

**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ  
VICE-RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO  
PROGRAMA CENTROAMERICANO  
DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA**

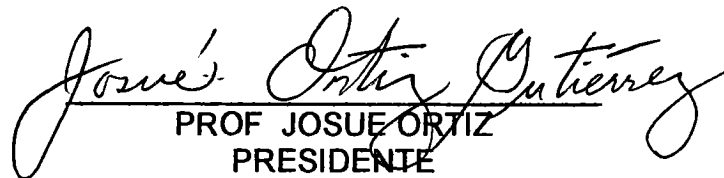
**PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN**

**POR:  
JOSÉ ANTONIO CAMARENA BERRIO**


**TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA  
OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON  
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ 1999**

APROBADO POR

  
PROF JOSUE ORTIZ  
PRESIDENTE

  
DR JORGE HERNANDEZ  
MIEMBRO

  
PROF ARSENI CORNEJO  
MIEMBRO

  
REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA  
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA 19/3/99

31 47 43

*adv. del autor*

16 JUN 1999

T. H.

DEDICATORIA

**Esta tesis la dedico**

**A mis padres, Ramón y Esther, quienes con gran esfuerzo y mucho cariño me han brindado todo el apoyo necesario para poder estar ubicado en el sitio que hoy ocupo**

**A mis hijos, José Antonio y José Ángel, quienes han sido un verdadero estímulo para la culminación de este trabajo**

**A mi esposa, Luzdilia, con mucho amor y eterno agradecimiento por ser la principal motivación de mi existencia y el eje central de todas mis actividades**

**José Antonio**

## **AGRADECIMIENTO**

Deseo expresar nuestra gratitud para las personas que hicieron posible la realización de esta tesis

Al profesor Josué Ortiz Gutiérrez, asesor de este trabajo por sus sabias orientaciones académicas

Al Doctor Jorge E Hernández quien, como amigo, se merece mi profundo respeto, admiración y una eterna gratitud, ya que ha sido pilar fundamental en la realización de este trabajo, principalmente, por su aporte en las secciones donde encontramos matemática más elevada, y por poner a mi disposición una nutrida bibliografía altamente especializada y actualizada

A todos mis compañeros de estudios con quienes compartí gratos momentos

José Antonio

## ÍNDICE

	Página
Dedicatoria	II
Agradecimiento	IV
Resumen/Abstract	IX
Introducción	XII
<b>CAPÍTULO I. CONCEPTOS PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
1 1 Introducción	2
1 2 Relaciones y Funciones	2
1 3 Imagen e Imagen Inversa por una función	7
1 4 Restricción y Extensión de funciones	8
1 5 Composición de funciones Funciones Biyectivas	12
1 6 Familia de Conjuntos	16
1 7 Cubrimientos y Particiones	21
1 8 Relaciones de Orden	23
1 9 Relaciones de Equivalencia	34
1 10 Cardinalidad	36
1 11 Función de Elección	46
<b>CAPÍTULO II. EL AXIOMA DE ELECCIÓN</b>	<b>50</b>
2 1 Introducción	51
2 2 Distintas formas del Axioma de Elección	53

	Página
2 3 Proposiciones equivalentes al Axioma de Elección	60
2 3 1 El postulado de la Buena Ordenación	60
2 3 2 El Lema de Zorn	65
2 3 3 El Lema de Tukey	70
2 3 4 El Principio de Maximalidad de Hausdorff	74
2 4 Ejemplos de aplicación del Axioma de Elección	76
<b>CAPÍTULO III. PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN .....</b>	<b>85</b>
3 1 Importancia del Axioma de Elección en Matemática	86
3 2 Propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección en la Licenciatura en Matemática	90
3 2 1 El Axioma de Elección en el Primer Año de la Licenciatura en Matemática	91
3 2 2 El Axioma de Elección en el Segundo Año de la Licenciatura en Matemática	93
3 2 3 El Axioma de Elección en el Tercer Año de la Licenciatura en Matemática	96
3 2 4 El Axioma de Elección en el Cuarto Año de la Licenciatura en Matemática	98
Conclusiones y Recomendaciones	100
Bibliografía	103

**RESUMEN/ABSTRACT**

## RESUMEN

El presente trabajo está dirigido al estudio de un axioma, el cual cambió la forma en que los matemáticos enfocaban la matemática, desde su aparición a comienzos del siglo XX. Aún hoy, dicho axioma es objeto de estudio y ha sido formulado en diversas formas, todas ellas equivalentes entre sí. Nos referimos al **Axioma de Elección**. Este axioma establece la posibilidad de construir un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada miembro de una familia de conjuntos no vacíos. El problema es que dicho axioma no provee una regla específica mediante la cual pueda realizarse dicha selección y por ello causó preocupación y rechazo entre los más grandes matemáticos de la época.

Para un mejor entendimiento, hemos organizado nuestro reporte en tres capítulos. El capítulo uno trata los conceptos preliminares de la teoría de conjuntos necesarios para nuestro trabajo, tales como relaciones, funciones, familia de conjuntos, conjuntos ordenados, entre otros.

En el capítulo dos, resumimos nuestra investigación sobre el enunciado original del axioma y algunas de sus formas equivalentes más conocidas. También proveemos las demostraciones de la equivalencia entre dichas proposiciones.

Finalmente, en el capítulo tres, presentamos una propuesta sobre la manera en que debe facilitarse el aprendizaje de este axioma en la Licenciatura de Matemática en la Universidad de Panamá.

## **ABSTRACT**

The present work aims the study of an axiom which changed the way mathematicians used to approach things since it first appeared at the beginnings of the century. Even today, this axiom is being studied in about forty different equivalent forms. We are referring to **“The Axiom of Choice”**. This axiom establishes the possibility of building a set containing one and only one element of each and every member of a family of nonempty sets. The trouble is that our axiom does not provide a specific rule for carrying out such a choice and that caused a lot of concern and opposition among the working mathematician of that time.

For a better understanding of the theme, we have organized our report in three chapters. Chapter one deals with the preliminary concepts of set theory such as relations, functions, family of sets, ordered sets, among others.

In chapter two we summarized our research about the original statement of the axiom of choice and some of best known equivalent forms the axiom could take. We also provide the proofs of the equivalence of these propositions.

Lastly, in the chapter three, we present a proposal about the teaching of the axiom of choice and how it should fit within the curricula of the Bachelor Program of Mathematics at the University of Panama.

## INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad el hombre siempre ha ideado nuevos conceptos matemáticos con el propósito de hacer más entendible o que podamos ver con mayor claridad los estudios de la matemática o bien las demostraciones matemáticas, y esta tendencia se ha mantenido de manera continua hasta nuestros días. En esta dirección surge el tema que tratamos en éste trabajo de graduación titulado **“Propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección”**. Dicho axioma fue usado frecuentemente y sin mención en varias ramas de la matemática hasta 1904, cuando el matemático alemán Ernest Zermelo dio un enunciado explícito del axioma. El hecho de que el Axioma de Elección nos permite seleccionar un elemento de cada conjunto no vacío de una familia de conjuntos y formar un nuevo conjunto, lógicamente no vacío, le abre el compás para que sea utilizado en diversas ramas de la matemática, tales como Análisis, álgebra, topología, etc. Desde el punto de vista que el empleo de conjuntos no vacíos es básico o fundamental en casi todas las ramas de la matemática

Este trabajo lo hemos dividido, para su mejor estudio y comprensión en tres capítulos

En el Capítulo Primero estudiamos los conceptos preliminares, que son necesarios para entrar al estudio del tema central. Entre dichos conceptos revisamos los siguientes: relaciones y funciones, imagen e imagen inversa por una función, restricción y extensión de funciones, composición de funciones,

funciones biyectivas, familia de conjuntos, cubrimientos y particiones, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, cardinalidad y función de elección

El Capítulo Segundo está dedicado al estudio del Axioma de Elección. Aquí analizamos el enunciado original del axioma que fue presentado por Zermelo, estudiamos las distintas formas que puede tomar el Axioma de Elección, continuamos estudiando un aspecto o tema que es de especial atención y de mucha importancia en nuestra investigación, nos referimos al análisis de proposiciones equivalentes al Axioma de Elección, entre las cuales tenemos El Postulado de la Buena Ordenación, el Lema de Zorn, el Lema de Tukey y el principio de Maximalidad de Hausdorff. Finalizamos este capítulo con el estudio de algunos ejemplos de la aplicación del Axioma de Elección en distintas ramas de la matemática.

En el Capítulo Tercero presentamos una propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección en los estudios de la carrera de Licenciatura en Matemática que dicta la Universidad Nacional de Panamá. Nuestra propuesta básicamente pretende introducir el estudio del Axioma de Elección a lo largo de los cuatro (4) años de estudios de pregrado en matemática. Proponemos introducir objetivos de aprendizaje y un contenido básico en algunos programas de ciertas asignaturas, como una manera de ilustrar nuestra propuesta incluimos ciertos ejemplos especiales donde se aplica con mucha elegancia el Axioma de

Elección, como por ejemplo en la demostración de que si un espacio topológico es Contable II, entonces es separable, entre otros

Queremos dejar claro que este no es un trabajo acabado sobre el Axioma de Elección, pues en la actualidad se están dando profundas investigaciones sobre el citado tema. En nuestra investigación abordamos algunas proposiciones equivalentes al Axioma de Elección, por considerarlas que son las más importantes, sin embargo, existen otras proposiciones que no han sido citadas en nuestra obra como por ejemplo la Ley de Tricotomía, el Teorema de Numeración, etc

Es nuestro sincero deseo que este trabajo contribuya a promover el estudio del Axioma de Elección, tanto en estudiantes como docentes de matemática, pues consideramos que es un tema de gran importancia y de profundas aplicaciones en diversas ramas de la matemática, además una buena comprensión del Axioma de Elección, abre las puertas para el estudio de otros temas matemáticos tales como los números transfinitos, y la axiomatización de la Teoría de Conjuntos.

**CAPÍTULO I**  
**CONCEPTOS PRELIMINARES**

## **1.1. Introducción**

En este capítulo vamos a estudiar, formalmente y con la secuencia adecuada, todos los conceptos que son necesarios para una plena comprensión del tema central de nuestra obra que es **“El Axioma de Elección”**, de esta manera damos nuestro primer aporte para la consolidación de una propuesta fructífera en la enseñanza de tal axioma. Revisaremos diversos conceptos preliminares entre los cuales uno de especial atención es el de **“Función de Elección”** que es el primer acercamiento con nuestro eje de estudio.

## **1.2. Relaciones y Funciones**

Con el estudio del movimiento durante el siglo XVII, por parte de Galileo, Kepler y otros, las matemáticas obtuvieron un concepto fundamental que fue central en prácticamente todo el trabajo de los siguientes doscientos años, “el concepto de función o relación entre variables”. Es pues este concepto verdaderamente universal y abarca casi todos los aspectos de las matemáticas, se puede decir con toda seguridad que no hay parte de las matemáticas donde esta noción no se presente o no desempeñe un papel principal.

El producto cartesiano de los conjuntos  $A$  y  $B$  ( en símbolos  $A \times B$  ) es el conjunto de todos los pares ordenados  $(x, y)$  de modo que  $x \in A$  y  $y \in B$

Por ejemplo, si

$$A = \{ 1, 2 \} \quad y \quad B = \{ a, b \}$$

Entonces

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \}$$

Formalmente, tenemos

**DEFINICIÓN 1.1.:** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera, el producto cartesiano entre ambos conjuntos se define de la siguiente manera .

$$A \times B = \{ (x, y) \text{ tal que } x \in A \text{ y } y \in B \}$$

Una parte  $\mathbf{R}$  del producto cartesiano  $A \times B$  define una relación entre ciertos elementos de ambos conjuntos. Decir que  $(x, y)$  pertenece a la relación  $\mathbf{R}$  equivale a expresar que  $x$  está relacionado con  $y$ , indicamos esto poniendo como siempre  $(x, y) \in \mathbf{R}$ , o bien con la notación más usual  $x \mathbf{R} y$

Formalmente, tenemos

**DEFINICIÓN 1.2.:** Expresar que  $\mathbf{R}$  es una relación, es equivalente a decir que para todo  $z \in \mathbf{R}$  implica que existen los elementos  $x$  e  $y$  tal que

$$z = (x, y)$$

Para indicar que  $x$  no está en relación con  $y$  usaremos la notación  $\sim (x \mathbf{R} y)$

**DEFINICIÓN 1.3.:** Sea  $\mathbf{R}$  cualquier relación. Definiremos el dominio de  $\mathbf{R}$  como el conjunto

$$Dom(\mathbf{R}) = \{ x \mid (x, y) \in \mathbf{R}, \text{ para algún } y \}$$

y definiremos el rango de  $\mathbf{R}$  como el conjunto

$$Rang(\mathbf{R}) = \{ y \mid (x, y) \in \mathbf{R}, \text{ para algún } x \}$$

El símbolo  $\mathbf{R}^{-1}$  denota la relación inversa de  $\mathbf{R}$  que definiremos por

$$\mathbf{R}^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in \mathbf{R} \}$$

Definir una relación binaria en un conjunto  $\mathbf{A}$  es dar una parte del producto cartesiano  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ . De esta manera si  $\mathbf{R}$  es una relación binaria definida en un conjunto  $\mathbf{A}$  y si  $(x, y) \in \mathbf{R}$  esto indica que  $x \in \mathbf{A}$  y  $y \in \mathbf{A}$ . Las relaciones binarias juegan un papel importante en el estudio de diversos conceptos matemáticos.

Sean  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  dos relaciones binarias definidas en un conjunto  $\mathbf{A}$ . Se dice que la relación  $\mathbf{R}_2$  es más fina que  $\mathbf{R}_1$  (o  $\mathbf{R}_1$  es menos fina que  $\mathbf{R}_2$ ) si

$(x, y) \in \mathbf{R}_1$  implica que  $(x, y) \in \mathbf{R}_2$ , es decir, si  $\mathbf{R}_2$  contiene al menos todas las parejas de  $\mathbf{R}_1$

Adviértase que  $\mathbf{R}_2$  es más fina que  $\mathbf{R}_1$  si y sólo si  $\mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2$

Por otro lado, si además  $\mathbf{R}_2$  contiene alguna pareja no contenida en  $\mathbf{R}_1$ , entonces se dice que  $\mathbf{R}_2$  es estrictamente más fina que  $\mathbf{R}_1$

Llamaremos fibra posterior (brevemente post-fibra) de un elemento  $a \in \mathbf{A}$ , referente a una determinada relación binaria  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{A}$ , al conjunto que designaremos con el símbolo  $\mathbf{R}(a)$  constituido por todos los elementos  $x$  tales que  $(a, x) \in \mathbf{R}$ . Nótese que como  $\mathbf{R}$  es una relación binaria tenemos que  $x \in \mathbf{A}$

Podemos definir la post-fibra global de un conjunto  $\mathbf{S}$  del dominio de la relación, como el conjunto  $\mathbf{R}[\mathbf{S}] = \bigcup_{a \in \mathbf{S}} \mathbf{R}(a)$ , es decir, la unión de las post-fibras de todos los miembros de  $\mathbf{S}$

De modo análogo puede definirse la pre-fibra de un elemento  $a \in \mathbf{A}$ , como el conjunto que designaremos por  $\mathbf{R}^{-1}(a)$ , constituido por todos los

elementos "y" tales que  $(y, a) \in \mathbf{R}$ . Nótese que la pre-fibra de un elemento, referente a una relación  $\mathbf{R}$ , es la post-fibra del mismo elemento referente a la relación  $\mathbf{R}^{-1}$ , es por esta razón que algunos autores dicen fibra y fibra recíproca en vez de post-fibra y pre-fibra

Hablar de producto de relaciones es equivalente a referirse a la composición de relaciones. De manera que si  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  son dos relaciones, definiremos la composición de  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  por la relación

$$\mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2 = \{ (x, z) \text{ para algún "y", tal que } (x, y) \in \mathbf{R}_1 \text{ y } (y, z) \in \mathbf{R}_2 \}$$

Por otro lado, si  $\mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2$ , entonces decimos que  $\mathbf{R}_2$  es una extensión de  $\mathbf{R}_1$  y que  $\mathbf{R}_1$  es una restricción de  $\mathbf{R}_2$

**DEFINICIÓN 1.4.:** Un conjunto  $G$  es una gráfica si sus elementos son pares ordenados. Si  $G$  es una gráfica y  $(x, y) \in G$ , se dice que "y es el correspondiente de x por G"

**DEFINICIÓN 1.5.:** Se dice que una gráfica  $F$  es una "gráfica funcional" si, para todo  $x$  en el dominio de  $F$ , existe a lo sumo un objeto correspondiente a  $x$  por  $F$

**DEFINICIÓN 1.6.:** Decir que  $f$  es una función equivale a decir que  $f$  es una relación tal que para todo  $a, b, c$ , si  $(a, b) \in f$  y  $(a, c) \in f$  implica que  $b = c$

La definición anterior quiere decir que si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos, una función o aplicación de  $A$  en  $B$ , denotado  $f: A \rightarrow B$ , es una regla que asigna a cada elemento  $x \in A$  un elemento único  $y \in B$ , denotado por  $y = f(x)$

Algunos autores emplean el concepto de relación singularmente valuada, para definir el de función. Una relación  $f$  se dice que es singularmente valuada si  $(x, y) \in f$  y  $(x, z) \in f$  implica que  $y = z$ , de tal manera que una relación singularmente valuada es llamada una función

### 1.3. Imagen e Imagen Inversa por una función.

Se dice que  $f$  es una función o aplicación de  $A$  en  $B$  o que  $f$  está definida en  $A$  y toma sus valores en  $B$ , lo que se suele abreviar escribiendo  $f: A \rightarrow B$ . De la definición de función, se deduce que para cada  $x \in A$  existe exactamente un objeto correspondiente a  $x$  por  $f$ , a este objeto se le llama el "valor de  $f$  en el elemento  $x$  de  $A$ " y se le designa por  $f(x)$  o por  $f_x$ , se dice también que una función  $f$  definida en  $A$  "transforma  $x$  en  $f(x)$ ", o que " $f(x)$  es el transformado de  $x$  por  $f$ ", o la imagen de  $x$  por  $f$ , y se indica en forma

abreviada escribiendo  $x \rightarrow f(x)$ . Para indicar que el elemento  $y$  de  $B$  es el correspondiente a  $x$  por  $f$  se suele escribir  $xfy$  ó  $y = f(x)$ . Al conjunto de partida  $A$ , se le llama "dominio de  $f$ ", mientras que al conjunto de llegada  $B$ , se le denomina "codominio", "contradominio" o "rango" de  $f$ , y a la imagen del conjunto de partida  $A$  por  $f$ , se le llama "imagen de  $f$ ". La imagen por  $f$  de un subconjunto  $X$  de  $A$  es un subconjunto  $Y$  de  $B$ , a saber, el conjunto

$$Y = \{ y \mid y = f(x) \text{ para algún } x \in X \},$$

luego la imagen por  $f$  de  $\{x\}$  es el conjunto  $\{f(x)\} \subset B$ , conceptualmente distinto del elemento  $f(x) \in B$

**DEFINICIÓN 1.7.:** Sea  $f: A \rightarrow B$  una función,  $X$  un subconjunto de  $A$  y  $Y$  un subconjunto de  $B$ . Se llama imagen de  $X$  por  $f$  al conjunto de  $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ . Se llama imagen inversa de  $Y$  por  $f$  a la imagen de  $Y$  por la correspondencia  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , es decir,  $f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$

#### 1.4. Restricción y Extensión de funciones.

Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ ,  $X$  un subconjunto de  $A$  e  $Y$  un subconjunto de  $B$  tal que  $f(X) \subset Y$ . Definamos una función  $F$  de  $X$  en  $Y$  haciendo corresponder a cada  $x \in X$  el elemento  $f(x)$ , es decir para cada

$x \in X$  tenemos que  $x \rightarrow f(x) = F(x)$  Podemos probar que tal correspondencia  $F$  es una función, en efecto, consideremos los elementos  $a, b, c \in X$ , los cuales obviamente están en  $A$  puesto que  $X \subset A$ , supongamos que  $(a, b) \in F$  y  $(a, c) \in F$ , a sí tenemos que:

$$\text{Si } (a, b) \in F \text{ esto implica que } b = F(a) \Rightarrow b = f(a), \quad (1)$$

$$\text{Si } (a, c) \in F \text{ esto implica que } c = F(a) \Rightarrow c = f(a), \quad (2)$$

De (1) y (2), como  $f$  es una función, tenemos que  $f(a)$  es único lo que implica que  $b=c$ , esto demuestra que  $F$  es una función

**DEFINICIÓN 1.8.:** Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ ,  $X$  un subconjunto de  $A$  e  $Y$  un subconjunto de  $B$  tal que  $f(X) \subset Y$  Sea  $F$  la gráfica definida por  $F = \{ (x, f(x)) \text{ tal que } x \in X \}$  Se llama "restricción de  $f$  a  $X$  y a  $Y$ " a la función  $F: X \rightarrow Y$

Denotaremos con el símbolo  $f|_{X,Y}$  a la restricción de  $f$  a  $X$  y a  $Y$  Cuando no interesa poner en evidencia al conjunto  $Y$ , pero sí al conjunto  $X$ , se dirá que  $f|_{X,Y}$  es una restricción de  $f$  a  $X$ , y en tal caso suele usarse simplemente la notación  $f|_X$

**DEFINICIÓN 1.9.:** Sea la función  $g: A \rightarrow B$  y sea  $f$  una restricción de  $g$  Se dice que  $g$  es "extensión de  $f$  a  $A$  y a  $B$ "

Cuando no interese poner en evidencia el dominio y el contradominio de la función  $g$ , se dirá simplemente que  $g$  es una extensión de  $f$ , o que  $g$  extiende a  $f$ , y, cuando no interese poner en evidencia el contradominio de  $g$  pero sí su dominio, se dirá que  $g$  es una extensión de  $f$  a  $A$ , o que  $g$  extiende  $f$  a  $A$ .

**DEFINICIÓN 1.10.:** Se dice que dos funciones  $f$  y  $g$ , "coinciden sobre un conjunto  $X$ " si  $X$  está contenido en los dominios de ambas funciones, y si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ .

**TEOREMA 1.1.:** Una función  $g$  es una extensión de una función  $f$  si y sólo si se verifican las tres condiciones siguientes

- El dominio de  $f$  está contenido en el dominio de  $g$
- El contradominio de  $f$  está contenido en el contradominio de  $g$
- $f$  y  $g$  coinciden sobre el dominio de  $f$

**Demostración**

( $\implies$ )

Consideremos que  $g$  es una función de  $A$  en  $B$ . Como  $g$  es una extensión de  $f$ , entonces  $f$  es una restricción de  $g$ ; por la definición de restricción tenemos que existe un subconjunto  $X$  de  $A$  y un subconjunto  $Y$  de  $B$  tal que  $f(X) \subset Y \subset B$  y  $f : X \rightarrow Y$ , lo que demuestra que el dominio de  $f$

está contenido en el dominio de  $g$  y que el contradominio de  $f$  está contenido en el contradominio de  $g$ . Por otro lado, se define la gráfica  $f = \{ (x, g(x)) \text{ tal que } x \in X \}$ , esto indica que para todo  $x \in X$  se tiene que  $f(x) = g(x)$  y como  $\text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g)$ , esto implica que  $f$  y  $g$  coinciden sobre el dominio de  $f$

( $\longleftarrow$ )

Consideremos que  $g: A \rightarrow B$ ,  $\text{Dom}(f) = X$  y  $\text{Rang}(f) = Y$ , por hipótesis  $\text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g) \Rightarrow X \subset \text{Dom}(g) \subset A \Rightarrow X \subset A$ , por hipótesis  $\text{Rang}(f) \subset \text{Rang}(g) \Rightarrow Y \subset \text{Rang}(g) \subset B \Rightarrow Y \subset B$  y  $g(X) \subset Y$ . Por otro lado, tenemos que la gráfica de  $f$  es definida por

$$f = \{ (x, f(x)) \text{ tal que } x \in X \},$$

pero por hipótesis  $f$  y  $g$  coinciden sobre el dominio de  $f$ , esto implica que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in X$ , por lo tanto  $f = \{ (x, g(x)) \text{ tal que } x \in X \}$

Nótese que tenemos que

$g: A \rightarrow B$ ,  $X \subset A$  y  $Y \subset B$  tal que  $g(X) \subset Y$ .  $f$  es la gráfica definida por  $f = \{ (x, g(x)) \text{ tal que } x \in X \}$ . Esto demuestra que  $f$  es una restricción de  $g$ , es decir,  $g$  es una extensión de la función  $f$ .

Para ilustrar el concepto de extensión de funciones, veamos el siguiente ejemplo

**EJEMPLO 1.1.:** Sea  $f$  la función del conjunto  $\{0,1,2\}$  en el conjunto  $\{10,11,12\}$ , definida por

$$0 \rightarrow 10$$

$$1 \rightarrow 11$$

$$2 \rightarrow 12$$

y sea  $g$  la función del conjunto  $\{0,1,2,3,4\}$  en el conjunto  $\{10,11,12,20,21\}$  definida por

$$0 \rightarrow 10$$

$$1 \rightarrow 11$$

$$2 \rightarrow 12$$

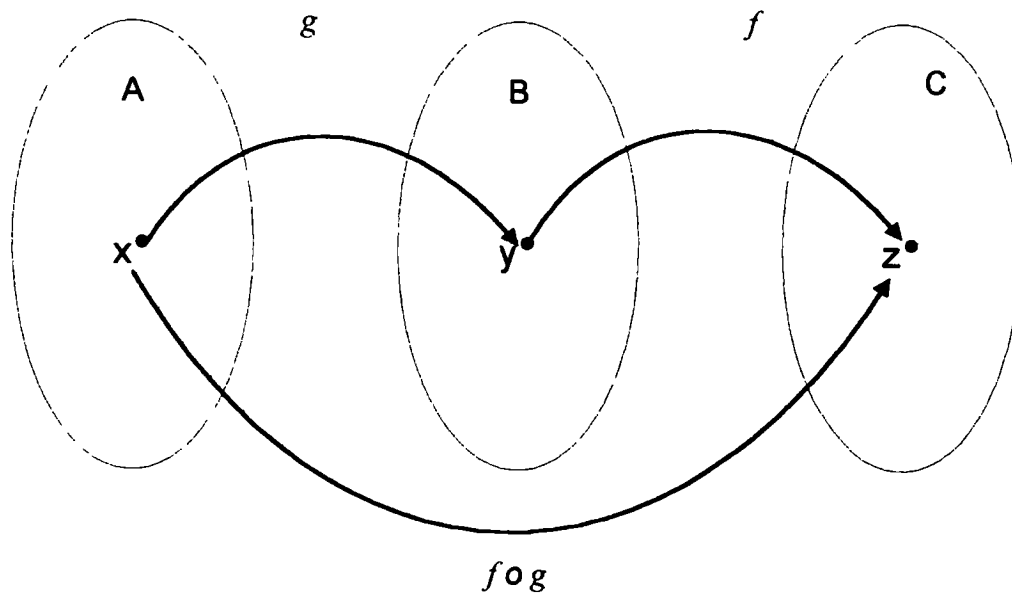
$$3 \rightarrow 20$$

$$4 \rightarrow 21$$

Luego, la función  $g$  es una extensión de  $f$  al conjunto  $\{0,1,2,3,4\}$  y a  $\{10,11,12,20,21\}$

### 1.5. Composición de funciones. Funciones Biyectivas.

**DEFINICIÓN 1.11:** Sean las funciones  $f: B \rightarrow C$  y  $g: A \rightarrow B$ . La composición de  $f$  y  $g$ , denotada por  $f \circ g$ , es una función de  $A$  en  $C$  definida por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  para todo  $x \in A$ .



Nótese que la función que se aplica primero es  $g$ , esto indica claramente que  $f \circ g$  no es siempre igual a  $g \circ f$

**DEFINICIÓN 1.12:** Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ . Se dice que  $f$  es una función inyectiva, si dos elementos distintos cualesquiera de  $A$ , tienen, por  $f$ , imágenes distintas

En símbolos  $f$  inyectiva  $\Leftrightarrow x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ . Otra forma, muy útil en las demostraciones, de caracterizar las funciones inyectivas es la siguiente

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Muchos autores utilizan la expresión “función uno a uno, abreviadamente 1-1, o también función biunívoca” para referirse a las funciones inyectivas

**DEFINICIÓN 1.13:** Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ . Se dice que  $f$  es una función suryectiva o sobreyectiva, si  $f(A) = B$

En símbolo  $f$  suryectiva  $\Leftrightarrow$  para todo  $y \in B$ , existe  $x \in A$ , tal que  $f(x) = y$

**DEFINICIÓN 1.14:** Se dice que una función  $f$  es biyectiva, si  $f$  es a la vez inyectiva y suryectiva

**TEOREMA 1.2:** Sean  $f: B \rightarrow C$  y  $g: A \rightarrow B$  dos funciones. Entonces

- i Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $f \circ g$  es inyectiva
- ii Si  $f$  y  $g$  son suryectivas, entonces  $f \circ g$  es suryectiva

**Prueba de i:**

Por hipótesis, las funciones  $f$  y  $g$  son inyectivas. Sean  $a$  y  $b$  dos elementos cualesquiera en el dominio de  $g$ , implica que  $a, b \in A$ , por la definición de composición de funciones tenemos que

$$(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$$

$$f(g(a)) = f(g(b)), \text{ como } f \text{ es inyectiva, se tiene}$$

$$g(a) = g(b), \text{ como } g \text{ es inyectiva se tiene}$$

$a = b$ , esto demuestra que  $f \circ g: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$  es inyectiva

**Prueba de ii:**

Por hipótesis, las funciones  $f: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$  y  $g: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  son suryectivas, esto quiere decir que  $f(\mathbf{B}) = \mathbf{C}$  y  $g(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ . Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\mathbf{A}) &= f(g(\mathbf{A})) \\ &= f(\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{C}, \end{aligned}$$

esto demuestra que  $f \circ g: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$  es suryectiva. Esta prueba también puede ser presentada de la siguiente manera

Sea  $z$  un elemento de  $\mathbf{C}$ , demostraremos que existe un elemento  $x \in \mathbf{A}$  tal que  $(f \circ g)(x) = z$ . En efecto, por ser  $f$  suryectiva, existe  $y \in \mathbf{B}$  tal que  $f(y) = z$ , y por ser  $g$  suryectiva, existe  $x \in \mathbf{A}$  tal que  $g(x) = y$ , pero entonces resulta que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(y) \\ &= z, \end{aligned}$$

con lo cual,  $(f \circ g)(x) = z$

**DEFINICIÓN 1.15:** Sea  $f$  una función biyectiva. Se llama función inversa de  $f$  a la correspondencia  $f^{-1}$

En la definición anterior es claro lo siguiente. Para que  $f^{-1}$  sea una función es necesario y suficiente que  $f$  sea biyectiva.

### 1.6. Familia de Conjuntos.

En muchos tópicos de la matemática es conveniente trabajar con conjuntos de conjuntos cuyos elementos están en correspondencia con elementos de un conjunto  $I$ , llamado de índices.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos arbitrarios, se dice que hay un pareamiento entre ambos conjuntos si existe una función inyectiva y sobreyectiva de uno sobre el otro.

**EJEMPLO 1.2:** Consideremos los conjuntos  $A$  y  $B$  dados por  $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$  y  $B = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$ . Un pareamiento entre  $A$  y  $B$  es definido por  $f(n) = n - 1$  para todo impar  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ . Claramente  $f: A \rightarrow B$  es una función inyectiva y suryectiva.

**EJEMPLO 1.3:** Sean  $A, B, C$  tres conjuntos y sea  $F$  el conjunto de conjuntos  $F = \{ A, B, C \}$ , eligiendo como conjunto de índices a  $I = \{ 1, 2, 3 \}$ , puede establecerse una función entre  $I$  y  $F$  definida por  $1 \rightarrow A$ ,  $2 \rightarrow B$  y  $3 \rightarrow C$ . La gráfica de esta función es  $F = \{ (1, A), (2, B), (3, C) \}$  que constituye un nuevo conjunto (de pares ordenados) construido a partir de  $I$  y  $F$ , el cual recibe el nombre de “familia de conjuntos”. Cambiando la aplicación de  $I$  en  $F$ , poniendo, por ejemplo,  $1 \rightarrow B$ ,  $2 \rightarrow A$  y  $3 \rightarrow C$ , se obtiene una nueva familia de conjuntos con el mismo conjunto de índices  $I$ , a saber, la familia  $G = \{ (1, B), (2, A), (3, C) \}$ . Se generaliza este conjunto llamando “familia” a una gráfica funcional cualquiera, el conjunto de índices será el conjunto de definición de la gráfica

**DEFINICIÓN 1.16:** Dado un conjunto  $E$ , se llama “conjunto de partes de  $E$ ” al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de  $E$

Se designa con  $P(E)$  al conjunto de partes de  $E$ . En símbolos se tiene que

$$P(E) = \{ X \mid X \subset E \}$$

**DEFINICIÓN 1.17:** Sean  $I$  y  $E$  dos conjuntos, se llama “familia de elementos de  $E$  que tiene a  $I$  como conjunto de índices” a una gráfica funcional  $F$  cuyo conjunto de definición coincide con  $I$  y cuyo conjunto de valores está contenido en  $E$ . Cuando  $E$  es un subconjunto de  $P(G)$ , para algún conjunto  $G$  se dice que  $F$  es una “familia de conjuntos de  $G$ ” o una “familia de partes de  $G$ ”

Sea  $F$  una familia de elementos de  $E$  que tiene a  $I$  como conjunto de índices, es decir,  $F$  es un conjunto de pares ordenados  $(i, x_i)$ , con  $i \in I$  y  $x_i \in E$ . Se acostumbra designar a la familia  $F$  con el símbolo  $(x_i)_{i \in I}$  ( $x_i \in E$ ), o simplemente con  $(x_i)_{i \in I}$  cuando no interesa poner en evidencia al conjunto  $E$ .

**DEFINICIÓN 1.18:** Se llama “sucesión” a toda familia cuyo conjunto de índices es el conjunto de los números naturales o uno de sus subconjuntos

**DEFINICIÓN 1.19:** Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos, y sea  $F$  su conjunto de valores. Se llama unión o reunión de esta familia a la unión de los elementos de  $F$ , es decir,

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{ x \text{ tal que para alguna } A \in F, x \in A \}$$

**DEFINICIÓN 1.20:** Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos, y sea  $F$  su conjunto de valores. Se llama intersección de esta familia a la intersección de los elementos de  $F$ , es decir,

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \left\{ x \text{ tal que para alguna } A \in F, x \in A \right\}$$

**DEFINICIÓN 1.21:** Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos. Entonces  $(X_i)_{i \in I}$  se llama una familia de carácter finito si para cada conjunto  $A$  tenemos que  $A \in (X_i)_{i \in I}$  si y sólo si cada subconjunto finito de  $A$  está en  $(X_i)_{i \in I}$ .

**EJEMPLO 1.4:** Sea  $\{ X_n \}_{n=1}^{\infty}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{N}^* = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ , una familia de conjuntos definida por

$$X_n = \left\{ x \in \mathbf{R}^* \text{ tal que } x \leq \frac{1}{n} \right\},$$

Donde  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^+ \cup \{ 0 \}$ , es decir,  $\mathbf{R}^*$  es el conjunto de los números reales no

negativos agregándole el cero, entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X_1$  y  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{ 0 \}$

En efecto, cualquiera que sea  $x \in X_2$ , implica que  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , esto implica que  $x \in [0,1] \Rightarrow x \in X_1 \Rightarrow X_1 \supset X_2$  (1), por otro lado, para cualquiera que sea

$$x \in X_3 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x \in X_2$$

$$\Rightarrow X_2 \supset X_3,$$

Con este resultado y el de (1), obtenemos que

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3,$$

Con procedimientos análogos podemos establecer que

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset X_4 \supset \dots \supset X_n \supset \dots \quad (2),$$

nótese que la inclusión en el otro sentido no se puede dar, puesto que, por ejemplo, para  $x \in X_1 \Rightarrow x \in [0,1]$ , pero puede suceder que

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow x \notin \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x \notin X_2 \Rightarrow X_2 \not\supset X_1$$

El resultado (2) nos permite concluir que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X_1$

Ahora, supongamos por el absurdo de que existe  $x \neq 0$  tal que

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , entonces  $x < 0$  no puede ser, puesto que en tal caso  $x \notin \mathbf{R}^*$ , lo que

contradice la forma como fue definida la familia de conjuntos. Queda la posibilidad de que  $x > 0$ , en este caso, si  $x, y \in \mathbf{R}$  y  $x > 0$ , entonces por la propiedad arquimediana existe  $n \in \mathbf{N}^*$  tal que  $nx > y$ , sin pérdida de generalidad. Consideremos  $y = 1$ , esto implica que

$$nx > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{n},$$

este último resultado contradice la forma como fue definida la familia de

conjuntos. Por lo tanto,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{0\}$ , ya que  $0 \in X_n$  para todo  $n$ .

### 1.7. Cubrimientos y Particiones.

**DEFINICIÓN 1.22:** Se dice que un conjunto de subconjunto de  $C$  es un cubrimiento de un conjunto  $A$  (o que cubre un conjunto  $A$ ), si  $A \subset \bigcup_{X \in C} X$ . Si  $C$

y  $C'$  son dos cubrimientos de  $A$ , se dice que  $C$  es más fino que  $C'$  (o que  $C'$  es menos fino que  $C$ ) si para todo  $X \in C$  existe  $Y \in C'$  tal que  $X \subset Y$ . Se dice también que  $C$  refine a  $C'$ , o que  $C$  es un refinamiento de  $C'$ .

**DEFINICIÓN 1.23:** Una familia de conjuntos  $(X_i)_{i \in I}$  se llama un cubrimiento de un conjunto  $A$ , si el conjunto de valores de la familia es un cubrimiento de  $A$

**DEFINICIÓN 1.24:** Sea  $F$  un conjunto de conjuntos. Se dice que los conjuntos de  $F$  son disjuntos dos a dos, si para todo par  $(X, Y) \in F \times F$  con  $X \neq Y$ , se tiene que  $X \cap Y = \phi$ .

**DEFINICIÓN 1.25:** Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos. Se dice que los conjuntos de esta familia son disjuntos dos a dos, si para todo par  $(i, j) \in I \times I$  con  $i \neq j$ , se tiene que  $X_i \cap X_j = \phi$

**DEFINICIÓN 1.26:** Se dice que un conjunto de conjuntos  $F$  es una partición de un conjunto  $A$ , si

- 1 Los conjuntos de  $F$  son subconjuntos no vacíos de  $A$
- 2  $F$  es un cubrimiento de  $A$
- 3 Los conjuntos de  $F$  son disjuntos dos a dos

### 1.8. Relaciones de Orden.

Iniciamos escribiendo las siguientes ocho definiciones básicas, en las cuales definimos ciertos tipos de propiedades de una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$

**DEFINICIÓN 1.27:**  $R$  es reflexiva en  $A$  si y sólo si para todo  $x \in A$  implica que  $x R x$

**DEFINICIÓN 1.28:**  $R$  es irreflexiva en  $A$  si y sólo si para todo  $x \in A$  implica que  $\sim (x R x)$

**DEFINICIÓN 1.29:**  $R$  es simétrica en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y \in A$ ,  $x R y$  implica que  $y R x$

**DEFINICIÓN 1.30:**  $R$  es asimétrica en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y \in A$ ,  $x R y$  implica que  $\sim (y R x)$

**DEFINICIÓN 1.31:**  $R$  es antisimétrica en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y \in A$ ,  $x R y$  y  $y R x$  implica que  $x = y$

**DEFINICIÓN 1.32:**  $R$  es transitiva en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y, z$ ,  $x R y$  y  $y R z$  implica que  $x R z$

**DEFINICIÓN 1.33:**  $R$  es conexa en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$  implica que  $x R y$  ó  $y R x$

**DEFINICIÓN 1.34:**  $R$  es fuertemente conexa en  $A$  si y sólo si para todos  $x, y \in A$ , implica que  $x R y$  ó  $y R x$

Ahora bien, en base a las definiciones anteriores, vamos a definir ciertos tipos de ordenes  $R$  sobre un conjunto  $A$ . Al par  $(A, R)$  le llamaremos conjunto dotado del orden definido en cada caso, por ejemplo, si  $R$  es un orden parcial entonces al par  $(A, R)$  lo llamaremos conjunto parcialmente ordenado, algunos autores llaman al par  $(A, R)$  estructura de orden parcial

**DEFINICIÓN 1.35:**  $R$  es un preorden en  $A$  si y sólo si  $R$  es reflexiva y transitiva en  $A$

**DEFINICIÓN 1.36:**  $R$  es un orden parcial en  $A$  si y sólo si  $R$  es reflexiva, antisimétrica y transitiva en  $A$

**DEFINICIÓN 1.37:**  $R$  es un orden simple en  $A$  si y sólo si  $R$  es antisimétrica, transitiva y fuertemente conexa en  $A$

**DEFINICIÓN 1.38:**  $R$  es un orden parcial estricto en  $A$  si y sólo si  $R$  es asimétrica y transitiva en  $A$

**DEFINICIÓN 1.39:**  $R$  es un orden simple estricto en  $A$  si y sólo si  $R$  es asimétrica, transitiva y conexa en  $A$

**DEFINICIÓN 1.40:**  $R$  es un orden total en  $A$  si y sólo si  $R$  es reflexiva, antisimétrica, transitiva y fuertemente conexa

En las definiciones anteriores empleamos la letra mayúscula  $R$  para indicar o representar la relación, en términos generales. Sin embargo, depende de la naturaleza del conjunto  $A$  para definir sobre él la relación específica  $R$ . Muy frecuentemente, en lo sucesivo, cuando nos referimos a una relación de orden  $R$ , en lugar de escribir  $x R y$  para indicar que los elementos están relacionados, pondremos  $x \leq y$  o  $y \geq x$  que se leen "x es anterior o igual a y". Cuando  $x \leq y$  y además  $x \neq y$ , escribiremos  $x < y$  o  $y > x$  que se lee "x es estrictamente anterior a y".

Con estas notaciones las condiciones para que una relación  $\leq$  sea una relación de orden parcial en un conjunto  $A$ , se escriben

- 1 Para todo  $x \in A$ , se cumple  $x \leq x$ ,
- 2  $x \leq y$  y  $y \leq x$  implica que  $x = y$ ,
- 3  $x \leq y$  y  $y \leq z$  implica que  $x \leq z$

Nótese que la relación  $\leq$  es de orden total si además de cumplir con las tres condiciones anteriores se verifica que para todo par de elementos  $x$  e  $y$  de  $A$ , se cumple  $x \leq y$  ó  $y \leq x$

**EJEMPLO 1.5:** El conjunto de los números reales  $R$  con la relación "es menor o igual que,  $\leq$ " es un conjunto totalmente ordenado. Más específicamente, escribiremos  $(R, \leq)$  para designar el conjunto  $R$  ordenado por  $\leq$

**EJEMPLO 1.6:** Para un conjunto  $E$ , la relación  $R$  definida por  $A R B$  si y sólo si  $A \subset B$ , es una relación de orden parcial. En efecto,

- 1 Para todo  $A \in P(E)$ , se tiene  $A \subset A$ ,
- 2 Si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , se tiene  $A = B$ ,
- 3 Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , se tiene  $A \subset C$

Sin embargo, el conjunto  $P(E)$  no es un conjunto totalmente ordenado con respecto a la relación de inclusión

Como equivalente a la expresión "orden total" se usa "orden lineal" y consecuentemente "conjunto linealmente ordenado" como equivalente a "conjunto totalmente ordenado"

**DEFINICIÓN 1.41:** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento  $a$  de  $A$  se llama elemento

- Minimal de  $(A, \leq)$  si para todo  $x \in A$  tal que  $x \leq a$ , se tiene  $x = a$ , o sea, que no existe un elemento  $x \in A$  tal que  $x < a$
- Maximal de  $(A, \leq)$  si para todo  $x \in A$  tal que  $a \leq x$ , se tiene  $x = a$ , o sea, que no existe un elemento  $x \in A$  tal que  $a < x$

Un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  puede no tener elementos minimales ni maximales y si los tiene, éstos no son necesariamente únicos. Sin embargo, si  $(A, \leq)$  está linealmente ordenado y tiene elemento maximal (o minimal) este es único.

**DEFINICIÓN 1.42:** Sean  $(E, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y  $A$  un subconjunto de  $E$ . Entonces

- Un elemento  $a \in E$  se llama cota inferior de  $A$  si, para todo  $x \in A$ , se tiene  $a \leq x$
- Un elemento  $b \in E$  se llama cota superior de  $A$  si, para todo  $x \in A$ , se tiene  $x \leq b$

Cuando el subconjunto  $A$  está acotado inferior y superiormente se dice simplemente que  $A$  es un conjunto acotado

**DEFINICIÓN 1.43:** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado

Entonces se dice que

- Un elemento  $a$  de  $A$  es el primer elemento o menor elemento de  $(A, \leq)$  si, para todo  $x \in A$ , se verifica  $a \leq x$
- Un elemento  $b$  de  $A$  es el último elemento o mayor elemento de  $(A, \leq)$  si, para todo  $x \in A$ , se verifica  $x \leq b$

**DEFINICIÓN 1.44:** Sean  $(E, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado y

$A$  un subconjunto de  $E$  Entonces

- Un elemento  $a$  de  $E$  es el ínfimo de  $A$  en  $(E, \leq)$  si es el mayor elemento del conjunto de cotas inferiores de  $A$ , se denota por  $\inf_E(A) = a$ , o simplemente  $\inf(A) = a$
- Un elemento  $b$  de  $E$  es el supremo de  $A$  en  $(E, \leq)$  si es el primer elemento del conjunto de cotas superiores de  $A$ , se denota por  $\sup_E(A) = b$ , o simplemente  $\sup(A) = b$

**DEFINICIÓN 1.45:** Sea  $(E, \leq)$  cualquier conjunto parcialmente ordenado. Una cadena en  $E$  es cualquier subconjunto  $C$  de  $E$  de modo que  $C$  es linealmente ordenado bajo la relación de orden dada  $\leq$  en  $E$ . Una cadena  $C$  es maximal si ninguna cadena contiene propiamente a  $C$ .

**DEFINICIÓN 1.46:** Se dice que un conjunto ordenado  $(A, \leq)$  está bien ordenado si todo subconjunto ordenado de  $(A, \leq)$ , no vacío, tiene primer elemento. Se dice que la relación de orden dada es un "buen orden" en  $A$  o que "bien ordena" al conjunto  $A$ .

En la definición anterior nos referimos al conjunto ordenado  $(A, \leq)$ , debe entenderse como conjunto parcialmente ordenado. Esta misma interpretación debe ser en lo sucesivo, cuando nos referimos a un conjunto ordenado.

**EJEMPLO 1.7:**

a) El conjunto  $\mathbf{N}$  de los números naturales está bien ordenado con el orden usual.

b) El conjunto  $\mathbf{Q}$  de los números racionales con el orden usual,  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$

si y sólo si  $ad \leq cb$ , no está bien ordenado, puesto que todo intervalo

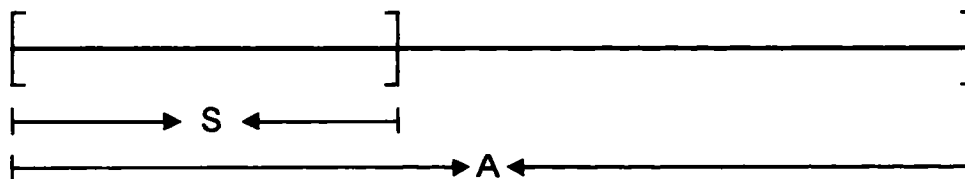
abierto racional  $\left\{ x \mid x \text{ racional, } \frac{a}{b} < x < \frac{c}{d} \right\}$ , con  $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ , carece

de primer elemento. En efecto, para todo número racional  $\frac{p}{q}$  de este

intervalo se verifica inmediatamente que  $\frac{a}{b} < \frac{a+p}{b+q} < \frac{p}{q}$

**DEFINICIÓN 1.47:** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado. Un subconjunto ordenado  $(S, \leq)$  de  $(A, \leq)$  es un segmento de  $(A, \leq)$  si para todo  $x \in S$   $y \in A$  tales que  $y \leq x$ , se cumple que  $y \in S$ . Llamaremos al conjunto  $S$ , "conjunto subyacente" del segmento  $(S, \leq)$ .

Obsérvese que la definición anterior no permite que exista un elemento  $y \in A$  tal que para todo  $x \in S$ ,  $y \leq x$  y  $y \notin S$ , o sea, intuitivamente que  $S$  comienza cuando comienza  $A$ . Una representación particular de esta situación es la siguiente



Con referencia a segmentos de un conjunto ordenado, siempre que no conduzca a confusión nos permitiremos los siguientes abusos de lenguaje. Hablaremos de unión (intersección, etcétera) de segmentos de  $(A, \leq)$  refiriéndonos a la unión (intersección, etcétera) de los conjuntos subyacentes. También hablaremos de una aplicación de un segmento de  $(A, \leq)$  en un

conjunto  $B$ , cuando en realidad se trata de una aplicación del conjunto subyacente de un segmento de  $(A, \leq)$  en  $B$

**TEOREMA 1.3:** Sean  $(A, \leq)$  un conjunto bien ordenado,  $(S, \leq)$  un segmento de  $(A, \leq)$  tal que  $S \neq A$  y sea  $a$  el primer elemento de  $(A-S, \leq)$ . Entonces  $S$  coincide con el conjunto de los elementos de  $A$  que preceden estrictamente a  $a$  ( $S = \{ x \in A \text{ tal que } x < a \}$ )

**Demostración:**

Para todo  $x \notin S$  se tiene, por definición de primer elemento,  $a \leq x$  y recíprocamente, si  $a \leq x$  se tiene que  $x \notin S$ , pues en caso contrario, siendo  $(S, \leq)$  segmento de  $(A, \leq)$ , se tendría que  $a \in S$  lo cual es absurdo. Por tanto,

$$A-S = \{ x \in A \mid a \leq x \} \quad \text{De donde} \quad S = \{ x \in A \text{ tal que } x < a \}$$

**NOTACIÓN 1.1:** Designaremos con  $S_a$  al conjunto siguiente  $\{ x \text{ tal que } x < a \}$  y con  $\bar{S}_a$  al conjunto ordenado  $(S_a, \leq)$ . Se dirá que  $\bar{S}_a$  es el "segmento de extremo  $a$ " en  $(A, \leq)$

**COROLARIO 1.1:** Si  $(S, \leq)$  y  $(P, \leq)$  son dos segmentos de un conjunto bien ordenado  $(A, \leq)$  se cumple que  $S \subset P$  ó  $P \subset S$

**TEOREMA 1.4:** Sea  $(X_i, R_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos bien ordenados tales que, para todo par de índices  $i, j$  uno de los conjuntos ordenados  $(X_i, R_i), (X_j, R_j)$  es un segmento del otro. Entonces la relación  $x R y$  si y sólo si  $x R_i y$  para algún  $i$  tal que  $x, y \in X_i$ , es un buen orden en  $E = \bigcup_{i \in I} X_i$ , que induce sobre cada  $X_i$  el orden dado. Todo segmento de  $(E, R)$  coincide con  $(E, R)$  o es un segmento de algún  $(X_i, R_i)$ .

**Demostración:**

Veremos primeramente que  $R$  es un orden en  $E$ . Si  $x \in E$ , existe  $i \in I$  tal que  $x \in X_i$ , con lo cual,  $x R_i x$  y consecuentemente  $x R x$ . Si  $x, y \in E$  y además  $x R y, y R x$ , existen índices  $i, j \in I$  tales que  $x R_i y, y R_j x$ . Puesto que, por hipótesis,  $(X_i, R_i)$  es un segmento de  $(X_j, R_j)$ , o viceversa, entonces existe un índice  $k$  ( $k = i$  ó  $k = j$ ), tal que  $x R_k y, y R_k x$ , de donde  $x = y$ . Finalmente, si  $x, y, z \in E$  y  $x R y, y R z$ , puede encontrarse, con el mismo razonamiento, un índice  $k$  tal que  $x R_k y, y R_k z$  de donde  $x R_k z$ , y por lo tanto  $x R z$ . Con esto hemos demostrado que  $R$  es un orden parcial en  $E$ , puesto que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

La relación  $R$  induce, evidentemente, el orden  $R_i$  en cada conjunto  $X_i$  y es un orden total. Demostraremos ahora que  $E$  con la relación de orden  $R$  está bien ordenado. En lo que sigue indicaremos con  $\leq$  al orden  $R$ .

Sea  $F$  una parte no vacía de  $E$ , luego para algún  $i \in I$ , se tiene  $F \cap X_i \neq \emptyset$ . Puesto que cada  $(X_i, R_i)$  es un conjunto bien ordenado, entonces  $F \cap X_i$  con el orden inducido tiene un primer elemento al cual llamaremos  $a_0$ . Probemos que  $a_0$  es también primer elemento de  $(F, \leq)$ , en efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe  $x \in F$  tal que  $x < a_0$  luego  $x \notin X_i$ . Sea  $X_j$  un conjunto de la familia dada al cual pertenece  $x$ , entonces de acuerdo con la hipótesis del teorema  $(X_i, R_i)$  es un segmento de  $(X_j, R_j)$ , o viceversa, pero como  $a_0 \in X_i$  y  $x < a_0$  se tiene que  $x \in X_i$ , en contradicción con lo afirmado anteriormente.

Para probar la última parte del teorema, sea  $(S, \leq)$  un segmento de  $(E, \leq)$ , con  $S \neq E$ . De acuerdo con el teorema 1.3  $S$  coincide con  $S_x = \{ y \mid y < x \}$ . Sea  $X_i$  tal que  $x \in X_i$ . Si  $y < x$  por definición del orden  $R$  en  $E$ , puede encontrarse  $X_j$  tal que  $x, y \in X_j$  y además  $y R_j x$ . Si  $(X_j, R_j)$  es un segmento de  $(X_i, R_i)$  es  $y \in X_i$ , en caso contrario debe ser  $(X_j, R_j)$  un segmento de  $(X_i, R_i)$ , pero como  $y \in X_j$ , resulta también  $y \in X_i$ . Por tanto  $S_x \subset X_i$ . Finalmente el orden inducido por  $X_i$  sobre  $S$  es obviamente el mismo que el inducido por  $E$  sobre  $S$ . Esto prueba que  $(S, \leq)$  es un segmento de  $(X_i, R_i)$ .

### 1.9. Relaciones de Equivalencia.

**DEFINICIÓN 1.48:** Sea  $A$  un conjunto. Una relación de equivalencia en  $A$  es cualquier relación, que denotaremos  $R$ ,  $R \subset A \times A$ , de modo que para todo  $x, y, z$  en  $A$  tenemos

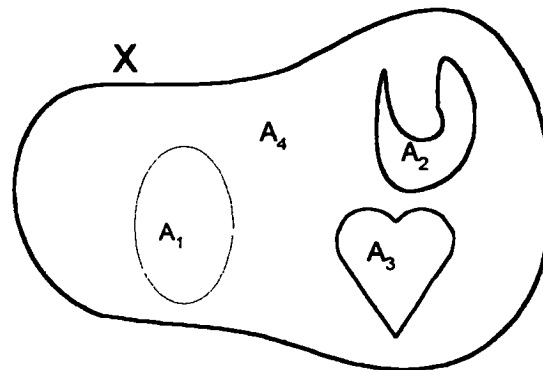
- (1)  $x R x$  (Reflexiva),
- (2)  $x R y$  implica  $y R x$  (Simétrica),
- (3)  $x R y$  y  $y R z$  implica  $x R z$  (Transitiva)

Otra forma de estudiar la relación equivalencia es por medio del concepto de partición de un conjunto. Dado un conjunto  $A$ , consideremos una partición de dicho conjunto, es decir, supongámoslo descompuesto en subconjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, de manera que cada elemento de  $A$  pertenece a uno y sólo uno de estos subconjuntos, a los cuales llamaremos "clases de la partición". Observe que no tendría sentido el hecho de que el conjunto  $A$  sea vacío.

Toda partición de un conjunto  $A$  permite definir en éste una relación denominada relación de equivalencia. Las parejas de la relación son las integradas por elementos de la misma clase de la partición. Diremos que dos elementos relacionados de este modo, es decir, pertenecientes a la misma clase son equivalentes.

**EJEMPLO 1.8:** En la figura que se muestra seguidamente, la partición del conjunto  $X$  consta de cuatro clases. Para que estas clases sean efectivamente disjuntas dos a dos, debemos suponer que los contornos de las figuras  $A_1, A_2, A_3$  son partes respectivamente incluidas en las mismas y no tienen en cambio ningún punto en común con  $A_4$ , que es la parte sobrante de

$X$ . Es evidente que  $X = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ ,



**EJEMPLO 1.9:** Consideremos la partición del conjunto de los números enteros positivos en tres clases. La de los números que divididos por 3 dan, respectivamente, restos de 0,1,2. Las tres clases son.

$$A_0 = \{ 0, 3, 6, 9, 12, \dots \},$$

$$A_1 = \{ 1, 4, 7, 10, 13, \dots \},$$

$$A_2 = \{ 2, 5, 8, 11, 14, \dots \}.$$

Nótese que  $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \mathbb{Z}^*$  Esta relación se llama congruencia respecto al módulo 3, para indicar, por ejemplo, que 6 y 9 son congruentes se escribe  $6 \equiv 9 \pmod{3}$

### 1.10 Cardinalidad.

Para estudiar la cardinalidad contamos con las importantes aportaciones del matemático alemán **Gottlob Frege** (1848-1925), quien escribió una serie de obras sobre los fundamentos de la aritmética. En tales obras aborda el concepto de número cardinal, e intenta dar a esta noción un sentido más preciso que el de **Cantor**. Tiene la idea de tomar como definición de cardinal de un conjunto  $A$  el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con  $A$  y, para ello, introduce el término "equinúmero" para la relación entre dos conjuntos que son tales que las clases determinadas por ellos pueden ponerse en correspondencia biunívoca.

La cardinalidad trata de medir el tamaño de un conjunto. Al estudiar los conjuntos finitos e infinitos, surgen algunas preguntas que verdaderamente nos ponen a meditar: ¿Qué tan grande puede ser el finito? ¿Dónde se separa el finito del infinito?

**DEFINICIÓN 1.49:** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Se dice que  $A$  y  $B$  tienen la misma cardinalidad si y sólo si existe una función biyectiva  $f: A \rightarrow B$ . En este caso escribimos  $A \sim B$ , que se lee "A es equipotente con B".

Nótese que la definición anterior es equivalente a decir que se verifican las dos condiciones siguientes:

- i.  $A \sim B$  bajo la función  $f$  si y sólo si  $f$  es una función 1-1 cuyo dominio es  $A$  y cuyo rango es  $B$ .
- ii.  $A \sim B$  si y sólo si existe una función  $f$  de modo que  $A \sim B$  bajo  $f$ .

**DEFINICIÓN 1.50:** El número cardinal de un conjunto  $A$ , denotado  $Card(A)$ , se define como la clase de todos los conjuntos equipotentes con  $A$ , es decir,

$$Card(A) = \{ B \text{ tal que } B \sim A \}$$

Es evidente que para cualquiera que sean los conjuntos  $A$  y  $B$  resulta que

$$Card(A) = Card(B) \text{ si y sólo si } A \sim B$$

**PROPIEDADES 1.1:** La relación de equipotencialidad tiene las siguientes propiedades que le dan carácter de una relación de equivalencia

- (1)  $A \sim A$  para todo conjunto  $A$  (Reflexiva),
- (2) Si  $A \sim B$  entonces  $B \sim A$  (Simétrica),
- (3) Si  $A \sim B$  y  $B \sim C$  entonces  $A \sim C$  (Transitiva)

**DEFINICIÓN 1.51:** Para cada número entero positivo  $n$  definimos  $J_n = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$ . Sea  $A$  un conjunto cualquiera, definamos

- (1)  $A$  es finito si existe un entero positivo  $n$  de modo que  $A \sim J_n$ .
- (2)  $A$  es infinito si  $A$  no es finito
- (3)  $A$  es enumerable si  $A \sim \mathbf{N}$ , o también en el caso de que  $A$  sea equipotente con una parte (propia o no) del conjunto  $\mathbf{N}$ , de los números naturales. En este caso algunos autores dicen que el conjunto  $A$  es contable
- (4)  $A$  es no enumerable si  $A$  no es finito ni enumerable
- (5)  $A$  es infinito enumerable si  $A \sim \mathbf{N}$

Algunos autores dicen. Un conjunto  $A$  se llama "finito" si es vacío o si es equipotente con un intervalo natural  $[1, n]$ , y se llama "infinito" en caso contrario

Si el conjunto  $A$  es equipotente con el intervalo natural  $[1, n]$  se designará con  $n$  a su número cardinal, es decir,  $Card(A) = n$  si y sólo si  $A \sim [1, n]$ . A los cardinales de conjuntos infinitos se les llama infinitos o transfinitos.

**DEFINICIÓN 1.52:**  $x$  es un número cardinal si y sólo si existe un conjunto  $A$  de modo que  $Card(A) = x$ .

Decimos que  $A$  es menos numeroso que  $B$  si  $A$  es equipotente con un subconjunto de  $B$ , y se denota por  $A < B$  o  $B > A$ . En otras palabras,  $B > A$  significa que existe una función 1-1 de  $A$  sobre  $B$ .

**PROPOSICIÓN 1.1:**  $A$  es un conjunto infinito si y sólo si existe un subconjunto propio  $B$  de  $A$  tal que  $A \sim B$ .

**Demostración**

( $\Leftarrow$ ) Sea  $A$  un conjunto y  $B$  un subconjunto propio de  $A$  tal que  $A \sim B$ . Entonces existe una función  $f: A \rightarrow B$  biyectiva de modo que  $Card(A) = Card(B)$ . Por otro lado si  $A$  es un conjunto pueden suceder dos casos

- (1)  $A$  es finito
- (2)  $A$  es infinito

Si  $A$  es finito entonces existe un entero positivo  $m$  tal que  $A \sim J_m$ .  
 Como  $B \subset A$  implica que  $B$  es finito, luego existe un entero positivo  $n$  de modo que  $B \sim J_n$ . Ahora bien, como por hipótesis  $A \sim B$ , y empleando la propiedad simétrica y transitiva para la relación de equipotencialidad, tenemos

$$J_m \sim A \text{ y } A \sim B \Rightarrow J_m \sim B,$$

Por otro lado se tiene

$$J_m \sim B \text{ y } B \sim J_n \Rightarrow J_m \sim J_n,$$

Esto implica que  $m = n$ . Por consiguiente  $A$  y  $B$  tienen el mismo número de elementos, esto implica que  $B$  no es un subconjunto propio de  $A$ , lo cual contradice la hipótesis. Esto demuestra que  $A$  no puede ser finito, por lo tanto  $A$  es infinito.

( $\implies$ ) Supongamos que  $A$  es infinito. Pueden suceder dos casos

(1)  $A$  es enumerable

(2)  $A$  es no enumerable .

Si  $A$  es enumerable, esto implica que  $A \sim \mathbb{N}$ , de manera que existe una función biyectiva  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ , lo que implica que  $f(\mathbb{N}) = A$ . Como  $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ , implica que  $f(2\mathbb{N}) \subset f(\mathbb{N})$ , de manera que la función  $f: 2\mathbb{N} \rightarrow f(2\mathbb{N})$  es biyectiva, entonces  $2\mathbb{N} \sim f(2\mathbb{N})$ . Como  $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$  (para probar esto basta definir la función biyectiva  $g(n) = 2n$ , y  $\mathbb{N} \sim A$ , entonces  $2\mathbb{N} \sim A$ ). Por consiguiente,  $A \sim f(2\mathbb{N})$ . Luego,  $f(2\mathbb{N})$  es un subconjunto propio de  $A$  tal que  $A \sim f(2\mathbb{N})$ .

Si  $A$  es infinito no enumerable, entonces existe un subconjunto de  $A$ , que llamaremos  $F$ , equipotente con  $\mathbb{N}$ . Sea  $F = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  de manera que todos los elementos de  $F$  son distintos entre sí. Sea  $B = A - \{x_1\}$  y  $f$  una función de  $A$  en  $B$ , definida de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (A - F) \\ x_{n+1} & \text{si } x = x_n \end{cases}$$

Observe que  $\text{Dom}(f) = A$  y  $\text{Rang}(f) = B$ , además  $B \subset A$  y  $B \neq A$ , esto nos dice que  $B$  es un subconjunto propio de  $A$ . Probaremos que  $f$  es una función biyectiva, como sigue

Supongamos que  $f(x) = f(y)$ . Si  $x \in F$ , entonces existe un número natural  $m$  tal que  $x = x_m$ , si  $y \in F$ , entonces existe un número natural  $n$  tal que  $y = x_n$ . Como  $f(x) = f(y)$ , implica que  $f(x_m) = f(x_n) \Rightarrow x_{m+1} = x_{n+1}$ , pero como los elementos de  $F$  son distintos entre sí, esto implica que  $m+1 = n+1$ , de donde  $m = n \Rightarrow x = x_m = x_n = y \Rightarrow x = y$ .

Supongamos que  $x \neq y$ . Si  $x \in F$ , entonces existe un número natural  $m$  tal que  $x = x_m$ , si  $y \in (A - F)$ , implica que  $f(y) = y$ , de donde  $f(y) \in (A - F)$  y  $f(x) = x_{m+1} \in F$ , entonces  $f(x) \neq f(y)$ . Por otro lado, si tanto  $x$  como  $y$  son elementos de  $F$ , implica que existen números naturales  $m$  y  $n$  ( $m \neq n$ ) tales que  $x = x_m$  y  $y = x_n$ , de modo que  $f(x) = f(x_m) = x_{m+1}$  y  $f(y) = f(x_n) = x_{n+1}$ , pero como  $m+1 \neq n+1$  y los elementos de  $F$  son distintos entre sí, tenemos que

$$x_{m+1} \neq x_{n+1} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Finalmente, si tanto  $x$  como  $y$  son elementos de  $A - F$  tenemos que  $f(x) = x$  y  $f(y) = y$ , pero como por hipótesis  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$  Luego, la función  $f$  es inyectiva

Sea  $z \in B$ , entonces  $z \in (A - F)$  ó  $z \in F$

Si  $z \in (A - F)$ , implica que  $f(z) = z$

Si  $z \in F$ , entonces existe un número natural  $n \geq 2$  tal que  $z = x_n$  Como  $n \geq 2$  implica que  $n-1 \geq 1$  de donde  $x_{n-1} \in F$ , entonces  $f(x_{n-1}) = x_n = z$  Luego la función  $f$  es sobreyectiva

Así, la función  $f$  es biyectiva de  $A$  en  $B$ , esto implica que  $A \sim B$

**PROPOSICIÓN 1.2:** Todo subconjunto infinito de un conjunto enumerable es enumerable

### **Demostración**

Consideremos un conjunto enumerable  $A$ . Supongamos  $E \subset A$  y que  $E$  es infinito. Disponemos los elementos  $x$  de  $A$  en una sucesión  $\{x_n\}$  de elementos distintos, esto lo podemos hacer porque  $A$  es enumerable, es decir, porque  $A \sim \mathbb{N}$ . Construyamos una sucesión  $\{n_k\}$  como sigue. Sea  $n_1$ , el menor entero positivo tal que  $x_{n_1} \in E$ . Elegimos  $n_1, n_{k-1}$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ), sea  $n_k$  el menor entero mayor que  $n_{k-1}$  y tal que  $x_{n_k} \in E$ . Poniendo  $f(k) = x_{n_k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) obtenemos una correspondencia  $f$  1-1 entre  $E$  y  $\mathbb{N}$ . Probaremos que  $f$  es biyectiva, como sigue

Como  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots \Rightarrow n_p < n_q \Rightarrow n_p \neq n_q$ , implica que  $x_{n_p} \neq x_{n_q} \Rightarrow$

$f(p) \neq f(q) \Rightarrow$  es inyectiva

Sea  $z \in E$ , entonces existe  $n_k$  tal que  $z = x_{n_k}$ ,  $f(k) = x_{n_k} = z$ , esto

implica que  $f$  es suryectiva. Esto prueba que  $f$  es biyectiva. Luego,  $E \sim \mathbf{N}$ , de

donde  $E$  es enumerable

No deseo cerrar esta sección sin estudiar los conjuntos finitos e infinitos por medio de los elementos minimal y maximal. Este enfoque de los conjuntos en cuestión, le da un carácter de mayor formalidad a nuestro trabajo

**DEFINICIÓN 1.53:**  $X$  es un elemento minimal de  $A$ , si y sólo si,  $X \in A$ ,  $X$  es un conjunto y para todo  $B$ , si  $B \in A$  entonces  $B \not\subset X$

**DEFINICIÓN 1.54:**  $X$  es un elemento maximal de  $A$ , si y sólo si,  $X \in A$ ,  $X$  es un conjunto y para todo  $B$ , si  $B \in A$ , entonces  $X \not\subset B$

En estas definiciones es evidente que el conjunto  $A$  es un conjunto de conjuntos o bien una familia de conjuntos

**EJEMPLO 1.10:** Sean  $K_1 = \{ \{1, 2\}, \{1\}, \{3\} \}$ ,

$$K_2 = \{ \emptyset, \{1, 3\}, D \},$$

$$D = \{ 1, 2, 3 \}$$

Observe que los conjuntos  $\{1\}$  y  $\{3\}$  son elementos minimal de  $K_1$ . El conjunto  $\emptyset$  es el elemento minimal de  $K_2$ . Nótese que para cualquiera que sea la familia de subconjuntos no vacío de  $D$ , tiene un elemento minimal. Los elementos maximal de  $K_1$  son los conjuntos  $\{1, 2\}$  y  $\{3\}$ . El único elemento maximal de  $K_2$  es el conjunto  $D$ .

En el ejemplo anterior afirmamos que para cualquier que sea la familia no vacío de subconjuntos de  $D$ , tiene un elemento minimal, en efecto, esto se debe al hecho de que el conjunto  $D$  es finito. La cosa cambia cuando trabajamos con conjuntos infinitos, como vamos a ver en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 1.11:** Consideremos el conjunto  $E$  constituido por los enteros positivos y consideremos, además, la familia  $F$  de subconjuntos  $\{ E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \}$  donde  $E_n$  es

$$E - \{ 1, 2, \dots, n-1 \}$$

Veamos como se constituyen los conjuntos  $E_n$ , como sigue

Si  $E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$ , entonces

$$E_1 = E - \{ 0 \} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \},$$

$$E_2 = E - \{0, 1\} = \{2, 3, 4, 5, \dots\},$$

$$E_3 = E - \{0, 1, 2\} = \{3, 4, 5, \dots\},$$

Y así sucesivamente Como  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ , entonces no existe un conjunto  $E_k \in F$ , para algún entero positivo  $K$ , tal que para todo  $E_n$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , se verifique la condición de que  $E_n \not\subseteq E_k$ . Por consiguiente, la familia  $F$  no tiene elemento minimal Esta situación es típica de los conjuntos infinitos

**DEFINICIÓN 1.55:**  $A$  es finito si y sólo si toda familia no vacía de subconjuntos de  $A$  tiene un elemento minimal

**TEOREMA 1.5:** El conjunto vacío es finito

**TEOREMA 1.6:** El conjunto  $\{x\}$  es finito

**TEOREMA 1.7:** Si  $A$  es finito y  $B \subseteq A$ , entonces  $B$  es finito

**Demostración:**

Sea  $F$  una familia no vacía de subconjuntos de  $B$  Desde que  $B \subseteq A$ , se tiene que  $F$  es una familia no vacía de subconjuntos de  $A$ , pero como  $A$  es finito, entonces la familia  $F$  no vacía de subconjuntos de  $A$  tiene elemento minimal (por la definición anterior) Por lo tanto, la familia  $F$  no vacía de subconjuntos de  $B$  tiene un elemento minimal, entonces  $B$  es finito (por la definición anterior)

**TEOREMA 1.8:** Si  $A$  es finito, entonces  $A \cap B$  y  $A - B$  son finitos.

**Demostración:**

Desde que  $A \cap B \subseteq A$  y  $A - B \subseteq A$ , y como por hipótesis  $A$  es finito, entonces por la aplicación de teorema anterior ambos conjuntos  $A \cap B$  y  $A - B$  son finitos

### 1.11 Función de Elección.

**DEFINICIÓN 1.56:** Una función  $f$  es una función de elección para el conjunto  $A$  si y sólo si  $f$  es una función cuyo dominio es la familia de las partes no vacías de  $A$  y para cada  $B \subseteq A$ , con  $B \neq \emptyset$ ,  $f(B) \in B$ .

Si suponemos que  $A$  es un conjunto de conjuntos no vacíos. Decimos que  $f$  es una función de elección para  $A$  si el dominio de  $f$  es  $A$  y  $f(X) \in X$  para cada  $X \in A$ , es decir  $f$  selecciona un elemento de cada  $X \in A$ , denominado  $f(X)$ . Encontramos algunos conjuntos  $A$  para los cuales la existencia de una función de elección es evidente, como es el caso del siguiente ejemplo

**EJEMPLO 1.12:** Si  $A \subseteq P(\mathbb{N})$  y cada miembro de  $A$  es no vacío, podemos definir  $f(X)$  como el primer o menor miembro de  $X$  para todo  $X \in A$

Esto lo afirmamos por el hecho de que el conjunto ordenado  $(\mathbb{N}, \leq)$  está bien ordenado (Ver definición 1.46)

Contrario al ejemplo anterior, supongamos que  $A = P(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ . Aquí no podemos definir una función de elección en  $A$  definiendo  $f(X)$  como el miembro menor de  $X$ . Esto es por el hecho de que  $\mathbb{R}$  no está bien ordenado para la relación usual "menor que", y de esta manera  $X$  no necesariamente tiene un miembro menor.

**EJEMPLO 1.13:** Para familiarizarnos con este concepto de función selectora consideremos un ejemplo sencillo en el caso finito, como sigue. Sea  $A = \{1, 2\}$ , la familia de las partes no vacías de  $A$ , está constituida por los siguientes subconjuntos de  $A$ :  $B_1 = \{1\}$ ,

$$B_2 = \{2\}$$

Entonces hay dos funciones de elección distintas  $f_1$  y  $f_2$ , cuyos dominios son los subconjuntos no vacíos de  $A$ :

$$f_1(B_1) = f_2(B_1) = 1,$$

$$f_1(B_2) = f_2(B_2) = 2,$$

$$f_1(A) = 1,$$

$$f_2(A) = 2$$

Nótese que si  $f_1$  seleccionara del conjunto  $A$  el elemento 2, entonces tendríamos que  $f_1 = f_2$ . O sea que una función selecciona del conjunto  $A$  uno

de los dos elementos, la otra función tiene que seleccionar el otro elemento para que ambas funciones sean distintas

**TEOREMA 1.9:** Si  $R$  es una relación de buen orden en  $A$ , entonces  $A$  tiene una función de elección

**Demostración:**

En efecto,  $R$  es un buen orden en el conjunto  $A$  si cada subconjunto no vacío de  $A$  tiene un menor o primer elemento respecto a la relación  $R$ , esto implica que cualquier elemento de  $A$ , excepto el último, tiene un sucesor inmediato. Denotemos con  $f$  la función definida de  $P(A) - \{ \emptyset \}$  en  $A$ , la cual quedará definida por la siguiente regla

Para todo  $B \in ( P(A) - \{ \emptyset \} )$  tenemos que

$$f(B) = b$$

donde  $b$  es el mínimo de  $B$ . Esta función está bien definida y efectivamente cumple la condición de ser una función selectora para el conjunto  $A$ , ya que  $R$  es una relación de buen orden, lo cual garantiza la existencia de  $b = \text{Min}(B)$  para todo  $B \neq \{ \emptyset \}$ ,  $B \subseteq A$ .

**TEOREMA 1.10:** Todo conjunto finito tiene una función de elección

**Demostración:**

Como todo conjunto finito se puede dotar de un buen orden  $R$ , entonces por el teorema anterior queda hecha la demostración

Veamos seguidamente como es que un conjunto finito puede ser dotado de un buen orden

Sea  $A$  un conjunto finito, digamos  $A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \}$  Entonces es posible definir la función  $S: A \rightarrow J_n$  (Ver la definición 1.51) de manera biyectiva, es decir, como  $A$  es finito se tiene que  $A \sim J_n$ . Consideremos el rango de  $S$ , denotado  $S(A)$ . Como  $S(A) \subset \mathbf{N}$ , entonces  $S(A)$  se puede ordenar con el orden usual  $\mathbf{N}$ , es decir, podemos escribir a  $S(A)$  como una sucesión finita y creciente del tipo  $S(A) = \{ n_1, n_2, n_3, \dots, n_p \}$  con  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_p$ . Como  $S$  es biyectiva, podemos construir la sucesión  $S^{-1}(n_1) \prec S^{-1}(n_2) \prec S^{-1}(n_3) \prec \dots \prec S^{-1}(n_p)$  (\*), donde  $\prec$  es el orden de  $A$  definido por

Para todo  $a, b \in A$ ,  $a \prec b$  si y sólo si  $S(a) < S(b)$  en  $(\mathbf{N}, <)$ . Como  $S$  es biyectiva, la cadena (\*) incluye a todos los elementos de  $A$ , esto es, para todo  $a \in A$ , existe un  $n_k \in \mathbf{N}$ , tal que  $S(a) = n_k$ , de donde  $A$  está bien ordenado por la relación  $\prec$ .

**CAPÍTULO II**  
**EL AXIOMA DE ELECCIÓN**

## 2.1. Introducción.

Históricamente el “Axioma de Elección” fue presentado por primera vez por el matemático alemán **Ernest Zermelo** (1871 – 1953) para demostrar que cualquier conjunto puede ser provisto de un buen orden. En esta dirección emprendió en 1904 la tarea de demostrar la comparación entre los números cardinales de conjuntos que no están bien ordenados, para esta época la propiedad de ser comparados dos cardinales cualesquiera  $m$  y  $n$ , es decir, de establecer las relaciones  $m > n$ ,  $m < n$  ó  $m = n$ , no había sido demostrada. La memoria de **Zermelo** de 1904 (y la de 1908) suministraba la prueba de que cualquier conjunto podía ser bien ordenado, prueba que Cantor había intentado obtener un vano desde 1883. La demostración de Zermelo se basaba en un principio que formuló inmediatamente después de su demostración, precisamente “El Axioma de Elección”, que damos a conocer seguidamente

**AXIOMA DE ELECCIÓN:** Para todo conjunto de conjuntos  $F$  cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos existe, por lo menos, un conjunto  $Z$  que contiene un elemento y sólo uno de cada conjunto perteneciente a  $F$

En otras palabras el Axioma de Elección establece que para toda familia de conjuntos no vacíos y disjuntos, existe una función que permite escoger un

sólo elemento de cada conjunto de manera que se pueda formar un nuevo conjunto

Desde su aparición el Axioma de Elección fue motivo de una enorme controversia, en particular con **Peano**, que acusaba a **Zermelo** de no haberlo demostrado, y con varios matemáticos franceses (**Hadamard**, **Lebesgue**, **Borel** y **Baire**), que consideraban en sustancia que la función no había sido especificada, y por ello no se podía considerar este Axioma como un principio suficientemente significativo. Pero surge una excepción muy importante, **Poincaré**, consideraba este Axioma como un juicio sintético, a priori, sin el cual la teoría de los cardinales sería imposible, tanto para los conjuntos finitos como para los conjuntos infinitos. Un ejemplo popular sugerido por **Russel** sirve para identificar las circunstancias en las que el axioma de elección es necesario. En una colección infinita de pares de zapatos, este Axioma no es necesario para establecer la existencia de un conjunto escogido de forma que contenga exactamente un elemento de cada par, pues basta enunciar una regla para escoger los zapatos del pie derecho. Pero en el caso de una colección infinita de calcetines (medias), todas semejantes en cuanto a color, tamaño, etc., no se dispone de ninguna regla se debe entonces recurrir al Axioma de Elección si la afirmación consiste en decir que existe un conjunto que contiene exactamente un calcetín de cada par de la colección.

## 2.2. Distintas formas del Axioma de Elección.

En la sección anterior vimos, a manera de motivación, dos formas de presentación del Axioma de Elección, la primera que fue dada explícitamente fue la forma en que fue enunciado por primera vez por Zermelo en 1904, y que vamos a enunciar seguidamente para profundizar en ella

**FORMA 1:** Para todo conjunto de conjuntos  $F$  cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos existe, por lo menos, un conjunto  $Z$  que contiene un elemento y sólo uno de cada conjunto perteneciente a  $F$

El Axioma es demostrable cuando el conjunto  $F$  tiene un número finito de elementos. En efecto, si  $F$  es unitario, supongamos  $F = \{A\}$  siendo por hipótesis  $A \neq \emptyset$ , existe  $x \in A$  por lo tanto el conjunto  $Z = \{x\}$ , cumple el Axioma. Consideremos  $F = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$  y supongamos cierto el enunciado para conjuntos de  $n-1$  elementos. Poniendo  $F_1 = F - \{A_n\}$  resulta un conjunto  $F_1$  con  $n-1$  elementos con lo cual existe  $Z = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$ , con  $x_i \in A_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Por otra parte existe  $x \in A_n$ , ya que  $A_n \neq \emptyset$ , y definiendo  $Z_1 = Z \cup \{x\}$  se obtiene el conjunto requerido.

La novedad del Axioma de Elección radica en afirmar la existencia del conjunto  $Z$  en los casos en los que el conjunto  $F$  tiene infinitos elementos, intuitivamente, y de allí su nombre, el Axioma de Elección afirma la posibilidad de elegir un elemento en cada conjunto  $A \in F$  y con ellos formar el conjunto  $Z$ .

Si se hace corresponder a cada conjunto  $A \in F$  el elemento  $x \in A$  que está en  $Z$ , se obtiene una función  $f: F \rightarrow \bigcup_{A \in F} A$  tal que para todo  $A \in F$ , se verifica que  $f(A) \in A$ , claro, puesto que  $f(A) = x \in A$ . Recíprocamente, si dado el conjunto  $F$  se postula la existencia de una función  $f$  en esas condiciones los valores de dicha función constituyen un conjunto  $Z$  tal cual lo requiere el Axioma de Elección.

**FORMA 2:** Para todo conjunto de conjuntos  $F$  cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos, existe una función  $f: F \rightarrow \bigcup_{A \in F} A$  tal que, para todo  $A \in F$ , se verifica que  $f(A) \in A$ .

El hecho de que los elementos del conjunto de conjuntos  $F$  son disjuntos dos a dos, significa que para cualesquiera que sean dos conjuntos elementos de  $F$ , la intersección de ambos conjuntos es vacía; pero esta exigencia puede quitarse de la forma 2. En efecto, dado un conjunto  $F$  constituido por conjuntos no vacíos, para todo  $A \in F$ , sea  $A'$  el conjunto de pares  $(A, x)$  con  $x \in A$ ,

y sea  $F$  el conjunto de los  $A'$  así construidos. Los elementos de  $F'$  son no vacíos y disjuntos dos a dos por lo que se le puede aplicar el enunciado de la Forma 2, obteniendo una función  $f: F' \rightarrow \bigcup_{A' \in F'} A'$  tal que  $f(A') \in A'$  para todo  $A' \in F'$ . Para identificar claramente la afirmación de que los elementos de  $F'$  son no vacíos y disjuntos dos a dos, veamos la siguiente interpretación

Consideremos el conjunto  $F = \{ A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \}$  constituidos por conjuntos no vacíos, es decir,  $A_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$ . Ahora bien, se construyen los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A'_1 &= \{ (A_1, x) \text{ tal que } x \in A_1 \}, \\ A'_2 &= \{ (A_2, x) \text{ tal que } x \in A_2 \}, \\ A'_3 &= \{ (A_3, x) \text{ tal que } x \in A_3 \}, \end{aligned}$$

$$A'_n = \{ (A_n, x) \text{ tal que } x \in A_n \}.$$

Luego, formamos el conjunto  $F' = \{ A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n \}$ , desde que  $A_i \neq \emptyset$  para todo  $i$ , tenemos que  $A'_i \neq \emptyset$  para todo  $i$ , pero lo más importante es que  $A'_h \cap A'_k = \emptyset$  para todo  $h, k$  elementos de  $I$ ,  $h \neq k$ , puesto que por el

contrario si  $A'_h \cap A'_k \neq \emptyset$  entonces esto exige de que  $A_h = A_k$ , es decir, se trata del mismo elemento del conjunto  $F$  lo cual carece de sentido

Nótese que hemos obtenido una función  $f: F' \rightarrow \bigcup_{A' \in F'} A'$  tal que

$f(A') \in A'$  para todo  $A' \in F'$ . Además consideremos las aplicaciones

$F \rightarrow F'$  y  $g: \bigcup_{A' \in F'} A' \rightarrow \bigcup_{A \in F} A$  definidas por  $F(A) = A'$  y  $g(A, x) = x$ ,

entonces la composición  $f' = g \circ f \circ F$  de  $F$  en  $\bigcup_{A \in F} A$  es tal que para todo

$A \in F$   $f'(A) \in A$ . En efecto, consideramos cualquiera que sea  $A \in F$ , tenemos

que

$$\begin{aligned} f'(A) &= (g \circ f \circ F)(A) \\ &= (g \circ f)(F(A)) \\ &= (g \circ f)(A') \\ &= g(f(A')) \\ &= g(A, x), \quad x \in A, \end{aligned}$$

$$f'(A) = x \in A,$$

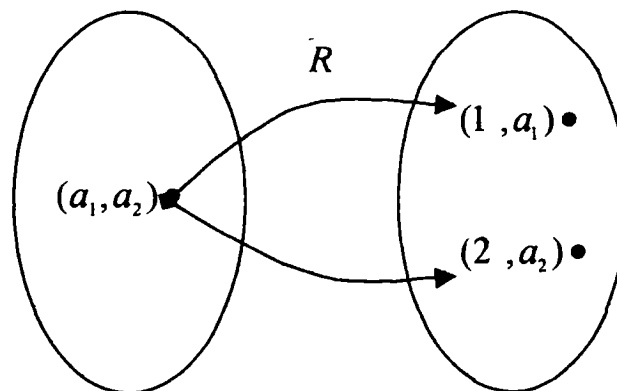
Esto implica que  $f'(A) \in A$

Con todo lo estudiado anteriormente el enunciado de la Forma 2 es, equivalente al siguiente, llamado axioma generalizado de elección.

**FORMA 3:** Para todo conjunto de conjuntos  $F$  cuyos elementos son no vacíos existe una función  $f: F \rightarrow \bigcup_{A \in F} A$  tal que para todo

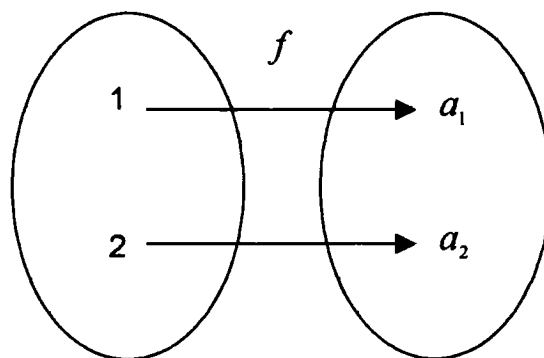
$$A \in F, f(A) \in A$$

Consideremos ahora que el par ordenado  $(a_1, a_2)$  es un elemento del producto cartesiano  $A_1 \times A_2$ , de dos conjuntos cualesquiera. Haciendo corresponder a la primera coordenada,  $a_1$ , el par ordenado  $(1, a_1)$  y a la segunda coordenada,  $a_2$ , el par ordenado  $(2, a_2)$ , resulta que el par ordenado  $(a_1, a_2)$  queda en correspondencia con el conjunto  $\{(1, a_1), (2, a_2)\}$ , una gráfica de tal correspondencia o relación es la siguiente



El conjunto de llegada de la relación  $R$  puede ser definido como  $\{ (i, a_i) \text{ para todo } i \in I \text{ con } I = \{1, 2\} \}$ . En base a esta situación, para el par ordenado  $(a_1, a_2)$  podemos definir una función  $f$  de la siguiente manera

Sea  $f = (a_1, a_2)$  de modo que  $f(1) = a_1 \in A_1$  y  $f(2) = a_2 \in A_2$ , donde el dominio de la función es el conjunto  $I = \{1, 2\}$  y su contradominio es un subconjunto de  $A_1 \cup A_2$ . Una gráfica de  $f$  es la siguiente



Generalizando, para cada par ordenado del producto cartesiano  $A_1 \times A_2$  vamos a obtener una función  $f$  con dominio en  $I = \{1, 2\}$  de modo que  $f(i) = a_i \in A_i$ , de esta manera la colección de todas estas funciones origina el conjunto llamado producto cartesiano de los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ , denotado por  $A_1 \times A_2$ .

**DEFINICIÓN 2.1:** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  cualquier familia de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia, denotado  $\prod_{i \in I} A_i$ , es el conjunto de todas las funciones  $f$  que tienen dominio  $I$  de modo que  $f_i = f(i) \in A_i$  para cada  $i \in I$ . Cada función  $f$  es llamada una función de elección para la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

Seguidamente vamos a ver una cuarta forma del Axioma de Elección, llamada, “**Forma Multiplicativa del Axioma de Elección**”

**FORMA 4:** Para toda familia de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in I}$  tal que, para todo  $i \in I$ ,  $A_i \neq \emptyset$ , el producto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i$  es no vacío.

El enunciado de la forma 4 es obviamente equivalente al siguiente

**FORMA 5:** Para toda familia de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in I}$  tal que, para todo  $i \in I$ ,  $A_i \neq \emptyset$ , existe una función  $f$  definida en  $I$  tal que  $f(i) \in A_i$ , para todo  $i \in I$ .

### **2.3. Proposiciones equivalentes al Axioma de Elección.**

Esta sección la dedicaremos al estudio de algunas proposiciones que son equivalentes con el Axioma de Elección. En primer lugar vamos a presentar el enunciado explícito de cada una de las proposiciones, y seguidamente realizaremos las demostraciones de las equivalencias lógicas entre dichas proposiciones y el citado axioma.

#### **2.3.1. El postulado de la Buena Ordenación.**

Se conoce con el nombre de “postulado de buena ordenación” a la proposición siguiente

**Postulado de Buena Ordenación:** Existe un buen orden sobre todo conjunto

En 1904, **Zermelo** demostró que su axioma de elección implica el postulado de buena ordenación, a esta proposición se le llama “Teorema de Zermelo”. Es evidente que las cinco (5) formas del Axioma de Elección presentadas en la sección anterior son equivalentes entre sí, por lo que emplearemos cualquiera de ellas para referirnos a dicho axioma.

**TEOREMA 2.1. (TEOREMA DE ZERMELO):** El Axioma de Elección implica la existencia de un buen orden sobre todo conjunto  $E$

**Demostración:**

Sea  $E$  no vacío y sea  $A$  el conjunto de subconjuntos no vacíos de  $E$ . De acuerdo con el Axioma de Elección (Forma 3) existe una función  $f: A \rightarrow$

$\bigcup_{A \in A} A$  tal que para todo  $A \in A$ ,  $f(A) \in A$

Sea  $R$  el conjunto de relaciones  $R$  en  $E$  que satisfacen las siguientes condiciones

- a)  $R$  es relación de buen orden en su dominio  $X$
- b) Para todo segmento  $(S, R_s)$  de  $(X, R)$ , con  $S \neq X$ ,  $f(E - S)$  es el primer elemento de  $(X - S, R_{X-S})$

Probemos que  $R$  es no vacío, en efecto, si  $x = f(E)$ , el orden  $R$  en  $\{x\}$  de gráfica  $\{(x, x)\}$  pertenece a  $R$ , ya que el único segmento  $(S, R_s)$  de  $(\{x\}, R)$  tal que  $S \neq \{x\}$  es el conjunto vacío. También, si  $y = f(E - \{x\})$ , la relación en  $\{x, y\}$  de gráfica  $\{(x, x), (x, y), (y, y)\}$  es elemento de  $R$ .

Demostraremos que si  $R$  y  $R'$  son dos elementos de  $R$ ,  $X$  y  $X'$  sus respectivos dominios, uno de los dos conjuntos ordenados  $(X, R)$ ,  $(X', R')$  es segmento del otro. En efecto, sea  $B$  el conjunto de los  $x$  pertenecientes a  $X \cap X'$  tales que los segmentos,  $\bar{S}_x$ ,  $\bar{S}'_x$  de extremo  $x$  en  $(X, R)$  y  $(X', R')$ , respectivamente, coincidan. En primer lugar  $(X, R)$  y  $(X', R')$  inducen al mismo orden sobre  $B$  (es decir, los conjuntos ordenados  $(B, R_B)$  y  $(B, R'_B)$ )

son iguales), porque si  $x, y$  son dos elementos distintos de  $B$  tales que  $y R x$  es  $y \in S_x = S'_x$  con lo cual se tiene  $y R' x$ . Por otra parte,  $(B, R_B) = (B, R'_B)$  es segmento de  $(X, R)$  y de  $(X', R')$ , en efecto, sean  $x \in B, y \in X$  tales que  $y R x, y \neq x$ , luego  $y \in S_x = S'_x$ , de donde  $y \in X \cap X'$ . Por tanto, para probar que  $y \in B$  resta sólo demostrar que  $\bar{S}_y = \bar{S}'_y$ . Puesto que  $y \in S_x = S'_x$  se tiene que  $y R x$  y  $y R' x$  con lo cual por la transitividad de  $R$  y  $R'$ , resulta que  $S_y \subset S_x = S'_y$  y  $S'_y \subset S'_x = S_x$ . Teniendo en cuenta ahora que la igualdad  $\bar{S}_x = \bar{S}'_x$  implica que los órdenes inducidos por  $(X, R)$  y  $(X', R')$  sobre  $S_x$  coinciden, resulta  $S_y = S'_y$  y por la misma razón  $\bar{S}_y = \bar{S}'_y$ . Luego,  $(B, R_B)$  es segmento de  $(X, R)$ . En la misma forma se prueba que lo es de  $(X', R')$ . Con esto, si se demuestra que  $B$  es igual a  $X$  ó a  $X'$  nuestra aserción estará probada.

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $B \neq X$  y  $B \neq X'$ , entonces de acuerdo con la definición de  $R$ ,  $a = f(E-B)$  es el primer elemento de  $(X-B, R_{X-B})$  y de  $(X'-B, R_{X'-B})$ , con lo cual  $a \in B$ . Por otro lado, de acuerdo con el teorema 1.3, es  $B = S_a$  y  $B = S'_a$ , de donde, recordando que  $(X, R)$  y  $(X', R')$  inducen el mismo orden sobre  $B$ , se tiene que  $\bar{S}_a = \bar{S}'_a$ , con lo cual, por la definición de  $B$ , resulta que  $a \in B$  en contra de lo afirmado anteriormente.

Sea  $F$  el conjunto de los conjuntos bien ordenados  $(X, R)$  con  $R \in \mathcal{R}$ . El teorema 1.4 permite obtener una relación de buen orden sobre el conjunto  $F$ ,

unión de los dominios de las relaciones  $R$  de  $\mathcal{R}$  Resta sólo comprobar que  $F = E$

Para ello veremos primero que la relación de buen orden en  $F$ , a la cual designaremos con  $\leq$ , pertenece a  $\mathcal{R}$

Sea  $(S, \leq)$  un segmento de  $(F, \leq)$  tal que  $S \neq F$ . De acuerdo con el teorema 1.4, existe un conjunto ordenado  $(X, R)$  de  $F$  tal que  $(S, \leq)$  es un segmento de  $(X, R)$ , de modo que podemos tomar  $X$  de tal manera que  $S \neq X$  [si  $X = S$ , sea  $x \in F - S$  y sea  $(X', R')$  un elemento de  $F$  tal que  $x \in X'$ , entonces  $(X, R) = (S, \leq)$  es un segmento de  $(X', R')$  y  $S \neq X'$ ]. Luego,  $a = f(E - S)$  es el primer elemento de  $(X - S, R_{X - S})$ . Probaremos que  $a$  es también primer elemento de  $(F - S, \leq)$  con lo cual se tendrá que  $\leq$  pertenece a  $\mathcal{R}$ . Por el Teorema 1.3,  $(S, \leq)$  coincide con el elemento  $\bar{S}_a$  de extremo  $a$  en  $(X, R)$ . Si  $\bar{S}'_a$  es un segmento de extremo  $a$  en  $(F, \leq)$  se cumple  $S_a \subset S'_a$ , puesto que  $F$  induce sobre  $X$  el orden  $R$  (Ver el Teorema 1.4). Vale también la inclusión inversa. En efecto, si  $z < a$ , sea  $(X', R')$  un elemento de  $F$  tal que  $z \in X'$ , entonces  $(X, R)$  es un segmento de  $(X', R')$  ó  $(X', R')$  es un segmento de  $(X, R)$ . En el primer caso se tiene  $a \in X'$  y  $z R' a$  con lo cual puesto que  $a \in X$ , resulta que  $z \in X$ , en el segundo caso se cumple que  $X' \subset X$ , con lo cual también vale  $z \in X$ . Por la coincidencia de los órdenes  $\leq$  y  $R$  sobre  $X$ , se tiene finalmente  $z \in S_a$ . Luego  $\bar{S}_a = \bar{S}'_a$ . De aquí resulta que  $(S, \leq) = \bar{S}_a$ , con lo cual  $a$  es el primer elemento de  $(F - S, \leq)$ .

Supongamos  $F \neq E$ . Sean  $b = f(E - F)$  y  $F' = F \cup \{b\}$ . Indicaremos también con  $\leq$  al buen orden en  $F'$  obtenido del de  $F$ , agregando a  $b$  como último elemento. Demostraremos que esta relación de orden en  $F'$  pertenece a  $\mathcal{R}$ .

Para todo segmento  $(S, \leq)$  de  $(F', \leq)$  tal que  $S \neq F'$ , se cumple  $S \subset S_b \neq F$ , si  $S = S_b$  resulta  $F' - S = \{b\}$ , con lo cual  $b = f(E - S)$  es efectivamente el primer elemento de  $(F' - S, \leq)$ , si  $S \neq S_b$  es  $(S, \leq)$  un segmento de  $(F, \leq)$  tal que  $S \neq F$ , y puesto que el orden  $\leq$  en  $F$  pertenece a  $\mathcal{R}$ , es  $c = f(E - S)$  el primer elemento de  $(F - S, \leq)$  y, por lo tanto, el primer elemento de  $(F' - S, \leq)$ .

Pero si el buen orden sobre  $F'$  pertenece a  $\mathcal{R}$ , se deduce que  $F' \subset F$  en contradicción con la definición de  $F'$ . Luego,  $F = E$ . Esto termina la demostración del Teorema de Zermelo.

**TEOREMA 2.2 (Recíproco del de Zermelo):** El postulado de buena ordenación implica el Axioma de Elección.

**Demostración:**

Sea  $F$  un conjunto de conjuntos cuyos elementos son no vacíos y sea  $E = \bigcup_{X \in F} X$ . Por hipótesis es posible definir un buen orden  $\leq$  en  $E$ . Sea  $f: F \rightarrow E$ , la aplicación que a cada conjunto  $X$  de  $F$  le hace corresponder el

primer elemento del conjunto ordenado  $(X, \leq)$  Se tiene por lo tanto que  $f(X) \in X$  Luego, se cumple la forma 3 equivalente al Axioma de Elección

De los dos últimos teoremas resulta

**COROLARIO 2.1:** El Axioma de Elección es equivalente al postulado de buena ordenación

### 2.3.2. El Lema de Zorn.

El matemático alemán **Max Zorn** (1906-1993) murió en Bloomington, Indiana, el 9 de marzo de 1993, a los 87 años de edad Zorn obtuvo su doctorado en Hamburgo, bajo la dirección de **Emil Artin** y en 1933 emigró a los Estados Unidos, huyendo del régimen nazi Estuvo adscrito a la Universidad de California en Los Angeles hasta 1946 Desde 1946 hasta su jubilación en 1971, Zorn fue profesor de la Universidad de Indiana El algebrista **I.N. Herstein** (también ya fallecido) fue uno de sus alumnos doctorales en Indiana Cuenta su colega **John Ewing** que Zorn, después de su retiro, visitaba el departamento de matemáticas los siete días de la semana participando con vivo interés en todas las actividades académicas y sociales

Aunque Zorn publicó artículos importantes en álgebra y topología, su nombre está indisolublemente ligado a un único resultado el llamado "**Lema de Zorn**" que enunciaremos seguidamente

**LEMA DE ZORN:** Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado, en el cual cada cadena tiene una cota superior, tiene un elemento maximal

**TEOREMA 2.3:** El Axioma de Elección implica el Lema de Zorn

**Demostración:**

Como anteriormente demostramos que el Axioma de Elección es equivalente al postulado de buena ordenación, entonces la demostración se convierte en probar que el postulado de buena ordenación implica el Lema de Zorn. En efecto, sea  $(A, \leq)$  un conjunto no vacío parcialmente ordenado tal que toda cadena tiene una cota superior. Sea  $(C, \leq)$  una cadena de  $A$ , es decir,  $(C, \leq)$  es un subconjunto totalmente ordenado de  $A$ . Consideremos que  $c$  es una cota superior de  $(C, \leq)$ , entonces

- Supongamos que  $C = A$ , se tiene que  $c$  es un elemento maximal de  $(A, \leq)$
- Supongamos que  $C \neq A$  y sea  $A' = A - C$ . Por hipótesis es posible introducir un buen orden  $R$  en  $A'$  (que no tiene necesariamente que coincidir con el orden de  $A$ ). Indicaremos con  $x_0$  el elemento de  $(A', R)$  y para todo  $x \in A'$  denotaremos con  $S_x$  el segmento de

extremo  $x$  de  $(A', R)$  Sea  $f: A' \rightarrow \{0,1\}$  la función definida por inducción como sigue

$$f(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 \text{ está relacionado por } \leq \text{ con todo } z \in C \\ 1, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Suponiendo definida  $f$  sobre un segmento  $S_x$  de  $(A', R)$ , tenemos que,  $f(x) = 0$  si se cumplen las dos condiciones siguientes

- i)  $x$  está relacionado por  $\leq$  con todo  $z \in C$
- ii)  $x$  está relacionado por  $\leq$  con todo  $y \in S_x$  tal que  $f(y) = 0$  y  $f(x) = 1$  en caso contrario

Sea  $C' = f^{-1}(\{0\})$  Probaremos que  $(C', \leq)$  es un subconjunto totalmente ordenado de  $(A, \leq)$  En efecto, si  $x$  e  $y$  son dos elementos distintos de  $C'$  se tiene  $y \in S_x$  ó  $x \in S_y$ , puesto que  $C' \subset A'$  y un conjunto bien ordenado está totalmente ordenado Luego, puesto que  $f(y) = f(x) = 0$ , de la condición i) resulta  $x \leq y$  ó  $y \leq x$

De acuerdo con la condición ii), se tiene que  $(C \cup C', \leq)$  es un subconjunto totalmente ordenado de  $(A, \leq)$  y, por tanto, existe una cota superior  $k$  de dicho subconjunto Demostraremos que  $k$  es el elemento maximal de  $(A, \leq)$  buscado En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe  $x \in A$  tal que  $x > k$  Por la definición de  $k$  se tiene que  $x \notin C \cup C'$ , de donde  $x \notin C$  por consiguiente  $x \in A'$ , claro por el hecho de que  $A' = A - C$ , y  $f(x) = 1$ , claro por el hecho de que  $x$  no está relacionado por  $\leq$  con todo  $z \in C$  Pero por otra parte  $x$  cumple las condiciones i) y ii), ya que si  $y \in S_x$  con  $f(y)$

$= 0$  es  $y \in \mathbf{C}'$  de donde  $y \leq k$  y por tanto  $y < x$ , si  $z \in \mathbf{C}$  es  $z \leq x$  Luego  $f(x) = 0$ , en contradicción con lo afirmado anteriormente

**TEOREMA 2.4:** El Lema de Zorn implica el Axioma de Elección

**Demostración:**

Sean  $F$  un conjunto de conjuntos no vacíos y  $\mathbf{F}$  el conjunto de funciones  $g$  que cumplen las siguientes condiciones

1)  $g$  es una función definida en un subconjunto de  $F$  y con valores en

$$\bigcup_{A \in F} A$$

2) Para todo  $A$  perteneciente al dominio de  $g$  se verifica que  $g(A) \in A$

Para dos funciones  $g, h$  de  $\mathbf{F}$  diremos que  $g \leq h$  si y sólo si  $h$  es una extensión de  $g$ . Ésta es una relación de orden en  $\mathbf{F}$ . Sea  $(\mathbf{C}, \leq)$  un subconjunto totalmente ordenado de  $(\mathbf{F}, \leq)$  y llamemos  $Dom(g)$  al dominio de  $g$ , para toda  $g \in \mathbf{C}$  (por lo tanto  $Dom(g) \subset F$ ). Puesto que si  $A \in Dom(g') \cap Dom(g)$ , es  $g'(A) = g(A)$ , de este modo puede definirse una función  $f: \bigcup_{g \in \mathbf{C}} Dom(g) \rightarrow \bigcup_{A \in F} A$  como  $f(A) = g(A)$ , para  $A \in Dom(g)$ . (La aplicación  $f$  es la unión de las funciones de  $\mathbf{C}$ )

La función  $f$  pertenece evidentemente a  $\mathbf{F}$  y es cota superior de  $\mathbf{C}$ . Por tanto,  $\mathbf{F}$  está en la hipótesis del Lema de Zorn, con lo cual podemos afirmar la existencia de un elemento maximal  $T$  de  $(\mathbf{F}, \leq)$ . Sea  $D$  el dominio de  $T$ . Si

se demuestra que  $D$  coincide con  $F$ , entonces la aplicación  $T$  cumple las condiciones exigidas por el Axioma de Elección (Forma 3) Supongamos por reducción al absurdo que  $D \neq F$  y sean  $A_0 \in F-D$  y  $a_0 \in A_0$ , entonces poniendo

$$T'(A) = \begin{cases} T(A), & \text{para } A \in D \\ a_0, & \text{para } A = A_0 \end{cases}$$

Queda definida una función  $T' \in F$  que es extensión de  $T$  en contradicción con el hecho de ser  $T$  elemento maximal de  $(F, \leq)$

**COROLARIO 2.2:** El Axioma de Elección es equivalente al Lema de Zorn

**COROLARIO 2.3:** (Corolario del Lema de Zorn) Sea  $A$  un conjunto,  $P(A)$  su conjunto de partes y  $F \subset P(A)$  Sea  $(F, \subset)$  el conjunto  $F$  ordenado por inclusión Si para todo subconjunto totalmente ordenado  $(C, \subset)$  de  $(F, \subset)$ , la unión de los elementos de  $C$  pertenece a  $F$ , entonces  $(F, \subset)$  posee un elemento maximal

**Demostración:**

Para todo subconjunto totalmente ordenado  $(C, \subset)$  de  $(F, \subset)$ , la unión de los elementos de  $C$  es cota superior y como por hipótesis dicha unión pertenece a  $F$  resulta que  $(F, \subset)$  verifica las hipótesis del Lema de Zorn, con lo cual podemos afirmar la existencia de un elemento maximal

**PROPIEDAD 2.1:** Sea  $F$  una familia de carácter finito y sea  $B$  una cadena en  $F$ . Entonces  $\bigcup B \in F$ .

**Demostración:**

Es suficiente probar que cada subconjunto finito de  $\bigcup B$  está en  $F$ . Sea  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \bigcup B$ . Entonces existen conjuntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  en  $B$  de modo que  $x_j \in B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Desde que  $B$  es una cadena hay un  $J_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  de manera que  $B_j \subset B_{J_0}$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $F \subset B_{J_0} \in F$ . Pero  $F$  es de carácter finito, y así  $F \in F$ .

**2.3.3. El Lema de Tukey.**

**Lema de Tukey:** Toda familia no vacía de carácter finito tiene un elemento maximal.

**TEOREMA 2.5:** El Axioma de Elección implica el Lema de Tukey.

**Demostración:**

Supongamos, por el absurdo, que el Axioma de Elección es verdadero y asumamos que el Lema de Tukey es falso. Entonces existe una familia  $F$  no vacía de carácter finito que no tiene un elemento maximal. Para cada  $F \in F$ , sea

$A_F = \left\{ E \in F \text{ tal que } F \subsetneq E \right\}$ . Entonces  $\{A_F \text{ tal que } F \in F\}$  es una familia no

vacía de conjuntos no vacíos, así por el Axioma de Elección existe una función  $f$

definida en  $F$  de modo que  $f(F) \in A_F$  para cada  $F \in F$ . De esta manera tenemos que  $F \subsetneq f(F) \in F$  para cada  $F \in F$ , es decir,  $F$  es un subconjunto propio de  $f(F)$  para cada  $F \in F$

Una subfamilia  $F_0$  de  $F$  se llama  $f$ -inductiva si ésta tiene las tres propiedades siguientes

- 1)  $\emptyset \in F_0$ ,
- 2)  $A \in F_0$  implica que  $f(A) \in F_0$ ,
- 3)  $B$  es una cadena contenida en  $F_0$  implica que  $\bigcup B \in F_0$ .

Desde que  $F$  es no vacío,  $\emptyset$  es finito y se verifica la propiedad 2 1, entonces la familia  $F$  es  $f$ -inductiva. Sea  $C = \bigcap \{ F_0 \mid F_0 \text{ es } f\text{-inductiva} \}$ . Nótese que  $C = \{ A \in F \mid A \in F_0 \text{ para toda familia } F_0 \text{ } f\text{-inductiva} \}$ . Esto es fácil de ver porque  $C$  es  $f$ -inductiva. De esta manera  $C$  es la menor familia  $f$ -inductiva, así cualquier familia  $f$ -inductiva contiene a  $C$ . Queremos hacer uso fuerte de este hecho en la prueba de que  $C$  es una cadena.

$$\text{Sea } H = \left\{ A \in C \mid B \in C \text{ y } B \subsetneq A \text{ implica que } f(B) \subset A \right\}$$

Aseguramos que si  $A \in H$  y  $C \in C$ , entonces también  $C \subset A$  o  $f(A) \subset C$ . Para probar esta afirmación, sea  $A \in H$  y definamos

$$L_A = \{ C \in C \mid C \subset A \text{ o } f(A) \subset C \}$$

Veamos como hacemos para probar que  $L_A$  es  $f$ -inductiva. Desde que  $\emptyset \in C$  y  $\emptyset \subset A$ , implica que  $\emptyset \in L_A$ , esto satisface la propiedad (1). Sea  $C \in L_A$ . Entonces tenemos también  $C \subsetneq A$ ,  $C = A$  o  $f(A) \subset C$ . Si  $C \subsetneq A$ , entonces  $f(C) \subset A$  porque  $A \in H$ , de donde  $f(C) \in C$  tal que  $f(C) \subset A$ , esto implica que  $f(C) \in L_A$ . Si  $C = A$ , entonces  $f(A) \subset f(C)$ . Si  $f(A) \subset C$ , entonces  $f(A) \subset f(C)$  porque  $C \subset f(C)$ . De esta manera en cualquier de los tres casos  $f(C) \in L_A$ , esto satisface la propiedad (2). Ahora, sea  $B$  una cadena en  $L_A$ . Entonces sea  $C \subset A$  para cada  $C \in B$ , en cual caso  $\bigcup B \subset A$ , o existe un  $C \in B$  de modo que  $f(A) \subset C \subset \bigcup B$ . De manera que  $\bigcup B \in L_A$ , esto satisface la propiedad (3). Concluimos que  $L_A$  es  $f$ -inductiva y así  $L_A = C$ .

Seguidamente afirmamos que  $H = C$ . Probaremos esto demostrando que  $H$  es  $f$ -inductiva. En efecto, desde que  $\emptyset$  no tiene subconjunto propio, se tiene que  $\emptyset \in H$ , esto satisface la propiedad (1). Seguidamente, sea  $A \in H$  y  $B \in C$  de modo que  $B \subsetneq f(A)$ . Desde que  $B \in C = L_A$ , tenemos que  $B \subset A$  (La inclusión  $f(A) \subset B$  es imposible). Si  $B \subsetneq A$ , de la definición de  $H$  se obtiene que  $f(B) \subset A \subset f(A)$ . Si  $B = A$ , entonces  $f(B) \subset f(A)$ . En tal caso también obtenemos la inclusión  $f(B) \subset f(A)$ , así  $f(A) \in H$ . Esto satisface la propiedad (2). Ahora, sea  $B$  una cadena que está contenida en  $H$  y sea  $B \in C$  tenemos la propiedad de que

$B \subsetneq \bigcup_{\neq} B$  Desde que  $B \in C = L_A$  para cada  $A \in B$ , tenemos también que  $B \subset A$  para algún  $A \in B$  o  $f(A) \subset B$  para todo  $A \in B$ . Si la última alternativa es verdadera, tendríamos que

$$B \subsetneq \bigcup_{\neq} B \subset \bigcup \{ f(A) \mid A \in B \} \subset B,$$

Lo cual es imposible. De esta manera hay algún  $A \in B$  de modo que  $B \subset A$ . Si  $B \subsetneq A$ , entonces desde que  $A \in H$ , tenemos  $f(B) \subset A \subset \bigcup B$ . Si  $A = B$ , entonces  $B \in H$  y  $\bigcup B \in C = L_B$ . Esto implica que  $f(B) \subset \bigcup B$  (es imposible que  $\bigcup B \subset B$ ). Por lo tanto en cualquier caso, tenemos que  $f(B) \subset \bigcup B$  y así  $\bigcup B \in H$ . Esto prueba que  $H$  satisface la propiedad (3). Por consiguiente  $H$  es  $f$ -inductiva y  $H = C$ .

Concluimos a partir del argumento anterior que si  $A \in C = H$  y  $B \in C = L_A$ , entonces también  $B \subset A$  o  $A \subset f(A) \subset B$ . Conforme  $C$  es una cadena. Sea  $M = \bigcup C$ . Desde que  $C$  es  $f$ -inductiva, la propiedad (3) implica que  $M \in C$ . De acuerdo a la propiedad (2), tenemos que  $\bigcup C = M \subsetneq f(M) \in C$ .

Esta contradicción nos permite establecer que el supuesto es falso y el enunciado del teorema es verdadero, es decir, el Axioma de Elección implica el Lema de Tukey.

### 2.3.4. El Principio de Maximalidad de Hausdorff.

**Principio de Maximalidad de Hausdorff:** Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene una cadena maximal

**TEOREMA 2.6:** El Lema de Tukey implica el principio de Maximalidad de Hausdorff

**Demostración:**

Sea  $(A, \leq)$  cualquier conjunto no vacío parcialmente ordenado. Queremos probar que  $A$  contiene una cadena maximal. Esta se sigue a partir del Lema de Tukey, desde que la familia  $F$  de todas las cadenas contenidas en  $A$  es una familia no vacía de carácter finito, entonces ella tiene un miembro maximal, pero resulta que el miembro es una cadena, es decir, ella tiene una cadena maximal. Esto se reafirma por el hecho de que  $\phi \in F$  y  $\{x\} \in F$  para cada  $x \in A$ .

Algunos autores se refieren a este principio simplemente como “Principio Maximal” y lo enuncian de la siguiente manera “*Toda estructura de orden parcial tiene una cadena maximal*”

**TEOREMA 2.7:** El Principio de Maximalidad de Hausdorff implica el Lema de Zorn

**Demostración:**

Sea  $(A, \leq)$  cualquier conjunto, no vacío, parcialmente ordenado en el cual cada cadena tiene una cota superior. Por el Principio de Maximalidad de Hausdorff existe una cadena maximal  $M \subset A$ . Sea  $m$  una cota superior de  $M$ . Entonces  $m$  es un elemento maximal de  $A$ , ya que si existiera un  $x \in A$  de modo que  $m \leq x$  y  $m \neq x$ , entonces  $M \cup \{x\}$  es una cadena que contiene a  $M$ , contradiciendo el hecho de que  $M$  es la cadena maximal. Por consiguiente  $m$  es un elemento maximal de  $A$ , como queríamos demostrar.

En el Teorema 2.4, demostramos que el Lema de Zorn implica el Axioma de Elección. Además un análisis sencillo de la lógica matemática nos dice que si tenemos cuatro proposiciones  $P_1, P_2, P_3, P_4$  y demostramos que  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1$ , entonces la proposición  $\bigwedge P_i$  es equivalente a cada una de las proposiciones restantes. Estas consideraciones nos permiten establecer los siguientes corolarios.

**COROLARIO 2.4:** El Axioma de Elección es equivalente al Lema de Tukey

**COROLARIO 2.5:** El Axioma de Elección es equivalente al Principio de Maximalidad de Hausdorff

Queremos dejar claro que en la situación explicada anteriormente sobre las proposiciones  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , las cuatro proposiciones son equivalentes entre sí. Pero nuestro trabajo tiene como eje principal la equivalencia del Axioma de Elección con las restantes proposiciones.

En resumen en esta sección hemos encontrado los siguientes resultados

Axioma de Elección	↔	Postulado de Buena Ordenación
	↔	Lema de Zorn
	↔	Lema de Tukey
	↔	Principio de Maximalidad de Hausdorff

#### 2.4. Ejemplos de aplicación del Axioma de Elección.

Con el propósito de ilustrar algunas aplicaciones del Axioma de Elección o de proposiciones equivalentes, vamos a presentar esta sección dedicada a ciertos ejemplos especiales.

**EJEMPLO 2.1:** Supongamos que  $A_n$  es contable para cada  $n \in \mathbf{N}$

Entonces  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  es contable

**Demostración:**

La hipótesis afirma que para cada  $n \in \mathbf{N}$  existe una función  $f_n: A_n \rightarrow \mathbf{N}$  1-1

Para cada  $n$  seleccionemos una función  $f_n$ . llamémosla  $f_n$ . Para cada

$x \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ , sea  $k(x)$  la menor  $j$  de modo que  $x \in A_j$ . Definamos

$F(x) = 2^{k(x)} 3^{f_{k(x)}(x)}$ . Claramente  $F: \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \rightarrow \mathbf{N}$ . Afirmamos que  $F$  es 1-1. En

efecto,  $F(x) = 2^{k(x)} 3^{f_{k(x)}(x)}$ ,  $F(y) = 2^{k(y)} 3^{f_{k(y)}(y)}$  y  $F(x) = F(y)$ , entonces

tenemos que  $k(x) = k(y)$  y  $f_{k(x)}(x) = f_{k(y)}(y)$ . Desde que  $f_{k(x)}$  es 1-1,

tenemos que  $x = y$ . Por consiguiente  $F: \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \rightarrow \mathbf{N}$  es 1-1. De esta manera

queda demostrado que  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  es contable

**EJEMPLO 2.2:** Si  $A$  es infinito, entonces  $\mathbf{N} < A$

**Demostración:**

Sea  $f$  una función cuyo dominio es  $P(A) - \{\emptyset\}$  y de modo que  $f(X) \in X$

para cada  $X \in P(A) - \{\emptyset\}$ . Ahora definamos  $g: \mathbf{N} \rightarrow A$  como sigue

$$g(0) = f(A),$$

$$g(1) = f(\mathbf{A} - \{g(0)\}),$$

$$g(2) = f(\mathbf{A} - \{g(0), g(1)\}),$$

$$g(3) = f(\mathbf{A} - \{g(0), g(1), g(2)\}),$$

y así sucesivamente En otras palabras  $g(n + 1) = f(\mathbf{A} - \{g(m) \mid m \leq n\})$

Nótese que para cada  $n$ ,  $g(n + 1)$  está bien definida, desde que

$$\mathbf{A} - \{g(m) \mid m \leq n\} \neq \emptyset$$

Por lo tanto  $g(n + 1) \notin \{g(m) \mid m \leq n\}$ , esto nos permite ver claramente que  $g$

es una función 1-1 Por consiguiente  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$ , esto demuestra que  $\mathbf{N} < \mathbf{A}$

Para ilustrar los pasos de la demostración anterior, consideremos el siguiente caso particular Sea  $\mathbf{A} = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \right\}$ , donde  $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Sea  $f$  una función cuyo dominio es  $\mathbf{P}(\mathbf{A}) - \emptyset$  y de modo que a  $f(\mathbf{X})$  le hace corresponder su elemento maximal para cada  $\mathbf{X} \in \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \emptyset$  Ahora definamos la

función  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$  como sigue

$$g(0) = f(\mathbf{A}) = \frac{1}{1} \in \mathbf{A}, g(0) = 1,$$

$$g(1) = f(\mathbf{A} - \{g(0)\}),$$

$$g(1) = f(\mathbf{A} - \{1\}) = \frac{1}{2}, g(1) = \frac{1}{2},$$

$$g(2) = f(\mathbf{A} - \{g(0), g(1)\}),$$

$$g(2) = f(\mathbf{A} - \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}) = \frac{1}{3}, \quad g(2) = \frac{1}{3},$$

$$g(3) = f(\mathbf{A} - \{ g(0), g(1), g(2) \} ),$$

$$g(3) = f(\mathbf{A} - \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}) = \frac{1}{4}, \quad g(3) = \frac{1}{4},$$

$$g(4) = f(\mathbf{A} - \{ g(0), g(1), g(2), g(3) \} ),$$

$$g(4) = f(\mathbf{A} - \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}) = \frac{1}{5}, \quad g(4) = \frac{1}{5},$$

y así sucesivamente. Nótese que la función  $g$  está bien definida, desde que la función  $f$  está bien definida y, además  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$  es una función 1-1, lo que nos permite establecer que  $\mathbf{N} \prec \mathbf{A}$ .

**EJEMPLO 2.3:** Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito enumerable

**Demostración:**

Sean  $\mathbf{A}$  un conjunto infinito y  $\mathbf{P}(\mathbf{A})$  el conjunto de partes no vacías de  $\mathbf{A}$ . Aplicando el Axioma de Elección existe una función  $f: \mathbf{P}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$  tal que, para todo subconjunto no vacío  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{A}$ ,  $f(\mathbf{X}) \in \mathbf{X}$ . Definamos por recurrencia la aplicación  $F$  como sigue

$$F(0) = f(\mathbf{A}),$$

y para todo  $n \geq 1$ ,  $F(n) = f\left(\mathbf{A} - \bigcup_{i=0}^{n-1} \{f(i)\}\right)$  La función  $F$  es inyectiva, porque

para todo  $n \in \mathbf{N}$ ,  $F(n) \in \mathbf{A} \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} \{f(i)\}$ , con lo cual, si  $n \neq m$  implica que

$F(n) \neq F(m)$  Nótese que por la forma en que se definió  $F$  ella es sobreyectiva

En efecto,  $F$  es una función definida de  $\mathbf{N}$  en

$$\mathbf{B} = \left\{ f(\mathbf{A}) \right\} \cup \left\{ f\left(\mathbf{A} - \bigcup_{i=0}^{n-1} \{f(i)\}\right) \right\},$$

de modo que para todo número natural, tenemos que

$$F(\mathbf{N}) = \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$$

Por consiguiente,  $F(\mathbf{N})$  es un subconjunto de  $\mathbf{A}$  equipotente con  $\mathbf{N}$ , es decir,  $F(\mathbf{N}) \sim \mathbf{N}$  Lo que demuestra que  $F(\mathbf{N})$  es un subconjunto infinito enumerable de  $\mathbf{A}$

Para una mejor comprensión del siguiente ejemplo, donde ilustraremos una aplicación del Lema de Zorn, es necesario revisar preliminarmente algunos conceptos de topología general

El conjunto  $V(x)$  de las vecindades de un punto  $x$  en un espacio topológico  $(X, T)$  satisface las propiedades

- (i) La intersección de dos vecindades es de nuevo una vecindad

- (ii) Si  $V_x$  es una vecindad de  $x$ , entonces cualquier conjunto  $W$  tal que  $V_x \subset W$  es de nuevo una vecindad

Basados en el espíritu de estas dos propiedades podemos presentar la siguiente definición

**DEFINICIÓN 2.2:** Dado un conjunto  $X$ , un filtro  $F$  para  $X$  es una colección no vacía, de subconjuntos no vacíos de  $X$  tal que

- (i) Si  $F_1, F_2 \in F$ , entonces  $F_1 \cap F_2 \in F$   
 (ii) Si  $F \in F$  y  $F \subset G$ , entonces  $G \in F$

Evidentemente que, dado un espacio topológico  $(X, T)$  y  $x \in X$ , el conjunto  $V(x)$  de las vecindades de  $x$  es un filtro para  $X$

**DEFINICIÓN 2.3:** Dado un filtro  $F$ , decimos que  $B \subset F$  es una base de filtro para  $F$ , si y sólo si, dado  $F \in F$  existe  $B \in B$  tal que  $B \subset F$

En general si  $F_1, F_2$  son dos filtros sobre  $X$  tales que  $F_1 \subset F_2$ , decimos que  $F_2$  es más fino que  $F_1$ . Esta relación de inclusión define una relación de orden sobre el conjunto  $Fil(X)$  de todos los filtros sobre  $X$ , y por supuesto tendremos derecho de hablar de todas las definiciones concernientes a un orden

**DEFINICIÓN 2.4:** Dado un conjunto  $X$ , un ultrafiltro para  $X$  es un filtro maximal, esto es, no existe un filtro más fino que él

**EJEMPLO 2.4:** Dado un filtro  $F$  en  $X$ , existe un ultrafiltro  $S$  en  $X$  tal que  $F \subset S$

**Demostración:**

Por hipótesis  $F$  es un filtro en  $X$ . Definamos el conjunto  $M$  de la siguiente manera  $M = \{ A \text{ tal que } F \subset A, \text{ y, } A \text{ es un filtro en } X \}$ .  $M$  es ordenado por la relación de inclusión. Sea  $C$  una cadena en  $M$ . Si definimos  $H = \bigcup C$ , es decir,  $H$  es la unión de todos los filtros que están en  $C$ , vemos que  $H$  es un filtro y que él es cota superior para  $C$ . En efecto, sean  $C_1, C_2 \in H = \bigcup C$ , entonces  $C_1 \cap C_2 \in \bigcup C = H$  y si  $C_1 \in \bigcup C = H$  y  $C_1 \subset B$ , entonces  $B \in \bigcup C = H$ , esto implica que  $H$  es un filtro. Por otro lado, supongamos por el absurdo que  $H$  no es cota superior para  $C$ , entonces quiere decir que existe un filtro  $G$  más fino que  $H$ , es decir,  $\bigcup C \subset G \in C$ , lo cual contradice la definición de  $H$ , esto demuestra que  $H$  es cota superior de  $C$ . Ahora bien, tenemos que El conjunto  $(M, \subset)$  no vacío y parcialmente ordenado, en el cual la cadena  $C$  tiene a  $H$  como cota superior, entonces aplicando el Lema de Zorn existe un elemento maximal  $S$  en  $M$ , es decir,  $S$

es maximal en el conjunto de los filtros que contienen a  $F$ , luego es un ultrafiltro

**EJEMPLO 2.5:** Base de Hamel Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales y  $\mathbb{Q}$  el conjunto de los números racionales Se dice que  $n$  números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son linealmente dependientes, si es posible encontrar  $n$  números racionales  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , no todos nulos, tales que

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0,$$

y se dice que son linealmente independientes en caso contrario

Se dice que un subconjunto  $B$  de  $\mathbb{R}$  es una base de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{Q}$  (o base de Hamel) si cumple las dos condiciones siguientes

- 1) Los elementos de todo subconjunto finito de  $B$  son números reales linealmente independientes
- 2) Para todo número real  $x$  existe un número finito  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de elementos de  $B$  y un mismo número  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de elementos de  $\mathbb{Q}$ , tales que  $x = r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$

Nuestro ejemplo consiste en demostrar la existencia de una base de Hamel En efecto, sea  $L \subset P(\mathbb{R})$ , el conjunto de subconjuntos  $B$  de  $\mathbb{R}$  que cumple la condición 1) Sean  $(L, \subset)$  el conjunto ordenado por inclusión,  $(C, \subset)$  un subconjunto totalmente ordenado de  $(L, \subset)$  [o sea, una cadena] y

$C = \bigcup_{L \in C} L$  Se probará que  $C \in L$  Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset C$  y sea, para  $i =$

$1, 2, \dots, n$ ,  $L_i$  un conjunto de  $C$  al cual pertenece  $x_i$ ; Puesto que  $(C, \subset)$  está totalmente ordenado existe  $L \in C$  tal que  $L_i \subset L$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$  con lo cual  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son linealmente independientes

Por el Corolario 2.3, del Lema de Zorn, existe un elemento maximal  $L_0$  de  $(L, \subset)$ . Demostraremos que  $L_0$  es una base de Hamel, para lo cual sólo resta verificar el cumplimiento de la condición 2) En efecto, sea  $x$  un número real. Si  $x \in L_0$  puede escribirse  $x = 1x$  con lo cual se cumple la condición 2) Si  $x \notin L_0$ , puesto que  $L_0$  es maximal en  $(L, \subset)$  resulta  $L_0 \cup \{x\} \notin L$ , luego existen  $x_1, x_2, \dots, x_m \in L_0$  que constituyen con  $x$  un conjunto linealmente dependiente. Existen entonces números racionales  $r, r_1, r_2, \dots, r_m$ , con  $r \neq 0$ , tales que  $rx + r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_mx_m = 0$ , de donde se deduce

$$x = -\frac{r_1x_1}{r} - \frac{r_2x_2}{r} - \dots - \frac{r_mx_m}{r},$$

con lo cual también se satisface la condición 2) Evidentemente que si  $r = 0$ , obtenemos, que  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción.

Se siguen los mismos lineamientos de la demostración anterior para probar la existencia de una base en un espacio vectorial cualquiera. Esto lo vamos a realizar en el tercer capítulo como una propuesta para que sea estudiado en el Álgebra Lineal.

### **CAPÍTULO III**

## **PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN**

### 3.1. Importancia del Axioma de Elección en Matemática.

En esta sección nos dedicaremos a presentar algunas de las importancias más relevantes del Axioma de Elección en el estudio de la matemática. En el capítulo anterior vimos que el estudio del Axioma de Elección conlleva el estudio de varias proposiciones equivalentes, de modo que las aplicaciones de dichas proposiciones las podemos considerar como hereditarias para el Axioma de Elección. De esta manera, observamos en el mismo capítulo, que el Axioma de Elección tiene aplicaciones en múltiples ramas de la matemática, convirtiéndose en la importancia más sobresaliente.

Una importancia de mucho peso del Axioma de Elección en matemática consiste en que en varias ramas de la matemática existen teoremas que tienen demostraciones largas, complicadas y no intuitivas, sin usar el Axioma de Elección. Sin embargo, empleando el Axioma de Elección dichas pruebas son cortas y fácilmente comprendidas.

Otra importancia del Axioma de Elección se encuentra en la Teoría de los Cardinales, la cual sería imposible desarrollar sin el uso de dicho Axioma, tanto para los conjuntos finitos como para los conjuntos infinitos.

Citemos ahora la importancia del Axioma de Elección en la Axiomatización de la Teoría de Conjuntos. La Axiomatización de la Teoría de

Conjuntos dada por Zermelo está contenida en su memoria de 1908, titulada ***“Investigaciones sobre los Fundamentos de la Teoría de Conjuntos”*** Dicha Axiomatización presenta siete axiomas. El Axioma (1) es el axioma de Extensionalidad, el Axioma (2) es el axioma de los Conjuntos Elementales, el Axioma (3) es el axioma de los subconjuntos, el Axioma (4) es el axioma del Conjunto Potencia, el Axioma (5) es el axioma de la Reunión de Conjuntos, el Axioma (6) es el axioma de Elección y el Axioma (7) es el axioma del Infinito.

La Axiomatización dada por Zermelo fue modificada en 1922, por **Abraham A. Fraenkel** (1891-1965), quien modificó el tercer axioma de Zermelo a fin de eliminar su imprecisión, demostró la independencia del Axioma de Elección e introdujo el Axioma de Sustitución.

La Axiomatización de Zermelo-Fraenkel (abreviado **ZF**) es una de las que en la actualidad se encuentra con mayor frecuencia, es altamente exitosa, sus axiomas tienen una fuerte descripción intuitiva, esta libre de contradicciones y, además, es lo suficientemente poderosa para proveer una base para todas las matemáticas clásicas.

Los axiomas que presenta **ZF** son los siguientes

**AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD:** Si  $x$  y  $y$  tienen los mismos elementos, entonces  $x = y$

**AXIOMA DE REGULARIDAD:** Todo conjunto no vacío tiene un miembro menor respecto a  $\in$ . En efecto, si existe algún  $y \in x$ , entonces existe algún  $z \in x$  para el cual no existe  $w \in z \cap x$

**AXIOMA DEL CONJUNTO NULO:** Existe un conjunto sin miembros

**AXIOMA DE PARES:** Si  $x$  y  $y$  son conjuntos, entonces existe un conjunto  $z$  de modo que para todo  $w$ ,  $w \in z$  si y sólo si  $w = x$  o  $w = y$

**AXIOMA DE UNIÓN:** Para todo  $x$  existe un  $y$  de modo que  $z \in y$  si y sólo si existe un  $w \in x$  con  $z \in w$

**AXIOMA DE EL CONJUNTO POTENCIA:** Para todo  $x$  existe un  $y$  de modo que para todo  $z$ ,  $z \in y$  si y sólo si  $z \subseteq x$

**AXIOMA DE INFINIDAD:** Existe un conjunto  $x$  de modo que  $\emptyset \in x$  y siempre que  $y \in x$ , entonces  $y \cup \{y\} \in x$

**AXIOMA DE SUSTITUCIÓN:** Si  $P$  es una propiedad funcional y  $x$  es un conjunto, entonces  $Rang(P|x)$  es un conjunto. En efecto, existe un conjunto  $y$  de modo que para todo  $z, z \in y$  si y sólo si existe un  $w \in x$  de modo que  $P(w) = z$ .

La Axiomatización obtenida por el Axioma de Elección y los Axiomas de Zermelo-Frankel la denotamos por **ZFC**. Kurt Gödel (1906-1978) demostró que si **ZF** está libre de contradicciones, entonces también lo está **ZFC**. Quizás lo más famoso de estos axiomas es la Hipótesis Continua Generalizada (abreviada **GCH**), la cual sostiene que el cardinal sucesor del cardinal  $k$  es  $2^k$ , el caso especial para  $k = \omega$ , llamado la afirmación  $\omega_1 = 2^{\omega}$ , es llamado la Hipótesis Continua (abreviado **CH**). Los trabajos de Gödel en 1938 y de Paul J. Cohen muestran que **CH** y **GCH** no pueden ser probadas o refutadas sin **ZFC**.

Los trabajos de Cohen han permitido establecer la independencia de la hipótesis del continuo y, de este modo, han contribuido a clarificar el estatus del Axioma de Elección y de los teoremas que no pueden ser demostrados sin ese axioma.

Suponiendo la verdad de **ZFC** en el universo de todos los conjuntos, podemos producir modelos de **ZFC** teniendo propiedades adicionales. Pero

suponga que algún dudoso cree que **ZF** es verdadero en el universo de todos los conjuntos, pero que el Axioma de Elección no lo es, aún más, él sospecha que el Axioma de Elección puede ser desaprobado por **ZF**. Para su conocimiento amigo dudoso, Godel produjo un modelo de **ZFC** asumiendo sólo que **ZF** tiene un modelo y por consiguiente demostró que **ZFC** es tan consistente como **ZF**, y de esta manera el Axioma de Elección no puede ser desaprobado por **ZF**.

No solamente los teoremas de Godel y Cohen son los pilares de los fundamentos de las matemáticas sino que las técnicas utilizadas para demostrarlos han sido extremadamente fructíferas en las últimas décadas produciendo resultados consistentes que resolvieron problemas antiguos en Lógica, Topología, Análisis, Álgebra, y otras ramas de la matemática.

### **3.2. Propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección en la Licenciatura en Matemática.**

Vamos a presentar una propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección en los estudios de la Licenciatura en Matemática de nuestro país. Básicamente nuestra propuesta consiste en introducir el estudio del Axioma de Elección y de proposiciones equivalentes, a lo largo de los cuatro (4) años de la Licenciatura en Matemática, pero obviamente el tratamiento en cada año (I, II, III, IV) va a variar de acuerdo a la versión del Axioma de Elección que se estudie.

y al grado de profundidad con que la misma sea tratada. Como quiera que sea todo estudio de un tema debe partir de un objetivo de aprendizaje, por lo que para cada año vamos a proponer algunos objetivos de aprendizajes, seguido de un temario básico. Además para algunos años presentaremos ejemplos particulares del empleo del Axioma de Elección y de proposiciones equivalentes. Estos ejemplos consisten en las demostraciones de teoremas de gran importancia en diversas ramas de la matemática, para comprender estas demostraciones supondremos, de ante mano, que contamos con los conceptos matemáticos básicos necesarios, y no entraremos a detallar los mismos.

### **3.2.1. El Axioma de Elección en el Primer Año de la Licenciatura en Matemática.**

Proponemos incluir en el programa de la asignatura de Fundamentos I, Matemática 101a, los objetivos y el contenido que posteriormente detallamos. Pero éstos deben ser estudiados después de haber examinado el desarrollo o tratamiento de la relación de orden y del concepto de función.

#### **Objetivos:**

- 1 Definir el concepto de Función de Elección
- 2 Enunciar el Axioma de Elección presentado por primera vez por Zermelo en 1904
- 3 Demostrar el Axioma de Elección para el caso de conjuntos finitos
- 4 Enunciar el Postulado de Buena Ordenación

5 Enunciar el Teorema de Zermelo y su recíproco

6 Enunciar el Lema de Zorn

**Contenido:**

- Función de Elección
  - Conceptos
  - Ejemplos
- El Axioma de Elección
  - Breve reseña histórica
  - Enunciado presentado por Zermelo en 1904
  - Demostración para el caso de conjuntos finitos
- Postulado de Buena Ordenación
  - Enunciado
- Teorema de Zermelo y su recíproco
  - Enunciados
- El Lema de Zorn
  - Enunciado
  - Corolario del Lema de Zorn
    - Enunciado

### **3.2.2. El Axioma de Elección en el Segundo Año de la Licenciatura en Matemática.**

Proponemos incluir en el programa de la asignatura de Álgebra Lineal I, Matemática 250a, los objetivos y el contenido que seguidamente detallamos. Específicamente consideramos que debe ser incluidos en el tercer módulo que trata los espacios vectoriales

#### **Objetivos:**

- 1 Definir el concepto de Base de Hamel
- 2 Aplicar el Lema de Zorn en la demostración de la existencia de una base para todo espacio vectorial

#### **Contenido:**

- Base de Hamel
  - Concepto
- Lema de Zorn
  - Corolario del Lema de Zorn
  - Aplicación

A continuación, una aplicación del Corolario del Lema de Zorn en la demostración de un importante teorema de Álgebra Lineal

**TEOREMA 3.1:** Todo espacio vectorial posee una base

**Demostración:**

Sea  $V$  un espacio vectorial cualquiera y  $F \subset P(V)$  el conjunto de subconjuntos  $B$  de  $V$  que son linealmente independientes, o sea,

$$F = \{ B \subset V \mid B \text{ es linealmente independiente} \}$$

Es claro que  $(F, \subset)$  es un conjunto no vacío parcialmente ordenado con la relación de inclusión. Probaremos que  $(F, \subset)$  satisface las condiciones del Corolario del Lema de Zorn (Corolario 2.3). En efecto, sea  $C$  un subconjunto totalmente ordenado de  $F$  y sea  $C = \bigcup_{B \in C} B$ . Demostraremos que  $C$  es un

elemento de  $F$ , o sea, que  $C$  es un subconjunto linealmente independiente de

$V$ . Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset C$  denotemos por  $L_i, i = 1, 2, \dots, n$ , al subconjunto de  $C$

el cual contiene a  $x_i$ . Como  $C$  es totalmente ordenado, existe un  $L \in C$  tal que

$L_i \subset L$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , lo cual implica que  $x_i \in L$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Como  $L$  es linealmente independiente y  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset L$ , se tiene que

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es linealmente independiente por lo tanto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in F$ .

Por el Corolario del Lema de Zorn existe un elemento maximal  $B_0$  de

$(F, \subset)$

En lo que sigue probaremos que  $B_0$  es una base para  $V$ , para lo cual sólo resta verificar la condición (2) de la Base de Hamel (Ver el Ejemplo 2.5)

Sea  $V$  el espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$  y  $x \in V$

- Si  $x \in \mathbf{B}_0$ , entonces  $x = 1x$ , con  $1 \in \mathbf{K}$ , por lo tanto se cumple la condición (2)

- Supongamos que  $x \notin \mathbf{B}_0$ . Si  $\mathbf{B}_0 \cup \{x\}$  es linealmente independiente; entonces  $\mathbf{B}_0 \cup \{x\} \in \mathcal{F}$  y  $\mathbf{B}_0 \subsetneq \mathbf{B}_0 \cup \{x\}$  lo que contradice el carácter maximal de  $\mathbf{B}_0$ . Por lo tanto,  $\mathbf{B}_0 \cup \{x\}$  es linealmente dependiente, es decir, existen escalares

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbf{K}$$

no todos nulos tales que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x = 0$$

Si  $\lambda_{n+1} = 0$ , entonces  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ , donde no todos los  $\lambda_i$  son nulos, esto implica que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es linealmente dependiente lo cual es una contradicción. Así  $\lambda_{n+1} \neq 0$  y  $x$  se puede escribir como

$$x = -\frac{\lambda_1 x_1}{\lambda_{n+1}} - \frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_{n+1}} - \dots - \frac{\lambda_n x_n}{\lambda_{n+1}},$$

con lo cual se prueba que se cumple la condición (2). Por lo tanto  $\mathbf{B}_0$  es una base para  $\mathbf{V}$ .

### 3.2.3. El Axioma de Elección en el Tercer Año de la Licenciatura en Matemática.

Proponemos que en Tercer Año de la Licenciatura en Matemática se aplique el Axioma de Elección, en su versión de la función selectora, y el Lema de Zorn, en las demostraciones de importantes teoremas en las asignaturas de Topología y Álgebra II. Con el objeto de ilustrar nuestra propuesta vamos a presentar las demostraciones de dos teoremas en esta dirección, además de los ejemplos que fueron presentados en el segundo capítulo.

**TEOREMA 3.2:** Si un espacio topológico es Contable II, entonces es separable.

**Demostración:**

Supongamos que  $(X, T)$  es un espacio topológico Contable II, entonces  $T$  posee una base enumerable  $B$ . Denotemos

$$B_* = B - \{ \emptyset \}$$

Luego  $B \neq \emptyset$ , para todo  $B \in B_*$ . Por el Axioma de Elección, existe una función

$$f: B_* \rightarrow X$$

tal que  $f(B) \in B$ , para todo  $B \in B_*$ . Tomemos el conjunto

$$A = \{ f(B) \mid B \in B_* \} \subset X$$

Como  $B^*$  es enumerable, entonces  $A$  es enumerable. Probemos que  $A$  es denso en  $X$ , es decir, que  $Cl(A) = X$ . Supongamos que  $X - Cl(A) \neq \emptyset$ , entonces existe  $\rho \in \{X - Cl(A)\}$ . Como  $X - Cl(A)$  es abierto, existe un  $B \in B^*$  tal que

$$\rho \in B \subset \{X - Cl(A)\}$$

Pero, por nuestra construcción,  $A$  contiene puntos de  $B$  y  $B \subset \{X - Cl(A)\}$ , lo cual es una contradicción. Así  $X - Cl(A) = \emptyset$ , de donde  $Cl(A) = X$ . Por lo tanto  $(X, T)$  es separable.

**TEOREMA 3.3:** En un anillo conmutativo con unidad, cada ideal propio está contenido en un ideal maximal.

**Demostración:**

Sea  $A$  un anillo conmutativo con unidad, e  $I$  un ideal propio de  $A$ . Definamos la siguiente familia

$$A = \{ J \mid I \subseteq J \text{ y } J \text{ es un ideal propio de } A \}$$

Evidentemente  $A$  es no vacío, ya que  $I \in A$ . Note que  $(A, \subseteq)$  es un conjunto parcialmente ordenado con la relación de inclusión. Probaremos que  $(A, \subseteq)$  satisface las condiciones del Corolario del Lema de Zorn. En efecto, sea  $C$  un subconjunto totalmente ordenado de  $A$  y sea  $H = \bigcup_{J \in C} J$ . Probaremos que  $H$  es un elemento de  $A$ , o sea que  $H$  es un ideal propio de  $A$  e  $I \subseteq H$ . Sea  $a, b \in H$ , entonces existen  $J_i, J_j \in C$  tal que  $a \in J_i, b \in J_j$ . Como  $C$  es totalmente

ordenado, entonces existe un  $J \in C$  tal que  $J_i \subset J$  y  $J \subset J_{i+1}$ . Como  $J$  es un ideal, se tiene que  $(a-b) \in J \subset H$ , así  $(a-b) \in H$ . Por otro lado, sean  $a \in H$  y  $r \in A$ , luego, existe un  $J \in C$  tal que  $a \in J$ . Como  $J$  es un ideal se tiene que  $ra$  y  $ar$  pertenecen a  $J$ . Luego  $ra \in H$  y  $ar \in H$ . Hemos probado de esta manera que  $H$  es un ideal de  $A$ . Ahora bien, como  $1 \notin J$ , para todo  $J \in C$ , se tiene que  $1 \notin H = \bigcup_{J \in C} J$ . Así pues,  $H$  es un ideal propio de  $A$  e  $I \subseteq H$ , lo que implica

$H \in A$

Por el Corolario del Lema de Zorn existe un elemento maximal  $I_0$  de  $(A, \subset)$ . Por la definición de  $A$  y por el carácter maximal de  $I_0$ , se tiene que si  $J$  es un ideal de  $A$  con  $I_0 \subsetneq J$ , entonces  $J = A$ , puesto que por el contrario se tendría que  $J \in A$  con  $I_0 \subsetneq J$ . Así pues  $I_0$  es un ideal maximal de  $A$ .

### 3.2.4. El Axioma de Elección en el Cuarto Año de la Licenciatura en Matemática.

Proponemos incluir en el programa de la asignatura de Lógica, Matemática 416, los objetivos y el contenido que seguidamente detallamos

#### Objetivos:

- 1 Analizar distintas formas del Axioma de Elección

- 2 Analizar proposiciones equivalentes al Axioma de Elección
- 3 Demostrar las equivalencias lógicas entre las proposiciones analizadas y el Axioma de Elección
- 4 Analizar ejemplos de aplicación del Axioma de Elección y de proposiciones equivalentes, en distintas ramas de la matemática

**Contenido:**

- Distintas formas del Axioma de Elección
  - Enunciado dado por Zermelo en 1904
  - La función selectora
  - Axioma Generalizado de Elección
  - Forma Multiplicativa del Axioma de Elección
- Proposiciones equivalentes al Axioma de Elección
  - El Postulado de Buena Ordenación
  - El Lema de Zorn
  - EL Lema de Tukey
  - El Principio de Maximalidad de Hausddorff
- Ejemplos de aplicación del Axioma de Elección y de proposiciones equivalentes

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

- El Axioma de Elección toma diversas formas, entre las cuales la que posee mayor claridad para su comprensión y más aplicaciones a nivel de pre-grado es la forma de la Función Selectora. Por lo tanto, recomendamos que en los estudios de Licenciatura en Matemática se le brinde especial atención a la referida versión del Axioma de Elección.
- EL Axioma de Elección tiene diversas proposiciones equivalentes, entre las cuales la que posee mayor claridad para su comprensión y más aplicaciones a nivel de pre-grado es el Lema de Zorn y su corolario. Por consiguiente, recomendamos que en los estudios de la Licenciatura en Matemática se le brinde especial atención a la referida proposición y su corolario.
- El empleo del Axioma de Elección en las demostraciones de teoremas hace a éstas mucho más claras y comprensibles, de modo que podemos lograr mayor firmeza en el convencimiento de quienes examinan la prueba. La grandeza de tal axioma es la manera en que se forma el conjunto no vacío al seleccionar un elemento de cada conjunto de una familia de conjuntos no vacíos. Por lo tanto, recomendamos que se utilice el Axioma de Elección en las demostraciones de teoremas a nivel de Licenciatura en Matemática.
- A raíz de la aparición del Axioma de Elección surgen varias proposiciones, que se han demostrado ser equivalentes con éste. Esta razón es una de las más importantes por las cuales le hemos dedicado este trabajo al Axioma de Elección y no a alguna de las otras proposiciones equivalentes. Además por

el mismo hecho es que decimos que las aplicaciones de las proposiciones equivalentes con el Axioma de Elección, son hereditarias para éste último

- No tenemos certeza de cual fue el primer matemático que empleo el Axioma de Elección, ni mucho menos la fecha en que fue utilizado por primera vez, pero si tenemos seguridad de que Ernest Zermelo fue el primer matemático en presentar un enunciado explícito de dicho Axioma y lo utilizó para probar que todo conjunto puede ser provisto de un buen orden, desde este momento, para el año de 1904, este Axioma llamó la atención de los grandes matemáticos de la época, y al transcurrir el tiempo ha ido cobrando mucha importancia con las apariciones de proposiciones equivalentes, tanto así que en la actualidad es objeto de profundas investigaciones. Es esta una de las razones fundamentales por las cuales hemos presentado una propuesta para la enseñanza del Axioma de Elección a nivel de Licenciatura en Matemática

## **BIBLIOGRAFÍA**

- 1 ASH, R A *Primer of Abstract Mathematics* The Mathematical Association of America Washington, D C 1998
- 2 BAUM, J *Elements of Point Set Topology* Dover Publications, Inc New York, 1991
- 3 BERGE, C *Topological Spaces* Dover Publications, Inc Mineola, New York 1997
- 4 BERNAYS, P *Axiomatic Set Theory* Dover Publications, Inc New York, 1991
- 5 BHATTACHARYA, P B , JAIN, S K , NAGPAUL, S R *Basic Abstract Algebra* Cambridge University Press New York, 1989
- 6 BOURBAKY, N *Elementos de Historia de la Matemática* Alianza Universitaria Madrid, 1973
- 7 BOURBAKY, N *General Topology Part 1* Addison – Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts 1966
- 8 BOURBAKY, N *General Topology Part 2* Addison – Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts 1966
- 9 BOURBAKY, N *Theory of Sets* Addison – Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts 1974
- 10 BOYER, C *Historia de la Matemática* Versión Española de Mariano Martínez P Alianza Universitaria Texto, 1994
- 11 BURTON, D M *Abstract Algebra* WM C Brown Publishers Dubuque, Iowa 1988
- 12 EVES, H *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* Dover Publication, Inc Mineola, New York 1997
- 13 FERNÁNDEZ, J *Topología General* Editorial Pueblo y Educación Cuba, 1977
- 14 GEMIGNANI, M *Elementary Topology* Dover Publications, Inc Second Edition New York, 1972

- 15 HALMOS, P , GIVANT, S *Logic as Algebra* The Mathematical Association of America Washington, D C 1998
- 16 HALMOS, P *Naive Set Theory* D Van Nostrand Company, Inc Princeton, New Jersey, 1964
- 17 HERSTEIN, I N *Topics in Algebra* John Wiley&Sons, Inc New York, 1975
- 18 KAMKE, E *Theory of Sets* Dover Publications, Inc New York, 1950
- 19 KELLEY, J L *General Topology* D Van Nostrand Company, Inc Princeton, New Jersey 1955
- 20 KLEENE, S *Introduction to Metamathematics* D Van Nostrand Company, Inc Princeton, New Jersey 1950
- 21 KLEENE, S *Mathematical, Logic* John Wiley&Sons, Inc New York, 1967
- 22 MARGARIS, A *First Order Mathematical Logic* Dover Publications, Inc New York, 1990
- 23 MARTÍNEZ, J *Aleph-Cero* Ediciones de la Guardia Nacional y de ECOMAT Panamá, 1977
- 24 MALITZ, J *Introduction to Mathematical Logic* Springer-Verlag New York 1979
- 25 Mc CARTY, G *Topology* Dover Publications, Inc New York, 1967
- 26 MENDELSON, B *Introduction to Topology* Dover Publications, Inc New York, 1975
- 27 MOORE, T *Elementary General Topology* Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, N J 1964
- 28 MORRIS, K *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días* Alianza Editorial, S A Madrid, 1992 Tomo I y II
- 29 ORTHON, A *Didácticas de las Matemáticas Cuestiones, Teoría y Práctica en el Aula* Madrid Ediciones Morata, 1996
- 30 OUBIÑA, L *Introducción a la Teoría de Conjuntos* Editorial Universitaria de Buenos Aires Séptima Edición, 1974

- 31 POLYA, G *Como Plantear y Resolver Problemas* Editorial Trillas México, 1990
- 32 REHERMANN, C *Matemática Básica Superior* Editorial Científico-Técnica Ciudad de la Habana 1985
- 33 RUBINSTEIN, S L *El Proceso del Pensamiento y las Leyes del Análisis y la Generalización* Ediciones Pueblos Unidos Uruguay, 1963
- 34 RUBIO, R *Introducción a la Teoría de Conjuntos y el Formalismo en la Matemática* Editorial Ciencia y Técnica Cuba, 1968
- 35 RUBIANO, G *Topología General* Universidad Nacional de Colombia Departamento de Matemática y Estadística 1997
- 36 SMULLYAN, R *First-Order Logic* Dover Publications, Inc New York, 1995
- 37 STOLL, R *Set Theory And Logic* Dover Publications, Inc New York, 1979
- 38 STROMBERG, K , HEWITT, E *Real and Abstract Analysis* Springer-Verlag New York 1965
- 39 SUPPES, P *Axiomatic Set Theory* D Van Nostrand Company, Inc Princeton, New Jersey 1967
- 40 TOMACHEWSKI, K *Didáctica General* Décima Edición Editorial Grijalbo México, 1966
- 41 VAN DALEN D , DOETS, H C , DE SWART H *Sets Naive, Axiomatic and Applied* Pergamon Press New York, 1978
- 42 WILLARD, S *General Topology* Addison-Wesley Publishing Company, Inc Reading, Massachusetts 1970