.19, la mayoría de los cuales son de doble entrada y tienen en las columnas los diferentes estilos (asociados a los distintos períodos o subperíodos) y en las filas los distintos grupos o clases de grupos de simetría, según convenga para el análisis de los datos.

Los cuadros 7.2 - 7.10 son para los grupos de Leonardo o puntuales; los cuadros 7.11 - 7.14 para los grupos unilineales, y los cuadros 7.15 - 7.19 para los grupos bidimensionales. En algunos cuadros, como los que contienen información de los grupos de Leonardo o para los grupos bidimensionales, sólo aparecen registrados aquellos grupos que aparecieron en la muestra considerada; puesto que para los primeros su listado es infinito y para los segundos, a pesar que sólo son diecisiete, no todos ellos estuvieron presentes en los campos decorativos bidimensionales encontrados.

7.4.4 Discusión de los Resultados.

7.4.4.1 Consideraciones Generales.

Los diseños contenidos en las piezas de cerámica fueron analizadas con base en las tres categorías de grupos de simetría considerados, los puntuales, unilineales y bidimensionales. Se analizaron en primera instancia, considerando el diseño total, como un grupo cíclico (de Leonardo, puntual) cuando esto fué posible. Este análisis estuvo influenciado por la forma de la pieza, ya que en aquellas que su morfología no lo permitía no se consideraron para clasificarlas en esta categoría; ejemplo de estas últimas son las vasijas subglobulares (globulares) cuyo campo de diseño está situado en la parte media (fig.7.1.e). Tampoco aquellas con morfología tripoidal-globular con diseños en cada sección (Lothrop 1942: 135, fig. 153 a y b); ni aquellos platos que contienen diseños marcadamente bidimensionales (fig.7.1.g), si bien aquellos platos que teniendo este tipo de diseño tenían además una morfología circular plana o de poca profundidad se les asignó el grupo C_1 , que indica que no poseen ninguna simetría puntual. Cuando se trató de un campo ubicado en el hombro de alguna vasija subglobular (globular), inmediata al cuello, se consideró como un diseño asociado a un grupo puntual; igual consideración se hizo con aquellos diseños que estando ubicados en la parte media no constituía en su distribución un diseño unilineal o bidimensional.

Una dificultad que se presentó constantemente fue que no se tuvo acceso directo a una parte considerable de las piezas estudiadas; de ellas solo se dispuso de un registro gráfico. Motivo por el cual en algunas oportunidades se tuvo que asumir que la parte no registrada en el gráfico seguía la misma tendencia del diseño de la parte mostrada. Esta asunción se tomó en base a que aquellas piezas que además de estar registradas gráficamente pudieron ser observadas directamente en el Museo Antropológico "Reina Torres de Araúz" resultó que éstas seguían la misma tendencia en el diseño, tanto en la parte observada como en la no observada, salvo pequeñas variaciones. También en trabajos referentes a la clasificación de la cerámica se hace mención al asunto de la regularidad en el diseño [Zaslow, 1981: 1, *inter alios*].

Cuando se trató de la identificación de los grupos de simetría unilineales se tuvo el cuidado de no incluir aquellos diseños de estructura cíclica o bidimensional. Ocurrió el caso que algunos diseños que habían sido clasificados como diseños cíclicos para el diseño total fueron contabilizados como diseños unilineales, en vista de que una buena parte de ellos corresponden a un diseño unilineal, como es el caso de aquellas piezas que consistiendo su diseño total de un cuerpo serpentiforme, con grupo cíclico C_1 , al considerar sólo el diseño del cuerpo resulta que el diseño es unilineal, F_2^1 [Lothrop, 1942, fig. N° 96, n° Cat. 33-42-20/1389, 95, n° Cat. c/11587). Se tuvo cuidado de no considerar en

esta categoría de grupos de simetría a aquellos patrones repetitivos originados por los elementos decorativos de relleno que aparecen en los diseños totales. La razón de esta restricción se debe a que la frecuencia de su aparición es tanta que de ser contabilizada se crearía un desbalance en favor de los grupos de simetría que corresponden a estos elementos de diseño. Lo anterior no quiere decir que estos elementos participantes del diseño total no pueden ser indicadores de los cambios en la forma de construir un determinado diseño. Estos elementos también son útiles para este tipo de análisis desde el momento en que forman parte del diseño total son también parte del subsistema artístico, integrante del sistema cultural de un pueblo y como tal evolucionará como todas las demás manifestaciones de éste. Cuando se utilizan estos tipos elementos del diseño, los datos deben ser recopilados de una manera diferente a la aquí presentada.

Los diseños bidimensionales presentaron nuevas dificultades para su identificación. Debe tenerse en cuenta que el número de campos de diseño identificados no corresponde a igual número de piezas por la siguiente causa: existen algunas piezas; por ejemplo, ciertos platos con pedestal del VII período que están completamente decorados, la parte superior del plato, la parte inferior y el pedestal que lo sostiene; siendo posible identificar en él, sin dificultad, tres diferentes campos decorativos.

Los resultados obtenidos se sometieron a un análisis estadístico tendiente a poner a prueba la hipótesis de que existen diferencias estadísticas significativas en las diferentes clasificaciones de las piezas de la cerámica pintada de la Región Central de Panamá cuando se atiende a los diferentes periodos estilísticos y además a los distintos grupos de simetría que poseen los diseños contenidos en las piezas. Los datos colectados se analizaron por separado, en las tres categorías de los grupos de simetría aquí estudiados y la herramienta básica de este análisis es la prueba de Chi Cuadrado, χ^2 , pues tal prueba resulta adecuada para el tipo de datos de que se dispone, donde estos fueron colectados y clasificados de acuerdo a dos variables completamente independientes entre sí, el período estilístico, que ubica temporalmente a la pieza, y el grupos de simetría que posee el diseño, logrando así que esta colección de datos forme una matriz con c columnas, donde se han colocado a los períodos, y r filas que tienen a los diferentes grupos de simetría; este tipo de arreglo es lo que se conoce como una *tabla de contingencia*. El nivel de significación que se considerará en estos análisis de datos es de 0.05 (5%) y las tablas que se han consultado para comparar los resultados de las pruebas de Chi Cuadrado y la t de Student son las que aparecen en los apéndices de los libros de Snedecor y Cochran (1971) y Rodrigues (1977). Al hacer estos análisis se tuvo en cuenta las observaciones hechas por Cowgill para este tipo

de análisis en la Arqueología; considerando adecuados nuestros cálculos.

7.4.4.2 Análisis de los Datos para los Grupos de Leonardo o Puntuales.

Cuando se consideró la primera categoría de los grupos de simetría, los grupos de Leonardo o grupos puntuales, se tomó en cuenta que en el cuadro original donde se agruparon los datos, Cuadro 7.2, existían demasiadas casillas vacías para aquellos grupos distintos de C_1 , D_1 , C_2 , D_2 ; y teniendo en cuenta que del total de grupos puntuales identificados en la muestra, 415, el 87.9 % (365 campos decorativos), corresponden a grupos de orden 1 y 2 (C_1 , D_1 , C_2 , D_2), independientemente del período (o subperíodo) estilístico considerado; tal como se observa en el cuadro 7.3, donde se presenta el total de campos decorativos sin considerar los períodos o subperíodos, ahí se observa que aquellos grupos distintos a los mencionados C_1 , D_1 , C_2 y D_2 , tienen baja frecuencia en el total de la muestra colectada, sólo representan el 12.1% en su conjunto.

Cuando se consideró el porcentaje sin tener en cuenta el período (subperíodo), agrupando a los grupos por orden en la rotación, orden 1 (C_1 , D_1), orden 2 (C_2 , D_2) se observó que los de orden 1 representan el 63.1% y los de orden 2 son el 24.8%. Por lo tanto para el análisis estadístico se agruparon los datos del cuadro 7.2 en dos arreglos diferentes, que se presentan en los cuadros 7.4 y 7.5.

En el cuadro 7.4 se presentan los datos para los períodos (subperíodos) y además se consideraron los siguientes grupos de simetría: C , D , C , D y "Otros"; a estos datos se les aplicó la prueba de Chi Cuadrado habiendo obtenido $\chi^2 = 82.8835$ (24 g.l.) para un valor de probabilidad $p < 0.001$, lo que indica que si se tiene en cuenta que el nivel de significación que se utilizará en este trabajo es de 0.05(5%), entonces se admite la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los distintos grupos de simetría puntuales en los diferentes períodos (subperíodos). Tratando de conocer mejor el significado de estas diferencias se trabajó esta misma prueba de Chi Cuadrado a los datos del cuadro 7.5, tratando de establecer si éstas estaban relacionadas con el orden del grupo de simetría; el valor obtenido fue $\chi^2 = 47.5663$ (12 g.l.) con un valor de probabilidad $p < 0.001$. Como este valor indica que para el nivel de significación elegido existen diferencias aun cuando se consideran ya no los grupos mayoritarios si no que también cuando de ellos solo se está considerando el orden del grupo; al tratar de establecer si en las diferencias encontradas tiene o no participación capital aquella clase que tiene menor frecuencia, Otros; se eliminó y sólo se consideraron aquellas que tienen mayor frecuencia y se presentan en el cuadro 7.6, y al aplicar Chi Cuadrado se obtuvo el valor $\chi^2 = 30.8121$ (6 g.l.) para un valor de probabilidad $p < 0.001$ indicando que las diferencias persisten aún

entre las dos clases de mayor frecuencia, pudiendo decirse que las diferencias no están determinadas por la presencia de una clase de baja frecuencia.

Teniendo establecido que las diferencias se mantienen se hizo una prueba adicional, t de Student para estos datos del cuadro 7.6, esta prueba se realizó de acuerdo a las observaciones presentadas por Snedecor y Cochran [1971: Sec. 9.10] con respecto al ordenamiento de una variable discreta para considerarla como una variable continua, en este caso la variable que se ordenó fue "Período Estilístico", con la aclaración de que los períodos se consideraron de valor igual entre ellos, recurso necesario para aplicar la prueba; el ordenamiento aparece en el cuadro 7.7 y para ésta se obtuvo $t = 3.0212$ (363 g.l.), para un valor de probabilidad $p < 0.005$ (a dos colas) indicando que la tendencia promedio de las dos clases de grupos de simetría es además distinto; la tendencia promedio de las dos clases mayoritarias de grupos de simetría puntuales, los de orden 1 y orden 2, siguen tendencias promedio distintas.

Adicional a estas pruebas, para los grupos de Leonardo, se analizaron las frecuencias obtenidas para los tres subperíodos en que se convino en dividir el V Período. Estos datos se tomaron del cuadro 7.3 y se presentan en el cuadro 7.8. A este nuevo conjunto de datos también se le aplicó la prueba de Chi Cuadrado para determinar si las diferencias encontradas entre los grupos C_1 , D_1 , C_2 , D_2 y Otros, ya

discutidos anteriormente, persistían entre estos subperíodos. Se obtuvo $\chi^2 = 48.0079$ (8 g.l.) y $p < 0.001$, lo que indica que también entre los subperíodos aquí tratados continúan habiendo diferencias estadísticamente significativas. Al continuar tratando de establecer la conducta de las diferencias existentes entre los diferentes subperíodos se consideró si estos datos al solo considerarlos agrupados de acuerdo al orden de giro, de manera semejante a lo hecho con los datos del cuadro 7.4 y presentados en el cuadro 7.5, se agruparon y se presentan en el cuadro 7.9 para los cuales el valor es $\chi^2 = 34.0064$ (4 g.l.) con $p < 0.001$ indicando que las diferencias entre los grupos de simetría en los distintos subperíodos persisten sin tener en cuenta el orden del grupo al que corresponde. Habiendo establecido estas diferencias y considerando la posibilidad de que éstas estuvieran influenciadas por el número de elementos pertenecientes a una determinada clase se omitió la clase Otros en vista de que era la que menor número de campos decorativos tenía registrados. Al considerar sólo las dos clases mayoritarias, presentadas en el cuadro 7.10, obteniendo $\chi^2 = 26.3838$ (2 g.l.), $p < 0.001$, lo que indica que continúan las diferencias a pesar de que se reunieron los datos, agrupando los de menor frecuencia en la clase Otros, cuando se agruparon los de mayor frecuencia, C_1 , D_1 , C_2 , D_2 , de acuerdo al orden del grupo, y también cuando para el análisis sólo se consideraron las dos clases mayoritarias, Orden 1 y Orden 2.

7.4.4.3 Análisis de los Datos para los Grupos Unilineales.

Los datos obtenidos de la frecuencia de los grupos unilineales se presentan en la tabla 7.11 y en base a ellos se realizaron las pruebas estadísticas de manera semejante al trabajo hecho con los datos correspondientes a los grupos de Leonardo, y tratados en el apartado anterior, aplicando la prueba de Chi Cuadrado inicialmente al conjunto total de datos (549 campos) y después a algunas clases obtenidas colapsando algunas de las originales para tratar de detectar la naturaleza de las diferencias encontradas.

Para los datos de frecuencia obtenidos originalmente para los siete grupos de simetría unilineales en los distintos períodos y subperíodos en que se ha dividido la secuencia cronológica, cuadro 7.11, se obtuvo $\chi^2 = 127.1547$ (36 g.l.) y $p < 0.001$ indicando la existencia de diferencias entre los distintos grupos de simetría unilineales. A continuación se trató de establecer si estas diferencias estaban asociadas a la existencia de centros de giro de 180° como una de las simetrías del grupo, se colapsaron a estos grupos en las clases siguientes: F_1 y sus afines (F_1, F_1^1, F_1^2, F_1^3) y F_2 y sus afines (F_2, F_2^1, F_2^2); estos datos se presentan en el cuadro 7.12 y la aplicar la prueba de Chi Cuadrado se obtuvo $\chi^2 = 31.4533$ y $p < 0.001$ evidenciando que las diferencias existentes se mantienen sin importar la presencia de centros de giro de 180° entre las simetrías permitidas en los grupos

considerados. Como un recurso adicional se aplicó a estos datos así colapsados la prueba de la t de Student para determinar si estos datos, en sus diferencias, siguen la misma tendencia, aplicando a ellos una clasificación ordenada como la ya mencionada para los grupos puntuales, en el cuadro 7.13, para estos datos se obtuvo el valor de $t = 1.4390$ (547 g.l.) para un valor de probabilidad $0.1 < p < 0.2$; este valor es mayor que el valor de significación admitido como indicador de diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de simetría unilineales; lo que en este caso indica el valor de t es que la tendencia de las diferencias mostradas por la prueba de Chi Cuadrada existente entre las diferentes clases de grupos de simetría es la misma, no debe entenderse que existe contradicción entre los resultados de las dos pruebas; la primera de ellas indica que entre las clases consideradas existen diferencias significativas y la otra que la tendencia de esas diferencias, en términos generales, es igual, para un nivel de significación del 5%.

También se consideró la alternativa de evaluar los datos correspondientes a esta categoría pero sólo pertenecientes a los diferentes subperíodos en que se dividió el V Período y se presentan el cuadro 7.14, se obtuvo $\chi^2 = 20.479$ (12 g.l.) para un valor de probabilidad $p = 0.0585$, calculado en un computador PC XT, ACER 710, usando el programa MICROSTAT; este valor está por encima del valor de significación aceptado por lo que en esta ocasión se concluye que para esta cate

goría de grupos de simetría, los unilineales, para los diferentes subperíodos del V Período no existen diferencias significativas; a pesar de este resultado, por lo cercano del valor de probabilidad obtenido, del valor de significación, es posible comentar que se requerirá de análisis en otras muestras para poder establecer si el valor de probabilidad se mantiene por encima del valor de significación aceptado o si toma valores menores que él.

7.4.4.4 Análisis de los Datos para los Grupos Bidimensionales.

Para los datos obtenidos de la frecuencia de los grupos bidimensionales (58 campos decorativos) se hicieron análisis semejantes a aquellos hechos para las dos categorías anteriores; la disposición de los datos se presenta en el cuadro 7.15; pero como ahí se puede observar, existen demasiadas posiciones vacías, por lo que se optó por un arreglo más adecuado para el análisis, cuadro 7.16, ahí se han colapsado los datos originales de acuerdo al mayor orden de giro admitido por el grupo de simetría, las mayores frecuencias son para los grupos asociados a p_1 y p_2 entonces los registros de otros grupos, con orden de giro mayor a éstos, se reunieron en la clase "Otros"; es necesario hacer notar que en estos datos están registrados algunos campos decorativos pertenecientes al III Período, lo cual no había ocurrido en las dos categorías anteriores. Para los datos de

este cuadro se obtuvo $\chi^2 = 34.8497$ (14 g.l.), $p < 0.005$, indicando que entre ellos existen diferencias estadísticamente significativas; debido a que en ese cuadro, para los subperíodos del V Período la frecuencia es baja y además que existen en ellos varias posiciones vacías se tomó la decisión de reunirlos como V Período solamente, cuadro 7.17, y a esta nueva presentación de los datos se le aplicó la prueba de Chi Cuadrado obteniendo $\chi^2 = 30.6932$ (10 g.l.) con $p < 0.001$ indicando que aún con este nuevo arreglo las diferencias significativas entre las distintas clases de grupos bidimensionales se mantienen.

Para tratar de establecer si las diferencias encontradas están influenciadas por la presencia de la clase de baja frecuencia, "Otros", se tomó la determinación de hacer un análisis donde ésta no participara, cuadro 7.18, y de este se tiene $\chi^2 = 13.1901$ (5 g.l.) y $p < 0.05$, indicando que las diferencias se mantienen para el nivel de significación elegido. Adicional a esta prueba se realizó para los datos de la prueba anterior una prueba de t de Student para una clasificación ordenada, con las mismas observaciones hechas para su aplicación en el apartado 7.4.4.1, y esos datos así ordenados se presentan en el cuadro 7.19, dando los resultados de $t = 1.13441$ (56 g.l.) con $p < 0.2$, lo que indica que estos datos, dentro de sus diferencias, siguen una misma tendencia promedio; de otra manera, los resultados indican que entre los distintos periodos estilísticos existen dife-

rencia estadísticamente significativas para la ejecución, en la cerámica, de los distintos grupos de simetría bidimensionales; pero estas diferencias, en promedio, para las dos clases aquí consideradas, p1 y asociados, p2 y asociados, siguen la misma tendencia de alejamiento del patrón teórico correspondiente.

7.4.4.5 Otros Comentarios.

Es posible organizar los datos de una manera diferente para detectar otras correlaciones entre los grupos de simetría y otras características de las piezas y así estudiar más ampliamente la cultura existentes en los pueblos que habitaron en la Región Central, en la época precolombina. Puede servir para trazar los grados de comunicación entre las diferentes comunidades, las rutas de intercambio, y más; esto requerirá mayor precisión en cuanto a la proveniencia de las piezas que serán contabilizadas para este tipo de estudio, pero en cada uno de ellos se puede utilizar el criterio de análisis de un atributo universal como es la simetría y que en esta parte del trabajo se ha mostrado su utilidad para tal fin, poniendo en evidencia los cambios en el uso de los distintos grupos de simetría en los diferentes períodos (o subperíodos) estilísticos en la cerámica de la Región Central, mostrando una mayor sensibilidad que otros análisis pues permitió no sólo analizar y diferenciar los períodos si no que también en uno de ellos, V período,

permitted to differentiate three subperiods, early, middle and late. Larger samples belonging to the other periods would permit differentiations similar.

Período→ Grupo de Leonardo↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
			Temprano	Medio	Tardío			
C ₁	6	3	16	44	25	31	10	135
D ₁	10	1	20	19	25	34	18	127
C ₂	1	4	19	15	6	16	7	68
D ₂	5	0	19	4	1	4	2	35
C ₉	0	0	0	0	0	15	1	16
D ₉	1	0	0	0	0	0	1	2
C ₄	0	0	8	4	0	1	0	13
D ₄	4	2	3	3	0	2	0	14
C ₅	0	0	0	1	0	0	1	2
Otros	0	1	0	1	0	1	0	3
Total por Período	27	11	85	91	57	104	40	415

Cuadro 7.2 Frecuencia de los grupos cíclicos (de Leonardo, Puntuales) en los distintos períodos y subperíodos de la secuencia cronológica para la Región Central de Panamá (RCP).

Grupo de Leonardo	Frecuencia	Porcentaje %
C ₁	135	32.5
D ₁	127	30.6
C ₂	68	16.4
D ₂	35	8.4
C ₉	16	3.9
D ₉	2	0.5
C ₄	13	3.1
D ₄	14	3.4
C ₅	2	0.5
Otros	3	0.7
Total	415	100.0

Cuadro 7.3 Frecuencia de los grupos de Leonardo sin atender a los distintos períodos (subperíodos) para la cerámica de RCP; incluyendo el porcentaje que cada uno representa en el total de campos registrados.

Período→ Grupo de Leonardo↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
			Temprano	Medio	Tardío			
C ₁	6	3	16	44	25	31	10	135
D ₁	10	1	20	19	25	34	18	127
C ₂	1	4	19	15	6	16	7	68
D ₂	5	0	19	4	1	4	2	35
Otros	0	3	11	9	0	19	3	50
Total por Período	27	11	85	91	57	104	40	415

Cuadro 7.4 Frecuencia de los grupos cíclicos(de Leonardo, Puntuales) en los distintos periodos y subperiodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupando aquellos de baja frecuencia en la clase *Otros*.

Período→ Grupo de Leonardo↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Clase
			Temprano	Medio	Tardío			
Orden 1	16	4	36	63	50	65	28	262
Orden 2	6	4	38	19	7	20	9	103
Otros	5	3	11	9	0	19	3	50
Total por Período	27	11	85	91	57	104	40	415

Cuadro 7.5 Frecuencia de los grupos cíclicos(de Leonardo, Puntuales) en los distintos periodos y subperiodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupados de acuerdo al orden del grupo, basado en los datos del cuadro 7.4.

Período→ Grupo de Leonardo↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
			Temprano	Medio	Tardío			
Orden 1	16	4	36	63	50	65	28	262
Orden 2	6	4	38	19	7	20	9	103
Total por Período	22	8	74	82	57	85	37	365

Cuadro 7.6 Los grupos de Leonardo o Puntuales con mayor frecuencia en los distintos periodos y subperiodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupados de acuerdo al orden del grupo, basado en los datos del cuadro 7.5.

Ordenamiento Asignado	Frecuencias	
	Orden 1	Orden 2
3	16	6
2	4	4
1	36	38
0	63	19
-1	50	7
-2	65	20
-3	28	9
	Σf 262	103

Cuadro 7.7 Presentación de los datos de frecuencia de los grupos de Leonardo agrupados para la aplicación de la prueba de *t* de Student, con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica de RCP.

Período Subperíodo Grupo de Leonardo \downarrow	V			Total por Grupo
	Temprano	Medio	Tardío	
C ₁	16	44	25	85
D ₁	20	19	25	64
C ₂	19	15	6	40
D ₂	19	4	1	24
Otros	11	9	0	20
Total por Subperíodo	85	91	57	233

Cuadro 7.8 Frecuencias de los Grupos de Leonardo para los distintos subperíodos en que se dividió el V Período de la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.4.

Período	V			Total por Clase
Subperíodo	Temprano	Medio	Tardío	
Grupo de Leonardo↓				
Orden 1	36	63	50	149
Orden 2	38	19	7	64
Otros	11	9	0	20
Total por Subperíodo	85	91	57	233

Cuadro 7.9 Frecuencia de los Grupos de Leonardo, agrupados de acuerdo al orden del grupo, para los distintos subperíodos del V Período de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.5.

Período	V			Total por Clase
Subperíodo	Temprano	Medio	Tardío	
Grupo de Leonardo↓				
Orden 1	36	63	50	149
Orden 2	38	19	7	64
Total por Subperíodo	74	82	57	213

Cuadro 7.10 Los Grupos de Leonardo de mayor frecuencia, agrupados por el orden del grupo, para los distintos subperíodos del V Período de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.6.

Período→ Grupo Unilineal↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
			Temprano	Medio	Tardío			
F_1	4	0	19	32	10	40	7	112
P_1^1	3	2	8	12	6	7	3	41
P_1^2	17	3	12	32	22	18	10	114
F_1^3	0	0	6	23	12	25	3	69
F_2	2	2	5	14	5	23	5	56
F_2^1	16	1	8	41	8	8	25	107
F_2^2	4	3	1	5	5	20	12	50
Total por Período	46	11	59	159	68	141	65	549

Cuadro 7.11 Frecuencia de los grupos de simetría unilineales en los distintos períodos y subperíodos en que se ha dividido RCP.

Período→ Grupo Unilineal↓	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Clase
			Temprano	Medio	Tardío			
F_1 y afines	24	5	45	99	50	90	23	336
F_2 y afines	22	6	14	60	18	51	42	213
Total por Período	46	11	59	159	68	141	65	549

Cuadro 7.12 Frecuencia de los distintos grupos unilineales, agrupados de acuerdo a la presencia de una media vuelta como simetría permitida en el grupo, para la secuencia cronológica de RCP, basado en el cuadro 7.11.

Ordenamiento Asignado	Frecuencias	
	F_1 y afines	F_2 y afines
3	24	22
2	5	6
1	45	14
0	99	60
-1	50	18
-2	90	51
-3	23	42
	Σf 336	213

Cuadro 7.13 Frecuencia de los grupos unilineales para el cálculo de la t de Student, con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.12.

Período	V			Total por Grupo
	Temprano	Medio	Tardío	
Subperíodo				
Grupo Unilineal ↓				
F_1	19	32	10	61
F_1^1	8	12	6	26
F_1^2	12	32	22	66
F_1^3	6	23	12	41
F_2	5	14	5	24
F_2^1	8	41	8	57
F_2^2	1	5	5	11
Total por Subperíodo	59	159	68	286

Cuadro 7.14 Frecuencia de los grupos unilineales para los distintos subperíodos del V Período de la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.11.

Período→ Grupo Bilineal↓	III	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
				Temprano	Medio	Tardío			
p1	1	1	0	0	2	1	0	1	6
p1m1	0	4	0	2	0	2	0	1	9
p1g1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
c1m1	0	1	4	0	0	0	0	0	5
p2	0	2	0	0	0	0	0	0	2
p2mm	2	3	7	0	0	1	5	1	19
p2mg	0	1	0	0	0	3	12	0	16
p4mm	1	3	0	0	0	0	1	4	9
Total por Período	4	15	11	2	2	7	19	7	67

Cuadro 7.15 Frecuencia de los grupos bilineales en los distintos periodos y subperiodos de RCP.

Período→ Grupo Bilineal↓	III	IV	IV-V	V			VI	VII	Total por Grupo
				Temprano	Medio	Tardío			
p1 y dervds.	1	6	4	2	2	3	1	2	21
p2 y dervds.	2	6	7	0	0	4	17	1	37
Otros	1	3	0	0	0	0	1	4	9
Total por Período	4	15	11	2	2	7	19	7	67

Cuadro 7.16 Frecuencia de los grupos bilineales agrupados por el orden del giro que poseen como una de sus simetrías permitidas, para los distintos periodos (subperiodos) de RCP, basado en los datos del cuadro 7.15.

Período→ Grupo Bilineal↓	III	IV	IV-V	V	VI	VII	Total por Grupo
p1 y dervds.	1	6	4	7	1	2	21
p2 y dervds.	2	6	7	4	17	1	37
Otros	1	3	0	0	1	4	9
Total por Período	4	15	11	11	19	7	67

Cuadro 7.17 Frecuencia de los grupos bidimensionales en la cerámica de RCP, sin considerar la división del V Período.

Período→ Grupo Bilineal↓	III	IV	IV-V	V	VI	VII	Total por Grupo
p1 y dervds.	1	6	4	7	1	2	21
p2 y dervds.	2	6	7	4	17	1	37
Total por Período	3	12	11	11	18	3	58

Cuadro 7.18 Frecuencia de las dos clases de grupos bilineales de mayor presencia en la muestra de cerámica de RCP.

Ordenamiento Asignado	Frecuencias	
	p1 y dervds	p2 y dervds
3	1	2
2	6	6
1	4	7
0	7	4
-1	1	17
-2	2	1
	Σf 21	37

Cuadro 7.19 Frecuencia de las clases de grupos bilineales de mayor participación en la cerámica de RCP, dispuestas para el cálculo de la t de Student, con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica. Basado en los datos del cuadro 7.18.

CONCLUSIONES

1. Es posible desarrollar, desde una base de conocimientos elementales, el tema de los grupos de simetría en el plano, utilizando la reflexión a través de un eje como herramienta de construcción de todo el aparato teórico de estos grupos. Con esto se ha conseguido presentar el material que está destinado a servir de base en lo que corresponde a la presentación del tema de la simetría en el plano.
2. Es posible aplicar el concepto de grupo de simetría en el plano a áreas distintas de la Matemática misma, siendo un caso de aplicación la Arqueología.
3. Se utilizaron los grupos de simetría para corroborar las diferencias existentes entre los períodos estilísticos en que se ha dividido la evolución de la cerámica de la Región Central de Panamá, obteniendo resultados coincidentes con esta división, lo que muestra que este criterio de clasificación es funcional. Sin embargo no fue posible, ni nadie lo ha logrado hasta ahora, decidir con él si estas diferencias son cronológicas o jerárquicas. Este problema continúa abierto.

4. Adicional, se detectó, utilizando conceptos de simetría, una subdivisión en el V período, habiendo sido establecida como: Temprano, Medio y Tardío, cuando se analizaron los datos de acuerdo a una de las tres categorías de los grupos de simetría, los grupos de Leonardo; cuando el análisis se hizo con los datos de los grupos unilineales estas diferencias no se encontraron; para el caso de los grupos bilineales no fue posible aplicar el análisis por haber baja frecuencia de campos decorativos en estos subperíodos.
5. Todo lo anterior muestra que el concepto de simetría, que hasta hoy los arqueólogos han considerado intuitivamente importante, puede formalizarse y usar esta formalización en el análisis de la decoración de objetos y utensilios de origen arqueológicos con resultados positivos.

BIBLIOGRAFIA

- ALSINA, Claudi y Enric TRILLAS.
1984 *Lecciones de Algebra y Geometria para Arquitectos.*
Editorial Gustavo Gili, Barcelona.
- BOURBAKI, Nicolás
1976 *Elementos de Historia de las Matemáticas.* 2a Edición. Madrid Alianza Editorial. S.A.
- COXETER, H.S.M.
1971 *Fundamentos de Geometria.* Primera Edición en Español. Editorial Limusa-Wiley. S.A México, D.F.
- CHASTEL, André, tr
1952 *Leonard de Vinci par lui-meme. Textes Choices, traduits et Presents par André Chastel. Precedes de la vie de Leonard par Vasari.* Traducción inédita. Les Editions Nagel, Paris.
- COOKE, Richard G.
1976 a *El Hombre y la Tierra en el Panamá Prehistórico. Revista Nacional de Cultura, N°2.* Instituto Nacional de Cultura Panamá 1976.
1976 b *Panamá: Región Central. Vínculos 2(1), Costa Rica,* págs. 122 - 140.
1976 c *Una Nueva Mirada a la Evolución de la Cerámica en las Provincias Centrales. En Actas del IV Symposium*

- Nacional de Antropología, Arqueología y Etnohistoria de Panamá.* Panamá.
- 1976 d Informe sobre Excavaciones en el Sitio CIII0-3, Miraflores, Río Bayano, Febrero de 1973. En *Actas del IV Simposium Nacional de Antropología, Arqueología y Etnohistoria de Panamá.* Panamá.
- 1982 Los Guaymles sí Tienen Historia. En *El Pueblo Guaymí y su Futuro.* Editado por Comité Patrocinador del "Foro sobre el Pueblo Guaymí y su Futuro" y Centro de Estudios y Acción Social-Panamá, CEASPA. Panamá.
- 1984 a Archaeological Research in Central and Eastern Panama: A Review of Some Problems. En *The Archaeology of Lower Central America.* F. Lange y D.Z. Stone (Eds.) Págs. 263 - 302. Albuquerque, University of New Mexico Press.
- 1984 b Birds and Men in Prehistoric Central Panama. En *Recent Developments in Isthmian Archaeology: Advances in the Prehistory of Lower Central America.* F.Lange (Ed.). Proceeding of 44 International Congress of Americanists, Manchester 1982.
- 1985 a La Arqueología del Panamá Precolombino y su Importancia para los Estudios de los Pueblos de Habla Chibcha. En *Actas del Primer Congreso Científico sobre Indígenas Costarricenses,* San José. En Prensa.
- 1985 b Ancient Painted Pottery from Central Panama. *Archaeology.* Julio-Agosto. págs. 33 - 39.

- 1985 c El Motivo del "Ave con las Alas Desplegadas" en la Orfebrería de Panamá y Costa Rica. En *Metalurgia de América Precolombina. Actas de 45 Congreso Internacional de Americanistas*. Bogotá, Colombia.
- 1985 d Prehistoria IIa Parte. Suplemento *Enciclopedia de la Cultura Panameña para Niños y Jóvenes*. Periódico *La Prensa*, Panamá, Agosto de 1985.
- 1988 Some Ecological and Technological Correlates of Coastal Fishing in Formative Pacific Panama. En *Diet and Subsistence: Current Archaeological Perspectives*. B.V. Kennedy y B.M. LeMoine (Eds.). CHACMOOL, The Archaeological Association of the University of Calgary.
- COOKE, Richard G. y Anthony J. Ranere.
- 1984 b The "Proyecto Santa María": A Multidisciplinary Analysis of Prehistoric Adaptations to a Tropical Watershed Panama. En *Recent Developments in Isthmian Archaeology: Advances in the Prehistory of Lower Central America*. F.Lange (Ed.). Proceeding of 44 International Congress of Americanists, Manchester 1982.
- COWGILL, George L.
- 1977 The Trouble with Significance Tests and What We Can Do About It. *American Antiquity* 42(3), págs. 350 - 368.

ESPINOSA, Gaspar de

- 1972 *Relación de lo fecho por el Licenciado Gaspar Despina (..) en el viaje que Su Señoría me envió con la gente é navíos á las Provincias de París é Natá é Cherú é á las Otras Comarcanas(...). En Natá Prehispanico, Publicación Especial N.º 3, Centro de Investigaciones Antropológicas, Universidad de Panamá.*

HILBERT, David y COHN-VOSSEN, S,

- 1952 *Geometry and the Imagination*, traducido del alemán al inglés por P. Nemenyi, Chelsea Publishing Co., N.Y.

ECO, Umberto

- 1978 *Tratado de Simbiótica General*. Editorial Lumen, Barcelona.

HOWE, James

- 1977 *Algunos Problemas no Resueltos de la Etnohistoria del Este de Panamá. Revista Panameña de Antropología, Panamá, Año 2, N.º 2, Diciembre de 1977, págs 30 - 47. Asociación Panameña de Antropología.*

ICHON, Alain

- 1980 *Archaeologie Du Sud De la Peninsule D'Azuero*. Panamá. Collection: *Estudes Mésoaméricaines. Série II. Mission Archéologique et Ethnologique Francaise au México, México.*

LADD, John

- 1964 *Archaeological Investigations in the Parita and Santa María Zones of Panamá*. Smithsonian Institu-

tion, Bureau of American Ethnology. Bulletin 193.
Washington.

LINARES, Olga F.

1977 *Ecology and the Arts in Ancient Panama Studies in
Precolumbian Arts and Archaeology N° 17* Washington
DC. Dumbarton Oaks.

LINARES, Olga F. y Anthony J. RANERE (Editores)

1980 *Adaptative Radiations in Prehistoric Panama.* Peabody
Museum Monographs N° 5. Cambridge: Harvard
University Press.

LINARES, Olga F., Payson D. SHEETS, E. Jane ROSENTHAL

1975 *Prehistoric Agriculture in Tropical Highlands.* *Science* 187, págs 137 - 145.

LOTHROP, Samuel Kirkland

1938 *Coclé, An Archaeological Study of Central Panamá.
Part I: Historical Background Excavations at the Si-
tio Conte and Others Archaeological Sites.* Memoirs
of the Peabody Museum of Archaeology and Ethnology,
Vol. VII. Harvard University, Cambridge. Mass.

1942 *Coclé, An Archaeological Study of Central Panamá.
Part II. The Pottery of Sitio Conte and Other
Archaeological Sites.* Memoirs of the Peabody Museum
of Archaeology and Ethnology. Vol VIII Harvard
University, Cambridge, Mass.

1976 *Pre-Columbian Designs from Panamá. 591 Illustrations
of Coclé Pottery.* Dover Publications Inc., New York.

McGIMSEY, Charles R. III

1956 Cerro Mangote: A Preceramic Site in Panama. *American Antiquity* 22, págs. 151 - 161.

1958 Further Data and a Date from Cerro Mangote, Panama. *American Antiquity* 23, págs. 434 - 435.

MOSIMANN, James E. y Paul S. MARTIN

1975 Simulating Overkill by Paleoindians. *American Scientist* 63, págs. 304 - 313.

MUNTZ, Eugenio

1956 *Leonardo de Vinci; El artista, el pensador, el sabio*. Traducción española de Diego A. de Santillana, Librería "El Ateneo" Editorial.

PIPERNO, D., K.H. CLARY, R.G. COOKE, J.A. RANERE y D. WEILAND

1985 Preceramic Maize in Central Panamá: Phytolith and Pollen Evidence, Research Report. *American Anthropologist* 87, págs. 871-878.

RAVEN, Peter H., Brent BERLIN y Dennis E. BREEDLOVE

1971 The Origin of Taxonomy. *Science* 174, págs. 1210 - 1243.

RANERE, Anthony J. y Pat HANSELL

1978 Early Subsistence Pattern Along Pacific Coast of Central Panama. En *Prehistoric Coastal Adaptations*. B.L. Stark y B. Voorhies, Eds., págs. 43 - 59. New York. Academic Press.

ROBERTS, Orlando W.

- 1987 Los Indios Valiente de Bocas del Toro en 1817 Según el Testimonio de Orlando Roberts (Narración de los Viajes y Excursiones en la Costa Este y en el Interior de Centro América). Stanley Heckadon (tr.). En *Revista Panameña de Antropología*, Nº 3, págs.148-175. Asociación Panameña de Antropología, Panamá.

RODRIGUES, Aroldo

- 1977 *Investigación Experimental en Psicología y Educación*. Editorial Trillas, México, D.F.

ROUSE, Irving

- 1960 The Classification of Artifacts in Archaeology. *American Antiquity* 25(3), págs. 313-323.

SCHATTSCHEIDER, Doris

- 1978 The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly* 85(6), págs. 439-450.

SNEDECOR, George W. y William G. COCHRAN

- 1971 *Métodos Estadísticos*. C.E.C.S.A., México, D.F.

VERA, Francisco

- 1970 *Científicos Griegos, Vol. 1*. Editorial Aguilar, Madrid.

WASHBURN, Dorothy Koster

- 1977 *A Symmetry Analysis of Upper Gila Area Ceramic Design*. Paper of Peabody Museum of Archaeology and Ethnology Harvard University, Cambridge, Massachusetts

- 1979 Review of "Pattern Mathematics and Archaeology".
Bert Zaslów and Alfred E. Dittert Jr. *American Anti-
quity* 44(1), pp. 190-192.
- 1983 Toward a Theory of Structural Style in Art. En *Struc-
ture and Cognition in Art*. D.K. Washburn (Editora).
Cambridge University Press. Londres.
- WILLEY, Gordon R. y Charles R. McGIMSEY III
- 1954 *The Monagrillo Culture Panamá*. Paper of the Peabody
of Archaeology and Ethnology Vol. XLIX, N°2,
Harvard University, Cambridge Mass.
- ZASLOW, Bert
- 1977 "A Guide to Analyze Prehistoric Ceramic by
Symmetry and Pattern Mathematics". En "Pattern
Mathematics and Archaeology". *Anthropological Re-
search Papers* N°2 Arizona State University.
- 1981 "A Comparison of the Hohokam Decorative Patterns
with from the Upper Gila Area and from the Valley
of Oaxaca". En *Pattern Dissemination in the Prehis-
toric South West an Mesoamerica*. *Anthropological
Research Papers* N° 25 Arizona State University.
- ZASLOW, Bert y Alfred DITTER Jr.
- 1977 "The Pattern Technology of the Hohokam". En "Pattern
Mathematics and Archaeology", *Anthropological Rese-
arch Paper* N° 2, Arizona State University.