UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

"EL CONCEPTO DE INFINITO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

POR:
IRVIN R. PINTO M.
9 – 715 – 1501

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

VERAGUAS, REPÚBLICA DE PANAMÁ

2017

Aprobado por:

Dr. Jaime Gutiérrez
Presidente

14 ENE 2019

Dr. Jorge E. Hernández U.
Miembro

Mgtr. José A. Camarena
Miembro

ASESOR:
DR. JAIME GUTIÉRREZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

AGRADECIMIENTO

Dirijo mi fiel expresión de gratitud a Dios, por haberme dado la suficiente sabiduría y la energía necesaria para culminar esta etapa de mi vida.

Infinitas gracias al Doctor Jorge Hernández Urieta, quien incondicionalmente puso a nuestra disposición su experiencia, su orientación y por tanto su apoyo para la realización de este trabajo investigativo.

Al doctor Jaime Gutiérrez, por sus orientación y su comprensión, sin ello no hubiese sido posible el logro de este objetivo profesional.

A mi esposa y mis hijos, quienes siempre fueron la fuente de inspiración para seguir perseverando frente a cada reto que se presentara a lo largo del camino.

A todo aquel que de una u otra manera contribuyó a la realización de este trabajo.

Infinitamente Agradecido.

DEDICATORIA

Este trabajo investigativo está dedicado a mis hijos, por ser ellos la viva fuente de inspiración para la realización del mismo y para que sirva de motivación para el logro de sus metas en el ámbito profesional.

Con mucho cariño y sinceridad dedico este esfuerzo a ti, Amor de mi vida; pues tus palabras siempre fueron la voz del triunfo.

Irvin R. Pinto Marín

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación, se estudia la evolución histórica del concepto de infinito, desde la antigua Grecia hasta la actualidad. Se expone la presencia del concepto de infinito en distintas áreas de la matemática tales como la geometría, el cálculo y la teoría de números. Posteriormente se estudia el concepto de infinito matemático o infinito actual a través de la teoría de conjuntos en donde se presentan definiciones y se demuestran algunas propiedades relacionadas a dicho concepto. Se analiza la presencia del concepto de infinito en los programas de estudios de la asignatura de Matemática en los niveles de Premedia y Media de la Educación panameña. Finalmente se presentan algunas situaciones didácticas relacionadas con el concepto de infinito que sirven de base para la comprensión de diversos temas en las distintas ramas de la matemática.

ABSTRACT

This research paper studies the historical evolution of the concept of infinity, from ancient Greece to the present day. It exposes the presence of the concept of infinity in different areas of mathematics such as geometry, calculation and number theory. Later the concept of mathematical infinite or current infinite is studied through the theory of sets where definitions are presented and some properties related to this concept are demonstrated. It is analyzed the presence of the concept of infinity in the study programs of the subject of Mathematics in the levels of Premedia and Media of the Panamanian Education. Finally, some didactic situations related to the concept of infinity are presented, which serve as a basis for the comprehension of diverse subjects in the different branches of mathematics.

INTRODUCCIÓN

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del mal cuyo limitado imperio es la ética: me refiero infinito. (Borge J, 1944 y1952).

Este trabajo investigativo reportará la exploración histórica del concepto de infinito, así como las implicaciones que ha generado la inserción de dicho concepto en el discurso propio de la enseñanza de la matemática escolar. El concepto central de la investigación es el infinito, pues desde su aparición ha sido controversial y clave en la construcción de conceptos matemáticos que van desde las representaciones geométricas, el cálculo infinitesimal, el análisis de funciones hasta la fundamentación de la teoría de conjunto y de la matemática en general.

En una segunda sección de este trabajo, se analizará la presencia del infinito en las distintas áreas de la matemática como, por ejemplos, el Cálculo, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Teoría de Números.

Por otra parte, la construcción del concepto de infinito, como se pueda realizar actualmente, resultaría ser crucial en la enseñanza de la matemática a nivel medio académico, por ello esta investigación también está encaminada a plantear una concepción clara del infinito actual de tal manera que quien la consulte pueda llevarse una idea bien fundada que le permita abordar los problemas matemáticos con mayor facilidad.

Por último, se presenta algunas situaciones relacionadas con el concepto de infinito las cuales pueden ser usadas para una mayor comprensión en el estudio de las distintas ramas de la matemática en las cuales el infinito juega un papel preponderante.

CAPÍTULO I

EL INFINITO

1. EL INFINITO

1.1 Concepto

Al hacer referencia al infinito, se está citando al concepto más inaccesible y paradójico que haya podido pretender el frágil y temporal intelecto humano; tanto es así que solo ha sido posible abordarlo a través de uno de los más grandes logros de la matemática como lenguaje: el poder y coraje imaginativo. Podría decirse que la matemática ha sido la ciencia que a través de su lenguaje ha pretendido hablar, describir y medir el infinito.

La real academia de la lengua española define el concepto de infinito de las siguientes formas:

1) Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2) Muy numeroso o enorme.
3) Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. La calle se perdía en el infinito.
4) En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5) Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6) Mat. Signo (∞) con que se expresa el infinito.

La primera acepción que recoge la Real Academia de la Lengua Española sobre el infinito hace referencia al algo que no tiene ni puede tener fin, sin embargo queda claro que existe; la segunda, la tercera y la séptima hace referencia a las

percepciones que se tienen del concepto de infinito; la cuarta describe una de las aplicaciones del concepto; pero la quinta y la sexta se refieren al concepto de infinito desde la perspectiva del maravilloso mundo de la matemática.
Como quiera que sea, la Real Academia, no provee una definición precisa del concepto de infinito como tal, en su lugar describe las cualidades que debe tener algo que es infinito.

Es preciso aclarar que la palabra infinito, vulgarmente se utiliza para denotar algo muy grande, ilimitado o imposible de contar; sin embargo, el infinito va más allá de lo "muy grande" o de la imposibilidad humana de contar y que precisamente esta idea del infinito ha sido la fuente de muchas confusiones y controversias a lo largo de la historia. Los griegos trataron de comprender el infinito a través de procesos intuitivos usando el sentido común, pero lamentablemente, inspirados en un mundo finito por lo cual, en la mayoría de los casos llegaron a conclusiones contradictorias y paradójicas, como la famosa carrera donde Aquiles nunca alcanza a la tortuga.

Pero, "Galileo lo vio con toda claridad en el siglo XVII: Las nociones de "grande", "menor", "igual", que tan inteligentemente ordenan y califican a los conjuntos finitos entre los cuales vivimos, no funcionan al nivel de lo infinito, en el que tantas veces pensamos y sentimos" (Martínez J., 1977).

Galileo Galilei, aunque con cierta ambigüedad, rechazó la idea del infinito como paradójica, ya que atentaba contra la razón. Llegó a esta conclusión después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente, es decir, el infinito permitía que la parte fuera del mismo tamaño que el todo. (Ortiz J., 1994).

El otro ejemplo con el que Galileo ilustra el comportamiento raro de los conjuntos infinitos cuando se los trata con las nociones y el instrumental de lo finito, es clásico en la historia de la matemática: Nada más lógico y cuerdo que pensar que hay más números naturales, esos que usamos para contar, 1, 2, 3, 4, etc... que números cuadrados perfectos, es decir, aquellos que son el producto de algún natural por sí mismo, como por ejemplo, 1, 4, 9, 16, 25,... cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5,...respectivamente. En efecto, todo cuadrado perfecto es un natural, pero no todo natural es un cuadrado perfecto. El 3, por ejemplo, no es un cuadrado perfecto, ni el 15, ni el 18, etc.

Entonces el conjunto de los naturales es más grande que el de los cuadrados perfectos. Y, sin embargo, existe un natural único para cada cuadrado, y un cuadrado único para cada natural. El siguiente diagrama ilustra dicha correspondencia:

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ C: & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

Donde $\mathbb{N}$ es más grande que C y sin embargo tienen la misma cantidad de elementos; es decir, son coordinables.

Este ejemplo viola el famoso axioma de Euclides que dice que "el todo es mayor que cada una de sus partes". Pues esto justamente es donde empieza "lo raro" del concepto de infinito.

1.2 Tipos De Infinito

El entorno físico donde se desenvuelve la humanidad es de carácter finito, no obstante, el hombre para comprender esa finitud que lo rodea, recurre con frecuencia a la idea de lo infinito y lo incorpora a su vida diaria, haciendo de éste una necesidad para la convivencia. "El hombre estudia y maneja el infinito mediante la creación matemática, que formaliza la reiteración, la comparación, la ordenación y la clasificación, procesos básicos del quehacer matemático. La reiteración y la comparación permiten alcanzar dos conceptos distintos de infinitud." (Lorenzo, 2001).

1.2.1 Infinito Potencial

El infinito potencial nace de la posibilidad de hacer reiteradamente una acción sin aparente limitación. Se trata de las acciones que jamás tienen fin porque siempre hay una más allá. (Lorenzo, 2001).

Esta ideal del infinito es a la que se hace referencia cuando se afirma que cada número natural tiene un sucesor y por lo tanto no existe el último número natural. De modo que no importa que tan grande sea un número natural siempre existe su sucesor el cual se obtiene sumándole la unidad. El efecto que se logra al crear la posibilidad de generar indefinidamente números naturales es una ilustración clara del infinito potencial.

En la enseñanza de las matemáticas actuales la idea del infinito potencial está inmersa en la idea de límite, específicamente cuando realizan actividades tendientes a deducir el valor del límite de una función cuando la variable independiente tiende o se aproxima a un determinado valor "a" , lo cual se ensaya valorizando la función en una vecindad de "a".

1.2.2 Infinito Actual

El Infinito Actual es la toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto infinito.

El infinito actual nace al considerar a éste como un objeto y aparece al superar la operación de paso al límite. (Costa & Otto, 2005).

Bolzano en 1851 afirma lo siguiente:

"Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible que cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro; y que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables".

Esta idea sugiere que existen infinitos de distintos tamaños, lo cual constituye una de las dificultades en el intento por entender y estimar el infinito. Más aún se hace referencia a dos conjuntos, ambos infinitos, pero de distintos tamaños.

Para evitar este posible conflicto se acude a la definición que provee José de Jesús Martínez en 1977 donde establece que un conjunto es infinito si es coordinable con una de sus partes es decir si se puede establecer una correspondencia biunívoca con una parte propia del mismo.

1.3 Concepto de Infinito a Través de la Historia

1.3.1 El Comienzo

Respecto a la conceptualización del infinito, no hay registros de civilizaciones o cultura anteriores a los griegos. Pues, de acuerdo con (Ortiz J., 1994), tanto los egipcios como los aztecas poseían sistemas de numeración finitos, con una terminología que no superaba ciertos valores; mientras que otras civilizaciones como los babilonios y las mayas, incluyeron numeraciones posicionales intentando representar valores con la cantidad mínima de símbolos, y aun así su sistema se veía limitado en valores.

La aparición del concepto de número natural es uno de los más antiguos de la matemática, y sus orígenes se pierden entre la bruma de la antigüedad prehistórica.
La primera intuición sobre el concepto de infinito es contemporánea con la aparición de la sucesión de los números naturales; un conjunto numérico que presenta un primer término, pero carece de uno final.

Se encontrarán las primeras especulaciones sobre lo infinito en la cultura griega. Ellos Concibieron el término, de carácter filosófico, "ápeiron" que significaba "sin límites". Su idea era que cualquier cosa existente lo es en función de sus límites. Como lo afirma Aristóteles, "...ser infinito es una privación, no una perfección..." (Aristóteles, Física, III)
La noción de lo "sin límites" se refería a lo indefinido y a partir de él se formaba todo lo existente a través de ciertas limitaciones. Todo esto conllevó a asociar el término "ápeiron" con las diferentes concepciones religiosas de Dios.
(Gracián, 2010).

Los pitagóricos no tenían mucha afinidad con el infinito. Todo en su mundo era número. De hecho, los pitagóricos asociaban el bien y el mal con lo finito e infinito, respectivamente. Aunque no estaba bien entendido en ese momento, el descubrimiento pitagórico de los inconmensurables, por ejemplo $\sqrt{2}$, requería una concepción y una comprensión clara del infinito. No obstante, el concepto de infinito fue, en cierta manera, impuesto para los griegos desde el mundo físico por tres observaciones tradicionales: El tiempo parece ser interminable; el espacio y el tiempo pueden subdividirse sin fin; el espacio no tiene límite.

Eso de que el tiempo parece no tener fin, no es demasiado curioso. Tal vez, debido a la no observabilidad de los eventos después del fin del mundo y algunos de nuestro mundo temporal de la vida y la muerte, proyecta la percepción de que el tiempo es así, interminable.

Por otra parte, la aparente concepción de subdivisiones interminables de espacio y el tiempo, introduce las ideas del proceso infinitesimal y el infinito. En este sentido, el círculo se puede ver como el resultado inscribir sin límites, polígonos regulares con un número creciente de lados.

Estas concepciones impuestas tuvieron un impacto duradero, requiriendo la noción de infinito para poder ser posteriormente aclaradas.

El tercero posiblemente no era un problema con los griegos, ya que creían que el universo estaba limitado. (Allen G., 2000).

Más adelante Zenón (Elea, 490 a.C. – ídem, 430 a.C.), perteneciente a la Escuela Eleática describió una serie de paradojas que negaban la existencia del movimiento, la validez del espacio y el transcurrir del tiempo.

A través de una serie de brillantes experimentos mentales, Zenón muestra la inconsistencia lógica del movimiento, tanto bajo la hipótesis de que el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si se supone que existen átomos espaciales o temporales. Recordemos dos de los más conocidos:

Paradoja de la dicotomía: Un móvil no puede recorrer una distancia finita d, pues para ello primero deberá recorrer la mitad de esa distancia $\frac{d}{2}$; después la mitad de lo que queda, es decir $\frac{d}{4}$, y así sucesivamente. Así el móvil tiene que recorrer una infinidad $\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8} \cdots$ de distancias. Pero esta sucesión no tiene último elemento y por lo tanto nunca puede ser completada.

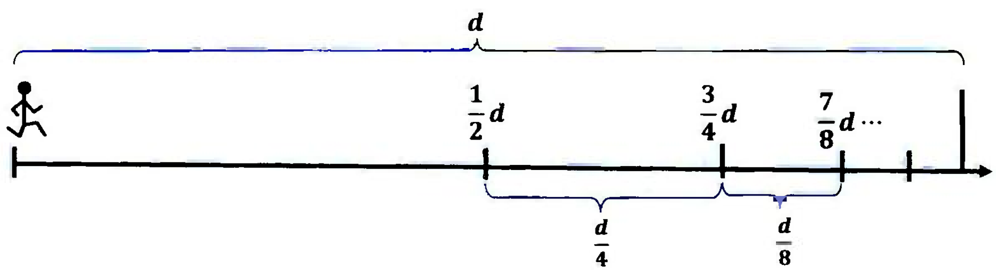

Figura 1.1

Paradoja de Aquiles y la Tortuga: El veloz Aquiles nunca podrá alcanzar a la lenta tortuga en una carrera en la que le ha dado una cierta ventaja, porque primero Aquiles debe llegar a la posición inicial de la tortuga, y ésta ya se habrá movido a una posición posterior. Cuando Aquiles llegue a este segundo punto, la tortuga se habrá movido de nuevo, y así sucesivamente. Por tanto, Aquiles nunca logrará alcanzar a la tortuga.

Es claro que la paradoja de Aquiles se reduce a la de la dicotomía por una traslación del sistema de referencia; colocando el nuevo origen en la tortuga móvil y una elección adecuada de las velocidades de uno y otra. También es claro que Zenón sabía que, en la hipotética carrera, Aquiles alcanzaría a la tortuga o el móvil recorrería la distancia requerida.

Lo paradójico para Zenón es la identificación de un proceso infinito, las sucesivas posiciones a recorrer, con uno finito, la distancia total a recorrer.

Como Aristóteles, Zenón pensaba que ningún proceso infinito puede considerarse como completo

Aristóteles (Estagira, 384 a.C. – Isla de Chalcis 322 a.C.), influenciado por las paradojas de Zenón, realizó la distinción entre infinito actual e infinito potencial, aunque manifestó la prohibición de que en su escuela se aceptase el infinito actual.

En su Física, Aristóteles rechaza estas paradojas afirmando que Zenón olvida que se puede recorrer un número infinito de magnitudes, las que separan a Aquiles de la tortuga, o las sucesivas mitades que debe recorrer el móvil, o estar en contacto con cada una de ellas, en un tiempo limitado. Como se expone más adelante, el argumento lógico de Aristóteles se suele identificar con una solución analítica de la paradoja. El móvil alcanzará su destino tras recorrer la serie infinita convergente

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=d$$

Poco después Euclides (325 a.C. – Alejandría, 265 a.C.) trató el infinito de un modo sutil en sus postulados, siempre evitando nombrarlo directamente.

El infinito potencial queda ilustrado en las ideas de Euclides cuando afirma en su obra "elementos de geometría" que una recta es un "segmento cuya longitud la podemos hacer toda lo larga que queramos". De la misma forma lo hace al expresar: "Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta".

Mucho tiempo después, los matemáticos indios del siglo IX introdujeron el cero en el sistema de numeración. Consideraron que, si a un quebrado con denominador cero se le sumaba o restaba cualquier cantidad, permanecía invariable. A este valor se la denominó "cantidad infinita". Todo esto llevó a que el infinito se representase como $\frac{1}{0}$ y que este concepto perdurara en las matemáticas árabe-medieval y más adelante en Europa. (Fedriani & Tenorio, 2010).

1.3.2 La aclaración de del concepto de Infinito

Los matemáticos europeos también trabajaron con irracionales, aunque había cierta confusión con el infinito mismo. San Agustín adoptó la visión platónica de que Dios era infinito y podría tener pensamientos infinitos. Santo Tomás de Aquino aceptó el "sin límites" de Dios, pero negó haber hecho cosas ilimitadas. Nicolás de Cusa (1401 - 1464) usaba un círculo cuadrado donde aplicaba el infinito y el proceso infinito como analogía para alcanzar la verdad y la gracia celestial. Un tipo de paradoja surgió en el pensamiento medieval. Se entendió que un círculo más grande debería tener más puntos que un círculo más pequeño, pero que estaban en una correspondencia uno a uno. Esto empezaba a aclarar la idea del infinito.

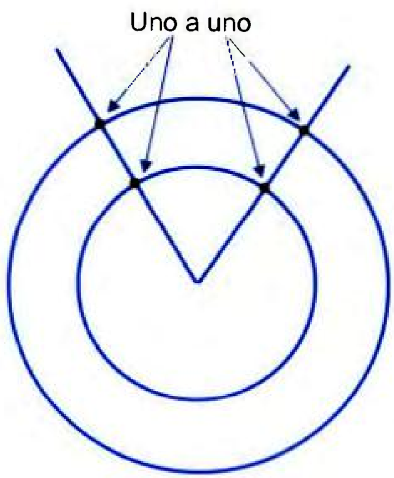

Figura 1.2

En 1600 Galileo (1564 - 1642) sugirió la inclusión de un número infinito de espacios infinitamente pequeños, dejando claro que el problema era que estaba usando el razonamiento finito en cosas infinitas. "Está mal hablar de mayor que, menor que o igual a para referirse a cantidades infinitas". Galileo, con la intuición de todo un genio, afirmó que la noción del infinito no es inconsistente, sino que obedece a reglas diferentes.

Ya en el siglo XVII Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598 – Bolonia, 1647), estimulado por los trabajos de Euclides, formuló la Teoría de los indivisibles que estudia magnitudes geométricas indivisibles o formadas por infinitos elementos de área y volumen. Describió que sumando los infinitos elementos de área de un cuerpo se obtienen su área, sucediendo lo mismo con su volumen. (Ortiz J., 1994).

Por su parte, de una forma más práctica, Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, demostró una ecuación cúbica que no pudo ser resuelta dentro del contexto de cualquiera de los números discutidos en los Elementos de Euclides. Se trata de aquellos números de la forma $\sqrt{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$ donde a y b son racionales. Por otra parte, la confusión fue evidente en la comprensión de la naturaleza de los irracionales y su relación con el infinito. (Michael Stifel, 1544) afirma, en su libro Arithmetica Integra, que los irracionales existen porque funcionan para resolver algunas cuestiones geométricas, pero que cuando se le intenta dar una representación decimal huyen muy lejos, tan lejos que escapan de nuestro alcance. Stifel concluye que un irracional no es un número verdadero, sino que se esconde en la nube del infinito. Aquí se muestra claramente lo confuso del concepto de número irracional para los matemáticos de aquel tiempo, pero su clara e indudable conexión con el infinito.

Una de las primeras cuestiones que fueron abordadas fue la de cómo encontrar una aproximación al valor de π. El resultado fue una notable fórmula, esa que todavía hoy despierta nuestra admiración por su belleza:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Este producto infinito fue descubierto en 1593, por el matemático francés Fracois Viète (1540-1603); lo cual muestra que π puede ser calculado a través de una secuencia de adiciones, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces cuadradas, únicamente del número 2. Estas no son más que las operaciones fundamentales de la matemática escolar. Pero sin duda alguna la figura más importante en esta fórmula son los tres puntos al final que indican que sigue, sigue y sigue hasta el infinito.

Esta fue la primera vez que un proceso infinito fue explícitamente expresado en una fórmula matemática lo cual anunció el inicio de una nueva era. Ya no sería el infinito algo siniestro, ese vago concepto que debe ser evitado a toda costa; muy por el contrario, ahora puede ser expresado por escrito y por lo tanto legítimamente aceptado en el reino de la matemática. (Maor E., 1991)

La naturaleza del infinito no se aclaró del todo hasta 1874, con un fundamental papel de Georg Cantor. Al tiempo que nació el cálculo y el análisis completamente desarrollado en un área prominente de las matemáticas.

Steven Simon (1548-1620), ingeniero de oficio, fue uno de los primeros matemáticos en abandonar el argumento de doble reducción a lo absurdo utilizado en la antigüedad y adoptar un proceso de límite sin el uso de los atavíos y los argumentos de los griegos. Esta fue la aceptación de los límites como un proceso infinito que no requiere metrización alguna. A través de esto, Simon prueba que la mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos de igual área. Lo logró mediante un argumento de subdivisión sucesiva en rectángulos y estimando el exceso.

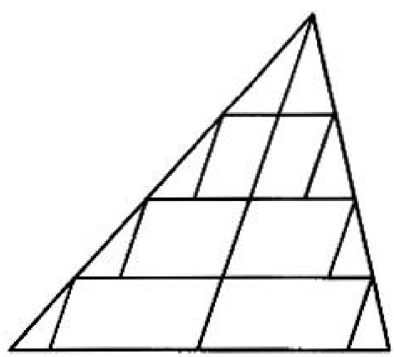

Figura 1.3

Era un matemático práctico que deseaba establecer resultados de una manera comprensible y difundir los nuevos métodos decimales. Simon, asumió como evidente la parte medular de su demostración; aquella donde debía hacer un proceso de límite; es decir, dio por obvio que $\frac{1}{2^n}$ tiende a cero cuando n tiende al infinito.

Ya en este punto de la historia, no puede haber teoría de irracionales sin una facilidad de trabajo y definición de infinito; pero tampoco puede haber análisis sin una teoría de irracionales, y sin análisis las matemáticas serían sin una rama importante (Allen G., 2000).

1.3.3 El Concepto de Infinito y la Aparición del Cálculo

John Wallis (1616-1703), uno de los matemáticos más importantes en el siglo XVII, en su trabajo Arithmetica Infinitorum amplía el trabajo de Torricelli (1608 - 1647) y Cavalieri (1598 - 1647) sobre indivisibles y establece, por un gran salto de Inducción, que

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}$$

Esta expansión infinita, aunque no la primera, ilustra claramente un proceso infinito sin justificación. En 1657 Wallis da el símbolo ∞ que indica una curva sin fin. También introdujo la notación de potencia fraccionaria.

Para Wallis, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler que estudiaron y le dieron seguimiento al nuevo cálculo, había poca seriedad y respeto por la prueba y por cualquier teoría de los límites y el infinito. Cualquier símbolo ∞ que apareciera en un cálculo sería catalogado como una paradoja. Tanto fue así que la legitimidad matemática del cálculo de derivadas, desarrollado por Newton, en su momento, fue criticada por George Berkeley, obispo anglicano de Cloyne (Irlanda), en su libro The Analyst.

Para Newton La relación entre fluxiones a partir de los fluentes es fácil de hallar, ya que si la relación entre fluentes es, digamos $y = f(x)$ en un pequeño intervalo 0 de tiempo; x se incrementa a $x + 0\dot{x}$ y y se incrementa a $y + 0\dot{y}$ y al ser $y + 0\dot{y} = f(x + 0\dot{x})$ será:

$$y = \frac{f(x + 0\dot{x}) - f(x)}{0}$$

Al ser 0 infinitamente pequeño se cancelan los términos que contienen 0 y aparece la relación entre fluxiones buscada.

Por ejemplo para $y = x^2$ se obtiene:

$$\dot{y} = \frac{(x + 0\dot{x})^2 - x^2}{0} = \frac{x^2 + 2x0\dot{x} + 0^2\dot{x}^2 - x^2}{0} = 2x\dot{x} + 0\dot{x}^2$$

Luego se eliminan los términos que contienen 0 ya que "se le supone infinitamente pequeño" y resulta

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

Esta forma que encontró Newton para desprenderse del término 0 fue exactamente lo que objetó Berkeley, argumentando que no era legítimo el cálculo matemático que por un lado trata y considera la cantidad 0 como un número verdadero y por otro lado simplemente lo elimina porque así lo necesita.

Berkeley no se opuso a los resultados espectaculares de este nuevo análisis, pero su objeción golpeó en el corazón de lo que aún no había sido matemáticamente articulado como un proceso legítimo (Allen, G. D. 2000).

Esto constituye una muestra de que Berkeley no asimiló el hecho de que el intervalo de tiempo 0 era infinitamente pequeño como el mismo Newton lo describe en "De Quadratura Curvarum" escrito en 1676 y publicado en 1704 donde habla de "últimas proporciones" diciendo "Por ´ultima proporción de cantidades evanescentes debemos entender el cociente de estas cantidades, no antes de que desvanezcan, ni después, pero tal como van desvaneciendo".

Lo que Berkeley tampoco supo fue que la idea de Newton basada en el concepto de infinitud, intuitivamente viene a ser nuestro concepto de derivada interpretada como un límite; es decir,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por su parte, Leonard Euler (1707-1783) no mejoró en lo absoluto el estado teórico de las cosas, pero estudió dos series importantes que guardan relación con el infinito.

$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \cdots$ (*)

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (**)

Sustituyendo $x = -1$ en (*) entonces se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{1}{0} = \infty = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

Sustituyendo $x = 2$ en (**) se obtiene

$$-1 = 1 + 2 + 4 + \cdots$$

Nótese que la serie para -1 es, término a término, más grande que la serie para ∞; por lo tanto $-1 > \infty$. Este tipo de cálculos prevalecieron en el análisis de aquellos tiempos y fueron llamados paradojas. Pero Euler además también observó que sustituyendo $x = -1$ en (**) se obtiene

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

Queda claro que Euler permitió libremente que $\frac{0}{0}$ tuviera un valor definido, y por lo tanto influyó en el avance de la proporción entre nadas.

Tal era el estado de las cosas; un campo que explotaba con conocimiento y resultados profundos que todavía impactan las matemáticas modernas, con inconsistencias intrínsecas que poco eran entendidas, y para para las cuales ni siquiera había algo que se pareciera a una teoría; sin embargo, el modelo griego de geometría axiomática rigurosa había sido olvidado (Allen, G. D. 2000).

Pero aún no se había definido con claridad el concepto de infinito, ni siquiera se podía concebir el infinito actual como tal. Entraron entonces en juego Georg Cantor (San Petersburgo, 1845 – Halle, 1918) y Bernhard Bolzano (Praga, Bohemia, actual República Checa, 1781 – ídem, 1848) que describieron al conjunto finito como aquel con un número natural de elementos y al conjunto infinito como aquel que no es finito.

Para empezar, Bolzano introduce por primera vez un punto de vista conjuntista en las Matemáticas, describiendo, en las primeras secciones de su obra, las nociones de agregado, que define como "*un todo cuyas partes se encuentran bien definidas*"; conjunto que es un "*agregado que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus elementos es indiferente*; y multitud o multiplicidad, que es "*un conjunto cuyos elementos pueden ser considerados como objetos de un cierto tipo*" (Bolzano,1851)

Tras una construcción, no muy clara, de los números naturales, partiendo de un elemento abstracto y construyendo lo que llama una serie a través de una noción algo confusa de sucesor y predecesor de cada término de la serie. Cada uno de esos términos es lo que Bolzano llama multitud finita o número. Y es entonces cuando Bolzano define un conjunto infinito:

"Llamaré infinita a una multitud si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella"

Como puede observarse estas definiciones sostienen la existencia del infinito actual, pero lo ven como la negación de lo finito.

Casi simultáneamente, en 1888, todo esto cambió ya que Richard Dedekind (Brunswick, 1831 – ídem, 1916) describió al conjunto infinito como aquel equivalente a una de sus partes y al conjunto finito como lo no infinito.

Con el concepto de infinito ya definido, siguieron apareciendo paradojas y teorías cerca del mismo. David Hilbert (Königsberg, 1862 -Gotinga, Alemania, 1943) planteó su famosa paradoja del Hotel Infinito donde describió varias situaciones en las que dicho hotel admitía nuevos huéspedes, incluso infinitos nuevos huéspedes, aunque se encontrase completo.

Hilbert (1862-1943), en su famoso ensayo Sobre el Infinito (Über das Endliche), publicado en la prestigiosa Revista Matematische Annalen en 1926, dice al comienzo del mismo:

“Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos al ánimo de los hombres. Ninguna otra idea ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento.”

Por ello

“...la elucidación definitiva de la naturaleza del infinito es algo que va mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, algo que, en realidad, se ha convertido en una cuestión de honor para el entendimiento humano.”

Más adelante, Kurt Gödel (Brünn, 1906 - New Jersey, 1978) comprobó que a partir de la Teoría de Conjuntos no se podía demostrar la existencia del conjunto infinito. Como se ha podido apreciar, el infinito, a lo largo de su historia, ha resultado ser un concepto difícil de alcanzar para el hombre e incluso muchas veces divinizado. Tantos filósofos como matemáticos han intentado comprender su significado y es tal su complejidad que hoy en día, sigue siendo un término complejo de comprender (Ortiz J., 1994).

CAPÍTULO II

EL CONCEPTO DE INFINITO EN DIFERENTES ÁREAS DE LA MATEMÁTICA

2. EL CONCEPTO DE INFINITO EN LAS DIFERENTES ÁREAS DE LA MATEMÁTICA

2.1 Cero, Uno e Infinito

El cero y el infinito se perciben a menudo como sinónimos de “nada” y “numeroso” respectivamente. La noción de que una división interminable da como resultado cero es bastante común, también, en muchos libros de textos antiguos se puede encontrar las ecuaciones $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$

Sin embargo, excepto para la inversión en un círculo, estas ecuaciones no tienen sentido. El cero es un número, un entero como todos los demás enteros. Por otro lado, el infinito es un concepto; no es parte del sistema de números reales y por lo tanto no se puede relacionar a un número real de la misma forma que con las cantidades numéricas.

Actualmente el símbolo 0 tiene varios significados en matemática. Sobre la recta real, 0 indica tanto el número cero como la posición asociada con este número; el punto inicial desde el cual se cuenta y empieza a mover. En el plano el punto o denota el origen del sistema de coordenadas, el punto cuyas coordenadas son (0,0). Un conjunto sin elementos, el conjunto vacío o nulo se denota con la letra griega ϕ, un símbolo que es recordativo del ordinario 0.

El álgebra superior, se trata con matrices las cuales se pueden sumar, restar, multiplicar y en cierto sentido dividir. De modo que una matriz cuyas entradas son todas ceros, es llamada matriz cero y se denota por O. Esta matriz comparte muchas de las propiedades del número 0; por ejemplo

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = A$$

Como quiera que sea el contexto en el cual se usa, la división por cero no tiene sentido.

Supongamos que se quiere dividir 5 por 0 y llámese x al resultado; entonces:

$$x = \frac{5}{0}$$

El número x, por definición, debe satisfacer la ecuación equivalente

$$0 \cdot x = 5$$

Pero $0 \cdot x = 0$ para todo número real x, lo que conduce al resultado absurdo

$$0 = 5$$

No existe un número x que satisfaga la ecuación

$$x = \frac{5}{0}$$

¿Pero qué sucede si dividimos 0 por 0?

En este caso se tendría la ecuación $0 \cdot x = 0$ la cual se satisface para todo número x, por lo que no se puede obtener una respuesta definida y única. Cualquiera de las dos situaciones es matemáticamente inaceptable y por lo tanto la división por cero se considera una operación invalida.

Mientras una expresión como $\frac{1}{0}$ no tiene sentido, es cierto que cuando se divide un número, digamos 1, por divisores más y más pequeños, el resultado llega a ser un número más y más grande.

En este caso decimos que $\frac{1}{x}$ crece sin cota cuando x se aproxima a cero. Esto es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

El símbolo 0 se ha utilizado por miles de años, mientras que el símbolo ∞ es más reciente; utilizado por primera vez en 1655 por el matemático inglés John Wallis (1616 -1703), quien probablemente lo tomó del numeral romano para 100 millones.

Tanto el número cero como el concepto de infinito son indispensables en matemática, pero su papel no estaría completo sin un tercer elemento, el número uno (1). Matemáticamente el número 1 es el generador de todos los enteros positivos por medio de adiciones sucesivas: $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$;....
Geométricamente, cada uno de los símbolos, 0, 1, e ∞, tiene un único roll en la recta real:

0 representa el punto inicial,

1 representa la escala que se usa, el tamaño de la unidad.

∞ representa la completitud de la recta.

Por otro lado, en matemáticas superiores, se encuentran a menudo las llamadas "formas indeterminadas"; expresiones tales como $\frac{\infty}{\infty}$. Tal expresión no tiene un valor pre asignado; solo puede ser evaluada a través de un proceso de límite.

Considérese, por ejemplo, la expresión

$$\frac{2x+1}{x-1}$$

Nótese que cuando x tiende al infinito, tanto el numerador como el denominador crecen sin cota, aunque su razón tiene como límite 2. Esto es:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$$

Sería totalmente incorrecto, escribir $\frac{\infty}{\infty}=2$.

De hecho; al considerar la expresión $\frac{2x+1}{3x-1}$, el límite habría sido $\frac{2}{3}$.

Otra forma indeterminada $\infty-\infty$. Podríamos estar tentados a decir que como todo número restado de sí mismo da 0, tendríamos $\infty-\infty=0$; pero para ver que esto es falso, considérese la expresión

$$\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}$$

Note que cuando x se aproxima a cero cada término tiende al infinito, aunque se puede probar que la expresión entera tiene como límite $\frac{1}{2}$. Es decir

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Libremente hablando, en cada expresión indeterminada, existe una lucha entre dos cantidades, una que tiende a hacer la expresión numéricamente grande y la otra que tiende a hacerla pequeña (Maor E., 1991).

El resultado final depende del proceso del límite involucrado. Las siete formas indeterminadas que se encuentran con más frecuencias son:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty \cdot 0; \quad 1^{\infty}; \quad 0^{0}; \quad \infty^{0} \text{ y } \infty - \infty$$

2.2 Números Grandes y Pequeños

Muchos novatos, especialmente los niños, se fascinan con números grandes; sin embargo para un matemático no tienen ningún significado particular; de hecho las dos constantes más importantes de la matemática, π y e, tienen valores bastante ordinarios; 3,14 y 2.72 respectivamente. Es cierto que las constantes fundamentales de las físicas tienen usualmente valores muy grandes o muy pequeños, la velocidad de la luz que es 3×10^{10} cm/s; la masa del electrón $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; la constante de Planck es $6{,}63 \times 10^{-34}$ $J \cdot s$ son algunas de ellas. Pero esto es así solo porque estas constantes se expresan en términos de nuestras unidades ordinarias de medida, las cuales se derivan de las dimensiones de nuestra tierra. Si se tomaran unidades de referencias distintas seguramente estas constantes tendrían valores distintos.

Por otro lado, en problemas de combinatoria y permutaciones se obtienen números muy grandes. Por ejemplo, existen $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ formas diferentes de colocar n objetos en una fila. A este número se le llama n factorial y se denota $n!$ Crese tan rápido como se muestra a continuación

Tabla 2.1: Valore de n factorial

n	$n!$
0	1 (por definición)
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
20	2 432 902 008 176 640 000
30	265 252 859 812 268 935 315 188 480 000 000
40	$8{,}15915 \times 10^{47}$ Aproximadamente
50	$3{,}04141 \times 10^{64}$ Aproximadamente
60	$8{,}32099 \times 10^{81}$ Aproximadamente
70	$1{,}19786 \times 10^{100}$ Aproximadamente
80	$7{,}15695 \times 10^{118}$ Aproximadamente
90	$1{,}48572 \times 10^{138}$ Aproximadamente
100	$9{,}33262 \times 10^{157}$ Aproximadamente

Fuente: Maor E., 1991

A pesar que estos, como muchos otros, son números muy grandes, no tienen nada que ver con el infinito. Una cantidad variable, se dice que se aproxima al infinito si puede llegar a ser más grande que cualquier número finito sin importar qué tan grande sea. De este modo se concluye que el infinito no es un número sino un concepto. (Maor E., 1991).

2.3 Convergencia y Límite

Los conceptos de convergencia y límite fueron centrales en el desarrollo del cálculo y con ellos en mano fue posible resolver las paradojas antiguas del infinito las cuales habían intrigado a Zenon de Elea. Por ejemplo, la paradoja del corredor se explica por la siguiente observación: primero se recorre la mitad de la distancia entre el punto inicial y el punto final del corredor, luego se recorre la mitad de la distancia restante y así sucesivamente, se recorrerá una distancia total igual a la suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Esta suma o serie infinita, tiene la propiedad de que no importa cuántos de sus términos se sumen, nunca se obtendrá 1, mucho menos excederá el valor de 1; Sin embargo, se puede hacer que la suma esté tan cerca de 1 como se quiera, esto se logra simplemente agregando una cantidad suficiente de términos.

En este caso se dice que la serie converge a uno o que tiene al número 1 como su límite, cuando el número de término agregados se incrementa infinitamente.

Ahora suponiendo que el corredor mantiene una velocidad constante, los intervalos de tiempo que le toma recorrer esta distancia seguirán también la misma serie; por lo tanto, cubrirá la distancia entera en un lapso finito de tiempo, lo cual resuelve el problema.

Lo que los griegos habían rechazado fue el hecho de que una suma infinita puede dar como resultado una valor finito; es decir puede converger a un límite.

Antes de continuar con las series infinitas se debe explicar lo que significa el límite de una sucesión infinita.

Una sucesión es simplemente una fila de números, escritos como:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

donde usualmente existe, aunque no siempre alguna regla que nos dice cómo obtener el próximo número en la sucesión. Puede ocurrir que si nos alejamos lo suficiente a lo largo de una sucesión dada, sus términos se aproximarán más y más cerca de un número L definido sin siquiera alcanzarlo. Si esto ocurre, a ese número se le llama el límite de la sucesión, y se dice que la sucesión converge a ese límite; es decir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Sin embargo el signo de igualdad no quiere decir que el límite se alcanza por lo cual no deberá ser inferido de esta forma. Así, para la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

el hecho de que los términos se aproximen al límite cero, será escrito como

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

o bien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Esta idea de límite permite una libertad considerable en cuanto a la manera exacta en que se aproxima a dicho límite. En el ejemplo anterior los términos de la sucesión se aproximan al límite cero por la derecha en la recta numérica. Pero no siempre esto suele ser así ya que la misma sucesión pero con signos alternados

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \cdots$$

También tiene límite cero, pero esta vez se aproxima alternadamente desde la izquierda y la derecha en la recta numérica. La convergencia no tiene que ser necesariamente monótona ya que, por ejemplo, la sucesión

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$$

converge a 1 haciendo saltos de izquierda a derecha.

2.4 El concepto de infinito a través de la teoría de conjunto.

2.4.1 Coordinabilidad e Infinitud

Un hecho psicológico muy fácil de comprobar es que el hombre, cada cosa que ve, inmediatamente intenta relacionarla con otra. Esto es tan cierto que se ha identificado la inteligencia precisamente con la capacidad de relacionar; le es esencial a la inteligencia unir, sintetizar; como decían los griegos; atar cabos, ordenar, y en consecuencia embellecer.

La relación más ingenua y pura es la que sin consultar la naturaleza de los objetos, los compara. Pues de esta elementalísima comparación, de esta mínima capacidad intelectual surge el reconocimiento de esa relación que se da entre los conjuntos cuando los elementos que lo constituyen pueden parearse o encajar, de manera tal que a cada uno de los elementos de uno de los conjuntos le corresponde un elemento único del otro conjunto y viceversa. Pero aún esto no es lo más sorprendente; lo verdaderamente extraordinario, porque parece increíble, es que sobre una noción tan clara y primitiva esté montada la teoría del infinito. De este modo, el tema del infinito y los que de cerca le asechen, como el de la eternidad, no son el producto de una elaboración mental compleja y sobrenatural sino algo casi natural. No es más nada lo que se necesita para sembrar la fecunda definición de infinitud.

Definición 2.4.1.1: Sean X y Y dos conjuntos; se dice que X es coordinable con Y y se denota $X \sim Y$, si existe una función biyectiva $f: X \to Y$.

Propiedad 2.4.1.1: la coordinabilidad es una relación de equivalencia.

Demostración:

Nótese que para todo conjunto X, se puede definir la función idéntica en X.

Es sabido además que la inversa de una función biyectiva es también una biyecciòn, y como la composición de biyecciones es una biyección, entonces se puede concluir que la coordinabilidad es una relación de equivalencia.

Es decir:

X es coordinables con X.

Si X es coordinble con Y entonces Y es coordinable con X.

Si X es coordinable con Y y Y es coordinable con Z, entonces X coordinable con Z.

Propiedad 2.4.1.2: Si X es coordinable con Y, la intersección de X con Z es el conjunto vacío y la intersección de Y con Z es el conjunto vacío, entonces $X \cup Z$ es coordinable con $Y \cup Z$.

Demostración:

Como X es coordinable con Y, existe una función biyectiva $f: X \to Y$. Sea además $I: Z \to Z$ la función identidad que también es biyectiva.

Luego $g: X \cup Z \to Y \cup Z$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \ \ x \in X \\ I(x) & si \ \ x \in Z \end{cases}$$ también es una función biyectiva.

Por lo tanto, $X \cup Z$ es coordinable con $Y \cup Z$.

Propiedad 2.4.1.3: La coordinabilidad es compatible con el producto cartesiano.

Demostración:

Si X es coordinable con Y, entonces $X \cup Z$ es coordinable con $Y \cup Z$.

Como X es coordinable con Y, existe una función biyectiva $f: X \to Y$.

Luego la aplicación $h: X \cup Z \to Y \cup Z$ defina de la forma $h(x, z) = (y, z) = (f(x), z)$ es una biyección.

La coordinabilidad es compatible con el producto cartesiano y con la unión, en el caso de que se cumpla la condición de la propiedad 2.4.1.2. Pero no es compatible ni con la intersección ni con la diferencia simétrica porque Z puede intersecar uno de los conjuntos más profundamente que el otro.

Definición 2.4.2: Un conjunto X es infinito si existe $X' \subset X$, $X' \neq X$, tal que X es coordinable con X'.

Definición 2.4.1.3: Un conjunto X es finito si no es infinito.

Nótese que esto es precisamente la formalización de la observación de galileo respecto a los números naturales y los cuadrados perfectos de los que se habló en el capítulo I. Ahora es muy fácil probar que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto infinito.; de hecho existen muchas formas de probarlo.

Propiedad 2.4.1.4: El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto infinito

Demostración:

Considérese el conjunto $P = \{x \in \mathbb{N}$ tales que existe $y \in \mathbb{N},\ x = 2y\}$. Es decir el conjunto de los números pares positivos.

La aplicación $f: \mathbb{N} \to P, \quad f(x) = 2x$, es una biyección. Como $P \subset \mathbb{N}$ y $P \neq \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}$ es infinito.

Definición 2.4.1.4: X es finito ordinario si X es el conjunto vacío o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X es coordinable $\bar{S}(n)$, donde

$\bar{S}(n) = \{x \in \mathbb{N},\ x \leq n\}$.

Es decir X es coordinable con un segmento inicial débil del conjunto de los números naturales.

Definición 2.4.1.5: X es infinito ordinario si X no es finito ordinario.

Propiedad 2.4.1.5: Todo conjunto coordinable con un conjunto infinito es infinito.

Demostración:

Sea X un conjunto infinito y sea Y un conjunto coordinable con X.

Como X es coordinable con Y, existe una biyección $f: X \to Y$.

Como X es infinito, existe $X' \subset X, X' \neq X$ Tal que X es coordinable con X'; es decir, existe una biyección $g: X \to X'$.

Llamemos Y' al subconjunto de Y formado por todas imágenes de la aplicación f restringida a X'. Sea $h: X' \to Y'$ la restricción de f.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "h \circ g \circ f^{-1}"] \\
X' \arrow[r, "h"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

Note que f, g y h son funciones biyectiva y como la composición de funciones biyectivas es una biyección se tiene que la aplicación $h \circ g \circ f^{-1}: Y \to Y'$ es una biyección. Además como f es una biyección y $X' \neq X$, se tiene que $Y' \neq Y$.

Así pues existe $Y' \subset Y, Y' \neq Y$ tal que Y es coordinable con Y'.

Por lo tanto Y es infinito.

Propiedad 2.4.1.6: Todo conjunto infinito contiene estrictamente una cantidad infinita de partes infinitas.

Demostración:

Sea X un conjunto infinito, por definición contiene estrictamente una parte X_1 con la cual es coordinable. Luego por la proposición 2.4.1.5 se tiene que X_1 es infinito.

Como X_1 es infinito, contiene estrictamente una parte X_2 con la cual es coordinable y por la propiedad anterior, X_2 también es un conjunto infinito. Repitiendo este procedimiento indefinidamente se obtiene el conjunto $P = \{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ de partes estrictas de X, todas infinitas. Note que P es un conjunto coordinable con $\mathbb{N}$ y en consecuencia infinito.

Por lo tanto todo conjunto infinito contiene estrictamente una cantidad de partes infinitas.

Propiedad 2.4.1.7: Ningún segmento inicial débil de los naturales es coordinable con una parte estricta suya.

Demostración:

Se demostrará, por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}, \bar{s}(n)$ no es coordinable con $\bar{s}(n)'$ donde $\bar{s}(n)'$ es parte estricta de $\bar{s}(n)$.

Evidentemente la proposición es verdadera para $n = 0$ porque $\bar{s}(0) = \{0\}$ y su única parte estricta es $\emptyset$, coordinable solo consigo mismo.

Supongamos ahora que la proposición es verdadera para $n = k$; es decir:

$\bar{s}(k)$ no es coordinable con $\bar{s}(k)'$ (hipótesis de inducción)

Por reducción al absurdo, se probará que la proposición es verdadera para $n = k + 1$.

En efecto, supongamos que $n = k + 1$ no satisface la proposición. Esto es:

$\bar{s}(k + 1)$ es coordinable con $\bar{s}(k + 1)'$.

Luego existe una biyección $f: \bar{s}(k + 1) \rightarrow \bar{s}(k + 1)'$:

$$
f \quad \begin{array}{ccccccc}
\bar{s}(k+1): & 0 & 1 & 2 & \cdots & k & k+1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{s}(k+1)': & f(0) & f(1) & f(2) & \cdots & f(k) & f(k+1)
\end{array}
$$

Note que $f(k + 1)$ puede ser o no igual a $k + 1$. Entonces puede ocurrir los siguientes casos:

Caso 1: $f(k + 1) = k + 1$

Basta suprimir los dos términos $k + 1$ y $f(k + 1)$ para obtener una biyección entre $\bar{s}(n)$ y $\bar{s}(n)'$ lo cual contradice la hipótesis de inducción.

Caso 2: $f(k+1) \neq k+1$ y algún otro elemento de $\bar{s}(k+1)'$ es $k+1$

Entonces se puede intercambiar con $f(k+1)$ y lograr hacer la misma supresión anterior.

Caso 3: Ningún elemento de $\bar{s}(k+1)'$ es $k+1$

En este caso se tiene que todos los elementos de $\bar{s}(k+1)'$ son elementos de $\bar{s}(k)$. Luego en definitiva se puede suprimir $k+1$ de $\bar{s}(k+1)$ y $f(k+1)$ de $\bar{s}(k+1)'$; de este modo se logra otra vez la biyección entre $\bar{s}(n)$ y $\bar{s}(n)'$ contradiciendo la hipótesis.

Así pues la proposición es verdadera para $n = k+1$. Por el principio de inducción matemática, se concluye que ningún segmento inicial débil de los naturales es coordinable con una parte estricta suya.

En otras palabras, esta propiedad significa que ningún segmento inicial débil de los números naturales es infinito; es decir, todo segmento inicial débil de los números naturales en finito.

Propiedad 2.4.1.8: $\mathbb{N}$ es infinito ordinario.

Demostración:

Por reducción a lo absurdo. Supongamos que $\mathbb{N}$ es finito ordinario.

Luego, por definición, es coordinable con un segmento inicial débil, $\bar{s}(n)$, de los números naturales.

Como $\mathbb{N}$ es infinito entonces, por la propiedad 2.4.1.5 $\bar{s}(n)$ es infinito lo cual contradice la propiedad anterior. Por lo tanto $\mathbb{N}$ e infinito Ordinario.

Propiedad 2.4.1.9: Si un conjunto es infinito, es infinito ordinario.

Demostración:

Sea X un conjunto infinito. Luego X es finito ordinario o infinito ordinario.

Si X es finito ordinario, entonces por definición, es coordinable con un segmento inicial débil, $\bar{s}(n)$, de los números naturales. Como X es infinito entonces, por la propiedad 2.4.1.5 $\bar{s}(n)$ es infinito lo cual contradice la propiedad anterior. Por lo tanto X es infinito ordinario.

Propiedad 2.4.1.10: Si un conjunto es infinito ordinario es infinito.

Demostración:

Sea X un conjunto infinito ordinario, y $f: \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$ la función de elección que elige de cada parte un elemento.

Luego,

$$f(X) = x_0$$

$$f(X - \{x_0\}) = x_1$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\}) = x_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \cdots - \{x_{k-1}\}) = x_k$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$,.$f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \cdots - \{x_n\}) \neq \emptyset$

En efecto si $f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \cdots - \{x_n\}) = \emptyset$ entonces X es coordinable con $\bar{s}(n+1)$ y en consecuencia finito ordinario lo cual contradice la hipótesis.

Además el conjunto $X' = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\} = \{x \in X \; tales \; que \; existe \; n \in \mathbb{N}, x = x_n\}$ es coordinable con $\mathbb{N}$.

Definamos ahora la biyección $g: X \to X - \{x_0\}$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} x_{n+1} & si \; x \in X' \\ x & si \; x \notin X' \end{cases}$$

Como $X - \{x_0\}$ es una parte estricta de X se concluye que X es infinito.

Las dos propiedades anteriores dan fe de que un conjunto es infinito si y solo si es infinito ordinario, y por consiguiente, es finito si y solo si es finito ordinario. Es decir, estas dos nociones del infinito son equivalentes y pueden ser utilizadas a conveniencia propia de la parte interesada más aun cuando se trate de fortalecer la calidad de la enseñanza de la matemática.

Propiedad 2.4.1.11: Todo conjunto que contiene un conjunto infinito es infinito.

Demostración:

Sea $X \subset Y$ y X infinito.

Como X es infinito, no es coordinable con ningún segmento inicial débil de los números naturales y por consiguiente Y tampoco lo es. Por lo tanto Y es infinito.

Otra forma de enunciar esta propiedad es que toda parte de un conjunto finito es finito.

2.4.2 Infinitud Enumerable

No es extraño que el conjunto de los números naturales desempeñe un papel muy importante en la teoría del infinito y convenga distinguir con un nombre todos aquellos conjuntos que son coordinables con una parte de los naturales o con el conjunto entero de ellos.

Definición 2.4.2.1: Todo conjunto coordinable con una parte de $\mathbb{N}$ se llama enumerable. Si en particular es coordinable con $\mathbb{N}$ se llama infinito enumerable.

Queda claro que todo conjunto infinito enumerable es infinito. La veracidad de este hecho descansa sobre la propiedad 2.4.1.5, que todo conjunto coordinable con un conjunto infinito es infinito. Además en obvio que todo conjunto finito e enumerable.

Propiedad 2.4.2.1: Si X es infinito, entonces existe un $Y \subseteq X$ tal que Y es coordinable con $\mathbb{N}$; o sea que Y es infinito enumerable.

Demostración:

Considérese la función selectora $f: \wp(x) - \{\emptyset\} \to X$.

De la propiedad 2.4.1.10 se tiene que

$$f(X) = x_0$$

$$f(X - \{x_0\}) = x_1$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\}) = x_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \cdots - \{x_{k-1}\}) = x_k$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Como X es infinito,.$f(X - \{x_0\} - \{x_1\} - \cdots - \{x_n\}) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego por inducción se construye el conjunto Y= $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\} \subseteq X$.

Note que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ y Y es coordinable con $\mathbb{N}$.

Por lo tanto Y es un subconjunto infinito enumerable de X.

Propiedad 2.4.2.2: (Schöder – Bernstein) Si $X_1 \subseteq Y \subseteq X$ y X en coordinables con X_1, entonces X es coordinable con Y.

Demostración:

Como X es coordinables con X_1, existe una biyección $f: X \to X_1$.

Como $Y \subseteq X$ entonce $f: Y \to Y_1$, donde $Y_1 = f(Y)$, es una biyección.

Note que

$$Y_1 \subseteq X_1 \subseteq Y \subseteq X$$

Como X es coordinable con X_1 y Y es coordinables con Y_1, $f: Y \to Y_1$ es una biyección.

Como $X_1 \subseteq Y$ entonce $f: X_1 \to X_2$, donde $X_2 = f(X_1)$, es una biyección y

$$X_2 \subseteq Y_1 \subseteq X_1 \subseteq Y \subseteq X$$

con X coordinable con X_1, X_1 coordinables con X_2 y Y coordinable con Y_1

Como $f: X_1 \to X_2$ es una biyección entonces $f: Y_1 \to Y_2$, donde $Y_2 = f(Y_1)$, es una biyección y $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq Y_1 \subseteq X_1 \subseteq Y \subseteq X$ y $X \sim X_1 \sim X_2$; $Y \sim Y_1 \sim Y_2$.

Repitiendo este proceso por inducción obtenemos conjuntos coordinables $X_1, X_2, X_3 \cdots$ y conjuntos coordinables $Y_1, Y_2, Y_3 \cdots$ tales que

$$X \supseteq Y \supseteq X_1 \supseteq Y_1 \supseteq X_2 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$$

Donde $f: X_i \to X_{i+1}$ y $f: Y_i \to Y_{i+1}$, $i = 1,2,3,\cdots$ son biyecciones.

Sea $B = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \cdots$

Entonces

$$X = (X - Y) \cup (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup \cdots \cup B$$

$$Y = (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup \cdots \cup B$$

Probemos que

$$(X - Y) \sim (X_1 - Y_1) \sim (X_2 - Y_2) \sim \cdots \sim (X_n - Y_n) \sim (X_{n+1} - Y_{n+1}) \cdots$$

En efecto, probaremos que $(X - Y) \sim (X_1 - Y_1)$ y análogamente se prueban los demás casos.

Si $X - Y = \emptyset$, entonces $X = Y$.

Además $Y_1 = f(Y) = f(X) = X_1$ de donde $X_1 - Y_1 = \emptyset$. Así $(X - Y) \sim (X_1 - Y_1)$.

Supongamos que $X - Y \neq \emptyset$

Si $x \in X - Y$ entonces $f(x) \in X$, pero como $f: Y \to Y_1$ es una biyección se tiene que $f(x) \notin Y_1$. Así pues $f(x) \in X_1 - Y_1$.

En base a lo anterior podemos definir la función $g: X - Y \to X_1 - Y_1$

$$g(x) = f(x)$$

Como f es inyectiva, g es inyectiva.

Probemos ahora que g es suryectiva.

Sea $z \in X_1 - Y_1$. Luego $z \in X - Y$. Entonces $z \in X_1$ y $z \notin Y$.

Luego existe un $x \in X$ tal que $f(x) = Z$.

Como $z \notin Y_1 = f(Y)$, se tiene que $x \notin Y$. De donde $x \in X - Y$. As $g(z) = f(z) = z$

Por lo tanto g es una función suryectiva.

De lo anterior se tiene que $(X - Y) \sim (X_1 - Y_1)$ y de las misma forma se prueban los siguientes casos.

Por lo tanto $(X - Y) \sim (X_1 - Y_1) \sim (X_2 - Y_2) \sim \cdots \sim (X_n - Y_n) \sim (X_{n+1} - Y_{n+1}) \cdots$

Consideremos ahora la función $h : X \rightarrow Y$ definida como sigue

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \;\; si\, x \in X - Y \;\; \text{ó} \;\; x \in X_i - Y_i \\ \\ x \;\; si \;\; xx \in Y - X_i \;\; \text{ó} \;\; x \in Y_i - X_{i+1} \end{cases}$$

Como $f = g: X_n - Y_n \rightarrow X_{n+1} - Y_{n+1}$, $n = 0,1,2, \cdots$ es una biyección,

$X = (X - Y) \cup (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup \cdots \cup B$ y $Y = (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup \cdots \cup B$

es una unión de conjuntos disjuntos, se tiene que ha es una biyección.

Por lo tanto $X \sim Y$.

Propiedad 2.4.2.3: El conjunto de los números primos es infinito enumerable.

Demostración: por reducción al absurdo.

Sea P el conjunto de los números primos. Supongamos que P es finito ordinario.

Entonces P, ordenado de menor a mayor, es coordinables con un segmento inicial débil de los números naturales $\bar{s}(k)$. De manera que el número primo p_k correspondiente al número natural k del segmento inicial débil $\bar{s}(k)$, es el mayor de todos los números primos.

Considérese el número $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k + 1$ que como es mayor que todo número primo, es compuesto. Luego sea p uno de los factores de A.

Entonces:

$$\frac{A}{p} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k}{p} + \frac{1}{p}$$

Note que como p es un número primo se simplifica en el primer término del binomio, por lo cual $\frac{A}{p}$ deja siempre el residuo $\frac{1}{p}$. Esto contradice que p es un factor de A. Así pues P es un conjunto infinito ordinario y por lo tanto infinito coordinables con $\mathbb{N}$.

Propiedad 2.4.2.4: El conjunto $\mathbb{Z}$, de los números enteros, es infinito enumerable.

Demostración:

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ es infinito entonces $\mathbb{Z}$ es infinito.

Por otro lado considérese la biyección $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ defina por:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & si\ x\ es\ par \\ \dfrac{x+1}{2} & si\ x\ es\ impar \end{cases}$$

Así pues $\mathbb{Z}$ es coordinable con $\mathbb{N}$ y por lo tanto infinito enumerable.

Propiedad 2.4.2.5: El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es infinito enumerable.

Demostración: Considere la siguiente sucesión que es coordinable con los números naturales:

$$0,1,-1,2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},3,-3,4,-4,\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

2.4.3 El Infinito Innumerable

Definición 2.4.3.1: Todo conjunto infinito que no sea infinito enumerable se llama innumerable.

Propiedad 2.4.3.1: El conjunto de las partes de los Números naturales, $\wp(\mathbb{N})$, es innumerable.

Demostración: por reducción a lo absurdo.

Supongamos que $\wp(\mathbb{N})$ es infinito enumerable; es decir, $\wp(\mathbb{N}) = \{X_0, X_1, X_2, \cdots\}$

Construyamos un subconjunto X de $\mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$0 \in X \leftrightarrow 0 \notin X_0$$

$$1 \in X \leftrightarrow 1 \notin X_1$$

$$2 \in X \leftrightarrow 0 \notin X_2$$

$$\vdots$$

$$n \in X \leftrightarrow 0 \notin X_n$$

Como $\emptyset \in \wp(\mathbb{N})$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\emptyset = X_{n_0}$. Como $n_0 \notin X_{n_0}$, se tiene que $n_0 \in X$.

Por lo tanto $X \subset \mathbb{N}$ y $X \neq \emptyset$.

Note que para todo $n \in \mathbb{N}, X \neq X_n$. Esto contradice que $\wp(\mathbb{N}) = \{X_0, X_1, X_2, \cdots\}$.

Por lo tanto $\wp(\mathbb{N})$ es innumerable.

Propiedad 2.4.3.2: Si X es un conjunto infinito enumerable entonces $\wp(X)$ es innumerables.

Demostración:

Como $X \sim \mathbb{N}$ entonces $\wp(X) \sim \wp(\mathbb{N})$.

Como $\wp(\mathbb{N})$ es innumerables entonces $\wp(X)$ también lo es.

Propiedad 2.4.3.3: Si I es uno de los intervalos $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ entonces I infinito innumerable.

Demostración:

Sugerencia: considere $Y = \{0, x_1 x_2 x_3 \cdots / x_i \in \{0,1\}\} \subseteq [0,1)$ y pruebe que es innumerable. Note que $(0,1) = [0,1) - \{0\}$; $[0,1) \subset [0,1]$ y $(0,1] = [0,1] - \{0\}$. Por lo tanto $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ son innumerables.

Propiedad 2.4.3.3: Si I es uno de los intervalos $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1]$ y J es uno de los intervalos $(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$ donde $a < b$, entonces $I \sim J$. Respectivamente.

Demostración:

Consideremos la función $f: I \to J$ definida como sigue:

$$f(t) = a + t(b - a)$$

Claramente f es una biyección.

Por lo tanto $I \sim J$ y por consiguiente J es innumerable.

Propiedad 2.4.3.4: El intervalo $(0, \infty)$ es innumerable.

Demostración:

Consideremos la función $f: (0,1) \to (0, \infty)$ definida como sigue

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}$$

Evidentemente f es una biyección. Por lo tanto $(0,1) \sim (0, \infty)$. Como $(0,1)$ es innumerable entonces $(0, \infty)$ es innumerable.

CAPITULO III

ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INFINITO ACTUAL O INFINITO MATEMÁTICO

3. ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE INFINITO ACTUAL O INFINITO MATEMÁTICO

3.1 Algunas inconsistencias en la enseñanza del concepto de infinito

El conocimiento y la convivencia con el concepto de infinito empiezan desde el comienzo de la vida escolar. El infinito potencial, paulatinamente tomará reflejo en las estructuras mentales del individuo de diversas formas; asociado a procesos cíclicos como la alternancia entre el día y la noche; relacionado a procesos a procesos de conteo como los números naturales o a través del infinito geométrico como la lejanía de las estrellas o del horizonte.

Esta mentalidad o idea que se tiene del infinito, suele permanecer estática en el tiempo, sin presentar modificaciones ni entrar en estado de crisis; tampoco entra en conflicto con la intuición de modo que no representa problema alguno para el estudiantado.

Sin embargo, no sucede lo mismo cuando se empieza a tratar los asuntos del infinito actual, pues este aparece siempre en el fascinante escenario de las matemáticas, y muchas veces sin preparación previa suficiente, lo que se constituye para los alumnos dificultades difíciles de solventar (Ortiz J., 1994).

Monaghan (2001) habla de una serie de conflictos que aparecen al momento de hacer estudios sobre el infinito: si se buscan elementos para indagar sobre las concepciones de los estudiantes, debe recurrirse a la matemática, ya que fuera de esta ciencia, no hay objetos infinitos.

La pregunta que cabe aquí es si el infinito intuitivo que se construye fuera de la matemática responde a cuestiones ciertamente infinitas para esta disciplina.

Lestón (2008) Concluye que no, pues ese infinito intuitivo, responde a cuestiones prácticas, sensibles o filosóficas.

"Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho", "muy grande". Es lo que excede a todo lo que es cuantificable. Es además una expresión de extensión del amor, del deseo, de la fe. Un amor infinito es un amor absoluto. Tan absoluto como es para un religioso el poder de Dios" (Lestón, 2008)

Fishbein (1979) y Duval (1983), realizaron estudios sobre este concepto, en donde se reveló que la mitad de los sujetos no aceptan la existencia del infinito actual, lo que demuestra que no se trata de una característica de madurez, sino de una visión que no cambia con la edad.

(Gracián, 2010) afirma que profesores de Educación Secundaria aducen que el infinito actual no debe existir como tal, aunque a la hora de impartir sus clases explican y solucionan ejercicios donde éste juega un importante papel.

En panamá, este conflicto entre el infinito actual y el alumno comienza alrededor de los 11 años, en el estudio los conjuntos numéricos que de alguna manera involucran procesos mentales relacionados al concepto de infinito actual, posteriormente a los 17 años en el estudio del cálculo infinitesimal y se prolonga en las enseñanzas de grado universitarias del ámbito técnico-científico.

Cuando la enseñanza de los conjuntos numéricos se desarrolla haciendo explicaciones que se ciñen a la pertenencia a un conjunto o inclusión de un conjunto en otro sin hacer análisis no aclaraciones sobre el número de elementos de cada conjunto infinito; es decir sobre la cardinabilidad de los mismos; y al no tratarse percepciones como que un conjunto puede ser igual a una parte del mismo o que un conjunto acotado sea infinito no se le ofrece al alumno la posibilidad de abordar términos que vayan en contra de su intuición o lógica.

Pero el infinito matemático no resulta difícil sólo entre los estudiantes, los docentes, en muchos casos, están utilizando algunas nociones intuitivas para caracterizar al infinito matemático.

Valdivé Fernández (2006) reportó la forma en que algunos docentes desarrollan sus clases relacionadas a conjuntos, además hizo indagaciones sobre las concepciones que esos mismos docentes tenían al respecto. Alguna de las ideas encontradas contradice al infinito actual o infinito matemático. Se reportan cuestiones como las siguientes:

¿Es 0,999... = 1?

Sí, por aproximación;

No, le falta un pedacito para llegar a 1.

¿Son infinitos los conjuntos N, Q y R? Explica

N y Q son infinitos porque no son finitos y R más infinito que los anteriores, porque contiene otros conjuntos infinitos.

¿Es R equipotente a N? Explica

Sí se pueden relacionar. N es subconjunto propio de R Son ambos infinitos. (Valdivé Fernández)

Cabe entonces reflexionar sobre qué ocurre cuando los docentes no han construidos el concepto de infinito actual. La respuesta es obvia, flaco favor le hacen a los estudiantes que intentan comprender las características que este concepto tiene y la complejidad de los elementos y cuestiones que se asocian al mismo. Si a "0,999... le faltase un poquito para llegar a 1", entonces la noción de límite se cae al vacío. Si "R se puede relacionar con N", es decir, si son equipotentes, entonces la continuidad no tiene sentido (Lestón, 2008).

La realidad es que el infinito actual es un concepto que requiere un alto nivel de abstracción y que ha provocado en la comunidad matemática diferencias entre distintos modos de tratarlo, de acuerdo a los usos que se hagan de él.}

3.2 El Concepto de infinito en la Enseñanza Matemática en el Nivel de Premedia

A continuación se recogen las apariciones del infinito, tanto potencial como actual, en los contenidos del currículo de las Matemáticas en el nivel de Premedia de la Educación en Panamá, según las programas de estudios del Ministerio de Educación actualizados en el año 2014.

Tabla 3.1 Contenidos que Involucran en Concepto de Infinito

Nevel de Premedia

Grado Académico	Área	Contenido relacionado con el infinito
7°	**Aritmética**	El Conjunto de los números enteros. Construcción del conjunto de números enteros. Diseña la recta numérica. **Relación con el concepto de Infinito**: Se intenta construir, representar y definir un conjunto numérico infinito. El conjunto de los números racionales "Q" Definición, notación, características y utilidad de los números racionales. Identificación de números racionales. Ubicación y representación de un número racional en la recta numérica. **Relación con el concepto de Infinito:** Expresiones decimales periódicas y no exactas Aproximaciones de cantidades con infinitos decimales

7°	**Geometría**	Representación simbólica de líneas perpendiculares y paralelas. Identificación de líneas paralelas y perpendiculares. **Relación con el concepto de Infinito:** Se intenta construir, representar y definir un conjunto numérico infinito
8°		Números Irracionales. Explicación Del origen y el concepto de los números irracionales. **Relación con el concepto de Infinito:** Expresiones decimales infinitas no periódicas. Se intenta construir, representar y definir un conjunto numérico infinito El conjunto de los números reales (R). Construcción del conjunto de los números reales. **Relación con el concepto de Infinito:** Representación de números irracionales y racionales con infinitos decimales. La recta numérica como representación geométrica infinita.

9°	**Aritmética**	El conjunto de los números complejos. Deducción y caracterización del conjunto de los números complejos. **Relación con el concepto de Infinito**: Deducir y caracterizar un conjunto infinito no enumerable. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. **Relación con el concepto de Infinito:** sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones.

Fuente: Ministerio de Educación de Panamá. Programas de estudios 2014.

3.3 El Concepto de Infinito en la Enseñanza Matemática el Nivel de Media

A continuación se recogen las apariciones infinito, tanto potencial como actual, en los contenidos del currículo de las Matemáticas en el nivel medio de la Educación en Panamá, según las programas de estudios del Ministerio de Educación actualizados en el año 2014.

Tabla 3.2 Contenidos que Involucran en Concepto de Infinito

Nevel de Media

Grado Académico	Área	Contenido relacionado con el infinito
10°	**Trigonometría**	Razones trigonométricas de ángulos especiales (30°, 45°, 60°) y ángulos de cuadrantes. **Relación con el concepto de Infinito:** los valores de algunas razones trigonométricas para los ángulos cuadrantales se asocian con el infinito.
11°	**Trigonometría**	Ecuaciones trigonométricas. Concepto. Clasificación. Solución. **Relación con el concepto de Infinito:** Resolución de ecuaciones con infinitas soluciones, es decir infinitos valores para el ángulo debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas.

11°	**Álgebra**	Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. **Relación con el concepto de Infinito:** Sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones
11°	**Geometría Analítica**	La Recta. Concepto. Distancia entre dos puntos Distancia de un punto a una recta. Formas de la ecuación de la recta. Forma general. Pendiente y ordenada en el origen. Punto pendiente. Forma normal. **Relación con el concepto de Infinito:** Infinito geométrico y distancias infinitas. Las Cónicas. Concepto. Clasificación: Circunferencia. Parábola. Elipse. Hipérbola. **Relación con el concepto de Infinito:** Infinito geométrico y distancias infinitas.
12°	**Álgebra**	Inecuaciones. Tipos de Intervalos. Solución de inecuaciones. **Relación con el concepto de Infinito:** Intervalos infinitos o semirectas.

12°	**Cálculo Diferencial**	Funciones Reales. Concepto. Dominio y codominio. Clases de funciones y sus gráficas. **Relación con el concepto de Infinito:** determinación de conjuntos infinitos y representaciones geométricas no acotadas o infinito geométrico. Crecimiento y decrecimiento indefinido e infinito de funciones. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita. Comportamiento asintótico. Límite y Continuidad. Conceptos y definiciones. **Relación con el concepto de Infinito:** Infinito actual. Continuidad de las funciones en todo R o continuidad finita. Derivada. Definición. Problema de la recta tangente. Derivada de Funciones. **Relación con el concepto de Infinito:** Infinito Actual.

Fuente: Ministerio de Educación de Panamá. Programas de estudios 2014.

3.4 Situaciones Didáctica que Involucran el Concepto de Infinito

En esta propuesta se pretende exhibir ciertas situaciones didácticas en el estudio de la matemática en donde el concepto de infinito juega un papel fundamental, se busca entonces una interpretación de las dificultades aparente en la conceptualización del infinito.

Se presentarán ejemplos en diferentes ramas de la Matemática tales como Cálculo, Matemáticas Superiores y Análisis. En cada ejemplo se dará a conocer la situación problémica y se utilizará el concepto de infinito en su desarrollo, posteriormente se realiza una interpretación de las dificultades que conlleva el uso inadecuado del infinito en el aprendizaje de la referida rama de la Matemática en la cual se haya citado el ejemplo.

Desde muy temprana edad los niños se relacionan con el estudio del infinito, pero el tratamiento que se le da a este concepto es muy superficial y ambiguo, pues se tiene una idea muy vaga de lo que realmente es el infinito. Esta situación didáctica podría estar afectando el desarrollo pleno del concepto de infinito

No es hasta que los estudiantes hayan madurado las ideas de ciertos conceptos tales como relaciones de orden, equipotencia, entre otras, que los estudiantes llegan a definir el infinito matemático, tal cual se debe ver en el estudio que hoy nos ocupa.

3.4.1 Situaciones Didácticas del Concepto de Infinito en el Estudio del Cálculo Diferencial E Integral

La enseñanza de los principios del Cálculo confronta dificultades asociadas con la complejidad de los objetos básicos requeridos, las asociadas a la conceptualización del concepto de límite y las vinculadas con las rupturas necesarias del álgebra. (Artigue, 1995).

La historia de la Matemática ha demostrado que el infinito ha acompañado al Cálculo en todo su desarrollo y evolución, como se ha visto en capítulos precedentes; por ejemplo, con el método exhaustivo o de agotamiento, en donde el Sofista Antifonte (430 a.c.) trato de determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se colmara. (Boyer, 2010)

El método de agotamiento es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a Isaac Newton y a Leibniz unificar el cálculo diferencial con el integral, lo cual conllevó la posterior definición rigurosa del límite de una función por Bernard Bolzano, Cauchy y Weierstrass. (Boyer, 2010).

Ejemplo 1: El Paso de Recta Secante a Recta tangente de la gráfica de una función.

La derivada de una función f es otra función que se representa por f'; su definición puede ser introducida de diferentes formas; una de ellas es por medio de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$. Para ello se hace necesario tratar de definir la pendiente de una recta secante a la curva f y considerando el evento en el que dicha recta secante se convierte en recta tangente en el punto $x = a$.

Supongamos que una función $y = f(x)$ es continua en el punto $x = a$, y sin pérdida de generalidad, su gráfica es como la que se muestra en la figura.

Ejemplo 1: El Paso de Recta Secante a Recta tangente de la gráfica de una función.

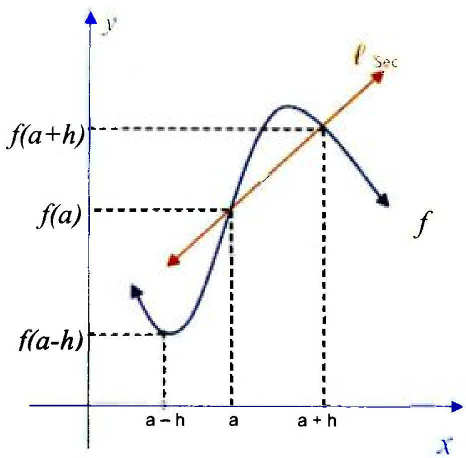

Figura 3.1

La continuidad de la función es garantía de que $f(a)$ existe; es decir, que la función se puede evaluar en el punto $x = a$, y además de la existencia de una vecindad V de la forma $(a - h, a + h)$ para un número real $h > 0$, suficientemente pequeño, en la cual la función f posee una recta o segmento secante, que se obtiene al unir los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ (a, f(a)).

Al intentar definir la pendiente de dicha recta tangente se tiene:

$$M_{sec} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$$

de donde obtenemos que:

$$M_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si para la recta secante el punto $(a, f(a))$ se mantiene fijo y el punto de coordenadas$(a+h, f(a+h))$ se mueve hacia la izquierda, considerando un h cada vez más pequeño, resultaría que la recta secante se transformaría en recta tangente cuando $h \to 0$, como se muestra en la figura

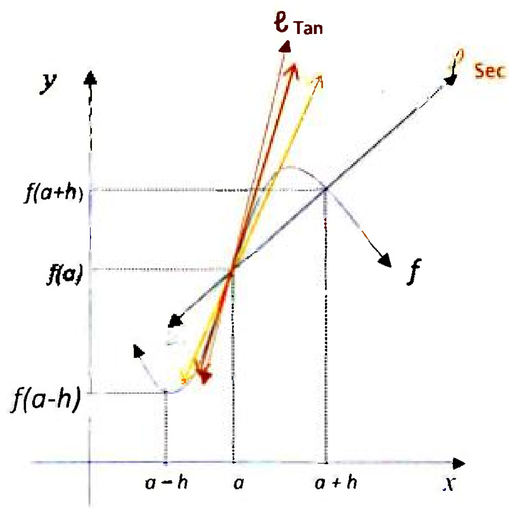

Figura 3.2

Luego por transitividad la pendiente de la recta secante se transforma en la pendiente de la recta tangente; es decir:

$$M_{Tan} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{cuando } h \to 0$$

La definición para la pendiente de la recta tangente se conoce con el nombre de derivada de la función f en el punto $x = a$. Esta idea intuitiva de la de la derivada de una función, tiene sentido siempre que se tenga claro el hecho de que $h \to 0$. Nótese que al considerar, desde el punto de vista práctico, un h interminablemente cada vez más pequeño no garantiza el paso de la recta secante a la recta tangente porque tendría que pasar una eternidad para lograrlo. Sin embargo al considerar, desde el punto de vista lógico, el hecho de que h se aproxima a 0 por medio de un conjunto infinito de valores cada vez más pequeños entonces se puede garantizar la definición para la pendiente de dicha recta tangente como sigue:

$$M_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

La asimilación de este hecho, otra vez, no es posible sin la claridad que emana de la luz que irradia el concepto de infinitud. Es por ello que se ha enfatizado tanto en la verdadera construcción del concepto de infinito matemático como base para para el aprendizaje de otros conceptos fundamentales en el fructífero campo de las matemáticas.

Ejemplo 2: El área de un circulo por agotamiento de un polígono regular.

Consideremos un Pòlígono P de n lados inscrito en un círculo de radio r como se muestra en la figura 3.3 y analicemos los perímetros en los distintos casos:

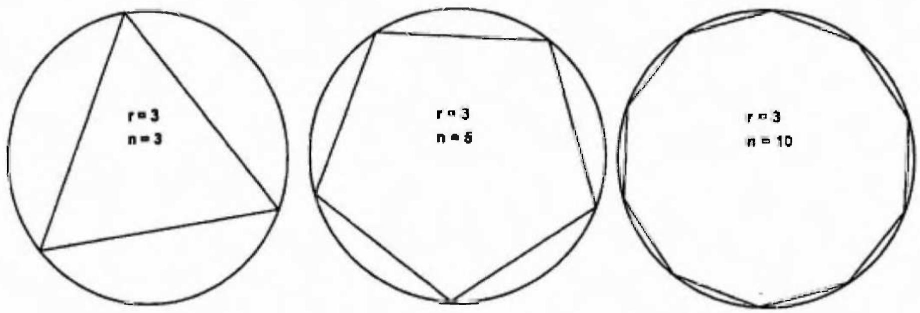

Figura 3.3

Sea L la longitud de uno de los lados del polígono regular. Note que la cantidad nL, el perímetro del P, crece a medida que n aumenta, sin embargo siempre será menor que la longitud de la circunferencia. Luego por la propiedad arquimediana se tiene que para n lo suficientemente grande (n tiende al infinito), el valor de nL se aproxima tanto como se quiera a la longitud de la circunferencia del círculo, es decir:

$$nL \to 2\pi r$$

Por otro lado consideremos el polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio r cuya área es $A_c = \pi r^2$

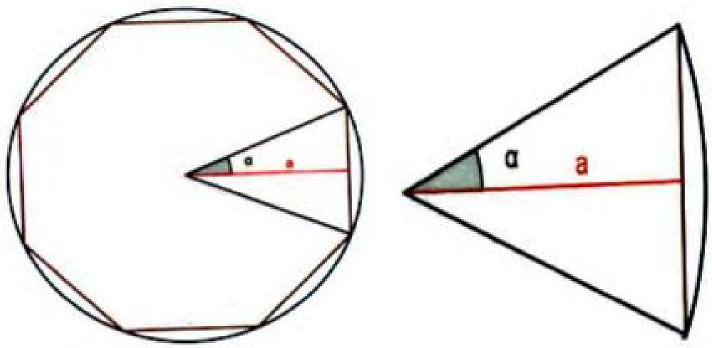

Figura 3.4

El área A_P del Polígono regular P de n lados queda es:

$$A_P = \frac{apotema \times perímetro}{2}$$

$$A_P = \frac{apotema \times nL}{2}$$

Note que $\propto = \frac{\pi}{n}$ y por consiguiente

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{apotema}{r}$$

Es decir:

$$apotema = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Es justamente en este punto de la situación donde entra en juego el concepto que hemos venido construyendo a lo largo de todo este trabajo; el concepto de infinito matemático.

Pues cundo $n \to \infty$, entonces la $apotema \ \to r$. Es decir:

Cuando $n \to \infty$ entonces $nL \to 2\pi r$; $apotema \to r$ y por consiguiente.

$$A_P = \frac{apotema \times nL}{2} \to \pi r^2$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$, $A_P \to A_C$; es decir, el área del polígono de n lados inscrito en el círculo tiende al área del círculo.

Lo importante aquí es que el aprendiz debe concebir la idea de que la cantidad de lados del polígono no solamente puede crecer indefinidamente, sino que el conjunto de los posibles valores para la cantidad de lados es infinito. Pues el hecho de que crezca interminablemente no garantiza la equivalencia buscada. Lo que garantiza la equivalencia es el hecho de que el conjunto formado por los posibles valores para n es infinito.

Ejemplo 3: El infinito en la construcción del número "e" base de los logaritmos naturales.

Mucho hemos escuchado sobre el famoso número e. Se trata de un número irracional y su valor es aproximadamente $2{,}71828181845\cdots$ y es uno de los números más importantes en matemáticas. Pero, ¿Por qué este número es tan importante? ¿De dónde viene? ¿Qué representa?

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, fue quien le dio el nombre al número e.

Tal vez la definición más conocida del número e es que es la base de los logaritmos naturales Pero ¿qué quiere decir que e sea la base de los logaritmos naturales?

Los logaritmos fueron inventados por el matemático escocés John Napier (1550-1617). Napier quería facilitar el cálculo de las funciones trigonométricas, por la vía de reemplazar las operaciones de multiplicación y división por sumas y restas. Para evitar introducir fracciones, Napier eligió el valor 10^7 para el radio del círculo; y como base para sus potencias, eligió $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$.

Entonces un número N puede escribirse como

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

En donde el exponente L es el logaritmo naperiano de N.

Que e sea la base de los logaritmos naturales significa que el logaritmo natural de un número x es la potencia a la que habría que elevar e para obtener x; es decir, el logaritmo natural de x. es r si y sólo si $e^r = x$.

Hay varias formas de definir conceptualmente el valor del número e. Para partir por una de éstas, analicemos la siguiente situación: derivar la función $y = f(x) = a^x$ con respecto a x. Geométricamente, la derivada de la función $f(x)$ en $x = a$, es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

Analíticamente, esta definición puede escribirse como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como e está relacionado con los logaritmos entonces es muy obvio que dicho número está relacionado con su inversa; es decir, con a^x.

Aplicando la definición anterior para derivar la función $y = f(x) = a^x$, se tiene:

$$f'^{(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

Es aquí donde se presenta verdadero problema, ¿cómo calculamos este límite?. Lo mejor que pudiera pasar es que este límite fuese igual a 1, es decir, que la derivada de a^x fuese igual a a^x; pero esto no es necesariamente cierto para cualquier valor de a. Entonces, definamos e como aquel número real que cumple esta condición; o sea:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Es preciso aclarar que esto significa que la derivada de e^x es e^x.

Con este límite se ha logrado una definición para el número e; sin embargo, en la práctica, no es fácil calcularlo. Ahora bien, es muy fácil comprobar que existe un número real e que satisface dicha condición; es efecto; considérese la siguiente tabla:

Tabla 3.3

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
1	1	2
0,5	0,828...	1,464...
0,2	0,743...	1,228...
0,1	0,717...	1,161...
0,05	0,705...	1,129...
0,01	0,695...	1,104...

Los valores en la tabla 3.3 muestran que e efectivamente existe y debe tener un valor mayor que 2 y menor que 3.

Defínase ahora la función $g(x) = \ln x$, la función logarítmica con base e.

A continuación se demuestra que la deriva de $g(x) = \ln x$ es $\frac{1}{x}$

Sea

$$y = \log_a x$$

Esto significa que

$$a^y = x$$

Además

$$a = Z^{(\log_Z a)} \quad \text{Para cualquier valor } Z.$$

Por lo tanto,

$$Z^{(\log_Z a)y} = x \quad \text{Para cualquier valor } Z.$$

Tomando $Z = e$, se tiene

$$e^{y(\ln a)} = x.$$

Como la derivada de e^x fuese igual a e^x, entonces derivando con respecto a x en ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$e^{y(\ln a)} \cdot \ln a \cdot y' = 1$$

Es decir,

$$y' = \frac{1}{e^{y(\ln a)} \cdot \ln a} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Por lo tanto, la derivada de la función $y = \log_a x$ es $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Sustituyendo a por e, se tiene que la derivada de la función $y = \ln x$ es $y' = \frac{1}{x}$.

Utilizando la definición de derivada se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$$

Evaluando esta expresión en el punto $x = 1$, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$$

Debido a que $\ln 1 = 0$, entonces

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Por la propiedad de los logaritmos

$$1 = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Como las funciones logarítmicas son continuas se tiene que

$$1 = \ln \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Haciendo $n = \frac{1}{h}$, se tiene que si $h \to 0, n \to \infty$; por consiguiente

$$1 = \ln \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Como la función inversa a los logaritmos es la exponencial; es decir, e^x, entonces aplicando dicha función en ambos miembros se tiene:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Así pues, se ha encontrado una definición conceptual para el número e. Con esta expresión se podrá aproximar su valor tanto como se quiera. En efecto:

Tabla 3.4

n	$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
10	2,5937...
100	2,7048...
1000	2,7169...
$\vdots$	$\vdots$
	2,7182...

Otra vez, aparece la situación en la que el entendimiento y comprensión de un concepto depende de otro más profundo y más abstracto, el concepto de infinito, pues para entender que e es un número real con infinitas cifras decimales no periódicas, $e = 2,71828182845 \cdots$ primero hay que tener bien claro el concepto de infinitud; es decir, haber podido discriminar entre lo interminable y lo infinito. En efecto, la rudimentaria práctica de darle valores relativamente grandes a n, solo garantiza la consecución precisa de unas cuantas cifras decimales para el valor de e; de modo que se hace necesario embarcarse en la lógica y navegar por el fascinante mundo del infinito para lograr internalizar el valor del trascendental número de Euler, base de los logaritmos naturales.

Ejemplo 4: Áreas de regiones acotadas por curvas.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Una equipartición del intervalo $[a,b]$ es una selección de n puntos $P_n: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ tales que:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{para } i=1,2,\cdots,n$$

Es claro que $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ para $k=1,2,\cdots,n$. Como f es una función continua en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, entonces f tiene máximo absoluto y mínimo absoluto asociado a dicho subintervalo. Denotemos por:

$M_k(f) =$ máximo absoluto de f en $[x_{k-1},x_k]$

$m_k(f) =$ mínimo absoluto de f en $[x_{k-1},x_k]$.

Entonces se puede formar dos sumas que, interpretadas geométricamente como se muestra en la figura 3.5 y figura 3.6 respectivamente, constituyen aproximadamente el área bajo la gráfica de f.

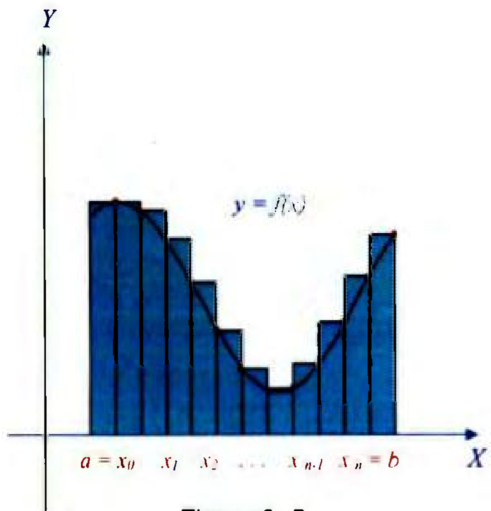

Figura 3. 5
Suma Superior

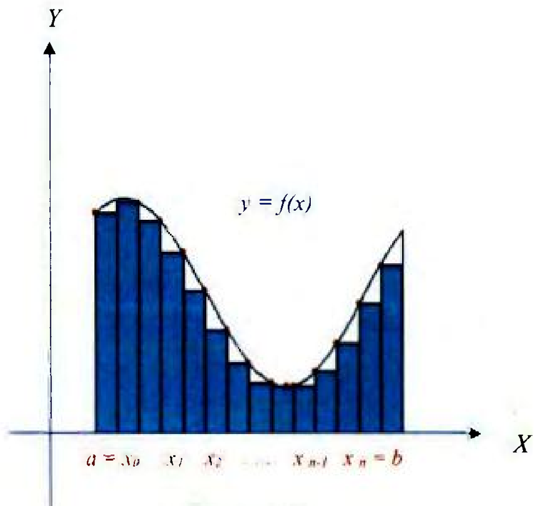

Figura 3.6
Suma Inferior

La suma del área superior que se refiere al área de los rectángulos circunscritos queda definida por

$$S_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} M_k(f)$$

Es decir

$$S_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \text{si } f \text{ es creciente}$$

O bien

$$S_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \qquad \text{si } f \text{ es decreciente.}$$

Por otro lado, la suma del área inferior que se refiere a los rectángulos inscritos queda definida por

$$s_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} m_k(f)$$

Es decir

$$s_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \text{si } f \text{ es decreciente}$$

O bien

$$s_n(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \qquad \text{si } f \text{ es creciente.}$$

Como f es continua en el intervalos entonces se dice que integrable en el intervalo $[a, b]$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|S_n(f) - s_n(f)| < \varepsilon$.

En otras palabras si a cada $\varepsilon > 0$; podemos asociarle una partición P_n tal que $|S_n(f) - s_n(f)| < \varepsilon$, entonces es posible calcular el área de la región acotada por las curvas $y = 0$ $x = a$, $x = b$ y $y = f(x)$. Y más aún, esto significa que cuando $\epsilon \to 0$ entonces $n \to \infty$ y $|S_n(f) - s_n(f)| \to 0$.

Así pues cuando $S_n(f) = s_n(f)$ siempre que haya por lo menos tantos subintervalos como números naturales. Desde esta perspectiva el área A acotada por dichas curvas que definida por:

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\right]$$

O bien

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n(f) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} m_k(f)\right]$$

Esta idea intuitiva el área de regiones acotadas por curva constituyen la base para para la comprensión del concepto de integral, la construcción de dichas bases no puede ser si no es a través de la comprensión del concepto de infinito.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Luego de haber analizado el concepto de infinito, su evolución a lo largo de la Historia y el hecho de haber hecho énfasis en sus diversas apariciones en los contenidos en las distintas áreas de la matemática; es indudable que el infinito juega un papel preponderante en las Matemáticas actuales cuya comprensión ha sido posible gracias a la visión matemática que se tiene de tan maravilloso concepto.

Es posible distinguir dos tipos de infinito; por una parte, el infinito potencial que hace referencia a una realidad asociada a la inexistencia de límites, es decir, a lo que no tiene fin, a lo interminable a lo que siempre se puede continuar.

Por otra parte, el Infinito actual o Infinito matemático que surge de la consideración del infinito potencial como un proceso acabado, completo o sea cuando se alcance los límites.

La diferencia entre ambos es que el infinito potencial generalmente surge a temprana edad, producto de la vivencia de fenómenos cotidianos, como los procesos cíclicos interminables, por lo que no genera ningún tipo de conflictos; sin embargo, el infinito matemático aparece en contextos conflictivos y posterior edad, precisamente cuando la lógica entra en contradicción con la intuición, por ejemplo, al considerar que el todo puede ser igual a una de sus partes.

Se recomienda a los profesores de matemáticas en los distintos niveles, abordar situaciones didácticas que exijan el razonamiento sobre el concepto de infinito matemático; no se trata de definir literalmente un concepto de infinito, sino de la toma de conciencia sobre las características de un conjunto infinito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARISTÓTELES, Física. Biblioteca Clásica Gredos Nº 203, Madrid, 1995.
2. ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., & GÓMEZ, P. Ingeniería didáctica en educación matemática **1995**
3. ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., & GÓMEZ, P. La Enseñanza de los Principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática. 1995.
4. BOLZANO B. Las Paradojas del Infinito. Colección MATHEMA, Traducción del original de 1851. México 1991.
5. CARL B. BOYER. Historia de las Matemáticas. Madrid, Alianza Editorial. Madrid, Alianza. 2010
6. CRESPO CRESPO, C. Un paseo por el Paraíso de Cantor: Problemas y reflexiones sobre el infinito. México 2006.
7. ELI MAOR. To Infinity and Beyond. A Cultural of the Infinity, USA 1991.
8. FEDRIANI, E., & TENORIO, A. Matemáticas del Más Allá: el Infinito. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática 2010.
9. HITT FERNANDO. El Concepto de Infinito: Obstáculo en el Aprendizaje de Límite y Continuidad de Funciones. México 2004.
10. GARBIN, S. ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. México 2005.
11. GARBIN, S. Incoherencias y Conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. México 2003.

12. HIDALGO ERIC. Desarrollo Conceptual del Cálculo. 2013.
13. JORGE LUIS BORGE. Otras Inquisiciones. Argentina 1944 y 1952.
14. JOSÉ DE JESÚS MARTÍNEZ. Aleph - Cero. Introducción a la Filosofía Matemática del Infinito. Panamá 1977.
15. JOSÉ RAMÓN ORTIZ. El Concepto de Infinito. Venezuela 1994.
16. MONTORO, V. Y SCHEUER, N. Distintas Formas de Pensar el Infinito. Concepciones de Estudiantes Universitarios. México 2006.
17. PATRICIA LESTON. El Infinito en el Aula de Matemática. Un Estudio de sus Representaciones Sociales Desde la Socio Epistemología. México 2011.
18. PATRICIA LESTON. Ideas Previas A La Construcción Del Infinito En Escenarios No Escolares. México 2007.
19. RICHARD EVAN SCHWARTZ. Gallerry Of The Infinite. Brown University providence, RI 2016.
20. SERGIO JATO CANALES. El Infinito en las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria. España 2012.